Федеральное агентство по образованию

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет “ЛЭТИ”

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Санкт-Петербург
2010

Федеральное агентство по образованию

Санкт-Петербургский государственный электротехнический
университет “ЛЭТИ”

Н. А. БОДУНОВ, С. Ю. ПИЛЮГИН

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство СПбГЭТУ “ЛЭТИ”
2010

УДК 517.9
ББК В161.61я
К60

Бодунов Н. А., Пилюгин С. Ю. Дифференциальные уравнения: Учеб.
К60 пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ "ЛЭТИ", 2010. 71 с.

ISBN 5-7629-0958-1

Излагаются основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений и примеры ее практического применения.

Предназначено для студентов нематематических специальностей.

УДК 517.9
ББК В161.61я

Рецензенты: кафедра высшей математики СПбГУТ; д-р физ.-мат. наук, проф. Я. И. Белопольская.

Утверждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

ISBN 5-7629-0958-1

ВВЕДЕНИЕ

Многие физические законы устанавливают связь между искомыми функциями и их производными. При этом появляются уравнения вида

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{0.1}$$

(F – заданная функция $n+2$ вещественных переменных, x – независимая переменная, y – искомая функция), которые называют обыкновенными дифференциальными уравнениями n-го порядка.

Замечание. Рассматривают и такие дифференциальные уравнения, в которых искомая функция зависит от нескольких вещественных переменных, а уравнения содержат частные производные этой функции. Подобного рода уравнения называют дифференциальными уравнениями в частных производных и обычно рассматривают в курсах математической физики. В этом пособии будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения и в дальнейшем слово "обыкновенные" будем опускать.

Решением дифференциального уравнения (0.1) называется n раз дифференцируемая функция $y(x)$, заданная на некотором интервале (α, β), которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество по x:

$$F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)) \equiv 0, \ x \in (\alpha, \beta).$$

График решения дифференциального уравнения называют интегральной кривой этого уравнения. Впрочем, позволим себе вольность называть иногда решение дифференциального уравнения интегральной кривой, а интегральную кривую – решением. Отметим еще, что процесс поиска решений дифференциального уравнения часто, следуя традиции, называют его интегрированием.

Уравнения

$$\begin{array}{cc} y''' + y' - y = \sin(x), & (y'')^2 - 1 = 0, \\ y'' - (y')^2 = 1, & y' = y \end{array}$$

могут служить примерами дифференциальных уравнений. Все они, очевидно, могут быть записаны в виде (0.1). Читатель без труда убедится, что функции $y = Ce^x$, $x \in \mathbb{R}$, C – произвольная постоянная, служат решениями последнего из этих уравнений.

Не претендуя на изложение всей современной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, ограничимся в дальнейшем рассмотрением случая, когда уравнение (0.1) может быть приведено к виду, разрешенному относительно старшей производной

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}). \tag{0.2}$$

Здесь f – заданная функция $n+1$ вещественных переменных. Изучение таких уравнений начнем с простейшего случая, когда $n = 1$.

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В этом разделе займемся изучением дифференциального уравнения вида
$$y' = f(x, y), \tag{1.1}$$
где $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – функция двух вещественных переменных, заданная и непрерывная на некотором множестве D.

Непрерывно дифференцируемая на некотором интервале (α, β) функция $y = y(x)$ является решением (интегральной кривой) уравнения (1.1), если для всех $x \in (\alpha, \beta)$ имеем: $(x, y(x)) \in D$ и
$$y'(x) = f(x, y(x)). \tag{1.2}$$
Из геометрического смысла производной и равенства (1.2) следует, что угловой коэффициент касательной к интегральной кривой в точке с абсциссой x равен $f(x, y(x))$. Если каждой точке (x, y) множества D сопоставить отрезок некоторой фиксированной длины с угловым коэффициентом $f(x, y)$, то получим так называемое поле направлений дифференциального уравнения (1.1).

Таким образом, всякая интегральная кривая уравнения (1.1) в каждой своей точке касается соответствующего отрезка поля направлений. Этот геометрический смысл дифференциального уравнения 1-го порядка часто позволяет, не находя решений, создать представление о них.

Пример. Рассмотрим уравнение $y' = y$. Как видно, угловой коэффициент отрезка поля направлений в точке (x, y) зависит только от ординаты y. Построим в различных точках плоскости отрезки с соответствующими углами к оси $0X$ (рис. 1.1).

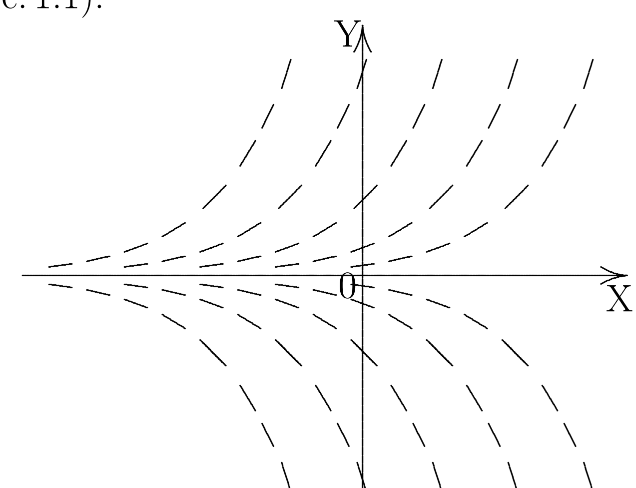

Рис. 1.1

Полученной картинки достаточно, чтобы надеяться на то, что интегральные кривые данного уравнения имеют примерный вид, изображенный на рис. 1.2.

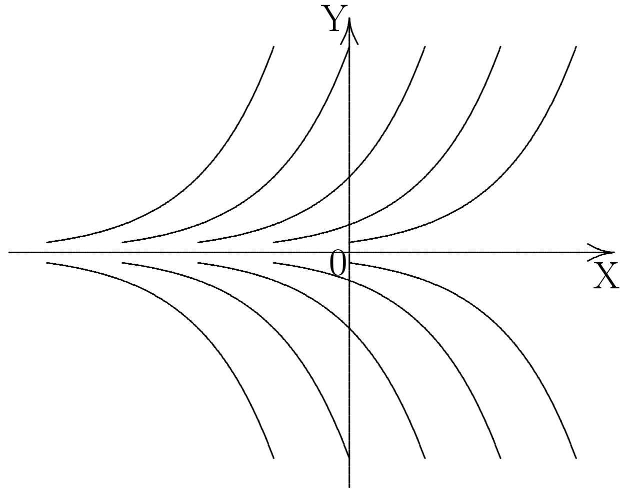

Рис. 1.2

Заметим, что для рассматриваемого уравнения на всех прямых $y = \mathrm{const}$ углы наклона отрезков поля направлений сохраняют постоянное значение, равное $\mathrm{arctg}(y)$.

Определение . *Множество точек D, для которых угол наклона отрезков поля направлений один и тот же, называется изоклиной дифференциального уравнения* (1.1) (*или его поля направлений*).

Таким образом, все прямые, параллельные оси абсцисс, служат изоклинами поля направлений уравнения $y' = y$.

Зная изоклины дифференциального уравнения, иногда бывает нетрудно нарисовать эскиз его интегральных кривых.

Замечание. Множество D плоскости $\mathbb{R}^2$ называется областью определения (задания) дифференциального уравнения (1.1). Если область D не указана, то считается, что она совпадает с "естественной" областью определения функции $f(x, y)$. Например, для уравнения

$$y' = xy$$

областью определения служит вся плоскость $\mathbb{R}^2$, а для уравнения

$$y' = \frac{\ln(y)}{x}$$

область определения задается условиями $x \neq 0$, $y > 0$, т. е. состоит из объединения двух множеств

$$D_1 = \{-\infty < x < 0,\ 0 < y < +\infty\},$$
$$D_2 = \{0 < x < +\infty,\ 0 < y < +\infty\}.$$

Поскольку интегральная кривая всегда задана на некотором интервале (α, β) вещественной оси, любая интегральная кривая последнего уравнения лежит либо в D_1, либо в D_2 ("перескочить" из D_1 в D_2, минуя прямую

$x = 0$, на которой уравнение не определено, интегральная кривая не может). Поэтому при изучении данного уравнения, вообще говоря, его следует рассматривать по отдельности в каждой из областей D_1, D_2. Это относится ко всем уравнениям с подобными "разрывными" областями определения.

Далее будем предполагать, что область определения D уравнения (1.1) является открытым прямоугольником $(a, b) \times (c, d)$ плоскости $\mathbb{R}^2$, т.е. множеством вида

$$D = \{a < x < b,\ c < y < d\}.$$

При этом a и c могут принимать значение $(-\infty)$, а b и d – $(+\infty)$ (как, например, в только что рассмотренном примере).

Одним из простейших типов дифференциальных уравнений 1-го порядка является уравнение

$$y' = f(x). \tag{1.3}$$

Из курса математического анализа следует, что решениями уравнения (1.3) служат все первообразные функции $f(x)$ и только они.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$y' = \cos(x).$$

Его решения есть $y(x) = \sin(x) + C$, C – любая постоянная.

Уже разобранные примеры показывают, что дифференциальное уравнение (1.1) имеет, вообще говоря, бесконечно много различных решений. Можно поставить задачу: найти все решения дифференциального уравнения, однако чаще из всего множества решений требуется найти одно, удовлетворяющее определенным условиям.

Зафиксируем в области D определения дифференциального уравнения (1.1) некоторую точку (x_0, y_0). Поставим задачу: найти такое решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения (1.1), для которого

$$y(x_0) = y_0. \tag{1.4}$$

Данную задачу называют задачей Коши для уравнения (1.1) с начальным условием (1.4). Таким образом, решению задачи Коши (1.1)–(1.4) (указываются дифференциальное уравнение и начальное условие) соответствует та интегральная кривая, которая проходит через точку (x_0, y_0) (рис. 1.3).

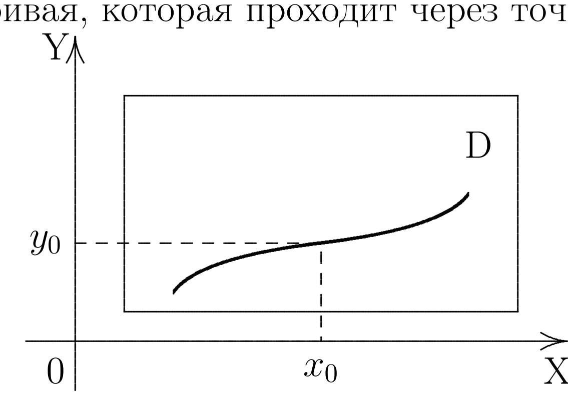

Рис. 1.3

Пример. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b) и $x_0 \in (a, b)$. Проверьте, что решением задачи Коши

$$\begin{cases} y' = f(x), \\ y(x_0) = y_0, \ y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

служит функция

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt, \ x \in (a, b).$$

Используя свойства первообразных непрерывной функции, докажите, что других решений эта задача Коши не имеет.

В разобранном примере задача Коши корректна, т. е. у нее есть решение и притом единственное. В теории дифференциальных уравнений корректность задачи Коши устанавливается с помощью специальных теорем. Сформулируем без доказательства одну из наиболее общих теорем этого класса.

Теорема 1.1 (существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка). *Пусть в области D непрерывны функции $f(x, y)$ и $f'_y(x, y)$. Тогда для любой точки $(x_0, y_0) \in D$ существует единственное решение $y = y(x)$ задачи Коши* (1.1)–(1.4), *заданное на некотором интервале* (α, β), *содержащем точку x_0.*

Теорема означает, что при выполнении ее условий через каждую точку области D проходит одна и только одна интегральная кривая дифференциального уравнения (1.1).

Заметим, что теорема 1.1 носит локальный характер, т. е. гарантирует существование решения лишь в некоторой окрестности точки x_0. Проблема оценки величины промежутка (α, β) существования решения достаточно сложна и выходит за рамки изучаемого курса. Важно, что промежуток этот в общем случае зависит от точки (x_0, y_0). Например, решением задачи Коши

$$\begin{cases} y' = y^2, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

является функция $y(x) = \dfrac{1}{1 - x}$, $x \in (-\infty, 1)$, а решением задачи Коши

$$\begin{cases} y' = y^2, \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

– функция $y(x) = -\dfrac{1}{1+x}$, $x \in (-1, +\infty)$ (проверьте!).

Проверка условий теоремы 1.1 в большинстве случаев достаточно проста, а сами условия существенны. Покажем, например, важность непрерывности функции $f'_y(x,y)$. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} y' = \sqrt[3]{y^2}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Здесь $f(x,y) = \sqrt[3]{y^2}$ непрерывна на всей плоскости, а для $f'_y(x,y) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{y}}$ непрерывность нарушается во всех точках вида $(x,0)$. Таким образом, в окрестности начальной точки $(0,0)$ условия теоремы 1.1 не выполняются. При этом поставленная задача Коши имеет два решения $y_1(x) \equiv 0$ и $y_2(x) = \dfrac{1}{27}x^3$ (нет единственности решения!).

Теорема 1.1 используется не только как обоснование корректности задачи Коши. Во многих случаях она может дать дополнительную информацию о свойствах решений дифференциальных уравнений. Например, рассмотрим уравнение

$$y' = \sin(y). \tag{1.5}$$

В данном случае функция $f(x,y) = \sin(y)$ и ее частная производная по y, равная $\cos(y)$, непрерывны в окрестности любой точки $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, т. е. через каждую точку плоскости проходит единственная интегральная кривая уравнения (1.5). Очевидно, что это уравнение имеет семейство решений $y(x) = k\pi$, $k \in Z$, которые разбивают всю плоскость на полосы шириной π, параллельные оси абсцисс. При этом, если начальная точка (x_0, y_0) принадлежит некоторой полосе, т. е. $k\pi < y_0 < (k+1)\pi$, то решение $y = y(x)$ задачи Коши

$$\begin{cases} y' = \sin(y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

остается в этой полосе при всех x, т. е. $k\pi < y(x) < (k+1)\pi$ (ни одну из прямых – решений $y(x) = k\pi$, $k \in Z$, никакая другая интегральная кривая пересечь не может). Таким образом, установлена ограниченность любого решения дифференциального уравнения (1.5). Кроме того, поскольку в каждой из указанных полос $\sin(y)$ сохраняет знак, любое решение уравнения (1.5), отличное от постоянной, является строго монотонной функцией.

Сформулированная теорема существования и единственности решения задачи Коши может быть доказана с помощью так называемого метода последовательных приближений. Идея его состоит в следующем.

Возьмем произвольную дифференцируемую функцию $y_1(x)$, удовлетворяющую условию $y_1(x_0) = y_0$, и решим задачу Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y_1(x)), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Как следует из разобранного ранее примера, ее решением служит функция

$$y_2(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\, dt.$$

После этого решается задача Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y_2(x)), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Ее решение обозначим $y_3(x)$ и т. д. На n-м шаге решается задача Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y_n(x)), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Таким образом, получается последовательность функций $\{y_1(x),\, y_2(x),\, \ldots,\, y_n(x), \ldots\}$. Доказывается, что в некотором интервале $|x - x_0| < h$ эта последовательность сходится к функции, являющейся решением задачи Коши (1.1)–(1.4), и что это решение задано и единственно на указанном интервале.

Пример. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Ее решением является функция $y(x) = e^x$. Применим описанный выше метод последовательных приближений. Пусть $y_1(x) \equiv 1$ (начальное условие $y(0) = 1$ удовлетворено). Решаем задачу Коши

$$\begin{cases} y' = 1, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Ее решение

$$y_2(x) = 1 + \int\limits_{0}^{x} 1\, dt = 1 + x.$$

Теперь решаем задачу Коши

$$\begin{cases} y' = 1 + x, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Ее решение

$$y_3(x) = 1 + \int\limits_0^x (1+t)\,dt = 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

После n-го шага получим

$$y_{n+1}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^x.$$

1.1. Уравнение с разделяющимися переменными

Уравнением с разделяющимися переменными называют дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$y' = p(x)q(y), \tag{1.6}$$

в котором функция $p(x)$ предполагается непрерывной на интервале (a, b), а $q(y)$ – непрерывно дифференцируемой на интервале (c, d). В прямоугольнике

$$D = \{(x, y) \,|\, a < x < b,\ c < y < d\}$$

для уравнения (1.6) выполнены все условия теоремы 1.1 и, следовательно, через каждую точку $(x_0, y_0) \in D$ проходит единственная интегральная кривая этого уравнения.

Нетрудно видеть, что если $q(y_0) = 0$, то решением уравнения (1.6) является функция

$$y(x) \equiv y_0,\ x \in (a, b). \tag{1.7}$$

Поэтому при поиске решений уравнения (1.6) прежде всего находят нули функции $q(y)$ и соответствующие им решения данного уравнения вида (1.7).

Например, такими решениями уравнения

$$y' = x\cos(y)$$

являются функции $y(x) \equiv \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, $x \in \mathbb{R}$.

Предположим теперь, что $q(y_0) \neq 0$, и рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} y' = p(x)q(y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.8}$$

(разумеется, $x_0 \in (a,b)$, $y_0 \in (c,d)$). Пусть $y = y(x)$, $x \in (\alpha, \beta)$ – решение этой задачи (его существование и единственность гарантируются теоремой 1.1), т. е.

$$y'(x) = p(x)q(y(x)). \tag{1.9}$$

Ясно, что при всех $x \in (\alpha, \beta)$ $q(y(x)) \neq 0$, ибо в противном случае рассматриваемое решение в некоторой точке совпало бы с решением вида (1.7), что невозможно в силу единственности. Поэтому (1.9) можно разделить на $q(y(x))$:

$$\frac{y'(x)}{q(y(x))} = p(x).$$

Из равенства функций следует равенство интегралов от них ($x \in (\alpha, \beta)$):

$$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{y'(x)\,dx}{q(y(x))} = \int\limits_{x_0}^{x} p(x)\,dx.$$

Производя в первом интеграле замену $y = y(x)$ с учетом $y(x_0) = y_0$, получаем

$$\int\limits_{y_0}^{y(x)} \frac{dy}{q(y)} = \int\limits_{x_0}^{x} p(x)\,dx. \tag{1.10}$$

Пусть $Q(y)$ – некоторая первообразная функции $\dfrac{1}{q(y)}$, а $P(x)$ – функции $p(x)$. Тогда (1.10) с учетом формулы Ньютона–Лейбница можно переписать в виде

$$Q(y(x)) - Q(y_0) = P(x) - P(x_0). \tag{1.11}$$

Поскольку $Q(y_0)$ и $P(x_0)$ – постоянные, из (1.11) следует, что решение любой задачи Коши (1.8) при $q(y_0) \neq 0$ должно удовлетворять уравнению

$$Q(y) = P(x) + C, \tag{1.12}$$

где C – некоторая постоянная. Уравнение (1.12) задает решения уравнения (1.6) неявно. Желательно искомую переменную y выразить через x, что, вообще говоря, не всегда возможно. Вспоминая, что Q и P – это первообразные функций $\dfrac{1}{q}$ и p, можем понять, почему иногда (1.12) записывают в виде

$$\int \frac{dy}{q(y)} = \int p(x)\,dx. \tag{1.13}$$

Заметим, что иногда и решения $y(x) \equiv y_0$, $q(y_0) = 0$ также содержатся в формуле (1.12) при некоторых значениях C.

Пример.

$$y' = \frac{xy^2}{x^2+1}.$$

В наших обозначениях $p(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, $q(y) = y^2$, $D = \mathbb{R}^2$. Функция $q(y)$ имеет единственный нуль $y = 0$ и, следовательно, данное уравнение имеет единственное решение вида (1.7), а именно

$$y(x) \equiv 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

Теперь найдем остальные решения этого уравнения. Записывая для него (1.13):

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{x\,dx}{x^2+1}$$

и находя первообразные подынтегральных функций, получаем уравнение вида (1.12):

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C,$$

или

$$y = -\frac{1}{C + \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)}.$$

Таким образом, решениями данного уравнения являются функции

$$y(x) \equiv 0,\ x \in \mathbb{R},$$

и

$$y(x) = -\frac{1}{C + \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)}, \tag{1.14}$$

где C – произвольная постоянная.

Заметим, что интервал (α, β) задания любого решения из найденного семейства зависит от C и может быть определен только по начальным условиям для этого решения.

Рассмотрим, например, решение данного уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$. Подставляя это условие в (1.14), находим:

$$y(0) = \frac{-1}{C} = 1,$$

т. е. $C = -1$. Следовательно, искомое решение определяется функцией

$$y(x) = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)},$$

которая задана, вообще говоря, в трех интервалах (из $\mathbb{R}$ исключаются нули знаменателя):

$$I_1 = \left(-\infty, -\sqrt{e^2-1}\right);$$
$$I_2 = \left(-\sqrt{e^2-1}, \sqrt{e^2-1}\right);$$
$$I_3 = \left(\sqrt{e^2-1}, +\infty\right).$$

Поскольку любое решение дифференциального уравнения по определению задано на некотором интервале числовой оси, из трех интервалов I_1, I_2, I_3 выбирается тот, которому принадлежит $x_0 = 0$ из начального условия, т. е. I_2. Итак, установлено, что решением задачи Коши

$$\begin{cases} y' = \dfrac{xy^2}{x^2+1}, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

является функция

$$y(x) = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)}, \; x \in \left(-\sqrt{e^2-1}, \sqrt{e^2-1}\right).$$

Рассмотрим еще один пример, относящийся к электротехнике, а именно, процесс исчезновения тока при размыкании цепи, изображенной на рис. 1.4 (ключ K при этом переводится из положения 1 в положение 2).

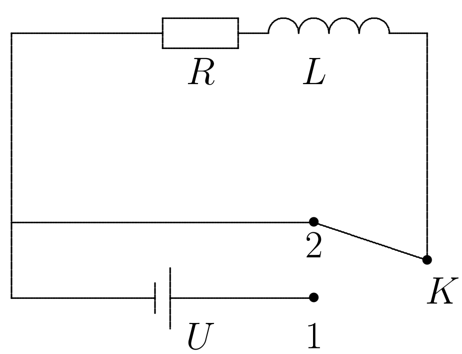

Рис. 1.4

Размыкание цепи приводит к уменьшению силы тока и, следовательно, к возникновению ЭДС самоиндукции U_L в катушке индуктивности L. Будем считать, что мгновенные значения силы тока на всех участках цепи одинаковы и подчиняются законам постоянного тока. В этом случае сила тока J может быть найдена из закона Ома:

$$JR = U_L = -L\frac{dJ}{dt}.$$

Считая, что в момент размыкания сила тока равнялась J_0, приходим к следующей задаче Коши

$$\begin{cases} -L\dfrac{dJ}{dt} = JR, \\ J(0) = J_0. \end{cases}$$

Для ее решения воспользуемся формулой (1.10):

$$\int\limits_{J_0}^{J(t)} \frac{dJ}{J} = -\int\limits_0^t \frac{R}{L}\,dt.$$

Отсюда

$$\ln(J(t)) - \ln(J_0) = -\frac{R}{L}\,t$$

и, следовательно,

$$J(t) = J_0 \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}.$$

Это так называемый "экстраток размыкания" (ток, проходящий в цепи, когда в ней снято напряжение, т. е. под действием одной лишь электродвижущей силы самоиндукции). С возрастанием t он стремится к нулю (рис. 1.5).

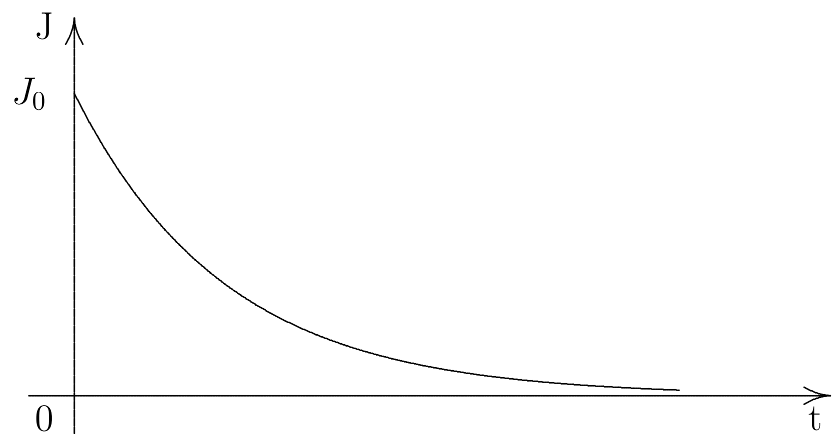

Рис. 1.5

Замечание. При решении дифференциальных уравнений бывает удобно записывать произвольную постоянную, принимающую все действительные значения, в виде некоторой функции $g(C)$, $C \in (a_1, a_2)$, множество значений которой на интервале (a_1, a_2) совпадает с множеством $\mathbb{R}$. В качестве такой функции можно взять, например, $\ln(C)$, $C \in (0, +\infty)$ или $\mathrm{tg}(C)$, $C \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, либо другую с указанием соответствующего интервала.

Пример. Найти кривые $y = y(x)$, для которых отрезок касательной, лежащий между осями координат, делится в точке касания пополам (рис. 1.6).

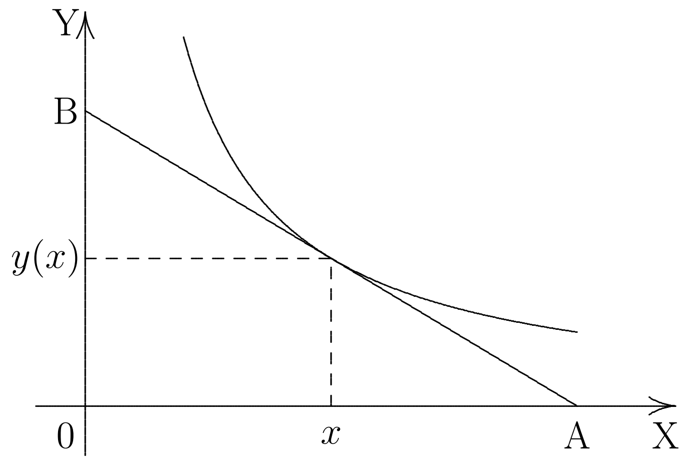

Рис. 1.6

Уравнение касательной к кривой $y = y(x)$ (в точке $(x, y(x))$), как известно, имеет вид

$$Y - y(x) = y'(x)(X - x).$$

По условию задачи касательная проходит через точку $A(2x, 0)$. Подставляя ее координаты в уравнение касательной (вместо X, Y), получим

$$0 - y(x) = y'(x)(2x - x),$$

или

$$-y(x) = xy'(x).$$

Таким образом, искомая кривая является интегральной кривой дифференциального уравнения

$$-y = xy',$$

которое перепишем в виде

$$y' = -\frac{y}{x}.$$

Оно задано на всей плоскости, кроме прямой $x = 0$. Поэтому для его любого решения $y = y(x)$ либо $x < 0$, либо $x > 0$. Это уравнение (с разделяющимися переменными) имеет очевидное решение $y(x) \equiv 0$, которое однако не является решением поставленной задачи. Поэтому для искомой кривой $y(x) \neq 0$, т. е. либо $y(x) > 0$, либо $y(x) < 0$. Считая $y(x) \neq 0$, разделяем переменные (записываем уравнение (1.13)):

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$$

и переходим к равенству соответствующих первообразных (т. е. к уравнению (1.12)), беря в качестве произвольной постоянной $\ln(C)$, $C > 0$:

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln(C).$$

Отсюда

$$|y| = \frac{C}{|x|}, \quad C > 0.$$

Это равенство можно переписать в виде, не содержащем знаков абсолютной величины

$$y = \frac{C}{x},$$

$C \neq 0$ – произвольная постоянная. Таким образом, искомыми кривыми являются ветви гипербол $xy = C$, $C \neq 0$.

К уравнению с разделяющимися переменными приводится так называемое однородное уравнение – уравнение вида

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \quad x \neq 0. \tag{1.15}$$

Уравнение (1.1) будет однородным, если функция $f(x, y)$ является однородной, т. е. удовлетворяет условию $f(kx, ky) = f(x, y)$, $k \neq 0$ – произвольное число. Действительно, полагая $k = \dfrac{1}{x}$, получим

$$f(x, y) = f\left(\frac{1}{x}\,x, \frac{1}{x}\,y\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Обозначая $f\left(1, \dfrac{y}{x}\right) = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, приходим к уравнению (1.15).

Здесь мы используем новый прием – замену переменных. Введем новую переменную $u = \dfrac{y}{x}$. Это означает, что вместо функции $y(x)$ мы ищем функцию $u(x)$, такую, что $u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$. Для того, чтобы найти новое дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $u(x)$, используем соотношения

$$y(x) = xu(x), \quad y'(x) = u(x) + xu'(x).$$

Отсюда получаем

$$u'x + u = \varphi(u),$$

или

$$u' = \frac{\varphi(u) - u}{x}. \tag{1.16}$$

Уравнение (1.16) – уравнение с разделяющимися переменными. Если $u = u(x)$ – его решение, то $y = xu(x)$ – решение исходного уравнения (1.15) (заданное на некотором интервале (α, β) отрицательной или положительной полуосей).

Упражнение. Найти все решения уравнения

$$y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2} \quad \left(y' = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x} \right)^2 \right)$$

и решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0$.

Ответ: $y = x \operatorname{tg}(\ln(C|x|))$, $C > 0$; $y = x \operatorname{tg}(\ln(x))$, $e^{-\frac{\pi}{2}} < x < e^{\frac{\pi}{2}}$.

1.2. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называют дифференциальное уравнение вида

$$a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0, \tag{1.17}$$

в котором функции $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ (коэффициенты уравнения) предполагаются непрерывными в некотором интервале (a, b). Считая, что $a(x) \neq 0$ при $x \in (a, b)$, делим уравнение (1.17) на эту функцию и, полагая $\frac{b(x)}{a(x)} = p(x)$, $-\frac{c(x)}{a(x)} = q(x)$, получаем линейное уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x). \tag{1.18}$$

Назовем $p(x)$ коэффициентом уравнения (1.18), а $q(x)$ – его свободным членом. Если $q(x) \equiv 0$, то уравнение (1.18) называют однородным, в противном случае – неоднородным.

Функции $p(x)$ и $q(x)$ непрерывны в интервале (a, b). Поэтому в области $D = \{a < x < b, \ -\infty < y < +\infty\}$ для уравнения (1.18) выполнены все условия теоремы 1.1 существования и единственности решений (функции $f(x, y) = -p(x)y + q(x)$ и $f'_y(x, y) = -p(x)$ непрерывны в D). Следовательно, любая задача Коши с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0, \quad x_0 \in (a, b), \quad y_0 \in \mathbb{R}, \tag{1.19}$$

имеет для уравнения (1.18) единственное решение. Разумеется, то же относится и к соответствующему однородному уравнению:

$$y' + p(x)y = 0. \tag{1.20}$$

Замечание. Уравнение (1.20) имеет нулевое решение $y(x) \equiv 0$, $x \in (a, b)$. Любое другое решение в силу единственности не имеет с ним общих точек, т. е. не обращается в нуль ни при каких x, а следовательно, сохраняет знак на всем промежутке своего задания.

Найдем для (1.20) решение задачи Коши с начальными условиями (1.19). Уравнение (1.20) является уравнением с разделяющимися переменными. Если $y_0 = 0$, то в силу единственности $y(x) \equiv 0$, $x \in (a, b)$. Если $y_0 \neq 0$, то в силу сделанного замечания $y(x) \neq 0$, причем $\operatorname{sign}(y(x)) = \operatorname{sign}(y_0)$. Искомое решение в этом случае, согласно (1.10) удовлетворяет уравнению

$$\int\limits_{y_0}^{y(x)} \frac{dy}{y} = \int\limits_{x_0}^{x} (-p(x))\, dx,$$

откуда

$$\ln|y|\Big|_{y_0}^{y(x)} = -\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\, dx$$

или

$$\ln\left|\frac{y(x)}{y_0}\right| = -\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\, dx. \tag{1.21}$$

Убирая в (1.21) знак модуля ($\operatorname{sign}(y(x)) = \operatorname{sign}(y_0)$), получаем

$$y(x) = y_0 e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\, dx}. \tag{1.22}$$

Функция, определенная (1.22), решает задачу Коши (1.20)–(1.19) и задана на всем (a, b). Заметим, что полученная формула (1.22) содержит и нулевое решение уравнения (1.20) (если $y_0 = 0$ то $y(x) = 0$ для всех $x \in (a, b)$). Итак, решение любой задачи Коши (1.20)–(1.19), т. е. любое решение уравнения (1.20), имеет вид (1.22) и определено на всем интервале (a, b). Фиксируя $x_0 \in (a, b)$ и меняя y_0 в (1.22) от $-\infty$ до $+\infty$, получаем все решения уравнения (1.20).

Обозначим через $P(x)$ какую-нибудь первообразную функции $p(x)$. Тогда (1.22) с учетом формулы Ньютона–Лейбница можно записать в виде

$$y(x) = y_0 e^{P(x_0) - P(x)} = y_0 e^{P(x_0)} e^{-P(x)}$$

или

$$y(x) = Ce^{-P(x)} \tag{1.23}$$

($C = y_0 e^{P(x_0)}$ может принимать любые значения, поскольку $y_0 \in \mathbb{R}$).

Итак, все решения уравнения (1.20) заданы на (a, b) и представимы формулой (1.23), где C – произвольная постоянная, $P'(x) = p(x)$. Иногда, следуя традиции, формулу (1.23) записывают в виде

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)\, dx}. \tag{1.24}$$

Все формулы (1.22), (1.23), (1.24) называют формулами общего решения линейного однородного уравнения (1.20). При этом формула (1.22) предпочтительней, так как она не только содержит все решения уравнения (1.20), но и дает в явном виде решение задачи Коши (1.20)–(1.19).

Перейдем теперь к неоднородному уравнению (1.18). Будем искать решение этого уравнения в виде

$$y(x) = u(x)e^{-P(x)}, \tag{1.25}$$

т. е. в виде (1.23), где произвольная постоянная C заменена на неизвестную функцию $u(x)$ – вот почему такой метод поиска решения линейного неоднородного уравнения называется методом вариации произвольной постоянной (методом Лагранжа). Дифференцируя (1.25) и подставляя в (1.18), получим

$$u'(x)e^{-P(x)} - p(x)u(x)e^{-P(x)} + p(x)u(x)e^{-P(x)} = q(x),$$

откуда

$$u'(x) = q(x)e^{P(x)}. \tag{1.26}$$

Обозначим через $Q(x)$ какую-нибудь первообразную функции $q(x)e^{P(x)}$, например,

$$Q(x) = \int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,dt, \tag{1.27}$$

где x_0 – произвольная точка из (a,b); $Q(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция на (a,b). Из (1.26) следует, что $u(x) = Q(x)+C$, C – некоторая постоянная. Подставляя найденное выражение для $u(x)$ в (1.25), окончательно получим

$$y(x) = e^{-P(x)}[C + Q(x)]. \tag{1.28}$$

Если первообразные $P(x)$ и $Q(x)$ записать в виде соответствующих неопределенных интегралов, то (1.28) примет вид

$$y(x) = e^{-\int p(x)\,dx}\left[C + \int q(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx\right]. \tag{1.29}$$

Если же в (1.28) подставить $P(x) = \int\limits_{x_0}^{x} p(\tau)\,d\tau$ и $Q(x)$ в виде (1.27), то получим следующее наиболее полезное выражение

$$y(x) = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(\tau)\,d\tau}\left[C + \int_{x_0}^{x} g(t)e^{\int\limits_{x_0}^{t} p(\tau)\,d\tau}\,dt\right]. \tag{1.30}$$

Итак, формулы (1.28), (1.29), (1.30) дают при всех $C \in \mathbb{R}$ решения уравнения (1.18), определенные на всем интервале (a, b) (проверяется подстановкой функции $y(x)$ в уравнение (1.18)). Покажем, что выбором C можно решить с помощью формулы (1.30) любую задачу Коши (1.18)–(1.19). Заметим, что из (1.30) $y(x_0) = C$. Поэтому достаточно подставить в (1.30) $C = y_0$ и решение задачи Коши (1.18)–(1.19) примет вид

$$y(x) = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(\tau)\,d\tau} \left[y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} q(t) e^{\int\limits_{x_0}^{t} p(\tau)\,d\tau} dt \right]. \tag{1.31}$$

Таким образом, формула (1.30) (или (1.31)) дает при любом $C \in \mathbb{R}$ (или $y_0 \in \mathbb{R}$) решение уравнения (1.18), заданное на всем (a, b). С другой стороны, любое решение уравнения (1.18) может рассматриваться как решение некоторой задачи Коши и в силу этого содержится в формуле (1.31) (или (1.30) при $C = y_0$). Поэтому запись решений уравнения (1.18) в виде (1.30) или (1.31) называют его общим решением. Решение же конкретной задачи Коши (т. е. соответствующее какому-то фиксированному значению C или y_0) называют его частным решением. Сравнивая (1.31) с (1.22) (или (1.29) с (1.24)), можем заключить, что общее решение линейного неоднородного уравнения (1.18) равно сумме общего решения соответствующего линейного однородного уравнения (1.20) и некоторого частного решения этого уравнения (получающегося из (1.31) при $y_0 = 0$ или из (1.29) при $C = 0$).

Пример. Найдем закон изменения тока в цепи (рис. 1.4) при переводе ключа K из положения 2 в положение 1 (считаем, что это происходит в момент времени $t = 0$, а начальное значение тока $J(t)$ в этой цепи равно нулю).

По второму закону Кирхгофа сумма падений напряжения в замкнутом контуре равна сумме электродвижущих сил

$$U = U_R + U_L,$$

где

$$U_R = RJ, \quad U_L = LJ'.$$

Следовательно, для тока J получаем дифференциальное уравнение

$$LJ' + RJ = U$$

или

$$J' + \frac{R}{L} J = \frac{U}{L}. \tag{1.32}$$

Таким образом, получили линейное неоднородное уравнение вида (1.18), в котором t – независимая переменная, $p(t) = \dfrac{R}{L}$, $q(t) = \dfrac{U}{L}$. Для уравнения (1.32) решаем начальную задачу $J(0) = 0$. С учетом формулы (1.31) получаем

$$J(t) = e^{-\int\limits_0^t \frac{R}{L}\,d\tau} \int\limits_0^t \frac{U}{L}\, e^{\int\limits_0^\tau \frac{R}{L}\,d\tau}\, d\tau = e^{-\frac{R}{L}t} \int\limits_0^t \frac{U}{L}\, e^{\frac{R}{L}\tau}\, d\tau =$$

$$= \frac{U}{L}\, e^{-\frac{R}{L}t} \frac{L}{R} \left(e^{\frac{R}{L}\tau} \Big|_0^t \right) = \frac{U}{R}\, e^{-\frac{R}{L}t} \left(e^{\frac{R}{L}t} - 1 \right) = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

Это так называемый "экстраток замыкания". С возрастанием t он стремится к величине $\dfrac{U}{R}$ (рис. 1.7).

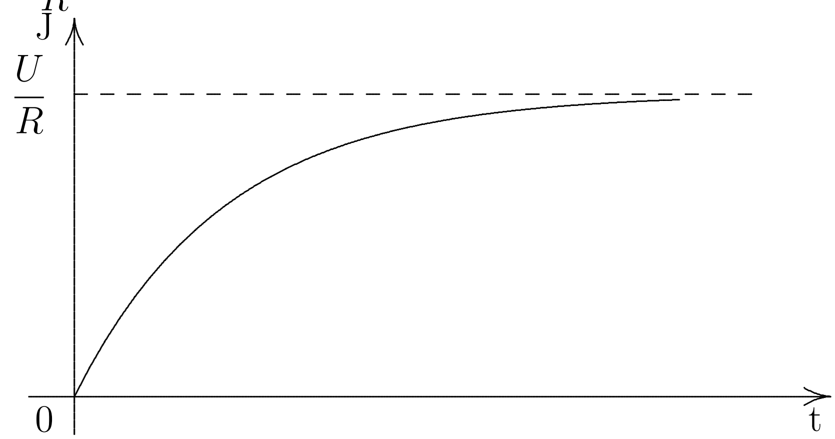

Рис. 1.7

К линейному дифференциальному уравнению приводится уравнение Бернулли – уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^m,$$

где $q(x) \not\equiv 0$, $m \neq 0$, $m \neq 1$ (при $m = 0$ получаем линейное неоднородное уравнение, а при $m = 1$ – линейное однородное).

Упражнение. Показать, что с помощью замены переменной $u = y^{1-m}$ уравнение Бернулли приводится к линейному уравнению.

1.3. Численное решение задачи Коши методом Эйлера

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{1.33}$$

Ее решение (предполагается, что оно существует и единственно) далеко не всегда удается найти в явном виде. Следует отметить, что на практике в основном и не требуется точное решение, а допускается некоторая погрешность. Кроме того, иногда и само дифференциальное уравнение (функция $f(x,y)$) известно лишь с некоторой точностью.

Эйлер предложил замену точного решения (точнее, его интегральной кривой) некоторой ломаной линией. Для этого промежуток $[x_0, X]$, на котором ищется решение задачи (1.33), делится на n равных частей точками $x_0, x_1, ..., x_n = X$. На отрезке $[x_0, x_1]$ в качестве приближенного значения производной искомой функции $y'(x)$ берется ее значение в точке x_0:

$$y'(x) \approx y'(x_0) = f(x_0, y_0).$$

Тогда для всех $x \in [x_0, x_1]$

$$y(x) - y(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} y'(x)\,dx \approx \int\limits_{x_0}^{x} f(x_0, y_0)\,dx = f(x_0, y_0)(x - x_0)$$

или

$$y(x) \approx y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0), \tag{1.34}$$

в частности

$$y(x_1) \approx y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) = y_0 + f(x_0, y_0)h = y_1$$

(здесь $h = x_1 - x_0 = \dfrac{X - x_0}{n}$ – шаг приближенного метода). Заметим, что если в (1.34) поставить знак точного равенства, то получим уравнение касательной к искомой интегральной кривой в точке (x_0, y_0). Часть этой касательной, а именно, отрезок с концами в точках (x_0, y_0), (x_1, y_1), можно рассматривать как отрезок поля направлений, определяемого уравнением $y' = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0).

На отрезке $[x_1, x_2]$ производная $y'(x)$ заменяется на $f(x_1, y_1)$ и тогда для всех $x \in [x_1, x_2]$

$$y(x) - y(x_1) = \int\limits_{x_1}^{x} y'(x)\,dx \approx \int\limits_{x_1}^{x} f(x_1, y_1)\,dx = f(x_1, y_1)(x - x_1).$$

При $x = x_2$ имеем

$$y(x_2) \approx y(x_1) + f(x_1, y_1)h \approx y_1 + f(x_1, y_1)h = y_2.$$

В результате на этом этапе мы получаем точку (x_2, y_2), причем отрезок с концами в точках (x_1, y_1) и (x_2, y_2) вновь представляет поле направлений уравнения $y' = f(x, y)$, но теперь в точке (x_1, y_1). Продолжая этот процесс, получим набор точек (x_k, y_k), $k = 0, 1, ..., n$, где

$$y_k = y_{k-1} + f(x_{k-1}, y_{k-1})h. \tag{1.35}$$

Каждый отрезок, соединяющий точки (x_{k-1}, y_{k-1}) и (x_k, y_k), совпадает с отрезком поля направлений рассматриваемого дифференциального уравнения в точке (x_{k-1}, y_{k-1}). Ломаная, составленная из этих отрезков (ломаная Эйлера), и служит приближением искомой интегральной кривой (рис. 1.8), а числа $y_0, y_1, ..., y_n$ служат приближенными значениями искомого решения в точках $x_0, x_1, ..., x_n$.

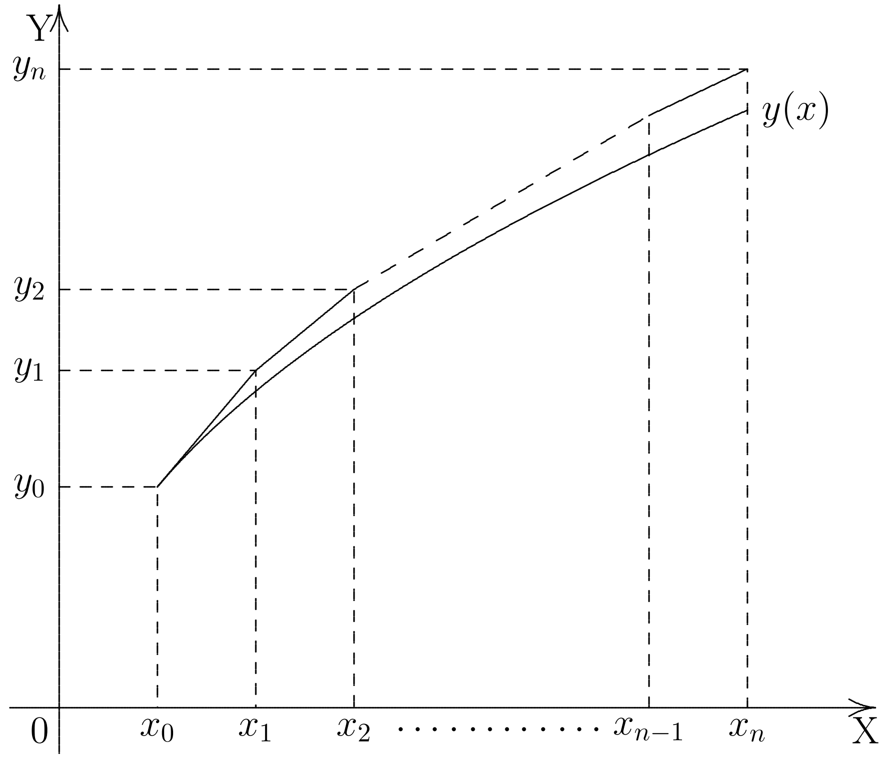

Рис. 1.8

Замечание. Для последовательных вычислений по формуле (1.35) необходимо, разумеется, чтобы каждая новая точка (x_k, y_k) лежала в области определения функции $f(x, y)$. Можно показать, что в случае малого h (или большого n) это всегда выполняется, если только решение задачи (1.33) существует и единственно.

Оценка погрешности метода Эйлера и достижение требуемой точности производится способом последовательного деления пополам шага h. Для этого вычисляют приближенные значения решения с некоторым шагом $h_1 = \dfrac{X - x_0}{n}$, затем повторяют процесс вычислений с шагом $h_2 = \dfrac{X - x_0}{2n} = \dfrac{h_1}{2}$ и т. д. до совпадения приближенных значений решения в нужном числе значащих цифр.

Пример. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} y' = xy, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Требуется найти приближенное значение решения на отрезке $[0; 0.3]$. Возьмем $h_1 = 0.1$. Все вычисления по формуле (1.35) занесем в таблицу 1.1 ($f(x, y) = xy$, вычисления проводит с четырьмя знаками после точки).

Таблица 1.1

k	x_k	y_k	$x_k y_k$	$h_1 x_k y_k$	$y_k + h_1 x_k y_k$
0	0	1	0	0	1
1	0.1	1.000	0.1	0.01	1.01
2	0.2	1.01	0.202	0.0202	1.0302
3	0.3	1.0302	–	–	–

Возьмем теперь $h_2 = 0.05$. Получаем новую таблицу 1.2.

Таблица 1.2

k	x_k	y_k	$x_k y_k$	$h_2 x_k y_k$	$y_k + h_2 x_k y_k$
0	0	1	0	0	0
1	0.05	1	0.05	0.0025	1.0025
2	0.1	1.0025	0.1003	0.005	1.0075
3	0.15	1.0075	0.1511	0.0076	1.0151
4	0.2	1.0151	0.2030	0.0106	1.0257
5	0.25	1.0257	0.2564	0.0128	1.0385
6	0.3	1.0385	–	–	–

Убеждаемся, что найденные приближенные значения решения с шагами h_1 и h_2 в общих точках 0.1, 0.2 и 0.3 совпадают с тремя значащими цифрами.

Для рассмотренной задачи Коши известно точное решение

$$y = e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Вычислим его значение в крайней точке заданного отрезка:

$$y(0.3) = e^{\frac{0.09}{2}} = e^{0.045} = 1.046027...$$

Как видно, ошибка (абсолютная погрешность) наших "ручных" приближенных вычислений с шагом h_2 менее 0.01. Теоретически, уменьшая шаг h, можно добиться любой наперед заданной точности вычислений.

2. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (НОРМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ)

Нормальной системой дифференциальных уравнений называется система вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, ..., y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, .., y_n), \end{cases} \tag{2.1}$$

где y_1, ..., y_n – искомые функции независимой переменной x. Будем предполагать, что функции f_1, ..., f_n, стоящие в правых частях уравнений системы (2.1), заданы в некоторой области D $(n+1)$-мерного пространства переменных x, y_1, ..., y_n. Упрощая изложение и несколько ограничивая общность, будем считать, что область D задается неравенствами

$$\begin{array}{l} a_0 < x < b_0, \\ a_1 < y_1 < b_1, \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_n < y_n < b_n. \end{array}$$

$(D = (a_0, b_0) \times (a_1, b_1) \times ... \times (a_n, b_n))$, где $-\infty \le a_i < b_i \le +\infty$ для всех $i = 0, 1, ..., n$.

Решением системы (2.1) на промежутке $(a, b) \subset (a_0, b_0)$ называется набор n функций $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$, определенных и дифференцируемых на (a, b), обладающих свойством

$$(x, y_1(x), ..., y_n(x)) \in D \text{ при } x \in (a, b),$$

и обращающих все уравнения (2.1) в тождества для $x \in (a, b)$.

Геометрически решение системы (2.1) представляет собой кривую в $(n+1)$-мерном пространстве переменных $(x, y_1, ..., y_n)$. Эта кривая называется интегральной кривой системы (2.1).

Рассмотрим, например, систему

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 3\sqrt[3]{y_1}\, y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = \dfrac{y_1}{x^3}. \end{cases}$$

В правых частях уравнений системы стоят функции

$$f_1(x, y_1, y_2) = 3\sqrt[3]{y_1}\, y_2, \quad f_2(x, y_1, y_2) = \frac{y_1}{x^3},$$

определенные в области D, задаваемой неравенствами

$$0 < x < +\infty, \quad -\infty < y_1 < +\infty, \quad -\infty < y_2 < +\infty$$

(можно рассматривать систему и в области $\tilde{D}$, заданной неравенствами $-\infty < x < 0$, $-\infty < y_1 < +\infty$, $-\infty < y_2 < +\infty$). Нетрудно убедиться, что решением этой системы является, например, пара функций $y_1(x) = x^3$, $y_2(x) = x$ при $0 < x < +\infty$.

Для удобства будем записывать систему (2.1) в векторном виде. Рассмотрим вектор

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Напомним, что его производной служит вектор

$$\frac{dY}{dx} = \begin{bmatrix} \dfrac{dy_1}{dx} \\ \cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим, кроме того, вектор-функцию

$$F(x, Y) = \begin{bmatrix} f_1(x, Y) \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x, Y) \end{bmatrix},$$

определенную в D. Ясно, что система равенств (2.1) равносильна одному векторному равенству

$$\frac{dY}{dx} = F(x, Y), \tag{2.2}$$

которое и будем называть векторной формой записи нормальной системы дифференциальных уравнений. Решением системы (2.2) на (a, b) является вектор-функция

$$Y(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ \dots\dots \\ y_n(x) \end{bmatrix},$$

компоненты которой – функции набора $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$, служащие решением системы (2.1).

Как и в случае дифференциального уравнения первого порядка, система (2.2) имеет обычно бесконечное множество решений.

Для выделения из этого множества одного решения ставится задача Коши: фиксируется точка $(x_0, Y_0) \in D$, и ищется решение $Y(x)$ на промежутке (a, b), содержащем точку x_0, и такое, что

$$Y(x_0) = Y_0. \tag{2.3}$$

Геометрически это означает, что ищем интегральную кривую, проходящую через точку (x_0, Y_0).

Если

$$Y_0 = \begin{bmatrix} y_{10} \\ \dots \\ y_{n0} \end{bmatrix},$$

то нахождению решения $Y(x)$ задачи Коши (2.2)–(2.3) соответствует нахождение решения $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ системы (2.1), обладающего свойством

$$y_1(x_0) = y_{10}, \dots, y_n(x_0) = y_{n0}.$$

Определим матрицу Якоби (матрицу частных производных) вектор-функции F по переменной Y:

$$\frac{\partial F}{\partial Y} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdots \dfrac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial y_1} \cdots \dfrac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{bmatrix}.$$

Будем говорить, что вектор-функция или матрица непрерывны, если непрерывны все их компоненты.

Сформулируем теорему, дающую достаточные условия существования и единственности решения задачи (2.2)–(2.3).

Теорема 2.1. *Если вектор-функция F и матрица $\dfrac{\partial F}{\partial Y}$ непрерывны в области D, то для любой точки $(x_0, Y_0) \in D$ существует единственное решение $Y = Y(x)$ задачи Коши* (2.2)–(2.3)*, заданное на некотором интервале (a, b), содержащем точку x_0.*

Эта теорема означает, что при указанных условиях через каждую точку области D проходит интегральная кривая и притом единственная. Отметим, что, вообще говоря, интервалы определения решений различных задач Коши для системы (2.2) различны.

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение порядка n, разрешенное относительно старшей производной

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{2.4}$$

(о таких уравнениях уже упоминалось во введении (см. (0.2)).

Будем предполагать, что функция f определена и непрерывна в области D $(n+1)$-мерного пространства своих агрументов.

В качестве примера рассмотрим уравнение третьего порядка

$$y''' = x^2 + y''(1 + \ln(y')).$$

Функция, стоящая в правой части, определена и непрерывна в области D пространства переменных x, y, y', y'', задаваемой неравенствами

$$-\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty, \quad 0 < y' < +\infty, \quad -\infty < y'' < +\infty.$$

Решением уравнения (2.4) на промежутке (a, b) будем называть функцию $y(x)$, имеющую все производные до порядка n на (a, b), такую, что

$$(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x)) \in D \quad \text{при} \quad x \in (a, b),$$

и обращающую уравнение (2.4) в верное тождество на (a, b).

Вместе с уравнением (2.4) будем рассматривать нормальную систему с неизвестными функциями z_1, ..., z_n следующего вида

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dx} = z_2, \\ \dfrac{dz_2}{dx} = z_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dz_{n-1}}{dx} = z_n, \\ \dfrac{dz_n}{dx} = f(x, z_1, ..., z_n), \end{cases} \tag{2.5}$$

где функция f та же, что в правой части уравнения (2.4).

Рассмотрим некоторое решение $y(x)$ уравнения (2.4) на (a, b) и построим n функций:

$$z_1(x) = y(x), \;\; z_2(x) = y'(x), \;\; ..., \;\; z_n(x) = y^{(n-1)}(x). \tag{2.6}$$

Очевидно, что набор $z_1(x)$, ..., $z_n(x)$ является решением системы (2.5) на (a, b).

Пусть теперь $z_1(x)$, ..., $z_n(x)$ – решение системы (2.5) на (a, b). Тогда функция $y(x) = z_1(x)$ – решение уравнения (2.4) на (a, b), при этом выполнены соотношения (2.6).

Говорят, что уравнение (2.4) сводится к нормальной системе (2.5). При этом неправильно говорить, что уравнение (2.4) и система (2.5) эквивалентны, так как обычно в математике эквивалентность уравнений или систем означает, что множества их решений совпадают. В нашем случае решения уравнения (2.4) и системы (2.5) имеют различную природу – решением (2.4) является одна функция, решением (2.5) является набор n функций.

Приведем пример сведения уравнения вида (2.4) к системе. Уравнение второго порядка

$$y'' = x \sin(y) - (y')^3$$

сводится к системе

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dx} = z_2, \\ \dfrac{dz_2}{dx} = x\sin(z_1) - z_2^3. \end{cases}$$

Рассмотрим для уравнения (2.4) точку $(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)})$ области D. Пусть

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}, \quad Z_0 = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_0' \\ \vdots \\ y_0^{(n-1)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Из уже изложенного следует, что задаче Коши с начальным условием $Z(x_0) = Z_0$ для системы (2.5) соответствует задача нахождения решения $y(x)$ уравнения (2.4), для которого

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ ...,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{2.7}$$

(эта задача также называется задачей Коши). Таким образом, в задаче Коши для дифференциального уравнения порядка n задаются значения самого решения y и его производных y', ..., $y^{(n-1)}$ в некоторой точке x_0.

Сформулированная ранее теорема существования и единственности для нормальной системы позволяет доказать аналогичный результат для уравнения порядка n.

Теорема 2.2. *Если функция f в правой части уравнения* (2.4) *непрерывна в области D вместе со своими частными производными по переменным y, y', ..., $y^{(n-1)}$, то для любой точки $(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}) \in D$ существует единственное решение задачи Коши* (2.4)–(2.7)*, заданное на некотором интервале, содержащем точку x_0.*

В некоторых случаях удается понизить порядок уравнения (2.4). Отметим два из них.

Случай 1. Уравнение не содержит y, y', ..., $y^{(k)}$, т. е. имеет вид

$$y^{(n)} = f(x, y^{(k+1)}, ..., y^{(n-1)}). \tag{2.8}$$

В этом случае перейдем от переменных x, y к переменным x, z, где $z = y^{(k+1)}$. Так как

$$z' = y^{(k+2)}, ..., z^{(n-k-2)} = y^{(n-1)}, \quad z^{(n-k-1)} = y^{(n)},$$

уравнение (2.8) сводится к уравнению

$$z^{(n-k-1)} = f(x, z, ..., z^{(n-k-2)}), \tag{2.9}$$

порядок которого равен $n-k-1$. Если решение $z(x)$ уравнения (2.9) найдено, $y(x)$ получится из него последовательным интегрированием.

Случай 2. Уравнение не содержит x, т. е. имеет вид

$$y^{(n)} = f(y, y', ..., y^{(n-1)}). \tag{2.10}$$

Перейдем от переменных x, y к переменным y, $z = y'$ (y становится независимой переменной, т. е. ищется $y' = z(y)$). Пересчитаем производные:

$$y' = z,\ y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d(z(y))}{dx} = \frac{d(z(y))}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}z \tag{2.11}$$

и т. д. Легко понять, что порядок уравнения (2.10) понизится на единицу. Если из полученного уравнения найдем $z(y)$, то придем к уравнению с разделяющимися переменными

$$y' = z(y).$$

Пример. Решить уравнение

$$y''y = (y')^2$$

и найти для него решение задачи Коши с начальными условиями $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. Это уравнение вида (2.10). Станем искать $y' = z(y)$. Тогда с учетом (2.11) получаем

$$\frac{dz}{dy}zy = z^2. \tag{2.12}$$

Очевидно, у уравнения (2.12) есть решение $z \equiv 0$. Ему соответствует $y' \equiv 0$ или $y \equiv C$ (C – произвольная постоянная). Разделив на z, получим

$$z'y = z.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, все решения которого содержатся в формуле

$$z = C_1 y,$$

где C_1 – произвольная простянная. Следовательно, приходим к уравнению

$$y' = C_1 y$$

с разделяющимися переменными, множество решений которого имеет вид

$$y = Ce^{C_1 x}, \tag{2.13}$$

C – произвольная постоянная. Ясно, что решение $y \equiv C$ включается в (2.13) при $C_1 = 0$.

Для того чтобы решить задачу Коши, подставим начальные условия в (2.13) и в равенство $y' = CC_1 e^{C_1 x}$:

$$y(0) = C = 1, \quad y'(0) = CC_1 = 2.$$

Отсюда $C = 1$, $C_1 = 2$, т. е. искомое решение задачи Коши имеет вид

$$y(x) = e^{2x}.$$

3. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ n-ГО ПОРЯДКА

Рассмотрим нормальную систему дифференциальных уравнений с n неизвестными функциями y_1, ..., y_n следующего вида

$$\begin{cases} y_1' = p_{11}(x)y_1 + p_{12}(x)y_2 + ... + p_{1n}(x)y_n + q_1(x), \\ y_2' = p_{21}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 + ... + p_{2n}(x)y_n + q_2(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = p_{n1}(x)y_1 + p_{n2}(x)y_2 + ... + p_{nn}(x)y_n + q_n(x). \end{cases} \tag{3.1}$$

В этой системе функции $p_{11}(x)$, ..., $p_{nn}(x)$, $q_1(x)$, ..., $q_n(x)$ предполагаются заданными и непрерывными на одном и том же промежутке (a, b). Систему (3.1) называют системой линейных дифференциальных уравнений (или короче – линейной системой).

Введем матрицу размера $n \times n$, зависящую от x

$$P(x) = \begin{bmatrix} p_{11}(x), ..., p_{1n}(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ p_{n1}(x), ..., p_{nn}(x) \end{bmatrix},$$

и вектор-функцию

$$Q(x) = \begin{bmatrix} q_1(x) \\ \vdots \\ q_n(x) \end{bmatrix}.$$

Тогда в векторной форме система (3.1) запишется так:

$$Y' = P(x)Y + Q(x). \tag{3.2}$$

Здесь, как и в (2.2),

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

– вектор, компоненты которого – неизвестные функции.

Запишем систему (3.2) в виде

$$Y' = F(x, Y),$$

где

$$F(x, Y) = P(x)Y + Q(x).$$

Легко понять, что вектор-функция F определена и непрерывна в области D пространства переменных x, y_1, ..., y_n, задаваемой неравенствами

$$a < x < b,\ -\infty < y_1 < +\infty,\ ...,\ -\infty < y_n < +\infty.$$

При этом в области D существует и непрерывна матрица частных производных

$$\frac{\partial F}{\partial Y} = P(x).$$

Таким образом, в области D выполнены условия теоремы 2.1 о существовании и единственности решения любой задачи Коши для системы (3.2).

Оказывается, что линейная система (3.2) обладает дополнительно еще одним важным свойством – для любой задачи Коши с начальными данными $(x_0, Y_0) \in D$ ее решение задано на том же промежутке (a, b), где заданы и непрерывны матрица $P(x)$ и вектор-функция $Q(x)$. Сформулируем отдельно теорему о существовании и единственности решений для линейных систем.

Теорема 3.1. *Предположим, что матрица $P(x)$ и вектор-функция $Q(x)$ определены и непрерывны на интервале (a, b). Тогда:*

1) *для любой точки $x_0 \in (a, b)$ и для любого вектора $Y_0 \in \mathbb{R}^n$ существует решение системы* (3.2), *определенное на (a, b) и такое, что $Y(x_0) = Y_0$;*

2) *если $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ – решения системы* (3.2), *определенные на (a, b), и существует точка $x_0 \in (a, b)$, такая, что $Y_1(x_0) = Y_2(x_0)$, то $Y_1(x) \equiv \equiv Y_2(x)$ на (a, b).*

Здесь и далее, говоря о решениях системы (3.2), будем иметь в виду решения, определенные на (a, b).

Изучение свойств линейных систем начнем с изучения линейной однородной системы, т. е. системы (3.2), в которой $Q(x) \equiv 0$. Итак, рассмотрим линейную систему

$$Y' = P(x)Y \tag{3.3}$$

(по-прежнему предполагаем, что матрица $P(x)$ непрерывна на (a, b)). Отметим, что систему (3.2) общего вида (с $Q(x) \not\equiv 0$) называют линейной неоднородной системой.

Решения системы (3.3) обладают следующими важными свойствами:

1) если $Y(x)$ – решение, а c – константа, то $cY(x)$ – также решение;

2) если $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ – решения, то $Y_1(x) + Y_2(x)$ – также решение.

Данные свойства проверяются непосредственной подстановкой функций $cY(x)$ и $Y_1(x) + Y_2(x)$ в систему (3.3).

Из этих свойств легко выводится следующее свойство: если $Y_1(x)$, ..., $Y_k(x)$ – решения системы (3.3), а c_1, ..., c_k – постоянные числа, то функция

$$c_1 Y_1(x) + ... + c_k Y_k(x)$$

является решением системы (3.3). В математике любое множество, элементы которого можно умножать на числа и складывать, и такое, что линейная комбинация его элементов есть снова его элемент, называется линейным пространством (здесь не указываем свойства, которыми должны обладать эти операции сложения элементов и умножения их на числа и которые перечисляются в аксиомах линейного пространства). Поэтому можно сказать, что множество решений однородной системы (3.3) является линейным пространством.

Отметим еще одно свойство решений системы (3.3): если для решения $Y(x)$ найдется точка $x_0 \in (a, b)$, в которой $Y(x_0) = 0$, то $Y(x) \equiv 0$ на (a, b). Действительно, у системы (3.3) есть решение $\tilde{Y}(x) \equiv 0$, и из второго утверждения теоремы 3.1 вытекает, что если выполнено равенство $Y(x_0) = \tilde{Y}(x_0) = 0$, то $Y(x) \equiv \tilde{Y}(x) \equiv 0$.

Покажем теперь, что все решения системы (3.3) могут быть найдены как линейные комбинации n решений, обладающих некоторым дополнительным свойством.

Будем говорить, что набор решений $Y_1(x)$, ..., $Y_n(x)$ является фундаментальной системой решений для (3.3) (далее сокращенно ф.с.р.), если существует точка $x_0 \in (a, b)$, такая, что векторы

$$Y_1(x_0),\ \dots,\ Y_n(x_0)$$

линейно независимы (и следовательно, образуют базис в $\mathbb{R}^n$).

Покажем, что ф.с.р. всегда существует. Для этого возьмем произвольную точку $x_0 \in (a, b)$ и набор линейно независимых векторов $Y_1^0, \dots, Y_n^0 \in \mathbb{R}^n$. Используя теорему 3.1, построим решения системы (3.3) $Y_1(x)$, ..., $Y_n(x)$ на (a, b), такие, что

$$Y_1(x_0) = Y_1^0, \dots, Y_n(x_0) = Y_n^0.$$

Ясно, что набор $Y_1(x)$, ..., $Y_n(x)$ – ф.с.р. для системы (3.3).

Пример. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} y_1' = \dfrac{y_1}{x}, \\ y_2' = \dfrac{x-1}{x}\, y_1 + \dfrac{2}{x-1}\, y_2. \end{cases} \tag{3.4}$$

Это линейная система вида (3.1) при $n = 2$, в которой

$$p_{11}(x) = \frac{1}{x},\ p_{12}(x) = 0,\ p_{21}(x) = \frac{x-1}{x},\ p_{22}(x) = \frac{2}{x-1},$$
$$q_1(x) = 0,\ q_2(x) = 0.$$

В качестве промежутка, на котором все функции p_{11}, ..., p_{22} непрерывны, можно взять один из следующих:

$$(-\infty, 0),\ (0, 1),\ (1, +\infty).$$

Будем рассматривать систему (3.4) в области D задаваемой неравенствами

$$1 < x < +\infty, \ -\infty < y_1 < +\infty, \ -\infty < y_2 < +\infty.$$

Подстановка в систему (3.4) показывает, что вектор-функции

$$Y_1(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ (x-1)^2 \end{bmatrix}, \ Y_2(x) = \begin{bmatrix} x \\ (x-1)^2 \ln(x-1) \end{bmatrix}$$

являются решениями системы (3.4) на $(1, +\infty)$ (проверьте!).

При $x = 2$ они обращаются в векторы

$$Y_1(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ Y_2(2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

которые линейно независимы. Поэтому вектор-функции $Y_1(x), Y_2(x)$ – ф.с.р. системы (3.4).

Теорема 3.2. *Пусть* $Y_1(x)$, ..., $Y_n(x)$ – *ф.с.р. системы* (3.3). *Тогда для любого решения* $Y(x)$ *системы* (3.3) *найдется (и притом единственным образом) набор постоянных* c_1, ..., c_n, *такой, что*

$$Y(x) = c_1 Y_1(x) + ... + c_n Y_n(x). \tag{3.5}$$

Доказательство. Рассмотрим некоторое решение $Y(x)$ системы (3.3). Пусть x_0 – точка, в которой векторы $Y_1(x_0)$, ..., $Y_n(x_0)$ линейно независимы. Тогда по свойству базиса в $\mathbb{R}^n$ существуют такие числа c_1, ..., c_n, что

$$Y(x_0) = c_1 Y_1(x_0) + ... + c_n Y_n(x_0). \tag{3.6}$$

Функция $Z(x) = Y(x) - c_1 Y_1(x) - ... - c_n Y_n(x)$ является линейной комбинацией решений, следовательно, $Z(x)$ – решение системы (3.3). Из (3.6) получаем, что $Z(x_0) = 0$, поэтому, как отмечено ранее, $Z(x) \equiv 0$, а это равносильно (3.5). Для доказательства единственности набора c_1, ..., c_n, удовлетворяющего равенству (3.5), отметим, что любой такой набор должен удовлетворять также и равенству (3.6), но так как векторы $Y_1(x_0)$, ..., $Y_n(x_0)$ образуют базис в $\mathbb{R}^n$, набор c_1, ..., c_n, для которого выполнено (3.6), единственный. Теорема доказана.

Доказанная теорема означает, что ф.с.р. является базисом линейного пространства всех решений системы (3.3).

Таким образом, линейное пространство всех решений системы (3.3) имеет базис из n элементов и, следовательно, оно n-мерно. Конечно, ф.с.р. не единственна – в приведенном доказательстве существования ф.с.р. мы можем выбирать линейно независимые векторы Y_1^0, ..., Y_n^0 бесконечным множеством способов.

Формулу (3.5), содержащую при различных наборах c_1, ..., c_n все решения системы (3.3), называют общим решением системы (3.3).

Вернемся к рассмотренной системе (3.4). Из теоремы 3.2 следует, что множество всех решений этой системы имеет вид

$$c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ (x-1)^2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} x \\ (x-1)^2 \ln(x-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 x \\ (x-1)^2\{c_1 + c_2 \ln(x-1)\} \end{bmatrix},$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

В общем случае задача построения ф.с.р. линейной однородной системы (3.3) в явном виде неразрешима. Она разрешима в том важном частном случае, когда матрица $P(x)$ постоянна. Рассмотрим систему

$$Y' = AY, \tag{3.7}$$

где A – постоянная вещественная матрица размера $n \times n$. Будем искать решение $Y(x)$ системы (3.7) в виде

$$Y(x) = \boldsymbol{\gamma} e^{\lambda x}, \tag{3.8}$$

где $\boldsymbol{\gamma}$ – n-мерный вектор-столбец, а λ – постоянное (вообще говоря, комплексное) число.

Конечно, у системы (3.7) всегда есть решение $Y(x) \equiv 0$, поэтому имеет смысл искать только ненулевые решения. Таким образом, будем искать решение вида (3.8) с $\boldsymbol{\gamma} \neq 0$.

Запишем вектор-функцию (3.8) так:

$$Y(x) = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} e^{\lambda x} = \begin{bmatrix} \gamma_1 e^{\lambda x} \\ \vdots \\ \gamma_n e^{\lambda x} \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$Y'(x) = \begin{bmatrix} \lambda\gamma_1 e^{\lambda x} \\ \vdots \\ \lambda\gamma_n e^{\lambda x} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \gamma_1 e^{\lambda x} \\ \vdots \\ \gamma_n e^{\lambda x} \end{bmatrix} = \lambda\boldsymbol{\gamma} e^{\lambda x}. \tag{3.9}$$

Подставим формулы (3.8) и (3.9) в систему (3.7):

$$\lambda\boldsymbol{\gamma} e^{\lambda x} = A\boldsymbol{\gamma} e^{\lambda x}. \tag{3.10}$$

Так как $e^{\lambda x}$ не обращается в 0, равенство (3.10) равносильно равенству

$$A\boldsymbol{\gamma} = \lambda\boldsymbol{\gamma},$$

знакомому из курса алгебры [2]. Итак, показано, что вектор-функция вида (3.8) является решением системы (3.7) тогда и только тогда, когда λ – собственное числа матрицы A, а $\boldsymbol{\gamma}$ – соответствующий собственный вектор.

Метод нахождения решений системы (3.7) в виде (3.8) называется методом Эйлера. Дальше подробно опишем применение метода Эйлера к линейным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами.

Для систем вида (3.7) ограничимся лишь тем случаем, когда матрица A имеет n различных и вещественных собственных чисел λ_1, ..., λ_n. Можно доказать, что соответствующие им собственные векторы γ_1, ..., γ_n линейно независимые. Выше показано, что система (3.7) в таком случае имеет n решений

$$Y_1(x) = \gamma_1 e^{\lambda_1 x},\ \dots,\ Y_n(x) = \gamma_n e^{\lambda_n x}.$$

Эти решения образуют ф.с.р. системы (3.7), так как

$$Y_1(0) = \gamma_1,\ \dots,\ Y_n(0) = \gamma_n,$$

а эти векторы линейно независимы.

Пример. Рассмотрим систему

$$Y' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} Y. \tag{3.11}$$

Собственные числа матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

равны $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, а соответствующие им собственные векторы –

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},\quad \gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, ф.с.р. системы (3.11) такова:

$$Y_1(x) = \begin{bmatrix} e^{2x} \\ -e^{2x} \end{bmatrix},\quad Y_2(x) = \begin{bmatrix} e^{3x} \\ -2e^{3x} \end{bmatrix},$$

а ее общее решение имеет вид

$$Y(x) = \begin{bmatrix} c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} \\ -c_1 e^{2x} - 2c_2 e^{3x} \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим теперь неоднородную линейную систему (3.2).

Теорема 3.3. *Пусть* $Y_1(x)$, ..., $Y_n(x)$ – *ф.с.р. системы* (3.3), *а* $Z(x)$ – *некоторое решение системы* (3.2). *Тогда для любого решения* $Y(x)$ *системы* (3.2) *найдется (и притом единственным образом) набор постоянных* c_1, ..., c_n, *такой, что*

$$Y(x) = Z(x) + c_1 Y_1(x) + \dots + c_n Y_n(x). \tag{3.12}$$

Доказательство. Так как $Y(x)$ и $Z(x)$ – решения системы (3.2), выполнены равенства:

$$Y'(x) = P(x)Y(x) + Q(x),$$
$$Z'(x) = P(x)Z(x) + Q(x).$$

Введем функцию $U(x) = Y(x) - Z(x)$. Вычитая второе равенство из первого, получаем

$$U'(x) = Y'(x) - Z'(x) = P(x)(Y(x) - Z(x)) = P(x)U(x).$$

Таким образом, $U(x)$ – решение однородной системы (3.3). По теореме 3.2 найдутся (и притом единственные) постоянные c_1, ..., c_n, такие, что

$$U(x) = Y(x) - Z(x) = c_1 Y_1(x) + ... + c_n Y_n(x). \tag{3.13}$$

Понятно, что формула (3.12) получается из равенства (3.13) переносом $Z(x)$ в правую часть. Теорема доказана.

Формула (3.12) называется общим решением системы (3.2). Ниже мы покажем, что, зная ф.с.р. системы (3.3), всегда можно найти некоторое решение $Z(x)$ системы (3.2) и, следовательно, построить ее общее решение.

К системе вида (3.1) сводится линейное дифференциальное уравнение порядка n – уравнение вида

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + ... + p_n(x) y = q(x). \tag{3.14}$$

Предполагаем, что функции $p_1(x)$, ..., $p_n(x)$, $q(x)$ заданы и непрерывны на одном и том же промежутке (a, b). Применяя описанный в главе 2 процесс сведения дифференциального уравнения порядка n к нормальной системе, получаем систему с неизвестными функциями $z_1(x)$, ..., $z_n(x)$ вида

$$\begin{cases} z_1' = z_2, \\ z_2' = z_3, \\ \dots\dots\dots\dots \\ z_{n-1}' = z_n, \\ z_n' = -p_n(x) z_1 - ... - p_1(x) z_n + q(x). \end{cases} \tag{3.15}$$

Система (3.15) – линейная система вида (3.1). Ее можно записать в виде (3.2). Введем n-мерные векторы:

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}, \quad Q(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q(x) \end{bmatrix}$$

и матрицу

$$P(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & ... & 1 \\ -p_n(x) & -p_{n-1}(x) & ... & -p_1(x) \end{bmatrix}.$$

Тогда система (3.15) запишется в виде

$$Z' = P(x)Z + Q(x).$$

В гл. 2 было показано, что если $y(x)$ – решение уравнения (3.14), то набор

$$z_1(x) = y(x), ..., z_n(x) = y^{(n-1)}(x) \tag{3.16}$$

– решение системы (3.15), и наоборот, если $z_1(x)$, ..., $z_n(x)$ – решение системы (3.15), то функция $y(x) = z_1(x)$ – решение уравнения (3.14), для которого выполнены соотношения (3.16).

Из теоремы 3.1 следует, что для уравнения вида (3.14) справедлива следующая теорема существования и единственности.

Теорема 3.4. *Предположим, что функции $p_1(x)$, ..., $p_n(x)$, $q(x)$ заданы и непрерывны на одном и том же промежутке (a, b). Тогда:*

1) *для любой точки $x_0 \in (a, b)$ и для любого набора чисел y_0, y_0', ..., $y_0^{(n-1)}$ существует решение $y(x)$ уравнения (3.14), определенное на (a, b) и такое, что*

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y',\ ...,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)};$$

2) *если $y_1(x)$, $y_2(x)$ – решения уравнения (3.14), определенные на (a, b), и существует точка $x_0 \in (a, b)$, такая, что*

$$y_1(x_0) = y_2(x_0),\ y_1'(x_0) = y_2'(x_0),\ ...,\ y_1^{(n-1)}(x_0) = y_2^{(n-1)}(x_0),$$

то $y_1(x) \equiv y_2(x)$ на (a, b).

Далее, говоря о решениях уравнения (3.14), будем иметь в виду решения, определенные на (a, b).

Уравнение (3.14) называется однородным, если $q(x) \equiv 0$ на (a, b), т. е. оно имеет вид

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = 0. \tag{3.17}$$

Если $q(x) \not\equiv 0$, то уравнение (3.14) называется неоднородным. Понятно, что однородному уравнению (3.17) соответствует однородная система (3.15), у которой $q(x) \equiv 0$, неоднородному – неоднородная.

Из описанных ранее свойств линейных однородных систем вытекает, что любая линейная комбинация решений уравнения (3.17) является его решением, а все множество решений уравнения (3.17) является линейным пространством.

Будем говорить, что набор n решений $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ уравнения (3.17) является его фундаментальной системой решений (дальше – ф.с.р.), если существует точка $x_0 \in (a, b)$, такая, что векторы

$$\begin{bmatrix} y_1(x_0) \\ y_1'(x_0) \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_2(x_0) \\ y_2'(x_0) \\ \vdots \\ y_2^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} y_n(x_0) \\ y_n'(x_0) \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix}$$

линейно независимы.

Ясно, что набор $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ решений уравнения (3.17) является ф.с.р. этого уравнения тогда и только тогда, когда соответствующие им решения

$$Z_1(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_1'(x) \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}, \ Z_2(x) = \begin{bmatrix} y_2(x) \\ y_2'(x) \\ \vdots \\ y_2^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}, \ \ldots, \ Z_n(x) = \begin{bmatrix} y_n(x) \\ y_n'(x) \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$$

однородной системы (3.15) ($Z' = P(x)Z$) составляют ф.с.р. этой системы.

Так же, как для системы вида (3.3), показывается, что у уравнения (3.17) ф.с.р. всегда существует.

Пример. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + \frac{x\sin(x)}{x\cos(x) - \sin(x)}\, y' + \frac{\sin(x)}{\sin(x) - x\cos(x)}\, y = 0. \tag{3.18}$$

Функция $x\cos(x) - \sin(x)$, стоящая в знаменателях функций

$$p_1(x) = \frac{x\sin(x)}{x\cos(x) - \sin(x)}, \ p_2(x) = \frac{\sin(x)}{\sin(x) - x\cos(x)},$$

обращается в 0 в тех и только в тех точках, где выполнено равенство

$$x = \mathrm{tg}(x). \tag{3.19}$$

Решим уравнение (3.19) графически (рис. 3.1), учитывая, что $x > \mathrm{tg}(x)$ при $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$, $x < \mathrm{tg}(x)$ при $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Пусть b – корень уравнения (3.19), лежащий в интервале $\left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$. Тогда $x\cos(x) - \sin(x) \neq 0$ при $x \in (0, b)$, и следовательно, функции $p_1(x)$, $p_2(x)$ заданы и непрерывны на $(0, b)$.

Подстановка в уравнение показывает, что функции $y_1(x) = x$, $y_2(x) = \sin(x)$ – решения уравнения (3.18) на $(0, b)$ (проверьте!). Заметим, что хотя функции x, $\sin(x)$ определены при всех x, имеем право (в силу определения решения) рассматривать их как решения уравнения (3.18) только на тех промежутках, на которых функции $p_1(x)$, $p_2(x)$ заданы и непрерывны. В точке $x_0 = \dfrac{\pi}{2} \in (0, b)$

$$\begin{bmatrix} y_1(x_0) \\ y_1'(x_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\pi}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_2(x_0) \\ y_2'(x_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Так как эти векторы линейно независимы, $y_1(x)$, $y_2(x)$ – ф.с.р. уравнения (3.18).

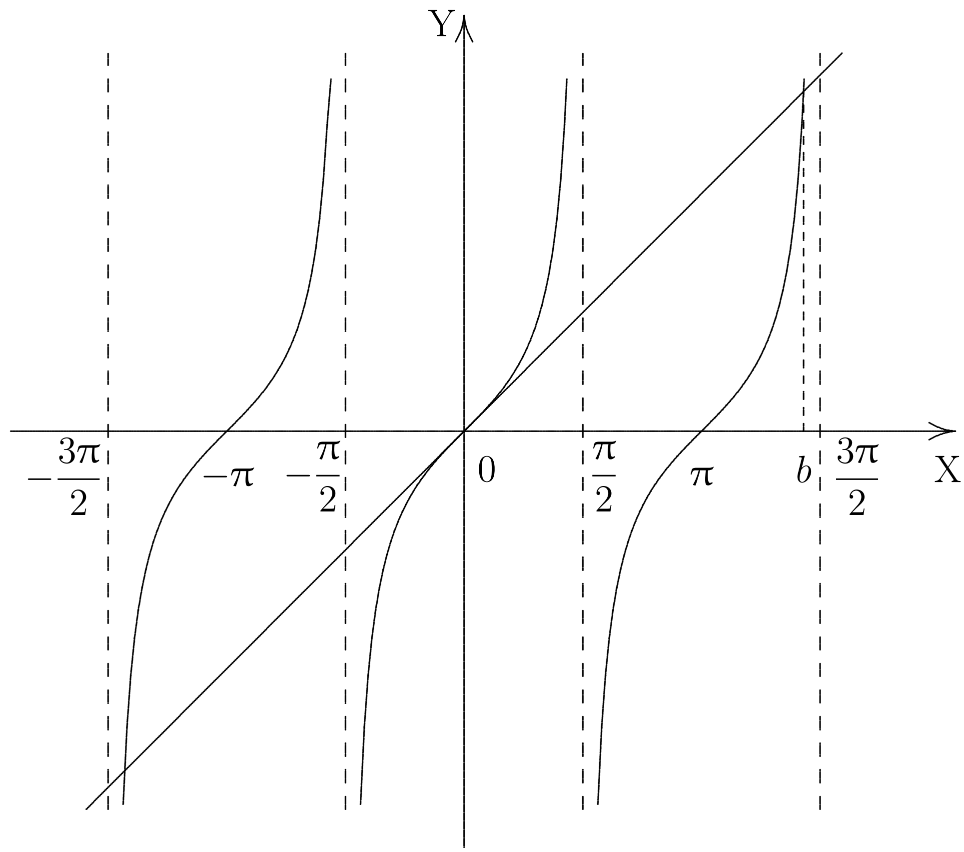

Рис. 3.1

Из теоремы 3.2 вытекает, что верно следующее утверждение.

Теорема 3.5. *Пусть* $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ *– ф.с.р. уравнения* (3.17). *Тогда для любого решения* $y(x)$ *этого уравнения найдется* (*и притом единственным образом*) *набор постоянных* c_1, ..., c_n, *такой, что*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + ... + c_n y_n(x). \tag{3.20}$$

Формулу (3.20), содержащую при различных c_1, ..., c_n все решения уравнения (3.17), называют общим решением этого уравнения.

Для рассмотренного уравнения (3.18) общее решение имеет вид

$$y(x) = c_1 x + c_2 \sin(x).$$

Для неоднородного уравнения (3.14) справедливо следующее утверждение, вытекающее из теоремы 3.3.

Теорема 3.6. *Пусть* $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ *– ф.с.р. уравнения* (3.17)*, а* $z(x)$ *– некоторое решение уравнения* (3.14)*. Тогда для любого решения* $y(x)$ *уравнения* (3.14) *найдется* (*и притом единственным образом*) *набор постоянных* c_1, ..., c_n, *такой, что*

$$y(x) = z(x) + c_1 y_1(x) + ... + c_n y_n(x). \tag{3.21}$$

Формула (3.21) называется общим решением уравнения (3.14).

Как и в случае линейных однородных систем дифференциальных уравнений, общих методов нахождения ф.с.р. для уравнения вида (3.17) не существует. Ограничимся здесь рассмотрением частного, но очень важного класса – класса уравнений с постоянными коэффициентами вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0, \tag{3.22}$$

где a_1, ..., a_n – постоянные вещественные числа.

Из теорем 3.1 и 3.4 следует, что все решения уравнения (3.22) заданы на промежутке $-\infty < x < +\infty$. Поэтому в задаче Коши x_0 может быть любым числом. Часто берут $x_0 = 0$.

Для уравнения (3.22) ф.с.р. может быть найдена операционным методом, описанным далее, а также методом Эйлера (аналог которого для случая линейных систем с постоянными коэффициентами упомянут выше).

Опишем схему применения метода Эйлера к уравнению (3.22). Для этого потребуется понятие комплексного решения.

Пусть $u(x)$, $v(x)$ – дифференцируемые функции вещественной переменной x и пусть $\omega(x) = u(x) + iv(x)$. Тогда

$$\omega(x + \Delta x) = u(x + \Delta x) + iv(x + \Delta x),$$

$$\frac{\omega(x + \Delta x) - \omega(x)}{\Delta x} = \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + i\frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}.$$

Переход к пределу при $\Delta x \to 0$ в последнем равенстве позволяет определить производную $\omega'(x)$ формулой

$$\omega'(x) = u'(x) + iv'(x).$$

Аналогично, $\omega''(x) = u''(x) + iv''(x), ..., \omega^{(n)}(x) = u^{(n)}(x) + iv^{(n)}(x)$.

Будем говорить, что функция $\omega(x) = u(x) + iv(x)$ является решением (комплексным) уравнения (3.22), если при подстановке в это уравнение она обращает его в тождество по x:

$$\omega^{(n)}(x) + a_1 \omega^{(n-1)}(x) + ... + a_n \omega(x) \equiv 0.$$

Разделение вещественной и мнимой частей в нем приводит к равносильной ему системе двух тождеств:

$$\begin{cases} u^{(n)}(x) + a_1 u^{(n-1)}(x) + ... + a_n u(x) \equiv 0, \\ v^{(n)}(x) + a_1 v^{(n-1)}(x) + ... + a_n v(x) \equiv 0. \end{cases}$$

Таким образом, функция $\omega(x) = u(x) + iv(x)$ является комплексным решением уравнения (3.22) тогда и только тогда, когда ее вещественная и мнимая части (функции $u(x)$ и $v(x)$) являются решениями этого уравнения. Указанные ранее свойства решений уравнения (3.22) сохраняются и для комплексных решений. В частности, линейная комбинация решений (с комплексными в общем случае коэффициентами) снова служит решением этого уравнения.

Пусть $\lambda = a + bi$. Рассмотрим функцию

$$e^{\lambda x} = e^{(a+bi)x} = a^{ax}(\cos(bx) + i\sin(bx)) = e^{ax}\cos(bx) + ie^{ax}\sin(bx).$$

С учетом изложенного

$$\left(e^{\lambda x}\right)' = (e^{ax}\cos(bx))' + i\,(e^{ax}\sin(bx))' =$$
$$= (ae^{ax}\cos(bx) - be^{ax}\sin(bx)) + i\,(ae^{ax}\sin(bx) + be^{ax}\cos(bx)) =$$
$$= (a+bi)\,(e^{ax}\cos(bx) + ie^{ax}\sin(bx)) = \lambda e^{\lambda x}.$$

Продолжая дифференцирование, получаем, что при комплексном λ так же, как и в вещественном случае,

$$\left(e^{\lambda x}\right)'' = \lambda^2 e^{\lambda x}, ..., \left(e^{\lambda x}\right)^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}.$$

Подставляя теперь функцию $y(x) = e^{\lambda x}$ в левую часть уравнения (3.22), получим

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + ... + a_n y(x) = \lambda^n e^{\lambda x} + a_1\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + ... + a_n e^{\lambda x} =$$
$$= \left(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_n\right) e^{\lambda x}.$$

Так как $e^{\lambda x} \neq 0$ ($|e^{\lambda x}| = e^{ax} > 0$), функция $y(x) = e^{\lambda x}$ является решением уравнения (3.22) тогда и только тогда, когда λ – корень полинома $P_n(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_n$, который называется характеристическим полиномом уравнения (3.22). Можно показать, что если λ – корень характеристического полинома кратности $k > 1$, то решениями уравнения (3.22) являются k функций $e^{\lambda x}$, $xe^{\lambda x}$, ..., $x^{k-1}e^{\lambda x}$.

На этом основан метод Эйлера построения ф.с.р. для уравнения (3.22) и состоит он в следующем.

Пусть λ_1, λ_2, ..., λ_m – корни характеристического полинома $P_n(\lambda)$ с кратностями k_1, k_2, ..., k_m соответственно, т. е.

$$k_1 + k_2 + ... + k_m = n.$$

Если λ_j – вещественный корень кратности 1 (простой корень), в ф.с.р. включаем функцию $e^{\lambda_j x}$.

Если λ_j – вещественный корень кратности $k_j > 1$, в ф.с.р. включаем k_j функций $e^{\lambda_j x}$, $xe^{\lambda_j x}$, ..., $x^{k_j-1}e^{\lambda_j x}$.

Если $\lambda_j = a_j + b_j i$ – комплексный корень кратности 1, ф.с.р. включаем две функции $e^{a_j x}\cos(b_j x)$, $e^{a_j x}\sin(b_j x)$ – вещественную и мнимую части комплексного решения $e^{\lambda_j x}$.

Замечание. Предполагаем, что коэффициенты a_1, ..., a_n уравнения (3.22) вещественные. Поэтому характеристический полином $P_n(\lambda)$ имеет вещественные коэффициенты и, следовательно, вместе с комплексным корнем $\lambda_j = a_j + b_j i$ у него есть и комплексно-сопряженный корень $\overline{\lambda}_j = a_j - b_j i$ (при этом кратности корней λ_j и $\overline{\lambda}_j$ одинаковы). Корню $\overline{\lambda}_j$ соответствует решение

$$e^{\overline{\lambda}_j x} = e^{a_j x}\cos(b_j x) - ie^{a_j x}\sin(b_j x).$$

Включаемые в ф.с.р. функции можно рассматривать как линейные комбинации двух решений $e^{\lambda_j x}$ и $e^{\overline{\lambda}_j x}$ уравнения (3.22):

$$e^{a_j x}\cos(b_j x) = \frac{1}{2}\, e^{\lambda_j x} + \frac{1}{2}\, e^{\overline{\lambda}_j x},$$

$$e^{a_j x}\sin(b_j x) = \frac{1}{2i}\, e^{\lambda_j x} - \frac{1}{2i}\, e^{\overline{\lambda}_j x}.$$

Таким образом, паре комплексных корней λ_j, $\overline{\lambda}_j$ кратности 1 (их суммарная кратность равна 2) соответствуют два решения уравнения (3.22), включаемые в ф.с.р. этого уравнения.

Если $\lambda_j = a_j + b_j i$ – комплексный корень характеристического полинома $P_n(\lambda)$ кратности $k_j > 1$, то в ф.с.р. включаются $2k$ функций

$$e^{a_j x}\cos(b_j x),\ xe^{a_j x}\cos(b_j x),\ \ldots,\ x^{k_j-1}e^{a_j x}\cos(b_j x),$$

$$e^{a_j x}\sin(b_j x),\ xe^{a_j x}\sin(b_j x),\ \ldots,\ x^{k_j-1}e^{a_j x}\sin(b_j x),$$

являющихся, соответственно, вещественными и мнимыми частями функций $e^{\lambda_j x}$, $xe^{\lambda_j x}$, ..., $x^{k_j-1}e^{\lambda_j x}$. Заметим, что суммарная кратность корней λ_j и $\overline{\lambda}_j$ полинома $P_n(\lambda)$ в этом случае равна $2k$.

Таким образом, получаем в ф.с.р. уравнения (3.22) столько функций, какова сумма кратностей всех корней характеристического полинома, т. е. n. Доказательство того, что эти n функций составляют ф.с.р. уравнения (3.22), не приводим.

Примеры.

1. Построим ф.с.р. и общее решение уравнения

$$y''' - y = 0. \tag{3.23}$$

Характеристический полином уравнения (3.23) имеет вид λ^3-1. Его корни

$$\lambda_1=1,\ \lambda_2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ \lambda_3=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Корню $\lambda_1=1$ сопоставляем решение $y_1(x)=e^x$, корням λ_2, $\lambda_3=\overline{\lambda}_2$ сопоставляем решения

$$y_2(x)=e^{-\frac{1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right),\quad y_3(x)=e^{-\frac{1}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Эти решения и образуют ф.с.р. уравнения (3.23). Его общее решение есть

$$y(x)=c_1e^x+e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+c_3\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right).$$

2. Построим ф.с.р. и общее решение уравнения

$$y^{(IV)}-y''=0. \tag{3.24}$$

Характеристический полином уравнения (3.24) имеет вид $\lambda^4-\lambda^2=$ $=\lambda^2(\lambda^2-1)$. Его корни: $\lambda_{1,2}=0$ (т.е. 0 – корень кратности 2), $\lambda_3=1$, $\lambda_4=-1$.

Ф.с.р.: 1, x, e^x, e^{-x}.

Общее решение: $y(x)=c_1+c_2x+c_3e^x+c_4e^{-x}$.

3. Построим общее решение уравнения

$$y''-3y'+2y=0 \tag{3.25}$$

и найдем его решение $y(x)$ с начальными данными $y(0)=2$, $y'(0)=-1$. Характеристический полином уравнения (3.25) имеет вид $\lambda^2-3\lambda+2$, его корни: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$. Общее решение: $y(x)=c_1e^x+c_2e^{2x}$.

Подставляя начальные данные $y(0)=2$, $y'(0)=-1$ в равенства

$$\begin{aligned}y(x)&=c_1e^x+c_2e^{2x},\\ y'(x)&=c_1e^x+2c_2e^{2x},\end{aligned}$$

получим алгебраическую линейную систему с неизвестными c_1, c_2

$$\begin{cases}c_1+c_2=2,\\ c_1+2c_2=-1.\end{cases}$$

Отсюда $c_1=5$, $c_2=-3$, а искомое решение имеет вид $y(x)=5e^x-3e^{2x}$.

Ранее отмечено, что зная ф.с.р. системы (3.3), можно найти некоторое частное решение $Z(x)$ системы (3.2). Применим для этого метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).

Пусть $Y_1(x)$, ..., $Y_n(x)$ – ф.с.р. системы (3.3). Составим матрицу

$$\Phi(x) = [Y_1(x), ..., Y_n(x)].$$

Это матрица размера $n \times n$. Ее называют фундаментальной матрицей системы (3.3). Обозначим через $W(x)$ определитель матрицы $\Phi(x)$ (его называют определителем Вронского системы решений $Y_1(x)$, ..., $Y_n(x)$ или вронскианом). По определению ф.с.р. существует точка $x_0 \in (a, b)$, такая, что векторы $Y_1(x_0)$, ..., $Y_n(x_0)$, т. е. столбцы матрицы $\Phi(x_0)$, линейно независимы. Поэтому $W(x_0) = \det(\Phi(x_0)) \neq 0$. Покажем, что $W(x) = \det(\Phi(x)) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$. Предположим противное: пусть в точке $\widetilde{x} \in (a, b)$ $W(\widetilde{x}) = 0$. Тогда по известной теореме алгебры линейная однородная алгебраическая система

$$\Phi(\widetilde{x})C = 0 \tag{3.26}$$

с неизвестным вектором $C \in \mathbb{R}^n$ имеет ненулевые решения.

Пусть $\widetilde{C} = \begin{bmatrix} \widetilde{c}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{c}_n \end{bmatrix}$ – некоторое ненулевое решение системы (3.26). Рассмотрим вектор-функцию

$$\widetilde{Y}(x) = \Phi(x)\widetilde{C} = [Y_1(x), ..., Y_n(x)] \begin{bmatrix} \widetilde{c}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{c}_n \end{bmatrix} = \widetilde{c}_1 Y_1(x) + ... + \widetilde{c}_n Y_n(x).$$

Эта вектор-функция – линейная комбинация решений $Y_1(x)$, ..., $Y_n(x)$. Поэтому она является решением системы (3.3). Ранее показано, что из равенства

$$\widetilde{Y}(\widetilde{x}) = \Phi(\widetilde{x})\widetilde{C} = 0$$

следует $\widetilde{Y}(x) \equiv 0$ на (a, b). В частности,

$$\widetilde{Y}(x_0) = \widetilde{c}_1 Y_1(x_0) + ... + \widetilde{c}_n Y_n(x_0) = 0,$$

а это противоречит линейной независимости векторов $Y_1(x_0)$, ..., $Y_n(x_0)$ и тому, что вектор $\widetilde{C}$ ненулевой.

Метод вариации произвольных постоянных для системы (3.2) состоит в следующем: будем искать решение $Z(x)$ системы (3.2) в виде

$$Z(x) = \Phi(x)\alpha(x), \tag{3.27}$$

где $\alpha(x)$ – неизвестная вектор-функция

$$\alpha(x) = \begin{bmatrix} \alpha_1(x) \\ \vdots \\ \alpha_n(x) \end{bmatrix},$$

компоненты которой $\alpha_1(x)$, ..., $\alpha_n(x)$ непрерывно дифференцируемы на (a, b). Равенство (3.27) можно переписать в виде

$$Z(x) = \alpha_1(x)Y_1(x) + ... + \alpha_n(x)Y_n(x). \tag{3.28}$$

Если бы функции α_1, ..., α_n были постоянными, то по теореме 3.2 при произвольных α_1, ..., α_n формула (3.28) содержала бы все решения однородной системы (3.3). Тот факт, что в (3.28) функции α_1, ..., α_n зависят от x (варьируются), и объясняет название метода. Подставим $Z(x)$ в виде (3.27) в систему (3.2). Произведение матрицы на вектор дифференцируется по тем же правилам, что и произведение двух скалярных функций (проверьте!), поэтому

$$Z'(x) = \Phi'(x)\alpha(x) + \Phi(x)\alpha'(x). \tag{3.29}$$

Так как $Y_1(x)$, ..., $Y_n(x)$ – решения (3.3), то

$$\Phi'(x) = [Y_1'(x), ..., Y_n'(x)] = [P(x)Y_1(x), ..., P(x)Y_n(x)] =$$

$$= P(x)[Y_1(x), ..., Y_n(x)] = P(x)\Phi(x). \tag{3.30}$$

Вектор-функция $Z(x)$ является решением системы (3.2) тогда и только тогда, когда

$$Z'(x) = P(x)Z(x) + Q(x) = P(x)\Phi(x)\alpha(x) + Q(x). \tag{3.31}$$

Приравнивая (3.29) и (3.31) и учитывая (3.30), получаем уравнение для $\alpha(x)$:

$$P(x)\Phi(x)\alpha(x) + Q(x) = P(x)\Phi(x)\alpha(x) + \Phi(x)\alpha'(x),$$

или

$$\Phi(x)\alpha'(x) = Q(x). \tag{3.32}$$

Мы показали, что функция $W(x)$ (определитель матрицы $\Phi(x)$) отлична от 0 на (a, b). Функция $W(x)$ является комбинацией произведений элементов матрицы $\Phi(x)$, т. е. компонент решений системы (3.3). Поэтому $W(x)$ дифференцируема и, следовательно, непрерывна. Так как $W(x) \neq 0$ при всех $x \in (a, b)$, существует матрица $\Phi^{-1}(x)$, обратная к $\Phi(x)$. По известной формуле элементы $\Phi^{-1}(x)$ равны алгебраическим дополнениям соответствующих элементов транспонированной матрицы $\Phi^T(x)$, деленным на $W(x)$. Поэтому они непрерывны. Следовательно, матрица $\Phi^{-1}(x)$ непрерывна на (a, b).

Таким образом, уравнение (3.32) равносильно уравнению

$$\alpha'(x) = \Phi^{-1}(x)Q(x); \tag{3.33}$$

в (3.33) правая часть – непрерывная на (a, b) вектор-функция.

Отсюда находим

$$\alpha(x) = \int \Phi^{-1}(x)Q(x)\,dx. \tag{3.34}$$

Справа в (3.34) стоит произвольная первообразная вектор-функции $\Phi^{-1}(x)Q(x)$ (можно взять, например, $\int\limits_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(s)Q(s)\,ds$, $x_0 \in (a,b)$). Найденное решение $Z(x)$ системы (3.2) имеет вид

$$Z(x) = \Phi(x)\int \Phi^{-1}(x)Q(x)\,dx.$$

Теперь можно записать, используя теорему 3.3 , любое решение системы (3.2) в виде

$$Y(x) = c_1Y_1(x) + ... + c_nY_n(x) + \Phi(x)\int \Phi^{-1}(x)Q(x)\,dx. \tag{3.35}$$

Учитывая, что $c_1Y_1(x) + ... + c_nY_n(x) = \Phi(x)C$, где $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$, приводим формулу (3.35) к виду

$$Y(x) = \Phi(x)C + \Phi(x)\int \Phi^{-1}(x)Q(x)\,dx = \Phi(x)\left[C + \int \Phi^{-1}(x)Q(x)\,dx\right].$$

Эта формула дает общее решение системы (3.2).

При доказательстве существования ф.с.р. системы (3.3) выбиралась точка $x_0 \in (a,b)$ и набор линейно независимых векторов Y_1^0, ..., Y_n^0 в $\mathbb{R}^n$. Если взять в качестве векторов Y_1^0, ..., Y_n^0 векторы стандартного базиса

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ ...,\ e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

получится ф.с.р. $Y_1(x)$, ..., $Y_n(x)$, обладающая следующим свойством: соответствующая фундаментальная матрица

$$\Phi(x) = [Y_1(x), ..., Y_n(x)]$$

обращается в единичную матрицу при $x = x_0$: $\Phi(x_0) = I$.

Такая фундаментальная матрица называется нормированной при $x = x_0$. С ее помощью можно из полученной ранее формулы общего решения системы (3.2) получить формулу для решения задачи Коши с начальными данными $Y(x_0) = Y_0$:

$$Y(x) = \Phi(x)\left[Y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(s)Q(s)\,ds\right],$$

где $\Phi(x_0) = I$.

Пример. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1' = 5y_1 - 3y_2 + 2e^{3x}, \\ y_2' = y_1 + y_2 + 5e^{-x}. \end{cases} \tag{3.36}$$

Рассмотрим вначале однородную систему, соответствующую системе (3.36):

$$\begin{cases} y_1' = 5y_1 - 3y_2, \\ y_2' = y_1 + y_2. \end{cases}$$

Ф.с.р. для этой системы составляют вектор-функции (проверьте!)

$$\begin{bmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3e^{4x} \\ e^{4x} \end{bmatrix}.$$

Соответствующая фундаментальная матрица $\Phi(x)$ имеет вид

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} e^{2x} & 3e^{4x} \\ e^{2x} & e^{4x} \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим вектор-функцию

$$\alpha(x) = \begin{bmatrix} \alpha_1(x) \\ \alpha_2(x) \end{bmatrix}.$$

Так как систему (3.36) можно переписать в виде

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2e^{3x} \\ 5e^{-x} \end{bmatrix},$$

то вектор-функция

$$Q(x) = \begin{bmatrix} 2e^{3x} \\ 5e^{-x} \end{bmatrix},$$

поэтому система (3.32) запишется так:

$$\begin{cases} e^{2x}\alpha_1'(x) + 3e^{4x}\alpha_2'(x) = 2e^{3x}, \\ e^{2x}\alpha_1'(x) + e^{4x}\alpha_2'(x) = 5e^{-x}. \end{cases}$$

На практике для нахождения компонент вектор-функции $\alpha(x)$ обычно решают систему (3.32) без поиска матрицы $\Phi^{-1}(x)$. Решая полученную систему, находим:

$$\alpha_1'(x) = -e^x + \frac{15}{2}\,e^{-3x},\ \ \alpha_2'(x) = e^{-x} - \frac{5}{2}\,e^{-5x}.$$

Берем в качестве первообразных функции

$$\alpha_1(x) = -e^x - \frac{5}{2}\,e^{-3x},\ \ \alpha_2(x) = -e^{-x} + \frac{1}{2}\,e^{-5x}.$$

Тогда решение $Z(x)$ неоднородной системы (3.36) имеет вид

$$Z(x) = \begin{bmatrix} e^{2x} & 3e^{4x} \\ e^{2x} & e^{4x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e^x - \dfrac{5}{2}\,e^{-3x} \\ -e^{-x} + \dfrac{1}{2}\,e^{5x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4e^{3x} - e^{-x} \\ -2e^{3x} - 2e^{-x} \end{bmatrix}.$$

Выпишем общее решение системы (3.36):

$$Y(x) = c_1 \begin{bmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3e^{4x} \\ e^{4x} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4e^{3x} + e^{-x} \\ 2e^{3x} + 2e^{-x} \end{bmatrix}.$$

Опишем теперь применение метода вариации произвольных постоянных для отыскания решения уравнения (3.14) в предположении, что известна ф.с.р. $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ соответствующего однородного уравнения (3.17). Будем искать решение $\widetilde{y}(x)$ уравнения (3.14) в виде

$$\widetilde{y}(x) = \alpha_1(x)y_1(x) + ... + \alpha_n(x)y_n(x), \tag{3.37}$$

где $\alpha_1(x)$, ..., $\alpha_n(x)$ – непрерывно дифференцируемые на (a, b) функции. Рассмотрим вектор-функции

$$Z(x) = \begin{bmatrix} \widetilde{y}(x) \\ \widetilde{y}'(x) \\ \vdots \\ \widetilde{y}^{(n-1)}(x) \end{bmatrix},\ Z_1(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_1'(x) \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) \end{bmatrix},\ ...,\ Z_n(x) = \begin{bmatrix} y_n(x) \\ y_n'(x) \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}.$$

На основе изложенного об уравнениях (3.14), (3.17) и о системе (3.15) получаем, что $Z(x)$ – решение системы (3.15), а $Z_1(x)$, ..., $Z_n(x)$ – ф.с.р. соответствующей однородной системы. Поэтому, если рассмотрим матрицу

$$\Phi(x) = [Z_1(x), ..., Z_n(x)],$$

то вектор-функция

$$\alpha(x) = \begin{bmatrix} \alpha_1(x) \\ \vdots \\ \alpha_n(x) \end{bmatrix},$$

удовлетворяющая системе

$$\Phi(x)\alpha'(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ q(x) \end{bmatrix} \tag{3.38}$$

(эта система соответствует системе (3.32)), будет обладать следующим свойством: вектор-функция

$$Z(x) = \Phi(x)\alpha(x)$$

есть решение системы (3.15). Поэтому если для вектора $\alpha(x)$ с компонентами $\alpha_1(x)$, ..., $\alpha_n(x)$ выполнено равенство (3.38), то функция (3.37) является решением уравнения (3.14). Выпишем равенство (3.38) покомпонентно:

$$\begin{cases} \alpha_1'(x)y_1(x) + \alpha_2'(x)y_2(x) + \ldots + \alpha_n'(x)y_n(x) = 0, \\ \alpha_1'(x)y_1'(x) + \alpha_2'(x)y_2'(x) + \ldots + \alpha_n'(x)y_n'(x) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + \alpha_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) + \ldots + \alpha_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0, \\ \alpha_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \alpha_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + \alpha_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = q(x). \end{cases} \tag{3.39}$$

В случае отыскания решения неоднородного линейного дифференциального уравнения (3.14) обычно используют именно систему (3.39) для функций $\alpha_1'(x)$, ..., $\alpha_n'(x)$.

Пример. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}. \tag{3.40}$$

Уравнение (3.40) – это уравнение вида (3.14), в котором $n = 2$, $p_1 = -2$, $p_2 = 1$, $q(x) = \dfrac{e^x}{x}$. Функция $q(x)$ непрерывна на промежутках $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$. Будем рассматривать уравнение (3.40) на $(0, +\infty)$.

Соответствующее однородное уравнение

$$y'' - 2y' + y = 0$$

– это уравнение с постоянными коэффициентами. Его характеристический полином $\lambda^2 - 2\lambda + 1$ имеет корень $\lambda = 1$ кратности 2, ф.с.р. состоит из двух функций $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = xe^x$. Система (3.39) запишется в виде

$$\begin{cases} \alpha_1'(x)e^x + \alpha_2'(x)xe^x = 0, \\ \alpha_1'(x)e^x + \alpha_2'(x)(x+1)e^x = \dfrac{e^x}{x}. \end{cases}$$

Отсюда

$$\alpha_1'(x) = -1,\ \alpha_2'(x) = \frac{1}{x}.$$

Возьмем первообразные

$$\alpha_1(x) = -x,\ \alpha_2(x) = \ln(x).$$

Тогда (3.37) имеет вид

$$\widetilde{y}(x) = -xe^x + (\ln(x))xe^x.$$

Общее решение уравнения (3.40):

$$y = c_1e^x + c_2xe^x - xe^x + (\ln(x))xe^x.$$

Переобозначая $c_1 - 1$ через c_1 (понятно, что c_1 пробегает множество всех вещественных чисел тогда и только тогда, когда $c_1 - 1$ пробегает то же множество), можем переписать общее решение так:

$$y = e^x(c_1 + c_2x + x\ln(x)).$$

В случае, когда функции $p_1(x)$, ..., $p_n(x)$ в уравнении (3.14) постоянные, а $q(x)$ имеет специальный вид, существует еще один метод нахождения решения уравнения (3.14).

Сформулируем (без доказательства) теорему, описывающую этот метод.

Теорема 3.7. *Предположим, что в уравнении*

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_ny = q(x) \tag{3.41}$$

функция $q(x)$ представима в виде

$$q(x) = e^{ax}\left(P_k(x)\cos(bx) + Q_l(x)\sin(bx)\right), \tag{3.42}$$

где $P_k(x)$, $Q_l(x)$ – полиномы от x степеней k, l. Введем числа $m = \max(k,l)$, $\alpha = a + bi$,

$$s = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha \ - \ \text{не корень полинома } P_n(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_n; \\ t, & \text{если } \alpha \ - \ \text{корень кратности } t \text{ полинома } P_n(\lambda). \end{cases}$$

Тогда уравнение (3.41) имеет единственное решение вида

$$\widetilde{y}(x) = x^se^{ax}\left(\widetilde{P}_m(x)\cos(bx) + \widetilde{Q}_m(x)\sin(bx)\right), \tag{3.43}$$

где $\widetilde{P}_m(x)$, $\widetilde{Q}_m(x)$ – полиномы от x степени m.

Теорему 3.7 применяют так: в выражении (3.43) для $\widetilde{y}(x)$ неизвестными являются коэффициенты полиномов $\widetilde{P}_m(x)$, $\widetilde{Q}_m(x)$. Запишем выражение вида (3.43) с неопределенными коэффициентами этих полиномов, подставим в (3.41) и приравняем коэффициенты при функциях вида $x^r e^{ax}\cos(bx)$, $x^r e^{ax}\sin(bx)$, $r = 0, 1, ..., s + m$. Теорема 3.7 гарантирует, что полученная алгебраическая система относительно коэффициентов полиномов $\widetilde{P}_m(x)$, $\widetilde{Q}_m(x)$ имеет решение, и притом единственное.

Отметим, что в выражении (3.42) представление функции $q(x)$ в указанном виде может быть не единственным. Например, функцию

$$q(x) = xe^x$$

можно представить,как

$$q(x) = e^x(x\cos(0 \cdot x) + 1\sin(0 \cdot x)),$$

т. е. взять $P_1(x) = x$, $Q_0(x) = 1$. В этом случае $m = \max(1, 0) = 1$. Эту же функцию можно представить как

$$q(x) = e^x(x\cos(0 \cdot x) + (x^2 - 1)\sin(0 \cdot x)),$$

т. е. взять $P_1(x) = 1$, $Q_2(x) = x^2 - 1$. В этом случае $m = \max(1, 2) = 2$.

На практике следует выбирать представление (3.42) так, чтобы число m было возможно наименьшим.

Пример. Найдем общее решение уравнения

$$y'' - 2y' + y = x. \tag{3.44}$$

Это уравнение вида (3.41). Функцию $q(x) = x$ в правой части можно представить в виде (3.42):

$$x = e^{0\cdot x}(x\cos(0 \cdot x) + 1\sin(0 \cdot x))$$

с $a = 0$, $b = 0$, $P_k(x) = x$, $k = 1$, $Q_l(x) = 1$, $l = 0$. Число $\alpha = a + bi = 0$ – не корень полинома $\lambda^2 - 2\lambda + 1$. Поэтому $s = 0$, $m = \max(1, 0) = 1$. По теореме 3.7 у уравнения (3.44) есть единственное частное решение вида

$$\widetilde{y}(x) = x^0 e^{0x}\left(\widetilde{P}_1(x)\cos(0 \cdot x) + \widetilde{Q}_1(x)\sin(0 \cdot x)\right),$$

где $\widetilde{P}_1(x)$, $\widetilde{Q}_1(x)$ – полиномы степени 1, т. е.

$$\widetilde{y}(x) = \widetilde{P}_1(x) = Ax + B$$

(мы записываем неизвестный полином $\widetilde{P}_1(x)$ степени 1 с неопределенными коэффициентами A, B). Дифференцируем $\widetilde{y}(x)$:

$$\widetilde{y}'(x) = A,\ \widetilde{y}''(x) = 0,$$

и подставляем в уравнение (3.44):

$$0 - 2A + Ax + B = x.$$

Приравниваем коэффициенты при x^1, x^0:

$$A = 1, \ -2A + B = 0.$$

Отсюда $B = 2$ и частное решение $\widetilde{y}(x)$ имеет вид

$$\widetilde{y}(x) = x + 2.$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x.$$

Поэтому общее решение уравнения (3.44) запишется так:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + x + 2.$$

Сформулируем одно простое утверждение, связанное с нахождением решений неоднородных линейных систем и неоднородных линейных дифференциальных уравнений (так называемый принцип суперпозиции).

Пусть $Z_1(x)$ – решение системы

$$Y' = P(x)Y + Q_1(x), \tag{3.45}$$

$Z_2(x)$ – решение системы

$$Y' = P(x)Y + Q_2(x). \tag{3.46}$$

Тогда $Z(x) = Z_1(x) + Z_2(x)$ – решение системы

$$Y' = P(x)Y + Q_1(x) + Q_2(x).$$

Для доказательства этого утверждения подставим $Z_1(x)$ в (3.45), $Z_2(x)$ – в (3.46) и сложим полученные выражения:

$$Z' = Z_1' + Z_2' = P(x)Z_1 + Q_1(x) + P(x)Z_2 + Q_2(x) =$$

$$= P(x)(Z_1 + Z_2) + Q_1(x) + Q_2(x) = P(x)Z + Q_1(x) + Q_2(x).$$

Аналогичное утверждение для линейных дифференциальных уравнений порядка n формулируется так: если $\widetilde{y}_1(x)$ – решение уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = q_1(x),$$

$\widetilde{y}_2(x)$ – решение уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = q_2(x),$$

то $\widetilde{y}(x) = \widetilde{y}_1(x) + \widetilde{y}_2(x)$ – решение уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = q_1(x) + q_2(x).$$

Доказывается это утверждение так же, как его аналог для систем.

Пример. Найдем общее решение уравнения

$$y'' - 2y' + y = x + \frac{e^x}{x}. \tag{3.47}$$

Используя принцип суперпозиции и результаты двух последних примеров, получаем, что функция

$$\widetilde{y}(x) = -xe^x + (\ln(x))xe^x + x + 2$$

является решением уравнения (3.47), а общее решение этого уравнения имеет вид

$$y = e^x(c_1 + c_2x + x\ln(x)) + x + 2.$$

Как отмечалось выше, при решении линейных дифференциальных уравнений можно использовать операционный метод (иногда называемый методом преобразования Лапласа). Преобразование Лапласа применяется к так называемым функциям-оригиналам. Дадим вначале необходимые определения.

Рассмотрим функцию $f(x)$ с комплексными значениями, определенную на промежутке $a < x < b$. Можно записать

$$f(x) = \varphi(x) + i\psi(x),$$

где φ и ψ – вещественнозначные функции. Если существуют интегралы $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$ и $\int\limits_a^b \psi(x)\,dx$, полагаем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx + i\int\limits_a^b \psi(x)\,dx.$$

Для функций с комплексными значениями верны аналоги всех основных теорем интегрального исчисления: формула Ньютона–Лейбница, формулы замены переменных и интегрирования по частям, а также неравенство

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

(Здесь предполагается, что $b \ge a$.)

Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ называется функцией-оригиналом, если она обладает следующими свойствами:

1) $f(x) = 0$ при $x < 0$;

2) существует интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ для любых конечных a и b;

3) существуют такие постоянные $M > 0$ и $\sigma \geq 0$, что

$$|f(x)| \leq Me^{\sigma x} \text{ при всех } x. \tag{3.48}$$

Приведем примеры функций-оригиналов. Во всех этих примерах условия 1 и 2 выполнены, будем проверять лишь условие 3 для $x \geq 0$.

1. Функция Хевисайда

$$\delta_1(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Ясно, что неравенство (3.48) выполнено с $M = 1$ и $\sigma = 0$.

2. Функция $f(x) = x^n\delta_1(x)$, где n – положительное число. Из курса математического анализа известно, что если $\sigma > 0$, то $x^n e^{-\sigma x} \to 0$ при $x \to +\infty$, поэтому существует такое $M > 0$, что $x^n e^{-\sigma x} \leq M$ при $x \geq 0$ (почему?). Таким образом, условие 3 выполнено.

3. Функция $f(x) = \sin(kx + w)\delta_1(x)$. Так как $|\sin(kx + w)| \leq 1$, можно взять $M = 1$ и $\sigma = 0$.

4. Функция $f(x) = e^{ax}\delta_1(x)$, где $a = b + ic \in \mathbb{C}$. Из формулы Эйлера

$$e^{ax} = e^{bx}(\cos(cx) + i\sin(cx))$$

и из равенства

$$|\cos(cx) + i\sin(cx)| = 1$$

следует, что

$$|e^{ax}| \leq e^{bx},$$

поэтому можно взять $M = 1$ и $\sigma = \operatorname{Re} a$.

Отметим важные для нас свойства функций-оригиналов (как и в примерах, будем проверять лишь условие 3 из определения функции-оригинала).

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – функции-оригиналы и

$$|f(x)| \leq M_1 e^{\sigma_1 x}, \quad |g(x)| \leq M_2 e^{\sigma_2 x}. \tag{3.49}$$

1. Для любого постоянного c, $cf(x)$ – функция-оригинал. Проверка:

$$|cf(x)| \leq |c|M_1 e^{\sigma x}.$$

2. Функции $f(x) \pm g(x)$ – функции-оригиналы. Проверка:

$$|f(x) \pm g(x)| \leq M_1 e^{\sigma_1 x} + M_2 e^{\sigma_2 x} \leq (M_1 + M_2)e^{\max(\sigma_1,\sigma_2)x}.$$

3. Функция $f(x) \cdot g(x)$ – функция-оригинал. Проверка:

$$|f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leq M_1 M_2 e^{(\sigma_1+\sigma_2)x}.$$

4. Функция $\Phi(x) = \int\limits_0^x f(s)\,ds$ – функция-оригинал (здесь обозначаем переменную интегрирования буквой s, чтобы подчеркнуть, что аргумент x функции Φ – это верхний предел в рассматриваемом интеграле). Можно считать, что $\sigma_1 > 0$ (почему?). Тогда

$$|\Phi(x)| \leq \int\limits_0^x M_1 e^{\sigma_1 s}\,ds = \frac{M_1}{\sigma_1}\,e^{\sigma_1 s}\Big|_{s=0}^{s=x} = \frac{M_1}{\sigma_1}\,(e^{\sigma_1 x} - 1) \leq \frac{M_1}{\sigma_1}\,e^{\sigma_1 x}.$$

Сверткой функций $f(x)$ и $g(x)$ называется функция, обозначаемая $(f * g)(x)$ и определяемая формулой

$$(f * g)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s)g(x-s)\,ds.$$

Теорема 3.8. *Свертка $(f*g)(x)$ функций-оригиналов $f(x)$ и $g(x)$ является функцией-оригиналом, и верно равенство*

$$(f * g)(x) = \int\limits_0^x f(s)g(x-s)\,ds. \tag{3.50}$$

Доказательство. Докажем сначала равенство (3.50). Из определения функции-оригинала следует, что $f(s) = 0$ при $s < 0$ и $g(x-s) = 0$ при $x - s < 0$ (т. е. при $s > x$). Таким образом, подынтегральная функция в выражении для свертки равна 0 при $s < 0$ и $s > x$, и (3.50) следует из соотношений

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(x-s)\,ds =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} f(s)g(x-s)\,dx + \int\limits_0^x f(s)g(x-s)\,ds + \int\limits_x^{+\infty} f(s)g(x-s)\,ds =$$

$$= 0 + \int\limits_0^x f(s)g(x-s)\,ds + 0.$$

Докажем свойство 3. Если выполнены неравенства (3.49) и $\sigma = \max(\sigma_1, \sigma_2)$, то

$$|f(s)g(x-s)| \leq M_1 e^{\sigma s} M_2 e^{\sigma(x-s)} = M_1 M_2 e^{\sigma x}.$$

Поэтому

$$|(f * g)(x)| \leq \int\limits_0^x M_1 M_2 e^{\sigma x}\, ds = x M_1 M_2 e^{\sigma x}$$

(функция $M_1 M_2 e^{\sigma x}$ не зависит от переменной интегрирования s). При $x \geq 0$ верно неравенство

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots > x,$$

поэтому

$$|(f * g)(x)| \leq x M_1 M_2 e^{\sigma x} \leq M_1 M_2 e^{(\sigma+1)x}.$$

Теорема доказана.

Основным объектом операционного исчисления является преобразование Лапласа.

Пусть $f(x)$ – функция-оригинал, для которой выполнено неравенство

$$|f(x)| \leq M e^{\sigma x}.$$

Рассмотрим область D в комплексной плоскости:

$$D = \{s \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Re} s > \sigma\}$$

и определим функцию (преобразование Лапласа функции $f(x)$)

$$F(s) = \int\limits_0^{+\infty} f(x) e^{-sx}\, dx, \quad s \in D. \tag{3.51}$$

Функция $F(s)$ называется изображением функции-оригинала $f(x)$ при преобразовании Лапласа (или просто изображением $f(x)$ по Лапласу). Будем писать

$$f(x) \mapsto F(s).$$

Теорема 3.9. *Несобственный интеграл в* (3.51) *сходится.*

Доказательство. Из курса анализа известно, что для доказательства сходимости несобственного интеграла в правой части равенства (3.51) достаточно найти такую неотрицательную функцию $g(x)$, что

$$|f(x)e^{-sx}| \leq g(x),$$

и существует конечный предел

$$\lim_{T\to+\infty}\int\limits_0^T g(x)\,dx. \tag{3.52}$$

Поскольку

$$|f(x)e^{-sx}|\le Me^{\sigma x}e^{-(\operatorname{Re}s)x},$$

возьмем $g(x) = Me^{(\sigma-\operatorname{Re}s)x}$. Из определения области D следует, что $b=\sigma-\operatorname{Re}s<0$. Тогда

$$\int\limits_0^T g(x)\,dx=\int\limits_0^T Me^{bx}\,dx=\frac{M}{b}\,e^{bx}\Big|_{x=0}^{x=T}=\frac{M}{b}\,e^{bT}-\frac{M}{b}.$$

Так как $b<0$, $e^{bT}\to 0$ при $T\to+\infty$. Поэтому предел (3.52) существует и равен $-\dfrac{M}{b}$. Теорема доказана.

Примеры.

1. $\delta_1(x)\mapsto F(s)=\dfrac{1}{s}$, $\operatorname{Re}s>0$. Действительно, при $\operatorname{Re}s>0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}|e^{-sx}| =$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-(\operatorname{Re}s)x}=0$, а значит $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-sx}=0$. Поэтому

$$F(s)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-sx}\,dx=-\frac{1}{s}\,e^{-sx}\Big|_{x=0}^{x=+\infty}=\frac{1}{s}.$$

Для нахождения большего числа изображений докажем две теоремы.

Теорема 3.10. *Преобразование Лапласа линейно: если* $f_1(x)\mapsto F_1(s)$, $\operatorname{Re}s>\sigma_1$, *и* $f_2(x)\mapsto F_2(s)$, $\operatorname{Re}s>\sigma_2$, *а* c_1, c_2 *– постоянные, то*

$$c_1f_1(x)+c_2f_2(x)\mapsto c_1F_1(s)+c_2F_2(s),\quad \operatorname{Re}s>\max(\sigma_1,\sigma_2).$$

Доказательство. При $\operatorname{Re}s>\max(\sigma_1,\sigma_2)$ в силу линейности интеграла верны равенства

$$c_1f_1(x)+c_2f_2(x)\mapsto\int\limits_0^{+\infty}(c_1f_1(x)+c_2f_2(x))e^{-sx}\,dx=$$

$$=c_1\int\limits_0^{+\infty}f_1(x)e^{-sx}\,dx+c_2\int\limits_0^{+\infty}f_2(x)e^{-sx}\,dx=c_1F_1(s)+c_2F_2(s).$$

Теорема доказана.

Теорема 3.11 (смещения). *Если* $f(x) \mapsto F(s)$, $\operatorname{Re} s > \sigma$, *то* $e^{ax} f(x) \mapsto F(s-a)$, $\operatorname{Re} s > \sigma + \operatorname{Re} a$.

Доказательство. Верны равенства (при $\operatorname{Re} s > \sigma + \operatorname{Re} a$)

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{ax} f(x) e^{-sx}\, dx = \int\limits_0^{+\infty} f(x) e^{-(s-a)x}\, dx = F(s-a).$$

Теорема доказана.

Продолжим список примеров изображений функций-оригиналов.

2.
$$e^{ax}\delta_1(x) \mapsto \frac{1}{s-a}, \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a. \tag{3.53}$$

Это соотношение следует из формулы для изображения функции $\delta_1(x)$ и теоремы смещения.

3. $\cos(\omega x)\delta_1(x) \mapsto \dfrac{s}{s^2+\omega^2}$, $\operatorname{Re} s > 0$, $\sin(\omega x)\delta_1(x) \mapsto \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$, $\operatorname{Re} s > 0$.

Докажем первую из формул, вторая доказывается аналогично. По формуле Эйлера

$$\cos(\omega x) = \frac{e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}}{2}.$$

Из формулы (3.53) следует, что при $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re}(i\omega) = 0$

$$e^{i\omega x} \mapsto \frac{1}{s-i\omega}, \quad e^{-i\omega x} \mapsto \frac{1}{s+i\omega}.$$

Так как преобразование Лапласа линейно (теорема 3.10), при $\operatorname{Re} s > 0$

$$\cos(\omega x)\delta_1(x) \mapsto \frac{1}{2}\frac{1}{s-i\omega} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+i\omega} = \frac{1}{2}\frac{s+i\omega+s-i\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{s}{s^2+\omega^2}.$$

Выведите вторую формулу (для изображения функции $\sin(\omega x)\delta_1(x)$) самостоятельно.

4. $x\delta_1(x) \mapsto \dfrac{1}{s^2}$, $\operatorname{Re} s > 0$. Так как $xe^{-\sigma x} \to 0$ при $x \to +\infty$ и фиксированном $\sigma > 0$, для любого $\sigma > 0$ найдется такое $M > 0$, что

$$x \le M e^{\sigma x}, \; x \ge 0.$$

Поэтому интеграл (3.51) сходится при любом $s \in D$, где $D = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > 0\}$ (для любого $s \in D$ можно найти такое σ, что $0 < \sigma < \operatorname{Re} s$).

Напишем формулу для соответствующего преобразования Лапласа:

$$x\delta_1(x) \mapsto \int\limits_0^{+\infty} xe^{-sx}\, dx.$$

Заметим, что

$$e^{-sx}\,dx = -\frac{1}{s}\,d(e^{-sx}),$$

и применим формулу интегрирования по частям

$$\int\limits_a^b v\,du = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b u\,dv \tag{3.54}$$

к интегралу

$$-\frac{1}{s}\int\limits_0^{+\infty} x\,d(e^{-sx}),$$

полагая $v = x$, $u = e^{-sx}$. В результате получим соотношение

$$-\frac{1}{s}\int\limits_0^{+\infty} x\,d(e^{-sx}) = -\frac{1}{s}\left[xe^{-sx}\Big|_{x=0}^{x=+\infty} - \int\limits_0^{+\infty} e^{-sx}\,dx\right].$$

Так как

$$xe^{-sx} \to 0, \quad x \to +\infty,$$

при любом $s \in D$ ($|xe^{-sx}| = |x|e^{(-\operatorname{Re}s)x} \to 0$ при $x \to +\infty$),

$$xe^{-sx}\Big|_{x=0}^{x=+\infty} = 0.$$

Ранее доказано, что

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-sx}\,dx = \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re}s > 0$$

(см. пример 1). Поэтому

$$x\delta_1(x) \mapsto -\frac{1}{s}\left[-\frac{1}{s}\right] = \frac{1}{s^2}.$$

Можно показать, что если $n = 2, 3, \dots$, то

$$x^n\delta_1(x) \mapsto \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \operatorname{Re}s > 0.$$

Таким образом,

$$x^2\delta_1(x) \mapsto \frac{2}{s^3}, \quad x^3\delta_1(x) \mapsto \frac{6}{s^4}$$

и т. д.

Дальше будем считать, что функция-оригинал $f(x)$ (как и все ее рассматриваемые производные) имеет предел при x, стремящемся к 0 справа; эти пределы будут обозначаться $f(0)$, $f'(0)$ и т. д.

Теорема 3.12 (о дифференцировании оригинала). *Если у функции-оригинала $f(x)$ есть производная $f'(x)$,также являющаяся функцией-оригиналом, и $f(x) \mapsto F(s)$, $\operatorname{Re} s > \sigma_1$, $f'(s) \mapsto F_1(s)$, $\operatorname{Re} s > \sigma_2$, то*

$$F_1(s) = sF(s) - f(0), \quad \operatorname{Re} s > \max(\sigma_1, \sigma_2). \tag{3.55}$$

Доказательство. Для интеграла в выражении

$$f'(x) \mapsto \int\limits_0^{+\infty} f'(x) e^{-sx}\, dx$$

применим формулу интегрирования по частям (3.54), полагая $v = e^{-sx}$ и $u = f(x)$ (тогда $dv = -se^{sx}\, dx$, $du = f'(x)\, dx$):

$$\int\limits_0^{+\infty} f'(x) e^{-sx}\, dx = e^{-sx} f(x)\Big|_{x=0}^{x=+\infty} - \int\limits_0^{+\infty} f(x)(-s)e^{-sx}\, dx.$$

Заметим, что

$$e^{-sx} f(x) \to f(0)$$

при x, стремящемся к 0 справа, и

$$e^{-sx} f(x) \to 0 \text{ при } x \to +\infty$$

в силу определения области D для преобразования Лапласа.

Таким образом,

$$f'(x) \mapsto s\int\limits_0^{+\infty} f(x) e^{-sx}\, dx - f(0) = sF(s) - f(0),$$

что и требовалось доказать.

Используя полученную формулу (3.55), можем находить изображения старших производных функций-оригиналов. Так, например, если

$$f(x) \mapsto F(s), \quad f'(x) \mapsto F_1(s),$$

то, дважды применяя формулу (3.55), получим

$$f''(x) = (f'(x))' \mapsto sF_1(s) - f'(0) = s(sF(s) - f(0)) - f'(0) =$$
$$= s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

и т. д. Выведите самостоятельно формулу для изображения функции $f'''(x)$.

Рассмотрим задачу о нахождении изображения по Лапласу для некоторых классов функций-оригиналов.

Рассмотрим обратную задачу – найти функцию-оригинал по заданному изображению. Остановимся при этом на важном для приложений классе функций.

Оригиналы правильных рациональных дробей.

В математическом анализе рассматривают функции вида

$$\frac{P_n(s)}{Q_m(s)}, \tag{3.56}$$

где $P_n(s)$ и $Q_m(s)$ – многочлены от s степеней n и m соответственно. Их называют дробно-рациональными функциями (или рациональными дробями). Если $m > n$, дробно-рациональная функция (3.56) называется правильной. Дробно-рациональные функции вида

$$\frac{A}{(s-a)^p}, \quad p \in N,$$

$$\frac{As+B}{((s-a)^2+b^2)^p}, \quad p \in N,$$

где A, B, a, b – вещественные числа, называют простейшими.

Известно, что любую правильную дробно-рациональную функцию можно представить, и притом единственным способом, в виде суммы простейших дробей.

Из приведенных теорем и примеров следует, например, что

$$Ae^{ax}\delta_1(x) \mapsto \frac{A}{s-a},$$

$$Axe^{ax}\delta_1(x) \mapsto \frac{A}{(s-a)^2},$$

$$Ae^{ax}\cos(bx)\delta_1(x) \mapsto \frac{A(s-a)}{(s-a)^2+b^2},$$

$$Ae^{ax}\sin(bx)\delta_1(x) \mapsto \frac{Ab}{(s-a)^2+b^2}$$

(объясните!).

Примеры. Будем искать функции-оригиналы лишь при $x \geq 0$, поэтому множитель $\delta_1(x)$ будет опускаться.

1. $F(s) = \dfrac{3}{s-2}$.

Так как $e^{2x} \mapsto \dfrac{1}{s-1}$,

$$f(x) = 3e^{2x}.$$

2. $F(s) = \dfrac{4s+1}{(s-2)^2+4}$.

Представим
$$F(s) = F_1(s) + F_2(s),$$
где
$$F_1(s) = 4\frac{s-2}{(s-2)^2+4},$$
$$F_2(x) = \frac{9}{2}\,\frac{2}{(s-2)^2+4}$$
(проверьте справедливость этого равенства).

Из равенств
$$e^{2x}\cos(2x) \mapsto \frac{s-2}{(s-2)^2+4},$$
$$e^{2x}\sin(2x) \mapsto \frac{2}{(s-2)^2+4}$$
следует, что
$$f(x) = e^{2x}\left(4\cos(2x) + \frac{9}{2}\sin(2x)\right).$$

Применение операционного метода позволяет сводить решение некоторых дифференциальных уравнений к решению простых алгебраических задач. Рассмотрим пример.

Пример. Найти решение задачи Коши с начальными данными $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$ для дифференциального уравнения
$$y'' - 3y' + 2y = e^{-3x}.$$
Будем считать, что $x \geq 0$, и обозначим через $y(x)$ искомое решение. Пусть
$$y(x) \mapsto Y(s),$$
тогда
$$y'(x) \mapsto sY(s) - y(0) = sY(s) - 1,$$
$$y''(x) \mapsto s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - s + 2.$$
Применяя преобразование Лапласа к рассматриваемому дифференциальному уравнению и учитывая, что
$$e^{3x} \mapsto \frac{1}{s-3},$$
приходим к следующему (алгебраическому!) уравнению для $Y(s)$:
$$s^2Y(s) - s + 2 - 3sY(s) + 3 + 2Y(s) = \frac{1}{s-3}$$

или
$$(s^2-3s+2)Y(s)=s-5+\frac{1}{s-3}.$$
Так как $s^2-3s+2=(s-1)(s-2)$,
$$Y(s)=\frac{s-5}{(s-1)(s-2)}+\frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)}. \tag{3.57}$$
Найдем разложение $Y(s)$ в виде
$$Y(s)=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{s-3}. \tag{3.58}$$
Приравняем (3.57) и (3.58), приведем выражения слева и справа к общему знаменателю и выпишем числители:
$$A(s-2)(s-3)+B(s-1)(s-3)+C(s-1)(s-2)=(s-5)(s-3)+1.$$
Подставим в это равенство $s=1,2,3$:
$$s=1: \quad 2A=9,\ A=\frac{9}{2};$$
$$s=2: \quad -B=4,\ B=-4;$$
$$s=3: \quad 2C=1,\ C=\frac{1}{2}.$$
Следовательно,
$$Y(s)=\frac{9}{2(s-1)}-\frac{4}{s-2}+\frac{1}{2(s-3)},$$
отсюда
$$y(x)=\frac{9}{2}\,e^x-4e^{2x}+\frac{1}{2}\,e^{3x}$$
(объясните!).

Рассмотрим теперь один важный класс линейных дифференциальных уравнений порядка n – линейные уравнения с аналитическими коэффициентами. Предположим, что в уравнении (3.14) коэффициенты $p_1(x)$, ..., $p_n(x)$ и функция $q(x)$ разлагаются в степенные ряды:
$$p_i(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k^{(i)}(x-x_0)^k,\ i=1,...,n, \tag{3.59}$$
$$q(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(x-x_0)^k, \tag{3.60}$$
сходящиеся в некоторой окрестности точки x_0.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.13. *Если ряды* (3.59), (3.60) *сходятся при* $|x-x_0|<r$, *где* $r>0$, *то для любых чисел* y_0, y_0', ..., $y_0^{(n-1)}$ *решение* $y(x)$ *уравнения* (3.14), *удовлетворяющее начальным условиям*

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},$$

разлагается в степенной ряд

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k(x-x_0)^k, \tag{3.61}$$

который сходится при $|x-x_0|<r$.

Эту теорему часто используют для нахождения решений уравнения (3.14). Для определения коэффициентов A_k в разложении (3.61) используют следующие два метода. Заметим, во-первых, что вследствие формулы Тейлора

$$A_0=y(x_0),\ A_1=y'(x_0),\ A_2=\frac{y''(x_0)}{2},\ \ldots,\ A_{n-1}=\frac{y^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}.$$

Поэтому коэффициенты A_0, ..., A_{n-1} определяются сразу из начальных условий:

$$A_0=y_0,\ A_1=y_0',\ A_2=\frac{y_0''}{2},\ \ldots,\ A_{n-1}=\frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}.$$

Первый метод состоит в следующем: ряд (3.61) подставляется в уравнение (3.14), приравниваются коэффициенты при одинаковых степенях $(x-x_0)$ и из полученных уравнений последовательно находятся коэффициенты A_n, A_{n+1}, ...

Пример. Найдем разложение в степенной ряд в окрестности $x_0=0$ (с точностью до x^4) общего решения уравнения

$$y''-\frac{2}{1-x}\,y'+\frac{1}{1-x}\,y=0. \tag{3.62}$$

Известно, что для нахождения общего решения достаточно отыскать ф.с.р. В нашем случае будем искать ф.с.р. $y_1(x)$, $y_2(x)$ как решения, удовлетворяющие следующим начальным условиям:

$$\begin{cases}y_1(0)=1,\\ y_1'(0)=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}y_2(0)=0,\\ y_2'(0)=1.\end{cases}$$

Так как векторы $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ линейно независимы, построенные решения действительно будут составлять ф.с.р.

Функции
$$p_1(x) = -\frac{2}{1-x},\ p_2(x) = -\frac{1}{1-x}$$
разлагаются в ряды по степеням x, сходящиеся при $|x| < 1$. По теореме 3.13 решения $y_1(x)$, $y_2(x)$ будут разлагаться в ряды по степеням x, также сходящиеся при $|x| < 1$:
$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(1)} x^k, \tag{3.63}$$
$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(2)} x^k. \tag{3.64}$$
Из начальных условий находим:
$$A_0^{(1)} = 1,\ A_1^{(1)} = 0,\ A_0^{(2)} = 0,\ A_1^{(2)} = 1.$$
Продифференцируем ряды (3.63), (3.64) и подставим их в уравнение
$$(1-x)y'' - 2y' + y = 0,$$
равносильное уравнению (3.62) при $x \neq 1$:
$$(1-x)\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)A_k^{(i)} x^{k-2} - 2\sum_{k=1}^{\infty} kA_k^{(i)} x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(i)} x^k = 0,\ i = 1, 2. \tag{3.65}$$
Приривниваем коэффициент при x^0 в левой части равенства (3.65) нулю:
$$2A_2^{(i)} - 2A_1^{(i)} + A_0^{(i)} = 0.$$
Отсюда
$$A_2^{(1)} = -\frac{1}{2},\ A_2^{(2)} = 1.$$
Приравниваем нулю коэффициент при x^1:
$$6A_3^{(i)} - 2A_2^{(i)} - 4A_2^{(i)} + A_1^{(i)} = 6A_3^{(i)} - 6A_2^{(i)} + A_1^{(i)} = 0.$$
Отсюда
$$A_3^{(1)} = -\frac{1}{2},\ A_3^{(2)} = \frac{5}{6}.$$
Наконец, приравниваем нулю коэффициент при x^2:
$$12A_4^{(i)} - 6A_3^{(i)} - 6A_3^{(i)} + A_2^{(i)} = 12A_4^{(i)} - 12A_3^{(i)} + A_2^{(i)} = 0.$$
Отсюда
$$A_4^{(1)} = -\frac{11}{24},\ A_4^{(1)} = \frac{3}{4}.$$

Таким образом, разложения для функций $y_1(x)$, $y_2(x)$ имеют вид:

$$y_1(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} - \frac{11}{24}\,x^4 + ...,$$

$$y_2(x) = x + x^2 + \frac{5x^3}{6} + \frac{3x^4}{4} + ...,$$

где многоточиями обозначены члены степенных рядов, содержащие x^5, x^6, ...

Теперь получаем требуемое разложение общего решения уравнения (3.62):

$$y(x) = c_1 + c_2x + \left(c_2 - \frac{c_1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{5c_2}{6} - \frac{c_1}{2}\right)x^3 + \left(\frac{3c_2}{4} - \frac{11c_1}{24}\right)x^4 + ...$$

Второй метод нахождения коэффициентов в разложении (3.61) состоит в последовательном применении равенств

$$A_k = \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!},\ k = 0, 1, ...,$$

вытекающих из формулы Тейлора. Как было показано, коэффициенты A_0, ..., A_{n-1} ряда (3.61) определяются из начальных условий. Так как искомая функция $y(x)$ – решение уравнения (3.14), получаем равенство

$$y^{(n)}(x_0) = q(x_0) - p_1(x_0)y^{(n-1)}(x_0) - ... - p_n(x_0)y(x_0),$$

из которого находим $y^{(n)}(x_0)$, а следовательно, и A_n.

Дифференцируем уравнение (3.14) по x и подставляем $x = x_0$:

$$y^{(n+1)}(x_0) = q'(x_0) - p_1'(x_0)y^{(n-1)}(x_0) - p_1(x_0)y^{(n)}(x_0) - ...$$
$$... - p_n'(x_0)y(x_0) - p_n(x_0)y'(x_0).$$

Все числа, входящие в правую часть этого равенства, уже известны. Из него находим $y^{(n+1)}(x_0)$ и A_{n+1}. Продолжая дифференцировать уравнение (3.14), последовательно определим A_{n+2}, ...

Пример. Найдем разложение в степенной ряд в окрестности $x_0 = 0$ (с точностью до x^5) общего решения уравнения

$$y'' - xy = 0. \tag{3.66}$$

Будем так же, как и в предыдущем примере, искать ф.с.р. $y_1(x)$, $y_2(x)$ как решения, удовлетворяющие начальным условиям

$$\begin{cases} y_1(0) = 1, \\ y_1'(0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2(0) = 0, \\ y_2'(0) = 1. \end{cases}$$

Функции $p_1(x) = 0$, $p_2(x) = x$ разлагаются в ряды по степеням x, сходящиеся при $|x| < \infty$, т. е. при $|x| < R$ для любого $R > 0$. Поэтому по теореме 3.13 функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ разлагаются в ряды, сходящиеся при $|x| < R$ для любого $R > 0$, т. е. в ряды, сходящиеся при $|x| < \infty$.

Запишем представления (3.63), (3.64) для функций $y_1(x)$, $y_2(x)$. Из начальных условий следует, что

$$A_0^{(1)} = 1,\ A_1^{(1)} = 0,\ A_0^{(2)} = 0,\ A_1^{(2)} = 1.$$

Из (3.66) получаем при $x = 0$

$$y''(0) = 0.$$

Отсюда $A_2^{(1)} = 0$, $A_2^{(2)} = 0$. Дифференцируем равенство

$$y'' = xy$$

по x:

$$y''' = xy' + y. \tag{3.67}$$

Подставим в (3.67) $x = 0$:

$$y'''(0) = y(0).$$

Поэтому $y_1'''(0) = 1$, $y_2'''(0) = 0$, $A_3^{(1)} = \dfrac{1}{6}$, $A_3^{(2)} = 0$.

Дифференцируем (3.67):

$$y^{(\prime\mathrm{v})} = xy'' + 2y'. \tag{3.68}$$

При $x = 0$

$$y^{(\prime\mathrm{v})}(0) = 2y'(0).$$

Отсюда $y_1^{(\prime\mathrm{v})}(0) = 0$, $y_2^{(\prime\mathrm{v})}(0) = 2$, $A_4^{(1)} = 0$, $A_4^{(2)} = \dfrac{2}{4!} = \dfrac{1}{12}$.

Дифференцируем (3.68):

$$y^{(\mathrm{v})} = xy''' + 3y''.$$

При $x = 0$

$$y^{(\mathrm{v})}(0) = 3y''(0) = 0.$$

Отсюда $A_5^{(1)} = A_5^{(2)} = 0$ и функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ представляются рядами

$$y_1(x) = 1 + \frac{x^3}{6} + \ldots,$$

$$y_2(x) = x + \frac{x^4}{12} + \ldots,$$

где многоточиями обозначены члены рядов, содержащие x^6, x^7, ... Общее решение уравнения (3.66), таким образом, имеет вид

$$y(x) = c_1 + c_2 x + \frac{c_1 x^3}{6} + \frac{c_2 x^4}{12} + \ldots .$$

Литература

1. Бондарев А. С., Доценко М. Л., Фролова Е. В. Математический анализ (функции одной вещественной переменной): Учеб. пособие / Под ред. А. Л. Белопольского; СПбГЭТУ. СПб., 1988. 100 с.

2. Колбина С. А., Пилюгин С. Ю. Линейная алгебра (дополнительные главы): Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ “ЛЭТИ“, 2009. 60 с.

3. Белопольский А. Л., Бодунов Н. А., Червинская Н. М. Типовые расчеты по курсу “Алгебра и геометрия“: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ “ЛЭТИ“, 2008. 92 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Бодунов Николай Александрович
Пилюгин Сергей Юрьевич

Дифференциальные уравнения
Учебное пособие

Редактор Э. К. Долгатов

Подписано в печать Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Гарнитура "Times". Печ. л. 3,75.
Тираж 560 экз. Заказ

Издательство СПбГЭТУ "ЛЭТИ"
197376, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5