Министерство общего и профессионального образования РФ

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

Н.А.БОДУНОВ С.И.ЧЕЛКАК В.М.ЧИСТЯКОВ

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. МНОГОЧЛЕНЫ. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Санкт-Петербург
1996

Министерство общего и профессионального образования РФ

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

Н.А.БОДУНОВ С.И.ЧЕЛКАК В.М.ЧИСТЯКОВ

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. МНОГОЧЛЕНЫ. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
1996

ББК В1161.61я
Б61
УДК 512.64:514.17

Бодунов Н.А., Челкак С.И., Чистяков В.М. Комплексные числа. Многочлены. Векторная алгебра и аналитическая геометрия: Учеб. пособие / ГЭТУ. – СПб., 1996. – 60с.

Посвящено изучению комплексных чисел, многочленов и основ аналитической геометрии.

Предназначено для студентов всех технических специальностей ГЭТУ.

Рецензенты: кафедра высшей математики Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций; д-р физ.-мат. наук Л.В.Розовский (С.-Петербургская химико-фармацевтическая академия).

Утверждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

ISN 5-7629-0135-1

1. Элементы аналитической геометрии. Метод координат

Основная цель координатного метода состоит в том, чтобы изучение геометрических объектов (точки, линии, поверхности) заменить изучением числовых множеств. Тогда геометрические задачи могут решаться средствами алгебры и анализа. Переход от геометрических объектов к числовым множествам осуществляется с помощью введения системы координат.

1.1. Система координат на прямой

Рассмотрим произвольную прямую линию. Выберем на ней некоторую точку O и направление, которое будем называть положительным. Кроме того выберем единицу масштаба – некоторый отрезок l. Теперь каждой точке M данной прямой можно сопоставить единственное число x, называемое ее координатой, по следующему правилу: оно равно длине отрезка OM, выраженной через выбранную единицу масштаба l, взятой со знаком $''+''$, если точка M лежит в положительном направлении от точки O, и со знаком $''-''$ в противном случае (рис.1.1).

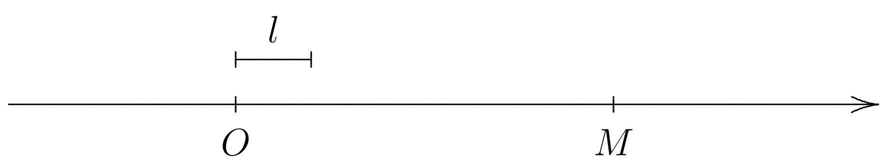

Рис.1.1

Точка O называется началом координат. Ее координата равна нулю. Ясно также, что задание координаты точки M однозначно определяет положение этой точки на данной прямой. Таким образом на прямой введена система координат, которая устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством вещественных чисел $I\!R$ и множеством точек этой прямой. Вот почему прямую с выбранной на ней координатной системой называют еще числовой осью. Желая указать координату данной точки в выбранной системе координат, будем записывать ее в круглых скобках рядом с обозначением самой точки, например: $M_1(x_1), M_2(x_2), ..., M_n(x_n)$. Числовую ось будем обозначать двумя прописными буквами, например OX, при этом первая служит обозначением начала координат, вторая же носит чисто символический характер и больше служит для различения числовых осей. Указание на числовой оси одной (отличной от O) или нескольких точек с их координатами однозначно определяет единицу масштаба, изображать которую отдельно теперь уже нет необходимости (рис.1.2).

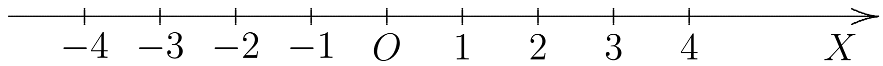

Рис.1.2

Допустим, что на прямой наряду с рассмотренной системой координат OX (старая система координат) введена другая (новая система координат), отличающаяся от старой лишь началом O'. Пусть координатой точки O' в старой системе координат является число a и M – произвольная точка прямой. Если x – старая координата точки M, то ее новая координата x' связана со старой соотношением (рис.1.3)

$$x = x' + a. \tag{1.1}$$

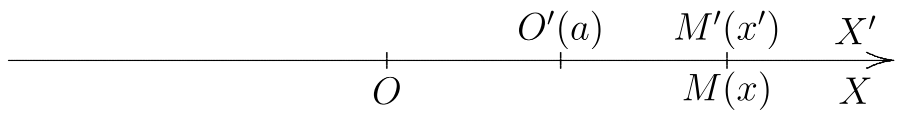

Рис.1.3

Упражнение. Доказать (1.1), рассмотрев все возможные случаи взаимного расположения трех точек O, O', M на прямой.

Пусть теперь на числовой оси заданы две точки: $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$. Обозначим через $\rho(M_1, M_2)$ расстояние между точками M_1 и M_2 (измеренное, разумеется, в единице масштаба оси) и покажем, что

$$\rho(M_1, M_2) = |x_2 - x_1|. \tag{1.2}$$

Если хотя бы одна из этих точек совпадает с началом координат O (пусть для определенности это будет точка M_1, т.е. $x_1 = O$), то из самого определения координаты точки на числовой оси следует, что в этом случае

$$\rho(M_1, M_2) = \rho(O, M_2) = |x_2| = |x_2 - x_1|. \tag{1.3}$$

Если же точки M_1 и M_2 отличны от начала координат O, то введем новую систему координат, поместив ее начало O' в точку M_1. Тогда новая координата x_2' точки M_2 связана с ее старой координатой x_2, согласно (1.1), соотношением $x_2 = x_2' + x_1$, откуда $x_2' = x_2 - x_1$. Теперь аналогично (1.3) получаем

$$\rho(M_1, M_2) = \rho(O', M_2) = |x_2'| = |x_2 - x_1|,$$

что и доказывает (1.2).

Задача. Найти координату середины M отрезка числовой оси, ограниченного точками $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ (рис.1.4).

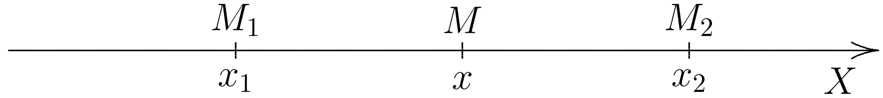

Рис.1.4

Решение. Координату x точки M находим из условия

$$\rho(M, M_1) = \rho(M, M_2).$$

В силу (1.2) это означает, что

$$|x_1 - x| = |x_2 - x|.$$

Возводя обе части равенства в квадрат, легко находим, что

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}\,. \qquad (1.4)$$

1.2. Системы координат на плоскости

Рассмотрим теперь произвольную плоскость и поставим точкам этой плоскости во взаимно однозначное соответствие упорядоченные пары вещественных чисел – координаты точек. Это можно сделать с помощью различных систем координат. Сначала рассмотрим самую распространенную – декартову прямоугольную систему координат. Для этого введем две взаимно перпендикулярные числовые оси OX и OY (координатные оси) с общей единицей масштаба. Первую числовую ось (OX) назовем осью абсцисс, вторую (OY) – осью ординат, а их общее начало (точку O) – началом координат. Будем считать, что кратчайший поворот (на угол $\frac{\pi}{2}$) от оси OX к оси OY происходит против хода часовой стрелки (рис.1.5).

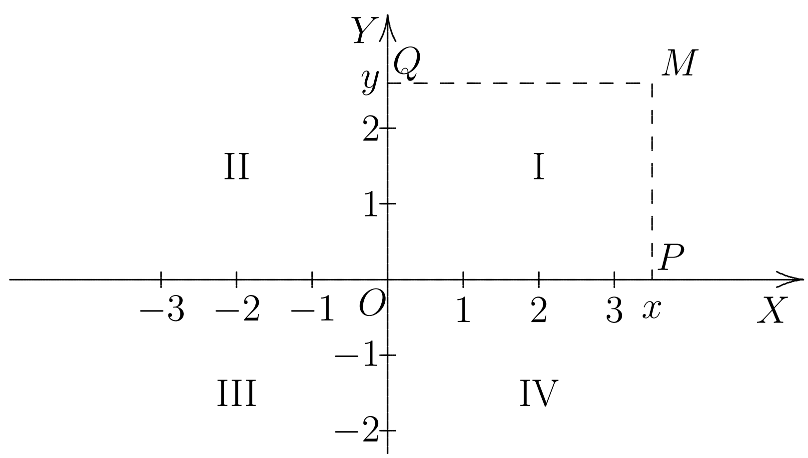

Рис.1.5

Пусть M – произвольная точка плоскости, а x и y – координаты проекций P и Q этой точки на числовые оси OX и OY соответственно. Упорядоченную пару чисел $(x; y)$ назовем координатами точки M в построенной декартовой прямоугольной системе координат. Число x назовем абсциссой точки M, число y – ее ординатой. При этом, как и в случае прямой, координаты точки будем записывать в круглых скобках рядом с ее обозначением: $M(x; y)$. Установленное соответствие между точками плоскости и упорядоченными парами чисел является взаимно однозначным (почему?).

Будем обозначать декартову систему координат на плоскости символом OXY. Координатные оси OX и OY разделяют плоскость на четыре части, называемые координатными четвертями или квадрантами. Они занумерованы так, как показано на рис.1.5. Так же, как и на прямой, после введения системы координат на плоскости легко получить формулу для вычисления расстояния $\rho(M_1, M_2)$ между точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Обратимся к рис.1.6.

Треугольник $M_1M_2M_3$ – прямоугольный. По теореме Пифагора

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{\rho^2(M_1, M_3) + \rho^2(M_2, M_3)}. \tag{1.5}$$

Формула (1.5) справедлива и в том случае, когда отрезок M_1M_2 параллелен одной из координатных осей (в этом случае точка M_3 совпадает с одной из точек M_1 или M_2).

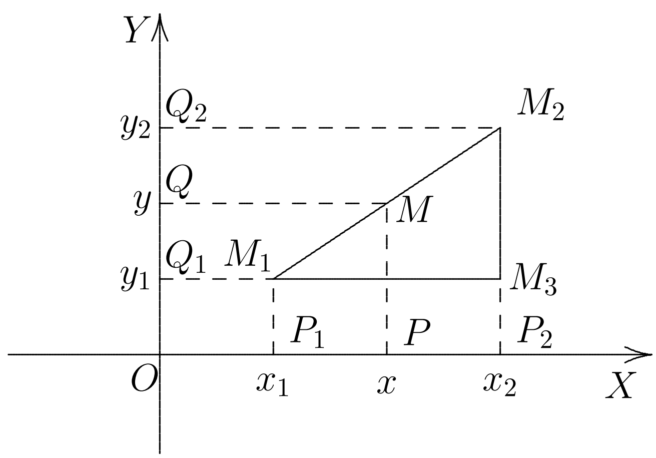

Рис.1.6

Очевидно, что $\rho(M_1, M_3) = \rho(P_1, P_2)$ и $\rho(M_2, M_3) = \rho(Q_1, Q_2)$ (через P_1, P_2 и Q_1, Q_2 обозначены проекции точек M_1, M_2 на координатные оси OX и OY соответственно). С учетом формулы (1.2)

$$\rho(P_1, P_2) = |x_2 - x_1|, \quad \rho(Q_1, Q_2) = |y_2 - y_1|. \tag{1.6}$$

Подставляя (1.6) в (1.5), получаем требуемую формулу:

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{1.7}$$

Отметим также, что проекциями P и Q середины $M(x; y)$ отрезка M_1M_2 служат середины отрезков P_1P_2 и Q_1Q_2 соответственно (рис.1.6). Поэтому с учетом (1.4) легко находим, что $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

Рассмотрим кроме декартовой еще одну систему координат на плоскости, так называемую полярную систему координат. Выберем на плоскости точку O, называемую полюсом. Проведем из полюса луч, который назовем полярной осью, и для измерения длин выберем единицу масштаба. Взяв произвольную точку M, отличную от полюса, соединим ее с полюсом O отрезком, длину которого r назовем полярным радиусом точки M. Угол φ между полярной осью и отрезком OM, измеряемый в радианах и отсчитываемый от полярной оси против хода часовой стрелки, назовем полярным углом точки M (рис.1.7).

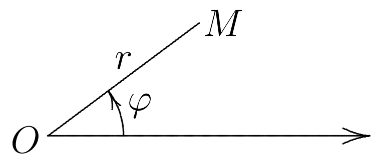

Рис.1.7

Полученную упорядоченную пару чисел $(r;\varphi)$ назовем полярными координатами точки M (не совпадающей с O). Из определения ясно, что $r>0$, а значение полярного угла лежит в пределах $0\le\varphi<2\pi$. Тем самым установлено взаимно однозначное соответствие между точками плоскости с исключенным полюсом и упорядоченными парами чисел $(r;\varphi)$, где $r>0$, $0\le\varphi<2\pi$ (почему?). Для полюса O естественно положить $r=0$, а значение полярного угла φ не определять.

Замечание. *Иногда значение полярного угла из промежутка* $[0,2\pi)$ *называют его главным значением. При этом, если* φ_0 *– главное значение полярного угла, то другими допустимыми значениями полярного угла служат* $\varphi=\varphi_0+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. *Ясно, что пары* $(r;\varphi)$ *и* $(r;\varphi_0)$ *определяют одну и ту же точку плоскости.*

Пусть теперь на плоскости введены декартова и полярная системы координат, причем полюс совпадает с началом O, а полярная ось – с положительной полуосью оси абсцисс (единица масштаба в обеих системах предполагается общей) (рис.1.8).

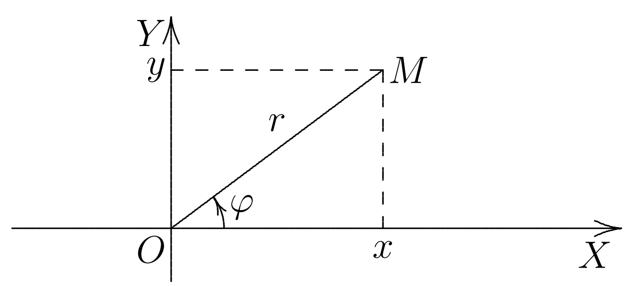

Рис.1.8

Из рис.1.8 видно, что

$$\begin{cases} x = r\cos(\varphi), \\ y = r\sin(\varphi) \end{cases} \tag{1.8}$$

и, следовательно,

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \cos(\varphi) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin(\varphi) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases} \tag{1.9}$$

Формулы (1.8) задают переход от полярных координат к декартовым, а (1.9) – от декартовых к полярным в рассматриваемом случае. При этом угол φ находится по значениям $\cos(\varphi)$ и $\sin(\varphi)$ (для случая $x^2+y^2 \neq 0$, т.е. когда соответствующая точка не совпадает с полюсом O).

Пример. Найти полярные координаты точки M с декартовыми координатами $x = -1$, $y = 1$.

По формулам (1.9) находим:

$$r = \sqrt{2}; \quad \cos(\varphi) = \frac{-1}{\sqrt{2}}; \quad \sin(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$ (главное значение полярного угла). Итак, $\left(\sqrt{2}; \dfrac{3\pi}{4}\right)$ – полярные координаты данной точки.

Рассмотрим теперь на плоскости две декартовы прямоугольные системы координат OXY (назовем ее старой системой координат) и $O'X'Y'$ (новая система координат)(рис.1.9) с параллельными и одинаково направленными координатными осями и общей единицей масштаба. Пусть $(a; b)$ – координаты точки O' в системе OXY.

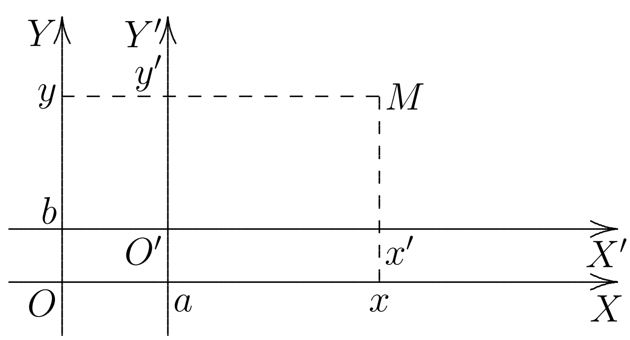

Рис.1.9

Иногда говорят, что координатная система $O'X'Y'$ получена из системы OXY параллельным переносом осей, определяемым числами a и b.

Формулы, связывающие старые $(x; y)$ и новые $(x'; y')$ координаты произвольной точки M по аналогии с (1.1) имеют вид:

$$\begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b. \end{cases} \tag{1.10}$$

Формулы (1.10) называются формулами преобразования декартовых прямоугольных координат на плоскости при параллельном переносе осей.

Возьмем теперь в плоскости декартову прямоугольную систему координат OXY и введем новую систему координат $OX'Y'$ с тем же началом и масштабом, оси которой OX' и OY' повернуты относительно осей OX и OY на угол α (рис.1.10).

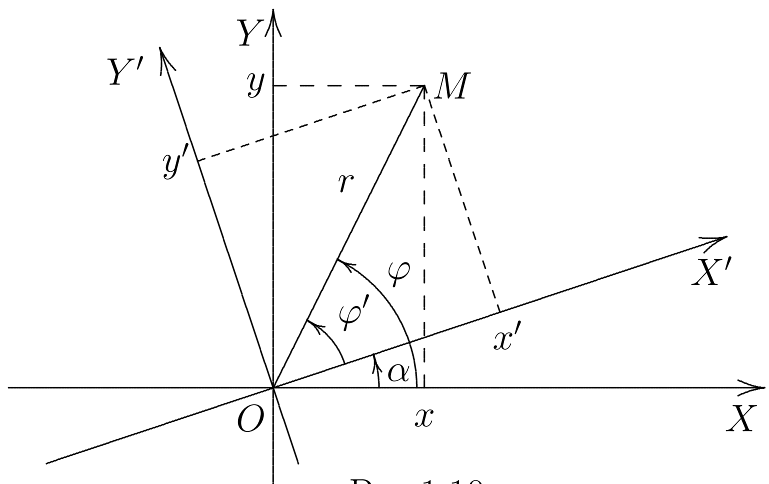

Рис.1.10

Обозначим через $(r; \varphi)$ полярные координаты точки M, принимая за полярную ось луч OX, и через $(r; \varphi')$ полярные координаты той же точки, принимая за полярную ось луч OX'. Очевидно, $\varphi = \alpha + \varphi'$. Пусть $(x; y)$ и $(x'; y')$ – координаты точки M в системах OXY и $OX'Y'$ соответственно. Тогда, согласно формулам (1.8)

$$x = r\cos(\varphi), \quad y = r\sin(\varphi);$$
$$x' = r\cos(\varphi'), \quad y' = r\sin(\varphi').$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\varphi) = r\cos(\alpha + \varphi') = r(\cos(\alpha)\cos(\varphi') - \sin(\alpha)\sin(\varphi')) = \\ &= x'\cos(\alpha) - y'\sin(\alpha); \\ y &= r\sin(\varphi) = r\sin(\alpha + \varphi') = r(\sin(\alpha)\cos(\varphi') + \cos(\alpha)\sin(\varphi')) = \\ &= x'\sin(\alpha) + y'\cos(\alpha). \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{cases} x = x'\cos(\alpha) - y'\sin(\alpha), \\ y = x'\sin(\alpha) + y'\cos(\alpha). \end{cases} \tag{1.11}$$

Из (1.11) легко находим, что

$$\begin{cases} x' = x\cos(\alpha) + y\sin(\alpha), \\ y' = -x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha). \end{cases} \tag{1.12}$$

Формулы (1.11) и (1.12) называют формулами преобразования декартовых координат при повороте координатных осей.

1.3. Системы координат в пространстве

Выберем в пространстве какую–нибудь плоскость, а в ней декартову систему координат OXY (рис.1.11).

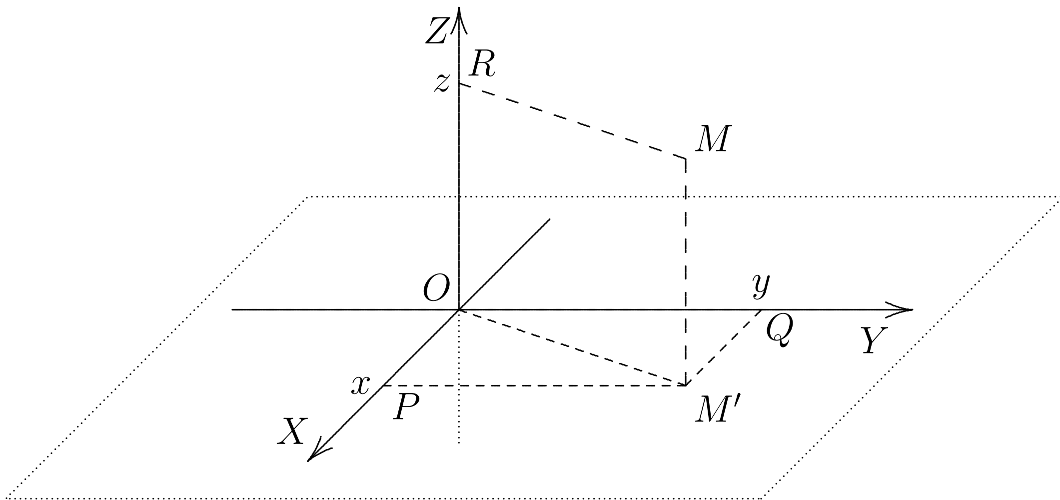

Рис.1.11

Проведем через точку O числовую ось OZ перпендикулярно выбранной плоскости так, чтобы со стороны ее положительного направления кратчайший поворот от луча OX к лучу OY был виден происходящим против хода часовой стрелки. Возьмем в пространстве произвольную точку M и обозначим через M' ее проекцию (основание перпендикуляра) на выбранную плоскость, а через R – ее проекцию на ось OZ. Пусть точка M' в системе координат OXY имеет координаты $(x;y)$, а точка R на оси OZ – координату z. Тройку чисел $(x;y;z)$ примем за координаты точки M. Число x назовем абсциссой точки M, число y – ее ординатой, число z – аппликатой. Соответственно назовем и координатные оси: ось OX – осью абсцисс, ось OY – осью ординат, ось OZ – осью аппликат. Установленное соответствие между точками пространства и упорядоченными тройками чисел $(x;y;z)$ является взаимно однозначным (почему?).

Введенная координатная система называется декартовой прямоугольной системой координат в пространстве с началом в точке O и обозначается $OXYZ$. Состоит она, таким образом, из трех пересекающихся взаимно перпендикулярных числовых осей с единым масштабом и общим началом координат. Ясно, что координатами произвольной точки пространства являются координаты ее проекций на координатные оси.

Наряду с координатными осями рассматривают координатные плоскости XOY, XOZ, YOZ, содержащие соответствующие оси и разбивающие все пространство на восемь частей, называемых координатными октантами.

Рассмотрим теперь в пространстве две декартовы прямоугольные системы координат $OXYZ$ (старую) и $O'X'Y'Z'$ (новую) с параллельными и одинаково направленными координатными осями и общей единицей масштаба. Пусть $(a; b; c)$ – координаты точки O' в системе $OXYZ$. Формулы, связывающие старые $(x; y; z)$ и новые $(x'; y'; z')$ координаты произвольной точки M, по аналогии с (1.1) и (1.10) имеют вид:

$$\begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b, \\ z = z' + c \end{cases} \tag{1.13}$$

и обычно называются формулами преобразования декартовых прямоугольных координат в пространстве при параллельном переносе осей.

Выведем формулу для вычисления расстояния $\rho(M_1, M_2)$ между точками M_1 и M_2 в пространстве. Прежде всего, из рис.1.11 с использованием формул (1.2) и (1.7) легко находим, что в координатной системе $OXYZ$ для точки $M(x; y; z)$

$$\rho(O, M) = \sqrt{\rho^2(O, M') + \rho^2(M', M)} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{1.14}$$

Для определения расстояния между произвольными точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ поступим следующим образом. Наряду с исходной системой координат $OXYZ$ рассмотрим новую систему $M_1X'Y'Z'$ с началом в точке M_1, полученную параллельным переносом осей (рис.1.12). Согласно (1.13) новые координаты $(x_2'; y_2'; z_2')$ точки M_2 связаны с ее старыми координатами $(x_2; y_2; z_2)$ соотношениями

$$\begin{cases} x_2 = x_2' + x_1\,, \\ y_2 = y_2' + y_1\,, \\ z_2 = z_2' + z_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2' = x_2 - x_1\,, \\ y_2' = y_1 - y_1\,, \\ z_2' = z_2 - z_1. \end{cases}$$

Остается для точки $M_2(x_2'; y_2'; z_2')$ и координатной системы $M_1X'Y'Z'$ воспользоваться формулой (1.14):

$$\begin{aligned} \rho(M_1, M_2) &= \sqrt{(x_2')^2 + (y_2')^2 + (z_2')^2} = \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

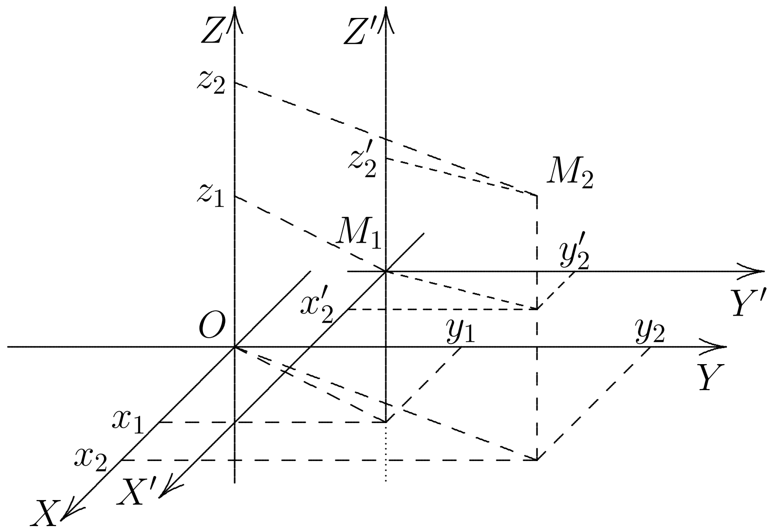

Рис.1.12

Отметим следующие очевидные свойства расстояния между точками (на прямой, на плоскости и в пространстве):

1) $\rho(M_1, M_2) \geq 0$; $\quad \rho(M_1, M_2) = 0 \Longleftrightarrow M_1 = M_2$;

2) $\rho(M_1, M_2) = \rho(M_2, M_1)$;

3) для любых трех точек M_1, M_2, M_3 справедливо так называемое неравенство треугольника:

$$\rho(M_1, M_2) \leq \rho(M_1, M_3) + \rho(M_3, M_2).$$

Упражнения. 1) Докажите неравенство треугольника и объясните его геометрический смысл.

2) Докажите, что координаты $(x; y; z)$ середины M отрезка, ограниченного точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, находятся по формулам

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Рассмотрим теперь в пространстве еще одну достаточно распространенную координатную систему, так называемую цилиндрическую систему координат. Выберем в пространстве плоскость, а в ней полярную систему координат. Через полюс O проведем числовую ось OZ перпендикулярно выбранной плоскости так, чтобы со стороны ее положительного направления увеличение полярного угла происходило против хода часовой стрелки (рис.1.13).

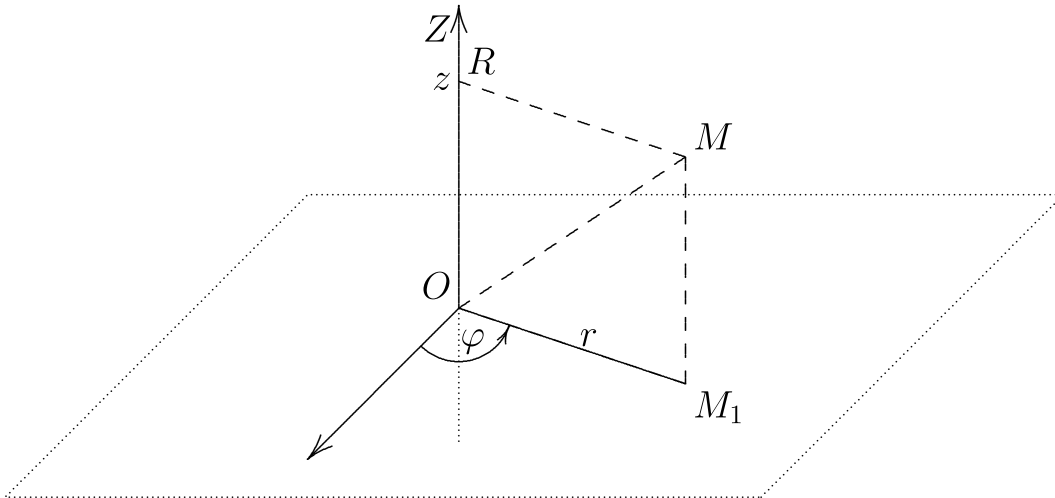

Рис.1.13

Возьмем в пространстве произвольную точку M и обозначим через M_1 ее проекцию на выбранную плоскость, а через R – ее проекцию на ось OZ. Цилиндрическими координатами точки M называют тройку чисел $(r;\varphi;z)$, где $(r;\varphi)$ – полярные координаты точки M_1, а z – координата точки R на оси OZ. Ясно, что $r \geq 0$, угол φ (если $r > 0$) определен с точностью до слагаемого, кратного 2π (главное его значение по-прежнему будем брать из промежутка $[0, 2\pi)$), $z \in (-\infty, +\infty)$.

Если в пространстве имеются декартова система координат $OXYZ$ и цилиндрическая система координат с единым масштабом, общей осью OZ и полярной осью, совпадающей с положительной полуосью абсцисс (рис.1.14), то, как нетрудно видеть, для любой точки M координата z в обеих системах одна и та же, а координаты x, y связаны с координатами r, φ соотношениями (1.8), (1.9), полученными ранее для полярной и декартовой систем координат на плоскости.

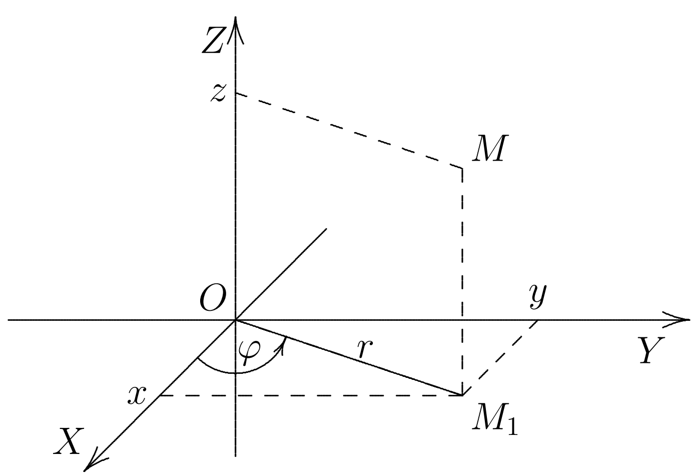

Рис.1.14

Рассмотрим еще одну систему координат в пространстве, так называемую сферическую систему координат. Ее прообразом служит система географических координат (широта и долгота) на поверхности Земли.

Выберем в пространстве некоторую плоскость, возьмем в ней точку O и проведем через эту точку в плоскости луч, называемый полярной осью, и ось OZ, перпендикулярную плоскости (рис.1.15).

Возьмем в пространстве произвольную точку M и соединим ее с точкой O отрезком OM. Длину этого отрезка обозначим через r и назовем радиусом–вектором точки M. Проекцию точки M на выбранную плоскость обозначим M_1 (проекцией отрезка OM на плоскость служит отрезок OM_1).

Если точка M не лежит на оси OZ, то обозначим через φ угол между выбранным в плоскости лучом и отрезком OM_1, отсчитываемый против хода часовой стрелки (долгота точки M), а через θ – угол между положительным направлением оси OZ и отрезком OM

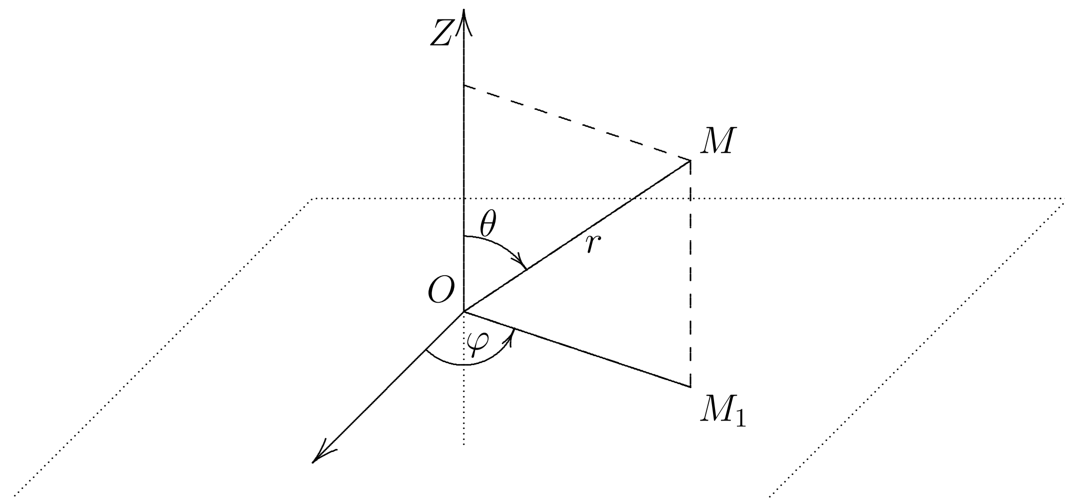

Рис.1.15

(широта точки M). Тройка чисел $(r;\varphi;\theta)$ и образует сферические координаты точки M в рассматриваемом случае. Ясно, что $r \geq 0$, угол θ изменяется в пределах $0 \leq \theta \leq \pi$, а угол φ определен с точностью до слагаемого, кратного 2π (будем по-прежнему считать, что его главное значение лежит в пределах $0 \leq \varphi < 2\pi$). Для точек оси OZ угол φ не определен (проекция этих точек на выбранную плоскость есть точка O), а для точки O не определены оба угла φ и θ (она однозначно определяется равенством $r = 0$).

Найдем связь между декартовыми и сферическими координатами точки в пространстве. Пусть для обеих систем координат ось OZ – общая, точка O сферической системы координат совпадает с началом декартовой системы, а полярная ось совпадает с положительной полуосью абсцисс (рис.1.16).

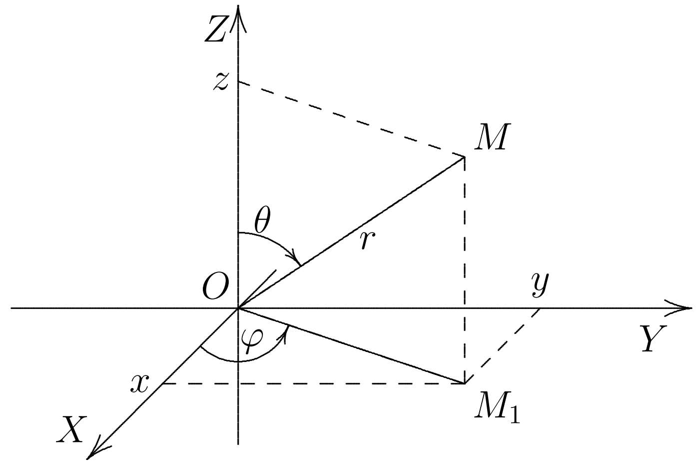

Рис.1.16

Учитывая полученные ранее соотношения (1.8) и равенство $|OM_1| = r\sin(\theta)$, легко выводим следующие соотношения между декартовыми и сферическими координатами точки в пространстве:

$$\begin{cases} x = r\sin(\theta)\cos(\varphi), \\ y = r\sin(\theta)\sin(\varphi), \\ z = r\cos(\theta). \end{cases}$$

2. Комплексные числа

2.1. Определение. Основные свойства

Рассмотрим множество $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, т.е. множество всех упорядоченных пар (x, y), где $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. При этом, естественно, если $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, то

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2\,, \\ y_1 = y_2\,. \end{cases} \tag{2.1}$$

На множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ определим две операции:
1) сложение

$$(x_1, y_2) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2); \tag{2.2}$$

2) умножение

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1). \tag{2.3}$$

Определение 2.1. *Множество всех упорядоченных пар вещественных чисел с определенными на нем сложением и умножением согласно (2.2), (2.3) называется множеством комплексных чисел и обозначается*

$\mathbb{C}$. Таким образом, условие $z \in \mathbb{C}$ означает, что $z = (x, y)$, где $x \in \mathbb{R}$ и $y \in \mathbb{R}$.

Замечание 2.1. *Отметим, что само по себе множество упорядоченных пар вещественных чисел не является множеством $\mathbb{C}$ до тех пор, пока не введены указанные операции. Операции над элементами из $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, вообще говоря, могут быть введены и иным образом, и тогда мы получим конструкцию, отличную от множества $\mathbb{C}$.*

Определение 2.2. *Пусть $z = (x, y) \in \mathbb{C}$. Вещественное число x называется вещественной частью комплексного числа z и обозначается $x = \mathrm{Re}(z)$, а вещественное число y – мнимой частью комплексного числа z и обозначается $y = \mathrm{Im}(z)$.*

В этих обозначениях условие (2.1), определяющее равенство двух комплексных чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$, запишется в виде

$$z_1 = z_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathrm{R}e(z_1) = \mathrm{R}e(z_2), \\ \mathrm{I}m(z_1) = \mathrm{I}m(z_2). \end{cases}$$

Сложение и умножение комплексных чисел обладают следующими свойствами:

1) (коммутативность сложения)

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1;$$

2) (ассоциативность сложения)

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3);$$

3) (коммутативность умножения)

$$z_1 z_2 = z_2 z_1;$$

4) (ассоциативность умножения)

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3);$$

5) (дистрибутивность умножения относительно сложения)

$$(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3.$$

Справедливость этих свойств устанавливается непосредственным вычислением обеих частей соответствующих равенств с использованием формул (2.2), (2.3) (доказательство этого предоставляется читателю).

Упражнение. Докажите, что для любого $z \in \mathbb{C}$:

$$z + (0, 0) = z; \tag{2.4}$$

$$z(0,0) = (0,0); \tag{2.5}$$

$$z(1,0) = z. \tag{2.6}$$

Формулы (2.4) – (2.6) показывают, что комплексные числа $(0,0)$ и $(1,0)$ в множестве $\mathbb{C}$ играют роль, аналогичную роли чисел 0 и 1 в множестве $\mathbb{R}$.

Рассмотрим теперь вопрос об обратных операциях (вычитания и деления) в множестве $\mathbb{C}$.

Определение 2.3. *Разностью комплексных чисел z_1 и z_2 называется такое комплексное число z (пишут $z = z_1 - z_2$), что $z_1 = z_2 + z$.*

Пусть $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ и $z = (x, y)$. Тогда

$$z_1 = z_2 + z \iff \begin{cases} x_1 = x_2 + x, \\ y_1 = y_2 + y \end{cases} \iff \begin{cases} x = x_1 - x_2\,, \\ y = y_1 - y_2\,. \end{cases}$$

Таким образом, разностью чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ является число

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \tag{2.7}$$

и эта разность определена однозначно.

Для любого комплексного числа z определим противоположное ему число $(-z)$ равенством

$$z + (-z) = (0,0).$$

Если $z = (x, y)$, то $(-z) = (0,0) - z = (0,0) - (x, y)$. С учетом (2.7)

$$(-z) = (-x, -y).$$

Ясно, что $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$.

Определение 2.4. *Частным от деления комплексного числа z_1 на комплексное число $z_2 \neq (0,0)$ называется такое комплексное число z (пишут $z = \dfrac{z_1}{z_2}$), что*

$$z_1 = z_2 z. \tag{2.8}$$

Замечание 2.2. *В этом определении ограничение $z_2 \neq (0,0)$ естественно, поскольку при $z_2 = (0,0)$ уравнение (2.8) принимает вид $z_1 = (0,0)z$ и, как следует из (2.5), при $z_1 \neq (0,0)$ оно решений не имеет, а при $z_1 = (0,0)$ этому уравнению удовлетворяет любое число $z \in \mathbb{C}$, т.е. в обоих случаях частное теряет смысл.*

Пусть $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2) \neq (0,0)$ и $z = (x, y)$. Тогда

$$z_1 = z_2 z \iff \begin{cases} x_1 = x_2 x - y_2 y, \\ y_1 = y_2 x + x_2 y. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим ее единственное решение

$$x = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Таким образом, при $z_2 \neq (0,0)$ $(x_2^2 + y_2^2 > 0)$ частное $\dfrac{z_1}{z_2}$ существует и однозначно определено:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1, y_1)}{(x_2, y_2)} = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right). \tag{2.9}$$

Учитывая особую роль в множестве $\mathbb{C}$ числа $(1,0)$ (см.(2.6)), аналогичную роли числа 1 в множестве $\mathbb{R}$, определим теперь для любого числа $z = (x,y) \neq (0,0)$ обратное ему число z^{-1} равенством $zz^{-1} = (1,0)$ (вспомним, что в $\mathbb{R}$: $xx^{-1} = 1$).

С учетом (2.9)

$$z^{-1} = \frac{(1,0)}{z} = \frac{(1,0)}{(x,y)} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right).$$

Покажем, что

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1z_2^{-1} \qquad (z_2 \neq (0,0)).$$

Для этого обозначим $z = z_1z_2^{-1}$ и убедимся в справедливости (2.8):

$$z_2z = z_2z_1z_2^{-1} = z_2z_2^{-1}z_1 = (1,0)z_1 = z_1.$$

Упражнение. Докажите следующие утверждения:

1) $\dfrac{z_1 + z_2}{z_3} = \dfrac{z_1}{z_3} + \dfrac{z_2}{z_3}$, $z_3 \neq (0,0)$;

2) $(z^{-1})^{-1} = z$;

3) $(z_1z_2)^{-1} = z_1^{-1}z_2^{-1}$.

По аналогии с $\mathbb{R}$ в множестве $\mathbb{C}$ определим z^n при $n \in \mathbb{Z}$ – степень числа z с целым показателем:

1) если $n \in \mathbb{N}$, то $z^n = z \cdots z$ (произведение n множителей);

2) если $z \neq (0,0)$, то $z^0 = (1,0)$;

3) если $z \neq (0,0)$, то $z^{-n} = (z^n)^{-1}$ при $n \in \mathbb{N}$.

Из последнего упражнения следует, что

$$z^{-n} = (z^{-1})^n.$$

Рассмотрим теперь комплексные числа вида $z = (x,0)$. С учетом (2.1)

$$(x_1, 0) = (x_2, 0) \Longleftrightarrow x_1 = x_2.$$

Кроме того, для комплексных чисел такого вида справедливы соотношения:

$$\begin{aligned}(x_1,0)+(x_2,0) &= (x_1+x_2,0),\\ (x_1,0)-(x_2,0) &= (x_1-x_2,0),\\ (x_1,0)(x_2,0) &= (x_1x_2,0),\end{aligned}$$

$$\frac{(x_1,0)}{(x_2,0)}=\left(\frac{x_1}{x_2},0\right) \qquad x_2\neq 0,$$
$$(x,0)^{-1}=\left(\frac{1}{x},0\right) \qquad x\neq 0.$$

Таким образом, арифметические операции с комплексными числами вида $(x,0)$ сводятся к аналогичным операциям с их вещественными частями, т.е. с вещественными числами. Эти свойства комплексных чисел вида $(x,0)$ позволяют отождествить комплексное число $z=(x,0)$ с вещественным числом x. Итак, впредь будем считать, что

$$(x,0)=x. \tag{2.10}$$

Тогда, в частности, получаем:

1) $(0,0)=0$;
2) $(1,0)=1$;
3) $z^{-1}=\dfrac{(1,0)}{z}=\dfrac{1}{z}$ при $z\neq 0$ и $\dfrac{1}{(x,0)}=\dfrac{1}{x}$ при $x\neq 0$.

Кроме того,
$(-1)z=-z$, так как если $z=(x,y)$, то $(-1)(x,y)=(-1,0)(x,y)=$ $=(-x,-y)=-z$.

Таким образом, множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ можно рассматривать как расширение множества вещественных чисел $\mathbb{R}$ (множество $\mathbb{R}$ входит в множество $\mathbb{C}$ в качестве подмножества, причем арифметика комплексных чисел (рассмотренные ранее действия над ними) согласуется с арифметикой вещественных чисел).

Теперь рассмотрим комплексные числа вида $z=(0,y)$, для которых $\mathrm{Re}(z)=0$. Их называют мнимыми комплексными числами. При $y=1$ легко находим, что

$$(0,1)^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1.$$

Это означает, в частности, что мнимое комплексное число $z=(0,1)$ является корнем квадратного уравнения

$$z^2+1=0, \tag{2.11}$$

которое не имеет решений в множестве вещественных чисел.

Определение 2.5. *Комплексное число* $(0, 1)$ *называется мнимой единицей и обозначается буквой* i*:*

$$i = (0, 1). \tag{2.12}$$

Как было показано выше, $i^2 = -1$. Легко вычислить, что $(-i)^2 = (0, -1)^2 = -1$ и, значит, число $(-i)$, как и число i, является корнем уравнения (2.11).

Найдем произведение вещественного числа y на мнимую единицу i, используя соглашения (2.10) и (2.12):

$$yi = (y, 0)(0, 1) = (0, y). \tag{2.13}$$

Кроме того, из (2.10) и (2.13) следует, что

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + yi. \tag{2.14}$$

Определение 2.6. *Представление комплексного числа* $z = (x, y)$ *в виде* $z = x + yi$ *называется его алгебраической формой.*

Замечание 2.3. *Поскольку* $yi = iy$, *можно записать число* z *в виде* $z = x + iy$ *– это другой вариант алгебраической формы записи числа* z. *В дальнейшем используем оба варианта и различия между ними не делаем.*

Формула (2.14) означает, что любое комплексное число $z = (x, y)$ можно рассматривать как сумму двух комплексных чисел – вещественного $x = \mathrm{Re}(z)$ и мнимого yi, которое, в свою очередь, является, согласно (2.13), произведением вещественного $y = \mathrm{Im}(z)$ на мнимую единицу i (y можно считать коэффициентом при i в сумме $x + yi$).

Использование алгебраической формы представления комплексных чисел существенно упрощает вычисления. При этом необходимо учитывать основное равенство $i^2 = -1$.

Примеры. 1) $i^3 = i^2 i = (-1)i = -i$; $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$; $i^5 = i^4 i = 1i = i$ и т.д.

2) $2 - 3i + (-1 - 2i)(1 - i) = 2 - 3i + (-1) + (-1)(-i) + (-2i) + (-2i)(-i) = 2 - 3i - 1 + i - 2i - 2 = -1 - 4i$.

Введем еще одну операцию в множестве $\mathbb{C}$.

Определение 2.7. *Число* $\bar{z} = (x, -y) = x - yi$ *называется комплексно–сопряженным к числу* $z = (x, y) = x + yi$, *а нахождение* $\bar{z}$ *по числу* z *называют операцией комплексного сопряжения.*

Перечислим основные свойства этой операции:

1) если $\bar{z}_1 = z_2$, то $z_1 = \bar{z}_2$ или, иначе, $\overline{(\bar{z})} = z$;

2) $\bar{z} = z \Longleftrightarrow (\mathrm{Im}(z) = 0, \ \ .. \ \ z \in \mathbb{R})$;

3) $\bar{z} = -z \Longleftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0$;

4) $\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$;
5) $\overline{(z_1 - z_2)} = \bar{z}_1 - \bar{z}_1$;
6) $\overline{(z_1 z_2)} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$;
7) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \;\; z_2 \neq 0$.

Докажем первые два свойства (доказательство остальных свойств предоставляется читателю).

1) Пусть $z = x + yi$, тогда $\bar{z} = x - yi$ и $\overline{(\bar{z})} = \overline{x - yi} = x - (-y)i = = x + yi = z$.

2) Для $z \in I\!R$ равенство $\bar{z} = z$ очевидно; пусть теперь $z = x + yi$ и $\bar{z} = z$, т.е. $x - yi = x + yi$. Отсюда следует, что $y = -y$ и, следовательно, $y = 0$. Это означает, что $z = x + 0i = x \in I\!R$.

Упражнение. Докажите, что для любого комплексного числа $z = x + yi$:

1) $z + \bar{z} = 2x$ – вещественное число;

2) $z\bar{z} = x^2 + y^2 \geq 0$ (т.е. $z\bar{z}$ – вещественное неотрицательное число), при этом $z\bar{z} = 0 \Longleftrightarrow z = 0$.

Ранее была получена формула (2.9) для частного двух комплексных чисел. На практике при делении комплексных чисел пользуются следующим приемом: домножают числитель и знаменатель на число, комплексно–сопряженное знаменателю, что приводит к делению на вещественное число:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + (x_2y_1 - x_1y_2)i}{x_2^2 + y_2^2} =$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} i \,.$$

Видно, что формула (2.9) получается ″автоматически″.

Пример

$$\frac{2 + 3i}{1 - 2i} = \frac{(2 + 3i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{2 + 3i + 4i - 6}{1^2 + 2^2} = -\frac{4}{5} + \frac{7}{5} i \,.$$

2.2. Комплексная плоскость. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая и показательная формы комплексных чисел

Введем на плоскости декартову прямоугольную систему координат и каждому комплексному числу $z = x + iy$ поставим в соответствие (взаимно однозначное) точку плоскости с координатами $(x; y)$. Эту точку обозначим z, так же как и соответствующее ей число. Вещественным числам (т.е.

комплексным числам вида $z = x + i0$) соответствуют при этом точки оси абсцисс, и поэтому ось абсцисс будем называть также вещественной осью. Точкам оси ординат соответствуют комплексные числа вида $z = 0+iy = iy$; эту ось назовем мнимой осью. Началу координат, очевидно, соответствует число $0 + i0$ (или просто 0).

Плоскость с фиксированной декартовой прямоугольной системой координат, на которой изображаются описанным образом комплексные числа, будем называть комплексной плоскостью (плоскостью $\mathbb{C}$).

Отметим, что точки z и $(-z)$ симметричны относительно начала координат, а точки z и $\bar{z}$ симметричны относительно вещественной оси.

Наряду с изображением комплексных чисел точками на плоскости $\mathbb{C}$ удобно с каждым комплексным числом z связывать вектор, идущий из начала координат в точку z. Ясно, что соответствие между множеством таких векторов и множеством комплексных чисел также является взаимно однозначным. При этом сумме $z_1 + z_2$ комплексных чисел z_1 и z_2 соответствует вектор, равный сумме векторов, отвечающих числам z_1 и z_2 (рис.2.1):

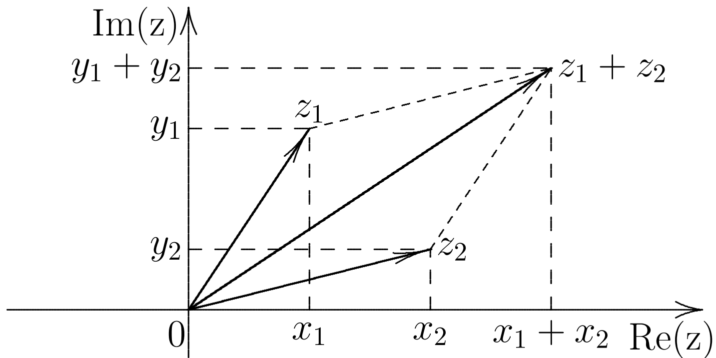

Рис.2.1

На комплексной плоскости $\mathbb{C}$ наряду с декартовой системой координат введем полярную (рис.2.2):

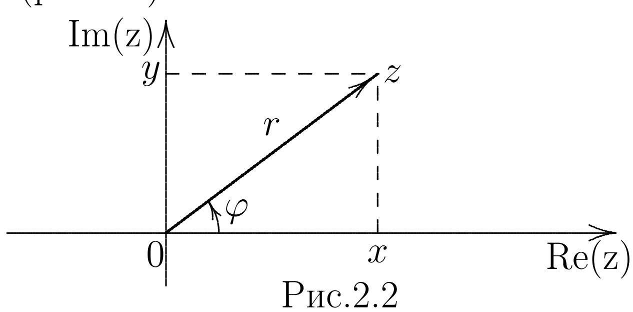

Рис.2.2

Определение 2.8. *Полярный радиус r точки z называется модулем комплексного числа z и обозначается $|z|$.*

Ясно, что модуль комплексного числа $z = x+iy$ определен однозначно, при этом:

1)

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0; \tag{2.15}$$

2) $r = |z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$.

Определение 2.9. *Пусть* $z = x + iy$, $r = |z| > 0$. *Полярный угол* φ *точки* z *называется аргументом комплексного числа* z *и обозначается* $\varphi = \arg(z)$. *Главное значение полярного угла называют главным значением аргумента. Для комплексного числа* $z = 0$ *аргумент не определяется.*

Если $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ – главное значение аргумента комплексного числа $z \neq 0$, то все возможные значения $\arg(z)$ представляются формулой

$$\arg(z) = \varphi_0 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{2.16}$$

Отсюда, в частности, следует условие равенства ненулевых комплексных чисел:

$$z_1 = z_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} |z_1| = |z_2|, \\ \exists k \in \mathbb{Z} : \arg(z_1) = \arg(z_2) + 2\pi k, \end{cases} \tag{2.17}$$

где $\arg(z_1)$ и $\arg(z_2)$ – какие–либо фиксированные значения аргументов чисел z_1 и z_2.

Если заданы модуль r и аргумент φ комплексного числа $z = x + iy$, то (см.(1.8))

$$\begin{cases} x = r\cos(\varphi), \\ y = r\sin(\varphi) \end{cases} \tag{2.18}$$

и поэтому

$$z = r\big[\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\big] = |z|\big[\cos(\arg(z)) + i\sin(\arg(z))\big]. \tag{2.19}$$

Определение 2.10. *Представление комплексного числа* z *в виде* (2.19) *называют его тригонометрической формой.*

Пример. Данные комплексные числа записать в тригонометрической форме: а) $z_1 = -1 + i$; б) $z_2 = -1 - i$.

Решение.

а) $x_1 = \mathrm{Re}(z_1) = -1$, $y_1 = \mathrm{Im}(z_1) = 1$; $r = |z_1| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Пусть $\varphi_1 = \arg(z_1)$. Тогда, записывая для числа z_1 систему (2.18)

$$\begin{cases} -1 = \sqrt{2}\cos(\varphi_1), \\ 1 = \sqrt{2}\sin(\varphi_1), \end{cases}$$

находим

$$\begin{cases} \cos(\varphi_1) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin(\varphi_1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Отсюда $\varphi_1 = \dfrac{3\pi}{4}$ (берем главное значение аргумента) и, следовательно,

$$-1 + i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right].$$

б) $x_2 = \mathrm{Re}(z_2) = -1$, $y_2 = \mathrm{Im}(z) = -1$, $r_2 = |z_2| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} =$ $= \sqrt{2}$. Пусть $\varphi_2 = \arg(z_2)$. Тогда, с учетом (2.18):

$$\begin{cases} -1 = \sqrt{2}\cos(\varphi_2), \\ -1 = \sqrt{2}\sin(\varphi_2) \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(\varphi_2) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin(\varphi_2) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Отсюда $\varphi_2 = \dfrac{5\pi}{4}$ и, следовательно,

$$-1 - i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right].$$

Отметим, что в силу нашего соглашения (см.(2.16)) $\varphi = -\dfrac{3\pi}{4}$ также является допустимым значением аргумента числа z_2 и поэтому

$$-1 - i = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

– другой возможный вариант тригонометрической формы комплексного числа $z_2 = -1 - i$.

Пусть $z_1 = r_1\left(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1)\right)$, $z_2 = r_2\left(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)\right)$. Тогда

$$\begin{aligned} &z_1 z_2 = r_1\big[\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1)\big] r_2\big[\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)\big] = \\ &= r_1 r_2\Big\{\big[\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)\big] + i\big[\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + \\ &+ \sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2)\big]\Big\} = r_1 r_2\big[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big]. \end{aligned}$$

Полученная тригонометрическая форма комплексного числа $z_1 z_2$ показывает, что модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей, а аргумент произведения (точнее, одно из его значений) равен сумме аргументов сомножителей:

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2).$$

Эти правила распространяются на произведение любого числа сомножителей:

$$|z_1 z_2 ... z_k| = |z_1|\,|z_2| ... |z_k|, \tag{2.20}$$

$$\arg(z_1 z_2 ... z_k) = \arg(z_1) + ... + \arg(z_k). \tag{2.21}$$

Из формул (2.20), (2.21) следует (при $z_1 = z_2 = ... = z_k = z$), что при $k \in \mathbb{N}$

$$|z^k| = |z|^k, \quad \arg(z^k) = k\arg(z),$$

т.е. если $z = r\,(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$, то

$$z^k = \Big[r\Big(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\Big)\Big]^k = r^k\big[\cos(k\varphi) + i\sin(k\varphi)\big]. \qquad (2.22)$$

При $r = |z| = 1$ из формулы (2.22) получаем так называемую формулу Муавра:

$$\big[\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\big]^k = \cos(k\varphi) + i\sin(k\varphi). \qquad (2.23)$$

Пример. Пусть $k = 3$. Вычислим левую часть в (2.23):

$$\big[\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\big]^3 =$$

$$= \cos^3(\varphi) + 3\cos^2(\varphi)i\sin(\varphi) + 3\cos(\varphi)\big(i\sin(\varphi)\big)^2 + i^3\sin^3(\varphi) =$$
$$= \cos^3(\varphi) - 3\cos(\varphi)\sin^2(\varphi) + i\big(3\cos^2(\varphi)\sin(\varphi) - \sin^3(\varphi)\big).$$

Приравнивая теперь в (2.23) вещественные и мнимые части, получим известные формулы тригонометрии:

$$\begin{cases}\cos(3\varphi) = \cos^3(\varphi) - 3\cos(\varphi)\sin^2(\varphi),\\ \sin(3\varphi) = 3\cos^2(\varphi)\sin(\varphi) - \sin^3(\varphi).\end{cases}$$

Формула Муавра была получена для произвольного натурального k. Покажем, что она справедлива для любого целого показателя. При $k = 0$ ее проверка тривиальна. Пусть $k = -n$, $n \in N$. Тогда

$$\big[\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\big]^k = \big[\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\big]^{-n} = \frac{1}{\big[\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\big]^n} =$$

$$= \frac{1}{\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)} = \frac{\cos(n\varphi) - i\sin(n\varphi)}{\cos^2(n\varphi) + \sin^2(n\varphi)} = \cos(n\varphi) - i\sin(n\varphi) =$$
$$= \cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi) = \cos(k\varphi) + i\sin(k\varphi).$$

В частности, при $k = -1$ получаем

$$\big[\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\big]^{-1} = \frac{1}{\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi). \qquad (2.24)$$

Рассмотрим теперь деление комплексных чисел в тригонометрической форме. Пусть

$$z_1 = r_1\big[\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1)\big], \quad z_2 = r_2\big[\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)\big] \neq 0.$$

Тогда, учитывая (2.24) и (2.21), получим

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\big[\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1)\big]}{r_2\big[\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)\big]} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\big[\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1)\big]\big[\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2)\big] =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\big[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big],$$

т.е.

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \varphi_1 - \varphi_2 = \arg(z_1) - \arg(z_2).$$

Итак, модуль частного двух комплексных чисел равен частному их модулей, а аргумент частного (одно из возможных значений) равен разности аргументов делимого и делителя.

Пусть $z = r\big[\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\big]$. Тогда

$$\bar{z} = r\cos(\varphi) - ir\sin(\varphi) = r\big[\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\big] =$$

$$= r\big[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\big].$$

Это означает (рис.2.3), что

$$|\bar{z}| = r = |z|, \quad \arg(\bar{z}) = -\varphi = -\arg(z).$$

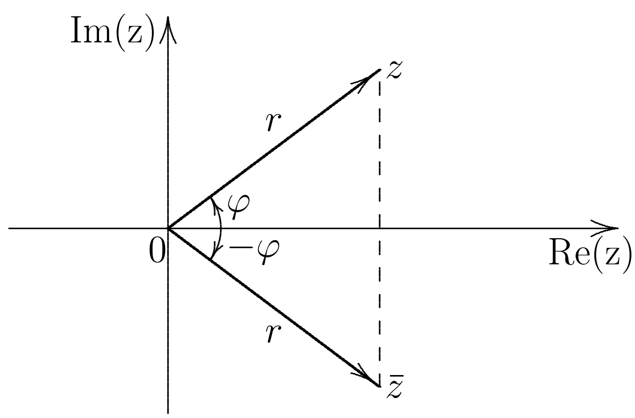

Рис.2.3

Укажем еще некоторые свойства модуля комплексных чисел:

$$\begin{aligned}
&1)\ z\bar{z} = |z|^2;\\
&2)\ |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|;\\
&3)\ |z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|;\\
&4)\ |z_1 + z_2| \ge |z_1| - |z_2|;\\
&5)\ |z_1 - z_2| \ge |z_1| - |z_2|;\\
&6)\ |\mathrm{Re}(z)| \le |z|;\\
&7)\ |\mathrm{Im}(z)| \le |z|.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Доказательство: 1) $z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2 = |z|^2$.

2) $|z_1+z_2|^2 = \Big|r_1\big[\cos(\varphi_1)+i\sin(\varphi_1)\big] + r_2\big[\cos(\varphi_2)+i\sin(\varphi_2)\big]\Big|^2 =$

$$= \Big|r_1\cos(\varphi_1)+r_2\cos(\varphi_2)+i\big[r_1\sin(\varphi_1)+r_2\sin(\varphi_2)\big]\Big|^2 =$$

$$= \big[r_1\cos(\varphi_1)+r_2\cos(\varphi_2)\big]^2 + \big[r_1\sin(\varphi_1)+r_2\sin(\varphi_2)\big]^2 =$$

$$= r_1^2\cos^2(\varphi_1)+2r_1r_2\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2)+r_2^2\cos^2(\varphi_2)+$$

$$+r_1^2\sin^2(\varphi_1)+2r_1r_2\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)+r_2^2\sin^2(\varphi_2) =$$

$$= r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) \le r_1^2+r_2^2+2r_1r_2 = (r_1+r_2)^2.$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей полученного неравенства, находим:

$$|z_1+z_2| \le r_1+r_2 = |z_1|+|z_2|.$$

3) Это свойство следует из предыдущего (достаточно z_2 заменить на $(-z_2)$).

4) $z_1 = z_1+z_2-z_2$. Поэтому $|z_1| = |(z_1+z_2)-z_2| \le |z_1+z_2|+|z_2|$. Отсюда $|z_1+z_2| \ge |z_1|-|z_2|$.

Доказательство остальных свойств предоставляется читателю.

Упражнение. Докажите, что $|z_1+z_2| \ge \big||z_1|-|z_2|\big|$.

Замечание 2.4. *Неравенство* (2.25) *называют неравенством треугольника. Это связано с его геометрической интерпретацией – длина стороны треугольника не превосходит суммы длин двух других его сторон* (*см.рис.*2.1). *Это неравенство очевидным образом распространяется на сумму нескольких слагаемых:*

$$|z_1+z_2+...+z_k| \le |z_1|+|z_2|+...+|z_k|.$$

Упражнения. 1) Воспользовавшись равенством $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$ и соответствующим геометрическим построением (рис.2.4), докажите, что модуль разности двух комплексных чисел $|z_1-z_2|$ равен расстоянию между точками z_1 и z_2 на комплексной плоскости.

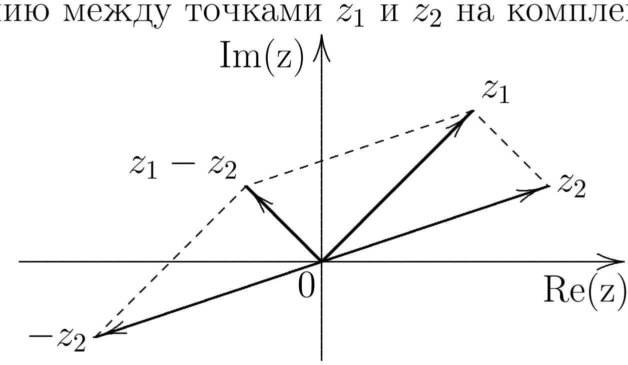

Рис.2.4

2) Изобразите на комплексной плоскости множества точек z, для которых:

а) $|z| \le 1$; б) $|z - 2i| < 4$; в) $|z - i| > 1$; г) $1 < |z - 1| < 2$; д) $|z - 1| = |z + 1|$.

В заключение этого параграфа рассмотрим еще одну форму записи комплексных чисел.

Определение 2.11. *Если* $\varphi \in \mathbb{R}$, *то*

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi). \tag{2.26}$$

Замечание 2.5. *Формула* (2.26) *является лишь формальным определением символа* $e^{i\varphi}$. *В курсе математического анализа будет определена функция* e^z, $z \in \mathbb{C}$ *и тогда равенство* (2.26) *получит строгое обоснование.*

В соответствии с (2.19), (2.26) получаем для любого ненулевого комплексного числа z представление

$$z = re^{i\varphi},$$

($r = |z|$, $\varphi = \arg(z)$), называемое показательной формой комплексного числа. Ясно, что $|e^{i\varphi}| = 1 \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}$.

С использованием показательной формы комплексных чисел многие из ранее доказанных формул допускают более компактную запись, в частности:

1) $z_1 z_2 = |z_1|\,|z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$, где $\varphi_1 = \arg(z_1), \varphi_2 = \arg(z_2)$;

2) $z^n = |z|^n e^{in\varphi}$, $\varphi = \arg(z)$, $n \in \mathbb{Z}$;

3) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad z_2 \ne 0$;

4) если $z = |z|e^{i\varphi}$, то $\bar{z} = |z|e^{-i\varphi}$.

5) $e^{i\varphi_1} = e^{i\varphi_2} \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k$ (следует из 2.17).

Пример. Вычислить $(-1 + i\sqrt{3})^{12}$.

Число $z = -1 + i\sqrt{3}$ представим в показательной форме: $|z| = \sqrt{1 + 3} = 2$,

$$\begin{cases} \cos(\arg(z)) = -\dfrac{1}{2}, \\ \sin(\arg(z)) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases} \Longrightarrow \arg(z) = \frac{2\pi}{3}.$$

Итак, $z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Значит, $z^{12} = (2e^{i\frac{2\pi}{3}})^{12} = 2^{12}e^{i\frac{2\pi}{3}12} = 2^{12}e^{i8\pi} = 2^{12}$.

Упражнения. 1) Записать в показательной форме комплексные числа: -2, i, $-5i$, $1 + i$, $-1 - i\sqrt{3}$.

2) Записать в алгебраической форме комплексные числа: e^{i0}, $e^{i\frac{\pi}{2}}$, $e^{i\pi}$, $3e^{i\frac{\pi}{3}}$, $-2e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

3) Вычислить: $(1 + i)^8 + (1 - i)^8$, $(\sqrt{3} - 3i)^6$.

3. Многочлены и рациональные дроби

3.1. Многочлены и их свойства

Определение 3.1. *Функция* $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, *определенная правилом*

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \quad a_n \neq 0, \tag{3.1}$$

называется многочленом (полиномом). Комплексные числа a_n, a_{n-1}, $\ldots$, a_0 *называются коэффициентами многочлена* P *(*a_n *– старшим коэффициентом), а целое неотрицательное число* n *– его степенью. Степень многочлена* P *будем обозначать* $.P$ *и записывать:* $.P = n$.

Теорема 3.1. *В множестве многочленов (введенных определением* 3.1) *не существует функции* $P(z) \equiv 0$, $z \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Предположим противное: существует такой многочлен P, $.P = n$, $a_n \neq 0$, что

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \equiv 0, \quad z \in \mathbb{C}.$$

При $z \neq 0$

$$P(z) = a_n z^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} z^{-1} + \ldots + \frac{a_0}{a_n} z^{-n}\right).$$

Используя неравенство $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$, получим

$$|P(z)| = |a_n z^n| \left| 1 + \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} z^{-1} + \ldots + \frac{a_0}{a_n} z^{-n}\right) \right| \geq$$

$$\geq |a_n||z|^n \left(1 - \left|\frac{a_{n-1}}{a_n} z^{-1} + \ldots + \frac{a_0}{a_n} z^{-n}\right|\right),$$

и так как $|z_1 + z_2 + \ldots + z_k| \leq |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_k|$, то

$$|P(z)| \geq |a_n||z|^n \left(1 - \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| \frac{1}{|z|} - \ldots - \left|\frac{a_0}{a_n}\right| \frac{1}{|z|^n}\right).$$

Ясно, что выбрав $|z|$ достаточно большим, получим неравенство $|P(z)| > 0$, которое противоречит нашему предположению. Теорема доказана.

Замечание 3.1. *Из определения* 3.1 *следует, что многочлен нулевой степени имеет вид* $P(z) = a_0$, *где* $a_0 \neq 0$. *Теорема* 3.1 *означает, что функция* $P(z) \equiv 0$, $z \in \mathbb{C}$, *не является многочленом. Однако мы включим эту функцию в множество многочленов, назвав ее нулевым многочленом. Нулевой многочлен можно считать многочленом произвольной степени с нулевыми коэффициентами.*

Для многочленов, как и для любых числовых функций с общей областью определения, определены обычным образом сложение, вычитание и умножение, причем сумма, разность и произведение многочленов также, очевидно, являются многочленами. Пусть

$$P + Q = R, \quad P - Q = S, \quad PQ = T.$$

Если P, Q, R, S – ненулевые многочлены (тогда многочлен T также ненулевой), то

$$\begin{aligned} .R &\le \max\{.P, .Q\}, \\ .S &\le \max\{.P, .Q\}, \\ .T &= .P + .Q. \end{aligned}$$

При этом, если $.P \neq .Q$, то

$$.R = .S = \max\{.P, .Q\}$$

(почему?). Отметим, что многочлены R и S могут оказаться нулевыми при ненулевых многочленах P и Q.

Из свойств сложения и умножения комплексных чисел вытекает справедливость следующих соотношений:

1) $P + Q = Q + P$;
2) $P + (Q + R) = (P + Q) + R$;
3) $PQ = QP$;
4) $P(QR) = (PQ)R$;
5) $P(Q + R) = PQ + PR$.

Здесь P, Q, R – многочлены произвольных степеней.

Теорема 3.2. *Если два ненулевых многочлена P и Q тождественно совпадают, т.е. $P(z) = Q(z)$ при всех $z \in \mathbb{C}$, то совпадают их степени и их соответствующие коэффициенты (т.е. коэффициенты при одинаковых степенях z).*

Доказательство. Пусть $P - Q = R$. Тогда $R(z) \equiv 0, \quad z \in \mathbb{C}$, т.е. R – нулевой многочлен. Отсюда следует, что $.P = .Q$ и соответствующие коэффициенты этих многочленов равны, так как в противном случае хотя бы один из коэффициентов нулевого многочлена R не равнялся бы нулю, что невозможно.

Доказанная теорема 3.2 является следствием более сильного утверждения (теоремы 3.3), доказательство которого приводить не будем.

Теорема 3.3. *Если значения двух многочленов P и Q совпадают при $z = z_k$, $k = 1, \ldots, n + 1$, где $n = \max\{.P,\ .Q\}$ и все числа z_k попарно различны, то $.P = .Q = n$ и соответствующие коэффициенты этих много-*

членов равны (а значит, $P(z) \equiv Q(z),\ z \in \mathbb{C}$). В частности, если многочлен P степени n принимает нулевые значения при попарно различных $z_1, \dots, z_{n+1}$, то $P(z) \equiv 0,\ z \in \mathbb{C}$.

Теорема 3.3 означает, что если степень многочлена P равна n, то этот многочлен однозначно определяется своими значениями $P(z_1), \dots, P(z_{n+1})$. Если же, наоборот, заданы попарно различные числа $z_1, \dots, z_{n+1}$ и произвольные числа $p_1, \dots, p_{n+1}$, то существует единственный многочлен $P(z)$ степени не выше n, для которого

$$P(z_k) = p_k, \quad k = 1, \dots, n+1.$$

Покажем, как такой многочлен P может быть построен. Введем вспомогательные многочлены $q_1, \dots, q_{n+1}$ со следующими свойствами:

1) $q_k(z_k) = 1, \quad k = 1, 2, \dots, n+1$;
2) $q_k(z_i) = 0 \ \ i \neq k$;
3) $.q_k = n$.

Легко проверить, что этими свойствами обладают многочлены

$$q_k(z) = \frac{(z - z_1)\dots(z - z_{k-1})(z - z_{k+1})\dots(z - z_{n+1})}{(z_k - z_1)\dots(z_k - z_{k-1})(z_k - z_{k+1})\dots(z_k - z_{n+1})}\,,\ k = 1, \dots, n+1.$$

Многочлен $Q(z) = \sum\limits_{k=1}^{n+1} p_k q_k(z)$ имеет степень не выше n (почему?) и из свойств многочленов q_k следует, что $Q(z_k) = p_k, \quad k = 1, \dots, n+1$. Так как искомый многочлен $P(z)$ единствен, то

$$P(z) = \sum_{k=1}^{n+1} p_k q_k(z). \tag{3.2}$$

Представление многочлена P в форме (3.2) называется интерполяционной формой Лагранжа.

Замечание 3.2. *Интерполяционная форма Лагранжа решает задачу восстановления многочлена по его значениям в данных точках, несмотря на то, что коэффициенты многочлена при этом явно не вычисляются. Действительно, формула (3.2) позволяет по заданным z_k и $P(z_k)$ вычислить значения многочлена при любом $z \in \mathbb{C}$.*

Упражнения.

1. Найти многочлен Р ($.P \leq 2$) по его значениям: $A = P(-h)$, $B = P(0)$, $C = P(h)$.

2. Доказать тождество $\sum\limits_{k=1}^{n+1} q_k(z) \equiv 1$.

3.2. Деление многочленов

Многочлены обладают некоторыми свойствами, аналогичными свойствам целых чисел. Известно, что при умножении целых чисел получаем целое число. Это же свойство справедливо и для многочленов – перемножая многочлены, получаем многочлен. Деление же нацело двух целых чисел, т.е. получение в результате целого числа, возможно далеко не всегда. В общем случае при делении целого числа n на целое m получаем некоторое частное k и остаток r. При этом справедливо равенство $n = mk + r$. То же можно сказать и о делении многочленов. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.4. *Для любых многочленов P и Q, $.Q > 0$, существуют единственные многочлены q и r, такие, что*

$$P(z) = Q(z)q(z) + r(z), \tag{3.3}$$

причем степень многочлена r меньше степени многочлена Q или $r(z) \equiv 0$. Многочлен q называется частным (от деления P на Q), а r – остатком.

Доказательство. Если $P(z) \equiv 0$, то многочлены $q(z) \equiv 0$ и $r(z) \equiv 0$ удовлетворяют равенству (3.3). Пусть теперь $P(z) \not\equiv 0$ и

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n, \quad a_n \neq 0.$$

$$Q(z) = b_0 + b_1 z + \ldots + b_m z^m, \quad b_m \neq 0, \quad m \geq 1.$$

Доказательство существования многочленов q и r в этом случае проведем индукцией по $n = .P$.

1. Убедимся в справедливости теоремы при $n = 0$, т.е. когда $P(z) = a_0 \neq 0$. Возьмем $q(z) \equiv 0$, $r(z) = P(z)$. Тогда $.r = .P = = 0 < .Q = m$. Ясно, что выбранные таким образом многочлены q и r удовлетворяют равенству (3.3).

2. Предположим, что теорема верна, когда $.P \leq n - 1$ и пусть теперь $.P = n$.

Если $m > n$, то $P(z) = Q(z) \cdot 0 + P(z)$, т.е. для справедливости равенства (3.3) можно взять $q(z) \equiv 0$, $r(z) = P(z)$. При этом $.r = = n < .Q = m$.

Если $m \leq n$, то рассмотрим многочлен

$$R(z) = P(z) - \frac{a_n}{b_m} z^{n-m} Q(z).$$

Если $R(z) \equiv 0$, то $P(z) = \dfrac{a_n}{b_m} z^{n-m} Q(z)$, что совпадает с (3.3) при $r(z) \equiv 0$ и $Q(z) = \dfrac{a_n}{b_m} z^{n-m}$. Если же $R(z) \not\equiv 0$, то его степень строго меньше n и по индукционному предположению

$$R(z) = Q(z)q_1(z) + r(z), \quad .r < .Q.$$

Тогда

$$P(z) = \frac{a_n}{b_m} z^{n-m} Q(z) + R(z) = \left(\frac{a_n}{b_m} z^{n-m} + q_1(z) \right) Q(z) + r(z).$$

Полагая $q(z) = \dfrac{a_n}{b_m} z^{n-m} + q_1(z)$, и в этом случае получаем требуемое равенство (3.3).

Итак, многочлены q и r, удовлетворяющие равенству (3.3), существуют.

Для доказательства единственности предположим, что $P = Qq_1 + r_1 = Qq_2 + r_2$. Тогда

$$(q_1 - q_2)Q = r_1 - r_2. \tag{3.4}$$

Если $r_2(z) - r_1(z) \equiv 0$ (т.е. $r_1 = r_2$), то $q_1(z) - q_2(z) \equiv 0$ (почему?), т.е. $q_2 = q_1$. Если же $r_1 \neq r_2$, то $q_1 \neq q_2$ (почему?) и тогда $.((q_1 - q_2)Q) \geq .Q > .(r_1 - r_2)$ и равенство (3.4) невозможно. Поэтому равенство (3.4) выполняется лишь при $r_1 = r_2$ и $q_1 = q_2$. Это завершает доказательство теоремы.

Замечание 3.3. *Если P – произвольный ненулевой многочлен, а степень многочлена Q равна нулю, т.е. $Q(z) \equiv b_0$, $b_0 \neq 0$, то из очевидного тождества*

$$P(z) \equiv \left(\frac{a_0}{b_0} + \frac{a_1}{b_0} z + \ldots + \frac{a_n}{b_0} z^n \right) b_0$$

следует, что формула (3.3) *справедлива и в этом случае при*

$$q(z) = \frac{a_0}{b_0} + \frac{a_1}{b_0} z + \ldots + \frac{a_n}{b_0} z^n \qquad r(z) \equiv 0.$$

Для фактического нахождения многочленов $q(z)$ и $r(z)$ часто бывает удобно использовать известный алгоритм "деления многочленов углом", аналогичный алгоритму деления с остатком целых чисел.

Теорема 3.4 имеет важное следствие, которое носит название теоремы Безу.

Теорема 3.5. (*Безу*). *Пусть P – многочлен, причем $.P \geq 1$. Тогда остаток от деления P на многочлен $(z - c)$ равен $P(c)$.*

Доказательство. Для многочленов $P(z)$ и $Q(z) = z - c$ запишем равенство (3.3):

$$P(z) = (z - c)q(z) + r.$$

Здесь r – константа, поскольку либо $r = 0$, либо $.r < .Q = 1$. Положив в обеих частях последнего равенства $z = c$, получаем $r = P(c)$.

Упражнение. Пусть остаток от деления многочлена P на $(z - c_1)$ равен A, а от деления на $(z - c_2)$ равен B. Чему равен остаток от деления P на $(z - c_1)(z - c_2)$?

Определим теперь производную многочлена. Заметим, что многочлен $P(z)$ в случае вещественных коэффициентов a_k и вещественных значений $z = x \in I\!R$ является вещественной функцией вещественной переменной. Для таких функций определение производной и, в частности, производная $P'(x)$ многочлена известны из школьного курса математики. Именно, $P'(x) = a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1}$ при $n \geq 1$ и $P'(x) = 0$ при $n = 0$ и при $P(x) \equiv 0$.

Распространим это определение на производную многочлена $P(z)$, рассматриваемого как комплексная функция комплексной переменной.

Определение 3.2. *Производной многочлена $P(z)$ называется многочлен $P'(z)$, значения которого вычисляются по правилу:*

$$P'(z) = a_1 + 2a_2z + 3a_3z^2 + \ldots + na_nz^{n-1}, \quad n \geq 1;$$

$$P'(z) \equiv 0, \quad n = 0 \quad P(z) \equiv 0.$$

Нахождение производной данного многочлена называют его дифференцированием.

Отметим некоторые свойства производной многочлена, которые доказываются непосредственным вычислением:

1) $(P(z) + Q(z))' = P'(z) + Q'(z)$;
2) $(P(z)Q(z))' = P'(z)Q(z) + P(z)Q'(z)$;
3) $((z - c)^n)' = n(z - c)^{n-1}$.

По индукции определяются старшие производные многочлена, а именно, если $P^{(k-1)}(z)$ есть $(k-1)$-я производная многочлена $P(z)$, то его k-я производная определяется равенством

$$P^{(k)}(z) = (P^{(k-1)}(z))'.$$

Очевидно, что $P^{(k)}(z) \equiv 0$ при $k > n = .P$.

Рассмотрим теперь вопрос о представлении многочлена $P(z)$ степени n в форме

$$P(z) = A_0 + A_1(z - c) + A_2(z - c)^2 + \ldots + A_n(z - c)^n, \qquad (3.5)$$

где c – произвольное комплексное число. Эту форму будем называть формой Тейлора, а коэффициенты A_k, $k = 0, \ldots, n$, в формуле (3.5) – коэффициентами Тейлора в точке $z = c$ многочлена $P(z)$. Возможность и единственность такого представления следуют из теоремы 3.4 (почему?). Для определения коэффициентов Тейлора положим в обеих частях формулы (3.5) $z = c$. Тогда

$$A_0 = P(c).$$

Далее, дифференцируя тождество (3.5), получаем:

$$P'(z) = A_1 + 2A_2(z-c) + 3A_3(z-c)^2 + \ldots + nA_n(z-c)^{n-1}.$$

Полагая здесь $z = c$, находим:

$$A_1 = P'(c).$$

Продолжая эту процедуру (дифференцирование и вычисление обеих частей тождества в точке $z = c$), последовательно получаем:

$$A_2 = \frac{P''(c)}{2}, \quad A_3 = \frac{P'''(c)}{2 \cdot 3}, \ldots, A_k = \frac{P^{(k)}(c)}{k!}, \ldots, A_n = \frac{P^{(n)}(c)}{n!}.$$

Итак, многочлен в форме Тейлора имеет вид

$$P(z) = P(c) + \frac{P'(c)}{1!}(z-c) + \frac{P''(c)}{2!}(z-c)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(c)}{n!}(z-c)^n. \quad (3.6)$$

Замечание 3.4. *Формулы* (3.1), (3.2) *и* (3.6) *позволяют записать один и тот же многочлен в разных формах. Использование той или иной формы многочлена зависит от решаемой с ее помощью задачи. Иногда удобно использовать и представление* (3.3).

3.3. Вычисление значений многочлена. Схема Горнера

Пусть

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1}z^{n-1} + a_n z^n, \quad n \geq 1,$$

и требуется вычислить значение $P(c)$. Покажем, как это можно сделать с минимальным объемом вычислений. Положим

$$P(z) = (z-c)q(z) + r. \quad (3.7)$$

Здесь число $r = P(c)$ – остаток от деления $P(z)$ на $z - c$,

$$q(z) = b_0 + b_1 z + \ldots + b_{n-2}z^{n-2} + b_{n-1}z^{n-1}.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z в (3.7), получаем

$$\begin{array}{l} a_n = b_{n-1}\,, \\ a_{n-1} = b_{n-2} - cb_{n-1}\,, \\ a_{n-2} = b_{n-3} - cb_{n-2}\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1 = b_0 - cb_1\,, \\ a_0 = r - cb_0\,. \end{array}$$

Отсюда следует, что

$$b_{n-1} = a_n; \quad b_k = cb_{k+1} + a_{k+1}\,, \quad k = n-2, n-3, \ldots, 0;$$

$$r = cb_0 + a_0.$$

Несложно подсчитать, что для вычисления $r = P(c)$ по этой схеме, именуемой схемой Горнера, требуется n сложений и n умножений.

Схема Горнера легко реализуется на ЭВМ. При ″ручных″ вычислениях удобно воспользоваться таблицей, первая строка которой содержит коэффициенты данного многочлена P, вторая – произведения cb_k, а третья – коэффициенты многочлена q, получающиеся сложением соответствующих элементов первой и второй строк:

a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_1	a_0
$-$	cb_{n-1}	cb_{n-2}	$\cdots$	cb_1	cb_0
b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_0	r

Пример. Вычислить $P(4)$, если

$$P(z) = 16 - 10z + 6z^2 - 3z^3 + z^4.$$

Проводя указанные вычисления, получим:

1	-3	6	-10	16
$-$	$4 \cdot 1 = 4$	$4 \cdot 1 = 4$	$4 \cdot 10 = 40$	$4 \cdot 30 = 120$
1	1	10	30	136

Таким образом, $P(4) = 136$. Мы нашли также, что частное от деления $P(z)$ на $z - 4$ равно $q(z) = z^3 + z^2 + 10z + 30$.

Замечание 3.5. *Вычисляя $P(c)$ по схеме Горнера, можно с небольшими дополнительными затратами одновременно вычислить и $P'(c)$, т.е. значение производной многочлена P в той же точке. Действительно, будем параллельно с последовательностью $\{b_k\}$ вычислять последовательность $\{d_k\}$ по схеме:*

$$\begin{aligned}
&d_{n-1} = b_{n-1}\,,\\
&d_{n-2} = b_{n-2} + cd_{n-1}\,,\\
&d_{n-3} = b_{n-3} + cd_{n-2}\,,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&d_0 = b_0 + cd_1.
\end{aligned}$$

Легко проверяется, что $d_0 = P'(c)$.

3.4. Нули многочлена

Определение 3.3. *Нулем многочлена P называется корень уравнения $P(z) = 0$.*

Ясно, что многочлен нулевой степени нулей не имеет. Пусть $.P > 0$. Из теоремы Безу следует, что если c – нуль многочлена P, то

$$P(z) = (z - c)q(z), \tag{3.8}$$

где $.q = (.P) - 1$. Обратное утверждение очевидно. Таким образом, число c является нулем многочлена P тогда и только тогда, когда P представим в виде (3.8).

Если многочлен q тоже обращается в нуль в точке c, то и он представим в аналогичном виде $q(z) = (z - c)q_1(z)$, а значит, для P получаем представление

$$P(z) = (z - c)^2 q_1(z)$$

(ясно, что $.q_1 = .P - 2$). Продолжая эти рассуждения, приходим к понятию кратности нуля многочлена.

Определение 3.4. *Число c называется нулем многочлена P кратности k ($k \in I\!N$), если имеет место представление*

$$P(z) = (z - c)^k q(z), \quad q(c) \neq 0. \tag{3.9}$$

Замечание 3.6. *Если $k = 1$, то говорят, что c – простой нуль многочлена P.*

Теорема 3.6. *Число c является нулем многочлена P кратности k тогда и только тогда, когда*

$$P(c) = P'(c) = \ldots = P^{(k-1)}(c) = 0, \quad P^{(k)}(c) \neq 0. \tag{3.10}$$

Доказательство. Пусть выполнены условия (3.10). Используя формулу Тейлора для многочлена P, получим:

$$P(z) = P(c) + P'(c)(z - c) + \ldots + \frac{P^{(k-1)}(c)}{(k-1)!}(z - c)^{k-1} + \frac{P^{(k)}(c)}{k!}(z - c)^k +$$

$$+ \ldots + \frac{P^{(n)}(c)}{n!}(z - c)^n = \frac{P^{(k)}(c)}{k!}(z - c)^k + \ldots + \frac{P^{(n)}(c)}{n!}(z - c)^n =$$
$$= (z - c)^k q(z),$$

где $q(z) = \dfrac{P^{(k)}(c)}{k!} + \dfrac{P^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(z - c) + \ldots + \dfrac{P^{(n)}(c)}{n!}(z - c)^{n-k}$. При этом $q(c) = \dfrac{P^{(k)}(c)}{k!} \neq 0$. Мы получили представление многочлена P в виде (3.9), следовательно число c является его нулем кратности k.

Пусть теперь выполнено условие (3.9). Дифференцируя тождество $P(z) \equiv (z-c)^k q(z)$, получаем

$$P'(z) = k(z-c)^{k-1}q(z) + (z-c)^k q'(z) =$$
$$= (z-c)^{k-1}[kq(z) + (z-c)q'(z)] = (z-c)^{k-1}q_1(z).$$

Если $k = 1$, то $P'(c) = q_1(c) = q(c) \neq 0$ и, следовательно, (3.10) выполнено. Если $k > 1$, то $P'(c) = 0$, $q_1(c) = kq(c) \neq 0$ и

$$P''(z) = (k-1)(z-c)^{k-2}q_1(z) + (z-c)^{k-1}q_1'(z) =$$
$$= (z-c)^{k-2}[(k-1)q_1(z) + (z-c)q_1'(z)] = (z-c)^{k-2}q_2(z).$$

Если $k = 2$, то $P''(c) = q_2(c) = q_1(c) \neq 0$. Значит, в этом случае (3.10) выполняется. Если $k > 2$, то последовательное дифференцирование приводит к соотношениям

$$P(c) = P'(c) = \ldots = P^{(k-1)}(c) = 0,$$

причем

$$P^{(k-1)}(z) = (z-c)q_{k-1}(z), \qquad q_{k-1}(c) \neq 0.$$

Тогда $P^{(k)}(z) = q_{k-1}(z) + (z-c)q'_{k-1}(z)$ и, следовательно, $P^{(k)}(c) = = q_{k-1}(c) \neq 0$.

Таким образом, из (3.9) следует (3.10) и теорема доказана полностью.

Вопрос о существовании нулей у произвольного многочлена является одним из центральных вопросов алгебры и положительный ответ на него дает основная теорема алгебры, которую мы приводим без доказательства.

Теорема 3.7. (*основная теорема алгебры*).
Всякий многочлен ненулевой степени имеет хотя бы один нуль.

Следует подчеркнуть, что в этой теореме утверждается лишь существование нуля, но не указывается формула для его вычисления.

Обозначим через c_1 нуль многочлена P степени $n > 0$. Согласно (3.8) многочлен P представим в виде

$$P(z) = (z-c_1)Q(z),$$

где Q – многочлен степени $(n-1)$. Если $n-1 > 0$, то и многочлен Q имеет нуль, который обозначим через c_2. Тогда

$$Q(z) = (z-c_2)R(z),$$

где R – многочлен степени $(n-2)$, и,следовательно, P можно представить в виде

$$P(z) = (z-c_1)(z-c_2)R(z).$$

Продолжая эти рассуждения, придем к равенству

$$P(z) = (z - c_1)(z - c_2)\dots(z - c_n)b,$$

где b – многочлен нулевой степени. Раскрывая скобки в последнем выражении, убеждаемся, что b является коэффициентом при z^n, откуда следует, что $b = a_n$. Ясно, что $P(c_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$. Сформулируем полученный результат.

Следствие из основной теоремы алгебры. Многочлен $P(z) = = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ степени $n \geq 1$ может быть представлен в виде

$$P(z) = a_n(z - c_1)\dots(z - c_n). \tag{3.11}$$

Это представление единственно (с точностью до порядка сомножителей). Единственность представления (3.11) для произвольного многочлена P мы доказывать не будем.

Формулу (3.11) называют иногда мультипликативной формой многочлена. Таким образом, мы получили еще одну форму представления многочлена.

В общем случае в разложении (3.11) среди чисел $c_1, c_2, \dots, c_n$ могут быть равные, т.е. какие-то нули многочлена P могут иметь кратность больше единицы. Пусть различными нулями многочлена P служат числа $c_1, c_2, \dots, c_m$ $(m \leq n)$. Обозначим их кратности через $k_1, k_2, \dots, k_m$ соответственно.

Тогда разложение (3.11) принимает вид

$$\begin{aligned} & P(z) = \\ = \; & a_n(z - c_1)\dots(z - c_1)(z - c_2)\dots(z - c_2)\dots(z - c_m)\dots(z - c_m) = \\ = \; & a_n(z - c_1)^{k_1}(z - c_2)^{k_2}\dots(z - c_m)^{k_m}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Здесь $1 \leq k_i \leq n, \quad i = 1, \dots, m, \quad k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$. Формула (3.12) означает, что любой многочлен степени n имеет ровно n нулей с учетом их кратности.

3.5. Многочлены с вещественными коэффициентами

Если коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_n$ многочлена $P(z)$ вещественны, то при вещественных z он принимает вещественные значения. Такие многочлены принято называть вещественными. Разумеется, все вышеизложенное справедливо для таких многочленов. В частности, справедлива основная теорема алгебры и представление (3.12). При этом нули вещественных многочленов в общем случае комплексные. Простейший пример – многочлен $z^2 + 1$, оба нуля которого комплексны. Вещественные многочлены обладают некоторыми особыми свойствами.

Теорема 3.8. *Многочлен с вещественными коэффициентами принимает в комплексно-сопряженных точках комплексно-сопря-женные значения, т.е.* $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$.

Доказательство. Воспользуемся свойствами операции комплексного сопряжения и тем, что коэффициенты a_k – вещественны, т.е. $\bar{a}_k = a_k$. Тогда

$$P(\bar{z}) = \sum_{k=0}^{n} a_k(\bar{z})^k = \sum_{k=0}^{n} a_k\overline{(z)^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}\overline{(z)^k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \overline{(a_k z^k)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k} = \overline{P(z)}.$$

Следствие. *Если c – нуль вещественного многочлена, то $\bar{c}$ – также нуль этого многочлена.*

Действительно, пусть $P(c) = 0$, тогда $\overline{P(c)} = 0$, а значит, $P(\bar{c}) = 0$. Более того, можно доказать, что нули c и $\bar{c}$ вещественного многочлена имеют одинаковую кратность.

Теперь можно уточнить формулу (3.12) разложения вещественного многочлена на множители. Пусть c_1 (где $\mathrm{Im}(c_1) \neq 0$) и $\bar{c}_1$ – комплексно-сопряженные нули вещественного многочлена. В формуле (3.12) этим нулям соответствуют множители $(z-c_1)^{k_1}$ и $(z-\bar{c}_1)^{k_1}$. Их произведение равно

$$\left[(z-c_1)(z-\bar{c}_1)\right]^{k_1} = \left[z^2 - (c_1+\bar{c}_1)z + c_1\bar{c}_1\right]^{k_1} =$$

$$= (z^2 + \alpha_1 z + \beta_1)^{k_1},$$

где $\alpha_1 = -(c_1 + \bar{c}_1)$ и $\beta_1 = c_1\bar{c}_1$ – вещественные числа, причем $\alpha_1^2 - 4\beta_1 < 0$ (почему?). Таким образом в разложении (3.12) можно объединить все пары множителей, соответствующих комплексно-сопряженным нулям многочлена P. Следовательно, для любого вещественного многочлена P ненулевой степени n справедливо представление:

$$P(z) = a_n(z^2+\alpha_1 z+\beta_1)^{k_1}\dots(z^2+\alpha_l z+\beta_l)^{k_l}(z-d_1)^{n_1}\dots(z-d_m)^{n_m}. \quad (3.13)$$

Здесь $d_1, \dots, d_m$ – вещественные нули многочлена P с кратностями $n_1, \dots, n_m$ соответственно, множители $(z^2 + \alpha_p z + \beta_p)^{k_p}$ отвечают парам комплексно-сопряженных корней кратности k_p, т.е. $\alpha_p, \beta_p \in I\!R$, $\alpha_p^2 - 4\beta_p < 0$, $p = 1, 2, \dots, l$, и $2(k_1 + k_2 + \ldots + k_l) + n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$.

3.6. Рациональные дроби

Определение 3.5. *Пусть P и Q – многочлены, причем Q – ненулевой многочлен. Функция R, значения которой вычисляются по правилу*

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad (3.14)$$

называется дробно-рациональной функцией или рациональной дробью. Функция R определена на всей комплексной плоскости, кроме точек, в которых многочлен Q обращается в нуль.

Определение 3.6. *Рациональная дробь (3.14) называется правильной, если степень многочлена-числителя P строго меньше степени многочлена-знаменателя Q, либо $P(z) \equiv 0$. В противном случае дробь называется неправильной.*

Если дробь неправильная, то ее можно представить в виде суммы многочлена и правильной дроби. Действительно, на основании теоремы 3.4

$$P(z) = Q(z)q(z) + r(z)$$

и, следовательно,

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = q(z) + \frac{r(z)}{Q(z)}\,.$$

Теорема 3.9. *Пусть $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ – правильная рациональная дробь, а число c – нуль многочлена Q кратности k, т.е. $Q(z) = (z-c)^k q(z),\ \ q(c) \neq 0$. Тогда эта дробь представима в виде суммы следующих правильных дробей:*

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{A_k}{(z-c)^k} + \frac{r(z)}{(z-c)^{k-1}q(z)}\,, \tag{3.15}$$

где A_k – константа.

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\frac{P(z)}{Q(z)} - \frac{A_k}{(z-c)^k} = \frac{P(z)}{(z-c)^k q(z)} - \frac{A_k}{(z-c)^k} = \frac{R(z)}{(z-c)^k q(z)}\,, \tag{3.16}$$

где $R(z) = P(z) - A_k q(z)$. Ясно, что рациональная дробь $\dfrac{R(z)}{(z-c)^k q(z)}$ – правильная при любом A_k. Положим теперь $A_k = \dfrac{P(c)}{q(c)}$. Тогда многочлен $R(z) = P(z) - \dfrac{P(c)}{q(c)} q(z)$, очевидно, обращается в нуль в точке $z = c$, а значит, представим в виде $R(z) = (z-c)r(z)$.

Подставляя это выражение многочлена $R(z)$ в (3.16) и сокращая дробь на $(z-c)$, получаем требуемое равенство (3.15).

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы 3.9. Тогда дробь $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ можно представить в виде суммы следующих правильных дробей:*

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{A_k}{(z-c)^k} + \frac{A_{k-1}}{(z-c)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_1}{(z-c)} + \frac{T(z)}{q(z)}\,, \tag{3.17}$$

где $A_k, A_{k-1}, \ldots, A_1$ – константы.

Действительно, по теореме 3.9 дробь $\dfrac{r(z)}{(z-c)^{k-1}q(z)}$ (при $k>1$) представима в виде суммы правильных дробей:

$$\frac{r(z)}{(z-c)^{k-1}q(z)} = \frac{A_{k-1}}{(z-c)^{k-1}} + \frac{S(z)}{(z-c)^{k-2}q(z)}\,.$$

Этот процесс может быть продолжен, и в результате получим требуемое равенство (3.17).

Определение 3.7. *Рациональная дробь вида* $\dfrac{A}{(z-c)^k}$, $\quad k \geq 1$, *называется простейшей дробью.*

Описанный процесс представления правильной рациональной дроби в виде (3.17) можно назвать, таким образом, разложением дроби в сумму, содержащую k простейших дробей, соответствующих нулю кратности k многочлена-знаменателя Q.

Если в (3.17) $.q(z)=0$, то $T(z)\equiv 0$, так как дробь $\dfrac{T(z)}{q(z)}$ – правильная. Если же $.q(z)\geq 1$, то этот многочлен имеет хотя бы один нуль (обозначим его d) некоторой кратности $m \geq 1$ и, следовательно, представим в виде $q(z) = (z-d)^m q_1(z), \quad q_1(d)\neq 0$. Тогда дробь $\dfrac{T(z)}{q(z)}$ можно разложить в сумму вида (3.17), содержащую m простейших дробей, соответствующих нулю d многочлена $q(z)$:

$$\frac{T(z)}{q(z)} = \frac{B_m}{(z-d)^m} + \frac{B_{m-1}}{(z-d)^{m-1}} + \ldots + \frac{B_1}{z-d} + \frac{T_1(z)}{q_1(z)}\,.$$

Продолжение этого процесса (теперь уже для дроби $\dfrac{T_1(z)}{q_1(z)}$ и т.д.) позволяет исходную правильную рациональную дробь $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ разложить в сумму простейших дробей. Таким образом, установлена следующая теорема разложения.

Теорема 3.10. *Пусть* $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ *– правильная рациональная дробь и* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *– все нули многочлена Q кратностей $k_1, k_2, \ldots, k_n$ соответственно. Тогда эта дробь может быть разложена в следующую сумму простейших* *дробей:*

$$\begin{aligned}\frac{P(z)}{Q(z)} &= \frac{A^{(1)}_{k_1}}{(z-c_1)^{k_1}} + \frac{A^{(1)}_{k_1-1}}{(z-c_1)^{k_1-1}} + \ldots + \frac{A^{(1)}_{1}}{z-c_1} + \\ &+ \frac{A^{(2)}_{k_2}}{(z-c_2)^{k_2}} + \frac{A^{(2)}_{k_2-1}}{(z-c_2)^{k_2-1}} + \ldots + \frac{A^{(2)}_{1}}{z-c_2} + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \frac{A^{(n)}_{k_n}}{(z-c_n)^{k_n}} + \frac{A^{(n)}_{k_n-1}}{(z-c_n)^{k_n-1}} + \ldots + \frac{A^{(n)}_{1}}{z-c_n} = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i} \frac{A^{(i)}_j}{(z-c_i)^j}\,, \end{aligned} \tag{3.18}$$

где все $A^{(i)}_j$ *– константы (коэффициенты разложения).*

Коэффициенты разложения $A^{(i)}_j$ могут быть определены последовательно, как это указано в описанной процедуре. Однако на практике поступают иначе. Записав разложение (3.18) с неопределенными коэффициентами, правую часть приводят к общему знаменателю, после чего приравнивают числители дробей. В результате получается равенство двух многочленов, и из условия совпадения их коэффициентов при одинаковых степенях переменной z для определения коэффициентов $A^{(i)}_j$ получают систему линейных алгебраических уравнений. Из этой системы однозначно определяются искомые коэффициенты. Продемонстрируем сказанное на примерах.

Примеры. Разложить в сумму простейших дробей следующие правильные дроби:

1) $R(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z+1)^2}$.

Нулями знаменателя являются: $c_1 = 1$ – простой нуль и $c_2 = -1$ – нуль кратности 2. Разложение с неопределенными коэффициентами имеет вид

$$\frac{z}{(z-1)(z+1)^2} = \frac{A}{z-1} + \frac{B_2}{(z+1)^2} + \frac{B_1}{z+1}\,.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю, получаем

$$\frac{z}{(z-1)(z+1)^2} = \frac{A(z+1)^2 + B_1(z-1)(z+1) + B_2(z-1)}{(z-1)(z+1)^2}\,.$$

Отсюда следует, что

$$z = A(z+1)^2 + B_1(z-1)(z+1) + B_2(z-1).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, получим:

$$\begin{cases} A + B_1 = 0, \\ 2A + B_2 = 1, \\ A - B_1 - B_2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $A = \dfrac{1}{4}$, $B_1 = -\dfrac{1}{4}$, $B_2 = \dfrac{1}{2}$. Итак,

$$\frac{z}{(z-1)(z+1)^2} = \frac{1/4}{z-1} + \frac{1/2}{(z+1)^2} + \frac{-1/4}{z+1}\,.$$

2) $R(z) = \dfrac{3z^2+5z+12}{(z^2+3)(z^2+1)}$. Нули знаменателя этой дроби простые: $c_1 = i\sqrt{3}$, $c_2 = -i\sqrt{3}$, $c_3 = i$, $c_4 = -i$. Разложение имеет вид

$$R(z) = \frac{A}{z - i\sqrt{3}} + \frac{B}{z + i\sqrt{3}} + \frac{C}{z-i} + \frac{D}{z+i}\,.$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая числители, получим:

$$3z^2 + 5z + 12 =$$

$$= A(z+i\sqrt{3})(z^2+1) + B(z-i\sqrt{3})(z^2+1) + C(z+i)(z^2+3) + D(z-i)(z^2+3).$$

Составляя линейную систему и решая ее, найдем

$$A = -\frac{5 - i\sqrt{3}}{4}; \quad B = -\frac{5 + i\sqrt{3}}{4}; \quad C = \frac{5-9i}{4}; \quad D = \frac{5+9i}{4}\,.$$

Сформулируем алгоритм разложения рациональной дроби $\dfrac{P}{Q}$.

1. Если дробь неправильная, то представляем ее в виде суммы многочлена и правильной дроби.

2. Решая уравнение $Q(z) = 0$, находим нули знаменателя и их кратность.

3. Для полученной в п.1 правильной дроби записываем разложение (3.18) с неопределенными коэффициентами.

4. Правую часть полученного разложения приводим к общему знаменателю.

5. Приравнивая многочлены, стоящие в числителях, и используя условия равенства многочленов, выписываем линейную систему для неопределенных коэффициентов.

6. Решая систему, получаем коэффициенты разложения правильной дроби в сумму простейших дробей.

Замечание 3.7. *В рациональной дроби* $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ *многочлены* P *и* Q *могут иметь общие нули, а значит, могут иметь в своих разложениях вида* (3.12) *общие множители, на которые дробь* (3.14) *можно сократить* (*см., например, доказательство теоремы* 3.9). *Так, например, вместо дроби* $\dfrac{z^2+2z-3}{z^2+4z+3}$ *можно рассматривать дробь* $\dfrac{z-1}{z+1}$, *которая получена из первой сокращением на* $(z+3)$. *Если многочлены* P *и* Q *не имеют общих нулей, то дробь* $\dfrac{P}{Q}$ *называется несократимой. Для несократимой дроби нуль кратности* k *знаменателя* Q *называется полюсом кратности* k *этой дроби.*

3.7. Вещественные рациональные дроби

Если многочлены P и Q – вещественные, рациональную дробь $R = \dfrac{P}{Q}$ будем называть вещественной.

Правильная вещественная рациональная дробь может быть разложена в сумму вещественных простейших дробей, однако для этого класс простейших дробей необходимо расширить.

Определение 3.8. *Вещественные рациональные дроби вида*

$$\frac{Mx+L}{(x^2+\alpha x+\beta)^k}\,,$$

где $k \in I\!\!N$, $\alpha^2 - 4\beta < 0$, *будем наряду с дробями вида* $\dfrac{A}{(x-c)^k}$ *называть простейшими вещественными дробями.*

Приведем без доказательства аналог теоремы 3.10 для случая вещественных дробей.

Теорема 3.11. *Пусть* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *– правильная вещественная рациональная дробь, где*

$$Q(x) = a_n(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{k_1}\ldots(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{k_l}(x-d_1)^{n_1}\ldots(x-d_m)^{n_m}$$

(*см.* (3.13)). *Тогда эта дробь может быть разложена в следующую сумму простейших вещественных дробей:*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A^{(1)}_{n_1}}{(x-d_1)^{n_1}} + \frac{A^{(1)}_{n_1-1}}{(x-d_1)^{n_1-1}} + \ldots + \frac{A^{(1)}_1}{x-d_1} + \ldots$$

$$+\frac{A_{n_m}^{(m)}}{(x-d_m)^{n_m}}+\frac{A_{n_m-1}^{(m)}}{(x-d_m)^{n_m-1}}+\ldots+\frac{A_1^{(m)}}{x-d_m}+$$

$$+\frac{M_{k_1}^{(1)}x+L_{k_1}^{(1)}}{(x^2+\alpha_1x+\beta_1)^{k_1}}+\frac{M_{k_1-1}^{(1)}x+L_{k_1-1}^{(1)}}{(x^2+\alpha_1x+\beta_1)^{k_1-1}}+\ldots+\frac{M_1^{(1)}x+L_1^{(1)}}{x^2+\alpha_1x+\beta_1}+$$

$$+\ldots+\frac{M_{k_l}^{(l)}x+L_{k_l}^{(l)}}{(x^2+\alpha_lx+\beta_l)^{k_l}}+\frac{M_{k_l-1}^{(l)}x+L_{k_l-1}^{(l)}}{(x^2+\alpha_lx+\beta_l)^{k_l-1}}+\ldots+\frac{M_1^{(l)}x+L_1^{(l)}}{x^2+\alpha_lx+\beta_l}.$$

Алгоритм нахождения коэффициентов $A_j^{(i)}$, $M_S^{(t)}$, $L_S^{(t)}$ таков же, как и для разложения (3.18).

Примеры. Разложить в сумму простейших вещественных дробей следующие правильные дроби:

1) $R(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}$. Разложение с неопределенными коэффициентами имеет вид

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая числители, получим:

$$1=(Ax+B)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2+1).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, находим:

$$\begin{cases} A+C=0, \\ B+D=0, \\ 4A+C=0, \\ 4B+D=1, \end{cases}$$

откуда $A=0$, $B=\dfrac{1}{3}$, $C=0$, $D=-\dfrac{1}{3}$. Таким образом,

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{\frac{1}{3}}{x^2+1}-\frac{\frac{1}{3}}{x^2+4}.$$

2) $R(x)=\dfrac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}$.

Разложение с неопределенными коэффициентами имеет вид

$$R(x)=\frac{Ax+B}{(x^2+2x+3)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+3}+\frac{E}{x+1},$$

откуда

$$x^4+4x^3+11x^2+12x+8=$$

$$= (Ax+B)(x+1) + (Cx+D)(x^2+2x+3)(x+1) + E(x^2+2x+3)^2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, находим:

$$\begin{cases} C+E=1, \\ 3C+D+4E=4, \\ A+5C+3D+10E=11, \\ A+B+3C+5D+12E=12, \\ B+3D+9E=8, \end{cases}$$

откуда $A=1$, $B=-1$, $C=0$, $D=0$, $E=1$ и, следовательно,

$$R(x) = \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} + \frac{1}{x+1}\,.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Бодунов Николай Александрович
Челкак Сергей Иванович
Чистяков Владимир Матвеевич

Комплексные числа. Многочлены.
Векторная алгебра и аналитическая геометрия
Учебное пособие

Редактор Э.К.Долгатов
Лицензия ЛР N 020617 от 10.08.92

Подписано в печать Формат 60×84 1.16. Бумага тип. N2.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 3,48. Уч. -изд. л. 3,75.
Тираж 500 экз. Заказ
Издательско-полиграфический центр ГЭТУ

197376, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5