

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Санкт-Петербургский государственный электротехнический
университет „ЛЭТИ“

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА,
МНОГОЧЛЕНЫ И РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ

Электронное учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство СПбГЭТУ „ЛЭТИ“
2013

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Санкт-Петербургский государственный электротехнический
университет „ЛЭТИ“

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА,
МНОГОЧЛЕНЫ И РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ

Электронное учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство СПбГЭТУ „ЛЭТИ“
2013

УДК 512.64+514.17(07)

ББК В14я7

К 63

К 63 Белополюский А. Л., Бодунов Н. А., Челкак С. И., Чистяков
В. М. Комплексные числа, многочлены и рациональные дроб-
би: Электронное учебное пособие / СПб.: Изд-во СПбГЭТУ
„ЛЭТИ“, 2013. 52 с.

ISBN ?

Излагается теория метода координат, комплексных чисел, многочле-
нов и рациональных дробей и является частью программы дисциплины
„Алгебра и геометрия“ технических университетов.

Предназначено для студентов факультетов электротехники и автома-
тизации, электроники, экономики и менеджмента и открытого факультета,
обучающихся по всем направлениям.

Пособие позволяет студентам самостоятельно и более углубленно изу-
чать разделы курса кратко изложенные на лекциях. Достаточное наличие,
подробно решенных примеров, должно помочь студентам в самостоятель-
ной работе, при выполнении текущих домашних заданий.

УДК 512.64+514.17(075)

ББК В14я7

Рецензенты: кафедра высшей математики СПбГПУ;
д-р физ.-мат. наук Н. В. Смородина (СПбГУ).

Утверждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве электронного учебного пособия

ISBN ?

© СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, 2013

Введение

Данное пособие предназначено для студентов первого курса факультетов электротехники и автоматизации, электроники, экономики и менеджмента и открытого факультета. В пособии подробно излагаются три раздела курса „Алгебра и геометрия“, которые, как правило, с трудом осваиваются студентами. Подобная ситуация вызвана тем, что эти разделы кратко излагаются на лекциях (из-за недостатка времени, которое увеличилось введением новых стандартов и практически исчезли из школьного курса математики) и недостаточно полно разобраны в большинстве учебников для ВУЗОВ. Наличие большого числа примеров, позволяет студентам самостоятельно ознакомиться с этими разделами.

Первый раздел посвящен краткому описанию метода координат; второй – теории комплексных чисел; третий – теории многочленов и рациональных дробей. Данное электронное учебное пособие является вторым исправленным изданием учебного пособия [1]. При выполнении типовых расчетов по комплексным числам и интегрировании рациональных дробей полезно воспользоваться учебным пособием [2].

Отметим некоторые стандартные обозначения, принятые в пособии. Множество целых чисел – $\mathbb{Z}$; множество вещественных чисел – $\mathbb{R}$; множество комплексных чисел – $\mathbb{C}$. Знак ■ отмечает конец доказательства; знак $\otimes$ – конец замечания, а знак ● – конец примера.

1. МЕТОД КООРДИНАТ

Основная цель координатного метода состоит в том, чтобы изучение геометрических объектов (точки, линии, поверхности) заменить изучением числовых множеств. Тогда геометрические задачи могут решаться средствами алгебры и анализа. Переход от геометрических объектов к числовым множествам осуществляется с помощью введения системы координат.

1.1. Система координат на прямой

Рассмотрим произвольную прямую линию. Выберем на ней некоторую точку O и направление, которое будем называть положительным. Кроме того выберем единицу масштаба – некоторый отрезок l . Теперь каждой точке M данной прямой можно сопоставить единственное число x , называемое ее координатой, по следующему правилу: оно равно длине отрезка OM , выраженной через выбранную единицу масштаба l , взятой со знаком „+“,

если точка M лежит в положительном направлении от точки O , и со знаком „–“ в противном случае.

Точка O называется началом координат. Ее координата равна нулю. Ясно также, что задание координаты точки M однозначно определяет положение этой точки на данной прямой. Таким образом на прямой введена система координат, которая устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством вещественных чисел $\mathbb{R}$ и множеством точек этой прямой. Вот почему прямую с выбранной на ней координатной системой называют еще числовой осью (рис.1.1).

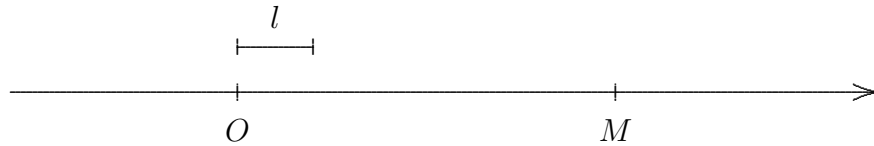


Рис.1.1

Желая указать координату данной точки в выбранной системе координат, будем записывать ее в круглых скобках рядом с обозначением самой точки, например: $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$, ..., $M_n(x_n)$. Числовую ось будем обозначать двумя прописными буквами, например OX , при этом первая служит обозначением начала координат, вторая же носит чисто символический характер и больше служит для различения числовых осей. Указание на числовой оси одной (отличной от O) или нескольких точек с их координатами однозначно определяет единицу масштаба, изображать которую отдельно теперь уже нет необходимости (рис.1.2).

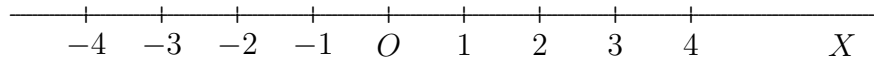


Рис.1.2

Допустим, что на прямой наряду с рассмотренной системой координат OX (старая система координат) введена другая (новая система координат), отличающаяся от старой лишь началом O' . Пусть координатой точки O' в старой системе координат является число a и M – произвольная точка прямой. Если x – старая координата точки M , то ее новая координата x' связана со старой соотношением (рис.1.3)

$$x = x' + a. \quad (1.1)$$

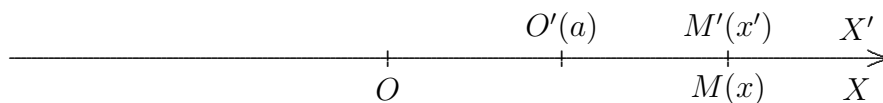


Рис.1.3

Упражнение. Доказать соотношение (1.1), рассмотрев все возможные случаи взаимного расположения трех точек O , O' , M на прямой.

Пусть теперь на числовой оси заданы две точки: $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$. Обозначим через $\rho(M_1, M_2)$ расстояние между точками M_1 и M_2 (измеренное, разумеется, в единице масштаба оси) и покажем, что

$$\rho(M_1, M_2) = |x_2 - x_1|. \quad (1.2)$$

Если хотя бы одна из этих точек совпадает с началом координат O (пусть для определенности это будет точка M_1 , т.е. $x_1 = 0$), то из самого определения координаты точки на числовой оси следует, что в этом случае

$$\rho(M_1, M_2) = \rho(O, M_2) = |x_2| = |x_2 - x_1|. \quad (1.3)$$

Если же точки M_1 и M_2 отличны от начала координат O , то введем новую систему координат, поместив ее начало O' в точку M_1 . Тогда новая координата x'_2 точки M_2 связана с ее старой координатой x_2 , согласно (1.1), соотношением $x_2 = x'_2 + x_1$, откуда $x'_2 = x_2 - x_1$. Теперь аналогично (1.3) получаем

$$\rho(M_1, M_2) = \rho(O', M_2) = |x'_2| = |x_2 - x_1|,$$

что и доказывает (1.2).

Задача. Найти координату середины M отрезка числовой оси, ограниченного точками $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$.

Решение. Координату x точки M находим (см. рис. 1.4) из условия

$$\rho(M, M_1) = \rho(M, M_2).$$

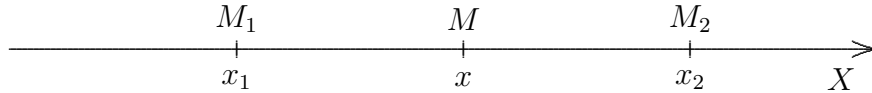


Рис.1.4

В силу (1.2) это означает, что

$$|x_1 - x| = |x_2 - x|.$$

Возводя обе части равенства в квадрат, легко находим, что

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}. \quad (1.4)$$

1.2. Системы координат на плоскости

Рассмотрим теперь произвольную плоскость и поставим точкам этой плоскости во взаимно однозначное соответствие упорядоченные пары вещественных чисел – координаты точек. Это можно сделать с помощью

различных систем координат. Сначала рассмотрим самую распространенную – декартову прямоугольную систему координат. Для этого введем две взаимно перпендикулярные числовые оси OX и OY (координатные оси) с общей единицей масштаба. Первую числовую ось (OX) назовем осью абсцисс, вторую (OY) – осью ординат, а их общее начало (точку O) – началом координат. Будем считать, что кратчайший поворот (на угол $\frac{\pi}{2}$) от оси OX к оси OY происходит против хода часовой стрелки.

Пусть M – произвольная точка плоскости, а x и y – координаты проекций P и Q этой точки на числовые оси OX и OY соответственно. Упорядоченную пару чисел $(x; y)$ назовем координатами точки M в построенной декартовой прямоугольной системе координат. Число x назовем абсциссой точки M , число y – ее ординатой. При этом, как и в случае прямой, координаты точки будем записывать в круглых скобках рядом с ее обозначением: $M(x; y)$ (рис.1.5). Установленное соответствие между точками плоскости и упорядоченными парами чисел является взаимно однозначным (почему?).

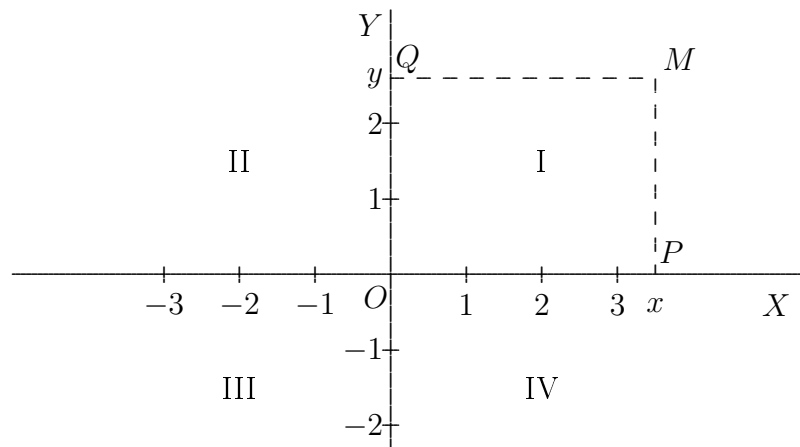


Рис.1.5

Будем обозначать декартову систему координат на плоскости символом OXY . Координатные оси OX и OY разделяют плоскость на четыре части, называемые координатными четвертями или квадрантами. Они пронумерованы так, как показано на рис.1.5. Так же, как и на прямой, после введения системы координат на плоскости легко получить формулу для вычисления расстояния $\rho(M_1, M_2)$ между точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$.

Треугольник $M_1M_2M_3$ – прямоугольный. По теореме Пифагора

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{\rho^2(M_1, M_3) + \rho^2(M_2, M_3)}. \quad (1.5)$$

Формула (1.5) справедлива и в том случае, когда отрезок M_1M_2 параллелен одной из координатных осей (в этом случае точка M_3 совпадает с одной из точек M_1 или M_2).

Очевидно (рис.1.6), что $\rho(M_1, M_3) = \rho(P_1, P_2)$ и $\rho(M_2, M_3) = \rho(Q_1, Q_2)$ (через P_1, P_2 и Q_1, Q_2 обозначены проекции точек M_1, M_2 на координатные оси OX и OY соответственно). С учетом формулы (1.2)

$$\rho(P_1, P_2) = |x_2 - x_1|, \quad \rho(Q_1, Q_2) = |y_2 - y_1|. \quad (1.6)$$

Подставляя (1.6) в (1.5), получаем требуемую формулу:

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (1.7)$$

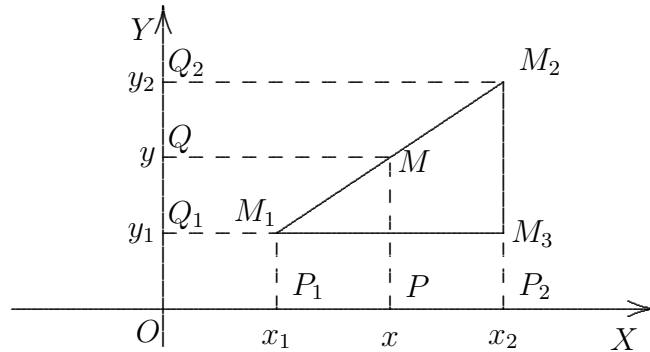


Рис.1.6

Отметим также, что проекциями P и Q середины $M(x; y)$ отрезка M_1M_2 служат середины отрезков P_1P_2 и Q_1Q_2 соответственно (рис.1.6). Поэтому с учетом (1.4) легко находим, что $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Рассмотрим кроме декартовой еще одну систему координат на плоскости, так называемую полярную систему координат. Выберем на плоскости точку O , называемую полюсом. Проведем из полюса луч, который назовем полярной осью, и для измерения длин выберем единицу масштаба. Взяв произвольную точку M , отличную от полюса, соединим ее с полюсом O отрезком, длину которого r назовем полярным радиусом точки M . Угол φ между полярной осью и отрезком OM , измеряемый в радианах и отсчитываемый от полярной оси против хода часовой стрелки, назовем полярным углом точки M (рис.1.7).

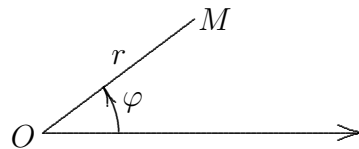


Рис.1.7

Полученную упорядоченную пару чисел $(r; \varphi)$ (радиус и аргумент) назовем полярными координатами точки M (не совпадающей с O). Из определения ясно, что $r > 0$, а значение аргумента лежит в пределах $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Замечание 1.1. Иногда значение аргумента из промежутка $(-\pi, \pi]$ называют его главным значением. При этом, если φ_0 – главное значение аргумента, то другими допустимыми значениями аргумента служат $\varphi = \varphi_0 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Ясно, что пары $(r; \varphi)$ и $(r; \varphi_0)$ определяют одну и ту же точку плоскости. $\otimes$

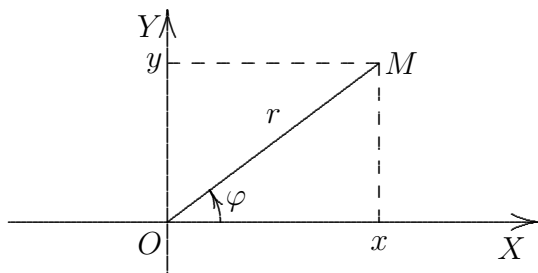


Рис.1.8

Из рис.1.8 видно, что

$$\begin{cases} x = r \cos(\varphi), \\ y = r \sin(\varphi) \end{cases} \quad (1.8)$$

и, следовательно,

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \cos(\varphi) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin(\varphi) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases} \quad (1.9)$$

Формулы (1.8) задают переход от полярных координат к декартовым, а (1.9) – от декартовых к полярным в рассматриваемом случае. При этом угол φ находится по значениям $\cos(\varphi)$ и $\sin(\varphi)$ (для случая $x^2 + y^2 \neq 0$, т.е. когда соответствующая точка не совпадает с полюсом O).

Пример 1.1. Найти полярные координаты точки M с декартовыми координатами $x = -1$, $y = 1$.

По формулам (1.9) находим:

$$r = \sqrt{2}; \quad \cos(\varphi) = \frac{-1}{\sqrt{2}}; \quad \sin(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ (главное значение полярного угла). Следовательно, $\left(\sqrt{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$ – полярные координаты данной точки. •

Рассмотрим теперь на плоскости две декартовы прямоугольные системы координат OXY (назовем ее старой системой координат) и $O'X'Y'$ (новая система координат) с параллельными и одинаково направленными координатными осями и общей единицей масштаба. Пусть $(a; b)$ – координаты точки O' в системе OXY .

Иногда говорят, что координатная система $O'X'Y'$ получена из системы OXY параллельным переносом осей, определяемым числами a и b .

Формулы, связывающие старые $(x; y)$ и новые $(x'; y')$ координаты про-

извольной точки M по аналогии с (1.1) имеют вид :

$$\begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b. \end{cases} \quad (1.10)$$

Формулы (1.10) называются формулами преобразования декартовых прямоугольных координат на плоскости при параллельном переносе осей.

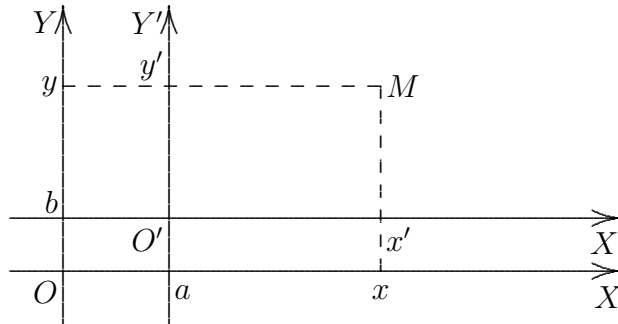


Рис.1.9

Возьмем теперь в плоскости декартову прямоугольную систему координат OXY и введем новую систему координат $OX'Y'$ с тем же началом и масштабом, оси которой OX' и OY' повернуты относительно осей OX и OY на угол α (рис.1.10).

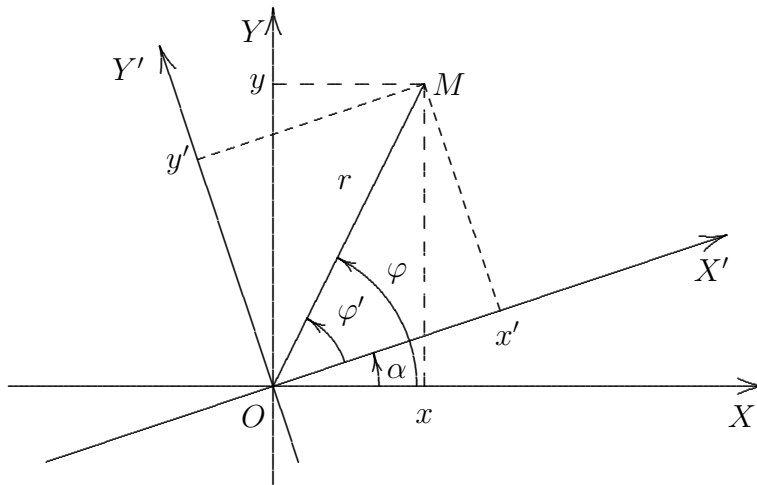


Рис.1.10

Обозначим через $(r; \varphi)$ полярные координаты точки M , принимая за полярную ось луч OX , и через $(r; \varphi')$ полярные координаты той же точки, принимая за полярную ось луч OX' . Очевидно, $\varphi = \alpha + \varphi'$. Пусть $(x; y)$ и $(x'; y')$ – координаты точки M в системах OXY и $OX'Y'$ соответственно. Тогда, согласно формулам (1.8)

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\varphi), & y &= r \sin(\varphi); \\ x' &= r \cos(\varphi'), & y' &= r \sin(\varphi'). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\varphi) = r \cos(\alpha + \varphi') = r(\cos(\alpha) \cos(\varphi') - \sin(\alpha) \sin(\varphi')) = \\ &= x' \cos(\alpha) - y' \sin(\alpha); \\ y &= r \sin(\varphi) = r \sin(\alpha + \varphi') = r(\sin(\alpha) \cos(\varphi') + \cos(\alpha) \sin(\varphi')) = \\ &= x' \sin(\alpha) + y' \cos(\alpha). \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{cases} x = x' \cos(\alpha) - y' \sin(\alpha), \\ y = x' \sin(\alpha) + y' \cos(\alpha). \end{cases} \quad (1.11)$$

Из (1.11) легко находим, что

$$\begin{cases} x' = x \cos(\alpha) + y \sin(\alpha), \\ y' = -x \sin(\alpha) + y \cos(\alpha). \end{cases} \quad (1.12)$$

Формулы (1.11) и (1.12) называют формулами преобразования декартовых координат при повороте координатных осей.

1.3. Системы координат в пространстве

Выберем в пространстве какую-нибудь плоскость, а в ней декартову систему координат OXY (рис.1.11).

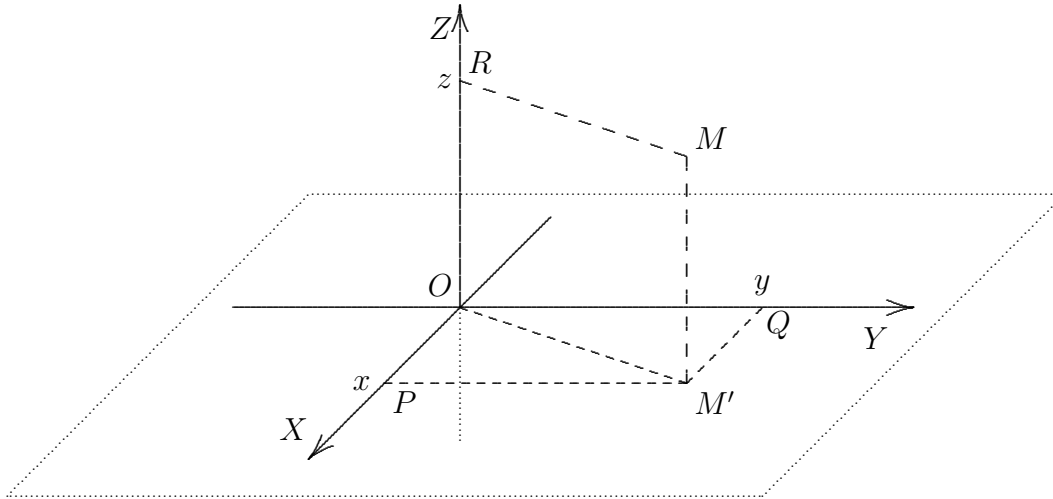


Рис.1.11

Проведем через точку O числовую ось OZ перпендикулярно выбранной плоскости так, чтобы со стороны ее положительного направления кратчайший поворот от луча OX к лучу OY был виден происходящим против хода часовой стрелки. Возьмем в пространстве произвольную точку M и обозначим через M' ее проекцию (основание перпендикуляра) на выбранную плоскость, а через R – ее проекцию на ось OZ . Пусть точка M' в

системе координат OXY имеет координаты $(x; y)$, а точка R на оси OZ – координату z . Тройку чисел $(x; y; z)$ примем за координаты точки M . Число x назовем абсциссой точки M , число y – ее ординатой, число z – аппликатой. Соответственно назовем и координатные оси: ось OX – осью абсцисс, ось OY – осью ординат, ось OZ – осью аппликат. Установленное соответствие между точками пространства и упорядоченными тройками чисел $(x; y; z)$ является взаимно однозначным (почему?).

Введенная координатная система называется декартовой прямоугольной системой координат в пространстве с началом в точке O и обозначается $OXYZ$. Состоит она, таким образом, из трех пересекающихся взаимно перпендикулярных числовых осей с единым масштабом и общим началом координат. Ясно, что координатами произвольной точки пространства являются координаты ее проекций на координатные оси.

Наряду с координатными осями рассматривают координатные плоскости XOY , XOZ , YOZ , содержащие соответствующие оси и разбивающие все пространство на восемь частей, называемых координатными октантами.

Рассмотрим теперь в пространстве две декартовы прямоугольные системы координат $OXYZ$ (старую) и $O'X'Y'Z'$ (новую) с параллельными и одинаково направленными координатными осями и общей единицей масштаба. Пусть $(a; b; c)$ – координаты точки O' в системе $OXYZ$. Формулы, связывающие старые $(x; y; z)$ и новые $(x'; y'; z')$ координаты произвольной точки M , по аналогии с (1.1) и (1.10) имеют вид:

$$\begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b, \\ z = z' + c \end{cases} \quad (1.13)$$

и обычно называются формулами преобразования декартовых прямоугольных координат в пространстве при параллельном переносе осей.

Выведем формулу для вычисления расстояния $\rho(M_1, M_2)$ между точками M_1 и M_2 в пространстве. Прежде всего, из рис.1.11 с использованием формул (1.2) и (1.7) легко находим, что в координатной системе $OXYZ$ для точки $M(x; y; z)$

$$\rho(O, M) = \sqrt{\rho^2(O, M') + \rho^2(M', M)} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (1.14)$$

Для определения расстояния между произвольными точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ поступим следующим образом. Наряду с исходной системой координат $OXYZ$ рассмотрим новую систему $M_1X'Y'Z'$ с началом в точке M_1 , полученную параллельным переносом осей.

Согласно (1.13) новые координаты $(x'_2; y'_2; z'_2)$ точки M_2 связаны с ее

старыми координатами $(x_2; y_2; z_2)$ соотношениями (рис.1.12)

$$\begin{cases} x_2 = x'_2 + x_1, \\ y_2 = y'_2 + y_1, \\ z_2 = z'_2 + z_1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x'_2 = x_2 - x_1, \\ y'_2 = y_2 - y_1, \\ z'_2 = z_2 - z_1. \end{cases}$$

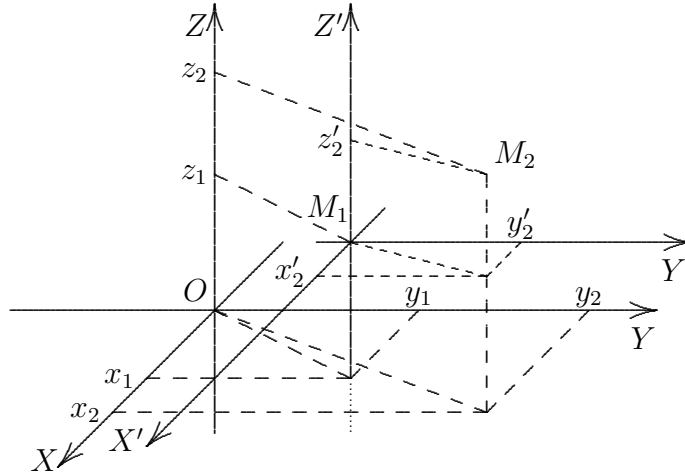


Рис.1.12

Остается для точки $M_2(x'_2; y'_2; z'_2)$ и координатной системы $M_1X'Y'Z'$ воспользоваться формулой (1.14):

$$\begin{aligned} \rho(M_1, M_2) &= \sqrt{(x'_2)^2 + (y'_2)^2 + (z'_2)^2} = \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Отметим следующие очевидные свойства расстояния между точками (на прямой, на плоскости и в пространстве):

- 1) $\rho(M_1, M_2) \geq 0$; $\rho(M_1, M_2) = 0 \iff M_1 = M_2$;
- 2) $\rho(M_1, M_2) = \rho(M_2, M_1)$;
- 3) для любых трех точек M_1, M_2, M_3 справедливо так называемое неравенство треугольника:

$$\rho(M_1, M_2) \leq \rho(M_1, M_3) + \rho(M_3, M_2).$$

Упражнения. 1) Докажите неравенство треугольника и объясните его геометрический смысл.

2) Докажите, что координаты $(x; y; z)$ середины M отрезка, ограниченного точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, находятся по формулам

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Рассмотрим теперь в пространстве еще одну достаточно распространенную координатную систему (которая в дальнейшем часто используется

при вычислении тройных интегралов и в математической физике), так называемую цилиндрическую систему координат (рис.1.13).

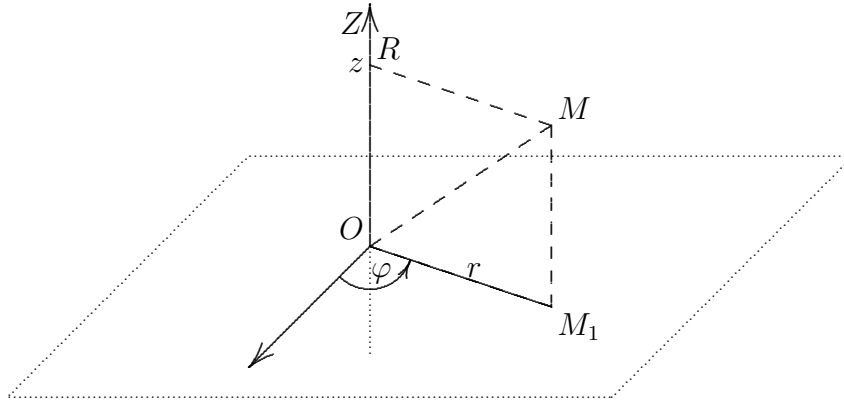


Рис.1.13

Выберем в пространстве плоскость, а в ней полярную систему координат. Через полюс O проведем числовую ось OZ перпендикулярно выбранной плоскости так, чтобы со стороны ее положительного направления увеличение полярного угла происходило против хода часовой стрелки.

Возьмем в пространстве произвольную точку M и обозначим через M_1 ее проекцию на выбранную плоскость, а через R – ее проекцию на ось OZ . Цилиндрическими координатами точки M называют тройку чисел $(r; \varphi; z)$, где $(r; \varphi)$ – полярные координаты точки M_1 , а z – координата точки R на оси OZ . Ясно, что $r \geq 0$, угол φ (если $r > 0$) определен с точностью до слагаемого, кратного 2π (главное его значение по-прежнему будем брать из промежутка $(-\pi, \pi]$), $z \in (-\infty, +\infty)$.

Если в пространстве имеются декартова система координат $OXYZ$ и цилиндрическая система координат с единым масштабом, общей осью OZ и полярной осью, совпадающей с положительной полуосью абсцисс (рис.1.14), то, как нетрудно видеть, для любой точки M координата z в обеих системах одна и та же, а координаты x, y связаны с координатами r, φ соотношениями (1.8), (1.9), полученными ранее для полярной и декартовой систем координат на плоскости.

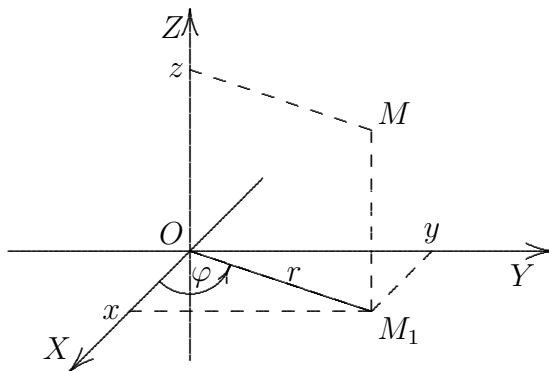


Рис.1.14

Рассмотрим еще одну систему координат в пространстве, так называемую сферическую систему координат. Ее прообразом служит система географических координат (долгота и широта) на поверхности Земли (которая также часто используется при вычислении тройных интегралов и в математической физике).

Выберем в пространстве некоторую плоскость, возьмем в ней точку O и проведем через эту точку в плоскости луч, называемый полярной осью, и ось OZ , перпендикулярную плоскости (рис.1.15).

Возьмем в пространстве произвольную точку M и соединим ее с точкой O вектором $\overrightarrow{OM}$, который называется радиусом-вектором точки M . Длину радиуса-вектора точки M обозначим через r . Проекцию точки M на выбранную плоскость обозначим M_1 (проекцией вектора $\overrightarrow{OM}$ на плоскость служит отрезок OM_1).

Если точка M не лежит на оси OZ , то обозначим через φ угол между выбранным в плоскости лучом и отрезком OM_1 , отсчитываемый против хода часовой стрелки (долгота точки M), а через θ – угол между положительным направлением оси OZ и вектором $\overrightarrow{OM}$

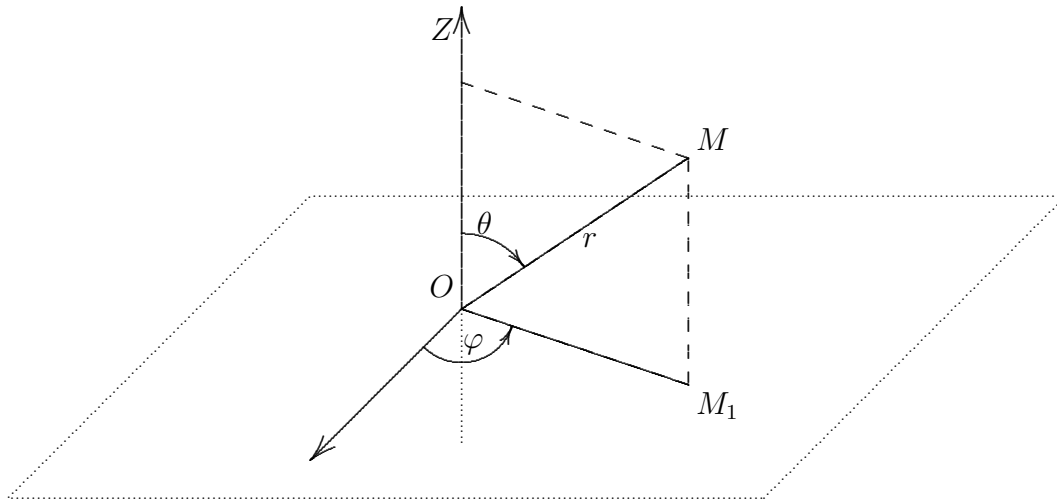


Рис.1.15

(широта точки M). Тройка чисел $(r; \theta; \varphi)$ и образует сферические координаты точки M в рассматриваемом случае. Ясно, что $r \geq 0$, угол θ изменяется в пределах $0 \leq \theta \leq \pi$, а угол φ определен с точностью до слагаемого, кратного 2π (будем по-прежнему считать, что его главное значение лежит в пределах $-\pi < \varphi \leq \pi$). Для точек оси OZ угол φ не определен (проекция этих точек на выбранную плоскость есть точка O), а для точки O не определены оба угла φ и θ (она однозначно определяется равенством $r = 0$).

Найдем связь между декартовыми и сферическими координатами точки в пространстве. Для обеих систем координат ось OZ – общая, точка O сферической системы координат совпадает с началом декартовой системы,

а полярная ось совпадает с положительной полуосью абсцисс.

Учитывая полученные ранее соотношения (1.8) и равенство $|OM_1| = r \sin(\theta)$, легко выводим следующие соотношения между декартовыми и сферическими координатами точки в пространстве (рис.1.16):

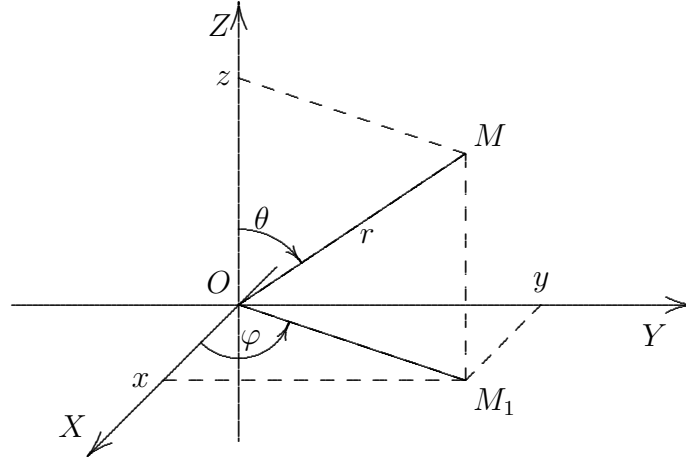


Рис.1.16

$$\begin{cases} x = r \sin(\theta) \cos(\varphi), \\ y = r \sin(\theta) \sin(\varphi), \\ z = r \cos(\theta). \end{cases}$$

2. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

2.1. Определение. Основные свойства

Рассмотрим множество $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, т. е. множество всех упорядоченных пар (x, y) , где $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. При этом, естественно, если $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, то

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \iff \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2. \end{cases} \quad (2.1)$$

На множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ определим две операции:

1) сложение

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2); \quad (2.2)$$

2) умножение

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1). \quad (2.3)$$

Определение 2.1. Множество всех упорядоченных пар вещественных чисел с определенными на нем сложением и умножением согласно (2.2), (2.3) называется множеством комплексных чисел и обозначается $\mathbb{C}$. Таким образом, условие $z \in \mathbb{C}$ означает, что $z = (x, y)$, где $x \in \mathbb{R}$ и $y \in \mathbb{R}$.

Замечание 2.1. Отметим, что само по себе множество упорядоченных пар вещественных чисел не является множеством $\mathbb{C}$ до тех пор, пока не введены указанные операции. Операции над элементами из $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, вообще говоря, могут быть введены и иным образом, и тогда мы получим конструкцию, отличную от множества $\mathbb{C}$. $\otimes$

Определение 2.2. Пусть $z = (x, y) \in \mathbb{C}$. Вещественное число x называется вещественной частью комплексного числа z и обозначается $x = \operatorname{Re}(z)$, а вещественное число y – мнимой частью комплексного числа z и обозначается $y = \operatorname{Im}(z)$.

В этих обозначениях условие (2.1), определяющее равенство двух комплексных чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$, запишется в виде

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} \operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2), \\ \operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2). \end{cases}$$

Сложение и умножение комплексных чисел обладают следующими свойствами:

1) (коммутативность сложения)

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1;$$

2) (ассоциативность сложения)

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3);$$

3) (коммутативность умножения)

$$z_1 z_2 = z_2 z_1;$$

4) (ассоциативность умножения)

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3);$$

5) (дистрибутивность умножения относительно сложения)

$$(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3.$$

Справедливость этих свойств устанавливается непосредственным вычислением обеих частей соответствующих равенств с использованием формул (2.2), (2.3) (доказательство этого предоставляется читателю).

Упражнение. Докажите, что для любого $z \in \mathbb{C}$:

$$z + (0, 0) = z; \quad (2.4)$$

$$z(0, 0) = (0, 0); \quad (2.5)$$

$$z(1, 0) = z. \quad (2.6)$$

Формулы (2.4) – (2.6) показывают, что комплексные числа $(0, 0)$ и $(1, 0)$ в множестве $\mathbb{C}$ играют роль, аналогичную роли чисел 0 и 1 в множестве $\mathbb{R}$.

Рассмотрим теперь вопрос об обратных операциях (вычитания и деления) в множестве $\mathbb{C}$.

Определение 2.3. Разностью комплексных чисел z_1 и z_2 называется такое комплексное число z (пишут $z = z_1 - z_2$), что $z_1 = z_2 + z$.

Пусть $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ и $z = (x, y)$. Тогда

$$z_1 = z_2 + z \iff \begin{cases} x_1 = x_2 + x, \\ y_1 = y_2 + y \end{cases} \iff \begin{cases} x = x_1 - x_2, \\ y = y_1 - y_2. \end{cases}$$

Таким образом, разностью чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ является число

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \quad (2.7)$$

и эта разность определена однозначно.

Для любого комплексного числа z определим противоположное ему число $(-z)$ равенством

$$z + (-z) = (0, 0).$$

Если $z = (x, y)$, то $(-z) = (0, 0) - z = (0, 0) - (x, y)$. С учетом (2.7)

$$(-z) = (-x, -y).$$

Ясно, что $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$.

Определение 2.4. Частным от деления комплексного числа z_1 на комплексное число $z_2 \neq (0, 0)$ называется такое комплексное число z (пишут $z = \frac{z_1}{z_2}$), что

$$z_1 = z_2 z. \quad (2.8)$$

Замечание 2.2. В этом определении ограничение $z_2 \neq (0, 0)$ естественно, поскольку при $z_2 = (0, 0)$ уравнение (2.8) принимает вид $z_1 = (0, 0)z$ и, как следует из (2.5), при $z_1 \neq (0, 0)$ оно решений не имеет, а при $z_1 = (0, 0)$ этому уравнению удовлетворяет любое число $z \in \mathbb{C}$, т. е. в обоих случаях частное теряет смысл. $\otimes$

Пусть $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2) \neq (0, 0)$ и $z = (x, y)$. Тогда

$$z_1 = z_2 z \iff \begin{cases} x_1 = x_2 x - y_2 y, \\ y_1 = y_2 x + x_2 y. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим ее единственное решение

$$x = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Таким образом, при $z_2 \neq (0, 0)$ ($x_2^2 + y_2^2 > 0$) частное $\frac{z_1}{z_2}$ существует и однозначно определено:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1, y_1)}{(x_2, y_2)} = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right). \quad (2.9)$$

Учитывая особую роль в множестве $\mathbb{C}$ числа $(1, 0)$ (см. (2.6)), аналогичную роли числа 1 в множестве $\mathbb{R}$, определим теперь для любого числа $z = (x, y) \neq (0, 0)$ обратное ему число z^{-1} равенством $z z^{-1} = (1, 0)$ (вспомним, что в $\mathbb{R}$: $x x^{-1} = 1$).

С учетом (2.9)

$$z^{-1} = \frac{(1, 0)}{z} = \frac{(1, 0)}{(x, y)} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right).$$

Покажем, что

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} \quad (z_2 \neq (0, 0)).$$

Для этого обозначим $z = z_1 z_2^{-1}$ и убедимся в справедливости (2.8):

$$z_2 z = z_2 z_1 z_2^{-1} = z_2 z_2^{-1} z_1 = (1, 0) z_1 = z_1.$$

Упражнение. Докажите следующие утверждения:

$$1) \frac{z_1 + z_2}{z_3} = \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3}, \quad z_3 \neq (0, 0);$$

$$2) (z^{-1})^{-1} = z;$$

$$3) (z_1 z_2)^{-1} = z_1^{-1} z_2^{-1}.$$

По аналогии с $\mathbb{R}$ в множестве $\mathbb{C}$ определим z^n при $n \in \mathbb{Z}$ – степень числа z с целым показателем:

$$1) \text{ если } n \in \mathbb{N}, \text{ то } z^n = z \cdots z \text{ (произведение } n \text{ множителей);}$$

$$2) \text{ если } z \neq (0, 0), \text{ то } z^0 = (1, 0);$$

$$3) \text{ если } z \neq (0, 0), \text{ то } z^{-n} = (z^n)^{-1} \text{ при } n \in \mathbb{N}.$$

Из последнего упражнения следует, что

$$z^{-n} = (z^{-1})^n.$$

Рассмотрим теперь комплексные числа вида $z = (x, 0)$. С учетом (2.1)

$$(x_1, 0) = (x_2, 0) \iff x_1 = x_2.$$

Кроме того, для комплексных чисел такого вида справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} (x_1, 0) + (x_2, 0) &= (x_1 + x_2, 0), \\ (x_1, 0) - (x_2, 0) &= (x_1 - x_2, 0), \\ (x_1, 0)(x_2, 0) &= (x_1 x_2, 0), \\ \frac{(x_1, 0)}{(x_2, 0)} &= \left(\frac{x_1}{x_2}, 0 \right) \quad \text{при } x_2 \neq 0, \\ (x, 0)^{-1} &= \left(\frac{1}{x}, 0 \right) \quad \text{при } x \neq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, арифметические операции с комплексными числами вида $(x, 0)$ сводятся к аналогичным операциям с их вещественными частями, т. е. с вещественными числами. Эти свойства комплексных чисел вида $(x, 0)$ позволяют отождествить комплексное число $z = (x, 0)$ с вещественным числом x . Итак, впредь будем считать, что

$$(x, 0) = x. \quad (2.10)$$

Тогда, в частности, получаем:

$$\begin{aligned} 1) \quad &(0, 0) = 0; \\ 2) \quad &(1, 0) = 1; \\ 3) \quad &z^{-1} = \frac{(1, 0)}{z} = \frac{1}{z} \quad \text{при } z \neq 0 \text{ и } \frac{1}{(x, 0)} = \frac{1}{x} \quad \text{при } x \neq 0. \end{aligned}$$

Кроме того, $(-1)z = -z$, так как если $z = (x, y)$, то $(-1)(x, y) = (-1, 0)(x, y) = (-x, -y) = -z$.

Таким образом, множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ можно рассматривать как расширение множества вещественных чисел $\mathbb{R}$ (множество $\mathbb{R}$ входит в множество $\mathbb{C}$ в качестве подмножества, причем арифметика комплексных чисел (рассмотренные ранее действия над ними) согласуется с арифметикой вещественных чисел).

Теперь рассмотрим комплексные числа вида $z = (0, y)$, для которых $\operatorname{Re}(z) = 0$. Их называют мнимыми комплексными числами. При $y = 1$ легко находим, что

$$(0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Это означает, в частности, что мнимое комплексное число $z = (0, 1)$ является корнем квадратного уравнения

$$z^2 + 1 = 0, \quad (2.11)$$

которое не имеет решений в множестве вещественных чисел.

Определение 2.5. Комплексное число $(0, 1)$ называется мнимой единицей и обозначается буквой i :

$$i = (0, 1). \quad (2.12)$$

Как было показано выше, $i^2 = -1$. Легко вычислить, что $(-i)^2 = (0, -1)^2 = -1$ и, значит, число $(-i)$, как и число i , является корнем уравнения (2.11).

Найдем произведение вещественного числа y на мнимую единицу i , используя соглашения (2.10) и (2.12):

$$yi = (y, 0)(0, 1) = (0, y). \quad (2.13)$$

Кроме того, из (2.10) и (2.13) следует, что

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + yi. \quad (2.14)$$

Определение 2.6. Представление комплексного числа $z = (x, y)$ в виде $z = x + yi$ называется его алгебраической формой.

Замечание 2.3. Поскольку $yi = iy$, можно записать число z в виде $z = x + iy$ — это другой вариант алгебраической формы записи числа z . В дальнейшем используем оба варианта записи и различия между ними не делаем. $\otimes$

Формула (2.14) означает, что любое комплексное число $z = (x, y)$ можно рассматривать как сумму двух комплексных чисел — вещественного $x = \operatorname{Re}(z)$ и мнимого yi , которое, в свою очередь, является, согласно (2.13), произведением вещественного $y = \operatorname{Im}(z)$ на мнимую единицу i (y можно считать коэффициентом при i в сумме $x + yi$).

Использование алгебраической формы представления комплексных чисел существенно упрощает вычисления. При этом необходимо учитывать основное равенство $i^2 = -1$.

Пример 2.1. 1) $i^3 = i^2i = (-1)i = -i$; $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$; $i^5 = i^4i = 1i = i$ и т. д.

2) $2 - 3i + (-1 - 2i)(1 - i) = 2 - 3i + (-1) + (-1)(-i) + (-2i) + (-2i)(-i) = 2 - 3i - 1 + i - 2i - 2 = -1 - 4i$ •.

Введем еще одну операцию в множестве $\mathbb{C}$.

Определение 2.7. Число $\bar{z} = (x, -y) = x - yi$ называется комплексно-сопряженным к числу $z = (x, y) = x + yi$, а нахождение $\bar{z}$ по числу z называют операцией комплексного сопряжения.

Перечислим основные свойства этой операции:

- 1) если $\bar{z}_1 = z_2$, то $z_1 = \bar{z}_2$ или, иначе, $\overline{(\bar{z})} = z$;
- 2) $\bar{\bar{z}} = z \iff (\operatorname{Im}(z) = 0, \text{ т.е. } z \in \mathbb{R})$;

$$3) \bar{z} = -z \iff \operatorname{Re}(z) = 0;$$

$$4) \overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2;$$

$$5) \overline{(z_1 - z_2)} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2;$$

$$6) \overline{(z_1 z_2)} = \bar{z}_1 \bar{z}_2;$$

$$7) \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \quad z_2 \neq 0.$$

Докажем первые два свойства (доказательство остальных свойств предоставляется читателю).

1) Пусть $z = x + yi$, тогда $\bar{z} = x - yi$ и

$$\overline{(\bar{z})} = \overline{x - yi} = x - (-y)i = x + yi = z.$$

2) Для $z \in \mathbb{R}$ равенство $\bar{z} = z$ очевидно; пусть теперь $z = x + yi$ и $\bar{z} = z$, т.е. $x - yi = x + yi$. Отсюда следует, что $y = -y$ и, следовательно, $y = 0$. Это означает, что $z = x + 0i = x \in \mathbb{R}$.

Упражнение. Докажите, что для любого комплексного числа $z = x + yi$:

1) $z + \bar{z} = 2x$ – вещественное число;

2) $z\bar{z} = x^2 + y^2 \geq 0$ (т.е. $z\bar{z}$ – вещественное неотрицательное число), при этом $z\bar{z} = 0 \iff z = 0$.

Ранее была получена формула (2.9) для частного двух комплексных чисел. На практике при делении комплексных чисел пользуются следующим приемом: умножают числитель и знаменатель на число, комплексно-сопряженное знаменателю, что приводит к делению на вещественное число:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + (x_2 y_1 - x_1 y_2) i}{x_2^2 + y_2^2} = \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i. \end{aligned}$$

Видно, что формула (2.9) получается „автоматически“.

Пример 2.2.

$$\frac{2 + 3i}{1 - 2i} = \frac{(2 + 3i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{2 + 3i + 4i - 6}{1^2 + 2^2} = -\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i. \bullet$$

2.2. Комплексная плоскость. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая и показательная формы комплексных чисел

Введем на плоскости декартову прямоугольную систему координат и каждому комплексному числу $z = x + iy$ поставим в соответствие (взаимно однозначное) точку плоскости с координатами $(x; y)$. Эту точку обозначим

z , так же как и соответствующее ей число. Вещественным числам (т.е. комплексным числам вида $z = x + i0$) соответствуют при этом точки оси абсцисс, и поэтому ось абсцисс будем называть также вещественной осью. Точкам оси ординат соответствуют комплексные числа вида $z = 0 + iy = iy$; эту ось назовем мнимой осью. Началу координат, очевидно, соответствует число $0 + i0$ (или просто 0).

Плоскость с фиксированной декартовой прямоугольной системой координат, на которой изображаются описанным образом комплексные числа, будем называть комплексной плоскостью (плоскостью $\mathbb{C}$).

Отметим, что точки z и $(-z)$ симметричны относительно начала координат, а точки z и $\bar{z}$ симметричны относительно вещественной оси.

Наряду с изображением комплексных чисел точками на плоскости $\mathbb{C}$ удобно с каждым комплексным числом z связывать вектор, идущий из начала координат в точку z . Ясно, что соответствие между множеством таких векторов и множеством комплексных чисел также является взаимно однозначным. При этом сумме $z_1 + z_2$ комплексных чисел z_1 и z_2 соответствует вектор, равный сумме векторов, отвечающих числам z_1 и z_2 (рис.2.1):

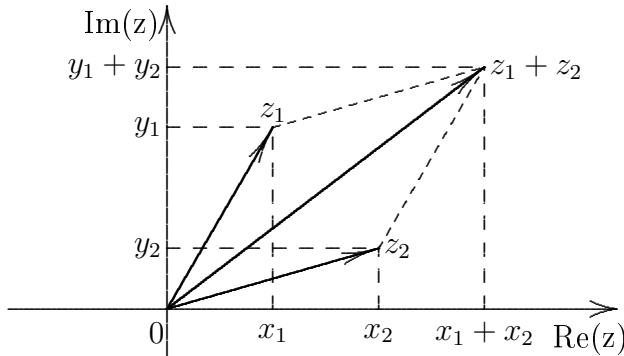


Рис.2.1

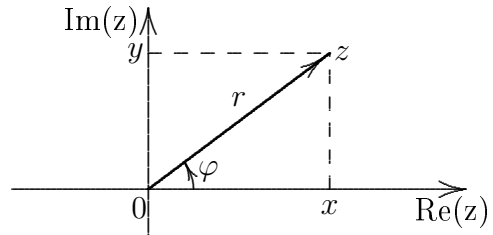


Рис.2.2

На комплексной плоскости $\mathbb{C}$ наряду с декартовой системой координат введем полярную (рис.2.2):

Определение 2.8. Полярный радиус r точки z называется модулем комплексного числа z и обозначается $|z|$.

Ясно, что модуль комплексного числа $z = x + iy$ определен однозначно, при этом:

1)

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0; \quad (2.15)$$

2) $r = |z| = 0 \iff z = 0$.

Определение 2.9. Пусть $z = x + iy$, $r = |z| > 0$. Полярный угол φ точки z называется аргументом комплексного числа z и обозначается $\varphi = \arg(z)$. Главное значение полярного угла называют главным значением аргумента. Для комплексного числа $z = 0$ аргумент не определяется.

Если $\varphi_0 \in (-\pi, \pi]$ – главное значение аргумента комплексного числа $z \neq 0$, то все возможные значения $\arg(z)$ представляются формулой

$$\arg(z) = \varphi_0 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2.16)$$

Отсюда, в частности, следует условие равенства ненулевых комплексных чисел:

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} |z_1| = |z_2|, \\ \exists k \in \mathbb{Z} : \arg(z_1) = \arg(z_2) + 2\pi k, \end{cases} \quad (2.17)$$

где $\arg(z_1)$ и $\arg(z_2)$ – какие-либо фиксированные значения аргументов чисел z_1 и z_2 .

Если заданы модуль r и аргумент φ комплексного числа $z = x + iy$, то (см.(1.8))

$$\begin{cases} x = r \cos(\varphi), \\ y = r \sin(\varphi) \end{cases} \quad (2.18)$$

и поэтому

$$z = r [\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)] = |z| [\cos(\arg(z)) + i \sin(\arg(z))]. \quad (2.19)$$

Определение 2.10. *Представление комплексного числа z в виде (2.19) называют его тригонометрической формой.*

Пример. 2.3. Данные комплексные числа записать в тригонометрической форме: а) $z_1 = -1 + i$; б) $z_2 = -1 - i$.

Решение.

а) $x_1 = \operatorname{Re}(z_1) = -1$, $y_1 = \operatorname{Im}(z_1) = 1$; $r = |z_1| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Пусть $\varphi_1 = \arg(z_1)$. Тогда, записывая для числа z_1 систему (2.18)

$$\begin{cases} -1 = \sqrt{2} \cos(\varphi_1), \\ 1 = \sqrt{2} \sin(\varphi_1), \end{cases}$$

находим

$$\begin{cases} \cos(\varphi_1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin(\varphi_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Отсюда $\varphi_1 = \frac{3\pi}{4}$ (берем главное значение аргумента) и, следовательно,

$$-1 + i = \sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right].$$

$$6) \ x_2 = \operatorname{Re}(z_2) = -1, \ y_2 = \operatorname{Im}(z_2) = -1,$$

$$r_2 = |z_2| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Пусть $\varphi_2 = \arg(z_2)$. Тогда, с учетом (2.18):

$$\begin{cases} -1 = \sqrt{2} \cos(\varphi_2), \\ -1 = \sqrt{2} \sin(\varphi_2) \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(\varphi_2) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin(\varphi_2) = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Отсюда $\varphi_2 = -\frac{3\pi}{4}$ и, следовательно,

$$-1 - i = \sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right].$$

Отметим, что в силу нашего соглашения (см. (2.16)) $\varphi = \frac{5\pi}{4}$ также является допустимым значением аргумента числа z_2 и поэтому

$$-1 - i = \sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \right]$$

– другой возможный вариант тригонометрической формы комплексного числа $z_2 = -1 - i$. •

Пусть $z_1 = r_1 (\cos(\varphi_1) + i \sin(\varphi_1))$, $z_2 = r_2 (\cos(\varphi_2) + i \sin(\varphi_2))$. Тогда

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 [\cos(\varphi_1) + i \sin(\varphi_1)] r_2 [\cos(\varphi_2) + i \sin(\varphi_2)] = \\ &= r_1 r_2 \left\{ [\cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2)] + i [\cos(\varphi_1) \sin(\varphi_2) + \right. \\ &\quad \left. + \sin(\varphi_1) \cos(\varphi_2)] \right\} = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Полученная тригонометрическая форма комплексного числа $z_1 z_2$ показывает, что модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей, а аргумент произведения (точнее, одно из его значений) равен сумме аргументов сомножителей:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2).$$

Эти правила распространяются на произведение любого числа сомножителей:

$$|z_1 z_2 \dots z_k| = |z_1| |z_2| \dots |z_k|, \tag{2.20}$$

$$\arg(z_1 z_2 \dots z_k) = \arg(z_1) + \dots + \arg(z_k). \tag{2.21}$$

Из формул (2.20), (2.21) следует (при $z_1 = z_2 = \dots = z_k = z$), что при $k \in \mathbb{N}$

$$|z^k| = |z|^k, \quad \arg(z^k) = k \arg(z),$$

т.е. если $z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$, то

$$z^k = \left[r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) \right]^k = r^k [\cos(k\varphi) + i \sin(k\varphi)]. \quad (2.22)$$

При $r = |z| = 1$ из формулы (2.22) получаем так называемую формулу Муавра:

$$[\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)]^k = \cos(k\varphi) + i \sin(k\varphi). \quad (2.23)$$

Пример 2.4. Пусть $k = 3$. Вычислим левую часть в (2.23):

$$\begin{aligned} & [\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)]^3 = \\ &= \cos^3(\varphi) + 3\cos^2(\varphi)i\sin(\varphi) + 3\cos(\varphi)(i\sin(\varphi))^2 + i^3\sin^3(\varphi) = \\ &= \cos^3(\varphi) - 3\cos(\varphi)\sin^2(\varphi) + i(3\cos^2(\varphi)\sin(\varphi) - \sin^3(\varphi)). \end{aligned}$$

Приравнивая теперь в (2.23) вещественные и мнимые части, получим известные формулы тригонометрии:

$$\begin{cases} \cos(3\varphi) = \cos^3(\varphi) - 3\cos(\varphi)\sin^2(\varphi), \\ \sin(3\varphi) = 3\cos^2(\varphi)\sin(\varphi) - \sin^3(\varphi). \end{cases} \quad \bullet$$

Формула Муавра была получена для произвольного натурального k . Покажем, что она справедлива для любого целого показателя. При $k = 0$ ее проверка тривиальна. Пусть $k = -n$, $n \in N$. Тогда

$$\begin{aligned} & [\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)]^k = [\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)]^{-n} = \frac{1}{[\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)]^n} = \\ &= \frac{1}{\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)} = \frac{\cos(n\varphi) - i \sin(n\varphi)}{\cos^2(n\varphi) + \sin^2(n\varphi)} = \cos(n\varphi) - i \sin(n\varphi) = \\ &= \cos(-n\varphi) + i \sin(-n\varphi) = \cos(k\varphi) + i \sin(k\varphi). \end{aligned}$$

В частности, при $k = -1$ получаем

$$[\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)]^{-1} = \frac{1}{\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)} = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi). \quad (2.24)$$

Рассмотрим теперь деление комплексных чисел в тригонометрической форме. Пусть

$$z_1 = r_1 [\cos(\varphi_1) + i \sin(\varphi_1)], \quad z_2 = r_2 [\cos(\varphi_2) + i \sin(\varphi_2)] \neq 0.$$

Тогда, учитывая (2.24) и (2.21), получим

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 [\cos(\varphi_1) + i \sin(\varphi_1)]}{r_2 [\cos(\varphi_2) + i \sin(\varphi_2)]} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1) + i \sin(\varphi_1)] [\cos(-\varphi_2) + i \sin(-\varphi_2)] = \\
&= \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)],
\end{aligned}$$

т.е.

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \varphi_1 - \varphi_2 = \arg(z_1) - \arg(z_2).$$

Итак, модуль частного двух комплексных чисел равен частному их модулей, а аргумент частного (одно из возможных значений) равен разности аргументов делимого и делителя.

Пусть $z = r [\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)]$. Тогда

$$\begin{aligned}
\bar{z} &= r \cos(\varphi) - ir \sin(\varphi) = r [\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)] = \\
&= r [\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)].
\end{aligned}$$

Это означает (рис.2.3), что

$$|\bar{z}| = r = |z|, \quad \arg(\bar{z}) = -\varphi = -\arg(z).$$

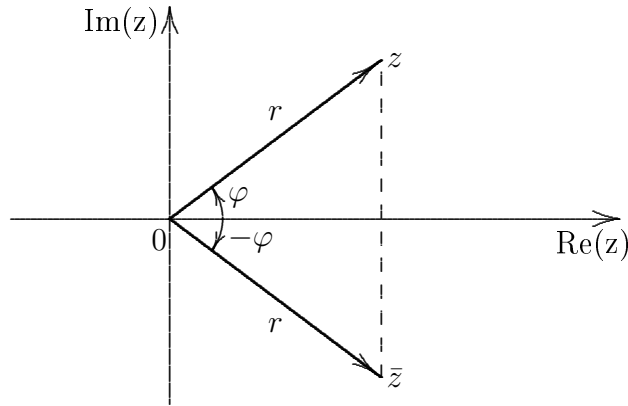


Рис.2.3

Укажем еще некоторые свойства модуля комплексных чисел:

- 1) $z\bar{z} = |z|^2$;
 - 2) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;
 - 3) $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;
 - 4) $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$;
 - 5) $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$;
 - 6) $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$;
 - 7) $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$.
- (2.25)

Доказательство: 1) $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$.

$$\begin{aligned}
2) \quad |z_1 + z_2|^2 &= |r_1 [\cos(\varphi_1) + i \sin(\varphi_1)] + r_2 [\cos(\varphi_2) + i \sin(\varphi_2)]|^2 = \\
&= |r_1 \cos(\varphi_1) + r_2 \cos(\varphi_2) + i [r_1 \sin(\varphi_1) + r_2 \sin(\varphi_2)]|^2 =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [r_1 \cos(\varphi_1) + r_2 \cos(\varphi_2)]^2 + [r_1 \sin(\varphi_1) + r_2 \sin(\varphi_2)]^2 = \\
&= r_1^2 \cos^2(\varphi_1) + 2r_1 r_2 \cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2) + r_2^2 \cos^2(\varphi_2) + \\
&\quad + r_1^2 \sin^2(\varphi_1) + 2r_1 r_2 \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2) + r_2^2 \sin^2(\varphi_2) = \\
&= r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \leq r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 = (r_1 + r_2)^2.
\end{aligned}$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей полученного неравенства, находим:

$$|z_1 + z_2| \leq r_1 + r_2 = |z_1| + |z_2|.$$

3) Это свойство следует из предыдущего (достаточно z_2 заменить на $(-z_2)$).

4) $z_1 = z_1 + z_2 - z_2$. Поэтому $|z_1| = |(z_1 + z_2) - z_2| \leq |z_1 + z_2| + |z_2|$. Отсюда $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$.

Доказательство остальных свойств предоставляется читателю.

Упражнение. Докажите, что $|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$.

Замечание 2.4. Неравенство (2.25) называют неравенством треугольника. Это связано с его геометрической интерпретацией – длина стороны треугольника не превосходит суммы длин двух других его сторон (см. рис. 2.1). Это неравенство очевидным образом распространяется на сумму нескольких слагаемых:

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_k| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_k|. \quad \otimes$$

Упражнения. 1) Воспользовавшись равенством $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$ и соответствующим геометрическим построением (см. рис. 2.4), докажите, что модуль разности двух комплексных чисел $|z_1 - z_2|$ равен расстоянию между точками z_1 и z_2 на комплексной плоскости.

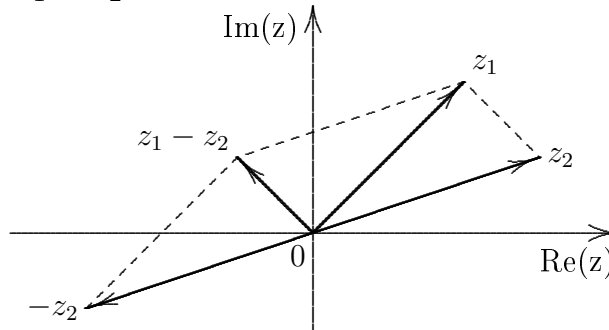


Рис.2.4

2) Изобразите на комплексной плоскости множества точек z , для которых:

- а) $|z| \leq 1$; б) $|z - 2i| < 4$; в) $|z - i| > 1$; г) $1 < |z - 1| < 2$;
 д) $|z - 1| = |z + 1|$.

В заключение этого параграфа рассмотрим еще одну форму записи комплексных чисел.

Определение 2.11. Если $\varphi \in \mathbb{R}$, то

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi). \quad (2.26)$$

Замечание 2.5. Формула (2.26) является лишь формальным определением символа $e^{i\varphi}$. В дальнейшем в курсе математического анализа будет определена функция e^z , $z \in \mathbb{C}$ и тогда равенство (2.26) получит строгое обоснование. $\otimes$

В соответствии с (2.19), (2.26) получаем для любого ненулевого комплексного числа z представление

$$z = re^{i\varphi},$$

($r = |z|$, $\varphi = \arg(z)$), называемое показательной формой комплексного числа. Ясно, что $|e^{i\varphi}| = 1 \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}$.

С использованием показательной формы комплексных чисел многие из ранее доказанных формул допускают более компактную запись, в частности:

- 1) $z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$, где $\varphi_1 = \arg(z_1)$, $\varphi_2 = \arg(z_2)$;
- 2) $z^n = |z|^n e^{in\varphi}$, $\varphi = \arg(z)$, $n \in \mathbb{Z}$;
- 3) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$, $z_2 \neq 0$;
- 4) если $z = |z| e^{i\varphi}$, то $\bar{z} = |z| e^{-i\varphi}$.
- 5) $e^{i\varphi_1} = e^{i\varphi_2} \iff \exists k \in \mathbb{Z} : \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k$ (следует из 2.17).

Пример 2.5. Вычислить $(-1 + i\sqrt{3})^{12}$.

Решение. Число $z = -1 + i\sqrt{3}$ представим в показательной форме:

$$|z| = \sqrt{1+3} = 2, \quad \begin{cases} \cos(\arg(z)) = -\frac{1}{2}, \\ \sin(\arg(z)) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases} \implies \arg(z) = \frac{2\pi}{3}.$$

Итак, $z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Значит, $z^{12} = (2e^{i\frac{2\pi}{3}})^{12} = 2^{12} e^{12i\frac{2\pi}{3}} = 2^{12} e^{i8\pi} = 2^{12}$. $\bullet$

Упражнения. 1) Записать в показательной форме комплексные числа: -2 , i , $-5i$, $1+i$, $-1-i\sqrt{3}$.

2) Записать в алгебраической форме комплексные числа: e^{i0} , $e^{i\frac{\pi}{2}}$, $e^{i\pi}$, $3e^{i\frac{\pi}{3}}$, $-2e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

3) Вычислить: $(1+i)^8 + (1-i)^8$, $(\sqrt{3}-3i)^6$.

2.3. Двучленные и квадратные уравнения

Уравнение вида

$$z^n = a, \quad (2.27)$$

где n – натуральное число ($n \in \mathbb{N}$), $a \in \mathbb{C}$ – заданное комплексное число, обычно называется двучленным уравнением.

Если $a = 0$ то решением уравнения (2.27) служит только $z = 0$. Далее будем считать, что $a \neq 0$ и, следовательно, $z \neq 0$.

Запишем числа a и z в тригонометрической форме:

$$\begin{aligned} a &= |a| [\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)], & \alpha &= \arg(a), \\ z &= |z| [\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)], & \varphi &= \arg(z). \end{aligned}$$

Тогда уравнение (2.27) с учетом (2.22) примет вид

$$z^n = a, \tag{2.28}$$

Учитывая условия равенства комплексных чисел (2.17), получаем, что для любого решения уравнения (2.27) (или (2.28)) выполняются условия:

$$\begin{cases} |z^n| = |a|, \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \quad n\varphi = \alpha + 2\pi k, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} |z| = \sqrt[n]{|a|}, \\ \varphi = \frac{\alpha + 2\pi k}{n} = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k. \end{cases}$$

Таким образом, любое решение уравнения (2.27) имеет вид

$$z_k = \sqrt[n]{|a|} \left[\cos \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k \right) + i \sin \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k \right) \right], \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{2.29}$$

Исследуем эту формулу.

Теорема 2.1. Уравнение (2.27) при $a \neq 0$ имеет ровно n различных решений. Они представляются формулой (2.29) при $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Доказательство. Было показано, что любое решение уравнения (2.27) представимо формулой (2.29) при некотором $k \in \mathbb{Z}$. С другой стороны, прямой подстановкой убеждаемся, что при любом $k \in \mathbb{Z}$ число z_k , вычисляемое по формуле (2.29), является решением уравнения (2.27). Покажем теперь, что среди чисел z_k , $k \in \mathbb{Z}$, имеется ровно n различных. Пусть $k = 0, 1, \dots, n-1$. Изобразим точки $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ на комплексной плоскости. Все они имеют один и тот же модуль равный $\sqrt[n]{|a|}$. Далее, $\arg(z_0) = \frac{\alpha}{n}$, $\arg(z_1) = \arg(z_0) + \frac{2\pi}{n}$, $\arg(z_2) = \arg(z_1) + \frac{2\pi}{n}$ и так далее, т. е. аргумент каждого следующего числа получается из предыдущего прибавлением числа $\frac{2\pi}{n}$. Это означает, что рассматриваемые n точек z_k расположены в вершинах правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{|a|}$ с центром в точке 0, и поэтому все они различны.

Осталось показать, что числами $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ исчерпываются все различные значения z_k , определяемые формулой (2.29).

Рассмотрим любой z_k , для которого $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, \dots, n-1\}$. Из теории целых чисел следует существование таких целых m и p , что

$$k = mn + p$$

где m – частное от деления k на n , p – остаток. При этом

$$0 \leq p < n. \quad (2.30)$$

Для выбранного k находим:

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[n]{|a|} \left[\cos \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}(mn + p) \right) + i \sin \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}(mn + p) \right) \right] = \\ &= \sqrt[n]{|a|} \left[\cos \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}p + 2\pi m \right) + i \sin \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}p + 2\pi m \right) \right] = \\ &= \sqrt[n]{|a|} \left[\cos \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}p \right) + i \sin \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}p \right) \right] = z_p. \end{aligned}$$

Итак, z_k совпадает с z_p , т.е., учитывая (2.30), с одним из чисел $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$. ■

Таким образом двучленное уравнение (2.27) при $a \neq 0$ всегда имеет ровно n различных решений, которые находятся по формуле

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[n]{|a|} \left[\cos \left(\frac{\arg(a)}{n} + \frac{2\pi}{n}k \right) + i \sin \left(\frac{\arg(a)}{n} + \frac{2\pi}{n}k \right) \right], \\ k &= 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Пример 2.6. Решить уравнение $z^3 = 2 + 2i$.

Решение. Поскольку

$$|2 + 2i| = \sqrt{8} = (\sqrt{2})^3, \quad \arg(2 + 2i) = \frac{\pi}{4},$$

решениями данного уравнения, согласно (2.30), являются

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[3]{(\sqrt{2})^3} \left[\cos \left(\frac{\pi/4}{3} + \frac{2\pi}{3}k \right) + i \sin \left(\frac{\pi/4}{3} + \frac{2\pi}{3}k \right) \right] = \\ &= \sqrt{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}k \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}k \right) \right], \quad k = 0, 1, 2. \bullet \end{aligned}$$

Расположение найденных корней на комплексной плоскости показано

на рис. 2.5.

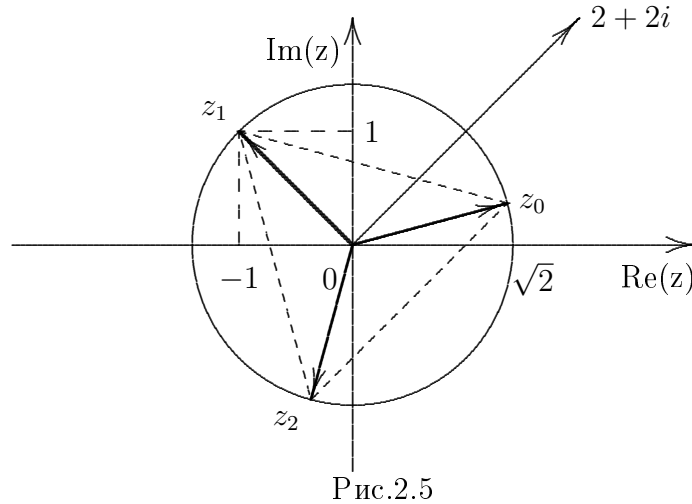


Рис.2.5

Упражнение. Решить уравнения:

а) $z^3 = 1$; б) $z^8 = 1 + i$; в) $z^4 = -1$.

Рассмотрим двучленное уравнение

$$z^2 = a = |a| [\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)]. \quad (2.32)$$

Его решениями служат, согласно (2.31), числа

$$z_k = \sqrt{|a|} \left[\cos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{2\pi k}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{2\pi k}{2} \right) \right], \quad k = 0, 1.$$

При этом

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt{|a|} \left[\cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right], \\ z_1 &= \sqrt{|a|} \left[\cos \left(\frac{\alpha}{2} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \pi \right) \right] = \\ &= \sqrt{|a|} \left[-\cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) - i \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right] = -z_0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Таким образом, одно из двух решений уравнения (2.32) находится по формуле (2.33), а другое получается умножением первого на (-1) .

Пример 2.7. Решить уравнение $z^2 = i$.

Решение. Поскольку $|i| = 1$, $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$, то по формуле (2.33)

$$z_0 = \sqrt{1} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}$$

и

$$z_1 = -z_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}}. \bullet$$

Рассмотрим квадратное уравнение

$$az^2 + bz + c = 0, \quad (2.34)$$

где $a, b, c \in \mathbb{C}$ и $a \neq 0$. Умножим уравнение (2.34) на $4a$ и выделим полный квадрат:

$$4a^2z^2 + 4abz + 4ac = (2az + b)^2 - b^2 + 4ac = 0.$$

Отсюда

$$(2az + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Обозначим $2az + b = u$, $b^2 - 4ac = D$ – дискриминант квадратного уравнения (2.34). Уравнение свелось к двучленному уравнению

$$u^2 = D, \quad (2.35)$$

которое было рассмотрено ранее. Вывод: уравнение (2.34) имеет единственное решение

$$z = -\frac{b}{2a}, \quad \text{если} \quad D = b^2 - 4ac = 0,$$

и решения

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm u}{2a}, \quad \text{если} \quad D = b^2 - 4ac \neq 0,$$

где u – одно из решений уравнения (2.35).

Пример 2.8. Решить квадратное уравнение $(1+i)z^2 + (2+i)z + \frac{3}{4} = 0$.

Решение. Находим дискриминант уравнения

$$D = b^2 - 4ac = (2+i)^2 - 3(1+i) = 4 + 4i - 1 - 3 - 3i = i.$$

Одним из решений двучленного уравнения $u^2 = i$ служит (см. предыдущий пример) $u = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$. Поэтому

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm u}{2a} = \frac{-2-i \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{2(1+i)} = \frac{\pm\sqrt{2}-3}{4} + \frac{1}{4}i. \bullet$$

Упражнения. Решить квадратные уравнения: а) $z^2 + z + 1 = 0$; б) $z^2 - 2z + 2 = 0$; в) $z^2 - (3-2i)z + (5-5i) = 0$.

3. МНОГОЧЛЕНЫ И РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ

3.1. Многочлены и их свойства

Определение 3.1. Функция $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, определенная правилом

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad a_n \neq 0, \quad (3.1)$$

называется многочленом (полиномом). Комплексные числа $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ называются коэффициентами многочлена P (a_n – старшим коэффициентом), а целое неотрицательное число n – его степенью. Степень многочлена P будем обозначать *ст. P* и записывать: *ст. $P = n$* .

Теорема 3.1. В множестве многочленов (введенных определением 3.1) не существует функции $P(z) \equiv 0, z \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Предположим противное: существует такой многочлен P , *ст. $P = n$* , $a_n \neq 0$, что

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \equiv 0, \quad z \in \mathbb{C}.$$

При $z \neq 0$

$$P(z) = a_n z^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} z^{-1} + \dots + \frac{a_0}{a_n} z^{-n} \right).$$

Используя неравенство $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$, получим

$$\begin{aligned} |P(z)| &= |a_n z^n| \left| 1 + \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} z^{-1} + \dots + \frac{a_0}{a_n} z^{-n} \right) \right| \geq \\ &\geq |a_n| |z|^n \left(1 - \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} z^{-1} + \dots + \frac{a_0}{a_n} z^{-n} \right| \right), \end{aligned}$$

и так как $|z_1 + z_2 + \dots + z_k| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_k|$, то

$$|P(z)| \geq |a_n| |z|^n \left(1 - \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| \frac{1}{|z|} - \dots - \left| \frac{a_0}{a_n} \right| \frac{1}{|z|^n} \right).$$

Ясно, что выбрав $|z|$ достаточно большим, получим неравенство $|P(z)| > 0$, которое противоречит нашему предположению. ■

Замечание 3.1. Из определения 3.1 следует, что многочлен нулевой степени имеет вид $P(z) = a_0$, где $a_0 \neq 0$. Теорема 3.1 означает, что функция $P(z) \equiv 0, z \in \mathbb{C}$, не является многочленом. Однако мы включим эту функцию в множество многочленов, назвав ее нулевым многочленом. Нулевой многочлен можно считать многочленом произвольной степени с нулевыми коэффициентами. ⊗

Для многочленов, как и для любых числовых функций с общей областью определения, определены обычным образом сложение, вычитание и умножение, причем сумма, разность и произведение многочленов также, очевидно, являются многочленами. Пусть

$$P + Q = R, \quad P - Q = S, \quad PQ = T.$$

Если P, Q, R, S – ненулевые многочлены (тогда многочлен T также ненулевой), то

$$\begin{aligned}\text{ст. } R &\leq \max\{\text{ст. } P, \text{ст. } Q\}, \\ \text{ст. } S &\leq \max\{\text{ст. } P, \text{ст. } Q\}, \\ \text{ст. } T &= \text{ст. } P + \text{ст. } Q.\end{aligned}$$

При этом, если $\text{ст. } P \neq \text{ст. } Q$, то

$$\text{ст. } R = \text{ст. } S = \max\{\text{ст. } P, \text{ст. } Q\}$$

(почему?). Отметим, что многочлены R и S могут оказаться нулевыми при ненулевых многочленах P и Q .

Из свойств сложения и умножения комплексных чисел вытекает справедливость следующих соотношений:

- 1) $P + Q = Q + P$;
- 2) $P + (Q + R) = (P + Q) + R$;
- 3) $PQ = QP$;
- 4) $P(QR) = (PQ)R$;
- 5) $P(Q + R) = PQ + PR$.

Здесь P, Q, R – многочлены произвольных степеней.

Теорема 3.2. *Если два ненулевых многочлена P и Q тождественно совпадают, т. е. $P(z) = Q(z)$ при всех $z \in \mathbb{C}$, то совпадают их степени и их соответствующие коэффициенты (т. е. коэффициенты при одинаковых степенях z).*

Доказательство. Пусть $P - Q = R$. Тогда $R(z) \equiv 0$, $z \in \mathbb{C}$, т. е. R – нулевой многочлен. Отсюда следует, что $\text{ст. } P = \text{ст. } Q$ и соответствующие коэффициенты этих многочленов равны, так как в противном случае хотя бы один из коэффициентов нулевого многочлена R не равнялся бы нулю, что невозможно. ■

Доказанная теорема 3.2 является следствием более сильного утверждения (теоремы 3.3), доказательство которого приводить не будем.

Теорема 3.3. *Если значения двух многочленов P и Q совпадают при $z = z_k$, $k = 1, \dots, n+1$, где $n = \max\{\text{ст. } P, \text{ст. } Q\}$ и все числа z_k попарно различны, то $\text{ст. } P = \text{ст. } Q = n$ и соответствующие коэффициенты этих многочленов равны (а значит, $P(z) \equiv Q(z)$, $z \in \mathbb{C}$). В частности, если многочлен P степени n принимает нулевые значения при попарно различных $z_1, \dots, z_{n+1}$, то $P(z) \equiv 0$, $z \in \mathbb{C}$.*

Теорема 3.3 означает, что если степень многочлена P равна n , то этот многочлен однозначно определяется своими значениями $P(z_1), \dots, P(z_{n+1})$.

Если же, наоборот, заданы попарно различные числа $z_1, \dots, z_{n+1}$ и произвольные числа $p_1, \dots, p_{n+1}$, то существует единственный многочлен $P(z)$ степени не выше n , для которого

$$P(z_k) = p_k, \quad k = 1, \dots, n+1.$$

Покажем, как такой многочлен P может быть построен. Введем вспомогательные многочлены $q_1, \dots, q_{n+1}$ со следующими свойствами:

- 1) $q_k(z_k) = 1, \quad k = 1, 2, \dots, n+1$;
- 2) $q_k(z_i) = 0$ при $i \neq k$;
- 3) ст. $q_k = n$.

Легко проверить, что этими свойствами обладают многочлены

$$q_k(z) = \frac{(z - z_1) \dots (z - z_{k-1})(z - z_{k+1}) \dots (z - z_{n+1})}{(z_k - z_1) \dots (z_k - z_{k-1})(z_k - z_{k+1}) \dots (z_k - z_{n+1})}, \quad k = 1, \dots, n+1.$$

Многочлен $Q(z) = \sum_{k=1}^{n+1} p_k q_k(z)$ имеет степень не выше n (почему?) и из свойств многочленов q_k следует, что $Q(z_k) = p_k, \quad k = 1, \dots, n+1$. Так как искомый многочлен $P(z)$ единствен, то

$$P(z) = \sum_{k=1}^{n+1} p_k q_k(z). \quad (3.2)$$

Представление многочлена P в форме (3.2) называется интерполяционной формой Лагранжа.

Замечание 3.2. Интерполяционная форма Лагранжа решает задачу восстановления многочлена по его значениям в данных точках, несмотря на то, что коэффициенты многочлена при этом явно не вычисляются. Действительно, формула (3.2) позволяет по заданным z_k и $P(z_k)$ вычислить значения многочлена при любом $z \in \mathbb{C}$. $\otimes$

Упражнения.

1. Найти многочлен P (ст. $P \leq 2$) по его значениям: $A = P(-h)$, $B = P(0)$, $C = P(h)$.

2. Доказать тождество $\sum_{k=1}^{n+1} q_k(z) \equiv 1$.

3.2. Деление многочленов

Многочлены обладают некоторыми свойствами, аналогичными свойствам целых чисел. Известно, что при умножении целых чисел получаем целое число. Это же свойство справедливо и для многочленов – перемножая многочлены, получаем многочлен. Деление же нацело двух целых чисел,

т. е. получение в результате целого числа, возможно далеко не всегда. В общем случае при делении целого числа n на целое m получаем некоторое частное k и остаток r . При этом справедливо равенство $n = mk + r$. То же можно сказать и о делении многочленов. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.4. *Для любых многочленов P и Q , ст. $Q > 0$, существуют единственные многочлены q и r , такие, что*

$$P(z) = Q(z)q(z) + r(z), \quad (3.3)$$

причем степень многочлена r меньше степени многочлена Q или $r(z) \equiv 0$. Многочлен q называется частным (от деления P на Q), а r — остатком.

Доказательство. Если $P(z) \equiv 0$, то многочлены $q(z) \equiv 0$ и $r(z) \equiv 0$ удовлетворяют равенству (3.3). Пусть теперь $P(z) \not\equiv 0$ и

$$P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n, \quad a_n \neq 0.$$

$$Q(z) = b_0 + b_1z + \dots + b_mz^m, \quad b_m \neq 0, \quad m \geq 1.$$

Доказательство существования многочленов q и r в этом случае проведем индукцией по $n = \text{ст. } P$.

1. Убедимся в справедливости теоремы при $n = 0$, т. е. когда $P(z) = a_0 \neq 0$. Возьмем $q(z) \equiv 0$, $r(z) = P(z)$. Тогда ст. $r = \text{ст. } P = 0 < \text{ст. } Q = m$. Ясно, что выбранные таким образом многочлены q и r удовлетворяют равенству (3.3).

2. Предположим, что теорема верна, когда ст. $P \leq n-1$ и пусть теперь ст. $P = n$.

Если $m > n$, то $P(z) = Q(z) \cdot 0 + P(z)$, т. е. для справедливости равенства (3.3) можно взять $q(z) \equiv 0$, $r(z) = P(z)$. При этом ст. $r = n < \text{ст. } Q = m$.

Если $m \leq n$, то рассмотрим многочлен

$$R(z) = P(z) - \frac{a_n}{b_m} z^{n-m} Q(z).$$

Если $R(z) \equiv 0$, то $P(z) = \frac{a_n}{b_m} z^{n-m} Q(z)$, что совпадает с (3.3) при $r(z) \equiv 0$ и $Q(z) = \frac{a_n}{b_m} z^{n-m}$. Если же $R(z) \not\equiv 0$, то его степень строго меньше n и по индукционному предположению

$$R(z) = Q(z)q_1(z) + r(z), \quad \text{ст. } r < \text{ст. } Q.$$

Тогда

$$P(z) = \frac{a_n}{b_m} z^{n-m} Q(z) + R(z) = \left(\frac{a_n}{b_m} z^{n-m} + q_1(z) \right) Q(z) + r(z).$$

Полагая $q(z) = \frac{a_n}{b_m} z^{n-m} + q_1(z)$, и в этом случае получаем требуемое равенство (3.3).

Итак, многочлены q и r , удовлетворяющие равенству (3.3), существуют.

Для доказательства единственности предположим, что $P = Qq_1 + r_1 = Qq_2 + r_2$. Тогда

$$(q_1 - q_2)Q = r_1 - r_2. \quad (3.4)$$

Если $r_2(z) - r_1(z) \equiv 0$ (т.е. $r_1 = r_2$), то $q_1(z) - q_2(z) \equiv 0$ (почему?), т.е. $q_2 = q_1$. Если же $r_1 \neq r_2$, то $q_1 \neq q_2$ (почему?) и тогда ст. $((q_1 - q_2)Q) \geq$ ст. $Q >$ ст. $(r_1 - r_2)$ и равенство (3.4) невозможно. Поэтому равенство (3.4) выполняется лишь при $r_1 = r_2$ и $q_1 = q_2$. Это завершает доказательство теоремы. ■

Замечание 3.3. Если P – произвольный ненулевой многочлен, а степень многочлена Q равна нулю, т.е. $Q(z) \equiv b_0$, $b_0 \neq 0$, то из очевидного тождества

$$P(z) \equiv \left(\frac{a_0}{b_0} + \frac{a_1}{b_0} z + \dots + \frac{a_n}{b_0} z^n \right) b_0$$

следует, что формула (3.3) справедлива и в этом случае при

$$q(z) = \frac{a_0}{b_0} + \frac{a_1}{b_0} z + \dots + \frac{a_n}{b_0} z^n \quad \text{и} \quad r(z) \equiv 0.$$

Для фактического нахождения многочленов $q(z)$ и $r(z)$ часто бывает удобно использовать известный алгоритм „деления многочленов углом“, аналогичный алгоритму деления с остатком целых чисел. ⊗

Теорема 3.4 имеет важное следствие, которое носит название теоремы Безу.

Теорема 3.5 (Безу). Пусть P – многочлен, причем ст. $P \geq 1$. Тогда остаток от деления P на многочлен $(z - c)$ равен $P(c)$.

Доказательство. Для многочленов $P(z)$ и $Q(z) = z - c$ запишем равенство (3.3):

$$P(z) = (z - c)q(z) + r.$$

Здесь r – константа, поскольку либо $r = 0$, либо ст. $r <$ ст. $Q = 1$. Положив в обеих частях последнего равенства $z = c$, получаем $r = P(c)$. ■

Упражнение. Пусть остаток от деления многочлена P на $(z - c_1)$ равен A , а от деления на $(z - c_2)$ равен B . Чему равен остаток от деления P на $(z - c_1)(z - c_2)$?

Определим теперь производную многочлена. Заметим, что многочлен $P(z)$ в случае вещественных коэффициентов a_k и вещественных значений

$z = x \in \mathbb{R}$ является вещественной функцией вещественной переменной. Для таких функций определение производной и, в частности, производная $P'(x)$ многочлена известны из школьного курса математики. Именно,

$$P'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} \text{ при } n \geq 1$$

и $P'(x) = 0$ при $n = 0$ и при $P(x) \equiv 0$.

Распространим это определение на производную многочлена $P(z)$, рассматриваемого как комплексная функция комплексной переменной.

Определение 3.2. Производной многочлена $P(z)$ называется многочлен $P'(z)$, значения которого вычисляются по правилу:

$$P'(z) = a_1 + 2a_2z + 3a_3z^2 + \dots + na_nz^{n-1}, \text{ если } n \geq 1;$$

$$P'(z) \equiv 0, \text{ если } n = 0 \text{ или } P(z) \equiv 0.$$

Нахождение производной данного многочлена называют его дифференцированием.

Отметим некоторые свойства производной многочлена, которые доказываются непосредственным вычислением:

- 1) $(P(z) + Q(z))' = P'(z) + Q'(z);$
- 2) $(P(z)Q(z))' = P'(z)Q(z) + P(z)Q'(z);$
- 3) $((z - c)^n)' = n(z - c)^{n-1}.$

По индукции определяются старшие производные многочлена, а именно, если $P^{(k-1)}(z)$ есть $(k-1)$ -я производная многочлена $P(z)$, то его k -я производная определяется равенством

$$P^{(k)}(z) = (P^{(k-1)}(z))'.$$

Очевидно, что $P^{(k)}(z) \equiv 0$ при $k > n = \text{ст. } P$.

Рассмотрим теперь вопрос о представлении многочлена $P(z)$ степени n в форме

$$P(z) = A_0 + A_1(z - c) + A_2(z - c)^2 + \dots + A_n(z - c)^n, \quad (3.5)$$

где c – произвольное комплексное число. Эту формулу будем называть формой Тейлора, а коэффициенты A_k , $k = 0, \dots, n$, в формуле (3.5) – коэффициентами Тейлора в точке $z = c$ многочлена $P(z)$. Возможность и единственность такого представления следуют из теоремы 3.4 (почему?). Для определения коэффициентов Тейлора положим в обеих частях формулы (3.5) $z = c$. Тогда

$$A_0 = P(c).$$

Далее, дифференцируя тождество (3.5), получаем:

$$P'(z) = A_1 + 2A_2(z - c) + 3A_3(z - c)^2 + \dots + nA_n(z - c)^{n-1}.$$

Полагая здесь $z = c$, находим:

$$A_1 = P'(c).$$

Продолжая эту процедуру (дифференцирование и вычисление обеих частей тождества в точке $z = c$), последовательно получаем:

$$A_2 = \frac{P''(c)}{2}, \quad A_3 = \frac{P'''(c)}{2 \cdot 3}, \dots, A_k = \frac{P^{(k)}(c)}{k!}, \dots, A_n = \frac{P^{(n)}(c)}{n!}.$$

Итак, многочлен в форме Тейлора имеет вид

$$P(z) = P(c) + \frac{P'(c)}{1!}(z - c) + \frac{P''(c)}{2!}(z - c)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(c)}{n!}(z - c)^n. \quad (3.6)$$

Замечание 3.4. Формулы (3.1), (3.2) и (3.6) позволяют записать один и тот же многочлен в разных формах. Использование той или иной формы многочлена зависит от решаемой с ее помощью задачи. Иногда удобно использовать и представление (3.3). $\otimes$

3.3. Вычисление значений многочлена. Схема Горнера

Пусть

$$P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n, \quad n \geq 1,$$

и требуется вычислить значение $P(c)$. Покажем, как это можно сделать с минимальным объемом вычислений. Положим

$$P(z) = (z - c)q(z) + r. \quad (3.7)$$

Здесь число $r = P(c)$ – остаток от деления $P(z)$ на $z - c$,

$$q(z) = b_0 + b_1z + \dots + b_{n-2}z^{n-2} + b_{n-1}z^{n-1}.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z в (3.7), получаем

$$\begin{aligned} a_n &= b_{n-1}, \\ a_{n-1} &= b_{n-2} - cb_{n-1}, \\ a_{n-2} &= b_{n-3} - cb_{n-2}, \\ &\dots\dots\dots \\ a_1 &= b_0 - cb_1, \\ a_0 &= r - cb_0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$b_{n-1} = a_n; \quad b_k = cb_{k+1} + a_{k+1}, \quad k = n-2, n-3, \dots, 0;$$

$$r = cb_0 + a_0.$$

Несложно подсчитать, что для вычисления $r = P(c)$ по этой схеме, именуемой схемой Горнера, требуется n сложений и n умножений.

Схема Горнера легко реализуется на ЭВМ. При „ручных“ вычислениях удобно воспользоваться таблицей, первая строка которой содержит коэффициенты данного многочлена P , вторая – произведения cb_k , а третья – коэффициенты многочлена q , получающиеся сложением соответствующих элементов первой и второй строк:

a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_1	a_0
—	cb_{n-1}	cb_{n-2}	$\cdots$	cb_1	cb_0
b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_0	r

Пример 3.1. Вычислить $P(4)$, если

$$P(z) = 16 - 10z + 6z^2 - 3z^3 + z^4.$$

Проводя указанные вычисления, получим:

1	-3	6	-10	16
—	$4 \cdot 1 = 4$	$4 \cdot 1 = 4$	$4 \cdot 10 = 40$	$4 \cdot 30 = 120$
1	1	10	30	136

Таким образом, $P(4) = 136$. Мы нашли также, что частное от деления $P(z)$ на $z - 4$ равно $q(z) = z^3 + z^2 + 10z + 30$. •

Замечание 3.5. Вычисляя $P(c)$ по схеме Горнера, можно с небольшими дополнительными затратами одновременно вычислить и $P'(c)$, т. е. значение производной многочлена P в той же точке. Действительно, будем параллельно с последовательностью $\{b_k\}$ вычислять последовательность $\{d_k\}$ по схеме:

$$\begin{aligned} d_{n-1} &= b_{n-1}, \\ d_{n-2} &= b_{n-2} + cd_{n-1}, \\ d_{n-3} &= b_{n-3} + cd_{n-2}, \\ &\dots\dots\dots \\ d_0 &= b_0 + cd_1. \end{aligned}$$

Легко проверяется, что $d_0 = P'(c)$. ⊗

3.4. Нули многочлена

Определение 3.3. Нулем многочлена P называется корень уравнения $P(z) = 0$.

Ясно, что многочлен нулевой степени нулей не имеет. Пусть ст. $P > 0$. Из теоремы Безу следует, что если c – нуль многочлена P , то

$$P(z) = (z - c)q(z), \quad (3.8)$$

где ст. $q = (\text{ст. } P) - 1$. Обратное утверждение очевидно. Таким образом, число c является нулем многочлена P тогда и только тогда, когда P представим в виде (3.8).

Если многочлен q тоже обращается в нуль в точке c , то и он представим в аналогичном виде $q(z) = (z - c)q_1(z)$, а значит, для P получаем представление

$$P(z) = (z - c)^2 q_1(z)$$

(ясно, что ст. $q_1 = \text{ст. } P - 2$). Продолжая эти рассуждения, приходим к понятию кратности нуля многочлена.

Определение 3.4. Число c называется нулем многочлена P кратности k ($k \in \mathbb{N}$), если имеет место представление

$$P(z) = (z - c)^k q(z), \quad q(c) \neq 0. \quad (3.9)$$

Замечание 3.6. Если $k = 1$, то говорят, что c – простой нуль многочлена P . $\otimes$

Теорема 3.6. Число c является нулем многочлена P кратности k тогда и только тогда, когда

$$P(c) = P'(c) = \dots = P^{(k-1)}(c) = 0, \quad P^{(k)}(c) \neq 0. \quad (3.10)$$

Доказательство. Пусть выполнены условия (3.10). Используя формулу Тейлора для многочлена P , получим:

$$\begin{aligned} P(z) &= P(c) + P'(c)(z - c) + \dots + \frac{P^{(k-1)}(c)}{(k-1)!}(z - c)^{k-1} + \frac{P^{(k)}(c)}{k!}(z - c)^k + \\ &+ \dots + \frac{P^{(n)}(c)}{n!}(z - c)^n = \frac{P^{(k)}(c)}{k!}(z - c)^k + \dots + \frac{P^{(n)}(c)}{n!}(z - c)^n = \\ &= (z - c)^k q(z), \end{aligned}$$

где $q(z) = \frac{P^{(k)}(c)}{k!} + \frac{P^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(z - c) + \dots + \frac{P^{(n)}(c)}{n!}(z - c)^{n-k}$. При этом

$q(c) = \frac{P^{(k)}(c)}{k!} \neq 0$. Мы получили представление многочлена P в виде (3.9), следовательно число c является его нулем кратности k .

Пусть теперь выполнено условие (3.9). Дифференцируя тождество $P(z) \equiv (z - c)^k q(z)$, получаем

$$P'(z) = k(z - c)^{k-1} q(z) + (z - c)^k q'(z) =$$

$$= (z - c)^{k-1}[kq(z) + (z - c)q'(z)] = (z - c)^{k-1}q_1(z).$$

Если $k = 1$, то $P'(c) = q_1(c) = q(c) \neq 0$ и, следовательно, (3.10) выполнено. Если $k > 1$, то $P'(c) = 0$, $q_1(c) = kq(c) \neq 0$ и

$$\begin{aligned} P''(z) &= (k-1)(z-c)^{k-2}q_1(z) + (z-c)^{k-1}q_1'(z) = \\ &= (z-c)^{k-2}[(k-1)q_1(z) + (z-c)q_1'(z)] = (z-c)^{k-2}q_2(z). \end{aligned}$$

Если $k = 2$, то $P''(c) = q_2(c) = q_1(c) \neq 0$. Значит, в этом случае (3.10) выполняется. Если $k > 2$, то последовательное дифференцирование приводит к соотношениям

$$P(c) = P'(c) = \dots = P^{(k-1)}(c) = 0,$$

причем

$$P^{(k-1)}(z) = (z-c)q_{k-1}(z), \quad \text{где } q_{k-1}(c) \neq 0.$$

Тогда $P^{(k)}(z) = q_{k-1}(z) + (z-c)q_{k-1}'(z)$ и, следовательно, $P^{(k)}(c) = q_{k-1}(c) \neq 0$.

Таким образом, из (3.9) следует (3.10). ■

Вопрос о существовании нулей у произвольного многочлена является одним из центральных вопросов алгебры и положительный ответ на него дает основная теорема алгебры, которую мы приводим без доказательства.

Теорема 3.7. (основная теорема алгебры). *Всякий многочлен ненулевой степени имеет хотя бы один нуль.*

Следует подчеркнуть, что в этой теореме утверждается лишь существование нуля, но не указывается формула для его вычисления.

Обозначим через c_1 нуль многочлена P степени $n > 0$. Согласно (3.8) многочлен P представим в виде

$$P(z) = (z - c_1)Q(z),$$

где Q – многочлен степени $(n-1)$. Если $n-1 > 0$, то и многочлен Q имеет нуль, который обозначим через c_2 . Тогда

$$Q(z) = (z - c_2)R(z),$$

где R – многочлен степени $(n-2)$, и, следовательно, P можно представить в виде

$$P(z) = (z - c_1)(z - c_2)R(z).$$

Продолжая эти рассуждения, придем к равенству

$$P(z) = (z - c_1)(z - c_2) \dots (z - c_n)b,$$

где b – многочлен нулевой степени. Раскрывая скобки в последнем выражении, убеждаемся, что b является коэффициентом при z^n , откуда следует, что $b = a_n$. Ясно, что $P(c_i) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Сформулируем полученный результат.

Следствие 3.1. *Многочлен $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ степени $n \geq 1$ может быть представлен в виде*

$$P(z) = a_n(z - c_1) \dots (z - c_n). \quad (3.11)$$

Это представление единственно (с точностью до порядка сомножителей).

Единственность представления (3.11) для произвольного многочлена P мы доказывать не будем.

Формулу (3.11) называют иногда мультипликативной формой многочлена. Таким образом, мы получили еще одну форму представления многочлена.

В общем случае в разложении (3.11) среди чисел $c_1, c_2, \dots, c_n$ могут быть равные, т. е. какие-то нули многочлена P могут иметь кратность больше единицы. Пусть различными нулями многочлена P служат числа $c_1, c_2, \dots, c_m$ ($m \leq n$). Обозначим их кратности через $k_1, k_2, \dots, k_m$ соответственно.

Тогда разложение (3.11) принимает вид

$$\begin{aligned} P(z) &= \\ &= a_n(z - c_1) \dots (z - c_1)(z - c_2) \dots (z - c_2) \dots (z - c_m) \dots (z - c_m) = \\ &= a_n(z - c_1)^{k_1}(z - c_2)^{k_2} \dots (z - c_m)^{k_m}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Здесь $1 \leq k_i \leq n$, $i = 1, \dots, m$, $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$. Формула (3.12) означает, что любой многочлен степени n имеет ровно n нулей с учетом их кратности.

3.5. Многочлены с вещественными коэффициентами

Если коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_n$ многочлена $P(z)$ вещественны, то при вещественных z он принимает вещественные значения. Такие многочлены принято называть вещественными. Разумеется, все вышеизложенное справедливо для таких многочленов. В частности, справедлива основная теорема алгебры и представление (3.12). При этом нули вещественных многочленов в общем случае комплексные. Простейший пример – многочлен $z^2 + 1$, оба нуля которого комплексные. Вещественные многочлены обладают некоторыми особыми свойствами.

Теорема 3.8. *Многочлен с вещественными коэффициентами принимает в комплексно-сопряженных точках комплексно-сопряженные значения, т. е. $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$.*

Доказательство. Воспользуемся свойствами операции комплексного сопряжения и тем, что коэффициенты a_k – вещественны, т. е. $\bar{a}_k = a_k$. Тогда

$$\begin{aligned} P(\bar{z}) &= \sum_{k=0}^n a_k (\bar{z})^k = \sum_{k=0}^n a_k \overline{(z)^k} = \sum_{k=0}^n \overline{a_k (z)^k} = \\ &= \sum_{k=0}^n \overline{(a_k z^k)} = \overline{\sum_{k=0}^n a_k z^k} = \overline{P(z)}. \blacksquare \end{aligned}$$

Следствие 3.2. Если c – нуль вещественного многочлена, то $\bar{c}$ – также нуль этого многочлена.

Доказательство. Действительно, пусть $P(c) = 0$, тогда $\overline{P(c)} = 0$, а значит, $P(\bar{c}) = 0$. Более того, можно доказать, что нули c и $\bar{c}$ вещественного многочлена имеют одинаковую кратность. $\blacksquare$

Теперь можно уточнить формулу (3.12) разложения вещественного многочлена на множители. Пусть c_1 (где $\text{Im}(c_1) \neq 0$) и $\bar{c}_1$ – комплексно-сопряженные нули вещественного многочлена. В формуле (3.12) этим нулям соответствуют множители $(z - c_1)^{k_1}$ и $(z - \bar{c}_1)^{k_1}$. Их произведение равно

$$\begin{aligned} [(z - c_1)(z - \bar{c}_1)]^{k_1} &= [z^2 - (c_1 + \bar{c}_1)z + c_1\bar{c}_1]^{k_1} = \\ &= (z^2 + \alpha_1 z + \beta_1)^{k_1}, \end{aligned}$$

где $\alpha_1 = -(c_1 + \bar{c}_1)$ и $\beta_1 = c_1\bar{c}_1$ – вещественные числа, причем $\alpha_1^2 - 4\beta_1 < 0$ (почему?). Таким образом в разложении (3.12) можно объединить все пары множителей, соответствующих комплексно-сопряженным нулям многочлена P . Следовательно, для любого вещественного многочлена P ненулевой степени n справедливо представление:

$$P(z) = a_n (z^2 + \alpha_1 z + \beta_1)^{k_1} \dots (z^2 + \alpha_l z + \beta_l)^{k_l} (z - d_1)^{n_1} \dots (z - d_m)^{n_m}. \quad (3.13)$$

Здесь $d_1, \dots, d_m$ – вещественные нули многочлена P соответственно с кратностями $n_1, \dots, n_m$, множители $(z^2 + \alpha_p z + \beta_p)^{k_p}$ отвечают парам комплексно-сопряженных корней кратности k_p , т. е. $\alpha_p, \beta_p \in \mathbb{R}$, $\alpha_p^2 - 4\beta_p < 0$, $p = 1, 2, \dots, l$, и $2(k_1 + k_2 + \dots + k_l) + n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$.

3.6. Рациональные дроби

Определение 3.5. Пусть P и Q – многочлены, причем Q – ненулевой многочлен. Функция R , значения которой вычисляются по правилу

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad (3.14)$$

называется дробно-рациональной функцией или рациональной дробью. Функция R определена на всей комплексной плоскости, кроме точек, в которых многочлен Q обращается в нуль.

Определение 3.6. Рациональная дробь (3.14) называется правильной, если степень многочлена-числителя P строго меньше степени многочлена-знаменателя Q , либо $P(z) \equiv 0$. В противном случае дробь называется неправильной.

Если дробь неправильная, то ее можно представить в виде суммы многочлена и правильной дроби. Действительно, на основании теоремы 3.4

$$P(z) = Q(z)q(z) + r(z)$$

и, следовательно,

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = q(z) + \frac{r(z)}{Q(z)}.$$

Теорема 3.9. Пусть $\frac{P(z)}{Q(z)}$ – правильная рациональная дробь, а число c – нуль многочлена Q кратности k , т. е. $Q(z) = (z - c)^k q(z)$, $q(c) \neq 0$. Тогда эта дробь представима в виде суммы следующих правильных дробей:

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{A_k}{(z - c)^k} + \frac{r(z)}{(z - c)^{k-1}q(z)}, \quad (3.15)$$

где A_k – константа.

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\frac{P(z)}{Q(z)} - \frac{A_k}{(z - c)^k} = \frac{P(z)}{(z - c)^k q(z)} - \frac{A_k}{(z - c)^k} = \frac{R(z)}{(z - c)^k q(z)}, \quad (3.16)$$

где $R(z) = P(z) - A_k q(z)$. Ясно, что рациональная дробь $\frac{R(z)}{(z - c)^k q(z)}$ – правильная при любом A_k . Положим теперь $A_k = \frac{P(c)}{q(c)}$. Тогда многочлен

$R(z) = P(z) - \frac{P(c)}{q(c)} q(z)$, очевидно, обращается в нуль в точке $z = c$, а значит, представим в виде $R(z) = (z - c)r(z)$.

Подставляя это выражение многочлена $R(z)$ в (3.16) и сокращая дробь на $(z - c)$, получаем требуемое равенство (3.15). ■

Следствие 3.3. Пусть выполнены условия теоремы 3.9. Тогда дробь

$\frac{P(z)}{Q(z)}$ можно представить в виде суммы следующих правильных дробей:

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{A_k}{(z-c)^k} + \frac{A_{k-1}}{(z-c)^{k-1}} + \dots + \frac{A_1}{(z-c)} + \frac{T(z)}{q(z)}, \quad (3.17)$$

где $A_k, A_{k-1}, \dots, A_1$ – константы.

Доказательство. Действительно, по теореме 3.9 дробь $\frac{r(z)}{(z-c)^{k-1}q(z)}$ (при $k > 1$) представима в виде суммы правильных дробей:

$$\frac{r(z)}{(z-c)^{k-1}q(z)} = \frac{A_{k-1}}{(z-c)^{k-1}} + \frac{S(z)}{(z-c)^{k-2}q(z)}.$$

Этот процесс может быть продолжен, и в результате получим требуемое равенство (3.17). ■

Определение 3.7. Рациональная дробь вида $\frac{A}{(z-c)^k}$, $k \geq 1$, называется простейшей дробью.

Описанный процесс представления правильной рациональной дроби в виде (3.17) можно назвать, таким образом, разложением дроби в сумму, содержащую k простейших дробей, соответствующих нулю кратности k многочлена-знаменателя Q .

Если в (3.17) ст. $q(z) = 0$, то $T(z) \equiv 0$, так как дробь $\frac{T(z)}{q(z)}$ – правильная. Если же ст. $q(z) \geq 1$, то этот многочлен имеет хотя бы один нуль (обозначим его d) некоторой кратности $m \geq 1$ и, следовательно, представим в виде $q(z) = (z-d)^m q_1(z)$, $q_1(d) \neq 0$. Тогда дробь $\frac{T(z)}{q(z)}$ можно разложить в сумму вида (3.17), содержащую m простейших дробей, соответствующих нулю d многочлена $q(z)$:

$$\frac{T(z)}{q(z)} = \frac{B_m}{(z-d)^m} + \frac{B_{m-1}}{(z-d)^{m-1}} + \dots + \frac{B_1}{z-d} + \frac{T_1(z)}{q_1(z)}.$$

Продолжение этого процесса (теперь уже для дроби $\frac{T_1(z)}{q_1(z)}$ и т.д.) позволяет исходную правильную рациональную дробь $\frac{P(z)}{Q(z)}$ разложить в сумму простейших дробей. Таким образом, установлена следующая теорема разложения.

Приводя правую часть к общему знаменателю, получаем

$$\frac{z}{(z-1)(z+1)^2} = \frac{A(z+1)^2 + B_1(z-1)(z+1) + B_2(z-1)}{(z-1)(z+1)^2}.$$

Отсюда следует, что

$$z = A(z+1)^2 + B_1(z-1)(z+1) + B_2(z-1).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z , получим:

$$\begin{cases} A + B_1 = 0, \\ 2A + B_2 = 1, \\ A - B_1 - B_2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $A = \frac{1}{4}$, $B_1 = -\frac{1}{4}$, $B_2 = \frac{1}{2}$. Итак,

$$\frac{z}{(z-1)(z+1)^2} = \frac{1/4}{z-1} + \frac{1/2}{(z+1)^2} + \frac{-1/4}{z+1}. \bullet$$

Пример 3.3. Разложить в сумму простейших дробей правильную дробь: $R(z) = \frac{3z^2 + 5z + 12}{(z^2 + 3)(z^2 + 1)}$.

Решение. Нули знаменателя этой дроби простые: $c_1 = i\sqrt{3}$, $c_2 = -i\sqrt{3}$, $c_3 = i$, $c_4 = -i$. Разложение имеет вид

$$R(z) = \frac{A}{z - i\sqrt{3}} + \frac{B}{z + i\sqrt{3}} + \frac{C}{z - i} + \frac{D}{z + i}.$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая числители, получим:

$$3z^2 + 5z + 12 = A(z + i\sqrt{3})(z^2 + 1) + B(z - i\sqrt{3})(z^2 + 1) + C(z + i)(z^2 + 3) + D(z - i)(z^2 + 3).$$

Составляя линейную систему и решая ее, найдем

$$A = -\frac{5 - i\sqrt{3}}{4}; \quad B = -\frac{5 + i\sqrt{3}}{4}; \quad C = \frac{5 - 9i}{4}; \quad D = \frac{5 + 9i}{4}. \bullet$$

Сформулируем алгоритм разложения рациональной дроби $\frac{P}{Q}$.

1. Если дробь неправильная, то представляем ее в виде суммы многочлена и правильной дроби.

2. Решая уравнение $Q(z) = 0$, находим нули знаменателя и их кратность.

3. Для полученной в п.1 правильной дроби записываем разложение (3.18) с неопределенными коэффициентами.

4. Правую часть полученного разложения приводим к общему знаменателю.

5. Приравнивая многочлены, стоящие в числителях, и используя условия равенства многочленов, выписываем линейную систему для неопределенных коэффициентов.

6. Решая систему, получаем коэффициенты разложения правильной дроби в сумму простейших дробей.

Замечание 3.7. В рациональной дроби $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ многочлены P и Q могут иметь общие нули, а значит, могут иметь в своих разложениях вида (3.12) общие множители, на которые дробь (3.14) можно сократить (см., например, доказательство теоремы 3.9). Так, например, вместо дроби $\frac{z^2 + 2z - 3}{z^2 + 4z + 3}$ можно рассматривать дробь $\frac{z - 1}{z + 1}$, которая получена из первой сокращением на $(z + 3)$. Если многочлены P и Q не имеют общих нулей, то дробь $\frac{P}{Q}$ называется несократимой. Для несократимой дроби нуль кратности k знаменателя Q называется полюсом кратности k этой дроби. $\otimes$

3.7. Вещественные рациональные дроби

Если многочлены P и Q – вещественные, рациональную дробь $R = \frac{P}{Q}$ будем называть вещественной.

Правильная вещественная рациональная дробь может быть разложена в сумму вещественных простейших дробей, однако для этого класс простейших дробей необходимо расширить.

Определение 3.8. Вещественные рациональные дроби вида

$$\frac{Mx + L}{(x^2 + \alpha x + \beta)^k},$$

где $k \in \mathbb{N}$, $\alpha^2 - 4\beta < 0$, будем наряду с дробями вида $\frac{A}{(x - c)^k}$ называть простейшими вещественными дробями.

Приведем без доказательства аналог теоремы 3.10 для случая вещественных дробей.

Теорема 3.11. Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильная вещественная рациональная дробь, где

$Q(x) = a_n(x^2 + \alpha_1x + \beta_1)^{k_1} \dots (x^2 + \alpha_lx + \beta_l)^{k_l}(x - d_1)^{n_1} \dots (x - d_m)^{n_m}$
(см. (3.13)). Тогда эта дробь может быть разложена в следующую сумму простейших вещественных дробей:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_{n_1}^{(1)}}{(x - d_1)^{n_1}} + \frac{A_{n_1-1}^{(1)}}{(x - d_1)^{n_1-1}} + \dots + \frac{A_1^{(1)}}{x - d_1} + \dots \\ & + \frac{A_{n_m}^{(m)}}{(x - d_m)^{n_m}} + \frac{A_{n_m-1}^{(m)}}{(x - d_m)^{n_m-1}} + \dots + \frac{A_1^{(m)}}{x - d_m} + \\ & + \frac{M_{k_1}^{(1)}x + L_{k_1}^{(1)}}{(x^2 + \alpha_1x + \beta_1)^{k_1}} + \frac{M_{k_1-1}^{(1)}x + L_{k_1-1}^{(1)}}{(x^2 + \alpha_1x + \beta_1)^{k_1-1}} + \dots + \frac{M_1^{(1)}x + L_1^{(1)}}{x^2 + \alpha_1x + \beta_1} + \\ & + \dots + \frac{M_{k_l}^{(l)}x + L_{k_l}^{(l)}}{(x^2 + \alpha_lx + \beta_l)^{k_l}} + \frac{M_{k_l-1}^{(l)}x + L_{k_l-1}^{(l)}}{(x^2 + \alpha_lx + \beta_l)^{k_l-1}} + \dots + \frac{M_1^{(l)}x + L_1^{(l)}}{x^2 + \alpha_lx + \beta_l}. \end{aligned}$$

Алгоритм нахождения коэффициентов $A_j^{(i)}$, $M_S^{(t)}$, $L_S^{(t)}$ таков же, как и для разложения (3.18).

Пример 3.4. Разложить в сумму простейших вещественных дробей правильную дробь: $R(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$.

Решение. Разложение с неопределенными коэффициентами имеет вид

$$\frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}.$$

Приводя к общему знаменателю и приравнявая числители, получим:

$$1 = (Ax + B)(x^2 + 4) + (Cx + D)(x^2 + 1).$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , находим:

$$\begin{cases} A + C = 0, \\ B + D = 0, \\ 4A + C = 0, \\ 4B + D = 1, \end{cases}$$

откуда $A = 0$, $B = \frac{1}{3}$, $C = 0$, $D = -\frac{1}{3}$. Таким образом,

$$\frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{\frac{1}{3}}{x^2 + 1} - \frac{\frac{1}{3}}{x^2 + 4}. \bullet$$

Пример 3.5. Разложить в сумму простейших вещественных дробей правильную дробь: $R(x) = \frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2x + 3)^2(x + 1)}$.

Решение. Разложение с неопределенными коэффициентами имеет вид

$$R(x) = \frac{Ax + B}{(x^2 + 2x + 3)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 3} + \frac{E}{x + 1},$$

откуда

$$\begin{aligned} x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8 &= \\ &= (Ax + B)(x + 1) + (Cx + D)(x^2 + 2x + 3)(x + 1) + E(x^2 + 2x + 3)^2. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , находим:

$$\begin{cases} C + E = 1, \\ 3C + D + 4E = 4, \\ A + 5C + 3D + 10E = 11, \\ A + B + 3C + 5D + 12E = 12, \\ B + 3D + 9E = 8, \end{cases}$$

откуда $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$, $D = 0$, $E = 1$ и, следовательно,

$$R(x) = \frac{x - 1}{(x^2 + 2x + 3)^2} + \frac{1}{x + 1} \cdot \bullet$$

Список литературы

1. Бодунов Н.А., Челкак С.И., Чистяков В.М. Комплексные числа. Многочлены. Векторная алгебра и аналитическая геометрия. Учеб. пособие / ГЭТУ. – СПб, 1996.

2. А.Л.Белополюский, Н.А.Бодунов, Н.М.Червинская. Типовые расчеты по курсу “Алгебра и геометрия”: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ “ЛЭТИ”, 2008.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
1. МЕТОД КООРДИНАТ	3
1.1. Система координат на прямой	3
1.2. Системы координат на плоскости	5
1.3. Системы координат в пространстве	10
2. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА	15
2.1. Определение. Основные свойства	15

2.2. Комплексная плоскость. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая и показательная формы комплексных чисел	21
2.3. Двухчленные и квадратные уравнения	28
3. МНОГОЧЛЕНЫ И РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ	33
3.1. Многочлены и их свойства	33
3.2. Деление многочленов	35
3.3. Вычисление значений многочлена. Схема Горнера	39
3.4. Нули многочлена	40
3.5. Многочлены с вещественными коэффициентами	43
3.6. Рациональные дроби	44
3.7. Вещественные рациональные дроби	49
Список литературы	51

Белопольский Андрей Львович
Бодунов Николай Александрович
Челкак Сергей Иванович
Чистяков Владимир Матвеевич

Комплексные числа, многочлены и рациональные дроби

Электронное учебное пособие

Редактор Э.К.Долгатов

Подписано в печать . Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Гарнитура „Times New Roman“. Печ. л. 4,5.
Тираж экз. Заказ

Издательство СПбГЭТУ „ЛЭТИ“
197376, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5