Министерство образования РФ

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет “ЛЭТИ”

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Санкт-Петербург
2002

Министерство образования РФ

Санкт-Петербургский государственный электротехнический
университет "ЛЭТИ"

А. С. Бондарев Н. М. Червинская

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство СПбГЭТУ "ЛЭТИ"
2002

УДК 512.8
ББК В143
Б81

Бондарев А. С., Червинская Н. М. Линейная алгебра в примерах и задачах: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ "ЛЭТИ", 2002. 139 с.

Излагаются вопросы теории матриц, определителей, линейных пространств и их приложений к теории систем линейных уравнений и аналитической геометрии, входящие в программу курса алгебры и геометрии технических университетов. Соответствует программе курса "Алгебра и геометрия".

Предназначено для студентов технических факультетов, обучающихся по всем направлениям и специальностям вечерней и заочной форм обучения. Будет полезно для самостоятельной работы студентов дневной формы обучения.

Рецензенты: кафедра прикладной математики и информатики СПбГАСУ; д-р физ.-мат. наук В. М. Чистяков (СПбГТУ).

Утверждено
редакционно-издательским советом универститета
в качестве учебного пособия

ISBN 5-7629-0480-6

1. Комплексные числа

Первые числа, с которыми знакомится человек, это натуральные числа. Их можно складывать, умножать, но не всегда можно вычитать (например, $2-3$ не является натуральным числом). Говорят, что множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ замкнуто относительно сложения и умножения, но не замкнуто относительно вычитания. Чтобы избежать этого неудобства, приходится расширить понятие числа и рассматривать уже множество $\mathbb{Z}$ целых чисел. Оно замкнуто относительно операций "$+$", "$-$", "$\times$", но не замкнуто относительно деления ":". Чтобы избежать этого, опять приходится расширить понятие числа и рассматривать уже множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Оно уже замкнуто относительно операций "$+$", "$-$", "$\times$", ":", но не замкнуто относительно операции извлечения корня даже из положительных чисел. Приходится снова расширить понятие числа – ввести иррациональные числа, которые вместе с рациональными образуют множество $\mathbb{R}$ вещественных (действительных) чисел. Но и это не решает проблему. В множестве $\mathbb{R}$ по-прежнему нельзя извлекать квадратный корень из отрицательных чисел. И только введение понятия комплексного числа позволило построить множество чисел, замкнутое относительно всех упомянутых арифметических операций: сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня. Схематически процесс расширения понятия числа можно изобразить так:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Конечно, здесь изложена упрощенная схема, далекая от полной драматизма, сомнений, споров, дискуссий истории появления комплексных чисел.

1.1. Определение комплексных чисел

Определение 1.1. *Множество* $\mathbb{C} = \{z = (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ *упорядоченных пар вещественных чисел, для которых определены:*

1) *отношение равенства:* $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2; \end{cases}$

2) *операция сложения:* $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;

3) *операция умножения:* $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2,\ x_1y_2 + y_1x_2)$, *называется множеством комплексных чисел.*

Если $z = (x, y)$, *то* $x = \Re\mathrm{e}(z)$ *вещественная, а* $y = \Im\mathrm{m}(z)$ – *мнимая части* z.

Комплексное число $z = (x, y)$ удобно изображать на координатной плоскости точкой с абсциссой x и ординатой y (рис. 1.1). Поэтому ось абсцисс называют вещественной осью, а ось ординат – мнимой осью.

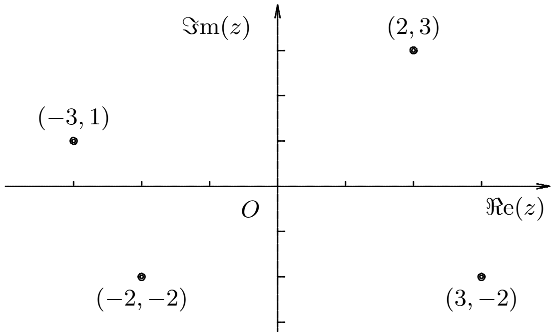


Рис. 1.1

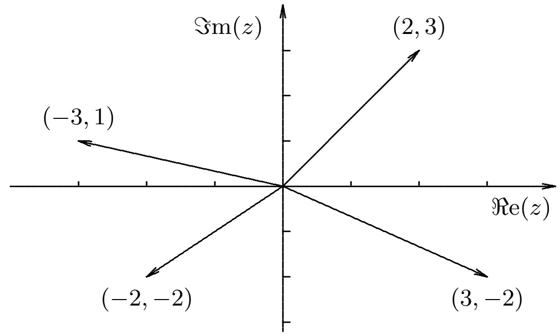


Рис. 1.2

Комплексное число $z = (x, y)$ часто изображают в виде радиуса-вектора $\vec{r} = (x, y)$ с координатами x и y (рис. 1.2).

1.2. Законы действий над комплексными числами

Для комплексных чисел справедливы все привычные нам законы действий над числами:

1) коммутативности: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$; $z_1 z_2 = z_2 z_1$;

2) ассоциативности: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$; $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$;

3) дистрибутивности: $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$;

4) существует “нулевой” элемент $\mathbf{0} = (0, 0)$, такой, что $z + \mathbf{0} = z$ для любого $z = (x, y)$;

5) существует “единичный” элемент $\mathbf{1} = (1, 0)$, такой, что $z\mathbf{1} = z$ для любого $z = (x, y)$;

6) для любого $z = (x, y)$ существует “противоположное” число $-z = (-x, -y)$, такое, что $z + (-z) = \mathbf{0}$;

7) для любого $z = (x, y) \neq \mathbf{0}$ существует “обратное” число $z^{-1} = \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}, \dfrac{-y}{x^2 + y^2}\right)$, такое, что $z \cdot z^{-1} = \mathbf{1}$.

Упражнение. Найти число, “обратное” к $z = (-3, 4)$.
Ответ: $z^{-1} = (-3/25, -4/25)$.

1.3. Вычитание и деление комплексных чисел

Определение 1.2. *Разностью комплексных чисел z_1 и z_2 называется сумма z_1 и $-z_2$:*

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) \Longleftrightarrow (x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2).$$

Определение 1.3. *Частным от деления комплексных чисел* z_1 *и* z_2 *называется произведение* z_1 *и* z_2^{-1}*:*

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} \Longleftrightarrow \frac{(x_1, y_1)}{(x_2, y_2)} = (x_1, y_1)\left(\frac{x_2}{x_2^2+y_2^2}, \frac{-y_2}{x_2^2+y_2^2}\right) =$$
$$= \left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}, \frac{-x_1y_2+x_2y_1}{x_2^2+y_2^2}\right).$$

Упражнение. Выполнить действия: $(4,3)-(-3,4)$; $\dfrac{(4,3)}{(-3,4)}$.

Ответ: $(7,-1)$; $(0,-1)$.

1.4. Геометрическая интерпретация суммы и разности комплексных чисел

Комплексным числам $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ соответствуют радиусы-векторы $\vec{r}_1 = (x_1, y_1)$ и $\vec{r}_2 = (x_2, y_2)$. Тогда комплексным числам $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$ соответствуют радиусы-векторы $\vec{r}_1 \pm \vec{r}_2 = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$, т. е. сумму (разность) комплексных чисел можно интерпретировать как сумму (рис. 1.3) (разность (рис. 1.4)) соответствующих им радиусов-векторов.

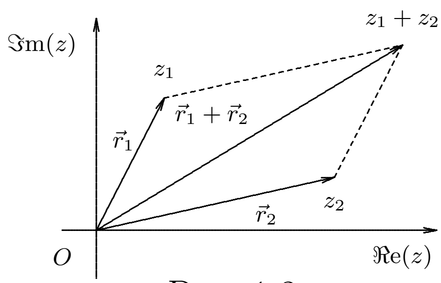


Рис. 1.3

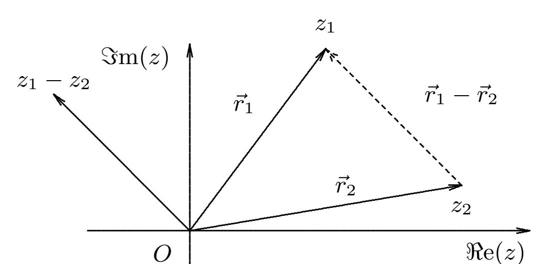


Рис. 1.4

Упражнение. Изобразить на комплексной плоскости числа $z_1 = (3,-1)$, $z_2 = (-2,-3)$, $z_3 = (2,-2)$, $z_4 = (-3,2)$ и найти $z_1 + z_2$, $z_3 - z_4$, используя геометрическую интерпретацию операций сложения и вычитания комплексных чисел.

1.5. Вещественные числа

Комплексные числа вида $(x, 0)$ отождествляют с *вещественными* числами x и пишут $(x, 0) = x$, так как они изображаются точками вещественной оси и для них справедливы:

1) отношение равенства: $(x_1, 0) = (x_2, 0) \Longleftrightarrow x_1 = x_2$;
2) операция сложения: $(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) = x_1 + x_2$;
3) операция умножения: $(x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1x_2, 0) = x_1x_2$.

Упражнение. Доказать, что: 4) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda(x_1, 0) = (\lambda x_1, 0) = \lambda x_1$; 5) $(x_1, 0) - (x_2, 0) = (x_1 - x_2, 0) = x_1 - x_2$; 6) $\dfrac{(x_1, 0)}{(x_2, 0)} = \left(\dfrac{x_1}{x_2}, 0\right) = \dfrac{x_1}{x_2}$.

1.6. Мнимые числа

Комплексные числа вида $(0, y)$ называют *мнимыми* числами, так как они изображаются точками мнимой оси. Среди них выделяют *мнимую единицу* $i = (0, 1)$. Очевидно, $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$. Всякое мнимое число можно записать в виде $(0, y) = (0, 1)(y, 0) = iy$.

Упражнение. Доказать, что $i^3 = -i$; $i^4 = 1$.

1.7. Алгебраическая форма записи комплексных чисел

Всякое комплексное число $z = (x, y)$ можно записать в виде $z = (x, 0) + (0, y) = x + iy$.

Равенство $z = x + iy$ называется *алгебраической формой* записи комплексного числа z.

Операции над числами, записанными в алгебраической форме, удобно производить, используя законы коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности (т. е. действуя как с двучленами, помня при этом, что $i^2 = -1$).

1) $z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$.

Например, $(1 - i) + (4 + 7i) = (1 + 4) + i(-1 + 7) = 5 + 6i$.

2) $z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$.

Например, $(-1 + 3i)(2 - 5i) = -(2 - 5i) + 3i(2 - 5i) = -2 + 5i + 6i - 15i^2 = -2 + 5i + 6i - 15(-1) = 13 + 11i$.

Деление комплексных чисел удобно производить, домножая числитель и знаменатель на выражение, “сопряженное” знаменателю, т. е. отличающееся от него знаком мнимой части.

3) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \dfrac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\dfrac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$.

Например, $\dfrac{-1 + 3i}{2 + 5i} = \dfrac{(-1 + 3i)(2 - 5i)}{(2 + 5i)(2 - 5i)} = \dfrac{13 + 11i}{2^2 + 5^2} = \dfrac{13}{29} + i\dfrac{11}{29}$.

Упражнение. Вычислить: а) $(1 + 2i)(2 - i)^2 - 5i$, б) $\dfrac{2 + i}{1 - i}$.

Ответы: а) $11 - 3i$; б) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\, i$.

1.8. Модуль и аргумент комплексного числа

Определение 1.4. *Модулем комплексного числа* $z = (x, y)$ *называется число* $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, *равное расстоянию от точки, изображающей комплексное число* z, *до начала координат (рис. 1.5).*

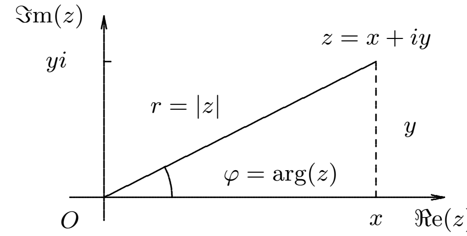


Рис. 1.5

Пример. Найти модули чисел $z_1 = 1 - i,\ z_2 = -1 + \sqrt{3}i$.
Решение. $|z_1| = |1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},\ \ |z_2| = |-1 + \sqrt{3}i| =$
$= \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2.$

Упражнение. Найти модуль числа $z = \dfrac{5\sqrt{3} - 5i}{2}$.

Ответ: $|z| = 5$.

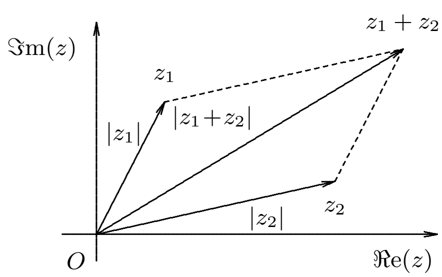


Рис. 1.6

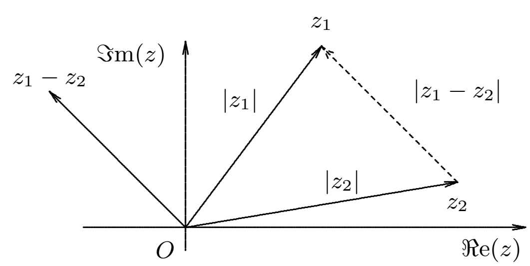


Рис. 1.7

Из рис. 1.6 и 1.7 видно, что для комплексных чисел справедливы неравенства $||z_1| - |z_2|| \le |z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

Определение 1.5. *Аргументом комплексного числа* $z = (x, y) \ne \mathbf{0}$ *называется любой угол* $\mathrm{Arg}(z)$, *такой, что*

$$\cos(\mathrm{Arg}(z)) = \frac{x}{|z|}, \quad \sin(\mathrm{Arg}(z)) = \frac{y}{|z|}.$$

Значение аргумента из интервала $[0, 2\pi)$ *называется главным и обозначается* $\arg(z)$ *(см. рис. 1.5). Очевидно,* $\mathrm{Arg}(z) = \arg(z) + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, *где*

$$\arg(z) = \begin{cases} \arccos(x/|z|), & \textit{если}\ \ y \ge 0; \\ \\ 2\pi - \arccos(x/|z|), & \textit{если}\ \ y < 0. \end{cases}$$

Для комплексного числа $z = \mathbf{0}$ *аргумент не определен.*

Иногда *главным* называется значение аргумента из интервала

$(-\pi, \pi]$. В этом случае

$$\arg(z) = \begin{cases} \arccos(x/|z|), \text{ если } \ y \geq 0; \\ \\ -\arccos(x/|z|), \text{ если } \ y < 0. \end{cases}$$

При вычислении аргумента полезно помнить, что

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

и $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$.

Свойства аргумента:

1) $\mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2) = \mathrm{Arg}(z_1 z_2)$;
2) $\mathrm{Arg}(z_1) - \mathrm{Arg}(z_2) = \mathrm{Arg}(z_1/z_2)$;
3) $n\mathrm{Arg}(z) = \mathrm{Arg}(z^n)$.

Пример. Найти главное значение аргумента из интервала $[0, 2\pi)$ чисел $z_1 = 1 - i, \ z_2 = -1 + \sqrt{3}i$.

Решение. Так как $|z_1| = \sqrt{2}, \ \Im\mathrm{m}(z_1) = -1 < 0$, то

$$\arg(z_1) = 2\pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}.$$

Так как $|z_2| = 2, \ \Im\mathrm{m}(z_2) = \sqrt{3} > 0$, то

$$\arg(z_2) = \arccos\left(\frac{-1}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Упражнение. Найти главное значение аргумента из интервала $[0, 2\pi)$ числа $z = \dfrac{5\sqrt{3} + 5i}{2}$.

Ответ: $\arg(z) = \dfrac{\pi}{6}$.

1.9. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел

Комплексное число $z = (x, y) \neq \mathbf{0}$ может быть записано в тригонометрической форме:

$$z = |z|(\cos(\mathrm{Arg}(z)) + i \sin(\mathrm{Arg}(z)).$$

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме:

1) $z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2)) + i \sin(\mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2)))$;
2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\mathrm{Arg}(z_1) - \mathrm{Arg}(z_2)) + i \sin(\mathrm{Arg}(z_1) - \mathrm{Arg}(z_2)))$;

3) $z^n = |z|^n(\cos(n\mathrm{Arg}(z)) + i\sin(n\mathrm{Arg}(z)))$.

Из свойства 3 следует, что для любых $y \in \mathbb{R}$ $(\cos(y) + i\sin(y))^n = \cos(ny) + i\sin(ny)$ (формула Муавра).

Пример. Записать в тригонометрической форме числа $z_1 = 1- -i$, $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$ и вычислить $z_1^2 z_2^3$.

Решение. Так как $|z_1| = \sqrt{2}$, $\arg(z_1) = \dfrac{7\pi}{4}$ и $|z_2| = 2$, $\arg(z_2) = \dfrac{2\pi}{3}$, то $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$ и $z_2 = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$. Вычислим

$$z_1^2 z_2^3 = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right)^2 \left(2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right)^3 =$$

$$= 2\left(\cos\frac{7\pi}{2} + i\sin\frac{7\pi}{2}\right) 8\left(\cos(2\pi) + i\sin(2\pi)\right) = -16i.$$

Упражнение. Записать в тригонометрической форме число $z = \dfrac{5\sqrt{3} + 5i}{2}$.

Ответ: $z = 5\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$.

1.10. Комплексная экспонента

Определение 1.6. *Функция, которая каждому комплексному числу $z = x + iy$ ставит в соответствие комплексное число*

$$\exp(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)),$$

называется комплексной экспонентой.

При $x = 0$ и любых $y \in \mathbb{R}$ получаем формулу Эйлера:

$$e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y).$$

Свойства комплексной экспоненты:

1) $\Re\mathrm{e}(e^z) = e^x\cos(y)$; $\Im\mathrm{m}(e^z) = e^x\sin(y)$; $|e^z| = e^x$; $\mathrm{Arg}(e^z) = y$;

2) $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$; $e^{z_1}/e^{z_2} = e^{z_1-z_2}$; $(e^z)^n = e^{nz}$;

3) $e^z = 1 \Longleftrightarrow z = 2\pi k i$, $k \in \mathbb{Z}$;

4) $e^{z+2\pi k i} = e^z$ для любого $k \in \mathbb{Z}$, т. е. комплексная экспонента – $2\pi i$-периодическая функция.

Пример. Вычислить $e^{-1+i\pi/2}$.

Решение. По определению имеем

$$e^{-1+i\pi/2} = e^{-1}(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)) = e^{-1}(0+i) = \frac{i}{e}.$$

Упражнение. Вычислить $e^{-\ln(2)+i\pi/4}$.
Ответ: $\dfrac{1+i}{2\sqrt{2}}$.

1.11. Показательная форма записи комплексных чисел

Комплексное число $z = (x, y) \neq \mathbf{0}$ можно записать в показательной форме:

$$z = |z|e^{i\operatorname{Arg}(z)}.$$

Действия над комплексными числами в показательной форме:

1) $z_1 z_2 = |z_1|e^{i\operatorname{Arg}(z_1)}|z_2|e^{i\operatorname{Arg}(z_2)} = |z_1||z_2|e^{i(\operatorname{Arg}(z_1)+\operatorname{Arg}(z_2))}$;
2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|e^{i\operatorname{Arg}(z_1)}}{|z_2|e^{i\operatorname{Arg}(z_2)}} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\operatorname{Arg}(z_1)-\operatorname{Arg}(z_2))}$;
3) $z^n = |z|^n e^{i\ n\operatorname{Arg}(z)}$.

Пример. Записать в показательной форме числа $z_1 = 1 - i,\ z_2 = -1 + \sqrt{3}i$.

Решение. Так как $|z_1| = \sqrt{2}, \arg(z_1) = \dfrac{7\pi}{4}$ и $|z_2| = 2, \arg(z_2) = \dfrac{2\pi}{3}$, то $z_1 = \sqrt{2}e^{i7\pi/4}$ и $z_2 = 2e^{i2\pi/3}$.

Упражнение. Записать в показательной форме число
$z = \dfrac{5\sqrt{3}+5i}{2}$.
Ответ: $z = 5e^{i\pi/6}$.

1.12. Решение уравнения $z^n = a$, $a \neq 0$

Уравнение $z^n = a,\ a \neq 0$ имеет ровно n различных корней:

$$z_k = \sqrt[n]{|a|}e^{i\frac{\arg(a)+2\pi k}{n}} \Longleftrightarrow z_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\arg(a)+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\arg(a)+2\pi k}{n}\right),$$

где $k = 0, 1, ..., n-1$. Так как $|z_k| = \sqrt[n]{|a|},\ \arg(z_k) = \dfrac{\arg(a)+2\pi k}{n}$, то все корни уравнения лежат на окружности радиуса $R = \sqrt[n]{|a|}$ с центром в точке $O(0,0)$ и могут быть получены из z_0 последовательным поворотом радиуса-вектора корня z_0 на угол $\dfrac{2\pi}{n}$ против часовой стрелки.

Пример. Решить уравнение $z^6 = -8$.

Решение. В нашем примере $a = -8,\ |a| = 8, \arg(a) = \pi$. Уравнение $z^6 = -8$ имеет ровно 6 различных корней:

$$z_k = 8^{1/6}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{6} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{6}\right),\ k = 0, 1, ..., 5.$$

Вычислим их (рис. 1.8):

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right);$$

$$z_1 = \sqrt{2}i;$$

$$z_2 = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right);$$

$$z_3 = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right);$$

$$z_4 = -\sqrt{2}i;$$

$$z_5 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right).$$

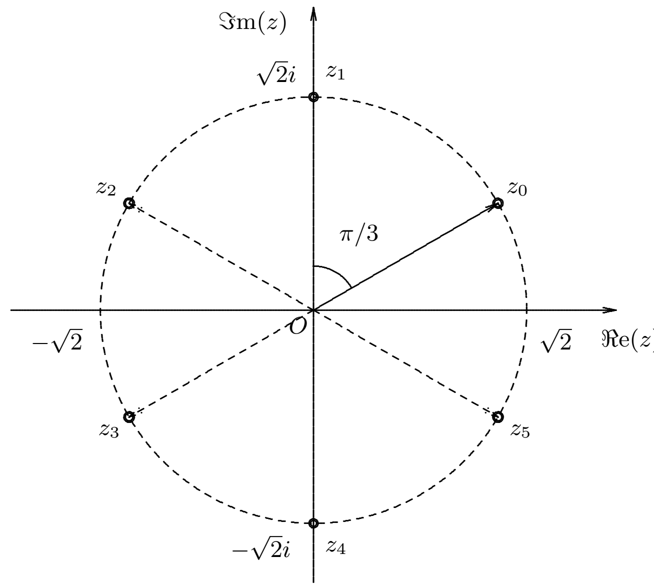


Рис. 1.8

Упражнение. Решить уравнение $z^4 = -4$.

Ответ: $z_0 = 1 + i;\ z_1 = -1 + i;\ z_2 = -1 - i;\ z_3 = 1 - i$.

Уравнение $z^2 = a$, $a \neq 0$ имеет ровно 2 различных корня:

$$z_{1,2} = \pm\sqrt{|a|}e^{i\dfrac{\arg(a)}{2}} \Longleftrightarrow z_{1,2} = \pm\sqrt{|a|}\left(\cos\frac{\arg(a)}{2} + i\sin\frac{\arg(a)}{2}\right).$$

Их удобней вычислять по формулам:

$$z_{1,2} = \pm\left(\sqrt{\frac{|a| + \Re\mathrm{e}(a)}{2}} + i\ \mathrm{sign}(\Im\mathrm{m}(a))\sqrt{\frac{|a| - \Re\mathrm{e}(a)}{2}}\right),$$

где $\mathrm{sign}(\Im\mathrm{m}(a)) = 1$, если $\Im\mathrm{m}(a) \geq 0$, $\mathrm{sign}(\Im\mathrm{m}(a)) = -1$, если $\Im\mathrm{m}(a) <$ < 0.

Пример. Решить уравнение $z^2 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

Решение. В нашем примере $a = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, $|a| = 1$, $\Re\mathrm{e}(a) = -1/2$, $\Im\mathrm{m}(a) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} > 0$. Отсюда

$$z_{1,2} = \pm \left(\sqrt{\frac{1 - 0.5}{2}} + i\sqrt{\frac{1 + 0.5}{2}} \right) = \pm \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Упражнение. Решить уравнение $z^2 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $z_{1,2} = \pm \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \right)$.

1.13. Решение квадратного уравнения

Пусть требуется решить уравнение $az^2 + bz + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Обозначим $D = b^2 - 4ac$ – дискриминант уравнения. Тогда

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \left(\sqrt{\frac{|D| + \Re\mathrm{e}(D)}{2}} + i \,\mathrm{sign}(\Im\mathrm{m}(D)) \sqrt{\frac{|D| - \Re\mathrm{e}(D)}{2}} \right)}{2a}. \qquad (1.1)$$

Пример. Решить уравнение $z^2 + (3 + i)z + 4 = 0$.

Решение. В нашем примере $D = (3 + i)^2 - 16 = -8 + 6i$, $|D| = \sqrt{(-8)^2 + 6^2} = 10$, $\Re\mathrm{e}(D) = -8$, $\Im\mathrm{m}(D) = 6 > 0$. По формуле (1.1) имеем:

$$z_{1,2} = \frac{-3 - i \pm \left(\sqrt{\frac{10-8}{2}} + i\sqrt{\frac{10+8}{2}} \right)}{2} = \frac{-3 - i \pm (1 + 3i)}{2}.$$

Отсюда $z_1 = -1 + i$; $z_2 = -2 - 2i$.

Упражнение. Решить уравнение $z^2 - (4 + 3i)z + 1 + 5i = 0$.

Ответ: $z_1 = 1 + i$; $z_2 = 3 + 2i$.

1.14. Решение уравнения $e^z = a$, $a \neq 0$

Уравнение $e^z = a$, $a \neq 0$ имеет бесконечное число корней

$$z_k = \ln |a| + i(\arg(a) + 2\pi k), \ k \in \mathbb{Z}. \qquad (1.2)$$

Пример. Решить уравнение $e^z = -1 + i$.

Решение. В нашем примере $a = -1 + i$, $|a| = \sqrt{2}$, $\arg(a) = \arccos(-1/\sqrt{2}) = \pi - \arccos(1/\sqrt{2}) = 3\pi/4$. По формуле (1.2) имеем:

$$z_k = 0.5\ln(2) + i(3\pi/4 + 2\pi k),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Упражнение. Решить уравнение $e^z = \dfrac{5\sqrt{3}+5i}{2}$.

Ответ: $z = \ln(5) + i(\pi/6 + 2\pi k),\ k \in Z$.

1.15. Тригонометрические функции

Из формулы Эйлера $e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y)$ следует, что для любых $y \in \mathbb{R}$

$$\cos(y) = \frac{1}{2}\left(e^{iy} + e^{-iy}\right);\ \sin(y) = \frac{1}{2i}\left(e^{iy} - e^{-iy}\right).$$

Аналогично определяются тригонометрические функции комплексного аргумента для любых $z \in \mathbb{C}$:

$$\cos(z) = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right);\ \sin(z) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right);$$

$$\mathrm{tg}(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} = \frac{1}{i}\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}};\ \mathrm{ctg}(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)} = i\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}.$$

Свойства тригонометрических функций:

1) $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$ (основное тригонометрическое тождество);
2) $\cos(-z) = \cos(z);\ \sin(-z) = -\sin(z)$;
3) $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) \mp \sin(z_1)\sin(z_2)$;
   $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) \pm \cos(z_1)\sin(z_2)$;
4) $\cos(z) = 0 \Longleftrightarrow z = \pi/2 + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$,
   $\sin(z) = 0 \Longleftrightarrow z = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;
5) для любых $k \in \mathbb{Z}$ $\cos(z + 2\pi k) = \cos(z);\ \sin(z + 2\pi k) = \sin(z)$.

Пример. Записать в алгебраической форме $\sin(\pi/6 - i)$.

Решение. По формуле для синуса разности имеем:

$$\sin(\pi/6 - i) = \sin(\pi/6)\cos(i) - \cos(\pi/6)\sin(i) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}(e^{i^2} + e^{-i^2}) - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{1}{2i}(e^{i^2} - e^{-i^2}) = \frac{1}{4}(e^{-1} + e) + i\frac{\sqrt{3}}{4}(e^{-1} - e).$$

Упражнение. Записать в алгебраической форме $\sin(\pi/4 + i\ln(2))$.

Ответ: $z = \dfrac{5\sqrt{2}}{8} + i\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$.

1.16. Гиперболические функции

Гиперболические функции комплексного аргумента $z \in \mathbb{C}$ определяются так:

$$\operatorname{ch}(z) = \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right); \quad \operatorname{sh}(z) = \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right);$$

$$\operatorname{th}(z) = \frac{\operatorname{sh}(z)}{\operatorname{ch}(z)} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}; \quad \operatorname{cth}(z) = \frac{\operatorname{ch}(z)}{\operatorname{sh}(z)} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}.$$

Связь тригонометрических и гиперболических функций:

$\sin(iz) = i\operatorname{sh}(z)$; $\cos(iz) = \operatorname{ch}(z)$; $\operatorname{tg}(iz) = i\operatorname{th}(z)$; $\operatorname{ctg}(iz) = -i\operatorname{cth}(z)$.
$\operatorname{sh}(iz) = i\sin(z)$; $\operatorname{ch}(iz) = \cos(z)$; $\operatorname{th}(iz) = i\operatorname{tg}(z)$; $\operatorname{cth}(iz) = -i\operatorname{ctg}(z)$.

Отсюда следует, что если $F(\sin(z), \cos(z)) = 0$ есть тождество, верное для всех z, то $F(i\operatorname{sh}(z), \operatorname{ch}(z)) = 0$ тоже есть тождество, верное для всех z.

Пример. Доказать тождество

$$\operatorname{ch}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{ch}(z_1)\operatorname{ch}(z_2) \pm \operatorname{sh}(z_1)\operatorname{sh}(z_2).$$

Решение. Заменяя в формуле

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) \mp \sin(z_1)\sin(z_2)$$

функции $\sin(z)$ на $i\operatorname{sh}(z)$, $\cos(z)$ на $\operatorname{ch}(z)$, получим

$$\operatorname{ch}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{ch}(z_1)\operatorname{ch}(z_2) \mp i\operatorname{sh}(z_1)\, i\operatorname{sh}(z_2) =$$

$$= \operatorname{ch}(z_1)\operatorname{ch}(z_2) \mp i^2\operatorname{sh}(z_1)\operatorname{sh}(z_2) = \operatorname{ch}(z_1)\operatorname{ch}(z_2) \pm \operatorname{sh}(z_1)\operatorname{sh}(z_2).$$

Упражнение. Доказать основное гиперболическое тождество.

Свойства гиперболических функций:

1) $\operatorname{ch}^2(z) - \operatorname{sh}^2(z) = 1$ (основное гиперболическое тождество);
2) $\operatorname{ch}(-z) = \operatorname{ch}(z)$; $\operatorname{sh}(-z) = -\operatorname{sh}(z)$;
3) $\operatorname{ch}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{ch}(z_1)\operatorname{ch}(z_2) \pm \operatorname{sh}(z_1)\operatorname{sh}(z_2)$;
$\operatorname{sh}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sh}(z_1)\operatorname{ch}(z_2) \pm \operatorname{ch}(z_1)\operatorname{sh}(z_2)$;
4) $\operatorname{ch}(z) = 0 \Longleftrightarrow z = i(\pi/2 + \pi k),\ k \in \mathbb{Z}$;
$\operatorname{sh}(z) = 0 \Longleftrightarrow z = i\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;
5) для любых $k \in \mathbb{Z}$ $\operatorname{ch}(z + i2\pi k) = \operatorname{ch}(z)$; $\operatorname{sh}(z + i2\pi k) = \operatorname{sh}(z)$.

Пример. Записать в алгебраической форме $\operatorname{ch}(\ln(2) - i\,\pi/6)$.

Решение. По формуле для гиперболического косинуса разности имеем:

$$\operatorname{ch}(\ln(2) - i\pi/6) = \operatorname{ch}(\ln(2)\operatorname{ch}(i\pi/6) - \operatorname{sh}(\ln(2))\operatorname{sh}(i\pi/6) =$$

$$= \frac{1}{2}(e^{\ln(2)} + e^{-\ln(2)})\cos(\pi/6) - i\,\frac{1}{2}(e^{\ln(2)} - e^{-\ln(2)})\sin(\pi/6) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2+\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{8} - i\frac{3}{8}.$$

Упражнение. Записать в алгебраической форме $\operatorname{sh}(\ln(3) + i\pi/4)$.

Ответ: $z = \dfrac{4\sqrt{2}}{6} + i\dfrac{5\sqrt{2}}{6}$.

1.17. Сопряженные комплексные числа

Определение 1.7. *Сопряженным к комплексному числу $z = x + iy$ называется комплексное число $\overline{z} = x - iy$.*

Точка $\overline{z}$ симметрична точке z относительно вещественной оси.

Свойства операции сопряжения:

1) $\overline{z} = z \Longleftrightarrow z = x (x \in \mathbb{R})$;	6) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$;
2) $\overline{\overline{z}} = z$;	7) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;
3) $\overline{z} = \lvert z\rvert e^{-i\operatorname{Arg}(z)}$, $\lvert\overline{z}\rvert = \lvert z\rvert$;	8) $\overline{z_1/z_2} = \overline{z_1}/\overline{z_2}$;
4) $\arg(\overline{z}) = 2\pi - \arg(z)$;	9) $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.
5) $z\,\overline{z} = \lvert z\rvert^2$;	

Упражнение. Вычислить:

а) $\overline{(1-2i)(2+i)^2 + 5i}$; б) $\overline{\left(\dfrac{2-i}{1+i}\right)}$.

Ответы: а) $11 - 3i$; б) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\, i$

1.18. Основная теорема алгебры

Определение 1.8. *Функция $P_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ вида*

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}),$$

где $z, a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$ и $a_0 \neq 0$, называется многочленом степени n.

Определение 1.9. *Число z_0 называется корнем многочлена $P_n(z)$, если $P_n(z_0) = 0$.*

Теорема 1.1. *Всякий многочлен $P_n(z)$ степени $n > 0$ имеет хотя бы один комплексный корень.*

Число z_0 является корнем многочлена $P_n(z)$ тогда и только тогда, когда $P_n(z)$ делится без остатка на двучлен $z - z_0$.

Если $P_n(z)$ делится без остатка на $(z - z_0)^k$, $k \geq 1$, но не делится на $(z - z_0)^{k+1}$, то z_0 называется корнем кратности k многочлена $P_n(z)$.

Следствие 1.1. *Для многочленов на множестве комплексных чисел справедливо:*

1. *Всякий многочлен $P_n(z)$ степени $n > 0$ имеет ровно n корней (с учетом их кратности).*

2. *Если $z_1, z_2, \ldots, z_m$ есть корни многочлена $P_n(z)$ степени $n > 0$ кратности соответственно $k_1, k_2, \ldots, k_m$ ($\sum_{i=1}^{m} k_i = n$), то его можно разложить на линейные множители, т. е. представить в виде*

$$P_n(z) = a_0(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \cdots (z - z_m)^{k_m}.$$

3. *Если $z_0 = x_0 + iy_0$ есть корень многочлена $P_n(z)$ с вещественными коэффициентами, то $\overline{z_0} = x_0 - iy_0$ тоже есть корень этого многочлена той же кратности, что и z_0.*

Если многочлен $P_n(z)$ с вещественными коэффициентами разложен на линейные множители

$$P_n(z) = a_0(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \cdots (z - z_m)^{k_m},$$

то объединяя скобки, соответствующие комплексно-сопряженным корням, можно разложить этот многочлен в произведение линейных и квадратичных множителей с вещественными коэффициентами.

Пример. Найти корни многочлена $P_4(z) = z^4 + z^2 + 1$ и разложить его на множители.

Решение. Решим уравнение $z^4 + z^2 + 1 = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} w = z^2 \\ w^2 + w + 1 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} w = z^2 \\ \left[\begin{array}{l} w = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \\ w = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \end{array} \right. \end{cases} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \\ z^2 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_{1,2} = \pm\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2} \\ z_{3,4} = \pm\dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2} \end{array} \right. .$$

Разложим $P_4(z)$ на линейные множители:

$$z^4 + z^2 + 1 = \left(z - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z + \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Разложим $P_4(z)$ на квадратичные множители, объединяя скобки, соответствующие комплексно-сопряженным корням:

$$z^4 + z^2 + 1 = (z^2 - z + 1)(z^2 + z + 1).$$

Упражнение. Разложить на линейные множители многочлен $z^3 + 1$.

Ответ: $z^3 + 1 = (z + 1)\left(z - \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z - \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)$.

1.19. Множества точек на плоскости

Рассмотрим некоторые часто встречающиеся множества на $\mathbb{C}$ и изобразим их на комплексной плоскости:

1) $|z_1 - z_2|$ – расстояние между z_1 и z_2 (рис. 1.9);

2) $|z - z_0| = R$ – окружность радиуса R с центром в точке z_0;

3) $|z - z_0| < R(> R)$ – круг (внешность круга) радиуса R с центром в точке z_0 (рис. 1.10);

4) $r < |z - z_0| < R$ – кольцо с центром в точке z_0 и радиусами $r < R$ (рис. 1.11);

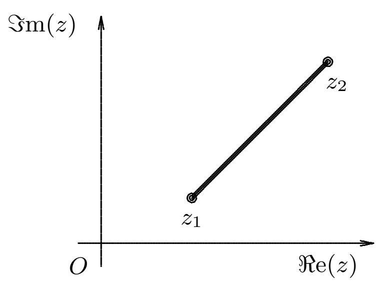


Рис. 1.9

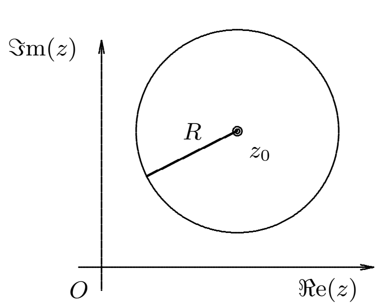


Рис. 1.10

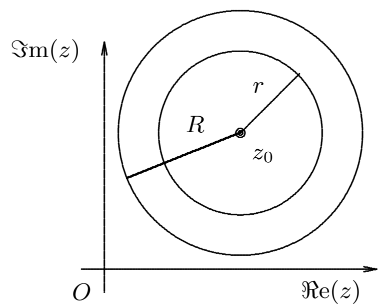


Рис. 1.11

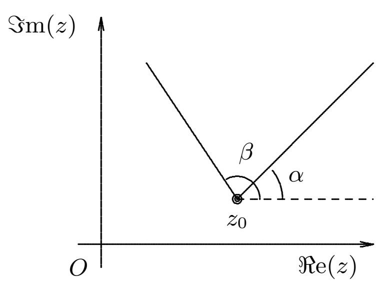


Рис. 1.12

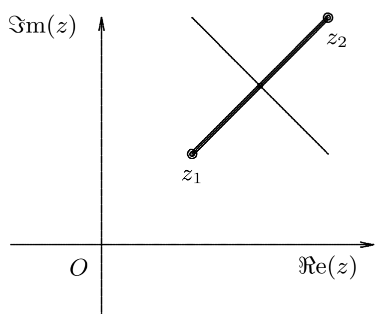


Рис. 1.13

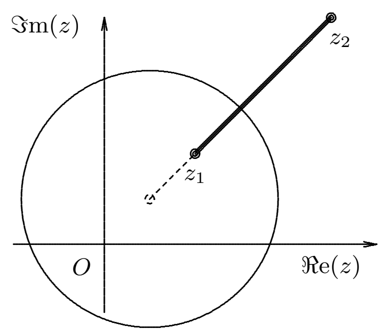


Рис. 1.14

5) $\alpha < \mathrm{Arg}(z - z_0) < \beta$ – сектор с вершиной в точке z_0, образованный лучами, проходящими под углами α и β к положительной полуоси (рис. 1.12);

6) $|z - z_1| = |z - z_2|$ – срединный перпендикуляр к отрезку $[z_1, z_2]$ (рис. 1.13);

7) $|z - z_1| = \lambda|z - z_2|$ $(\lambda > 0, \lambda \neq 1)$ – окружность с центром на прямой (z_1, z_2) (рис. 1.14);

8) $|z-z_1|+|z-z_2| = 2a$ – эллипс с фокусами в z_1 и z_2, если $|z_1-z_2| < 2a$ (рис. 1.15);

9) $|z - z_1| - |z - z_2| = 2a$ – ветвь гиперболы с фокусами в z_1 и z_2, если $|z_1 - z_2| > 2a$ (рис. 1.16).

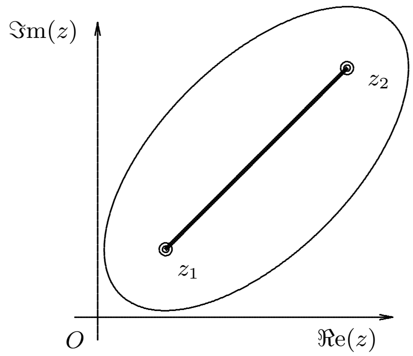


Рис. 1.15

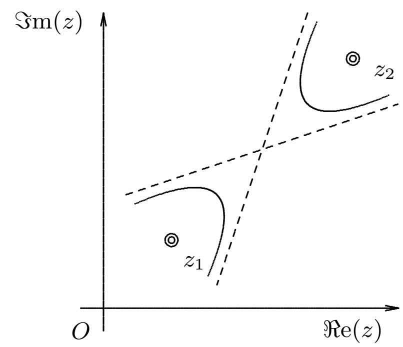


Рис. 1.16

В заключение рекомендуем выполнить упражнения.

1.20. Упражнения

1.1. Найти число, "обратное" к $z = (-3, -4)$.
1.2. Доказать, что $i^5 = i$; $i^6 = -1$.
Вычислить
1.3. $(1 - 2i)(2 + i)^2 + 5i$. **1.4.** $\dfrac{2 - i}{1 + i}$.
1.5. Найти модуль комплексного числа $z = \dfrac{5\sqrt{3} + 5i}{2}$.
1.6. Доказать $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$.
1.7. Найти главное значение аргумента из интервала $[0, 2\pi)$ числа $z = \dfrac{5\sqrt{3} - 5i}{2}$.
1.8. Записать в тригонометрической форме число $z = \dfrac{5\sqrt{3} - 5i}{2}$.
1.9. Записать в показательной форме $z = \dfrac{5\sqrt{3} - 5i}{2}$.
1.10. Решить уравнение $z^4 = 4$.
1.11. Решить уравнение $z^2 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.
1.12. Решить уравнение $z^2 + (4 + 3i)z + 1 + 5i = 0$.
1.13. Решить уравнение $e^z = \dfrac{5\sqrt{3} - 5i}{2}$.
1.14. Доказать, что $|\cos(z)|^2 = \cos^2(x)\mathrm{ch}^2(y) + \sin^2(x)\mathrm{sh}^2(y)$. Указать такие z, для которых $|\cos(z)| > 1$.
Вычислить
1.15. $\overline{(1 + 2i)(2 - i)^2 - 5i}$. **1.16.** $\overline{\left(\dfrac{2 + i}{1 - i}\right)}$.
1.17. Разложить на линейные множители $z^3 - 1$.

В упражнениях 1.18 – 1.30 изобразить на комплексной плоскости множества точек, заданных соотношениями.

1.18. $|z-1+i|=2$. **1.19.** $|z+2-i|<3(>3)$.
1.20. $1<|z+i|<2$. **1.21.** $\pi<\arg(z-2-i)<3\pi/2$.
1.22. $|z+2i|=|z+3-i|$. **1.23.** $|z-2-2i|=2|z-5-5i|$.
1.24. $|z-3i|+|z-4|=6$. **1.25.** $|z-2i|-|z+2i|=2$.

1.26. $|z+1+i|\le 1,\quad 3\pi/4<\arg(z+1+i)<\pi$.
1.27. $|z-i|\le 1,\quad |z+1|>2$.
1.28. $|z-i|\le 1,\quad -\pi/2<\mathrm{Arg}(z-i)<\pi/4$.
1.29. $|z+i|<1,\quad -3\pi/4<\mathrm{Arg}(z)<-\pi/4$.
1.30. $|z|>1,\quad -1<\Im\mathrm{m}(z)\le 2,\quad 0\le\Re\mathrm{e}(z)<2$.

В упражнениях 1.31 – 1.35 решить квадратное уравнение D_1z^2+ $+D_2z+D_3=0$ и записать его корни в алгебраической форме.
1.31. $(-3+i)z^2+(-12+4i)z+(-15+5i)=0$. **1.32.** $(-1+i)z^2+(2-6i)z+(-6+6i)=0$.
1.33. $(3-i)z^2+(2+6i)z+(-15+5i)=0$. **1.34.** $(1-i)z^2+(-5+3i)z+(6-12i)=0$.
1.35. $(-2+i)z^2+(4+3i)z+(13-9i)=0$.

В упражнениях 1.36 – 1.40 найти модуль и главное значение аргумента из интервала $[0,2\pi)$ комплексного числа a и записать его в показательной и тригонометрической формах.
1.36. $a=\dfrac{5-5i}{\sqrt{2}}$. **1.37.** $a=\dfrac{-9\sqrt{3}-9i}{2}$. **1.38.** $a=\dfrac{-7-7i}{\sqrt{2}}$.
1.39. $a=\dfrac{7-7\sqrt{3}i}{2}$. **1.40.** $a=\dfrac{5\sqrt{3}+5i}{2}$.

В упражнениях 1.41 – 1.45 решить уравнение $e^z=b$.
1.41. $b=\dfrac{7-7\sqrt{3}i}{2}$. **1.42.** $b=\dfrac{-3\sqrt{3}+3i}{2}$. **1.43.** $b=\dfrac{7\sqrt{3}-7i}{2}$. **1.44.** $b=\dfrac{2+2i}{\sqrt{2}}$.
1.45. $b=\dfrac{5\sqrt{3}+5i}{2}$.

В упражнениях 1.46 – 1.50 представить в алгебраической форме значения тригонометрических функций.
1.46. $\sin(\pi/6-i)$. **1.47.** $\sin(\pi/4+2i)$. **1.48.** $\cos(\pi/6+i)$. **1.49.** $\sin(\pi/3+i)$.
1.50. $\cos(\pi/4-2i)$.

В упражнениях 1.51 – 1.55 методом подстановки решить систему линейных алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами при условии, что значение одного из неизвестных задано.

1.51. $z_1 = 1 + 2i,$ $\begin{cases} z_1+(1-i)z_2+(1-i)z_3=5-2i, \\ (2+i)z_1+(2-2i)z_2+(3+i)z_3=7+4i, \\ (-2+i)z_1+(-1-i)z_2+(-6+8i)z_3 = -27+6i. \end{cases}$

1.52. $z_1 = 2 + 2i,$ $\begin{cases} z_1+(1+i)z_2+(1+i)z_3=1+3i, \\ (1+i)z_1+(1+3i)z_2= -5+9i, \\ (-2-i)z_1+(-2)z_2+(2-4i)z_3= -10-8i. \end{cases}$

1.53. $z_2 = -1 - 2i,$ $\begin{cases} z_1+(-1-i)z_2+(1+i)z_3= -3+5i, \\ (1-i)z_1+(-3-i)z_2+(2+2i)z_3= -3+13i, \\ (1-i)z_1+(-2+2i)z_2+(5-i)z_3=11+11i. \end{cases}$

1.54. $z_3 = 2 - 2i,$ $\begin{cases} z_1+(-1-i)z_2+(-1+i)z_3= -3+2i, \\ (-1+2i)z_1+(2)z_2+(1-3i)z_3= -11i, \\ (-1-2i)z_1+(2+2i)z_2+(-2)z_3=2+13i. \end{cases}$

1.55. $z_1 = -1 + i,$ $\begin{cases} z_1+(-1-i)z_2+(1+i)z_3= -5+5i, \\ (2-i)z_1+(-2)z_2+(3+3i)z_3= -6+16i, \\ (-1+2i)z_1+(3-3i)z_2+(-2-2i)z_3= -2-18i. \end{cases}$

В упражнениях 1.56 – 1.60 методом подстановки решить систему линейных алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами.

1.56. $\begin{cases} z_1+(-1-2i)z_2+(-1-i)z_3=4+3i, \\ (-1-2i)z_1+(-4+2i)z_2+(-2+6i)z_3=8+i, \\ (-1+i)z_1+(8+i)z_2+(-5-6i)z_3= -42+i. \end{cases}$

1.57. $\begin{cases} z_1+(-1+i)z_2+(-1-i)z_3=4-i, \\ (-1-i)z_1+(-i)z_2+(-2-4i)z_3=-12+i, \\ (-1-i)z_1+(5-i)z_2+(7+5i)z_3=-4-14i. \end{cases}$

1.58. $\begin{cases} z_1+(2+i)z_2+(-1-i)z_3=-3i, \\ (1-i)z_1+(4+i)z_2+(-3+3i)z_3=2-8i, \\ (2-2i)z_1+(6-7i)z_2+(-4i)z_3=-19-i. \end{cases}$

1.59. $\begin{cases} z_1+(-2+2i)z_2+(1+2i)z_3=-6-2i, \\ (1-i)z_1+(-1+5i)z_2+(3+5i)z_3=-16-2i, \\ (1+2i)z_1+(-5-5i)z_2+(-6-5i)z_3=21-7i. \end{cases}$

1.60. $\begin{cases} z_1+(-2+i)z_2+(2-i)z_3=3+3i, \\ (-1-i)z_1+(5-i)z_2+(3-3i)z_3=18-12i, \\ (-1-i)z_1+(-3+3i)z_2+(-15-2i)z_3=-39-8i. \end{cases}$

В упражнениях 1.61 – 1.65: а) Записать числа E и F в алгебраической, показательной и/или тригонометрической формах, вычислив их вещественные и мнимые части, модули и главные значения аргументов из интервала $[0,2\pi)$ в долях π .

б) Записать числа EF, E/F в алгебраической форме, вычислив их вещественные и мнимые части, а числа $\overline{E}F$, $E/\overline{F}$ – в показательной и/или тригонометрической форме, вычислив их модули и главные значения аргументов из интервала $[0,2\pi)$ в долях π (например, $\dfrac{7\pi}{12}$).

1.61. $E=\dfrac{(-3+3i)^{-1}+(-3-3i)^{-1}}{\left(i^{30}+i^{-7}\sin\left(\frac{4\pi}{-6}\right)+i^{14}\cos\left(\frac{4\pi}{-6}\right)\right)^4}$, $F=\dfrac{\left(i^{51}+i^{-97}\sin\left(\frac{4\pi}{-6}\right)+i^{66}\cos\left(\frac{4\pi}{-6}\right)\right)^{-3}}{(2+i)^3-(2-i)^3}$.

1.62. $E=\dfrac{(3+i)^4+(3-i)^4}{\left(i^{59}+i^{-65}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+i^{-10}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^4}$, $F=\dfrac{\left(i^{79}+i^{-76}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+i^{93}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^4}{(1-2i)^{-4}-(1+2i)^{-4}}$.

1.63. $E=\dfrac{(2+i)^2+(2-i)^2}{\left(i^{-9}+i^{46}\sin\left(\dfrac{\pi}{-4}\right)+i^{27}\cos\left(\dfrac{\pi}{-4}\right)\right)^{-2}}$, $F=\dfrac{\left(i^{64}+i^{94}\sin\left(\dfrac{\pi}{-4}\right)+i^{35}\cos\left(\dfrac{\pi}{-4}\right)\right)^2}{(-1-2i)^3-(-1+2i)^3}$.

1.64. $E=\dfrac{(3-i)^3+(3+i)^3}{\left(i^{65}+i^{9}\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)+i^{48}\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)^{-3}}$, $F=\dfrac{\left(i^{50}+i^{5}\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)+i^{22}\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)^3}{(2-i)^{-1}-(2+i)^{-1}}$.

1.65. $E=\dfrac{(-1+2i)^2+(-1-2i)^2}{\left(i^{-5}+i^{33}\sin\left(\dfrac{5\pi}{-3}\right)+i^{-70}\cos\left(\dfrac{5\pi}{-3}\right)\right)^{-3}}$, $F=\dfrac{\left(i^{-6}+i^{2}\sin\left(\dfrac{5\pi}{-3}\right)+i^{-7}\cos\left(\dfrac{5\pi}{-3}\right)\right)^{-4}}{(2+i)^{-1}-(2-i)^{-1}}$.

В упражнениях 1.66 – 1.70 решить уравнение $B_1|z|^2 + B_2z + B_3 = 0$, записав его корни z_1 и z_2 в алгебраической форме. Дать геометрическую трактовку решения.

1.66. $(-2+i)|z|^2+(-5i)z+(16-28i)=0$. **1.67.** $(-3-3i)|z|^2+(9-3i)z-6=0$.
1.68. $(-2-2i)|z|^2+(-2+10i)z+52i=0$. **1.69.** $(1-2i)|z|^2+(-4+3i)z=0$.
1.70. $(3-2i)|z|^2+(5+i)z+(-8+i)=0$.

В упражнениях 1.71 – 1.75 на комплексной плоскости найти множество точек, удовлетворяющих неравенству $|C_1z+C_2| < |C_3z+C_4|$.

1.71. $|(-1+i)z+(2+3i)| < |(2+2i)z+(-2+2i)|$.
1.72. $|(-1-2i)z+(3-i)| < |(2+2i)z+(1+i)|$.
1.73. $|(-3-3i)z+(1+3i)| < |(2+i)z+(-3+3i)|$.
1.74. $|(-1+2i)z+(2+2i)| < |(-1-2i)z+(1+2i)|$.
1.75. $|(-1+2i)z+(1+3i)| < |(2-3i)z+(2+2i)|$.

В упражнениях 1.76 – 1.80 решить уравнение $D_1z^{2p} + D_2z^p + D_3 = 0$, сделав предварительно замену $w = z^p$. Записать его корни в показательной форме и изобразить их на комплексной плоскости.

1.76. $(1-2i)z^6+(7+11i)z^3+(-18+i)=0$.
1.77. $(-2-2i)z^8+(10-2i)z^4+20i=0$.
1.78. $(-3-i)z^{-8}+(5+5i)z^{-4}+(-20-10i)=0$.
1.79. $(3+2i)z^6+(-20-9i)z^3+(51+21i)=0$.
1.80. $(2-2i)z^{-8}-4iz^{-4}+(-10-10i)=0$.

Ответы

1.1. $z^{-1} = (-3/25, 4/25)$. **1.3.** $11 + 3i$. **1.4.** $\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}i$. **1.5.** $|z| = 5$. **1.7.** $\arg(z) = \dfrac{11\pi}{6}$. **1.8.** $z = 5\left(\cos\dfrac{11\pi}{6} + i\sin\dfrac{11\pi}{6}\right)$. **1.9.** $z = 5e^{i11\pi/6}$. **1.10.** $z_0 = \sqrt{2}$; $z_1 = i\sqrt{2}$; $z_2 = -\sqrt{2}$; $z_3 = -i\sqrt{2}$. **1.11.** $z_{1,2} = \pm\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **1.12.** $z_1 = -1 - i$; $z_2 = -3 - 2i$. **1.13.** $z = \ln(5) + i(11\pi/6 + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$. **1.15.** $11 + 3i$. **1.16.** $\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}\,i$. **1.17.** $z^3 - 1 =$

$= (z-1)\left(z+\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z+\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$. **1.18.** Окружность радиуса 2 с центром в точке $z_0 = 1-i$. **1.19.** Круг (внешность круга) радиуса 3 с центром в точке $z_0 = -2+i$. **1.20.** Кольцо с центром в точке $z_0 = -i$ и радиусами 1 и 2. **1.21.** Сектор с вершиной в точке $z_0 = 2+i$, образованный лучами, проходящими под углами π и $3\pi/2$ к положительной полуоси. **1.22.** Срединный перпендикуляр к отрезку $[-2i, -3+i]$. **1.23.** Окружность с центром в точке $z_0 = 6+6i$ и радиуса $\sqrt{8}$. **1.24.** Эллипс с фокусами в точках $3i$ и 4 и полуосями 3 и $\sqrt{11}/2$. **1.25.** Ветвь гиперболы с фокусами в точках $2i$ и $-2i$ и полуосями 1 и $\sqrt{3}$. **1.26.** Сектор круга радиуса 1 с центром в точке $-1-i$ и $\varphi \in (3\pi/4, \pi)$. **1.27.** Пересечение круга радиуса 1 с центром в точке i и внешности круга радиуса 2 с центром в точке -1. **1.28.** Сектор круга радиуса 1 с центром в точке i и $\varphi \in (-\pi/2, \pi/4)$. **1.29.** Пересечение внутренности круга радиуса 1 с центром в точке $-i$ и бесконечного сектора с вершиной в начале координат и $\varphi \in (-3\pi/4, -\pi/4)$. **1.30.** Пересечение внешности круга радиуса 1 с центром в начале координат и прямоугольника с вершинами в точках $(0,-1)$, $(0,2)$, $(2,2)$ и $(2,-1)$. **1.31.** $z_1 = -2-i$, $z_2 = -2+i$. **1.32.** $z_1 = 3-3i$, $z_2 = 1+i$. **1.33.** $z_1 = -2-i$, $z_2 = 2-i$. **1.34.** $z_1 = 1-2i$, $z_2 = 3+3i$. **1.35.** $z_1 = 3+i$, $z_2 = -2+i$. **1.36.** $|a| = 5$, $\arg(a) = 7\pi/4$. **1.37.** $|a| = 9$, $\arg(a) = \dfrac{7\pi}{6}$. **1.38.** $|a| = 7$, $\arg(a) = \dfrac{5\pi}{4}$. **1.39.** $|a| = 7$, $\arg(a) = \dfrac{5\pi}{3}$. **1.40.** $|a| = 5$, $\arg(a) = \dfrac{\pi}{6}$. **1.41.** $z = \ln(7) + i\left(\dfrac{5\pi}{3} + 2\pi k\right)$. **1.42.** $z = \ln(3) + i\left(\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)$. **1.43.** $z = \ln(7) + i\left(\dfrac{11\pi}{6} + 2\pi k\right)$. **1.44.** $z = \ln(2) + i(\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k)$. **1.45.** $z = \ln(5) + i(\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k)$. **1.46.** $\dfrac{1}{4}(e+e^{-1}) - i\dfrac{\sqrt{3}}{4}(e-e^{-1})$.
1.47. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}(e^2+e^{-2}) + i\dfrac{\sqrt{2}}{4}(e^2-e^{-2})$. **1.48.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}(e+e^{-1}) - i\dfrac{1}{4}(e-e^{-1})$.
1.49. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}(e+e^{-1}) + i\dfrac{1}{4}(e-e^{-1})$. **1.50.** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}(e^2+e^{-2}) + i\dfrac{\sqrt{2}}{4}(e^2-e^{-2})$.
1.51. $z_1 = 1+2i$; $z_2 = 2-i$; $z_3 = 2+i$. **1.52.** $z_1 = 2+2i$; $z_2 = 1+2i$; $z_3 = -1-i$. **1.53.** $z_1 = -1-i$; $z_2 = -1-2i$; $z_3 = 1+2i$. **1.54.** $z_1 = -2+i$; $z_2 = 2+i$; $z_3 = 2-2i$. **1.55.** $z_1 = -1+i$; $z_2 = 1-2i$; $z_3 = 1+2i$.
1.56. $z_1 = 2-i$; $z_2 = -3+i$; $z_3 = 2-i$. **1.57.** $z_1 = 1-2i$; $z_2 = -2-3i$; $z_3 = 1-i$. **1.58.** $z_1 = 1-2i$; $z_2 = -1-i$; $z_3 = -1-i$. **1.59.** $z_1 = -1+2i$; $z_2 = -1+i$; $z_3 = -1+2i$. **1.60.** $z_1 = 3-2i$; $z_2 = 3-i$; $z_3 = 2+i$.
1.61. $E = 0.17 - 0.29i$; $|E| = 0.33$; $\arg(E) = \dfrac{5\pi}{3}$; $F = 0.23 - 0.23i$; $|F| =$

$= 0.33$; $\arg(F) = \dfrac{7\pi}{4}$; $EF = -0.03 - 0.11i$; $E/F = 0.98 - 0.26i$; $|\overline{E}F| =$ $= 0.11$; $\arg(\overline{E}F) = \dfrac{\pi}{12}$; $|E/\overline{F}| = 1.02$; $\arg(E/\overline{F}) = \dfrac{17\pi}{12}$. **1.62.** $E =$ $= -3.11 + 5.39i$; $|E| = 6.22$; $\arg(E) = \dfrac{2\pi}{3}$; $F = .81 + .47i$; $|F| = 0.93$; $\arg(F) = \dfrac{\pi}{6}$; $EF = -5.04 + 2.91i$; $E/F = 0.00 + 6.66i$; $|\overline{E}F| = 5.82$; $\arg(\overline{E}F) = \dfrac{3\pi}{2}$; $|E/\overline{F}| = 6.66$; $\arg(E/\overline{F}) = \dfrac{5\pi}{6}$. **1.63.** $E = -14.49 - 14.49i$; $|E| = 20.49$; $\arg(E) = \dfrac{5\pi}{4}$; $F = -0.60 - 0.60i$; $|F| = 0.85$; $\arg(F) = \dfrac{5\pi}{4}$; $EF = 0.00 + 17.49i$; $E/F = 24.00 - 0.00i$; $|\overline{E}F| = 17.49$; $\arg(\overline{E}F) = 0$; $|E/\overline{F}| = 24.00$; $\arg(E/\overline{F}) = \dfrac{\pi}{2}$. **1.64.** $E = -6.18 + 14.91i$; $|E| = 16.14$; $\arg(E) = \dfrac{5\pi}{8}$; $F = -0.43 - 1.04i$; $|F| = 1.12$; $\arg(F) = \dfrac{11\pi}{8}$; $EF =$ $= 18.09 - 0.00i$; $E/F = -10.18 - 10.18i$; $|\overline{E}F| = 18.09$; $\arg(\overline{E}F) = \dfrac{3\pi}{4}$; $|E/\overline{F}| = 14.40$; $\arg(E/\overline{F}) = 0$. **1.65.** $E = 0.59 + 0.59i$; $|E| = 0.83$; $\arg(E) = \dfrac{\pi}{4}$; $F = -0.16 + 0.09i$; $|F| = 0.18$; $\arg(F) = \dfrac{5\pi}{6}$; $EF =$ $= -0.14 - 0.04i$; $E/F = -1.20 - 4.48i$; $|\overline{E}F| = 0.15$; $\arg(\overline{E}F) = \dfrac{7\pi}{12}$; $|E/\overline{F}| = 4.64$; $\arg(E/\overline{F}) = \dfrac{13\pi}{12}$. **1.66.** $z_1 = -3 + 2i$; $z_2 = -2.4 + 3.2i$. **1.67.** $z_1 = 1 + i$; $z_2 = 0.8 + 0.6i$. **1.68.** $z_1 = -3 - 2i$; $z_2 = -1 - 5i$. **1.69.** $z_1 = 2 - i$; $z_2 = 0$. **1.70.** $z_1 = -1 + 2i$; $z_2 = 1$. **1.71.** $(x - 0.17)^2 + (y + 2.17)^2 > > 2.36^2$. **1.72.** $(x + 1.67)^2 + (y - 2.33)^2 > 3.30^2$. **1.73.** $(x - 0.69)^2 + (y - 1.15)^2 < 1.56^2$. **1.74.** $7x + 6y - 1.5 > 0$. **1.75.** $(x - 0.88)^2 + (y + 1.88)^2 > 2.13^2$. **1.76.** $w = z^3$; $w_1 = 1 - 2i$; $w_2 = 2 - 3i$; $z_k^{(1)} = 1.31 \exp\left(1.73i + \dfrac{2\pi ki}{3}\right)$, $k = \overline{0,2} z_k^{(2)} =$ $= 1.53 \exp\left(1.77i + \dfrac{2\pi ki}{3}\right)$, $k = \overline{0,2}$. **1.77.** $w = z^4$, $w_1 = 3 - i$; $w_2 = -1 - 2i$; $z_k^{(1)} = 1.33 \exp\left(1.49i + \dfrac{\pi ki}{2}\right)$, $k = \overline{0,3}$; $z_k^{(2)} = 1.22 \exp\left(1.06i + \dfrac{\pi ki}{2}\right)$, $k = \overline{0,3}$. **1.78.** $w = z^4$; $w_1 = 1 - 2i$; $w_2 = 1 + 3i$; $z_k^{(1)} = 0.82 \exp\left(-1.29i - \right.$ $\left. - \dfrac{\pi ki}{2}\right)$, $k = \overline{0,3}$, $z_k^{(2)} = 0.75 \exp\left(-0.31i - \dfrac{\pi ki}{2}\right)$, $k = \overline{0,3}$. **1.79.** $w = z^3$; $w_1 = 3 + 2i$, $w_2 = 3 - 3i$; $z_k^{(1)} = 1.53 \exp\left(0.20i + \dfrac{2\pi ki}{3}\right)$, $k = \overline{0,2}$, $z_k^{(2)} =$

$= 1.62\exp\left(1.83i + \dfrac{2\pi ki}{3}\right)$, $k = \overline{0,2}$. **1.80.** $w = z^4$; $w_1 = -2 - i$, $w_2 = 1 + 2i$; $z_k^{(1)} = 0.82\exp\left(-0.90i - \dfrac{\pi ki}{2}\right)$, $k = \overline{0,3}$, $z_k^{(2)} = 0.82\exp\left(-0.28i - \dfrac{\pi ki}{2}\right)$, $k = \overline{0,3}$.

2. Системы линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса – Жордана

2.1. Системы линейных алгебраических уравнений. Основные понятия

Определение 2.1. *Система вида*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2, \\ \dots \qquad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = b_n, \end{cases}$$

где $a_{11}, ..., a_{nm}$, $b_1, ..., b_n$ – заданные числа , а $x_1, ..., x_m$ – неизвестные, называется системой n линейных алгебраических уравнений с m неизвестными (СЛАУ). Значения неизвестных, обращающие каждое уравнение системы в верное числовое равенство, называются решением системы.

Система, имеющая хотя бы одно решение, называется совместной, а в противном случае – несовместной.

Уравнение вида $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_m = 0$ называется нулевым.

Так как нулевое уравнение верно при любых значения $x_1, x_2, \dots, x_m$, то обычно его удаляют из системы.

Если число уравнений совпадает с числом неизвестных ($n = m$), то систему называют *квадратной.*

С системой уравнений можно связать несколько матриц – прямоугольных таблиц чисел:

$$A = [a_{ik}]_{n\times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & a_{ik} & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix},$$

где A – матрица коэффициентов системы, X – столбец неизвестных, B – столбец свободных членов.

Кроме матриц A, B, X рассмотрим еще одну матрицу – расширенную матрицу системы:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{array}\right].$$

Пример. Рассмотрим систему: $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ -2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 4. \end{array}\right.$ Эта система совместна, так как значения неизвестных $x_1 = t$, $x_2 = t + 1$, $x_3 = 2$, где $t \in \mathbb{R}$, есть решения системы.

Расширенная матрица системы имеет вид $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right]$.

2.2. Элементарные преобразования СЛАУ

Определение 2.2. *Две СЛАУ называются равносильными (эквивалентными), если множества их решений совпадают.*

Преобразования СЛАУ, не нарушающие их равносильности, называются допустимыми преобразованиями.

Выделим среди них элементарные и введем обозначения (буква E от слова *Equation*, буква U от слова *Unknown*).

N° п/п	Преобразование системы	Обозначение
1	Перестановка i-го и k-го уравнений	$E_i \leftrightarrow E_k$
2	Перестановка i-го и k-го неизвестных во всех уравнениях, $i, k = \overline{1, m}$	$U_i \leftrightarrow U_k$
3	Умножение i-го уравнения на число $\lambda \neq 0$	λE_i
4	К i-му уравнению прибавить k-е уравнение, умноженное на число λ. При этом k-е уравнение остается неизменным	$E_i + \lambda E_k$
5	Удаление из системы нулевого уравнения	–

Пример. Решить систему уравнений: $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & 2x_2 & + & x_3 & = & 3, \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ -2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 4. \end{array}\right.$

Решение. Поменяем местами первое и второе уравнения и затем к третьему уравнению прибавим удвоенное первое:

$$[E_1 \leftrightarrow E_2] \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ & & 2x_2 & + & x_3 & = & 3, \\ -2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 4. \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow [E_3+2E_1] \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_3 = 6. \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим $x_3 = 2$, из второго $x_2 = 1/2$, из первого $x_1 = -1/2$.

Каждому элементарному преобразованию системы соответствует элементарное преобразование ее расширенной матрицы $[A|B]$. Введем для них обозначения (буква R от слова Row, буква C от слова $Column$).

N° п/п	Преобразование расширенной матрицы	Обозначение
1	Перестановка i-й и k-й строк	$R_i \leftrightarrow R_k$
2	Перестановка i-го и k-го столбцов, $i, k = \overline{1, m}$	$C_i \leftrightarrow C_k$
3	Умножение i-й строки на число $\lambda \neq 0$	λR_i
4	К i-й строке прибавить k-ю строку, умноженную на число λ. При этом k-я строка остается неизменной	$R_i + \lambda R_k$
5	Удаление нулевой строки	–

Итак, при решении СЛАУ можно работать не с самой системой, а с ее расширенной матрицей.

Замечание 2.1. *Если расширенная матрица $[A'|B']$ получена из $[A|B]$ с помощью некоторого элементарного преобразования, например $R_i \leftrightarrow R_k$, то будем писать:*

$[A|B] \xrightarrow{R_i \leftrightarrow R_k} [A'|B']$ *или* $[A|B] \xrightarrow[R_i \leftrightarrow R_k]{} [A'|B']$ *или* $[A|B] \Leftrightarrow [R_i \leftrightarrow R_k] \Leftrightarrow [A'|B']$.

Замечание 2.2. *Над столбцами коэффициентов системы удобно указывать номера соответствующих неизвестных. В случае перестановки столбцов в расширенной матрице системы изменяется порядок следования неизвестных. Если вместе с перестановкой столбцов в матрице переставлять номера, записанные над столбцами, тогда порядок следования неизвестных будет автоматически запоминаться.*

Пример. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

Решение. Запишем систему с помощью расширенной матрицы:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ -2 & 2 & 1 & 4\end{array}\right] \Longleftrightarrow [R_1 \leftrightarrow R_2] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 3\\ -2 & 2 & 1 & 4\end{array}\right] \Longleftrightarrow [R_3 + 2R_1] \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{lrr|l} 1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 3 & 6\end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{c} 1/3R_3\\ R_1 - R_3\\ R_2 - R_3\end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{lrr|r} 1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right] \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{c} 1/2R_2\\ R_1 + R_2\end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & -1/2\\ 0 & 1 & 0 & 1/2\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right] \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1/2,\\ x_2 = 1/2,\\ x_3 = 2.\end{cases}$$

2.3. Метод Гаусса – Жордана решения СЛАУ

Рассмотрим 2 частных случая СЛАУ и ее расширенной матрицы:

1. Система (α): число уравнений системы равно числу неизвестных и расширенная матрица системы имеет вид

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & b_1\\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_2\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_n\end{array}\right] \Longleftrightarrow \begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_m = b_1,\\ 0x_1 + 1x_2 + \dots + 0x_m = b_2,\\ \quad\dots \qquad\quad \dots \quad \dots \quad \dots\\ 0x_1 + 0x_2 + \dots + 1x_m = b_n,\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = b_1,\\ x_2 = b_2,\\ \dots\\ x_n = b_n.\end{cases}$$

Решать такую систему не нужно. Решение уже есть.

2. Система (β): число уравнений системы меньше числа неизвестных и расширенная матрица системы имеет вид

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1,n+1} & \dots & a_{1m} & b_1\\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2,n+1} & \dots & a_{2m} & b_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n,n+1} & \dots & a_{nm} & b_n\end{array}\right].$$

Соответствующая ей система имеет вид

$$\begin{cases} x_1 & & & + a_{1,n+1}x_{n+1} + & \dots & + a_{1m}x_m & = & b_1,\\ & x_2 & & + a_{2,n+1}x_{n+1} + & \dots & + a_{2m}x_m & = & b_2,\\ \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ & & x_n & + a_{n,n+1}x_{n+1} + & \dots & + a_{nm}x_m & = & b_n.\end{cases}$$

Решение ее находится так: неизвестные $x_1, \dots, x_n$ (называемые базисными) выражают через неизвестные $x_{n+1},\ldots,x_m$ (называемые свободными):

$$\begin{cases} x_1 & & & = b_1 - a_{1,n+1}x_{n+1} - \ldots - a_{1m}x_m, \\ & x_2 & & = b_2 - a_{2,n+1}x_{n+1} - \ldots - a_{2m}x_m, \\ \ldots & \ldots & & \quad\;\; \ldots \qquad\qquad \ldots \qquad \ldots \\ & & x_n & = b_n - a_{n,n+1}x_{n+1} - \ldots - a_{nm}x_m. \end{cases}$$

Придавая свободным неизвестным $x_{n+1},\ldots,x_m$ произвольные значения и вычисляя $x_1,\ldots,x_n$, получим все решения системы.

Итак, системы (α) и (β) решить легко. Система (α) имеет единственное решение, система (β) имеет бесконечно много решений.

Идея метода Гаусса – Жордана (полного исключения) состоит в том, чтобы с помощью допустимых элементарных преобразований 1–5 привести расширенную матрицу системы к виду (α) или (β), или убедиться, что система несовместна, если в процессе преобразований появилась строка вида $[0\ 0\ \ldots\ 0 \mid b]$, где $b \neq 0$, что соответствует уравнению: $0x_1+0x_2+\cdots+0x_m = b$, не имеющему решений.

2.4. Алгоритм метода Гаусса – Жордана

I шаг:

1) переставляя строки (столбцы), начиная с первой (первого), добиваемся того, чтобы элемент (1,1) расширенной матрицы был $\neq 0$;

2) делим на него все элементы первой строки;

3) домножая первую строку на подходящие множители и прибавляя ее к остальным строкам, обращаем в нуль все элементы первого столбца, кроме первого (т. е. исключаем x_1 из всех остальных уравнений системы);

4) если в результате преобразований появилась нулевая строка, исключаем ее из расширенной матрицы;

5) если появилась строка вида $[0\ 0\ \ldots\ 0 \mid b]$, где $b \neq 0$, делаем вывод, что система несовместна, и прекращаем выполнение алгоритма.

В результате I шага расширенная матрица системы примет вид

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right].$$

Если после I шага не удалось привести расширенную матрицу к виду (α) или (β), то переходим ко второму шагу.

II шаг:

1) переставляя строки (столбцы), начиная с второй (второго), добиваемся того, чтобы элемент (2,2) расширенной матрицы был $\neq 0$;

2) делим на него все элементы второй строки;

3) домножая вторую строку на подходящие множители и прибавляя ее к остальным строкам, обращаем в нуль все элементы второго столбца, кроме второго (т. е. исключаем x_2 из всех остальных уравнений системы);

4) если в результате преобразований появилась нулевая строка, исключаем ее из расширенной матрицы;

5) если появилась строка вида $[0\ 0\ \dots\ 0 \mid b]$, где $b \neq 0$, делаем вывод, что система несовместна, и прекращаем выполнение алгоритма.

В результате II шага расширенная матрица системы примет вид

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \end{array}\right].$$

Если после II шага не удалось привести расширенную матрицу к виду (α) или (β), то переходим к третьему шагу и т. д.

Работа алгоритма может закончиться одним из трех исходов:

1) обнаружится несовместность системы;

2) получится расширенная матрица вида (α); в этом случае система имеет единственное решение;

3) получится расширенная матрица вида (β); в этом случае система имеет бесконечно много решений.

Замечание 2.3. *Чтобы процесс вычислений был устойчивым (ошибки, связанные с конечностью разрядной сетки вычислительного устройства, не накапливались), в п. 1 каждого шага стараются, чтобы после перестановки строк (столбцов) на главной диагонали оказался элемент не просто отличный от нуля, а имеющий наибольший модуль. Тогда при делении на него в п. 2 не будет теряться точность вычислений.*

Такая модификация рассмотренного метода называется методом Гаусса – Жордана полного исключения с *выбором главного элемента.*

Пример. Методом Гаусса – Жордана полного исключения решить систему уравнений: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 8, \\ 9x_1 + 10x_2 + 11x_3 = 12. \end{cases}$

Решение.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{c} R_2 - 5R_1 \\ R_3 - 9R_1 \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \end{array}\right] \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[-\frac{1}{4}R_2\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{c} R_1 - 2R_2 \\ R_3 + 8R_2 \end{array}\right] \Longleftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & x_3 & = & -2, \\ x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcr} x_1 & = & -2 & + & x_3, \\ x_2 & = & 3 & - & 2x_3. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{(-2 + x_3; 3 - 2x_3; x_3), \quad x_3 \in \mathbb{R}\}$.

Пример. Методом Гаусса–Жордана решить систему уравнений:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2z_1 & + & (1-i)z_2 & & & = & 0, \\ (1+i)z_1 & + & 2z_2 & - & (1+i)z_3 & = & 0, \\ & & (-1+i)z_2 & + & 2z_3 & = & 0. \end{array}\right.$$

Решение. $\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1-i & 0 & 0 \\ 1+i & 2 & -1-i & 0 \\ 0 & -1+i & 2 & 0 \end{array}\right] \Longleftrightarrow [0.5R_1] \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0.5(1-i) & 0 & 0 \\ 1+i & 2 & -1-i & 0 \\ 0 & -1+i & 2 & 0 \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[\; R_2 - (1+i)R_1 \;\right] \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{lrr|r} 1 & 0.5(1-i) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1-i & 0 \\ 0 & -1+i & 2 & 0 \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{c} R_1 - 0.5(1-i)R_2 \\ R_3 + (1-i)R_2 \end{array}\right] \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1-i & 0 \end{array}\right] \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcr} z_1 & & + & z_3 & = 0, \\ & z_2 & - & (1+i)z_3 & = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z_1 = -z_3, \\ z_2 = (1+i)z_3, \\ z_3 \in \mathbb{C}. \end{array}\right.$$

Пример. Определить, при каких значениях параметров α, β, γ система из трех уравнений с тремя неизвестными

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} (3\alpha+6)x_1 & + & (6\alpha-\beta+14)x_2 & + & (6\alpha+\beta+10)x_3 & = & \gamma-7, \\ -(2\alpha+4)x_1 & - & (4\alpha-\beta+10)x_2 & - & (4\alpha+\beta+6)x_3 & = & 6, \\ (2\alpha+4)x_1 & + & (4\alpha-\beta+10)x_2 & + & (4\alpha+\beta+5)x_3 & = & -1 \end{array}\right.$$

имеет единственное решение, бесконечное множество решений или не имеет решений.

Решение. Запишем расширенную матрицу системы и элементарными преобразованиями исключим неизвестные x_1 и x_2 из последнего уравнения и неизвестное x_1 из второго уравнения.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3\alpha+6 & 6\alpha-\beta+14 & 6\alpha+\beta+10 & \gamma-7 \\ -2\alpha-4 & -4\alpha+\beta-10 & -4\alpha-\beta-6 & 6 \\ 2\alpha+4 & 4\alpha-\beta+10 & 4\alpha+\beta+5 & -1 \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{c} R_1+R_2 \\ R_3+R_2 \end{array}\right] \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \alpha+2 & 2\alpha+4 & 2\alpha+4 & \gamma-1 \\ -2\alpha-4 & -4\alpha+\beta-10 & -4\alpha-\beta-6 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right] \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow [R_2+2R_1] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \alpha+2 & 2\alpha+4 & 2\alpha+4 & \gamma-1 \\ 0 & \beta-2 & -(\beta-2) & 2\gamma+4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right] \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} (\alpha+2)x_1 & + & (2\alpha+4)x_2 & + & (2\alpha+4)x_3 & = & \gamma-1, \\ & & (\beta-2)x_2 & - & (\beta-2)x_3 & = & 2\gamma+4, \\ & & & & x_3 & = & -5. \end{array}\right.$$

Итак, получили систему:

$$\begin{cases} (\alpha+2)(x_1+2x_2+2x_3)=\gamma-1, \\ (\beta-2)(x_2-x_3)=2\gamma+4, \\ x_3=-5. \end{cases}$$

Если $\begin{cases} \alpha\neq-2 \\ \beta\neq 2 \\ \gamma\in\mathbb{R} \end{cases}$, то сделав преобразования $\left[\dfrac{1}{\alpha+2}E_1\right]$ и $\left[\dfrac{1}{\beta-2}E_2\right]$ получим

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3=\dfrac{\gamma-1}{\alpha+2}, \\ x_2-x_3=\dfrac{2\gamma+4}{\beta-2}, \\ x_3=-5. \end{cases}$$

Из второго уравнения $x_2=\dfrac{2\gamma+4}{\beta-2}-5$. Из первого уравнения находим $x_1=\dfrac{\gamma-1}{\alpha+2}-2x_2-2x_3=\dfrac{\gamma-1}{\alpha+2}-\dfrac{4\gamma+8}{\beta-2}+20$. Итак, при $\begin{cases} \alpha\neq-2, \\ \beta\neq 2, \\ \gamma\in\mathbb{R} \end{cases}$ система имеет единственное решение.

Если $\begin{cases} \alpha = -2, \\ \beta \neq 2, \\ \gamma = 1, \end{cases}$ то после преобразования система примет вид

$$\left[\ \frac{1}{\beta - 2} E_2\ \right] \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 = 0, \\ x_2 - x_3 = \dfrac{2\gamma + 4}{\beta - 2}, \\ x_3 = -5. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим $x_2 = \dfrac{2\gamma + 4}{\beta - 2} - 5$, при этом x_1 произвольно.

Итак, при $\begin{cases} \alpha = -2, \\ \beta \neq 2, \\ \gamma = 1 \end{cases}$ система имеет бесконечное множество решений.

Аналогично, при $\begin{cases} \alpha \neq -2 \\ \beta = 2, \\ \gamma = -2 \end{cases}$ система тоже имеет бесконечное множество решений; в остальных случаях система несовместна.

В заключение рекомендуем выполнить предлагаемые ниже упражнения.

2.5. Упражнения

2.1. Применить к матрице $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 & -4 \\ -1 & 1 & 5 & -3 \\ 2 & -1 & \beta & 4 \\ 2 & 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}$ последовательность преобразований: $C_3 \leftrightarrow C_4$, $-R_1$, $R_2 - R_1$, $R_3 + 2R_1$, $R_4 - R_3$, $-R_2$, $R_3 + 3R_2$, $R_4 + R_2$, $-R_3$, $-R_4$.

Методом Гаусса–Жордана решить системы уравнений:

2.2. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_3 = 2. \end{cases}$ **2.3.** $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 6, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 5, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$ **2.5.** $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 1, \\ -3x_1 + 12x_2 + 9x_3 = 6, \\ -3x_1 + 14x_2 + 11x_3 = 8. \end{cases}$

2.6. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 7, \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3, \\ x_1 + 11x_2 + 19x_3 = 25 \end{cases}.$

2.7. $\begin{cases} z_1 + (-1-i)z_2 + (1+i)z_3 = -5+5i, \\ (2-i)z_1 + (-2)z_2 + (3+3i)z_3 = -6+16i, \\ (-1+2i)z_1 + (3-3i)z_2 + (-2-2i)z_3 = -2-18i. \end{cases}$

2.8. $\begin{cases} z_1 + (-2+i)z_2 + (2-i)z_3 = 3+3i, \\ (-1-i)z_1 + (5-i)z_2 + (3-3i)z_3 = 18-12i, \\ (-1-i)z_1 + (-3+3i)z_2 + (-15-2i)z_3 = -39-8i. \end{cases}$

Методом Гаусса–Жордана решить системы уравнений с заданными расширенными матрицами:

2.9. $\left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 3 & -3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 & 9 \\ 6 & 0 & -9 & 14 & 29 \end{array}\right].$ **2.10.** $\left[\begin{array}{rrrr|r} -3 & 2 & 1 & -1 & 11 \\ -3 & 3 & 2 & -2 & 16 \\ 3 & 0 & -2 & -3 & -2 \\ 6 & -5 & 3 & 6 & -24 \end{array}\right].$

2.11. $\left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -10 & 29 & 62 & -81 \\ -2 & -1 & 6 & 19 & -13 \\ -3 & 7 & -18 & -34 & 53 \\ 1 & -2 & 5 & 9 & -15 \end{array}\right].$ **2.12.** $\left[\begin{array}{rrrr|r} 3 & 1 & 7 & 29 & 12 \\ 0 & 3 & 8 & 30 & 19 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -3 & -4 \end{array}\right].$

2.13. $\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 7 & -1 & 15 \\ 2 & 5 & 11 & 1 & 21 \end{array}\right].$ **2.14.** $\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & -7 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & -11 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -1 \end{array}\right].$

Решить однородную систему из четырех уравнений с пятью неизвестными с параметром β. В условии задана расширенная матрица системы.

2.15. $\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -3 & -7 & -13 & 30 & 0 \\ -1 & 4 & 10 & 18 & -41 & 0 \\ 2 & 3 & 12 & 17 & -36 & 0 \\ 4 & -4 & -5 & \beta & 35 & 0 \end{array}\right].$ **2.16.** $\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & \beta & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & -7 & -2 & 0 \end{array}\right].$

Решить систему из пяти уравнений с четырьмя неизвестными с параметром α. В условии приведена расширенная матрица системы.

2.17. $\left[\begin{array}{rrrr|r} \alpha & 1 & \alpha & 3 & 2-4\alpha \\ 1 & 0 & 4 & -6 & -2+\alpha \\ -1 & 4 & 11 & -8 & 15-\alpha \\ 1 & 1 & 4 & -6 & 3+3\alpha \\ 3 & -3 & -3 & -4 & -12+7\alpha \end{array}\right].$ **2.18.** $\left[\begin{array}{rrrr|r} \alpha & \alpha & -2 & 3 & -2-3\alpha, \\ 3 & 4 & -1 & -5 & -7+2\alpha \\ -6 & -3 & -11 & -1 & -11-2\alpha \\ -3 & -2 & -11 & 6 & 19+3\alpha \\ 6 & 5 & -1 & 2 & 26+8\alpha \end{array}\right].$

Ответы

2.1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\beta-8 \\ 0 & 0 & 0 & \beta+7 \end{bmatrix}$. **2.2.** $x_1 = 1 + 0.5x_3,\ \ x_2 = 1 + 0.5x_3,\ \ x_3 \in \mathbb{R}$.
2.3. $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2$. **2.4.** Решений нет. **2.5.** $x_1 = -1,\ x_2 = -2,$ $x_3 = 3$. **2.6.** $x_1 = -2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2$. **2.7.** $z_1 = -1+i,\ z_2 = 1-2i,\ z_3 = 1+2i$.
2.8. $z_1 = 3-2i,\ z_2 = 3-i,\ z_3 = 2+i$. **2.9.** $x_1 = -2,\ x_2 = -2,\ x_3 = -3,$ $x_4 = 1$. **2.10.** $x_1 = -1,\ x_2 = 3,\ x_3 = 1,\ x_4 = -1$.
2.11. $x_1 = -2 + 3x_4,\ x_2 = -1 + x_4,\ x_3 = -3 - 2x_4$. **2.12.** $x_1 = -1 - 2x_4,$ $x_2 = 1 - 2x_4,\ x_3 = 2 - 3x_4$. **2.13.** $x_1 = 3 - 3x_3 - 3x_4,\ x_2 = 3 - x_3 + x_4$.
2.14. $x_1 = 2 + x_3 + x_4,\ x_2 = -1 - 2x_3 + 3x_4$. **2.15.** При $\beta = -14$ $x_1 = 2x_4 - 3x_5,\ x_2 = x_4 + 2x_5,\ x_3 = -2x_4 + 3x_5$; при $\beta \neq -14$ $x_1 = -3x_5,\ x_2 = 2x_5,$ $x_3 = 3x_5,\ x_4 = 0$. **2.16.** При $\beta = -9$ $x_1 = -2x_4 + x_5,\ x_2 = x_4 - x_5,$ $x_3 = x_4 + x_5$; при $\beta \neq -9$ $x_1 = x_5,\ x_2 = -x_5,\ x_3 = x_5, x_4 = 0$.
2.17. При $\alpha = -1$ $x_1 = -1,\ x_2 = 3,\ x_3 = 1,\ x_4 = 1$; при $\alpha \neq -1$ решений нет. **2.18.** При $\alpha = -3$ $x_1 = -3,\ x_2 = 3,\ x_3 = 1,\ x_4 = 3$; при $\alpha \neq -3$ решений нет.

3. Матрицы. Операции над матрицами

3.1. Матрицы. Основные понятия

Определение 3.1. *Матрицей размера $n \times m$ или $n \times m$-матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из n строк и m столбцов:*

$$A = [a_{ik}]_{n\times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & a_{ik} & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Матрицы обозначают большими буквами; их элементы – соответствующими малыми буквами, снабженными двумя индексами. Первый индекс – номер строки, второй – номер столбца, на пересечении которых стоит данный элемент. Другое обозначение элементов матрицы: $a_{ik} = A_{(i,k)}$.

Элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{ll}$, где $l = \min(n, m)$, образуют *главную диагональ* матрицы A.

Если строку матрицы с номером i обозначить $A_{(i,:)} = [a_{i1} \dots a_{im}]$, а столбец с номером k – $A_{(:,k)} = [a_{1k} \dots a_{nk}]^{\text{т}} = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{bmatrix}$, то

$$A = [A_{(:,1)} \dots A_{(:,m)}] = \begin{bmatrix} A_{(1,:)} \\ \vdots \\ A_{(n,:)} \end{bmatrix}.$$

Множество всех комплексных (вещественных) матриц размера $n \times m$ обозначается $\mathcal{M}_{n\times m}$.

Пример. Прямоугольная таблица чисел $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 3 \\ -2 & -3 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & -4 & -5 \end{bmatrix}$ есть матрица размера 3×4. Элемент матрицы A, стоящий на пересечении второй строки и третьего столбца, обозначают $A_{(2,3)} = 5$. Строку матрицы A с номером 2 обозначают $A_{(2,:)} = [-2 \ \ -3 \ 5 \ 4]$. Столбец матрицы A с номером 4 обозначают $A_{(:,4)} = [3 \ 4 \ \ -5]^{\text{т}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$. На главной диагонали матрицы A стоят числа: $0, \ -3, \ -4$.

3.2. Классификация матриц

Если $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, ее называют *квадратной матрицей порядка* n.

Матрицы размера $1 \times m$ и $n \times 1$ называются соответственно *строкой длины* m и *столбцом длины* n. Для обозначения их элементов обычно используется один индекс:

$$A = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m]; \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n]^{\text{т}}.$$

Матрица $\mathbf{0}$, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*.

Квадратная матрица I, на главной диагонали которой стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю, называется *единичной*:

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}; \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица $D \in \mathcal{M}_{n\times m}$, первые r диагональных элементов которой есть числа $d_1, d_2, ..., d_r$, где $r \le \min(n, m)$, а все остальные элементы равны нулю, называется *диагональной*. Такую матрицу кратко обозначают $D = \operatorname{diag}[d_1, d_2, \dots, d_r]_{n\times m}$. Запись $D = \operatorname{diag}[d_1, d_2, \dots, d_n]$ равносильна $D = \operatorname{diag}[d_1, d_2, \dots, d_n]_{n\times n}$. Например,

$$D = \operatorname{diag}[1,2,3]_{4\times 5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad D = \operatorname{diag}[1,2,3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Матрицы вида

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}; \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

называют соответственно нижней и верхней треугольными матрицами.

Матрицу вида

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1r} & \dots & t_{1m} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2r} & \dots & t_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_{rr} & \dots & t_{rm} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

где $t_{ii} \neq 0,\ i = \overline{1,r}$, называют трапецеидальной матрицей.

3.3. Сложение, вычитание, умножение на число матриц

Определение 3.2. *Отношение равенства, операции сложения, вычитания и умножения на число для матриц одного размера определяются поэлементно. Пусть*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & a_{ik} & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & b_{ik} & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix},$$

где $A, B \in \mathcal{M}_{n\times m}$.

Тогда:

1) $A = B \ \Leftrightarrow a_{ik} = b_{ik},\ \ i = \overline{1,n},\ \ k = \overline{1,m}$;

2) $A \pm B = [a_{ik} \pm b_{ik}]_{n\times m} = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1m} \pm b_{1m} \\ \dots & \dots & a_{ik} \pm b_{ik} & \dots \\ a_{n1} \pm b_{n1} & a_{n2} \pm b_{n2} & \dots & a_{nm} \pm b_{nm} \end{bmatrix}$;

3) $\lambda A = [\lambda a_{ik}]_{n\times m} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1m} \\ \dots & \dots & \lambda a_{ik} & \dots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nm} \end{bmatrix}$.

Свойства операций над матрицами из $\mathcal{M}_{n\times m}$:

1) $A + B = B + A$ (коммутативность сложения);
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (ассоциативность сложения);
3) $A + \mathbf{0} = A$ (существование нулевого элемента);
4) $A + (-1)A = \mathbf{0}$ (существование противоположного элемента);
5) $1 \cdot A = A$;
6) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.
7) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;
8) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.

Пример. Пусть даны матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Тогда $A+B = \begin{bmatrix} 1+(-3) & 2+1 & -1+2 \\ 2+0 & 3+(-4) & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, а $A+C$ не определено; $2C = 2\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$.

Упражнение. Пусть $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ и $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. Найти: а) $A - B$; б) $A \pm C$; в) $3C$; г) $A + 2B$.

Ответ. а) $A - B = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$; б) $A \pm C$ не определено; в) $3C = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 9 & 0 & 15 \end{bmatrix}$; г) $A + 2B = \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 2 & 15 \end{bmatrix}$.

3.4. Произведение матриц

Произведение двух матриц определяется только в случае, когда размеры их согласованы: число столбцов первой равно числу строк второй матрицы.

Произведением матриц $A = [a_{ik}]_{n\times m}$ и $B = [a_{ik}]_{m\times l}$ называется матрица $C = [c_{ik}]_{n\times l}$, элементы которой находят так:

$$c_{ik} = (i\text{-я строка } A)\cdot(k\text{-й столбец } B) = [a_{i1}\dots a_{im}]\cdot\begin{bmatrix} b_{1k} \\ \dots \\ b_{mk}\end{bmatrix} =$$
$$= a_{i1}b_{1k} + \dots + a_{im}b_{mk}.$$

В других обозначениях: $(AB)_{(i,k)} = A_{(i,:)}B_{(:,k)}$.

Свойства произведения матриц:

Предположим, что все произведения ниже определены. Тогда:

1) $AB \neq BA$ (коммутативности произведения, вообще говоря, нет);

2) $(AB) = A(BC)$ (ассоциативность произведения);

3) $IA = AI = A$, т. е. единичные матрицы выполняют роль единицы умножения;

4) $\mathbf{0}A = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$, т. е. нулевые матрицы выполняют роль нуля умножения;

5) $C(A+B) = CA+CB$; $(A+B)C = AC+BC$ (дистрибутивность);

6) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

Пример. Пусть $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2\end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \\ 1 & 1\end{bmatrix}$. Тогда

$$AB = \begin{bmatrix} A_{(1,:)}B_{(:,1)} & A_{(1,:)}B_{(:,2)} \\ A_{(2,:)}B_{(:,1)} & A_{(2,:)}B_{(:,2)}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [1\ 2]\begin{bmatrix} -3 \\ 1\end{bmatrix} & [1\ 2]\begin{bmatrix} 2 \\ -2\end{bmatrix} \\ [2\ 3]\begin{bmatrix} -3 \\ 1\end{bmatrix} & [2\ 3]\begin{bmatrix} 2 \\ -2\end{bmatrix}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -2\end{bmatrix},$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -4\end{bmatrix},\ CD = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1\end{bmatrix},\ DC = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix},\ AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1\end{bmatrix}.$$

Произведение CA не определено. Обратите внимание, что $AB \neq$ $\neq BA$ и $CD \neq DC$.

Дополнительные свойства произведения матриц

7) **Строку** с номером i произведения AB находят так:

$$(AB)_{(i,:)} = A_{(i,:)}B.$$

8) **Столбец** с номером k произведения AB находят так:

$$(AB)_{(:,k)} = AB_{(:,k)}.$$

9) Произведение $n \times m$-матрицы A на строку чисел длины n **слева** есть линейная комбинация строк матрицы с этими числами:

$$[\lambda_1 \dots \lambda_n]A = \lambda_1 A_{(1,:)} + \dots + \lambda_n A_{(n,:)}.$$

10) Произведение $n \times m$-матрицы A на столбец чисел длины m **справа** есть линейная комбинация столбцов матрицы с этими числами:

$$A\begin{bmatrix}\mu_1\\ \dots\\ \mu_m\end{bmatrix} = \mu_1 A_{(:,1)} + \dots \mu_m A_{(:,m)}.$$

3.5. Специальные матрицы

Специальными называются следующие матрицы:

P_{ik} – получена из единичной матрицы I перестановкой i-й и k-й строк (столбцов);

$L_{ik}(\lambda)(i \neq k)$ – получена из матрицы I заменой элемента (i, k) на число λ;

$D_i(\lambda)$ – матрица, полученная из единичной заменой элемента (i, i) на число λ:

$$P_{ik} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & \cdots & 1 & \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & & & 1 & \cdots & 0 & \\ & 0 & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ (i) \\ \\ (k) \\ \\ \\ \\ \end{array} \qquad L_{ik}(\lambda) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & (k) & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & 1 & \cdots & \lambda \\ & & & \ddots & \vdots \\ & 0 & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ (i) \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Свойства специальных матриц

Предположим, что все произведения ниже определены. Тогда:

1) $P_{ik}A$ – получена из матрицы A перестановкой i-й и k-й строк; AP_{ik} – получена из матрицы A перестановкой i-го и k-го столбцов;

2) $L_{ik}(\lambda)A$ – получена из матрицы A прибавлением к i-й строке k-й строки, умноженной на число λ; $AL_{ik}(\lambda)$ – получена из матрицы A прибавлением к k-му столбцу i-го столбца, умноженного на число λ;

3) $D_i(\lambda) \cdot A$ – получена из матрицы A умножением i-й строки на λ. $A \cdot D_i(\lambda)$ – получена из матрицы A умножением i-го столбца на λ;

4) $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot A$ – получена из матрицы A умножением 1-й, ..., n-й строк на $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. $A \cdot \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ – получена из матрицы A умножением 1-го,..., m-го столбцов на $\lambda_1, \dots, \lambda_m$.

3.6. Элементарные преобразования матрицы

В 3.5 было показано, что умножение некоторой матрицы на специальные матрицы приводит к ее элементарным преобразованиям. Введем для них обозначения (буква R от слова *Row*, буква C от слова *Column*).

N° п/п	Преобразование матрицы A	Обозначение	Связь с произведением
1	Перестановка i-й и k-й строк	$R_i \leftrightarrow R_k$	$P_{ik}A$
2	Умножение i-й строки на число $\lambda \neq 0$	λR_i	$D_i(\lambda)A$
3	К i-й строке прибавить k-ю строку, умноженную на число λ. При этом k-я строка остается неизменной	$R_i + \lambda R_k$	$L_{ik}(\lambda)A$
1'	Перестановка i-го и k-го столбцов	$C_i \leftrightarrow C_k$	AP_{ik}
2'	Умножение i-го столбца на число $\lambda \neq 0$	λC_i	$AD_i(\lambda)$
3'	К i-му столбцу прибавить k-й столбец, умноженный на число λ. При этом k-й столбец остается неизменным	$C_i + \lambda C_k$	$AL_{ki}(\lambda)$

Если матрица B получена из A с помощью некоторого элементарного преобразования, например $R_i \leftrightarrow R_k$, то будем писать:

$$A \overset{R_i \leftrightarrow R_k}{\longrightarrow} B \text{ или } A \xrightarrow[R_i \leftrightarrow R_k]{} B \text{ или } A \to [R_i \leftrightarrow R_k] \to B.$$

Пример.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 3 \\ -2 & -3 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & -4 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_3]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 & -5 \\ -2 & -3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[C_4 - 2C_2]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 & -3 \\ -2 & -3 & 5 & 10 \\ 0 & 2 & 6 & -1 \end{bmatrix} = B.$$

Элементарные преобразования обратимы: если матрица B получена из A с помощью некоторого элементарного преобразования, то и матрица A может быть получена из B с помощью элементарного преобразования.

Если $A \overset{R_i \leftrightarrow R_k}{\longrightarrow} B$, то $B \overset{R_i \leftrightarrow R_k}{\longrightarrow} A$; если $A \overset{C_i \leftrightarrow C_k}{\longrightarrow} B$, то $B \overset{C_i \leftrightarrow C_k}{\longrightarrow} A$.

Если $A \overset{\lambda R_k}{\longrightarrow} B$, то $B \overset{\frac{1}{\lambda} R_k}{\longrightarrow} A$; если $A \overset{\lambda C_k}{\longrightarrow} B$, то $B \overset{\frac{1}{\lambda} C_k}{\longrightarrow} A$.

Если $A \overset{R_i + \lambda R_k}{\longrightarrow} B$, то $B \overset{R_i - \lambda R_k}{\longrightarrow} A$; если $A \overset{C_i + \lambda C_k}{\longrightarrow} B$, то $B \overset{C_i - \lambda C_k}{\longrightarrow} A$.

Пример.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 & -3 \\ -2 & -3 & 5 & 10 \\ 0 & 2 & 6 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[C_4 + 2C_2]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 & -5 \\ -2 & -3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_3]{} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 3 \\ -2 & -3 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & -4 & -5 \end{bmatrix} = A.$$

3.7. Понятие ранга матрицы

Рассмотрим $n \times m$-матрицу, у которой первые r элементов главной диагонали равны единице, а все остальные элементы равны нулю. Такая матрица называется *канонической $n \times m$-матрицей ранга r*.

Например, матрица $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ есть каноническая 3×4-матрица ранга 2.

Всякую $n \times m$-матрицу A с помощью элементарных преобразований можно привести к единственной канонической $n \times m$-матрице D некоторого ранга r. При этом говорят, что ранг матрицы A равен r и пишут $\mathrm{rang}(A) = r$. Так как элементарные преобразования обратимы, то они не меняют ранга матрицы.

Очевидно, ранг трапецеидальной матрицы

$$T=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1r} & \dots & t_{1m} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2r} & \dots & t_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_{rr} & \dots & t_{rm} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

где $t_{ii}\neq 0,\ i=\overline{1,r}$, равен r.

Поэтому при определении ранга матрицы достаточно с помощью элементарных преобразований привести ее не к канонической, а к трапецеидальной матрице.

Пример. Найти ранг матрицы $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{bmatrix}$ и привести ее к канонической матрице.

Решение.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2-5R_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 9 & 10 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3-9R_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & -8 & -16 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3-2R_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Получили трапецеидальную матрицу ранга 2 ($\mathrm{rang}(A)=2$). Продолжим наши преобразования, чтобы привести матрицу A к канонической матрице:

$$\xrightarrow[-1/4R_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1-2R_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[C_3+C_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[C_3-2C_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Упражнение.Найти ранг матрицы $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, приведя ее к канонической матрице.

Ответ: $\mathrm{rang}(A)=2$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3.8. Операция транспонирования матриц

Транспонированием матрицы A называется операция, состоящая в замене строк столбцами при сохранении их нумерации. Транспонированную матрицу обозначим $A^{\text{т}}$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & a_{ik} & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{\text{т}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & a_{ki} & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix},$$

где $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$, а $A^{\text{т}} \in \mathcal{M}_{m\times n}$.

Матрица $A = [a_{ik}]_{n\times n}$ называется *симметричной*, если $A = A^{\text{т}}$, т. е. $\forall i,k = \overline{1,n}\ \ a_{ik} = a_{ki}$.

Свойства операции транспонирования:

1) $(A^{\text{т}})^{\text{т}} = A$;
2) $\forall \lambda \in \mathbb{C}\ \ (\lambda A)^{\text{т}} = \lambda A^{\text{т}}$;
3) $(A+B)^{\text{т}} = A^{\text{т}} + B^{\text{т}}$;
4) $(AB)^{\text{т}} = B^{\text{т}}A^{\text{т}}$;
5) $A^{\text{т}}A$ и $AA^{\text{т}}$ – симметричные матрицы.

Пример. Пусть $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. Найти матрицу X, если $X^{\text{т}} - 2A = B^{\text{т}}$.

Решение. Очевидно, A – симметричная матрица, так как $A = A^{\text{т}}$.

$$X^{\text{т}} - 2A = B^{\text{т}} \Longleftrightarrow X^{\text{т}} = 2A + B^{\text{т}} \Longleftrightarrow (X^{\text{т}})^{\text{т}} = (2A + B^{\text{т}})^{\text{т}} \Longleftrightarrow X = 2A^{\text{т}} + B \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow X = 2A + B \Longleftrightarrow X = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

3.9. Операция сопряжения матриц

Сопряженной к матрице A называется матрица $A^* = (\bar{A})^{\text{т}}$, где черта над матрицей означает ее поэлементное комплексное сопряжение.

Матрица $A = [a_{ik}]_{n\times n}$ называется *самосопряженной*, если $A = A^*$, т. е. $\forall i,k = \overline{1,n}\ \ a_{ik} = \bar{a}_{ki}$.

Свойства операции сопряжения:

1) $(A^*)^* = A$;
2) $\forall \lambda \in \mathbb{C}\ \ (\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$;
3) $(A+B)^* = A^* + B^*$;
4) $(AB)^* = B^*A^*$;
5) A^*A и AA^* – самосопряженные матрицы.

Пример. Пусть $A = \begin{bmatrix} 1 & 2+i \\ 2-i & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} i & 2-i \\ 1 & i-2 \end{bmatrix}$. Найти матрицу X, если $X^* + iA = B^*$.

Решение. Очевидно, A – самосопряженная матрица, так как $A = A^*$.

$$X^* + iA = B^* \Longleftrightarrow X^* = -iA + B^* \Longleftrightarrow (X^*)^* = (-iA + B^*)^* \Longleftrightarrow X = iA^* + B \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow X = iA + B \Longleftrightarrow X = \begin{bmatrix} i & -1+2i \\ 1+2i & 3i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & 2-i \\ 1 & i-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2i & 1+i \\ 2+2i & 4i-2 \end{bmatrix}.$$

3.10. Матричная запись СЛАУ. Теорема Кронекера – Капелли

Используя операцию умножения матриц систему из n линейных уравнений с m неизвестными можно записать в более компактной матричной форме:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX = B,$$

где $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$ – матрица коэффициентов системы; $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix}$ – столбец неизвестных; $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$ – столбец свободных членов.

Теорема 3.1 (Кронекера – Капелли). *Система уравнений* $AX = B$ *имеет единственное решение тогда и только тогда, когда* $\mathrm{rang}(A) = m$, *где* m *– число неизвестных. Если* $\mathrm{rang}(A) < m$, *то система уравнений* $AX = B$ *или не имеет решения при* $\mathrm{rang}(A) < \mathrm{rang}([A|B])$, *или имеет бесконечное множество решений при* $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}([A|B])$.

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 10, \\ 11x_1 + 12x_2 + 13x_3 = a. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \\ 11 & 12 & 13 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ a \end{bmatrix}.$$

Решение. Применим алгоритм Гаусса – Жордана к расширенной матрице системы:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & a \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{c} R_2 - 6R_1 \\ R_3 - 11R_1 \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -10 & -20 \\ 0 & -10 & -20 & a-55 \end{array}\right] \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{c} R_3 - 2R_2 \\ -0.2R_2 \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & a-15 \end{array}\right] \Longleftrightarrow [R_1 - 2R_2] \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & a-15 \end{array}\right] \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = -3, \\ x_2 + 2x_3 = 4, \\ 0 = a - 15. \end{cases}$$

При $a \neq 15$ система решений не имеет. При $a = 15$ находим $\begin{cases} x_1 = -3 + w, \\ x_2 = 4 - 2w, \\ x_3 = w, \end{cases}$ $w \in \mathbb{R}$.

В нашем примере $\operatorname{rang}(A) = 2$. Следовательно, система не может иметь единственного решения. При $a \neq 15$ $\operatorname{rang}([A|B]) = 3$ и по предыдущей теореме система не имеет решений. При $a = 15$ $\operatorname{rang}([A|B]) = 2$ и по предыдущей теореме система имеет бесконечно много решений.

3.11. Упражнения

В упражнениях 1–12 будут использованы следующие матрицы:

$$A = \left[\begin{array}{rr} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{rr} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{array}\right], \quad C = \left[\begin{array}{rr} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{array}\right], \quad R = \left[\begin{array}{r} 1 \\ 0 \end{array}\right],$$

$$S = \left[\begin{array}{r} 2 \\ -3 \end{array}\right], \quad T = \left[\begin{array}{r} 1 \\ 4 \end{array}\right], \quad U = \left[\begin{array}{r} -4 \\ 6 \end{array}\right].$$

3.1. Найти: а) $A + B$; б) $A + C$; в) $6B$; г) $B + 3C$.

3.2. Найти матрицу D, такую, что $A + D = B$.

3.3. Найти матрицу D, такую, что $A + 2B + 2D = 3C$.

3.4. Найти: а) AR; б) BR; в) $C(S + 3T)$.

3.5. Найти: а) $(A + 2B)R$; б) $(B + C)U$.

3.6. Найти a_1, a_2, такие, что $a_1R + a_2S = T$.

3.7. Найти a_1, a_2, такие, что $a_1S + a_2U = 2R + T$.

3.8. Найти a_1, a_2, такие, что $a_1T + a_2U = 3S + 4T$.

3.9. Найти W_2, где $W_1 = BR$ и $W_2 = AW_1$. Вычислить $Q = AB$, QR и убедиться, что $W_2 = QR$, т. е. проверить равенство: $A(BR) = (AB)R$.

3.10. Найти W_3, где $W_1 = CR$, $W_2 = BW_1$ и $W_3 = AW_2$. Вычислить $Q = A(BC)$, QR и убедиться, что $W_3 = QR$, т. е. проверить равенство: $A(B(CR)) = (A(BC))R$.

3.11. Проверить равенство $(A + B) = AC + BC$.

3.12. Проверить равенство $(AB) = A(BC)$.

В упражнениях 13–18 будут использованы следующие матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad V = [2\ 4], \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 8 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

3.13. Найти AB и BA. **3.14.** Найти AU и VA.
3.15. Найти $V(BU)$. **3.16.** Найти CA.
3.17. Найти $C(BU)$. **3.18.** Найти $(BA)U$ и $B(AU)$.

3.19. Проверить, определены ли произведения матриц и указать размер произведения:
а) $A_{2\times3}B_{3\times4}$ и $B_{3\times4}A_{2\times3}$; б) $A_{2\times3}B_{2\times4}$ и $B_{2\times4}A_{2\times3}$;
в) $A_{3\times7}B_{6\times3}$ и $B_{6\times3}A_{3\times7}$; г) $A_{2\times3}B_{3\times2}$ и $B_{3\times2}A_{2\times3}$;
д) $A_{3\times3}B_{3\times1}$ и $B_{3\times1}A_{3\times3}$; е) $A_{2\times3}(B_{3\times5}C_{5\times4})$ и $(A_{2\times3}B_{3\times5})C_{5\times4}$.

3.20. Если A есть $n \times m$-матрица, то когда определена матрица $A^2 = AA$?

3.21. Пусть A и B – матрицы, такие, что произведение AB определено и является квадратной матрицей. Показать, что тогда произведение BA определено и является квадратной матрицей.

3.22. Записать следующие системы в матричной форме и в виде линейной комбинации столбцов:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$.

В упражнениях 23–29 будут использованы следующие матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 3 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

3.23. Проверить равенство $(DE)F = D(EF)$.
3.24. Проверить утверждение $DE \neq ED$.
3.25. Проверить равенство $FU = FV$.
3.26. Проверить, что $CZ = 2Z$. Не находя C^5, вычислить C^5Z. Найти формулу для C^nZ.
3.27. Проверить равенство $E^{\text{т}}F = (FE)^{\text{т}}$.
3.28. Найти $U^{\text{т}}V$ и $V^{\text{т}}U$.
3.29. Вычислить: а) $UV^{\text{т}}$; б) $(AU)(AV)^{\text{т}}$.
3.30. Пусть A и B есть 2×2-матрицы. Доказать или опровергнуть утверждение $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$.

3.31. Пусть A и B есть 2×2-матрицы, такие, что $A^2 = AB$ и $A \neq \mathbf{0}$. Можно ли утверждать, что после сокращения $A = B$. Объяснить.

3.32. Пусть A и B есть 2×2-матрицы, такие, что $A^2 = AB$ и $A \neq \mathbf{0}$. Найти ошибку в "доказательстве" того, что $A = B$: $A^2 = AB \Rightarrow A^2 - AB = \mathbf{0} \Rightarrow A(A-B) = \mathbf{0}$. Так как $A \neq \mathbf{0}$, то $A - B = \mathbf{0} \Rightarrow A = B$.

3.33. Найти симметричные 2×2-матрицы A и B, такие, что AB не симметрична.

3.34. Доказать, что для любого $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, где $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, верно неравенство $X^{\mathrm{т}} D X \geq 0$, где $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

3.35. Найти ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

3.36. Найти ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & \lambda+1 \\ 2 & 3 & -1 & -5 \end{bmatrix}$.

3.37. Найти ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ -1 & \lambda+1 & -11 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

3.38. Обозначим через N_{ik} матрицу, полученную из нулевой матрицы $\mathbf{0}_{n\times n}$ заменой элемента (i,k) на 1. Показать, что а) $N_{ik}^{\mathrm{т}} = N_{ki}$; б) i-я строка матрицы $N_{ik}A$ совпадает с k-й строкой матрицы A, а остальные строки – нулевые; в) k-й столбец матрицы AN_{ik} совпадает с i-м столбцом матрицы A, а остальные столбцы – нулевые.

Ответы

3.1. а) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, б) $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, в) $\begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 18 \end{bmatrix}$, г) $\begin{bmatrix} -6 & 8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$. **3.2.** $\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. **3.3.** $\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$. **3.4.** а) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, б) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, в) $\begin{bmatrix} 17 \\ 14 \end{bmatrix}$. **3.5.** а) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, б) $\begin{bmatrix} 20 \\ 16 \end{bmatrix}$. **3.6.** $a_1 = 11/3$, $a_2 = -4/3$. **3.7.** Нет решений. **3.8.** $a_1 = 4$, $a_2 = -3/2$. **3.9.** $W_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. **3.10.** $W_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. **3.13.** $AB = \begin{bmatrix} 5 & 16 \\ 5 & 18 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 4 & 11 \\ 6 & 19 \end{bmatrix}$. **3.14.** $AU = \begin{bmatrix} 11 \\ 13 \end{bmatrix}$, $VA = [8\ 22]$. **3.15.** 66. **3.16.** $CA = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 8 & 12 \\ 15 & 20 \\ 8 & 17 \end{bmatrix}$. **3.17.** $C(BU) = \begin{bmatrix} 27 \\ 28 \\ 43 \\ 47 \end{bmatrix}$. **3.18.** $(BA)U = B(AU) = \begin{bmatrix} 37 \\ 63 \end{bmatrix}$. **3.19.** а) $(AB)_{2\times 4}$, BA не определено; б) AB, BA не определены; в) AB не определено, $(BA)_{6\times 7}$; г) $(AB)_{2\times 2}$, $(BA)_{3\times 3}$; д) $(AB)_{3\times 1}$, BA не определено; е) $(A(BC))_{2\times 4}$, $((AB)C)_{2\times 4}$. **3.20.** $n = m$. **3.22.** а) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} +$

$+x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} +$
$+x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$; **3.23.** $(DE)F = D(EF) = \begin{bmatrix} 23 & 23 \\ 29 & 29 \end{bmatrix}$. **3.24.** $DE = \begin{bmatrix} 8 & 15 \\ 11 & 18 \end{bmatrix}$, $ED = \begin{bmatrix} 12 & 27 \\ 7 & 14 \end{bmatrix}$.
3.25. $FU = FV = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. **3.26.** $C^5 Z = 2^5 Z$, $C^n Z = 2^n Z$. **3.27.** $E^{\text{т}} F = (FE)^{\text{т}} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}$. **3.28.** -6. **3.29.** а) $\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$, б) $\begin{bmatrix} -12 & 18 & 24 \\ 18 & -27 & -36 \\ 24 & -36 & -48 \end{bmatrix}$.
3.34. $X^{\text{т}} D X = x_1^2 + 3x_2^2 + (x_1 + x_2)^2 \geq 0$. **3.35.** $\operatorname{rang}(A) = 2$. **3.36.** При $\lambda = 3$ $\operatorname{rang}(A) = 2$; при $\lambda \neq 3$ $\operatorname{rang}(A) = 3$.
3.37. При $\lambda = 1$ $\operatorname{rang}(A) = 2$; при $\lambda \neq 1$ $\operatorname{rang}(A) = 3$.

4. Определители матриц и их применение

4.1. Определение определителя матрицы

Каждой квадратной матрице A сопоставляют число, которое называют ее определителем (детерминантом) и обозначают $\det(A)$ или $|A|$.

Определение этого понятия дадим по индукции, т. е. сначала введем его для матриц 1-го порядка, а затем, считая, что известно, как вычислять определитель матриц $(n-1)$-го порядка, укажем правило нахождения определителя матрицы n-го порядка.

Определение 4.1. *Определителем матрицы $A = [a]$ 1-го порядка называется число a, т. е.* $\det(A) = |A| = a$.

Теперь введем несколько вспомогательных понятий, предполагая, что известно, как вычислять определители матриц $(n-1)$-го порядка. Для этого рассмотрим матрицу A n-го порядка

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \boxed{a_{ik}} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

и ее произвольный элемент a_{ik}.

Определение 4.2. 1) *Минором M_{ik} элемента a_{ik} матрицы A называется определитель матрицы $(n-1)$-го порядка, полученной из A вычеркиванием i-й строки и k-го столбца, на пересечении которых стоит a_{ik}.*

2) *Алгебраическим дополнением элемента a_{ik} матрицы A называется число $A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$.*

3) *Сумма произведений элементов i-й строки матрицы A на их алгебраические дополнения*

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k}M_{ik}$$

называется разложением матрицы A по i-й строке.

4) *Сумма произведений элементов k-го столбца матрицы A на их алгебраические дополнения*

$$a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \cdots + a_{nk}A_{nk} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k}M_{ik}$$

называется разложением матрицы A по k-му столбцу.

Рассмотрим матрицу второго порядка $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$.

1) Вычислим разложение матрицы A по 1-й строке:

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

2) Вычислим разложение матрицы A по 2-му столбцу:

$$a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} = a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + a_{22}(-1)^{2+2}M_{22} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Проверьте самостоятельно, что разложения матрицы A по 2-й строке и 1-му столбцу тоже равны $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

Итак, для матрицы 2-го порядка разложения по любым строке и столбцу совпадают.

Этот факт справедлив для матриц любого порядка.

Теорема 4.1. *Разложения квадратной матрицы A по любым строкам и столбцам совпадают.*

Определение 4.3. *Определителем матрицы A n-го порядка называется ее разложение по любым столбцу или строке:*

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k}M_{ik} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k}M_{ik}.$$

Обычно используются обозначения:

$$\det(A) = |A| = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

В частности, $\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$

Замечание 4.1. *При вычислении определителя удобно раскладывать матрицу по строке или столбцу, содержащим как можно больше нулей.*

Пример. 1) Непосредственно из определения следует, что определитель нижней (верхней) треугольной матрицы, диагональной матрицы равен произведению их диагональных элементов:

$$|L| = \begin{vmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{vmatrix} = l_{11}l_{22}\cdots l_{nn};$$

$$|U| = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{vmatrix} = u_{11}u_{22}\cdots u_{nn}.$$

В частности, $\det(L_{ik}(\lambda)) = 1$; $\det(D_i(\lambda)) = \lambda$; $\det(\mathrm{d}iag(d_1, d_2, ..., d_n)) = = d_1 d_2 ... d_n$.

2) Покажем, что $\det(P_{ik}) = -1$. Раскладывая по $1, 2, ..., i-1$-й строкам, а затем по строкам $n, n-1, ...k+1$, получим:

$$|P_{ik}| = \begin{vmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & 0 & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ (i) \\ \\ (k) \\ \\ \\ \\ \end{array} = \left.\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}\right\} (k-i+1) = *$$

Разложим последний определитель $(k-i+1)$-го порядка по первой строке:

$$* = (-1)^{k-i+2} \left.\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}\right\} ((k-i) \text{ строк }) = *$$

Разложим последний определитель $(k-i)$-го порядка по последней строке:

$$* = (-1)^{k-i+2}(-1)^{k-i+1} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{2k-2i+3}\det(I) = -1.$$

Пример. Вычислить определитель $\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ -2 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix}$.

Решение. Разложим определитель по первой строке:

$$\det(A) = 0A_{11} + 2A_{12} + 6A_{13} = -2\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(8-5) + 6(2+3) = -6 + 30 = 24.$$

Упражнение. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & & & x_1 & & & \\ & \ddots & & \vdots & & 0 & \\ & & 1 & \vdots & & & \\ & & & x_i & & & \\ & & & \vdots & 1 & & \\ & 0 & & \vdots & & \ddots & \\ & & & x_n & & & 1 \end{vmatrix}$.

Ответ: x_i.

4.2. Свойства определителя матрицы

Замечание 4.2. *В определении определителя строки и столбцы равноправны. Поэтому всякое утверждение, верное для столбцов, верно и для строк, и наоборот.*

На практике полезно знать, как меняется определитель матрицы при ее элементарных преобразованиях. Первые три свойства сведем в таблицу:

N°п/п	Преобразование матрицы A	Обозначение	Изменение $\det(A)$
1	Перестановка i-й и k-й строк	$R_i \leftrightarrow R_k$	$-\det(A)$
2	Умножение i-й строки на число $\lambda \neq 0$	λR_i	$\lambda \det(A)$
3	К i-й строке прибавить k-ю строку, умноженную на число λ. При этом k-я строка остается неизменной	$R_i + \lambda R_k$	$\det(A)$
$1'$	Перестановка i-го и k-го столбцов	$C_i \leftrightarrow C_k$	$-\det(A)$
$2'$	Умножение i-го столбца на число $\lambda \neq 0$	λC_i	$\lambda \det(A)$
$3'$	К i-му столбцу прибавить k-й столбец, умноженный на число λ. При этом k-й столбец остается неизменным	$C_i + \lambda C_k$	$\det(A)$

Справедливы еще следующие свойства:

4. Определитель **сохраняет свое значение**, если заменить строки соответствующими столбцами: $\det(A^{\text{т}}) = \det(A)$.

5. Определитель **равен нулю**, если:

а) одна строка (столбец) состоит из нулей;

б) две строки (столбца) равны или пропорциональны;

в) одна строка (столбец) есть линейная комбинация двух или более строк (столбцов).

6. Сумма произведений элементов одной строки (столбца) на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю.

7. Определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

8. Определитель $n \times n$-матрицы A линеен по столбцу (строке): если i-й столбец A имеет вид: $A_{(:,i)} = \lambda A'_{(:,i)} + \mu A''_{(:,i)}$, то

$$\det([A_{(:,1)}, \ldots, \lambda A'_{(:,i)} + \mu A''_{(:,i)}, \ldots, A_{(:,n)}]) =$$

$$= \lambda \cdot \det([A_{(:,1)}, \ldots, A'_{(:,i)}, \ldots, A_{(:,n)}]) + \mu \cdot \det([A_{(:,1)}, \ldots, A''_{(:,i)}, \ldots, A_{(:,n)}]).$$

Замечание 4.3. *Как уже отмечалось, при вычислении определителя удобно раскладывать матрицу по строке или столбцу, содержащим как можно больше нулей. "Зарабатывать" нули можно, используя свойства* 3) *и* 3′) *определителя (см. таблицу).*

Пример. Вычислить определитель $\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ -2 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix}$.

Решение. Прибавляем ко второй строке третью, умноженную на 2, и, раскладывая полученный определитель по первому столбцу, получим:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 0 & -5 & -3 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0A_{11} + 0A_{21} + 1A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 30 = 24.$$

Пример. Вычислить определитель $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & 3 \\ -3 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение.

$$\det(A) = \begin{bmatrix} 2R_2 \\ 2R_3 \\ 2R_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 6 & -6 & 10 & 4 \\ 10 & 4 & 8 & 6 \\ -6 & 8 & -6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} R_2 - 3R_1 \\ R_3 - 5R_1 \\ R_4 + 3R_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -15 & 16 & -8 \\ 0 & -11 & 18 & -14 \\ 0 & 17 & -12 & 16 \end{vmatrix} = \text{[разложим по 1-му столбцу]} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} -15 & 16 & -8 \\ -11 & 18 & -14 \\ 17 & -12 & 16 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.5C_2 \\ 0.5C_3 \end{bmatrix} = \frac{4}{4}\begin{vmatrix} -15 & 8 & -4 \\ -11 & 9 & -7 \\ 17 & -6 & 8 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 4R_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} -15 & 8 & -4 \\ -44 & 36 & -28 \\ 17 & -6 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} R_2 - 7R_1 \\ R_3 + 2R_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} -15 & 8 & -4 \\ 61 & -20 & 0 \\ -13 & 10 & 0 \end{vmatrix} = \text{[разложим по 3-му столбцу]} =$$

$$= \frac{-4}{4}\begin{vmatrix} 61 & -20 \\ -13 & 10 \end{vmatrix} = -(610 - 260) = -350.$$

Упражнение. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

Ответ: 3.

4.3. Вырожденные (сингулярные) матрицы

Определение 4.4. *Квадратная матрица* A *называется вырожденной (сингулярной), если* $\det(A) = 0$, *и невырожденной, если* $\det(A) \neq 0$.

Теорема 4.2. *Для матрицы* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ *равносильны утверждения:*

1) *матрица* A *невырождена;*

2) $\operatorname{rang}(A) = n$*;*

3) *система уравнений* $AX = B$ *имеет единственное решение для любого столбца* B *длины* n*;*

4) *система уравнений* $AX = \mathbf{0}$ *имеет единственное решение.*

Пример. Найти все значения λ, такие, что матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$ сингулярна.

Решение. Вычислим определитель

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 - R_2 \\ R_3 - R_2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda - 1 & \lambda^2 - 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(\lambda - 1)\begin{vmatrix} 1 & \lambda + 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(\lambda - 1)(\lambda - 3).$$

Отсюда следует, что матрица A сингулярна при $\lambda = 1$ или $\lambda = 3$.

Упражнение. Найти все значения λ, такие, что матрица $B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$ сингулярна.

Ответ: $\det(B) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$; B сингулярна при $\lambda = 1$; $\lambda = -2$.

4.4. Теорема Крамера

Напомним, что используя операцию умножения матриц систему из n линейных уравнений с n неизвестными можно записать в более компактной матричной форме:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+\dots+a_{2n}x_n=b_2\\ \dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\\ a_{n1}x_1+\dots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \dots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \dots\\ b_n\end{bmatrix} \Leftrightarrow AX=B,$$

где $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}$ – матрица коэффициентов системы, $X=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \dots\\ x_n\end{bmatrix}$ – столбец неизвестных, а $B=\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \dots\\ b_n\end{bmatrix}$ – столбец свободных членов.

Теорема 4.3 (Крамера). 1) *Система уравнений $AX = B$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда ее матрица коэффициентов невырождена.*

2) *Решение системы уравнений $AX = B$ с невырожденной матрицей коэффициентов A находится по формулам: $x_i = \dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}$, $i = \overline{1,n}$, где матрица A_i получается из A заменой i-го столбца столбцом свободных членов:*

$$A_i = [A_{(:,1)}, \dots, A_{(:,i-1)},\ B,\ A_{(:,i+1)}, \dots A_{(:,n)}].$$

При этом $\Delta = \det(A)$ называется главным, а $\Delta_i = \det(A_i)$ – вспомогательными определителями системы.

Пример. Решить СЛАУ: $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -3,\\ -6x_1 - 5x_3 = 3,\\ -9x_1 + 5x_2 - 11x_3 + 8x_4 = 18,\\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 8x_4 = -17.\end{cases}$

Решение. Вычислим главный определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 & -1\\ -6 & 0 & -5 & 0\\ -9 & 5 & -11 & 8\\ 3 & -3 & 6 & -8\end{vmatrix} = \begin{bmatrix} R_2+2R_1\\ R_3+3R_1\\ R_4-R_1\end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 & -1\\ 0 & -2 & 1 & -2\\ 0 & 2 & -2 & 5\\ 0 & -2 & 3 & -7\end{vmatrix} =$$

$$= [\text{разложим по 1-му столбцу}] = 3\begin{vmatrix} -2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 5\\ -2 & 3 & -7\end{vmatrix} = \begin{bmatrix} R_2+R_1\\ R_3-R_1\end{bmatrix} = 3\begin{vmatrix} -2 & 1 & -2\\ 0 & -1 & 3\\ 0 & 2 & -5\end{vmatrix} =$$

$$= [\text{разложим по 1-му столбцу}] = -6\begin{vmatrix} -1 & 3\\ 2 & -5\end{vmatrix} = -6(5-6) = 6.$$

Вычислим вспомогательные определители системы:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & -5 & 0 \\ 18 & 5 & -11 & 8 \\ -17 & -3 & 6 & -8 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} R_4 + R_3 \\ R_3 + 8R_1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & -5 & 0 \\ -6 & -3 & 13 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= [\text{разложим по 4-му столбцу}] = -1(-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 0 & -5 \\ -6 & -3 & 13 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= [\text{разложим по 1-й строке}] = 3\begin{vmatrix} -3 & 13 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} -6 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3(15-26) - 5(-12+3) = 12.$$

Аналогично находим: $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 3 & -1 \\ -6 & 3 & -5 & 0 \\ -9 & 18 & -11 & 8 \\ 3 & -17 & 6 & -8 \end{vmatrix} = -6;$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 & -1 \\ -6 & 0 & 3 & 0 \\ -9 & 5 & 18 & 8 \\ 3 & -3 & -17 & -8 \end{vmatrix} = -18; \ \Delta_4 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 & -3 \\ -6 & 0 & -5 & 3 \\ -9 & 5 & -11 & 18 \\ 3 & -3 & 6 & -17 \end{vmatrix} = 6.$$

По формулам Крамера находим решение системы:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{12}{6} = 2; \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-6}{6} = -1; \ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-18}{6} = -3; \ x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{6}{6} = 1.$$

4.5. Однородные системы линейных уравнений (ОСЛАУ)

Определение 4.5. *Пусть матрица* $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$, X *– столбец длины* m. *Система* $AX = \mathbf{0}$ *называется однородной системой линейных уравнений. Более подробно:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = 0, \\ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = 0. \end{cases}$$

Однородная система всегда имеет нулевое решение: $X = \mathbf{0} \Leftrightarrow x_1 = 0, \dots, x_m = 0$.

Основной вопрос, который возникает при исследовании однородных систем, это вопрос о наличии у них ненулевого решения.

Теорема 4.4. *Если число уравнений однородной системы* $AX = 0$ *меньше числа неизвестных* $(n < m)$, *то такая система имеет ненулевое решение.*

Теорема 4.5. *Если число уравнений однородной системы* $AX = 0$ *равно числу неизвестных* $(n = m)$, *то такая система:*

1) *имеет единственное нулевое решение* $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$;
2) *имеет ненулевое решение* $\Leftrightarrow$ $\det(A) = 0$.

В общем случае ответ на вопрос о наличии ненулевого решения дает следующая теорема.

Теорема 4.6. *Однородная система* $AX = \mathbf{0}$:
1) *имеет единственное нулевое решение* $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rang}(A) = m$;
2) *имеет ненулевое решение* $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rang}(A) < m$.

В заключение рекомендуем выполнить предлагаемые упражнения.

4.6. Упражнения

В упражнениях 1–6 вычислить $\det(A)$.

4.1. $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. **4.2.** $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. **4.3.** $A=\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

4.4. $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$. **4.5.** $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$. **4.6.** $A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

В упражнениях 7–12, используя только перестановки строк или столбцов, привести данные определители к определителям треугольных матриц и вычислить их.

4.7. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}$. **4.8.** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$. **4.9.** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}$.

4.10. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. **4.11.** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$. **4.12.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$.

В упражнениях 13–18 выразить $\det(B)$ через $\det(A)$, где $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$.

4.13. $B = \begin{bmatrix} a & b & 3c \\ d & e & 3f \\ g & h & 3i \end{bmatrix}$. **4.14.** $B = \begin{bmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{bmatrix}$. **4.15.** $B = \begin{bmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{bmatrix}$.

4.16. $B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a+d & b+e & c+f \\ g & h & i \end{bmatrix}$. **4.17.** $B = \begin{bmatrix} d & e & f \\ 2a & 2b & 2c \\ g & h & i \end{bmatrix}$. **4.18.** $B = \begin{bmatrix} d & f & e \\ a & c & b \\ g & i & h \end{bmatrix}$.

В упражнениях 19–22 вычислить определители, используя элементарные преобразования и понижая порядок определителя.

4.19. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. **4.20.** $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

4.21. $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$. **4.22.** $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

В упражнениях 23–24 вычислить определители Вандермонда.

4.23. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$. **4.24.** $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$.

4.25. Пусть матрица $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, $c \in \mathbb{R}$. Доказать, что $\det(cA) = c^n \det(A)$.

4.26. Привести пример 2×2-матриц A и B, таких, что $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$.

4.27. Пусть матрица $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, $A^{\text{т}} = -A$. Доказать, что $\det(A) = (-1)^n \det(A)$.

4.28. Проверить сингулярность и найти ранг матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

В упражнениях 29–31 найти все значения λ, при которых матрица A сингулярна.

4.29. $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & \lambda+1 \\ 2 & 3 & -1 & -5 \\ 4 & 6 & -2 & -7-\lambda \end{bmatrix}$. **4.30.** $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 2 \\ 3 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

4.31. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ -1 & \lambda+1 & -11 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

Пусть $A = [A_{(:,1)},\ A_{(:,2)},\ A_{(:,3)},\ A_{(:,4)}]$, $A \in \mathcal{M}_{4\times 4}$. В упражнениях 32–37 найти определитель матрицы .

4.32. $B = [2A_{(:,1)},\ A_{(:,2)},\ A_{(:,4)},\ A_{(:,3)}]$. **4.33.** $B = [A_{(2,:)},\ 3A_{(3,:)},\ A_{(1,:)},\ -2A_{(4,:)}]$.

4.34. $B = [A_{(:,1)} + 2A_{(:,2)},\ A_{(:,2)},\ A_{(:,3)},\ A_{(:,4)}]$. **4.35.** $B = [A_{(1,:)},\ A_{(1,:)} + 2A_{(2,:)},\ A_{(3,:)}\ A_{(4,:)}]$.

4.36. $B = [A_{(:,1)} + 2A_{(:,2)},\ A_{(:,2)} + 3A_{(:,3)},\ A_{(:,3)},\ A_{(:,4)}]$.

4.37. $B = [2A_{(1,:)} - A_{(2,:)},\ 2A_{(2,:)} - A_{(3,:)},\ A_{(3,:)},\ A_{(4,:)}]$.

4.38. Для любого $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ показать, что

$$\begin{vmatrix} a+1 & a+4 & a+7 \\ a+2 & a+5 & a+8 \\ a+3 & a+6 & a+9 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} a & 4a & 7a \\ 2a & 5a & 8a \\ 3a & 6a & 9a \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} a & a^4 & a^7 \\ a^2 & a^5 & a^8 \\ a^3 & a^6 & a^9 \end{vmatrix} = 0.$$

4.39. Пусть $A = [A_{(:,1)},\ A_{(:,2)},\ A_{(:,3)}] \in \mathcal{M}_{3\times 3}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

а) Показать, что $AB = [2A_{(:,1)} + 3A_{(:,2)} + A_{(:,3)},\ -A_{(:,2)} + 3A_{(:,3)},\ 4A_{(:,3)}]$.

б) Показать, что $\det(AB) = -8\det(A)$.

в) Проверить: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

4.40. Пусть $\vec{x}$, $\vec{y}$ – векторы в $\mathbb{R}^3$. Пусть $A = I + \vec{x}\cdot(\vec{y})^{\text{т}}$. Показать, что $\det(A) = 1 + (\vec{y})^{\text{т}}\vec{x}$.

В упражнениях 41–44 решить системы, используя правило Крамера.

4.41. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 - x_2 = -1. \end{cases}$

4.42. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + x_3 = 3, \\ x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$

4.43. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_3 - x_4 = 0, \\ x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$

4.44. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a, \\ x_2 + x_3 = b, \\ x_3 = c. \end{cases}$

Ответы

4.1. -21. **4.2.** 20. **4.3.** 36. **4.4.** -24. **4.5.** -37. **4.6.** -21. **4.7.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 6$. **4.8.** $-\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -24$. **4.9.** $-\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -48$. **4.10.** $-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -15$. **4.11.** $-\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -16$. **4.12.** $-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -12$. **4.13.** $3\det(A)$. **4.14.** $\det(A)$. **4.15.** $-\det(A)$. **4.16.** $\det(A)$. **4.17.** $-2\det(A)$. **4.18.** $\det(A)$.
4.19. -12. **4.20.** -5.

4.21. 18. **4.22.** 4. **4.23.** $(c-a)(c-b)(b-a)$. **4.24.** $(d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a)$. **4.28.** $\det(A) = 0; \mathrm{rang}(A) = 2$.

4.29. $\lambda = 3$. **4.30.** $\lambda = \pm 3$. **4.31.** $\lambda = 1$.

4.32. $-2\det(A)$. **4.33.** $-6\det(A)$. **4.34.** $\det(A)$. **4.35.** $2\det(A)$. **4.36.** $\det(A)$. **4.37.** $4\det(A)$. **4.41.** $\Delta = -2;\ x_1 = 1,\ x_2 = 2$. **4.42.** $\Delta = -2;\ x_1 = 4,\ x_2 = 2,\ x_3 = -1$. **4.43.** $\Delta = 3;\ x_1 = = x_2 = x_3 = x_4 = 1$. **4.44.** $\Delta = 1;\ x_1 = a - b,\ x_2 = b - c,\ x_3 = c$.

5. Матричные уравнения

5.1. Матричные уравнения $AX = B$ и $XA = B$

Определение 5.1. *Матричным уравнением $AX = B$ называется равенство вида $AX = B$, где $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$ и $B \in \mathcal{M}_{n\times l}$ – заданные матрицы, а $X \in \mathcal{M}_{m\times l}$ – искомая матрица.*

Если $l = 1$, т. е. X и B есть столбцы, то матричное уравнение $AX = B$ соответствует обычной СЛАУ, где A – матрица коэффициентов, X – столбец неизвестных, а B – столбец свободных членов.

Приравнивая столбцы в левой и правой части равенства $AX = B$, получим

$$(AX)_{(:,k)} = B_{(:,k)} \ \Leftrightarrow AX_{(:,k)} = B_{(:,k)},\ (k = 1, 2, .., l).$$

Отсюда вытекает

Теорема 5.1. *Матричное уравнение $AX = B$ равносильно l СЛАУ:*

$$\begin{cases} AX_{(:,1)} = B_{(:,1)}, \\ AX_{(:,2)} = B_{(:,2)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ AX_{(:,l)} = B_{(:,l)}. \end{cases}$$

Замечание 5.1. 1) *Каждое уравнение $AX_{(:,k)} = B_{(:,k)}$, $(k = = 1, 2, .., l)$ есть матричная запись обычной системы уравнений, в которой неизвестными являются элементы k-го столбца матрицы X. Решив все системы, найдем все столбцы матрицы X, т. е. саму матрицу X.*

2) *Решая эти системы методом Гаусса – Жордана, необходимо расширенные матрицы* $[A|B_{(:,1)}]$, $[A|B_{(:,2)}]$, $\ldots$, $[A|B_{(:,l)}]$ *привести к виду* (α) *или* (β). *Это можно сделать одновременно, применив алгоритм метода Гаусса – Жордана к матрице* $[A|B]$ *– расширенной матрице уравнения* $AX = B$.

Пример. Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Решение. Как уже отмечалось, данное матричное уравнение равносильно двум системам

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Для решения этих систем надо их расширенные матрицы

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{array}\right] \text{ и } \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 8 \end{array}\right]$$

привести к виду (α) или (β). Это можно сделать одновременно, применив алгоритм метода Гаусса – Жордана к расширенной матрице:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 8 \end{array}\right] \iff [R_2 - 3R_1] \iff \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \end{array}\right] \iff [-0.5R_2] \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right] \iff [R_1 - 2R_2] \iff \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right].$$

Первая расширенная матрица приведена к виду

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \iff \begin{cases} x_{11} = -3, \\ x_{21} = 4. \end{cases}$$

Вторая расширенная матрица приведена к виду

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \iff \begin{cases} x_{12} = -4, \\ x_{22} = 5. \end{cases}$$

Поэтому $X = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$.

Замечание 5.2. *Рассмотрим уравнение* $XA = B$. *Транспонируем обе его части:* $A^m X^m = B^m$. *Решив это уравнение описанным ранее способом, получим матрицу* X^m. *Транспонировав ее* $(X^m)^m = X$, *получим искомую матрицу* X.

Пример. Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Решение. Как уже отмечалось, данное матричное уравнение равносильно такому:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Решим его описанным ранее способом:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{array}\right] \Longleftrightarrow [R_2 - 2R_1] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \end{array}\right] \Longleftrightarrow [-0.5R_2] \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \Longleftrightarrow [R_1 - 3R_2] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right].$$

Поэтому $X^{\text{т}} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, а $X = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.

Теорема 5.2. *Пусть $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$ и $B \in \mathcal{M}_{n\times l}$ – заданные матрицы, а $X \in \mathcal{M}_{m\times l}$ – искомая матрица. Матричное уравнение $AX = B$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $\operatorname{rang}(A) = m$, где m – число строк неизвестной матрицы X. Если $\operatorname{rang}(A) < m$, то уравнение $AX = B$ или не имеет решения при $\operatorname{rang}(A) < \operatorname{rang}([A|B])$, или имеет бесконечное множество решений при $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}([A|B])$.*

Пример. Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \\ 11 & 12 & 13 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 9 & 10 \\ 14 & a \end{bmatrix}.$$

Решение. Применим алгоритм Гаусса–Жордана к расширенной матрице:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & a \end{array}\right] \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} R_2 - 6R_1 \\ R_3 - 11R_1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -20 \\ 0 & -10 & -20 & -30 & a-55 \end{array}\right] \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} R_3 - 2R_2 \\ -0.2R_2 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-15 \end{array}\right] \Longleftrightarrow [R_1 - 2R_2] \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-15 \end{array}\right].$$

Первый столбец матрицы X находим из системы

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longleftrightarrow \begin{cases} x_{11} - x_{31} = -2, \\ x_{21} + 2x_{31} = 3, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_{11} = -2 + t, \\ x_{21} = 3 - 2t, \\ x_{31} = t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Второй столбец матрицы X находим из системы

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & a-15 \end{array}\right] \Longleftrightarrow \begin{cases} x_{12} - x_{32} = -3, \\ x_{22} + 2x_{32} = \ 4, \\ 0 = a - 15. \end{cases}$$

При $a \neq 15$ система решений не имеет. При $a = 15$ находим

$$\begin{cases} x_{12} = -3 + w, \\ x_{22} = 4 - 2w, \qquad w \in \mathbb{R}. \\ x_{32} = w, \end{cases}$$

Отсюда при $a \neq 15$ матричное уравнение решений не имеет. При $a = 15$ решение есть:

$$X = \left[\begin{array}{cc} -2+t & -3+w \\ 3-2t & 4-2w \\ t & w \end{array}\right], \text{ где } t, w \in \mathbb{R}.$$

Теорема 5.3. *Пусть $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ и $B \in \mathcal{M}_{n\times l}$ – заданные матрицы, а $X \in \mathcal{M}_{n\times l}$ – искомая матрица. Матричное уравнение $AX = B$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда матрица A невырождена, т. е.* $\det(A) \neq 0$.

5.2. Правая и левая обратные матрицы

Определение 5.2. *Пусть $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$. Матрица $X \in \mathcal{M}_{m\times n}$ называется правой обратной матрицей к матрице A, если $AX = I_{n\times n}$.*

Обозначение: $X = A_{\text{п}}^{-1}$. По определению $AA_{\text{п}}^{-1} = I$.
Пример. Найти матрицу $A_{\text{п}}^{-1}$, обратную справа к матрице

$$A = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 5 & 8 \\ 1 & 6 & 8 \end{array}\right].$$

Решение. Матрица $A_{\text{п}}^{-1}$ находится как решение уравнения

$$AX = I \Longleftrightarrow [A|I] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 5 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right] \Longleftrightarrow [R_2 - R_1] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 5 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow [R_1 - 5R_2] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 8 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \Longleftrightarrow A_{\text{п}}^{-1} = \left[\begin{array}{cc} 6-8t & -5-8w \\ -1 & 1 \\ t & w \end{array}\right], \ t, w \in \mathbb{R}.$$

Определение 5.3. *Пусть $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$. Матрица $Y \in \mathcal{M}_{m\times n}$ называется левой обратной матрицей к матрице A, если $YA = I_{m\times m}$.*

Обозначение: $Y = A_{л}^{-1}$. По определению $A_{л}^{-1}A = I$.

Пример. Найти матрицу $A_{л}^{-1}$, обратную слева к матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Решение. Матрица $A_{л}^{-1}$ находится как решение уравнения

$$YA = I \Longleftrightarrow A^{т}Y^{т} = I \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{c} R_2 - 5R_1 \\ R_3 - 8R_1 \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Очевидно, ранг расширенной матрицы больше ранга матрицы A, поэтому уравнение $YA = I$ не имеет решения и, следовательно, $A_{л}^{-1}$ не существует.

Теорема 5.4. *Если у матрицы A существуют и левая и правая обратные матрицы, то они совпадают и единственны, а матрица A – квадратная и невырожденная.*

5.3. Обратная матрица

Определение 5.4. *Пусть $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Матрица $Z \in \mathcal{M}_{n\times n}$ называется обратной матрицей к матрице A, если она одновременно и левая и правая обратная матрица, т. е. $ZA = I$ и $AZ = I$.*

Обозначение: $Z = A^{-1}$. По определению $A^{-1}A = I$ и $AA^{-1} = I$.

Из описанного ранее вытекает следующая теорема.

Теорема 5.5. *У матрицы A существует (единственная) обратная матрица тогда и только тогда, когда $\det(A) \neq 0$, т. е. когда матрица A невырождена.*

Чтобы найти обратную матрицу A, надо решить матричное уравнение $AX = I$.

Пример. Найти обратную матрицу A^{-1} для $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Решение. Чтобы найти обратную матрицу A^{-1}, составим расширенную матрицу $[A|I]$ и преобразуем ее к виду $[I|A^{-1}]$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \Longleftrightarrow [R_2 - 3R_1] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{c} R_1 + R_2 \\ -0.5R_2 \end{array}\right] \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right] \Longleftrightarrow \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Пример. Найти обратную матрицу A^{-1} для $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 7 \end{bmatrix}$.

Решение. Чтобы найти обратную матрицу A^{-1}, составим расширенную матрицу $[A|I]$ и преобразуем ее к виду $[I|A^{-1}]$:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{c} R_2+R_1 \\ R_3-2R_1 \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{c} R_1+2R_2 \\ R_3-2R_2 \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 7 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -2 & 1 \end{array}\right] \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{c} R_1+7R_3 \\ R_2+3R_3 \\ -R_3 \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -25 & -12 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -11 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & -1 \end{array}\right] \Longleftrightarrow \quad A^{-1} = \left[\begin{array}{rrr} -25 & -12 & 7 \\ -11 & -5 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{array}\right].$$

Теорема 5.6. *Обратная матрица к невырожденной матрице*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

находится по формуле

$$A = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^m,$$

где A_{ik} – алгебраические дополнения элементов a_{ik} матрицы A.

Замечание 5.3. *Для матрицы второго порядка*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

Пример. Найти обратную матрицу A^{-1} для $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Решение. Найдем $\det(A) = -2$. По предыдущему замечанию

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

5.4. Свойства обратной матрицы

Пусть матрицы A, $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ и каждая из них имеет обратную. Тогда:
1) $(A^{-1})^{-1} = A$;
2) $(A^{\text{т}})^{-1} = (A^{-1})^{\text{т}}$;

3) $\forall\lambda \neq 0 \ \ (\lambda A)^{-1} = 1/\lambda A^{-1}$;
4) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
5) $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$;
6) $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$;
7) $(P_{ik})^{-1} = P_{ik}$;
9) $\forall\lambda \neq 0 \ \ (D_i(\lambda))^{-1} = D_i(1/\lambda)$;
10) $\forall\lambda \in \mathbb{R} \ \ (L_{ik}(\lambda))^{-1} = L_{ik}(-\lambda) \ (i \neq k)$;
11) если $A = \operatorname{diag}(d_1, .., d_n)$ и $\det(A) = d_1...d_n \neq 0$, то $A^{-1} = \operatorname{diag}(1/d_1, ..., 1/d_n)$.

Теорема 5.7. 1) *Перестановка строк (столбцов) i и k в матрице A влечет перестановку i-го и k-го столбцов (строк) в A^{-1}.*

2) *Умножение i-й строки (столбца) матрицы A на число $\lambda \neq 0$ влечет умножение i-го столбца (строки) в A^{-1} на число $1/\lambda$.*

3) *Прибавление к i-й строке (столбцу) k-й строки (столбца) матрицы A, умноженной на число λ, влечет прибавление к k-му столбцу (строке) i-го столбца (строки) в A^{-1}, умноженного на число $-\lambda$.*

Теорема 5.8. 1) *Если у матрицы A существует левая обратная матрица $A_л^{-1}$, то матричное уравнение $AX = B$ имеет решение $X = A_л^{-1}B$.*

2) *Если у матрицы A существует правая обратная матрица $A_п^{-1}$, то матричное уравнение $YA = B$ имеет решение $Y = BA_п^{-1}$.*

Пример. Решить матричное уравнение $XA = B$, где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решение. В 5.2 была найдена правая обратная матрица:

$$A_п^{-1} = \begin{bmatrix} 6-8t & -5-8w \\ -1 & 1 \\ t & w \end{bmatrix}, \quad t, w \in \mathbb{R}.$$

Отсюда $X = BA_п^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6-8t & -5-8w \\ -1 & 1 \\ t & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

В заключение рекомендуем выполнить предлагаемые упражнения.

5.5. Упражнения

В упражнениях 1–6 найти A^{-1}.

5.1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$. **5.2.** $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. **5.3.** $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

5.4. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$. **5.5.** $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$. **5.6.** $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$.

В упражнениях 7–9 записать систему уравнений в матричной форме $AX = B$ и решить ее по формуле $X = A^{-1}B$.

5.7. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 = 2. \end{cases}$ **5.8.** $\begin{cases} x_1 - x_2 = 5, \\ 3x_1 - 4x_2 = 2. \end{cases}$ **5.9.** $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 10, \\ -x_1 + 3x_2 = 5. \end{cases}$

В упражнениях 10–11 найти A^{-1}.

5.10. $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 11 \\ 1 & 3 & -15 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$. **5.11.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

В упражнениях 12–17 используются матрицы: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; $C^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Найти Q^{-1}, где Q – данная матрица.

5.12. $Q = AC$. **5.13.** $Q = A^{\text{т}}$. **5.14.** $Q = C^{\text{т}}A^{\text{т}}$.
5.15. $Q = CB^{-1}$. **5.16.** $Q = 2A$. **5.17.** $Q = (AC)B^{-1}$.

В упражнениях 18–20 проверить равенство $A^{-1} = 2I - A$.

5.18. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **5.19.** $A = \begin{bmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & d & 1 \end{bmatrix}$. **5.20.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & e \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

5.21. Найти матрицу, обратную к матрице $A = \begin{bmatrix} \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{bmatrix}$.

5.22. Выразить x_1, x_2 через y_1, y_2, если $\begin{cases} -5x_1 + 3x_2 = y_1, \\ 2x_1 - x_2 = y_2. \end{cases}$

5.23. Найти матрицу B, если $AB = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ и $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \\ -9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

5.24. Пусть $A, B, C \in \mathcal{M}_{n\times n}$ – невырожденные матрицы. Упростить выражение $(A^{-1}B)^{-1}(C^{-1}A)^{-1}(B^{-1}C)^{-1}$.

Ответы

5.1. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$. **5.2.** $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. **5.3.** $A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$. **5.4.** $A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. **5.5.** Не существует. **5.6.** Не существует. **5.7.** $x_1 = 6$, $x_2 = -8$. **5.8.** $x_1 = 18,\ x_2 = 13$. **5.9.** $x_1 = x_2 = 5/2$. **5.10.** $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
5.11. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}$. **5.12.** $Q^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$. **5.13.** $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.
5.14. $Q^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$. **5.15.** $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$. **5.16.** $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
5.17. $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 11 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$. **5.21.** $A^{-1} = \begin{bmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \\ -\cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{bmatrix}$. **5.22.** $\begin{cases} x_1 = y_1 + 3y_2, \\ x_2 = 2y_1 + 5y_2. \end{cases}$
5.23. $B = \begin{bmatrix} -5 & 13 \\ 4 & 19 \\ -26 & -1 \end{bmatrix}$. **5.24.** I.

6. Элементы теории линейных пространств

6.1. Понятие линейного пространства

Пусть $\mathbb{L}$ – непустое множество, элементы которого назовем векторами и обозначим $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}, \ldots$.

Определение 6.1. *Множество $\mathbb{L}$ называется действительным линейным (векторным) пространством, если*

) задан закон, по которому любым двум элементам $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{L}$ ставится в соответствие третий элемент из $\mathbb{L}$, называемый их суммой и обозначаемый $\vec{x} + \vec{y}$;

) задан закон, по которому любому $\vec{x} \in \mathbb{L}$ и любому $\alpha \in \mathbb{R}$ ставится в соответствие элемент из $\mathbb{L}$, называемый произведением $\vec{x}$ на α и обозначаемый $\alpha\vec{x}$;

) для любых $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{L}$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ выполняются аксиомы:

1) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ *– коммутативность сложения;*
2) $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ *– ассоциативность сложения;*
3) *в $\mathbb{L}$ существует элемент, который называют нулевым и обозначают $\vec{0}$, такой, что для любого $\vec{x} \in \mathbb{L}$* $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$;
4) *для любого $\vec{x} \in \mathbb{L}$ существует вектор, который называют противоположным вектору $\vec{x}$ и обозначают $-\vec{x}$, такой, что $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$;*
5) $1\vec{x} = \vec{x}$;
6) $\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}$;
7) $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$;
8) $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$.

Заменяя $\mathbb{R}$ на $\mathbb{C}$, получим определение комплексного линейного пространства.

Из аксиом 1–8 легко получить дополнительные свойства линейного пространства:

9) нулевой элемент – единственный;
10) для любого $\vec{x} \in \mathbb{L}$ противоположный ему элемент – единственный;
11) $0\vec{x} = \vec{0}$;
12) $(-1)\vec{x} = -\vec{x}$;
13) $\alpha\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha = 0$ или $\vec{x} = \vec{0}$.

Сумму $\vec{x} + (-\vec{y})$ называют разностью элементов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ и обозначают $\vec{x} - \vec{y}$. Очевидно, $\vec{z} = \vec{x} - \vec{y} \Leftrightarrow \vec{z} + \vec{y} = \vec{x}$.

6.2. Примеры линейных пространств

Пример 1. Пусть $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) – множество столбцов длины n вещественных (комплексных) чисел. Операции сложения и умножения на число определим так же, как для матриц: если $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$, то положим $\vec{x}+\vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \dots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$, $\alpha\vec{x} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \dots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}$. Очевидно, аксиомы 1–8 из определения линейного пространства выполнены. Роль нулевого элемента играет $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$. Роль противоположного к $\vec{x}$ элемента играет $-\vec{x} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ \dots \\ -x_n \end{bmatrix}$. Следовательно, $\mathbb{R}^n$ – вещественное, а $\mathbb{C}^n$ – комплексное линейные пространства.

Пример 2. Множество $\mathcal{M}_{n\times m}$ матриц с вещественными (комплексными) элементами размера $n \times m$ с обычными операциями сложения и умножения на число есть вещественное (комплексное) линейное пространство.

Пример 3. Рассмотрим

P_∞ – множество всех полиномов ;

P_n – множество всех полиномов степени, не превосходящей n;

$S[a, b]$ – множество всех действительных функций на $[a, b]$;

$C[a, b]$ – множество всех непрерывных функций на $[a, b]$;

$C_1[a, b]$ – множество всех непрерывно дифференцируемых функций на $[a, b]$;

$C_n[a, b]$ – множество всех n раз непрерывно дифференцируемых функций на $[a, b]$.

Пусть на этих множествах определены обычные (поточечные) операции сложения функций и умножения их на числа. Очевидно, данные операции удовлетворяют аксиомам 1–8. Следовательно, указанные множества есть линейные пространства.

Пример 4. Пусть X' и X'' – 2 решения ОСЛАУ $AX = \mathbf{0}$. Тогда для $\forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ $\alpha X' + \beta X''$ – также есть решение ОСЛАУ $AX = \mathbf{0}$. Действительно, $A(\alpha X' + \beta X'') = \alpha AX' + \beta AX'' = \alpha\mathbf{0} + \beta\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Следовательно, множество решений ОСЛАУ есть линейное пространство.

6.3. Подпространство линейного пространства

Определение 6.2. *Пусть $\mathbb{L}$ – линейное пространство, W – его непустое подмножество, такое, что 1) для любых $\vec{x}, \vec{y} \in W$ $\vec{x} + \vec{y} \in W$; 2) для любого $c \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ и любого $\vec{x} \in W$ $c\vec{x} \in W$. Тогда W называется подпространством линейного пространства $\mathbb{L}$.*

Пример. Рассмотрим линейное пространство $\mathcal{M}_{2\times 2}$ и его подмножество

$$W = \{A \ : A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}, \ a_{12}, a_{21} \in \mathbb{R}\}.$$

Тогда W есть подпространство линейного пространства $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

Решение. Если $A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{bmatrix} \in W$, то $A + B = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & 0 \end{bmatrix} \in W$. Для $c \in R$ имеем $cA = \begin{bmatrix} 0 & ca_{12} \\ ca_{21} & 0 \end{bmatrix} \in W$. Поэтому W есть подпространство линейного пространства $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

Пример. Рассмотрим линейное пространство $\mathcal{M}_{2\times 2}$ и его подмножество

$$W = \{A \ : A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \ ad = 0, \ bc = 0\}.$$

Тогда W не является подпространством линейного пространства $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

Решение. Очевидно, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in W$, но $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \notin W$. Поэтому W не является подпространством линейного пространства $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

Упражнение. Рассмотрим линейное пространство $C[a, b]$ и его подмножество

$$W = \{f(x) \in C[a, b] : \ f(a) = f(b)\}.$$

Показать, что W есть подпространство линейного пространства $C[a, b]$.

Определение 6.3. *Пусть $\mathbb{L}$ – линейное пространство. Говорят, что элемент $\vec{x} \in \mathbb{L}$ есть линейная комбинация элементов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n \in \mathbb{L}$, если существуют числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, такие, что*

$$\vec{x} = a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + \cdots + a_n\vec{x}_n.$$

Определение 6.4. *Пусть Q – непустое подмножество линейного пространства $\mathbb{L}$. Линейной оболочкой множества Q называется множество $Span(Q)$ линейных комбинаций элементов из Q:*

$$Span(Q) = \{\vec{x} \ : \ \vec{x} = a_1\vec{x}_1 + \cdots + a_n\vec{x}_n, \ \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \in Q, \ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\}.$$

Пример. Рассмотрим линейное пространство $\mathcal{M}_{2\times 2}$ и его подмножество

$$W = \{A \ : A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix},\ a_{12}, a_{21} \in \mathbb{R}\}.$$

Тогда $W = \mathrm{S}pan(Q)$, где $Q = \left\{ E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Упражнение. Найти линейную оболочку множества $Q = \{1 - 2t^3 + t^5, 2 + 4t^3 - 2t^5, 1\}$ в линейном пространстве P_∞.

6.4. Линейная зависимость векторов

Определение 6.5. *Система (множество, набор) векторов $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_m$ линейного пространства $\mathbb{L}$ называется линейно независимой, если равенство $a_1\vec{e}_1 + ... + a_m\vec{e}_m = \vec{0}$ возможно только при $a_1 = ... = a_m = 0$. В противном случае векторы $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_m$ называются линейно зависимыми.*

Пример. Элементы $\sqrt{x}$, $1/x$, x^2 линейного пространства $C[1,9]$ линейно независимы.

Решение. Допустим противное. Тогда равенство $a_1\sqrt{x} + a_2(1/x) + a_3x^2 = 0$ верно для всех $x \in [1;9]$ при ненулевом наборе коэффициентов a_1, a_2, a_3. При $x = 1$, $x = 4$, $x = 9$ имеем

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0, \\ 2a_1 + (1/4)a_2 + 16a_3 = 0, \\ 3a_1 + (1/9)a_2 + 81a_3 = 0. \end{cases}$$

Так как главный определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1/4 & 16 \\ 3 & 1/9 & 81 \end{vmatrix} = -\frac{1729}{18} \neq 0,$$

то система имеет единственное решение $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Получили противоречие. Следовательно, элементы $\sqrt{x}$, $1/x$, x^2 линейно независимы.

Определение 6.6. *Бесконечная система векторов линейного пространства $\mathbb{L}$ называется линейно независимой, если любая ее конечная подсистема линейно независима. В противном случае эта система называется линейно зависимой.*

Пример. Бесконечная система элементов $1, x, x^2, ..., x^n, ...$ линейного пространства P_∞ линейно независима.

Отметим свойства линейно независимой системы векторов:

1) она не содержит нулевого элемента;

2) любая ее подсистема – линейно независима;

3) любая система, полученная из исходной перестановкой каких-то ее элементов, также будет линейно независимой.

Утверждение 6.1. *Элементы $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_m$ линейного пространства $\mathbb{L}$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда один из них можно представить как линейную комбинацию остальных.*

Пример. Элементы $1, \cos^2(x), \cos(2x)$ линейного пространства $C(\mathbb{R})$ линейно зависимы, так как один из них можно представить как линейную комбинацию остальных: $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.

6.5. Линейная зависимость векторов в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{R}^n$

Пусть векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_m \in \mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$ имеют координаты:

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{21} \\ \dots \\ e_{n1} \end{bmatrix}, \ \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} e_{12} \\ e_{22} \\ \dots \\ e_{n2} \end{bmatrix}, \ \dots, \ \vec{e}_m = \begin{bmatrix} e_{1m} \\ e_{2m} \\ \dots \\ e_{nm} \end{bmatrix}.$$

Обозначим символом $[\vec{e}_1\vec{e}_2...\vec{e}_m]$ матрицу, столбцы которой составлены из координат векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_m$:

$$[\vec{e}_1\vec{e}_2...\vec{e}_m] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1m} \\ e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{n1} & e_{n2} & \dots & e_{nm} \end{bmatrix}.$$

Равенство $x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + x_m\vec{e}_m = \vec{0}$ равносильно равенству

$$\begin{cases} e_{11}x_1 + e_{12}x_2 + \cdots + e_{1m}x_m = 0, \\ e_{21}x_1 + e_{22}x_2 + \cdots + e_{2m}x_m = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ e_{n1}x_1 + e_{n2}x_2 + \cdots + e_{nm}x_m = 0. \end{cases} \qquad (6.1)$$

Поэтому вопрос о том, линейно зависима или независима система векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_m \in \mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$ равносилен вопросу имеет или нет система уравнений (6.1) ненулевое решение.

Следствие 6.1. *Система векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_m$ линейно независима тогда и только тогда, когда $\operatorname{rang}[\vec{e}_1\vec{e}_2...\vec{e}_m] = m$.*

Следствие 6.2. *Если $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_m \in \mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$ и $m > n$, то система векторов линейно зависима.*

Следствие 6.3. *Система векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n \in \mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$ линейно зависима (независима) тогда и только тогда, когда $\det[\vec{e}_1\vec{e}_2...\vec{e}_n] = 0 (\neq 0)$.*

Пример. При каких a и b векторы $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ a \end{bmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ b \end{bmatrix}$ линейно зависимы (независимы) в $\mathbb{R}^3$?

Решение. По следствию 6.3 векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ линейно зависимы (независимы) $\Longleftrightarrow \det[\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3] = 0\ (\neq 0) \Longleftrightarrow \det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & a & b \end{bmatrix} =$
$= 0\ (\neq 0) \Longleftrightarrow \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -7 \\ 3 & a+6 & b-9 \end{bmatrix} = 0\ (\neq 0) \Longleftrightarrow 7(a+b-3) = 0\ (\neq 0)$
$\Longleftrightarrow a + b = 3\ (\neq 3)$.

Итак, при $a + b = 3$ векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ линейно зависимы. Очевидно, $\vec{e}_1 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$. При $a + b \neq 3$ векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ линейно независимы.

6.6. Базис в линейном пространстве

Определение 6.7. *Система векторов в линейном пространстве $\mathbb{L}$ называется максимальной линейно независимой системой, если она линейно независима, но добавление к ней любого элемента, не входящего в эту систему, делает ее линейно зависимой.*

Определение 6.8. *Линейное пространство $\mathbb{L}$ называется конечномерным, если в $\mathbb{L}$ существует максимальная линейно независимая система $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_m$, состоящая из конечного числа элементов. Число m называется размерностью линейного пространства $\mathbb{L}$. Обозначение:* $\dim(\mathbb{L}) = m$.

Отметим без доказательства следующий фундаментальный факт: в конечномерном пространстве число элементов в максимальных линейно независимых системах одинаково, т. е. определение размерности линейного пространства корректно.

Пример. Рассмотрим линейное пространство всех полиномов степени не превосходящей n:

$$P_n = \{a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n \mid a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}\}.$$

Покажем, что система $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ есть максимальная линейно независимая система векторов в P_n . Действительно, равенство

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n = 0$$

при всех $x \in \mathbb{R}$ возможно только при нулевых коэффициентах, так как в противном случае у ненулевого полинома окажется бесконечное число корней, что невозможно. Если же к этой системе добавить любой другой элемент P_n, то новая система

$$\{1, x, x^2, ..., x^n, a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n\}$$

становится линейно зависимой, так как элемент $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$ есть линейная комбинация остальных элементов системы $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$. Следовательно, пространство P_n конечномерное и его размерность $\dim(P_n) = n + 1$.

Очевидно, что в пространстве всех полиномов P_∞ нет конечной максимальной линейно независимой системы и оно бесконечномерно.

Упражнение. Показать, что в пространствах $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{R}^n$ векторы

$$\vec{i}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \vec{i}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \dots, \ \vec{i}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$$

образуют максимальную линейно независимую систему, а потому $\dim(\mathbb{C}^n) = n$ и $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

Далее будем рассматривать только конечномерные пространства.

Определение 6.9. *Пусть $\mathbb{L}$ – линейное пространство размерности n. Любая упорядоченная максимальная линейно независимая система из n векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n \in \mathbb{L}$ называется базисом пространства $\mathbb{L}$.*

Утверждение 6.2. *Пусть $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ – базис в линейном пространстве $\mathbb{L}$. Тогда любой вектор $\vec{x} \in \mathbb{L}$ может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации элементов базиса, т. е. $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + ... + x_n\vec{e}_n$.*

Определение 6.10. *Пусть $E = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ – базис в линейном пространстве $\mathbb{L}$. Числа $x_1, ..., x_n$, такие, что $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + ... + x_n\vec{e}_n$, называются координатами вектора $\vec{x}$ в базисе $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$. Обозначения:*

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n} = x_1\vec{e}_1 + ... + x_n\vec{e}_n; \quad [\vec{x}]_E = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

6.7. Базис в пространствах $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{R}^n$

Перейдем к пространствам $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{R}^n$. Очевидно, что $(\vec{i}_1, ..., \vec{i}_n)$ есть базис в этих пространствах, называемый стандартным. Всякий вектор $\vec{x} \in \mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$ есть столбец своих координат в стандартном базисе, так как

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} = x_1\vec{i}_1 + \dots + x_n\vec{i}_n,$$

т. е. $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}_{\vec{i}_1,\dots,\vec{i}_n}$. Обычно стандартный базис не указывается.

Утверждение 6.3. *Пусть $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ – базис в $\mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$ и известны координаты*

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{21} \\ \dots \\ e_{n1} \end{bmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} e_{12} \\ e_{22} \\ \dots \\ e_{n2} \end{bmatrix}, \dots, \vec{e}_n = \begin{bmatrix} e_{1n} \\ e_{2n} \\ \dots \\ e_{nn} \end{bmatrix}.$$

Пусть вектор $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$ *имеет координаты* $\vec{x} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{bmatrix}_{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n}$. *Тогда старые и новые координаты связаны соотношением*

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = [\vec{e}_1 ... \vec{e}_n] \begin{bmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{bmatrix}.$$

Определение 6.11. *Матрица $[\vec{e}_1\vec{e}_2...\vec{e}_n]$ называется матрицей перехода от стандартного базиса к базису $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ и обозначается $T_{(\vec{i}_1,\dots,\vec{i}_n)\to(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)}$. Эта матрица связывает координаты вектора в стандартном базисе и базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$:*

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = T_{(\vec{i}_1,\dots,\vec{i}_n)\to(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)} \begin{bmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{bmatrix}.$$

Утверждение 6.4. *Пусть $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ и $(\vec{f}_1, ..., \vec{f}_n)$ – два базиса в $\mathbb{C}^n$ $(\mathbb{R}^n)$ и вектор* $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$ *имеет в этих базисах координаты* $\vec{x} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{bmatrix}_{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n} = \begin{bmatrix} x''_1 \\ \dots \\ x''_n \end{bmatrix}_{\vec{f}_1,\dots,\vec{f}_n}$. *Тогда эти координаты связаны так:*

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{bmatrix} = [\vec{e}_1 ... \vec{e}_n]^{-1} [\vec{f}_1 ... \vec{f}_n] \begin{bmatrix} x''_1 \\ \dots \\ x''_n \end{bmatrix}.$$

Матрица $T_{(\vec{e_1}...,\vec{e_n})\to(\vec{f_1}...,\vec{f_n})} = [\vec{e_1}...\vec{e_n}]^{-1}[\vec{f_1}...\vec{f_n}]$ называется матрицей перехода от базиса $(\vec{e_1},...,\vec{e_n})$ к базису $(\vec{f_1},...,\vec{f_n})$.

Утверждение 6.5. *Пусть* $(\vec{e}_1,...,\vec{e}_n)$ *– базис в* $\mathbb{C}^n$, $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}_{\vec{e}_1,...,\vec{e}_n}$,

$\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}_{\vec{e}_1,...,\vec{e}_n} \in \mathbb{C}^n$. *Тогда*

$$\vec{x}+\vec{y} = \begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ \dots \\ x_n+y_n \end{bmatrix}_{\vec{e}_1,...,\vec{e}_n}; \quad \forall\lambda\in\mathbb{C} \;\; \lambda\vec{x} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \dots \\ \lambda x_n \end{bmatrix}_{\vec{e}_1,...,\vec{e}_n}.$$

Пример. Показать, что векторы $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$, и найти координаты вектора $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ в базисе $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$.

Решение. Так как $\det[\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3] = 1 \neq 0$, то векторы $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ линейно независимы, а потому образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Координаты $\vec{x}$ в этом базисе находятся из системы

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}_{\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3}.$$

Теорема 6.1. *Всякую линейно независимую систему векторов в* $\mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$ *можно дополнить до базиса.*

6.8. Линейные пространства со скалярным произведением

Определение 6.12. *Комплексное (вещественное) линейное пространство* $\mathbb{L}$ *называется унитарным (евклидовым) пространством, если каждой паре векторов* $\vec{x}$ *и* $\vec{y}$ *из* $\mathbb{L}$ *поставлено в соответствие комплексное (вещественное) число, обозначаемое символом* $(\vec{x},\vec{y})$, *причем выполнены следующие аксиомы:*

1) $(\vec{x},\vec{x}) \geq 0; (\vec{x},\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$;
2) $(\vec{x},\vec{y}) = \overline{(\vec{y},\vec{x})} \quad ((\vec{x},\vec{y}) = (\vec{y},\vec{x}))$;

3) $(\vec{x}+\vec{y},\vec{z})=(\vec{x},\vec{z})+(\vec{y},\vec{z})$;
4) *для любого* $\lambda\in\mathbb{C}(\mathbb{R})\quad(\lambda\vec{x},\vec{y})=\lambda(\vec{x},\vec{y})$.

Унитарное и евклидово пространства называются пространствами со скалярным произведением.

Из аксиом 1–4 вытекают следующие простые свойства скалярного произведения:
5) $(\vec{x}-\vec{y},\vec{z})=(\vec{x},\vec{z})-(\vec{y},\vec{z})$;
6) $(\vec{z},\vec{x}+\vec{y})=(\vec{z},\vec{x})+(\vec{z},\vec{y})$;
7) $(\vec{x},\lambda\vec{y})=\bar{\lambda}(\vec{x},\vec{y})$ $((\vec{x},\lambda\vec{y})=\lambda(\vec{x},\vec{y}))$;
8) $(\vec{x},\vec{0})=0$.

Определение 6.13. *Пусть* $\mathbb{L}$ *– пространство со скалярным произведением. Нормой (длиной) вектора* $\vec{x}\in\mathbb{L}$ *называется число* $\|\vec{x}\|=\sqrt{(\vec{x},\vec{x})}$.

Теорема 6.2. *Пусть* $\mathbb{L}$ *– пространство со скалярным произведением. Тогда для любых* $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{L}$ $|(\vec{x},\vec{y})|\le\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$ (*неравенство Коши – Буняковского*).

Теорема 6.3. *Норма вектора в унитарном* (*евклидовом*) *пространстве* $\mathbb{L}$ *обладает следующими свойствами: для любых* $\vec{x},\vec{y}\in$ $\in\mathbb{L}$, $\lambda\in\mathbb{C}(\mathbb{R})$
1) $\|\vec{x}\|\ge0$; $\|\vec{x}\|=0\Leftrightarrow\vec{x}=\vec{0}$;
2) $\|\lambda\vec{x}\|=|\lambda|\|\vec{x}\|$;
3) $\|\vec{x}+\vec{y}\|\le\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|$ (*неравенство треугольника*).

Пример. Пусть $\mathbb{L}$ – пространство $\mathbb{R}^2$ и пусть $A=\begin{bmatrix}3&2\\2&4\end{bmatrix}$. Покажем, что $(\vec{x},\vec{y})=(\vec{x})^{\text{т}}A\vec{y}$ есть скалярное произведение, а $\|\vec{x}\|=\sqrt{(\vec{x})^{\text{т}}A\vec{x}}$ есть норма в пространстве $\mathbb{L}$.

Решение. Пусть $\vec{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$, $\vec{y}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$. Тогда

$$(\vec{x},\vec{y})=(\vec{x})^{\text{т}}A\vec{y}=[x_1,x_2]\begin{bmatrix}3&2\\2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=3x_1y_1+2x_1y_2+2x_2y_1+4x_2y_2.$$

Проверим свойство 1 скалярного произведения:

$$(\vec{x},\vec{x})=3x_1^2+4x_1x_2+4x_2^2=2x_1^2+(x_1+2x_2)^2\ge0 \text{ и } (\vec{x},\vec{x})=0\Longleftrightarrow x_1=x_2=0.$$

Свойство 2 скалярного произведения очевидно, а свойства 3 и 4 следуют из свойств матричного умножения:

$$3)\ (\vec{x}+\vec{y},\vec{z})=(\vec{x}+\vec{y})^{\text{т}}A\vec{z}=(\vec{x})^{\text{т}}A\vec{z}+(\vec{y})^{\text{т}}A\vec{z}=(\vec{x},\vec{z})+(\vec{y},\vec{z});$$

$$4)(\alpha\vec{x},\vec{z}) = (\alpha\vec{x})^{\text{т}} A\vec{z} = \alpha(\vec{x})^{\text{т}} A\vec{z} = \alpha(\vec{x},\vec{z}).$$

Упражнение. Показать, что $(p,q) = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$ есть скалярное произведение, а $\|p\| = \sqrt{p^2(0)+p^2(1)+p^2(2)}$ есть норма в пространстве P_2 полиномов степени не выше второй.

Определение 6.14. *Пусть* $\mathbb{L}$ *– линейное пространство и каждому вектору* $\vec{x} \in \mathbb{L}$ *поставлено в соответствие число* $\|\vec{x}\| \in \mathbb{R}$ *так, что выполнены аксиомы:*

1) $\|\vec{x}\| \geq 0; \|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$;
2) $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda|\|\vec{x}\|$;
3) $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ *(неравенство треугольника).*

Тогда $\mathbb{L}$ *называется нормированным пространством, а число* $\|\vec{x}\|$ *– нормой вектора* $\vec{x}$.

Следствие 6.4. *Всякое линейное пространство со скалярным произведением является нормированным пространством относительно нормы* $\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x},\vec{x})}$.

Пример. Для любых $f, g \in C[a,b]$ положим $(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$. Тогда (f,g) есть скалярное произведение, а $C[a,b]$ – евклидово пространство. В этом пространстве норма $\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$, а неравенство Коши – Буняковского имеет вид

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx.$$

В пространстве $C[a,b]$ можно ввести еще много разных норм, не порожденных скалярным произведением. Простейшая из них – так называемая равномерная норма: $\|f\| = \sup_{[a,b]} |f(x)|$. Проверьте сами аксиомы нормы.

6.9. Скалярное произведение и норма в пространствах $\mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$

Утверждение 6.6. *Для любых* $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$ *положим*

$$(\vec{x},\vec{y}) = (\vec{y})^* \vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \quad \left((\vec{x},\vec{y}) = (\vec{y})^m \vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i y_i \right).$$

Тогда $\mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$ *есть унитарное (евклидово) пространство относительно введенного ранее скалярного произведения с нормой*

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \quad \left(\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right).$$

Неравенство Коши – Буняковского в пространстве $\mathbb{C}^n$ имеет вид

$$|\sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2}.$$

Замечание 6.1. *Пусть* $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ *– произвольный базис в* $\mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$ *и векторы* $\vec{x}, \vec{y}$ *в этом базисе имеют координаты* $\vec{x} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \ldots \\ x'_n \end{bmatrix}_{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n}$, $\vec{y} = \begin{bmatrix} y'_1 \\ \ldots \\ y'_n \end{bmatrix}_{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n}$. *Тогда в общем случае*

$$(\vec{x}, \vec{y}) \neq \sum_{i=1}^{n} x'_i \bar{y}'_i \ \text{и} \ \|\vec{x}\| \neq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x'_i|^2}.$$

Например, как уже отмечалось, вектор $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ в базисе $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ имеет координаты $\vec{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}_{\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3}$.

Отсюда $\|\vec{x}\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{35} \neq \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{33}$.

6.10. Угол между векторами в $\mathbb{R}^n$. Ортогональность

Определение 6.15. *Углом между векторами из* $\mathbb{R}^n$ $\vec{a} \neq \vec{0}$ *и* $\vec{b} \neq \vec{0}$ *называется такой угол* $\widehat{\vec{a}\vec{b}} \in [0; \pi]$, *что* $\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = \dfrac{(\vec{a}, \vec{b})}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}$.

Замечание 6.2. *Из неравенства Коши – Буняковского* $|(\vec{a}, \vec{b})| \le$

$\leq \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$ *следует, что* $-1 \leq \dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|} \leq 1$, *а потому определение угла* $\widehat{\vec{a}\vec{b}}$ *корректно.*

Теорема 6.4. $\widehat{\vec{a}\vec{b}}$ – *острый (прямой, тупой)* $\Leftrightarrow$ $(\vec{a},\vec{b}) > 0 (= 0, < 0)$.

Определение 6.16. *Векторы* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *из* $\mathbb{C}^n$ $(\mathbb{R}^n)$ *называются ортогональными, если* $(\vec{a},\vec{b}) = 0$.

Утверждение 6.7. *Если* $(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_m)$ – *попарно ортогональные и не равные* $\vec{0}$ *векторы из* $\mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$, *то они линейно независимы.*

6.11. Ортогональный базис

Определение 6.17. *Базис* $(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ *в* $\mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$ *называется ортогональным базисом (), если он состоит из попарно ортогональных векторов:*

$$(\vec{e}_i,\vec{e}_k) = 0,\ i \neq k,\ i,k = \overline{1,n}.$$

Если кроме того норма каждого вектора равна единице, то базис называется ортонормированным базисом () :

$$(\vec{e}_i,\vec{e}_k) = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq k \\ 1, & \text{если } i = k \end{cases},\ i,k = \overline{1,n}.$$

Пример. Стандартный базис $(i_1,\ldots,i_n)$ есть ОНБ в $\mathbb{C}^n$ и в $\mathbb{R}^n$.

Пример. Для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ векторы $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{bmatrix}$ есть ОНБ в $\mathbb{R}^2$ и в $\mathbb{C}^2$.

Пример. Для любых $\theta,\varphi \in \mathbb{R}$ векторы $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\theta)\sin(\varphi) \\ -\sin(\theta) \end{bmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}$ есть ОНБ в $\mathbb{R}^3$ и в $\mathbb{C}^3$.

Теорема 6.5. *Пусть* $(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ *есть ОНБ в* $\mathbb{C}^n$ *и* $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{C}^n$. *Пусть* $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}_{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n}$, $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix}_{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n}$. *Тогда* $x_k = (\vec{x},\vec{e}_k)$, $y_k = (\vec{y},\vec{e}_k)$, $k = 1,2,\ldots,n$; $(\vec{x},\vec{y}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\bar{y}_i$ *и* $\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2}$.

Теорема 6.6. *Всякую систему попарно ортогональных векторов из $\mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$ можно дополнить до ортогонального базиса.*

6.12. Унитарные и ортогональные матрицы

Определение 6.18. *Матрица $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ называется унитарной (ортогональной), если ее столбцы образуют ОНБ в $\mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$.*

Теорема 6.7. *A – унитарная матрица тогда и только тогда, когда $A^* = A^{-1}$.*

Утверждение 6.8. *Пусть A – унитарная (ортогональная) матрица. Тогда:* 1) $|\det(A)| = 1$;
2) *для любого* $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ $(\mathbb{R}^n)$ $\|A\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$;
3) *для любых* $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$ $(\mathbb{R}^n)$ $\widehat{A\vec{x}\ A\vec{y}} = \widehat{\vec{x}\ \vec{y}}$;
4) *для любых* $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$ $(\mathbb{R}^n)$ $(A\vec{x}, A\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y})$.

Рис. 6.1 и 6.2 иллюстрируют свойства 2 и 3 из утверждения 6.8 для случая $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$.

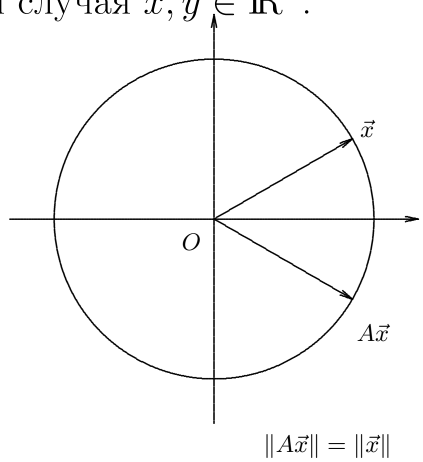


Рис. 6.1

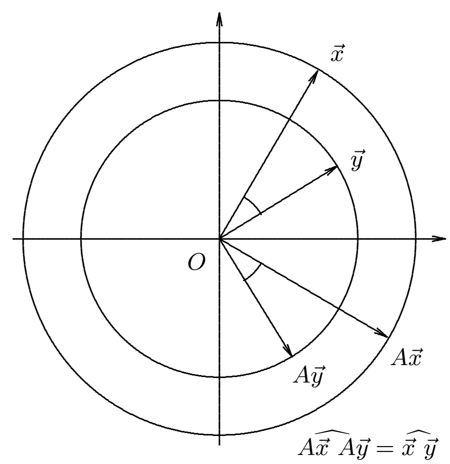


Рис. 6.2

Пример. Для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ матрица $A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$ есть ортогональная матрица в $\mathbb{R}^2$ и унитарная в $\mathbb{C}^2$.

Пример. Для любых $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ матрица

$$A = \begin{bmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) & \cos(\theta)\cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) & \cos(\theta)\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \end{bmatrix}$$

есть ортогональная матрица в $\mathbb{R}^3$ и унитарная в $\mathbb{C}^3$.

Теорема 6.8. *Пусть $\vec{x}_1, \vec{x}_2, .., \vec{x}_n \in \mathbb{C}^n$ – попарно ортогональные векторы, $A = [\vec{x}_1\vec{x}_2...\vec{x}_n]$. Тогда $A^{-1} = \operatorname{diag}(1/\|\vec{x}_1\|^2, .., 1/\|\vec{x}_n\|^2)A^*$.*

Пример. Пусть $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Тогда $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ – попарно ортогональные векторы в $\mathbb{C}^3$. Вычислим $\|\vec{x}_1\| = \sqrt{3}, \|\vec{x}_2\| = \sqrt{2}, \|\vec{x}_3\| = \sqrt{6}$. По теореме 6.8

$$[\vec{x}_1\vec{x}_2\vec{x}_3]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/6 & -1/3 & 1/6 \end{bmatrix}.$$

6.13. Процесс ортогонализации базиса Грама – Шмидта

В 6.11 и 6.12 было показано, что в вычислительном отношении ОНБ более удобен, чем базис, не являющийся таковым. Как, имея произвольный базис $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n)$ в $\mathbb{C}^n$, построить ОНБ $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$, причем такой, что каждый вектор $\vec{a}_m$ есть линейная комбинация векторов $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, .., \vec{e}_m)$, где $m = 1, 2, ..., n$. Решение этой задачи дает процесс ортогонализации Грама – Шмидта.

Теорема 6.9. *Пусть $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n)$ – базис в $\mathbb{C}^n$. Положим*

$$\begin{array}{l|l}
\vec{f}_1 = \vec{a}_1 & \vec{e}_1 = \vec{f}_1/\|\vec{f}_1\| \\
\vec{f}_2 = \vec{a}_2 - k_{21}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 = \vec{f}_2/\|\vec{f}_2\| \\
\vec{f}_3 = \vec{a}_3 - k_{31}\vec{e}_1 - k_{32}\vec{e}_2 & \vec{e}_3 = \vec{f}_3/\|\vec{f}_3\| \\
\dots \quad \dots \quad \dots & \dots \quad \dots \\
\vec{f}_n = \vec{a}_n - \sum\limits_{i=1}^{n-1} k_{ni}\vec{e}_i & \vec{e}_n = \vec{f}_n/\|\vec{f}_n\|,
\end{array}$$

где $k_{mi} = (\vec{a}_m, \vec{e}_i), m \neq i$. Тогда выполнено: 1) $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_n)$ *– ортогональный базис в* $\mathbb{C}^n$; 2) $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ *– ортонормированный базис в* $\mathbb{C}^n$; 3) $\vec{a}_m = k_{m1}\vec{e}_1 + k_{m2}\vec{e}_2 + ... + k_{mm}\vec{e}_m$, *где* $k_{mm} = \|\vec{f}_m\|$, $m = 1, ..., n$.

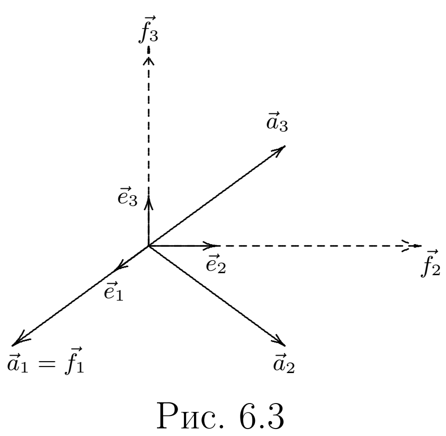


Рис. 6.3

Пример. Применить процесс ортогонализации Грама – Шмидта к базису (рис. 6.3)

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Возьмем $\vec{f_1} = \vec{a}_1$. Вычислим $\|\vec{f_1}\| = \sqrt{6}$. Положим $\vec{e}_1 = \dfrac{\vec{f_1}}{\|\vec{f_1}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Вычислим $k_{21} = (\vec{a}_2, \vec{e}_1) = \dfrac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$. Отсюда

$$\vec{f_2} = \vec{a}_2 - k_{21}\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix};$$

$$\|\vec{f_2}\| = \sqrt{5};\ \vec{e}_2 = \frac{\vec{f_2}}{\|\vec{f_2}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Вычислим $k_{31} = (\vec{a}_3, \vec{e}_1) = \dfrac{-6}{\sqrt{6}} = -\sqrt{6}$, $k_{32} = (\vec{a}_3, \vec{e}_2) = \dfrac{-5}{\sqrt{5}} = -\sqrt{5}$. Отсюда

$$\vec{f_3} = \vec{a}_3 - k_{31}\vec{e}_1 - k_{32}\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix};$$

$$\|\vec{f_3}\| = \sqrt{30}; \vec{e}_3 = \frac{\vec{f_3}}{\|\vec{f_3}\|} = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Получили ортонормированный базис:

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Следствие 6.5. *Справедливо равенство*

$$[\vec{a}_1\vec{a}_2...\vec{a}_n] = [\vec{e}_1\vec{e}_2...\vec{e}_n]\begin{bmatrix} k_{11} & k_{21} & \dots & k_{n1} \\ & k_{22} & \dots & k_{n2} \\ & & & \dots \\ & 0 & & k_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (6.2)$$

Пример. Проверить справедливость равенства (6.2) для матриц предыдущего примера. Действительно:

$$\begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -6 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{5}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{6} & 2\sqrt{6} & -\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ 0 & 0 & \sqrt{30} \end{bmatrix}.$$

6.14. QR-разложение матриц

Определение 6.19. *Представление матрицы $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ в виде $A = QR$, где Q – унитарная (ортогональная) матрица, R – верхняя треугольная матрица с ненулевыми диагональными элементами, называется QR-разложением матрицы A.*

Замечание 6.3. *Вырожденные матрицы не могут иметь QR-разложения, так как из равенства $A = QR$ следует, что $\det(A) = \det(Q)\det(R) \neq 0$.*

Теорема 6.10. *Всякая невырожденная матрица $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ имеет QR-разложение.*

Пример. Справедливо равенство

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -6 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{30}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\dfrac{5}{\sqrt{30}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{6}} & -\dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 2\sqrt{6} & -\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ 0 & 0 & \sqrt{30} \end{bmatrix}.$$

Замечание 6.4. *Если известно QR-разложение матрицы коэффициентов системы $AX = B$, то эту систему легко решить:*

$$AX = B \iff QRX = B \iff RX = Q^*B,$$

так как $Q^* = Q^{-1}$. Получили систему с верхней треугольной матрицей коэффициентов, которая легко решается.

Пример. Решить систему уравнений, используя QR-разложение матрицы коэффициентов:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 15, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 23, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

Решение. Запишем систему в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -6 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 15 \\ 23 \\ 5 \end{bmatrix} \iff$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{5}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 2\sqrt{6} & -\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ 0 & 0 & \sqrt{30} \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 15 \\ 23 \\ 5 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 2\sqrt{6} & -\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ 0 & 0 & \sqrt{30} \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{5}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}^{\mathrm{т}} \begin{bmatrix} 15 \\ 23 \\ 5 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 2\sqrt{6} & -\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ 0 & 0 & \sqrt{30} \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 8\sqrt{6} \\ 5\sqrt{5} \\ -3\sqrt{30} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 8, \\ x_2 - x_3 = 5, \\ x_3 = -3, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = -3. \end{cases}$$

Следствие 6.6. *Для любых векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, .., \vec{a}_n$ верно неравенство*

$$|\det[\vec{a}_1 \vec{a}_2 ... \vec{a}_n]| \leq \prod_{i=1}^{n} \|\vec{a}_i\|. \qquad (6.3)$$

Упражнение. Проверить неравенство (6.3) для векторов:

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ответ: $\det[\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3] = 30$, $\|\vec{a}_1\| = \sqrt{6}$, $\|\vec{a}_2\| = \sqrt{29}$, $\|\vec{a}_1\| = \sqrt{41}$.

6.15. Матрица Грама

Определение 6.20. *Пусть* $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ *– произвольные векторы из* $\mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$*. Матрица*

$$\Gamma(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = [\vec{a}_1 ... \vec{a}_n]^* [\vec{a}_1 ... \vec{a}_n] = \begin{bmatrix} (\vec{a}_1, \vec{a}_1) & (\vec{a}_2, \vec{a}_1) & \ldots & (\vec{a}_n, \vec{a}_1) \\ (\vec{a}_1, \vec{a}_2) & (\vec{a}_2, \vec{a}_2) & \ldots & (\vec{a}_n, \vec{a}_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ (\vec{a}_1, \vec{a}_n) & (\vec{a}_2, \vec{a}_n) & \ldots & (\vec{a}_n, \vec{a}_n) \end{bmatrix}.$$

называется матрицей Грама.

Теорема 6.11. *Пусть* $\Gamma = \Gamma(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ *– матрица Грама. Тогда:*

1) *матрица Грама – самосопряженная* $(\Gamma = \Gamma^*)$*;*

2) $\det\ \Gamma(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = |\det[\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n]|^2 \geq 0$;

3) *набор векторов* $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ *– линейно независим тогда и только тогда, когда* $\det\ \Gamma(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \neq 0$;

4) *набор векторов* $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ *– базис тогда и только тогда, когда* $\det\ \Gamma(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \neq 0$;

5) *набор векторов* $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ *есть ортогональный базис в* $\mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$ *тогда и только тогда, когда* $\Gamma(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = \mathrm{diag}(\|a_1\|^2, \ldots, \|a_n\|^2)$;

6) *набор векторов* $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ *есть ортонормированный базис в* $\mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$ *тогда и только тогда, когда* $\Gamma(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = I$;

7) *Для матрицы Грама верно неравенство*
$0 \leq |\det\ \Gamma(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n)| \leq \prod\limits_{i=1}^{n} \|\vec{a}_i\|^2$.

Теорема 6.12. *Пусть* $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ *– базис в* $\mathbb{C}^n$*, векторы* $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$ *имеют в этом базисе координаты* $\vec{x} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \ldots \\ x'_n \end{bmatrix}_{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n}$, $\vec{y} = \begin{bmatrix} y'_1 \\ \ldots \\ y'_n \end{bmatrix}_{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n}$.

Тогда:

1) $$(\vec{x}, \vec{y}) = [x'_1, \ldots, x'_n] \Gamma(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \begin{bmatrix} y'_1 \\ \ldots \\ y'_n \end{bmatrix};$$

2) $$\|\vec{x}\|^2 = [x'_1, \ldots, x'_n] \Gamma(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \begin{bmatrix} x'_1 \\ \ldots \\ x'_n \end{bmatrix} \geq 0.$$

Пример. Пусть $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ такой базис в $\mathbb{R}^2$, что $\Gamma(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$. Пусть векторы $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ имеют в этом базисе координаты:

$\vec{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}_{\vec{a}_1,\vec{a}_2}$, $\vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\vec{a}_1,\vec{a}_2}$. Найти длины векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$, их скалярное произведение и угол между ними.

Решение. $(\vec{x},\vec{x}) = [-3,4]\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = 44$; $\|\vec{x}\| = 2\sqrt{11}$; $(\vec{y},\vec{y}) = [1,0]\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 4$; $\|\vec{y}\| = 2$; $(\vec{x},\vec{y}) = [-3,4]\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$, т. е. векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ ортогональны и угол между ними равен $\pi/2$.

В заключение рекомендуем выполнить предлагаемые упражнения.

6.16. Упражнения

В упражнениях 6.1–6.18 заданы подмножества линейных пространств. Какие из этих подмножеств сами являются линейными пространствами относительно операций сложения и умножения на число, индуцированных из исходного пространства?

6.1. $S = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^4 : \; v_1 + v_4 = 0 \}$. **6.3.** $\mathbb{P} = \{p(x) \in \mathbb{P}_2 : \; p(0) = 0 \}$.

6.2. $S = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^4 : \; v_1 + v_4 = 1 \}$. **6.4.** $\mathbb{P} = \{p(x) \in \mathbb{P}_2 : \; p''(0) = 0 \}$.

6.5. $\mathbb{P} = \{p(x) \in \mathbb{P}_2 :$ для любых $x \in \mathbb{R}$ $p(x) = p(-x) \}$.

6.6. $\mathbb{P} = \{p(x) \in \mathbb{P}_2 :$ степень $p(x)$ равна $2 \}$.

6.7. $Q = \{A \in \mathcal{M}_{3\times 4} : a_{11} = 0\}$. **6.9.** $Q = \{A \in \mathcal{M}_{3\times 4} : |a_{11}| + |a_{21}| = 1\}$.

6.8. $Q = \{A \in \mathcal{M}_{3\times 4} : a_{32} \neq 0\}$. **6.10.** $Q = \{A \in \mathcal{M}_{3\times 4} : a_{11} + a_{23} = 0\}$.

6.11. $Q = \{A \in \mathcal{M}_{3\times 4} \; :$ все $a_{ij} \in \mathbb{Z}\}$.

6.12. $F = \{f(x) \in C\,[-1,1] : f(-1) = f(1)\}$.

6.13. $F = \{f(x) \in C\,[-1,1] : \; f(x) = 0$ для $x \in [-1/2; 1/2] \}$.

6.14. $F = \{f(x) \in C\,[-1,1] : \; f(1) = 1\}$.

6.15. $F = \{f(x) \in C\,[-1,1] : \; f(1) = 0\}$.

6.16. $F = \{f(x) \in C_2[-1,1] : \; f''(x) + f(x) = 0$ для $x \in [-1; 1] \}$.

6.17. $F = \{f(x) \in C_2[-1,1] : \; f''(x) + f(x) = x^2$ для $x \in [-1; 1] \}$.

6.18. Пусть $\mathbb{L} = \{\vec{x} \; : \; \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \; x_2 > 0\}$. Для $\vec{u}$ и $\vec{v}$ из $\mathbb{L}$ и $c \in \mathbb{R}$, определим сложение и умножение на число так: $\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 v_2 \end{bmatrix}$ и $c\vec{u} = \begin{bmatrix} cu_1 \\ cu_2 \end{bmatrix}$. Показать, что $\mathbb{L}$ есть векторное пространство.

6.19. Пусть $\mathbb{L} = \{\vec{x} \; : \; \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \; x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$. Для $\vec{u}$ и $\vec{v}$ из $\mathbb{L}$ и $c \in \mathbb{R}$, определим сложение и умножение на число так: $\vec{u}+\vec{v}=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}=$ $=\begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \end{bmatrix}$ и $c\vec{u}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Показать, что в $\mathbb{L}$ все аксиомы векторного пространства, кроме пятой, выполнены.

В упражнениях 6.20–6.23 выяснить, является ли данное множество W подпространством линейного пространства $\mathcal{M}_{2\times3}$.

6.20. $W=\{A\in\mathcal{M}_{2\times3} \ : \ a_{11}+a_{13}=1\}$.
6.21. $W=\{A\in\mathcal{M}_{2\times3} \ : \ a_{11}-a_{12}+2a_{13}=0\}$.
6.22. $W=\{A\in\mathcal{M}_{2\times3} \ : \ a_{11}-a_{12}=0, \ a_{12}+a_{13}=0, a_{23}=0\}$.
6.23. $W=\{A\in\mathcal{M}_{2\times3} \ : \ a_{11}a_{12}a_{13}=0\}$.

В упражнениях 6.24–6.27 выяснить, является ли данное множество W подпространством линейного пространства P_2.

6.24. $W=\{p(x)\in P_2 \ : \ p(0)+p(2)=0\}$.
6.25. $W=\{p(x)\in P_2 \ : \ p(1)=p(3)\}$.
6.26. $W=\{p(x)\in P_2 \ : \ p(1)p(3)=0\}$.
6.27. $W=\{p(x)\in P_2 \ : \ p(1)=-p(-1)\}$.

В упражнениях 6.28–6.31 выяснить, является ли данное множество W подпространством линейного пространства $C\,[-1;1]$.

6.28. $F=\{f(x)\in C\,[-1;1] \ : \ f(1)=-f(-1)\}$.
6.29. $F=\{f(x)\in C\,[-1;1] \ : \ f(x)\geq 0$ для любых $x\in[-1;1]\}$.
6.30. $F=\{f(x)\in C\,[-1;1] \ : \ f(1)=2; f(-1)=-2\}$.
6.31. $F=\{f(x)\in C\,[-1;1] \ : \ f(1/2)=0\}$.

7. Собственные значения матрицы

7.1. Собственные числа и собственные векторы квадратной матрицы

Пусть $A\in\mathcal{M}_{n\times n}$. Для любого $\vec{x}\in\mathbb{C}^n$ вектор $\vec{y}=A\vec{x}$ также принадлежит $\mathbb{C}^n$ и может отличаться от $\vec{x}$ как по длине, так и по направлению. Важную роль играют те векторы $\vec{x}\neq\vec{0}$, которые отличаются от $A\vec{x}$ лишь числовым множителем.

Определение 7.1. *Если $A\vec{x}=\lambda\vec{x}$, где $\lambda\in\mathbb{C}, \vec{x}\neq\vec{0}$, то $\vec{x}$ называется собственным вектором матрицы A, соответствующим собственному числу λ.*

Теорема 7.1. 1) *Собственные числа матрицы A находятся из* *уравнения*

$$P_n(\lambda) = \det[A - \lambda I] = 0 \;\Leftrightarrow\; \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-\lambda} \end{bmatrix} = 0.$$

$P_n(\lambda) = 0$ *называется характеристическим уравнением матрицы* A.

2) *Собственные векторы* $\vec{x}$, *соответствующие собственному числу* λ, *находятся из СЛАУ*

$$[A - \lambda I]\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases}$$

Замечание 7.1. *Функция* $P_A(\lambda) = \det[A - \lambda I]$ *есть полином степени* n, *называемый характеристическим полиномом матрицы* A. *Его разложение в сумму степеней* λ *имеет вид*

$$P_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \dots + c_n.$$

Очевидно, что $c_n = P_A(0) = \det(A)$, а $c_1 = (-1)^{n-1}(a_{11} + \dots + a_{nn})$.

Пример. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$.

Решение. Найдем ее собственные числа из уравнения

$$\det[A - \lambda I] = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -2 - \lambda & -1 \\ 5 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 0.$$

Отсюда $\lambda_{1,2} = \pm i$. Найдем собственный вектор $\vec{x}_1$, соответствующий $\lambda_1 = i$, из системы

$$[A - iI]\vec{x}_1 = \vec{0} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} -2 - i & -1 \\ 5 & 2 - i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (-2 - i)x_{11} - x_{21} = 0 \\ 5x_{11} + (2 - i)x_{21} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_{11} = (-2 + i)\alpha \\ x_{21} = 5\alpha \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \vec{x}_1 = \alpha \begin{bmatrix} -2 + i \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Аналогично находим собственный вектор $\vec{x}_2$, соответствующий λ_2, из системы

$$[A+iI]\vec{x}_2=\vec{0}\Longleftrightarrow\begin{bmatrix}-2+i & -1\\ 5 & 2+i\end{bmatrix}\vec{x}_2=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \vec{x}_2=\beta\begin{bmatrix}-2-i\\5\end{bmatrix},\quad \beta\in\mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

Пример. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$, дать их геометрическую иллюстрацию.

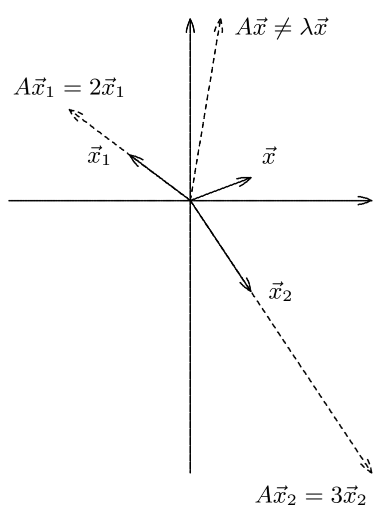


Рис. 7.1

Решение. Найдем ее собственные числа из уравнения $\det[A-\lambda I]=0\Leftrightarrow \begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ 2 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\lambda^2-5\lambda+6=0.$ Отсюда $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$. Найдем собственный вектор $\vec{x}_1$, соответствующий λ_1, из системы $[A-\lambda_1 I]\vec{x}_1=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{bmatrix}\vec{x}_1=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\vec{x}_1=\alpha\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$, где $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Аналогично находим собственный вектор $\vec{x}_2$, соответствующий λ_2, из системы $[A-\lambda_2 I]\vec{x}_2=$ $=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\vec{x}_2=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\vec{x}_2=\beta\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$, где $\beta\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Собственные векторы и действие на них матрицы A изображены на рис. 7.1.

7.2. Общие свойства собственных чисел и собственных векторов матрицы

Пусть $A\in\mathcal{M}_{n\times n}$. Собственные векторы матрицы A, соответствующие собственному числу λ, находятся неоднозначно.

Теорема 7.2. 1) *Если $\vec{x}$ – собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному числу λ, то для всех $\mu\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ $\mu\vec{x}$ тоже есть собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному числу λ.*

2) *Если $\vec{x}_1,...,\vec{x}_k$ – собственные векторы матрицы A, соответствующие одному собственному числу λ, т. е. $A\vec{x}_1=\lambda\vec{x}_1,...,A\vec{x}_k=$ $=\lambda\vec{x}_k$, то для всех $\mu_1,...,\mu_k\in C\setminus\{0\}$ вектор $\mu_1\vec{x}_1+...+\mu_k\vec{x}_k$ тоже*

есть собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному числу λ.

Теорема 7.3. *Пусть $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ есть все (с учетом их кратности) собственные числа матрицы $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Тогда*

$$1)\ \lambda_1\lambda_2...\lambda_n = \det(A);$$

$$2)\ \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = \operatorname{trace}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Отсюда следует, что матрица A вырождена тогда и только тогда, когда хотя бы одно из ее собственных чисел равно нулю.

Теорема 7.4. *Пусть $\vec{x}$ – собственный вектор матрицы A с вещественными элементами, соответствующий комплексному собственному числу λ. Тогда $\overline{\vec{x}}$ – собственный вектор матрицы A, соответствующий комплексному собственному числу $\bar{\lambda}$.*

Теорема 7.5. *Если A – треугольная матрица, то ее собственные числа есть ее диагональные элементы.*

Теорема 7.6. *Пусть матрица $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ и $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_k$ – собственные векторы, соответствующие различным собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Тогда векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_k$ линейно независимы.*

Следствие 7.1. *Если матрица $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ имеет n различных собственных чисел, то она имеет n линейно независимых собственных векторов.*

Базис в $\mathbb{C}^n$ из n линейно независимых собственных векторов матрицы A называется собственным базисом матрицы A. Последнее следствие можно сформулировать так: если собственные числа матрицы A различны (имеют кратность 1), то в $\mathbb{C}^n$ существует собственный базис A. Собственный базис может существовать и в случае кратных собственных чисел.

Упражнение. Найти характеристический полином и собственный базис матрицы $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -12 & 0 & 5 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

Ответ: $P_B(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$; $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

7.3. Связь между собственными числами и собственными векторами различных матриц

Теорема 7.7. *Матрицы A и A^m имеют одинаковые собственные числа.*

Матрицы A и A^* имеют комплексно-сопряженные собственные числа.

Для любой невырожденной матрицы S матрицы A и SAS^{-1} (называемые подобными) имеют одинаковые собственные числа.

Собственные векторы матриц A, $A^{т}$, A^*, SAS^{-1} в общем случае никак не связаны.

Теорема 7.8. *Пусть $\vec{x}$ есть собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному числу λ. Тогда:*

а) $\vec{x}$ есть собственный вектор матрицы A^k, $k = 2, 3, ...$, соответствующий собственному числу λ^k;

) $\overline{\vec{x}}$ – собственный вектор матрицы $\bar{A}$, соответствующий комплексному собственному числу $\bar{\lambda}$;

) если A невырождена, то $\vec{x}$ есть собственный вектор матрицы A^{-1}, соответствующий собственному числу $1/\lambda$;

) для любого $c \in \mathbb{R}$ $\vec{x}$ есть собственный вектор матрицы $A + cI$, соответствующий собственному числу $\lambda +$;

) для любого $c \in \mathbb{R}$ $\vec{x}$ есть собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному числу λ.

Пример. Рассмотрим матрицу $A = \begin{bmatrix} 13 & -16 \\ 9 & -11 \end{bmatrix}$. Найти собственные числа матриц A, A^5, A^{-1}, $A^{т} + 2I$.

Решение. Найдем собственные числа матрицы A из уравнения

$$\det[A - \lambda I] = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} 13-\lambda & -16 \\ 9 & -11-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Отсюда $\lambda_{1,2} = 1$. По теореме 7.8 собственные числа матриц A^5, A^{-1} равны 1, а собственные числа матрицы $A^{т} + 2I$ равны 3.

Упражнение. Пусть $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -12 & 0 & 5 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$. Найти собственные числа матриц: *а*) A,) A^4,) A^{-1},) $A - 3I$.

Ответ: *а*) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$;) $\lambda_{1,2} = 1$, $\lambda_3 = 16$;) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0.5$;) $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -1$.

7.4. Собственные числа и собственные векторы самосопряженной матрицы

Пусть $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Напомним ряд понятий, рассмотренных ранее.

Определение 7.2. *Матрица A называется симметричной, если $A^{m} = A$, т. е. A – квадратная матрица и для любых индексов $i, k = 1, 2, ..., n$ $a_{ik} = a_{ki}$.*

Сопряженной к матрице A называется матрица $A^* = (\bar{A})^{m}$, где черта над матрицей означает ее поэлементное комплексное сопряжение.

Матрица A называется самосопряженной, если $A^* = A$, т. е. A – квадратная матрица и для любых индексов $i, k = 1, 2, ..., n \quad a_{ik} = \bar{a}_{ki}$.

Если матрица A – вещественная, то понятия симметричной и самосопряженной матриц совпадают, так как $A^* = A^{\text{т}}$.

Утверждение 7.1. *Пусть $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Тогда для любых векторов $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$ верно:*

1) $(A\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, A^*\vec{y}) \quad ((A\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, A^{m}\vec{y}))$;

2) *если A – самосопряженная (симметричная) матрица, то* $(A\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, A\vec{y})$.

Теорема 7.9. *Если $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ – самосопряженная матрица, то*

1) *все ее собственные числа вещественные*;

2) *собственные векторы, соответствующие различным собственным числам, ортогональны*;

3) *существует ровно n попарно ортогональных собственных векторов матрицы A (собственный базис матрицы A).*

Пример. Найти собственный ортонормированный базис симметричной матрицы $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Решение. 1) Найдем собственные числа A из уравнения $\det[A-\lambda I]=0$:

$$\det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1+R_2 \\ R_1+R_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \det\begin{bmatrix} 4-\lambda & 4-\lambda & 4-\lambda \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/(4-\lambda)R_1 \\ R_1-R_3 \end{bmatrix} =$$

$$= (4-\lambda)\det\begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda-1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)(\lambda-1)\det\begin{bmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= (4-\lambda)(\lambda-1)^2 = 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{c} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2=\lambda_3=1 \end{array} \right. .$$

2) Найдем собственный вектор $\vec{x}_1$, соответствующий λ_1, из системы $[A-\lambda_1 I]\vec{x}=\vec{0}$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \vec{x}_1 = \alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha\in\mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

Возьмем, например, $\alpha=1$. Получим $\vec{x}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3) Найдем собственные векторы $\vec{x}_2$ и $\vec{x}_3$, соответствующие $\lambda_{2,3}=1$, из системы $[A-\lambda_2 I]\vec{x}=\vec{0}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -\beta-\gamma \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix},$$

$\beta,\gamma\in\mathbb{C}$ и одновременно β и $\gamma\neq 0$.

Возьмем $\beta=0, \gamma=1$, тогда $\vec{x}_2=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Далее среди векторов $\begin{bmatrix} -\beta-\gamma \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$ найдем $\vec{x}_3$, ортогональный $\vec{x}_2$: $(\vec{x}_2,\vec{x}_3)=0 \Longleftrightarrow \beta=-2\gamma$. Пусть $\gamma=1$. Тогда $\beta=-2$ и $\vec{x}_3=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Следовательно, $(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3)$ – три попарно ортогональных собственных вектора матрицы A.

Нормируем их. Для этого разделим каждый вектор на его норму $\|\vec{x}_1\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{x}_2\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{x}_3\| = \sqrt{6}$:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{x}_1}{\|\vec{x}_1\|} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \ \vec{e}_2 = \frac{\vec{x}_2}{\|\vec{x}_2\|} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \ \vec{e}_3 = \frac{\vec{x}_3}{\|\vec{x}_3\|} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

Следовательно, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ – собственный ортонормированный базис матрицы A.

Упражнение. Найти собственный ортонормированный базис самосопряженной матрицы $\begin{bmatrix} 1 & 1-i & 0 \\ 1+i & 1 & -1-i \\ 0 & -1+i & 1 \end{bmatrix}$.

Ответ: $\lambda_1 = -1$, $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ (1+i)/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 1$, $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $\lambda_3 = 3$, $\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ (1+i)/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$.

7.5. Приведение матрицы к диагональному виду

Теорема 7.10. *Если у матрицы A существует n линейно независимых собственных векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$, соответствующих собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, то*

$$A = [\vec{x}_1 \vec{x}_2 ... \vec{x}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \mathit{0} \\ & & \ddots & \\ \mathit{0} & & & \lambda_n \end{bmatrix} [\vec{x}_1 \vec{x}_2 ... \vec{x}_n]^{-1} \ -$$

диагональный вид матрицы A.

Упражнение. Проверить непосредственным умножением, что

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/6 & -1/3 & 1/6 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Теорема 7.11. 1) *Пусть $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$ – попарно ортогональные собственные векторы самосопряженной матрицы A, соответствующие собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Тогда*

$$A = [\vec{x}_1\vec{x}_2...\vec{x}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1/\|\vec{x}_1\|^2 & & & \mathit{0} \\ & \lambda_2/\|\vec{x}_2\|^2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathit{0} & & & \lambda_n/\|\vec{x}_n\|^2 \end{bmatrix} [\vec{x}_1\vec{x}_2...\vec{x}_n]^* \text{ –}$$

диагональный вид матрицы A.

2) *Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ – нормированные попарно ортогональные собственные векторы самосопряженной матрицы A, соответствующие собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Тогда*

$$A = [\vec{e}_1\vec{e}_2...\vec{e}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \mathit{0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathit{0} & & & \lambda_n \end{bmatrix} [\vec{e}_1\vec{e}_2...\vec{e}_n]^* \text{ –}$$

диагональный вид матрицы A.

Пример. Рассмотрим нормированные собственные векторы из предыдущего примера:

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

Тогда по теореме 7.11 имеем:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

и

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

Упражнение. Привести к диагональному виду матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -12 & 0 & 5 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ответ:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -12 & 0 & 5 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 16/3 & -1/3 & -7/3 \end{bmatrix}.$$

7.6. Квадратичные формы. Приведение их к каноническому виду

Определение 7.3. *Пусть $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ – вещественная симметричная матрица, $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Функция $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,*

$$\Phi(\vec{x}) = (A\vec{x}, \vec{x}) = \vec{x}^m A\vec{x} = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k$$

называется квадратичной формой, а матрица A – матрицей квадратичной формы Φ.

Так как матрица A симметрична, то квадратичную форму можно записать в виде

$$\Phi(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}x_j^2 + 2\sum_{i<k} a_{ik}x_i x_k.$$

Всегда можно найти такой базис $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$, в котором выражение квадратичной формы через координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ будет содержать только квадраты координат. Такую форму записи называют каноническим видом квадратичной формы.

Теорема 7.12. *Пусть $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ – вещественная симметричная матрица. Пусть $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ – ортонормированный базис из собственных векторов матрицы A, соответствующих собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Пусть вектор $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ имеет координаты $\vec{x} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{bmatrix}_{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n}$. Тогда*

$$\Phi(\vec{x}) = (A\vec{x}, \vec{x}) = \lambda_1(x'_1)^2 + \lambda_2(x'_2)^2 + ... + \lambda_n(x'_n)^2.$$

Другими словами, преобразование

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = [\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n] \begin{bmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

приводит квадратичную форму

$$\Phi(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj} x_j^2 + 2 \sum_{i<k} a_{ik} x_i x_k$$

к каноническому виду

$$\Phi(\vec{x}) = \lambda_1 (x'_1)^2 + \lambda_2 (x'_2)^2 + ... + \lambda_n (x'_n)^2.$$

Пример. Рассмотрим квадратичную форму

$$\Phi(\vec{x}) = x^2 + 4xy - 2y^2 = [x\ y] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Для матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ собственные числа и нормированные собственные векторы есть

$$\lambda_1 = 2,\ \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}; \quad \lambda_2 = -3,\ \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Тогда преобразование

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [\vec{e}_1 \vec{e}_2] \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y') \end{cases}$$

приводит квадратичную форму к каноническому виду

$$\Phi(\vec{x}) = 2(x')^2 - 3(y')^2.$$

Основной вопрос, который приходится решать при исследовании квадратичной формы, – принимает ли она только положительные или только отрицательные значения, или она может принимать как те, так и другие значения.

Определение 7.4. *Квадратичная форма $\Phi(\vec{x}) = (A\vec{x}, \vec{x})$ и ее матрица A называются положительно (отрицательно, неположительно, неотрицательно) определенными, если для любого $\vec{x} \neq \vec{0}$*

$$\Phi(\vec{x}) > 0 \quad (< 0, \leq 0, \geq 0).$$

Обозначения: $\Phi > 0$ $(< 0, \leq 0, \geq 0)$, $A > 0$ $(< 0, \leq 0, \geq 0)$.

Квадратичная форма $\Phi(\vec{x})$ и ее матрица A называются знаконеопределенными, если $\Phi(\vec{x})$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Из теоремы 7.12 вытекает

Следствие 7.2. *Пусть $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ – вещественная симметричная матрица, $\lambda_1, ..., \lambda_n$ – ее собственные числа. Тогда*

$$A > 0 \ (< 0, \leq 0, \geq 0) \Longleftrightarrow \lambda_i > 0, \quad i = 1, 2, ..., n \ (< 0, \leq 0, \geq 0).$$

Матрица A является знаконеопределенной, если среди ее собственных чисел есть как положительные, так и отрицательные.

Пример. Пусть A – произвольная вещественная матрица. Тогда матрица $\Gamma = A^{\text{т}} A$ является неотрицательно определенной.

Решение. Пусть $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$. Тогда $\Gamma \in \mathcal{M}_{m\times m}$. Для любого вектора $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ имеем

$$(\Gamma\vec{x}, \vec{x}) = (A^{\text{т}} A\vec{x}, \vec{x}) = (A\vec{x}, A\vec{x}) = \|A\vec{x}\|^2 \geq 0.$$

Определение 7.5. *Пусть $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Главными минорами матрицы A называются:*

$$M_1 = \det[a_{11}], \ M_2 = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \ \ldots \ M_i = \det\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1i} \\ a_{21} & \ldots & a_{2i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ii} \end{bmatrix}, \ \ldots .$$

Теорема 7.13 (Критерий Сильвестра). 1) *Матрица A положительно определенна тогда и только тогда, когда все ее главные миноры положительны: $M_i > 0$, $i = 1, 2, ..., n$.*

2) *Матрица A отрицательно определенна тогда и только тогда, когда все ее главные миноры с четными номерами положительны: $M_2 > 0, M_4 > 0, ...$, а миноры с нечетными номерами отрицательны: $M_1 < 0, M_3 < 0, ...$.*

Теорема 7.14 (Критерий Якоби). *Матрица A – положительно определенна тогда и только тогда, когда все коэффициенты характеристического уравнения $\det(A - \lambda I) = 0$ отличны от нуля и знаки коэффициентов уравнения чередуются.*

Пример. Рассмотрим матрицу $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Тогда матрица A и соответствующая ей квадратичная форма

$$\Phi(\vec{x}) = (A\vec{x}, \vec{x}) = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$$

являются положительно определенными, так как собственные числа $\lambda_1 = 4$, $\lambda_{2,3} = 1$ матрицы A положительны.

Матрица A положительно определенна и по критерию Сильвестра, так как ее главные миноры $M_1 = 2$, $M_2 = 3$ и $M_3 = 4$ положительны.

Матрица A положительно определенна и по критерию Якоби, так как все коэффициенты ее характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Longleftrightarrow -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4 = 0$$

отличны от нуля и имеют чередующиеся знаки.

Упражнение. Используя указанные ранее критерии, показать, что квадратичная форма $\Phi(\vec{x}) = 3x^2 - 4xy + 3y^2$ положительно определенна.

Упражнение. Используя указанные ранее критерии, показать, что квадратичная форма $\Phi(\vec{x}) = x^2 + 4xy - 2y^2$ знаконеопределенна и найти векторы $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$, такие, что $\Phi(\vec{x}_1) > 0$ и $\Phi(\vec{x}_2) < 0$.

Ответ: $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Упражнение. Пусть $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ – положительно определенная матрица. Покажите, что $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x})^{\mathrm{т}} A\vec{y}$ есть скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

В заключение рекомендуем выполнить предлагаемые упражнения.

7.7. Упражнения

В упражнениях 7.1–7.8a найти собственные числа и векторы данных матриц.

7.1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. **7.2.** $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. **7.3.** $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

7.4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. **7.5.** $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$. **7.6.** $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

7.7. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. **7.8.** $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. **7.8a.** $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$.

7.9. Показать, что матрица $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, $b \neq 0$ не имеет вещественных собственных чисел.

В упражнениях 7.9a–7.14 найти характеристический полином, собственные числа и векторы данных матриц. Найти число линейно независимых собственных векторов матрицы.

7.9a. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **7.10.** $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -12 & 0 & 5 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

7.11. $C = \begin{bmatrix} -6 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -14 & -2 & 5 \end{bmatrix}$. **7.12.** $D = \begin{bmatrix} -7 & 4 & -3 \\ 8 & -3 & 3 \\ 32 & -16 & 13 \end{bmatrix}$.

7.13. $E = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 6 \end{bmatrix}$. **7.14.** $F = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

В упражнениях 7.15–7.16 разложить данный вектор по собственным векторам матрицы A.

7.15. Найти $A^5\vec{x}$, где $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$, $\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix}$.

7.16. Найти $A^{10}\vec{x}$, где $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 6 & -2 \end{bmatrix}$, $\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$.

В упражнениях 7.17–7.19 найти нормированные собственные векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ данной симметричной матрицы A, соответствующие собственным числам λ_1 и λ_2, и проверить справедливость разложения

$$A = \lambda_1\vec{e}_1(\vec{e}_1)^{\text{т}} + \lambda_2\vec{e}_2(\vec{e}_2)^{\text{т}}.$$

7.17. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. **7.18.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. **7.19.** $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

7.20. Пусть A есть вещественная симметричная $n \times n$-матрица. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ – нормированные попарно ортогональные собственные векторы матрицы A, соответствующие собственным числам $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Показать, что

$$A = \lambda_1\vec{e}_1(\vec{e}_1)^{\text{т}} + \lambda_2\vec{e}_2(\vec{e}_2)^{\text{т}} + \cdots + \lambda_n\vec{e}_n(\vec{e}_n)^{\text{т}}.$$

Ответы

7.1. $\lambda_1 = 1,\ \vec{x}_1 = \alpha\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha \neq 0;\ \lambda_2 = 3,\ \vec{x}_2 = \alpha\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha \neq 0.$ **7.2.** $\lambda_1 = 1,\ \vec{x}_1 = \alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha \neq 0;\ \lambda_2 = 3,\ \vec{x}_2 = \alpha\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha \neq 0.$ **7.3.** $\lambda_1 = 1,\ \vec{x}_1 = \alpha\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha \neq 0;\ \lambda_2 = 3,\ \vec{x}_2 = \alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha \neq 0.$ **7.4.** $\lambda_{1,2} = 1,\ \vec{x}_{1,2} = \alpha\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha \neq 0.$ **7.5.** $\lambda_1 = 0,\ \vec{x}_1 = \alpha\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha \neq 0;\ \lambda_2 = 5,\ \vec{x}_2 = \alpha\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha \neq 0.$ **7.6.** $\lambda_{1,2} = 2,\ \vec{x}_{1,2} = \alpha\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha \neq 0.$

7.7. $\lambda_1 = 2+i,\ \vec{x}_1 = \alpha\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha \neq 0;\quad \lambda_2 = 2-i,\ \vec{x}_2 = \alpha\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha \neq 0.$
7.8. $\lambda_1 = 1+i,\ \vec{x}_1 = \alpha\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha \neq 0;\ \lambda_2 = 1-i,\ \vec{x}_2 = \alpha\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha \neq 0.$ **7.8a.** $\lambda_1 = i,\ \vec{x}_1 = \alpha\begin{bmatrix} 3+i \\ 5 \end{bmatrix};\ \lambda_2 = -i,\ \vec{x}_2 = \alpha\begin{bmatrix} 3-i \\ 5 \end{bmatrix}, \alpha \neq 0.$ **7.9a.** $\lambda_{1,2} = 2,\ \vec{x}_{1,2} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix},$ $\alpha, \beta \neq 0;\ \lambda_3 = 1,\ \vec{x}_3 = \gamma\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \gamma \neq 0.$ Число линейно независимых собственных векторов матрицы A равно 3. Например, $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \vec{x}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

7.10. $P_B(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2);\ \lambda_1 = -1,\ \vec{x}_1 = \alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha \neq 0;\ \lambda_2 = 1,\ \vec{x}_2 = \alpha\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}, \alpha \neq 0; \lambda_3 = 2,\ \vec{x}_3 = \alpha\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha \neq 0.$ **7.11.** $P_C(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1);\ \lambda_{1,2} = 1,\ \vec{x}_{1,2} = \alpha\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha \neq 0;\ \lambda_3 = -1,\ \vec{x}_3 = \alpha\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha \neq 0.$ **7.12.** $P_D(\lambda) = -(\lambda-1)^3;\ \lambda_{1,2,3} = 1,\ \vec{x}_{1,2,3} = \begin{bmatrix} 3\alpha \\ 3\beta \\ 4(\beta-2\alpha) \end{bmatrix},\ \alpha, \beta \neq 0.$ **7.13.** $P_E(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-5)^2(\lambda-15);\ \lambda_1 = -1,\ \vec{x}_1 = \alpha\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha \neq 0;\ \lambda_{2,3} = 5,\ \vec{x}_{2,3} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\beta \\ -\alpha \end{bmatrix}, \alpha, \beta \neq 0;\ \lambda_4 = 15,$ $\vec{x}_4 = \alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha \neq 0.$ **7.14.** $P_F(\lambda) = (\lambda+2)(\lambda-2)^3;\ \lambda_1 = -2,\ \vec{x}_1 = \alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \alpha \neq 0;\ \lambda_{2,3,4} = 2,\ \vec{x}_{2,3,4} = \alpha\begin{bmatrix} -\alpha-\beta-\gamma \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix},\ \alpha, \beta, \gamma \neq 0.$ **7.15.** $\lambda_1 = -1,\ \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix};\ \lambda_2 = 2,$ $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix};\ \vec{x} = 3\vec{x}_1 - 6\vec{x}_2;\ A^5\vec{x} = 3(-1)^5\vec{x}_1 - 6\cdot 2^5\vec{x}_2 = -3\vec{x}_1 - 192\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} -198 \\ -207 \end{bmatrix}.$
7.16. $\lambda_{1,2} = 1,\ \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix};\ \lambda_3 = 2,\ \vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix};\ \vec{x} = \vec{x}_1 + 2\vec{x}_2 + \vec{x}_3;\ A^{10}\vec{x} = \vec{x}_1 + 2\vec{x}_2 + 2^{10}\vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 1025 \\ 2050 \\ 3076 \end{bmatrix}.$ **7.17.** $\lambda_1 = 1,\ \vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \lambda_2 = 3,\ \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$ **7.18.** $\lambda_1 = -1,\ \vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \lambda_2 = 3,\ \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$ **7.19.** $\lambda_1 = -1,\ \vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix},\ \lambda_2 = 4,\ \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$

8. Линейные операторы

8.1. Определение линейного оператора

Определение 8.1. *Пусть* $\mathbb{L}_1$ *и* $\mathbb{L}_2$ *– вещественные линейные пространства. Отображение* $\mathbf{A} : \mathbb{L}_1 \to \mathbb{L}_2$ *называется* **линейным оператором***, если*

1) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{L}_1 \quad \mathbf{A}(\vec{x}+\vec{y}) = \mathbf{A}(\vec{x}) + \mathbf{A}(\vec{y})$;
2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \vec{x} \in \mathbb{L}_1 \quad \mathbf{A}(\lambda\vec{x}) = \lambda\mathbf{A}(\vec{x})$.

Пример. Пусть $A = [a_{ik}]$ – матрица размера $m \times n$. Тогда $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{A}(\vec{x}) = A\vec{x}$ есть линейный оператор из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$.

Упражнение. Пусть $\mathbf{A} : \mathcal{M}_{2\times2} \to P_2$ – отображение, которое каждой 2×2-матрице сопоставляет полином

$$\mathbf{A}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a-d) + (a+2b)x + (b-3c)x^2.$$

Показать, что отображение $\mathbf{A}$ есть линейный оператор.

Упражнение. Пусть $\vec{n}, \vec{\tau} \in \mathbb{R}^3$, $(\vec{n}, \vec{\tau}) \neq 0$. Для любого $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ положим $\mathbf{A}\vec{x} = \dfrac{(\vec{n}, \vec{x})}{(\vec{n}, \vec{\tau})}\vec{\tau}$. Показать, что: 1) $\mathbf{A}$ есть линейный оператор из $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^3$; 2) вектор $\vec{x} - A\vec{x}$ ортогонален вектору $\vec{n}$; 3) дать геометрическую интерпретацию оператора $\mathbf{A}$.

8.2. Матрица линейного оператора

Определение 8.2. *Пусть* $\mathbf{A} : \mathbb{L}_1 \to \mathbb{L}_2$ *– линейный оператор. Зафиксируем базисы* $E = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ *в* $\mathbb{L}_1$ *и* $F = (\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m)$ *в* $\mathbb{L}_2$. *Для каждого* $k = \overline{1, n}$ *разложим* $\mathbf{A}(\vec{e}_k) \in \mathbb{L}_2$ *по базису* F:

$$\mathbf{A}(\vec{e}_k) = \sum_{i=1}^{m} a_{ik}\vec{f}_i = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \ldots \\ a_{mk} \end{bmatrix}_F.$$

Тогда матрица

$$A = [\mathbf{A}]_{E\to F} = [\mathbf{A}(\vec{e}_1)\ldots\mathbf{A}(\vec{e}_n)] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

называется матрицей оператора $\mathbf{A}$ *в базисах* E *и* F.

Пример. Пусть $\mathbf{A} : \mathcal{M}_{2\times2} \to P_2$ – линейный оператор, который каждой 2×2-матрице сопоставляет полином

$$\mathbf{A}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a-d) + (a+2b)x + (b-3c)x^2.$$

Найти матрицу оператора $\mathbf{A}$ в канонических базисах для $\mathcal{M}_{2\times2}$ и P_2.

Решение. Пусть $E = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ – канонический базис для $\mathcal{M}_{2\times 2}$, где $E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Пусть $F = (1, x, x^2)$ – канонический базис для P_2. Тогда

$$\mathbf{A}(E_{11}) = 1 + 1x + 0x^2;\ \mathbf{A}(E_{12}) = 0 + 2x + 1x^2;$$

$$\mathbf{A}(E_{21}) = 0 + 0x - 3x^2;\ \mathbf{A}(E_{22}) = -1 + 0x + 0x^2.$$

Следовательно, матрица A оператора $\mathbf{A}$ имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Упражнение. Пусть $\vec{n}, \vec{\tau} \in \mathbb{R}^3$, $(\vec{n}, \vec{\tau}) \neq 0$. Для любого $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ положим $\mathbf{A}\vec{x} = \dfrac{(\vec{n}, \vec{x})}{(\vec{n}, \vec{\tau})}\vec{\tau}$. Найти матрицу A оператора $\mathbf{A}$ в каноническом базисе для $\mathbb{R}^3$.

Ответ. Если $\vec{n} = [a\ b\ c]^{\text{т}}, \vec{\tau} = [m\ n\ p]^{\text{т}}$, то

$$A = \frac{1}{am + bn + cp} \begin{bmatrix} am & bm & cm \\ an & bn & cn \\ ap & bp & cp \end{bmatrix}.$$

8.3. Матричная запись линейного оператора

Теорема 8.1. *Пусть $\mathbf{A} : \mathbb{L}_1 \to \mathbb{L}_2$ – линейный оператор. Зафиксируем базисы $E = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ в $\mathbb{L}_1$ и $F = (\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m)$ в $\mathbb{L}_2$. Тогда для любого $\vec{x} \in \mathbb{L}_1$ столбец координат вектора $\mathbf{A}(\vec{x})$ в базисе F равен произведению матрицы $[\mathbf{A}]_{E\to F}$ оператора $\mathbf{A}$ на столбец координат вектора $\vec{x}$ в базисе E: $[\mathbf{A}(\vec{x})]_F = [\mathbf{A}]_{E\to F}[\vec{x}]_E$.*

Пример. Проверим эту теорему для примера из 8.2. Столбец координат многочлена

$$\mathbf{A}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a - d) + (a + 2b)x + (b - 3c)x^2$$

в базисе $F = (1, x, x^2)$ равен $[a{-}d\ a{+}2b\ b{-}3c]^{\text{т}}$. Столбец координат матрицы $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ в базисе $E = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ равен $[a\ b\ c\ d]^{\text{т}}$. Непосредственным умножением убеждаемся в справедливости равенства

$$[\mathbf{A}(\vec{x})]_F = [\mathbf{A}]_{E\to F}[\vec{x}]_E \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-d \\ a+2b \\ b-3c \end{bmatrix}.$$

Пример. Пусть $\mathbf{A} : P_2 \to P_3$ – дифференциальный оператор, определенный равенством $\mathbf{A}(f) = x^2 f'' - 2f' + xf$. Найти 3×4-матрицу оператора $\mathbf{A}$ в канонических базисах $E = (1, x, x^2)$ и $F = (1, x, x^2, x^3)$ в линейных пространствах P_2 и P_3 соответственно и проверить теорему 8.1.

Решение. Координаты векторов $\mathbf{A}(1) = x$, $\mathbf{A}(x) = x^2 - 2$ и $\mathbf{A}(x^2) = x^3 + 2x^2 - 4x$ в базисе $F = (1, x, x^2, x^3)$ есть

$$[\mathbf{A}(1)]_F = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [\mathbf{A}(x)]_F = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, [\mathbf{A}(x^2)]_F = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, матрица оператора $\mathbf{A}$ имеет вид

$$[\mathbf{A}]_{E\to F} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Проверим теорему 8.1. Для $p(x) = a + bx + cx^2 \quad \mathbf{A}(p) = -2b + (a- -4c)x + (b + 2c)x^2 + cx^3$. Отсюда $[p]_E = [a\ b\ c]^{\text{т}}$, $[\mathbf{A}(p)]_F = [-2b\ \ a - 4c\ \ b + 2c\ \ c]^{\text{т}}$. Непосредственным умножением убеждаемся в справедливости равенства

$$[\mathbf{A}(\vec{x})]_F = [\mathbf{A}]_{E\to F}[\vec{x}]_E \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2b \\ a-4c \\ b+2c \\ c \end{bmatrix}.$$

Упражнение. Пусть $\mathbf{A} : P_2 \to P_2$ – дифференциальный оператор, определенный равенством $\mathbf{A}(f) = xf'$. Найти 3×3-матрицу оператора $\mathbf{A}$ в каноническом базисе в P_2 и проверить теорему 8.1.

Ответ: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Для $p(x) = a + bx + cx^2 \quad \mathbf{A}(p) = bx+ +2cx^2$. Отсюда $[p]_E = [a\ b\ c]^{\text{т}}$, $[\mathbf{A}(p)]_E = [0\ b\ \ 2c]^{\text{т}}$. Непосредственным умножением убеждаемся в справедливости равенства

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 2c \end{bmatrix}.$$

8.4. Ядро и образ линейного оператора

Определение 8.3. *Пусть $\mathbb{L}_1$ и $\mathbb{L}_2$ – вещественные линейные пространства, $\mathbf{A} : \mathbb{L}_1 \to \mathbb{L}_2$ – линейный оператор. Тогда:*

1) *множество $ker\ \mathbf{A} = \{\vec{x} \in \mathbb{L}_1 |\ \mathbf{A}(\vec{x}) = \vec{0}\}$ называется ядром оператора $\mathbf{A}$;*

2) *множество $im\ \mathbf{A} = \{\mathbf{A}(\vec{x}) | \vec{x} \in \mathbb{L}_1\}$ называется образом оператора $\mathbf{A}$.*

Очевидно, ядро и образ оператора $\mathbf{A}$ есть линейные подпространства соответственно $\mathbb{L}_1$ и $\mathbb{L}_2$. Поэтому можно рассматривать размерности этих подпространств.

Теорема 8.2. *Пусть $\mathbf{A} : \mathbb{L}_1 \to \mathbb{L}_2$ – линейный оператор и пусть $E = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ – базис в $\mathbb{L}_1$. Тогда:*

1) *$im\ \mathbf{A} = Span\{\mathbf{A}(\vec{e}_1), \mathbf{A}(\vec{e}_2), \ldots, \mathbf{A}(\vec{e}_n)\}$;*

2) *$\mathbf{A}$ взаимно-однозначен тогда и только тогда, когда $\{\mathbf{A}(\vec{e}_1), \mathbf{A}(\vec{e}_2), \ldots, \mathbf{A}(\vec{e}_n)\}$ линейно независимы в $\mathbb{L}_2$;*

3) *$dim(ker\ \mathbf{A}) + dim(im\ \mathbf{A}) = dim(\mathbb{L}_1)$.*

Пример. Пусть $\mathbf{A} : P_2 \to \mathbb{R}^1$ – линейный оператор, определенный равенством $\mathbf{A}(p(x)) = p(2)$. Найти размерность ядра и образа оператора $\mathbf{A}$.

Решение. По определению $\mathbf{A}(a + bx + cx^2) = a + 2b + 4c$. Отсюда

$$ker\ \mathbf{A} = \{p(x) \in P_2 \mid a + 2b + 4c = 0\}.$$

Для $p(x) \in ker\ \mathbf{A}$ имеем

$$p(x) = (-2b - 4c) + bx + cx^2 = b(-2 + x) + c(-4 + x^2).$$

Следовательно, $(-2 + x,\ -4 + x^2)$ есть базис в $ker\ \mathbf{A}$ и $dim(ker\ \mathbf{A}) = 2$. Из теоремы 8.2 имеем $dim(im\ \mathbf{A}) = dim(P_2) - dim(ker\ \mathbf{A}) = 3 - 2 = 1$.

8.5. Действия над линейными операторами. Пространство линейных операторов

В множестве всех линейных операторов, действующих из $\mathbb{L}_1$ в $\mathbb{L}_2$, определим операции *суммы* и *умножения на скаляр*.

Определение 8.4. *Суммой двух линейных операторов* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *называется линейный оператор* $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, *определяемый равенством*

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})(\vec{x}) = \mathbf{A}(\vec{x}) + \mathbf{B}(\vec{x}).$$

Произведением линейного оператора $\mathbf{A}$ *на скаляр* λ *называется линейный оператор* $\lambda\mathbf{A}$, *определяемый равенством*

$$(\lambda\mathbf{A})(\vec{x}) = \lambda(\mathbf{A}(\vec{x})).$$

Противоположный оператор $-\mathbf{A}$ *определяется равенством*

$$-\mathbf{A} = (-1)\mathbf{A}.$$

Оператор $\mathbf{0}$ *называется нулевым, если* $\forall\vec{x}\in\mathbb{L}_1\ \mathbf{0}\vec{x}=\vec{0}$.

Оператор $\mathbf{I}:\mathbb{L}_1\to\mathbb{L}_1$ *называется единичным (тождественным), если*

$$\forall\vec{x}\in\mathbb{L}_1\ \mathbf{I}\vec{x}=\vec{x}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 8.3. *Множество всех линейных операторов, действующих из* $\mathbb{L}_1$ *в* $\mathbb{L}_2$, *с указанными ранее операциями суммы и умножения на скаляр и выбранными нулевым и противоположным операторами образует линейное пространство.*

Зафиксируем базисы $E=(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ в $\mathbb{L}_1$ и $F=(\vec{f}_1,\ldots,\vec{f}_m)$ в $\mathbb{L}_2$. Тогда

$$[\mathbf{A}+\mathbf{B}]_{E\to F} = [\mathbf{A}]_{E\to F} + [\mathbf{B}]_{E\to F};$$

$$[\lambda\mathbf{A}]_{E\to F} = \lambda[\mathbf{A}]_{E\to F}.$$

Определение 8.5. *Композицией двух линейных операторов* $\mathbf{A}:\mathbb{L}_\mathbf{1}\to\mathbb{L}_\mathbf{2}$ *и* $\mathbf{B}:\mathbb{L}_\mathbf{2}\to\mathbb{L}_\mathbf{3}$ *называется линейный оператор* $\mathbf{B}\circ\mathbf{A}:\mathbb{L}_1\to\mathbb{L}_3$, *определяемый равенством*

$$(\mathbf{B}\circ\mathbf{A})(\vec{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}(\vec{x}))\ \textit{для любого}\ \vec{x}\in\mathbb{L}_1.$$

Отметим следующие свойства композиции линейных операторов в предположении, что все встречающиеся композиции определены:

1) $\mathbf{A}\circ\mathbf{B}\neq\mathbf{B}\circ\mathbf{A}$ (в общем случае);
2) $\lambda(\mathbf{A}\circ\mathbf{B}) = (\lambda\mathbf{A})\circ\mathbf{B}$;
3) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\circ\mathbf{C} = \mathbf{A}\circ\mathbf{C}+\mathbf{B}\circ\mathbf{C}$;
4) $\mathbf{C}\circ(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{C}\circ\mathbf{A}+\mathbf{C}\circ\mathbf{B}$;
5) $(\mathbf{A}\circ\mathbf{B})\circ\mathbf{C} = \mathbf{A}\circ(\mathbf{B}\circ\mathbf{C})$;
6) зафиксируем базисы $E=(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ в $\mathbb{L}_1$, $F=(\vec{f}_1,\ldots,\vec{f}_m)$ в $\mathbb{L}_2$ и $G=(\vec{g}_1,\ldots,\vec{g}_k)$ в $\mathbb{L}_3$. Тогда

$$[\mathbf{B}\circ\mathbf{A}]_{E\to G} = [\mathbf{B}]_{F\to G}[\mathbf{A}]_{E\to F}.$$

Обратный оператор $\mathbf{A^{-1}}:\mathbb{L}_2\to\mathbb{L}_1$, определяемый равенством

$$\mathbf{A^{-1}}\circ\mathbf{A} = \mathbf{I}_{\mathbb{L}_\mathbf{1}},\quad \mathbf{A}\circ\mathbf{A^{-1}} = \mathbf{I}_{\mathbb{L}_\mathbf{2}},$$

существует, если матрица оператора $\mathbf{A}$ невырождена. При этом

$$[\mathbf{A}^{-1}]_{F\to E} = ([\mathbf{A}]_{E\to F})^{-1}.$$

Пример. Пусть $\mathbf{A} : \mathcal{M}_{2\times 2} \to P_2$ – линейный оператор, который каждой 2×2-матрице сопоставляет полином

$$\mathbf{A}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a-d) + (a+2b)x + (b-3c)x^2.$$

Пусть $\mathbf{B} : P_2 \to P_3$ – дифференциальный оператор, определенный равенством $\mathbf{B}(f) = x^2 f'' - 2f' + xf$. Пусть $E = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ – канонический базис для $\mathcal{M}_{2\times 2}$, а $F = (1, x, x^2)$ и $G = (1, x, x^2, x^3)$ – канонические базисы в линейных пространствах P_2 и P_3. Найти матрицу оператора $\mathbf{B} \circ \mathbf{A} : \mathcal{M}_{2\times 2} \to P_3$ в базисах E и G.

Решение. По определению

$$\mathbf{B} \circ \mathbf{A}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \mathbf{B}((a-d) + (a+2b)x + (b-3c)x^2) =$$

$$= (-2a - 4b) + (a - 4b + 12c - d)x + (a + 4b - 6c)x^2 + (b - 3c)x^3.$$

Координаты векторов $\mathbf{B} \circ \mathbf{A}(E_{11}) = -2 + x + x^2$, $\mathbf{B} \circ \mathbf{A}(E_{12}) = -4 - 4x + 4x^2 + x^3$, $\mathbf{B} \circ \mathbf{A}(E_{21}) = 12x - 6x^2 - 3x^3$, $\mathbf{B} \circ \mathbf{A}(E_{22}) = -x$ в базисе $G = (1, x, x^2, x^3)$ есть

$$[\mathbf{B} \circ \mathbf{A}(E_{11})]_G = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, [\mathbf{B} \circ \mathbf{A}(E_{12})]_G = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{B} \circ \mathbf{A}(E_{21})]_G = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ -6 \\ -3 \end{bmatrix}, [\mathbf{B} \circ \mathbf{A}(E_{22})]_G = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, матрица оператора $\mathbf{B} \circ \mathbf{A}$ имеет вид

$$[\mathbf{B} \circ \mathbf{A}]_{E\to G} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 12 & -1 \\ 1 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Непосредственным умножением убеждаемся в справедливости равенства

$$[\mathbf{B} \circ \mathbf{A}]_{E\to G} = [\mathbf{B}]_{F\to G}[\mathbf{A}]_{E\to F} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

В заключение рекомендуем выполнить предлагаемые упражнения.

8.6. Упражнения

В упражнениях 8.1–8.5 линейные операторы **R,S,T,H** определены следующим образом:

$\mathbf{R}: P_2 \to P_2,\ \mathbf{R}(a+bx+cx^2) = (-4a-2b)+(3a+3b)x+(-a+2b+3c)x^2;$

$\mathbf{S}: P_2 \to P_3,\ \mathbf{S}(p(x)) = x^3p'' - x^2p' + 3p;$

$\mathbf{T}: P_3 \to P_4,\ \mathbf{T}(p(x)) = (x+2)p(x);$

$\mathbf{H}: P_4 \to P_3,\ \mathbf{H}(p(x)) = p'(x) + p(0).$

Пусть $L = (1, x, x^2)$, $M = (x+1, x+2, x^2)$, $E = (1, x, x^2, x^3)$ и $F = (1, x, x^2, x^3, x^4)$ есть канонические базисы соответственно в P_2, P_2, P_3 и P_4. Найти матрицу указанного оператора в указанных базисах.

8.1. $\mathbf{R}$ в базисах L и L. **8.2.** $\mathbf{S}$ в базисах M и E. **8.3.** $\mathbf{T}$ в базисах E и F. **8.4.** $\mathbf{H}$ в базисах F и E. **8.5.** $\mathbf{T} \circ \mathbf{H}$ в базисе F.

8.6. Найти матрицу оператора проецирования $\mathbf{P}$ на прямую $y = -\sqrt{3}x$ в пространстве $\mathbb{R}^2$ со стандартным базисом.

8.7. Найти матрицу оператора проецирования $\mathbf{P}$ векторов из пространства $\mathbb{R}^3$ со стандартным базисом на его линейное подпространство W – плоскость $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ с базисом $f_1 = [0\ 1\ -1]^{\text{т}}$, $f_2 = [1\ 0\ -1]^{\text{т}}$.

8.8. Найти матрицу оператора транспонирования матриц в пространстве $\mathcal{M}_{2\times 2}$ со стандартным базисом $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.

Ответы

8.1. $\begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. **8.2.** $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **8.3.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **8.4.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. **8.5.** $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. **8.6.** $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$. **8.7.** $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$. **8.8.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

9. Элементы аналитической геометрии

Аналитическая геометрия – раздел математики, устанавливающий связь между алгеброй и геометрией. Геометрическому объекту – точке ставится в соответствие единственным образом набор чисел – ее координаты. Понятие прямоугольной системы координат на плоскости впервые появилось в геометрии еще до начала нашей эры. С ее помощью математик Александрийской школы Аполлоний определял и изучал кривые второго порядка – эллипс, гиперболу и параболу. В XVIII в. французский математик Р. Декарт ввел правило выбора знаков в прямоугольной системе координат и заложил основы аналитической геометрии на плоскости. Аналитическая геометрия сыграла важную роль в развитии понятия числа. Благодаря правилу выбора знаков координат сначала отрицательные, а позднее и комплексные числа (которые первоначально не признавались большинством математиков) получили наглядное изображение и окончательно утвердились в математике. Некоторые факты из аналитической геометрии, рассмотренные в школьном курсе математики, будут использованы в данном издании.

9.1. Геометрические векторы

В школьном курсе математики было введено понятие геометрического вектора – направленного отрезка. Одинаково направленные и равные по длине отрезки отождествлялись.

Для геометрических векторов были введены операции сложения (по правилу параллелограмма), вычитания (по правилу треугольника) и умножения на число (рис. 9.1 – 9.3).

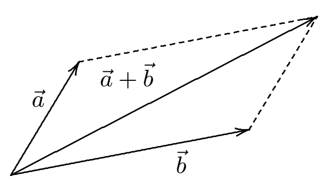


Рис. 9.1

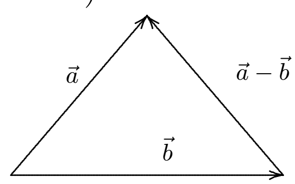


Рис. 9.2

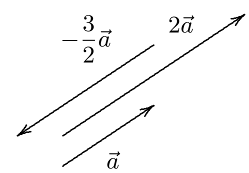


Рис. 9.3

Если в пространстве выбрать правую тройку единичных взаимноперпендикулярных векторов (ортов) $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ (рис. 9.4), то любой геометрический вектор $\vec{a}$ можно единственным образом представить в виде

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

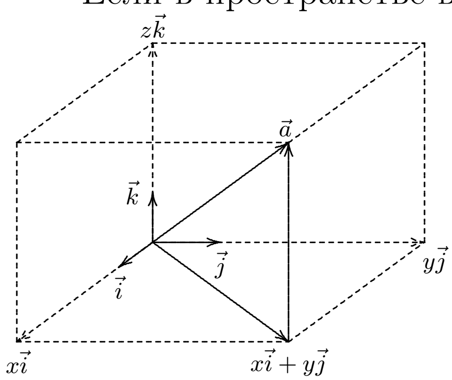


Рис. 9.4

При этом векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ называют базисом, а числа x, y, z – координатами $\vec{a}$ и пишут $\vec{a}\{x, y, z\}$ или

$$\vec{a} = [x\ y\ z]^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

9.2. Сводка формул из школьного курса

В школе были введены понятия длины вектора $|\vec{a}|$, угла между векторами, скалярного произведения векторов $\vec{a} \cdot \vec{b}$ (здесь используется другое обозначение $(\vec{a}, \vec{b}\,)$).

Пусть $\vec{a} = [a_1\ a_2\ a_3]^{\text{т}},\ \vec{b} = [b_1\ b_2\ b_3]^{\text{т}},\ \lambda \in \mathbb{R}$. Тогда:

1) $\lambda\vec{a} = [\lambda a_1\ \lambda a_2\ \lambda a_3]^{\text{т}}$; 2) $\vec{a} \pm \vec{b} = [a_1 \pm b_1\ a_2 \pm b_2\ a_3 \pm b_3]^{\text{т}}$;

3) $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$;

4) скалярное произведение: $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ и его свойства:

а) $(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2$; $\quad)(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b})$;

) $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$; $\quad)$ $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$;

5) $\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}) = \dfrac{(\,\vec{},\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$;

6) $\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{i}}) = \dfrac{a_1}{|\vec{a}|}$; $\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{j}}) = \dfrac{a_2}{|\vec{a}|}$; $\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{k}}) = \dfrac{a_3}{|\vec{a}|}$;

7) $\cos^2(\widehat{\vec{a}\,\vec{i}}) + \cos^2(\widehat{\vec{a}\,\vec{j}}) + \cos^2(\widehat{\vec{a}\,\vec{k}}) = 1$.

9.3. Векторное произведение векторов

Определение 9.1. *Векторным произведением $\vec{a} \times \vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ из $\mathbb{R}^3$ называется вектор $\vec{c}$, такой, что*:

1) *вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$*;

2) $|\vec{c}| = |\vec{a}|\ |\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$;

3) *векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны) образуют правую тройку: из конца вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ виден против часовой стрелки.*

Свойства векторного произведения

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (антикоммутативность);

2) $(\vec{a} \pm \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} \pm \vec{b} \times \vec{c}$, $\vec{c} \times (\vec{a} \pm \vec{b}) = \vec{c} \times \vec{a} \pm \vec{c} \times \vec{b}$ (дистрибутивность);

3) для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$;

4) длина векторного произведения вычисляется по формуле $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}, \vec{b})^2}$ и численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах;

5) $\vec{a} \parallel \vec{b} \ \Leftrightarrow\ \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$;

6) $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$; $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$; $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$.

Следствие 9.1. *Для векторов* $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ *и* $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ *их вектор-*

ное произведение можно записать в виде

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{i}(a_2b_3-a_3b_2)-\vec{j}(a_1b_3-a_3b_1)+\vec{k}(a_1b_2-a_2b_1)=$$
$$=\vec{i}\det\begin{bmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{bmatrix}-\vec{j}\det\begin{bmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{bmatrix}+\vec{k}\det\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{bmatrix}. \qquad (\quad 9.1)$$

Отметим, что формулу (9.1) удобно записывать в виде “символического” определителя:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\det\begin{bmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{bmatrix},$$

формальное разложение его по первому столбцу совпадает с (9.1).

Пример. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}=[1\ 2\ -1]^{т}$ и $\vec{b}=[3\ 0\ -2]^{т}$ и вычислить его длину.

Решение. По определению имеем
$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & -2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & -2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & -2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-4\vec{i}-\vec{j}-6\vec{k}.$$

Вычислим $|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{(-4)^2+(-1)^2+(-6)^2}=\sqrt{53}$. Вычислим длину вторым способом по формуле $|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a},\vec{b})^2}$. Для этого найдем $|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$; $|\vec{b}|=\sqrt{3^2+0^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$; $(\vec{a},\vec{b})=1\cdot 3+2\cdot 0+(-1)\cdot(-2)=5$. Отсюда $|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{6\cdot 13-5^2}=\sqrt{53}$.

Пример. Найти площадь треугольника с вершинами в точках $A_1(-6,-3,-5)$, $A_2(-5,-4,-3)$, $A_3(-2,-1,-6)$.

Решение. Найдем координаты векторов: $\overrightarrow{A_2A_1}=[-1\ 1\ -2]^{т}$; $\overrightarrow{A_2A_3}=[3\ 3\ -3]^{т}$. Вычислим $\overrightarrow{A_2A_1}\times\overrightarrow{A_2A_3}=$
$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 1 & -2\\ 3 & 3 & -3\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & -3\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 3 & -3\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & 3\end{vmatrix}=3\vec{i}-9\vec{j}-6\vec{k}.$$

Отсюда площадь треугольника $A_1A_2A_3$

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{A_2A_1}\times\overrightarrow{A_2A_3}|=\frac{1}{2}\sqrt{3^2+(-9)^2+(-6)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{126}.$$

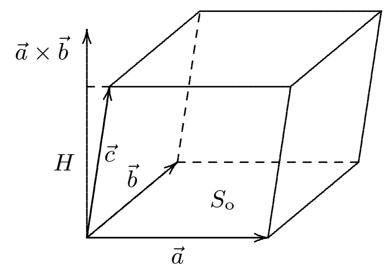
Упражнение. Найти площадь четырехугольника с вершинами в точках $A_1(5,0,2)$, $A_2(-2,-2,6)$, $A_3(7,4,0)$, $A_4(0,2,4)$.

Ответ: $S=6\sqrt{21}$.

9.4. Смешанное произведение

Пусть $\vec{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3]^т$, $\vec{b} = [b_1 \ b_2 \ b_3]^т$, $\vec{c} = [c_1 \ c_2 \ c_3]^т$. Смешанное произведение трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (рис. 9.5) – это число:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{\ } = (\vec{a}, \vec{b} \times \vec{\ }) = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{\ }) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$



ђЁб. 9.5

с точностью до знака равное объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{\ }$ как на сторонах. Объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{\ }$ как на сторонах, равен с точностью до знака одной шестой их смешанного произведения.

Векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{\ }$ компланарны, т. е. параллельны одной плоскости, тогда и только тогда, когда $\vec{a}\vec{b}\vec{\ } = 0$.

Пример. Найти объем пирамиды с вершинами в точках (рис. 9.6) $A_1(-6, -3, -5)$, $A_2(-5, -4, -3)$, $A_3(-2, -1, -6)$, $A_4(-2, 1, -2)$.

Решение. Найдем координаты векторов:

$$\overrightarrow{A_2A_1} = [-1 \ 1 \ -2]^т; \quad \overrightarrow{A_2A_3} = [3 \ 3 \ -3]^т; \quad \overrightarrow{A_2A_4} = [3 \ 5 \ 1]^т.$$

Тогда

$$V = \frac{1}{6}|\overrightarrow{A_2A_1} \ \overrightarrow{A_2A_3} \ \overrightarrow{A_2A_4}| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -3 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}\right| = 7.$$

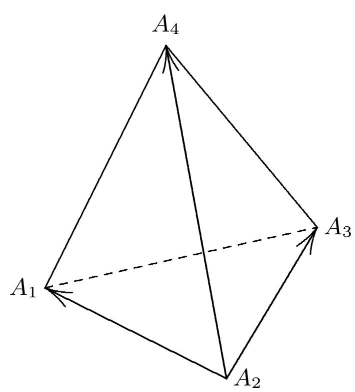


Рис. 9.6

Упражнение. Найти объем пирамиды с вершинами в точках $A_1(5, 0, 2)$, $A_2(-2, -2, 6)$, $A_3(7, 4, 0)$ $A_4(-2, 1, 0)$.

Ответ: $V = 21$.

9.5. Отрезок. Деление отрезка в данном отношении

Расстояние между точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ равно:

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Множество точек

$$\{M(x, y, z) \mid \begin{cases} x = (1-t)x_1 + tx_2, \\ y = (1-t)y_1 + ty_2, \\ z = (1-t)z_1 + tz_2 \end{cases} \qquad t \in [0; 1]\}$$

называется отрезком $[M_1M_2]$.

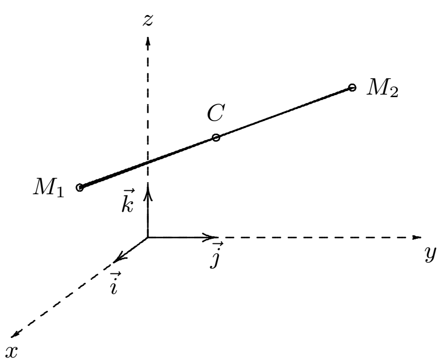


Рис. 9.7

Координаты точки , делящей отрезок $[M_1M_2]$ в отношении $\dfrac{|M_1C|}{|CM_2|} = \lambda$ (рис. 9.7), равны:

$$x_c = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \ y_c = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \ z_c = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Координаты середины отрезка $[M_1M_2]$ равны:

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}; \ y_c = \frac{y_1 + y_2}{2}; \ z_c = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Пример. Найти точку C, делящую в отношении $2 : 1$ отрезок с концами в точках $M_1(-5, -4, -3)$, $M_2(-2, -1, -6)$.

Решение. В нашем примере $\lambda = 2$. Тогда

$$x_c = \frac{-5 + 2(-2)}{1 + 2} = -3; \ y_c = \frac{-4 + 2(-1)}{1 + 2} = -2; \ z_c = \frac{-3 + 2(-6)}{1 + 2} = -5.$$

Отсюда $C(-3, -2, -5)$. Сделаем проверку. Для этого вычислим

$$|M_1C| = \sqrt{(-3 + 5)^2 + (-2 + 4)^2 + (-5 + 3)^2} = 2\sqrt{3};$$
$$|CM_2| = \sqrt{(-2 + 3)^2 + (-1 + 2)^2 + (-6 + 5)^2} = \sqrt{3}.$$

Следовательно, $\dfrac{|M_1C|}{|CM_2|} = 2$, что и требовалось.

Упражнение. Найти точку C, делящую в отношении $1 : 2$ отрезок с концами в точках $M_1(-5, -4, -3)$, $M_2(-2, -1, -6)$, и точку D, делящую этот отрезок пополам.

Ответ: $C(-4, -3, -4)$, $D(-3.5, -2.5, -4.5)$.

9.6. Уравнение плоскости

Уравнение $Ax+By+Cz+D=0$ определяет плоскость с нормальным вектором $\vec{n}=[A\ B\ C]^{т}$ (рис. 9.8).

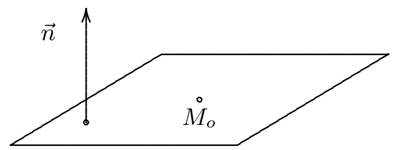


Рис. 9.8

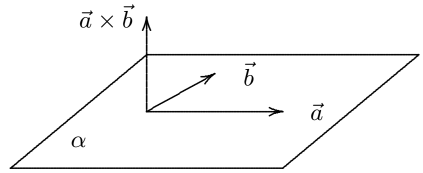


Рис. 9.9

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=[A\ B\ C]^{т}$, имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 9.9) лежат в плоскости α или параллельны ей, то в качестве нормального вектора $\vec{n}$ к α можно взять $\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}$.

Пример. Найти уравнение плоскости α, проходящей через точки $A_1(-6,-3,-5)$,

Решение. Найдем координаты векторов: $\overrightarrow{A_2A_1}=[-1\ 1\ -2]^{т}$; $\overrightarrow{A_2A_3}=[3\ 3\ -3]^{т}$. Вычислим

$$\overrightarrow{A_2A_1}\times\overrightarrow{A_2A_3}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -3 \end{vmatrix}=3\vec{i}-9\vec{j}-6\vec{k}=3[1\ -3\ -2]^{т}.$$

В качестве нормального вектора $\vec{n}$ к α можно взять

$$\vec{n}=\frac{1}{3}\overrightarrow{A_2A_1}\times\overrightarrow{A_2A_3}=[1\ -3\ -2]^{т}.$$

Напишем уравнение плоскости α:

$$1(x+6)-3(y+3)-2(z+5)=0 \iff x-3y-2z-13=0.$$

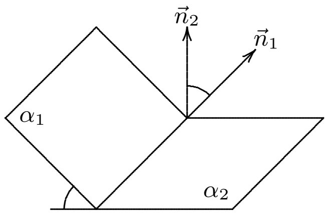
Упражнение. Найти уравнение плоскости β , проходящей через точки $A_1(5,0,2)$, $A_2(-2,-2,6)$, $A_3(7,4,0)$.

Ответ: $2x+y+4z=18$.

9.7. Взаимное расположение плоскостей

При пересечении двух плоскостей α_1 и α_2 образуется четыре двугранных угла. Наименьший из них называется углом между плоскостями. Если плоскости параллельны, то считаем, что угол между ними равен нулю. Следовательно, всегда $\widehat{\alpha_1\,\alpha_2}\in[0,\pi/2]$.

Угол между плоскостями α_1 и α_2 с нормальными векторами $\vec{n}_1=$ $=[A_1\ B_1\ C_1]^{т}$ и $\vec{n}_2=[A_2\ B_2\ C_2]^{т}$ (рис. 9.10) находится из формулы



$$\cos(\widehat{\alpha_1\,\alpha_2}) = |\cos(\widehat{\vec{n}_1\,\vec{n}_2})| = \frac{|(\vec{n}_1, \vec{n}_2)|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} =$$
$$= \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (9.2)$$

Рис. 9.10

Условие параллельности двух плоскостей α_1 и α_2:

$$\alpha_1 \| \alpha_2 \Longleftrightarrow \vec{n}_1 \| \vec{n}_2 \Longleftrightarrow \vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2 \Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Условие перпендикулярности двух плоскостей α_1 и α_2:

$$\alpha_1 \perp \alpha_2 \Longleftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Longleftrightarrow (\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0 \Longleftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Условие пересечения трех плоскостей α_1, α_2 и α_2 в одной точке: $\vec{n}_1\vec{n}_2\vec{n}_3 = 0$.

Пример. Найти угол между плоскостями $\alpha_1 :\ 3x - 2y + z = -10$ и $\alpha_2 :\ x - 3y - 2z - 13 = 0$.

Решение. Найдем нормальные векторы к плоскостям: $\vec{n}_1 = [3\ \ -2\ 1]^{\text{т}}$, $\vec{n}_2 = [1\ \ -3\ \ -2]^{\text{т}}$. По формуле (9.2)

$$\cos(\widehat{\alpha_1\,\alpha_2}) = |\cos(\widehat{\vec{n}_1\,\vec{n}_2})| = \frac{|(\vec{n}_1, \vec{n}_2)|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} =$$
$$= \frac{|3 \cdot 1 + (-2)(-3) + 1 \cdot (-2)|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-2)^2}} = 0.5.$$

Следовательно, угол между плоскостями α_1 и α_2 равен $\pi/3$.

Упражнение. Найти угол между плоскостями $x + 2y + 2z = 3$ и $16x + 12y - 15z = 1$.

Ответ: $\mathrm{a}rccos\frac{2}{15}$.

9.8. Взаимное расположение плоскости и точки

Расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость. Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $\alpha :\ Ax + By + Cz + D = 0$ равно:

$$\mathrm{d}ist(M_0,\alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

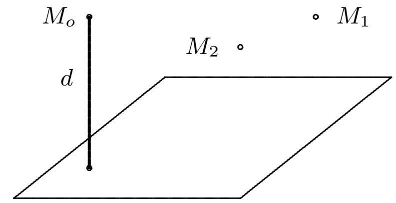


Рис. 9.11

Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит на плоскости

$Ax+By+Cz+D = 0 \Longleftrightarrow Ax_0+By_0+Cz_0+D = 0.$

Точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 9.11) лежат по одну (разные) сторону от плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D) > 0 \ (< 0).$$

Пример. Показать, что плоскости $2x - 3y + 6z - 14 = 0$ и $4x - 6y + 12z + 21 = 0$ параллельны и найти расстояние между ними.

Решение. Так как $\dfrac{2}{4} = \dfrac{-3}{-6} = \frac{6}{12}$, то плоскости параллельны. Другой способ. Найдем нормальные векторы к плоскостям:

$$\vec{n}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad \vec{n}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Так как $\vec{n}_2 = 2\vec{n}_1$, то $\vec{n}_2 \| \vec{n}_1$, а потому плоскости параллельны. Возьмем любую точку на первой плоскости, например $M_0(7, 0, 0)$, и найдем ее расстояние d от второй плоскости:

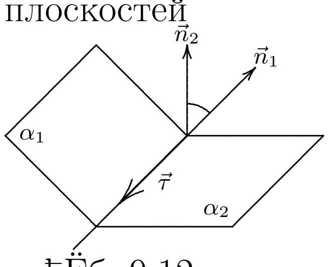
$$d = \frac{|4 \cdot 7 - 6 \cdot 0 + 12 \cdot 0 + 21|}{\sqrt{4^2 + (-6)^2 + 12^2}} = \frac{49}{\sqrt{196}} = \frac{49}{14} = 3.5.$$

Упражнение. Найти длину H высоты пирамиды с вершинами в точках $A_1(-6, -3, -5)$, $A_2(-5, -4, -3)$, $A_3(-2, -1, -6)$, $A_4(-2, 1, -2)$, опущенной из вершины A_4 на плоскость основания $(A_1A_2A_3)$.

Ответ: $H = \sqrt{14}$.

9.9. Общее уравнение прямой в пространстве

Прямая определяется как линия пересечения двух непараллельных плоскостей



ђЁб. 9.12

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (\quad 9.3)$$

Система (9.3) называется общим уравнением прямой.

Найдем нормальные векторы к плоскостям: $\vec{n}_1 = [A_1\ B_1\ C_1]^{\text{т}}$, $\vec{n}_2 = [A_2\ B_2\ C_2]^{\text{т}}$. Очевидно, что вектор $\vec{\tau} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ является направляющим вектором этой прямой (рис. 9.12) (он параллелен прямой).

Пример. Найти направляющий вектор прямой, заданной общим уравнением:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z - 4 = 0, \\ 3x - 5y + 2z + 1 = 0. \end{cases}$$

Решение. Найдем нормальные векторы к плоскостям: $\vec{n}_1 = [2\ 3\ \ -1]^{\text{т}}$, $\vec{n}_2 = [3\ \ -5\ 2]^{\text{т}}$. В качестве направляющего вектора этой прямой можно взять $\vec{\tau} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = \vec{i} - 7\vec{j} - 19\vec{k}$.

Упражнение. Найти направляющий вектор прямой, заданной общим уравнением

$$\begin{cases} x + 2y - z - 6 = 0, \\ 2x - y + z + 1 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\vec{\tau} = [-1\ 3\ 5]^{\text{т}}$.

9.10. Каноническое и параметрическое уравнения прямой

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $\vec{\tau} = [m\ n\ p]^{\text{т}}$, (рис. 9.13) имеет вид

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

и называется каноническим уравнением прямой. Это уравнение можно также записать в виде

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

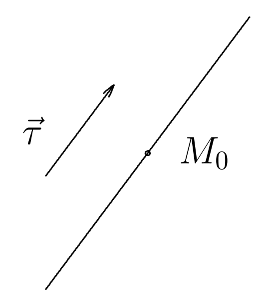


Рис. 9.13

(параметрическое уравнение прямой).

Пример. Составить каноническое и параметрическое уравнения прямой, заданной общим уравнением

$$\begin{cases} 2x + 3y - z - 4 = 0, \\ 3x - 5y + 2z + 1 = 0. \end{cases} \tag{9.4}$$

Решение. Нормальные векторы к плоскостям: $\vec{n}_1 = [2\ 3\ -1]^{\text{т}}$, $\vec{n}_2 = [3\ -5\ 2]^{\text{т}}$. В качестве направляющего вектора этой прямой можно взять $\vec{\tau} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = [1\ -7\ -19]^{\text{т}}$. Найдем любую точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащую на прямой. Возьмем $y_0 = 0$. Координаты x_0, z_0 находим из уравнений (9.4): $x_0 = 1$, $z_0 = -2$, следовательно, каноническим и параметрическим уравнениями прямой будут уравнения

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-7} = \frac{z+2}{-19} \text{ и } \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -7t, \\ z = -2 - 19t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R},$$

соответственно.

9.11. Взаимное расположение прямых

При пересечении двух прямых L_1 и L_2 образуется четыре плоских угла. Наименьший из них называется углом между прямыми $\widehat{L_1 L_2}$. Если прямые L_1 и L_2 параллельны, то считаем $\widehat{L_1 L_2} = 0$. Если прямые скрещиваются, то через произвольную точку пространства проводят прямые L_1' и L_2', параллельные L_1 и L_2. За угол $\widehat{L_1 L_2}$ принимают $\widehat{L_1' L_2'}$. Следовательно, всегда $\widehat{L_1 L_2} \in [0, \pi/2]$.

Угол между прямыми L_1 и L_2 с направляющими векторами $\vec{\tau}_1 = [m_1 n_1 p_1]^{\text{т}}$ и $\vec{\tau}_2 = [m_2 n_2 p_2]^{\text{т}}$ находят из формулы

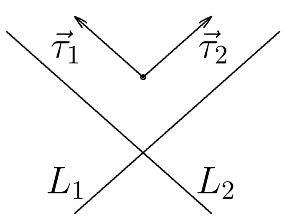


Рис. 9.14

$$\cos(\widehat{L_1 L_2}) = |\cos(\widehat{\vec{\tau}_1 \vec{\tau}_1})| = \frac{|(\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2)|}{|\vec{\tau}_1||\vec{\tau}_2|} = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Условие параллельности двух прямых L_1 и L_2:

$$L_1 \| L_2 \ \Leftrightarrow\ \vec{\tau}_1 \| \vec{\tau}_2 \Leftrightarrow \vec{\tau}_1 = \lambda \vec{\tau}_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Условие перпендикулярности двух прямых L_1 и L_2:

$$L_1 \perp L_2 \ \Leftrightarrow\ \vec{\tau}_1 \perp \vec{\tau}_2 \Leftrightarrow (\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2) = 0 \Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

Пример. Найти угол между прямыми:

$$L_1: \ \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}; \quad L_2: \ \begin{cases} x = t-2, \\ y = t+3, \\ z = \sqrt{2}t - 5 \end{cases} \qquad t \in R.$$

Решение. Найдем направляющие векторы к прямым: $\vec{\tau}_1 = [1 \ -1 \ \sqrt{2}]^{\text{т}}$, $\vec{\tau}_1 = [1 \ 1 \ \sqrt{2}]^{\text{т}}$. Угол между прямыми L_1 и L_2 с направляющими векторами $\vec{\tau}_1$ и $\vec{\tau}_2$ находят из формулы

$$\cos(\widehat{L_1 \, L_2}) = |\cos(\widehat{\vec{\tau}_1 \, \vec{\tau}_1})| = \frac{|(\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2)|}{|\vec{\tau}_1||\vec{\tau}_2|} =$$

$$= \frac{|1-1+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+\sqrt{2}^2}\sqrt{1^2+1^2+\sqrt{2}^2}} = 0.5.$$

Следовательно, угол между прямыми равен $\dfrac{\pi}{3}$.

Упражнение. Найти угол между прямыми:

$$L_1: \ \begin{cases} x - y - 4z - 5 = 0 \\ 2x + y - 2z - 4 = 0 \end{cases}; \quad L_2: \ \begin{cases} x - 6y - 6z + 2 = 0 \\ 2x + 2y + 9z - 1 = 0 \end{cases}.$$

Ответ: $\arccos\left(\dfrac{4}{21}\right)$.

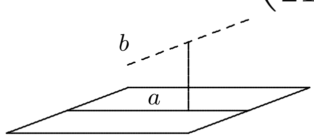


Рис. 9.15

Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется расстояние от одной прямой до плоскости, проходящей через другую прямую параллельно первой (рис. 9.15).

Упражнение. Найти расстояние между прямыми $L_1: \ \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+9}{-4} = \dfrac{z-9}{4}$ и $L_2: \ \dfrac{x-6}{2} = \dfrac{y-16}{6} = \dfrac{z+4}{-1}$.

Ответ: $dist(L_1, L_2) = 3$.

9.12. Взаимное расположение прямой и плоскости

Угол между плоскостью α с нормальным вектором $\vec{n} = [A \ B \ C]^{\text{т}}$ и прямой L с направляющим вектором $\vec{\tau} = [m\ n\ p]^{\text{т}}$ (рис. 9.16)находится из формулы

$$\sin(\widehat{\alpha,\ L}) = |\cos(\widehat{\vec{n},,\vec{\tau}})| = \frac{|(\vec{n},\vec{\tau})|}{|\vec{n}|\,|\vec{\tau}|} =$$

$$= \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

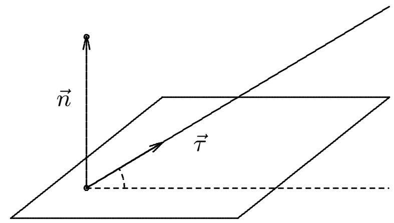


Рис. 9.16

Условие параллельности плоскости α и прямой L:

$$\alpha \| L \iff \vec{n} \perp \vec{\tau} \iff (\vec{n},\vec{\tau}) = 0 \iff Am + Bn + Cp = 0.$$

Условие перпендикулярности плоскости α и прямой L:

$$\alpha \perp L \iff \vec{n} \| \vec{\tau} \iff \vec{n} = \lambda\vec{\tau} \iff \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

Пример. Доказать, что прямая $L:\ \begin{cases} x = 3t - 2, \\ y = -4t + 1, \\ z = 4t - 5 \end{cases}\quad t \in \mathbb{R}$ параллельна плоскости $\alpha:\ 4x - 3y - 6z - 5 = 0$.

Решение. Найдем направляющий вектор к прямой L: $\vec{\tau} = [3\ -4\ 4]^{\text{т}}$. Найдем нормальный вектор к плоскости α: $\vec{n} = [4\ -3\ -6]^{\text{т}}$. Так как $(\vec{n},\vec{\tau}) = 4\cdot 3 + (-3)\cdot(-4) + (-6)\cdot 4 = 0$, то $\vec{n}\perp\vec{\tau}$, а потому $\alpha\|L$.

Пример. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

$$L:\ \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}; \qquad \alpha:\ 2x + 3y + z - 1 = 0.$$

Решение. Координаты точки пересечения прямой и плоскости найдем из системы:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{6}, \\ \\ 2x + 3y + z - 1 = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{x-1}{1} = t, \\ \\ \dfrac{y+1}{-2} = t, \\ \\ \dfrac{z}{6} = t, \\ \\ 2x + 3y + z - 1 = 0. \end{cases} \iff$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = t + 1, \\ y = -2t - 1, \\ z = 6t, \\ 2x + 3y + z - 1 = 0. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = t + 1, \\ y = -2t - 1, \\ z = 6t, \\ 2(t + 1) + 3(-2t - 1) + 6t - 1 = 0. \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = t + 1, \\ y = -2t - 1, \\ z = 6t, \\ t = 1. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = -3, \\ z = 6. \end{cases}$$

Упражнение. Найти проекцию P точки $M(-2, 1, -2)$ на плоскость $x - 3y - 2z - 13 = 0$.

Ответ: $P(-1, -2, -4)$.

В заключение рекомендуем выполнить предлагаемые упражнения.

9.13. Упражнения

9.1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(2, -4, -8)$, $A_2(15, -8, 0)$, $A_3(-9, 4, -12)$, $A_4(0, -3, 1)$. (рис. 9.17) Найти:

а) косинус угла α между плоскостями $(A_1A_2A_3)$ и $(A_2A_3A_4)$;

б) синус угла β между ребром (A_1A_4) и плоскостью $(A_1A_2A_3)$;

в) площадь S грани $(A_1A_2A_3)$;

г) объем V пирамиды;

д) точку A_5, симметричную A_4 относительно плоскости $(A_1A_2A_3)$;

е) точку A_6, симметричную A_4 относительно прямой (A_2A_3);

ж) расстояние D между ребрами (A_1A_3) и (A_2A_4);

з) высоту H, опущенную из A_4 на плоскость $(A_1A_2A_3)$, пятью способами: используя угол β; используя объем и площадь основания; как половину отрезка (A_4A_5); как расстояние от A_4 до плоскости $(A_1A_2A_3)$; по формуле

$$H = \frac{1}{2}|A_4A_6|\sin(\alpha);$$

и) найти координаты центра $O_в$ и радиус $R_в$ вписанного в пирамиду шара двумя способами: как расстояние от центра шара до граней и по формуле $R_в = \dfrac{3V}{S_{п.}}$, где $S_{п.}$ – площадь полной поверхности пирамиды;

к) найти координаты центра $O_о$ и радиус $R_о$ описанного шара как расстояние от центра шара до вершин пирамиды.

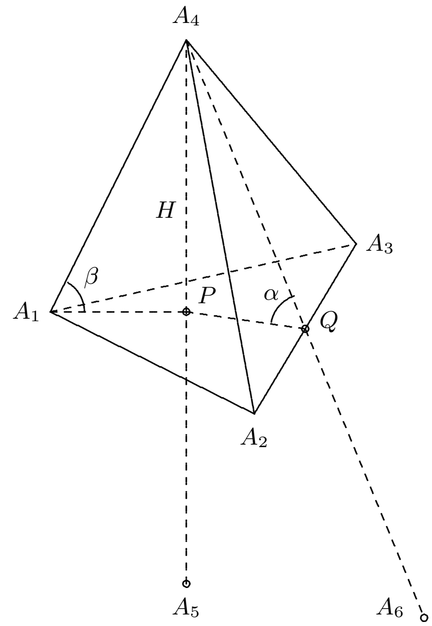


Рис. 9.17

9.2. Написать каноническое уравнение прямой

$$L: \begin{cases} -3x + y + 3z = -6, \\ -x + y + 4z = 3. \end{cases}$$

9.3. Написать параметрическое уравнение прямой

$$L: \begin{cases} -2x + y + 2z = -7, \\ -2x + 4y + 3z = 1. \end{cases}$$

9.4. Найти координаты точки M пересечения плоскостей $P_1: \ 3x - y - 2z = 4$; $P_2: \ x - 2y - z = -5$; $P_3: \ 2x - y - 2z = 2$.

9.5. Найти координаты точки M пересечения прямой L и плоскости P:

$$L: \ \frac{x-2}{-4} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-1}{1}, \quad P: \ x - 4y + 4z = 2.$$

9.6. Найти координаты точки M пересечения прямых:

$$L_1: \ \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}, \quad L_2: \ \frac{x+6}{-4} = \frac{y-9}{4} = \frac{z-6}{1}$$

или доказать, что эти прямые не пересекаются.

9.7. Написать уравнение плоскости P, проходящей через точку $M(1,3,-1)$ перпендикулярно прямой $L: \ \dfrac{x+4}{3} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z+2}{-1}$.

9.8. Написать уравнение прямой L, проходящей через точку $M(-4,3,-2)$ перпендикулярно плоскости $P: \ 3x - y - 3z = -9$.

9.9. Написать уравнение плоскости P_2, проходящей через точку $M(-1,3,1)$ параллельно плоскости $P_1: \ x - y - 4z = -9$.

9.10. Написать уравнение прямой L_2, проходящей через точку $M(-4,-2,3)$ параллельно прямой $L_1: \ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-4} = \dfrac{z-4}{-3}$.

9.11. Написать уравнение плоскости P, проходящей через точку $M(3,1,2)$ параллельно векторам $\vec{a} = [-5 \ 1 \ -3]^т$ и $\vec{b} = [-7 \ 3 \ -5]^т$.

9.12. Написать уравнение плоскости P, проходящей через точки

$M(-2,-1,2)$, $N(-1,4,-3)$ и $K(-3,3,-1)$.
9.13. Написать уравнение плоскости P, проходящей через точки $M(-4,1,-2)$ и $N(-2,-1,1)$ параллельно прямой
$L:\ \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+2}{-5}=\dfrac{z-3}{6}$.
9.14. Написать уравнение плоскости P, проходящей через точки $M(-1,2,1)$ и $N(-2,4,-1)$ параллельно вектору $\vec{a}=[-2\ 2\ -3]^{\text{т}}$.
9.15. Найти острый угол между плоскостями $P_1:\ -2x+y-z=8$ и $P_2:\ x+z=3$.
9.16. Найти острый угол между прямой $L:\ \dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z+4}{1}$ и плоскостью $P:\ 7x+7y=7$.
9.17. Найти расстояние между точкой $M(-3,-7,3)$ и плоскостью $P:$ $6x+3y-2z=4$.
9.18. Найти расстояние между плоскостями $P_1:\ -x+2y-2z=12$ и $P_2:\ 2x-4y+4z=12$.
9.19. Найти координаты точки N, которая является проекцией точки $M(3,6,-9)$ на прямую $L:\ \dfrac{x+7}{4}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+2}{1}$.
9.20. Найти координаты точки N, которая является проекцией точки $M(-8,3,-5)$ на плоскость $P:\ 2x-y+4z=3$.
9.21. Найти координаты точки N, расположенной симметрично точке $M(7,5,-4)$ относительно прямой $L:\ \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{4}$.
9.22. Найти координаты точки N, расположенной симметрично точке $M(7,-4,8)$ относительно плоскости $P:\ 4x-3y+2z=-2$.
9.23. Написать уравнения прямой L_2, которая получается проектированием прямой $L_1:\ \dfrac{x-5}{0}=\dfrac{y-1}{6}=\dfrac{z+4}{-3}$ на плоскость
$P:\ -x-2y+2z=-6$.
9.24. Точка $M(-3,-1,4)$ расположена посредине между прямой $L:\ \dfrac{x+1}{-3}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z-4}{1}$ и плоскостью P. Написать уравнение этой плоскости.
9.25. Точка $M(-2,-1,1)$ расположена посредине между плоскостями $P_1:$ $-x+2y-2z=7$ и P_2. Написать уравнение плоскости P_2.
9.26. Точка $M(1,2,3)$ расположена посредине между параллельными прямыми $L_1:\ \dfrac{x+5}{2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-7}{-2}$ и L_2. Написать уравнение прямой L_2.
9.27. Прямые $L_1:\ \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+9}{-3}=\dfrac{z+3}{-2}$ и $L_2:\ \dfrac{x+7}{-3}=\dfrac{y-5}{9}=\dfrac{z-1}{6}$ симметричны друг другу относительно плоскости P. Написать уравнение этой плоскости.

9.28. Прямые $L_1: \ \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z-1}{9}$ и L_2 симметричны друг другу относительно плоскости $P: \ 4x + 3y - 5z = 36$. Написать уравнение прямой L_2.

9.29. Написать уравнение плоскости P, проходящей через две параллельные прямые
$L_1: \ \dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-4}{1}$ и $L_2: \ \dfrac{x+3}{-3} = \dfrac{y+4}{6} = \dfrac{z-8}{3}$.

9.30. Написать уравнение плоскости P, проходящей через прямую L_1 : $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-4}{4} = \dfrac{z+1}{-3}$ параллельно прямой $L_2: \ \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$.

9.31. Написать уравнение плоскости P, проходящей через точку $M(3, 4, -3)$ параллельно прямым
$L_1: \ \dfrac{x-4}{-3} = \dfrac{y-6}{1} = \dfrac{z+4}{-1}$ и $L_2: \ \dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$.

9.32. Написать уравнение прямой L, проходящей через точку $M(-3, -2, 4)$ параллельно плоскостям $P_1: \ -x + y - 3z = 3$ и $P_2: \ -2x - y + 2z = 7$.

9.33. Найти острый угол α между прямыми $L_1: \ \dfrac{x+1}{0} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z+3}{7}$ и $L_2: \ \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+2}{2}$.

9.34. Найти острый угол α между прямыми $L_1: \ \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-4}{7} = \dfrac{z-2}{2}$ и $L_2: \ \begin{cases} 2x - 3y + 3z = -1 \\ -3x + 4y - 4z = 0 \end{cases}$.

9.35. Найти расстояние между точкой $M(-5, 9, -7)$ и прямой $L: \ \dfrac{x+9}{6} = \dfrac{y+5}{8} = \dfrac{z+2}{4}$.

9.36. Найти расстояние между прямыми $L_1: \ \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+9}{-4} = \dfrac{z-9}{4}$ и $L_2: \ \dfrac{x-6}{2} = \dfrac{y-16}{6} = \dfrac{z+4}{-1}$.

Ответы

9.1. а) $\cos(\alpha) = .378$; б) $\sin(\beta) = .762$; в) $S = 42.43$; г) $V = 100.00$; д) прямая $(A_4A_5): \ \dfrac{x}{-4} = \dfrac{y+3}{-3} = \dfrac{z-1}{5}$; $A_5(8, 3, -9)$; е) $A_6(7.33, -1.67, -12.33)$; ж) $D = 5.99$; з) $H = 7.07$; и) $R_в = 1.03$; $O_в(2.69, .15, 7.23)$; плоскости граней пирамиды $(A_1A_2A_3): -4x - 3y + 5z = -36$; $(A_2A_3A_4): 6x + 17y + 5z = -46$; $(A_1A_3A_4): -76x - 107y - 5z = 316$; $(A_1A_2A_4): 44x + 133y - 5z = -404$; к) $R_о = 46.52$; $O_о(21.70, 37.90, -3.50)$; система уравнений для нахождения координат точки $O_о$ $\begin{cases} 26x - 8y + 16z = 205, \\ -22x + 16y - 8z = 157, \\ -2x + y + 9z = -37. \end{cases}$ **9.2.** $L: \ \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-3}{9} = \dfrac{z-1}{-2}$. **9.3.** $L: x = -5t + 4; \ y = 2t + 3; \ z = -6t - 1$. **9.4.** $M(2, 4, -1)$. **9.5.** $M(-2, 1, 2)$. **9.6.** $M(2, 1, 4)$. **9.7.** $P: \ 3x - 3y - z = -5$. **9.8.** $L: \ \dfrac{x+4}{3} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z+2}{-3}$. **9.9.** $P_2: \ x - y - 4z = -8$. **9.10.** $L: \ \dfrac{x+4}{2} = \dfrac{y+2}{-4} = \dfrac{z-3}{-3}$. **9.11.**

$P:\ x-y-2z=-2$. **9.12.** $P:\ 5x+8y+9z=0$. **9.13.** $P:\ 3x-9y-8z=-5$. **9.14.** $P:\ -2x+y+2z=6$. **9.15.** $\cos(\widehat{P_1\,P_2})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **9.16.** $\sin(\widehat{L\,P})=\dfrac{1}{2}$. **9.17.** $\mathrm{d}ist(M,P)=7$. **9.18.** $\mathrm{d}ist(P_1,P_2)=6$. **9.19.** $N(-3,-2,-1)$. **9.20.** $N(-4,1,3)$. **9.21.** $N(-1,-7,0)$. **9.22.** $N(-9,8,0)$. **9.23.** $L_2:\ \dfrac{x-4}{-2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+2}{1}$. **9.24.** $P:\ -x+4y+z=-15$. **9.25.** $P_2:\ -x+2y-2z=-11$. **9.26.** $L_2:\ \dfrac{x-7}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+1}{-2}$. **9.27.** $P:\ x-y+2z=-4$. **9.28.** $L_2:\ \dfrac{x-2}{6}=\dfrac{y+4}{7}=\dfrac{z+8}{-1}$. **9.29.** $P:\ 9x+2y+5z=5$. **9.30.** $P:\ 5x-7y-6z=-7$. **9.31.** $P:\ x-4y-7z=8$. **9.32.**$L:\ \dfrac{x+3}{-1}=\dfrac{y+2}{8}=\dfrac{z-4}{3}$. **9.33.** $\cos(\alpha)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\alpha=\pi/4$. **9.34.** $\cos(\alpha)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\alpha=\pi/6$. **9.35.** $\mathrm{d}ist(M,L)=11$. **9.36.** $\mathrm{d}ist(L_1,L_2)=3$.

Список литературы

Белопольский А. Л., Бодунов Н. А., Меркулов А. Л. Линейная алгебра. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ “ЛЭТИ”, 2000.

Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. М.: Наука, 1971.

Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1984.

Смирнов В. И. Курс высшей математики: В 3 т. Т. 3. Ч. 1. М.: Наука, 1958.

Шилов Г. Е. Математический анализ (конечномерные линейные пространства). М.: Наука, 1969.

Беклемишев Д. В. Дополнительные главы линейной алгебры. М.: Наука, 1983.

СОДЕРЖАНИЕ

1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА . . . 3
1.1. Определение комплексных чисел . . . 3
1.2. Законы действий над комплексными числами . . . 4
1.3. Вычитание и деление комплексных чисел . . . 5
1.4. Геометрическая интерпретация суммы и разности комплексных чисел . . . 5
1.5. Вещественные числа . . . 6
1.6. Мнимые числа . . . 6
1.7. Алгебраическая форма записи комплексных чисел . . . 6
1.8. Модуль и аргумент комплексного числа . . . 7
1.9. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел . . . 9
1.10. Комплексная экспонента . . . 9
1.11. Показательная форма записи комплексных чисел . . . 10
1.12. Решение уравнения $z^n = a$, $a \neq 0$ . . . 11
1.13. Решение квадратного уравнения . . . 12
1.14. Решение уравнения $e^z = a$, $a \neq 0$ . . . 13
1.15. Тригонометрические функции . . . 13
1.16. Гиперболические функции . . . 14
1.17. Сопряженные комплексные числа . . . 15
1.18. Основная теорема алгебры . . . 16
1.19. Множества точек на плоскости . . . 17
1.20. Упражнения . . . 19
2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД ГАУССА–ЖОРДАНА . . . 25
2.1. Системы линейных алгебраических уравнений. Основные понятия . . . 25
2.2. Элементарные преобразования СЛАУ . . . 26
2.3. Метод Гаусса–Жордана решения СЛАУ . . . 29
2.4. Алгоритм метода Гаусса–Жордана . . . 30
2.5. Упражнения . . . 34
3. МАТРИЦЫ. ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ . . . 36
3.1. Матрицы. Основные понятия . . . 36
3.2. Классификация матриц . . . 37
3.3. Сложение, вычитание, умножение на число матриц . . . 39
3.4. Произведение матриц . . . 40
3.5. Специальные матрицы . . . 41
3.6. Элементарные преобразования матрицы . . . 42
3.7. Понятие ранга матрицы . . . 43
3.8. Операция транспонирования матриц . . . 44

3.9. Операция сопряжения матриц 45
3.10. Матричная запись СЛАУ. Теорема Кронекера – Капелли 46
3.11. Упражнения 47
4. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ 51
4.1. Определение определителя матрицы 51
4.2. Свойства определителя матрицы 54
4.3. Вырожденные (сингулярные) матрицы 56
4.4. Теорема Крамера 57
4.5. Однородные системы линейных уравнений (ОСЛАУ) 59
4.6. Упражнения 60
5. МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ 63
5.1. Матричные уравнения $AX = B$ и $XA = B$ 63
5.2. Правая и левая обратные матрицы 67
5.3. Обратная матрица 68
5.4. Свойства обратной матрицы 69
5.5. Упражнения 70
6. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ 72
6.1. Понятие линейного пространства 72
6.2. Примеры линейных пространств 73
6.3. Подпространство линейного пространства 74
6.4. Линейная зависимость векторов 75
6.5. Линейная зависимость векторов в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{R}^n$ 77
6.6. Базис в линейном пространстве 78
6.7. Базис в пространствах $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{R}^n$ 79
6.8. Линейные пространства со скалярным произведением 82
6.9. Скалярное произведение и норма в пространствах $\mathbb{C}^n$ ($\mathbb{R}^n$) 84
6.10. Угол между векторами в $\mathbb{R}^n$. Ортогональность 85
6.11. Ортогональный базис 85
6.12. Унитарные и ортогональные матрицы 86
6.13. Процесс ортогонализации базиса Грама – Шмидта 88
6.14. QR-разложение матриц 90
6.15. Матрица Грама 92
6.16. Упражнения 93
7. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ МАТРИЦЫ 94
7.1. Собственные числа и собственные векторы квадратной матрицы 94
7.2. Общие свойства собственных чисел и собственных векторов матрицы 97
7.3. Связь между собственными числами и собственными векторами различных матриц 98

7.4. Собственные числа и собственные векторы самосопряженной матрицы . . . 99
7.5. Приведение матрицы к диагональному виду . . . 102
7.6. Квадратичные формы. Приведение их к каноническому виду . . . 103
7.7. Упражнения . . . 107
8. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ . . . 110
8.1. Определение линейного оператора . . . 110
8.2. Матрица линейного оператора . . . 110
8.3. Матричная запись линейного оператора . . . 112
8.4. Ядро и образ линейного оператора . . . 113
8.5. Действия над линейными операторами. Пространство линейных операторов . . . 114
8.6. Упражнения . . . 117
9. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ . . . 117
9.1. Геометрические векторы . . . 118
9.2. Сводка формул из школьного курса . . . 119
9.3. Векторное произведение векторов . . . 119
9.4. Смешанное произведение . . . 121
9.5. Отрезок. Деление отрезка в данном отношении . . . 122
9.6. Уравнение плоскости . . . 123
9.7. Взаимное расположение плоскостей . . . 124
9.8. Взаимное расположение плоскости и точки . . . 125
9.9. Общее уравнение прямой в пространстве . . . 126
9.10. Каноническое и параметрическое уравнения прямой . . . 127
9.11. Взаимное расположение прямых . . . 127
9.12. Взаимное расположение прямой и плоскости . . . 129
9.13. Упражнения . . . 130
Список литературы . . . 135

Бондарев Александр Сергеевич, Червинская Нина Михайловна

Линейная алгебра в примерах и задачах

Учебное пособие

Редактор Э. К. Долгатов

ЛР ь 020617 от 24.06.98

Подписано в печать Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 8,14. Уч.-изд. л. 8,75.

Тираж 550 экз. Заказ

Издательство СПбГЭТУ “ЛЭТИ”

197376, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5