МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
„ЛЭТИ“ им. В. И. Ульянова (Ленина)

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ В ПРИМЕРАХ и ЗАДАЧАХ

Часть 1

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство СПбГЭТУ „ЛЭТИ“
2020

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
„ЛЭТИ“ им. В. И. Ульянова (Ленина)

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ
В ПРИМЕРАХ и ЗАДАЧАХ
Часть 1

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство СПбГЭТУ „ЛЭТИ“
2020

УДК 511.86(07)+514(07)
ББК В 14я7+В 15я7
А45

Авторы: Н. А. Бодунов, А. А. Дороденков, С. А. Колбина, Н. М. Червинская.

А45 Алгебра и геометрия в примерах и задачах: учеб. пособие: в 2 ч. Ч. 1. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, 2020. 64 с.

ISBN 978-5-7629-2686-7 (Ч.1)
ISBN 978-5-7629-2690-4

Соответствует рабочим программам дисциплины „Алгебра и геометрия“ для бакалавров технических факультетов, факультета экономики и менеджмента и открытого факультета.

Включает в себя большое количество примеров решения типовых задач. Содержит разной сложности упражнения для самостоятельной работы студентов.

Предназначено для студентов указанных факультетов.

УДК 511.86(07)+514(07)
ББК В 14я7+В 15я7

Рецензенты: кафедра высшей математики ВШТЭ СПбГУПТД;
д-р техн. наук, проф. А. П. Господариков (СПГУ).

Утверждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

ISBN 978-5-7629-2686-7 (Ч.1)
ISBN 978-5-7629-2690-4

ВВЕДЕНИЕ

Данное издание является первой частью сборника примеров и упражнений по основным разделам дисциплины „Алгебра и геометрия“.

Цель данного учебного пособия – помочь студентам овладеть терминологией, лучше усвоить теоретический материал и приобрести навыки решения задач линейной алгебры и аналитической геометрии.

В первую часть пособия вошли 4 раздела: „Матрицы“, „Системы линейных алгебраических уравнений“, „Определители матриц“, „Матричные уравнения. Обратная матрица“.

Каждый раздел начинается с краткого изложения теоретического материала, необходимого для решения задач. Вводимые определения, алгоритмы, теоремы иллюстрируются многочисленными примерами и поясняются комментариями. Приводятся примеры решения задач разной сложности. В конце каждого раздела содержатся разнообразные упражнения по рассматриваемым темам. Наиболее трудные из них отмечены значком $*$. Все упражнения имеют ответы.

Для подробного изучения теоретического материала рекомендуется учебное пособие [1]. Доказательство рассматриваемых теорем и описание алгоритмов также можно найти в учебнике [2].

Пособие дополняет рекомендуемую литературу [3], [4] и может быть использовано студентами для самостоятельной работы, а также преподавателями, ведущими занятия по дисциплине „Алгебра и геометрия“.

1. МАТРИЦЫ

1.1. Основные понятия

Подробно теоретический материал этого раздела изложен в учебном пособии [1].

Определение 1.1. *Матрицей размера $m \times n$ называется совокупность $m \cdot n$ элементов некоторого множества, записанных в виде прямоугольной таблицы, содержащей m строк и n столбцов.*

Матрицу называют числовой, если ее элементами являются числа.

Матрицы обозначаются большими буквами: $A, B, C, \ldots$, элементы матриц – соответствующими малыми буквами, снабженными двумя индексами. Первый индекс указывает номер строки, второй – номер столбца, на пересечении которых находится элемент матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Элемент матрицы a_{ij} будем называть элементом с номером (i, j).

Если количество строк в матрице равно количеству столбцов ($m = n$), то матрица называется квадратной порядка n. Элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ образуют главную диагональ квадратной матрицы.

Матрица, состоящая из одной строки, называется матрицей-строкой. Матрица, состоящая из одного столбца, называется матрицей-столбцом.

Пример 1.1. Рассмотрим несколько матриц:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ – матрица размера 2×3, ее элементы: $a_{11} = 2$, $a_{12} = 7$, $a_{13} = 3$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 0$, $a_{23} = 4$;

$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2i \\ i & 4 & 5 \\ 1 & -i & 7i \end{bmatrix}$ – квадратная матрица 3-го порядка, на главной диагонали которой находятся числа 3, 4, $7i$;

$C = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ – матрица-строка размера 1×4;

$D = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ – матрица-столбец размера 2×1.

Некоторые матрицы имеют специальные обозначения и названия. Приведем несколько примеров.

Числовая матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой. Будем обозначать нулевую матрицу буквой Θ:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} = \Theta.$$

Квадратная матрица, на главной диагонали которой стоят какие-то числа λ_1, λ_2, …, λ_n, а все остальные элементы матрицы – нули, называется диагональной. Такую матрицу кратко будем обозначать $\operatorname{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} = \operatorname{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n].$$

Диагональная матрица, все диагональные элементы которой равны 1, называется единичной. Эту матрицу обычно обозначают буквой I, иногда – буквой E:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{diag}[1, 1, \ldots, 1] = I.$$

1.2. Арифметические операции над матрицами. Транспонированная и сопряженная матрицы

1.2.1. *Сложение матриц*

Операция сложения определена только для матриц одинакового размера.

Определение 1.2. *Суммой матриц A и B одинакового размера $m \times n$ называется матрица того же размера, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B:*

$$A + B = C \quad (C \text{ – матрица размера } m \times n), \text{ при этом}$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \qquad i = 1, ..., m\,, \qquad j = 1, ..., n.$$

1.2.2. *Умножение матрицы на число*

Определение 1.3. *Если A – матрица размера $m \times n$, α – число, то*

$$\alpha A = B \quad (B \text{ – матрица размера } m \times n), \text{ при этом}$$

$$b_{ij} = \alpha a_{ij}, \qquad i = 1, ..., m\,, \qquad j = 1, ..., n,$$

т. е. при умножении матрицы на число каждый элемент матрицы умножается на это число.

Пример 1.2. Пусть $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Найти $4A+5B$.

Решение. Матрицы A и B одинакового размера. Операции умножения на число и сложения матриц определены и выполняются поэлементно:

$$4A+5B = 4\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 8 & 8 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 & 10 & 5 \\ 15 & 10 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 14 & 9 \\ 23 & 18 & 13 \end{bmatrix}.$$

Некоторые свойства операций сложения матриц и умножения матрицы на число:

1. $A + B = B + A$;
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$;
3. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;
4. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$,

где A, B, C – матрицы одинакового размера, α, β – числа.

1.2.3. *Транспонированная матрица*

Определение 1.4. *Пусть A – матрица размера $m \times n$. Матрица размера $n \times m$, столбцы которой совпадают с соответствующими строками матрицы A, называется транспонированной к матрице A и обозначается A^T.*

Заметим, что строки матрицы A^T совпадают с соответствующими столбцами матрицы A.

Транспонированную матрицу обозначают также A^t или A'.

Пример 1.3. Задана матрица $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 7 & -1 & 8 \end{bmatrix}$. Найти A^T.

Решение. Транспонированная матрица A^T получится из матрицы A, если строки матрицы A записать в виде столбцов в соответствующем порядке: $A^T = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & -1 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$.

Определение 1.5. *Квадратная матрица A называется симметричной или симметрической, если $A = A^T$.*

Для элементов симметричной матрицы A справедливы равенства $a_{ji} = a_{ij}, \quad i = 1, \ldots, n\,,\; j = 1, \ldots, n.$

Симметричной, например, является матрица: $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 7 & -4 & 1 \\ 5 & 1 & -9 \end{bmatrix}$.

Пример 1.4. Задана матрица $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 8 & -7 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Найти матрицу $A + A^T$.

Решение.

$$A + A^T = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 8 & -7 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 5 & -7 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 13 & 2 \\ 13 & -14 & 5 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что $A + A^T$ – симметричная матрица. Это свойство выполняется для любой квадратной матрицы. Докажите это самостоятельно (упражнение 1.59).

Некоторые свойства операции транспонирования:

1. $(A^T)^T = A$;
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$;
3. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$,

где A, B – матрицы одинакового размера, α – число.

1.2.4. *Сопряженная матрица*

Определение 1.6. *Пусть A – комплексная матрица размера $m \times n$. Если в матрице A заменить все ее элементы на сопряженные комплексные числа, а затем транспонировать, то получится матрица размера $n \times m$, которая называется сопряженной к матрице A и обозначается A^*.*

Пример 1.5. Задана матрица $A = \begin{bmatrix} 1-2i & 3i \\ 3+5i & 2+i \\ 2 & 8-i \end{bmatrix}$. Найти A^*.

Решение. Заменим элементы матрицы A на сопряженные комплексные числа, а затем матрицу транспонируем. В результате получим искомую матрицу:

$$A^* = \begin{bmatrix} 1+2i & 3-5i & 2 \\ -3i & 2-i & 8+i \end{bmatrix}.$$

Заметим, что сопряженная матрица A^* получается также, если вначале матрицу A транспонировать, а затем элементы матрицы A^T заменить на сопряженные комплексные числа.

Определение 1.7. *Матрица A называется самосопряженной, или эрмитовой, если $A = A^*$.*

Для элементов самосопряженной матрицы A справедливы равенства $a_{ji} = \overline{a_{ij}}$.

Например, самосопряженной (эрмитовой) является матрица

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1-i & 3+i \\ 1+i & -7 & 1-4i \\ 3-i & 1+4i & 0 \end{bmatrix}.$$

Пусть A – квадратная комплексная матрица. Покажите, что матрица $(A + A^*)$ является самосопряженной матрицей (упражнение 1.60).

Некоторые свойства операции сопряжения:

1. $(A^*)^* = A$;
2. $(A + B)^* = A^* + B^*$;
3. $(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$,

где A, B – матрицы одинакового размера, α – число ($\bar{\alpha}$ – число, комплексно-сопряженное α).

1.2.5. *Умножение матриц*

Операция умножения матриц $A \cdot B$ определена, если количество столбцов первой матрицы (A) равно количеству строк второй матрицы (B). При этом говорят, что размеры матриц A и B согласованы.

Определение 1.8. *Произведением матрицы A размера $m \times \boldsymbol{n}$ на матрицу B размера $\boldsymbol{n} \times k$ называется матрица C размера $m \times k$ $(AB = C)$, элементы которой определяются по правилу:*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}, \qquad i = 1, ..., m\,, \qquad j = 1, ..., k.$$

Для нахождения значения элемента c_{ij} матрицы C следует выделить в матрице A строку с номером i и в матрице B столбец с номером j (количество элементов выделенных строки и столбца совпадают). Соответствующие элементы выделенных строки и столбца необходимо попарно перемножить : первый с первым, второй со вторым и т. д., а затем полученные произведения сложить.

Если размеры матриц не согласованы, то произведение матриц не определено.

Пример 1.6. Заданы матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$. Найти произведения AB и BA.

Решение. Рассмотрим произведение матриц AB. Матрица-строка A размера $1 \times \mathbf{3}$ умножается на матрицу-столбец B размера $\mathbf{3} \times 1$. В первой матрице – 3 столбца, во второй – 3 строки. Количество столбцов первой матрицы равно количеству строк второй матрицы. Размеры матриц согласованы. В результате умножения матриц получится матрица размера 1×1. Единственный элемент этой матрицы находится по описанному выше правилу:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = [1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 4] = [26].$$

Найдем теперь произведение BA. Размеры матриц $3 \times \mathbf{1}$ и $\mathbf{1} \times 3$, соответственно, также согласованы. В результате получится матрица размера 3×3:

$$BA = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 & 0 \cdot 3 & 0 \cdot 5 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 5 \\ 4 \cdot 1 & 4 \cdot 3 & 4 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 10 \\ 4 & 12 & 20 \end{bmatrix}.$$

Пример 1.7. Заданы матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Найти, если возможно, произведения AB и BA.

Решение. Матрица A имеет размер $2 \times \mathbf{3}$, а матрица-столбец B – $\mathbf{3} \times 1$. Размеры матриц согласованы. Произведение матриц AB определено. По правилу умножения матриц получается матрица-столбец размера 2×1:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 + 3 \cdot (-2) \\ 0 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + (-4) \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что если произвольную матрицу умножить на матрицу-столбец (размеры матриц согласованы), то всегда получится матрица-столбец.

Произведение матриц BA не определено. Матрица размера $3 \times \mathbf{1}$ умножается на матрицу размера $\mathbf{2} \times 3$. Количество столбцов первой матрицы не равно количеству строк второй матрицы.

Пример 1.8. Пусть задана матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$. Найти произведение $A \cdot A^T$ и $A^T \cdot A$.

Решение. Рассмотрим произведение $A \cdot A^T$. Столбцы матрицы A совпадают со строками матрицы A^T. Размеры матриц согласованы. В результате умножения матриц размера $3 \times \mathbf{2}$ и $\mathbf{2} \times 3$ получится матрица размера 3×3:

$$A \cdot A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -5 & 10 \\ -5 & 5 & -10 \\ 10 & -10 & 20 \end{bmatrix}.$$

Найдем теперь $A^T \cdot A$. Размеры матриц A^T и A также согласованы ($2 \times \mathbf{3}$ и $\mathbf{3} \times 2$ соответственно). В результате получится матрица размера 2×2:

$$A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 13 \\ 13 & 14 \end{bmatrix}.$$

Полученные матрицы являются симметричными. Это свойство справедливо не только для заданной матрицы. Для любой матрицы A произведения $A \cdot A^T$, $A^T \cdot A$ определены, при этом $A \cdot A^T$ и $A^T \cdot A$ – симметричные матрицы. Докажите это самостоятельно (упражнение 1.61).

Пример 1.9. Пусть $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Найти AB и BA.

Решение. Поскольку A и B – квадратные матрицы одинакового размера, то произведения AB и BA определены. В результате получатся квадратные матрицы размера 2×2. Найдем AB:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \\ 0 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Произведение ненулевых матриц может быть равно нулевой матрице.

Найдем теперь BA:

$$BA = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2)\cdot 1 + 2\cdot 0 & (-2)\cdot 2 + 2\cdot 0 \\ 1\cdot 1 + (-1)\cdot 0 & 1\cdot 2 + (-1)\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Во всех разобранных примерах $AB \neq BA$. Однако существуют матрицы, для которых равенство $AB = BA$ справедливо.

Пример 1.10. Пусть $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Найти произведения AB и BA.

Решение. Матрицы A и B квадратные размера 2×2, произведения AB и BA определены. Найдем AB и BA:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + (-1)\cdot 3 & 1\cdot 3 + (-1)\cdot 2 \\ -1\cdot 2 + 1\cdot 3 & -1\cdot 3 + 1\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 3\cdot(-1) & 2\cdot(-1) + 3\cdot 1 \\ 3\cdot 1 + 2\cdot(-1) & 3\cdot(-1) + 2\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Для рассмотренных матриц A и B справедливо равенство $AB = BA$.

Пример 1.11. Пусть $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ – произвольная матрица размера 2×2, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ – единичная матрица того же размера. Найти произведения AI и IA.

Решение. Для квадратных матриц A и I произведения AI и IA определены. Найдем AI и IA:

$$AI = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\cdot 1 + a_{12}\cdot 0 & a_{11}\cdot 0 + a_{12}\cdot 1 \\ a_{21}\cdot 1 + a_{22}\cdot 0 & a_{21}\cdot 0 + a_{22}\cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A.$$

$$IA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot a_{11} + 0\cdot a_{21} & 1\cdot a_{12} + 0\cdot a_{22} \\ 0\cdot a_{11} + 1\cdot a_{21} & 0\cdot a_{12} + 1\cdot a_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A.$$

Видим, что $AI = IA = A$.

Нетрудно заметить, что если A – квадратная матрица произвольного порядка, I – единичная матрица того же порядка, то также справедливы равенства $AI = IA = A$.

Пусть Θ – нулевая квадратная матрица, A – квадратная матрица того же порядка. Очевидно, что $A\Theta = \Theta A = \Theta$.

Определение 1.9. *Квадратные матрицы A и B, для которых выполняется равенство $AB = BA$, называются перестановочными или коммутирующими.*

Некоторые свойства операции умножения:

1. $(AB)C = A(BC)$;
2. $(A+B)C = AC + BC, \quad C(A+B) = CA + CB$;
3. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;
4. $(AB)^T = B^T A^T$;
5. $(AB)^* = B^* A^*$,

где A, B, C – матрицы, α, β – числа.

1.2.6. *Возведение матрицы в степень*

Определение 1.10. *Пусть A – квадратная матрица порядка m. Если $n \in \mathbf{N}$, то* $A^n = \underbrace{AA \times \ldots \times A}_{n \text{ сомножителей}}$,

$A^0 = I$.

Пример 1.12. Пусть $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$. Найти A^2.

Решение.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^2 + (-1)\cdot 4 & 2\cdot(-1) + (-1)\cdot(-2) \\ 4\cdot 2 + (-2)\cdot 4 & 4\cdot(-1) + (-2)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

При возведении в квадрат ненулевой матрицы может получиться нулевая матрица.

1.3. Упражнения

1.1. Пусть A – матрица размера (4×3), B – (3×5)-матрица. Какого размера матрица AB?

1.2. Пусть A – матрица размера (2×4), AB – матрица размера (2×7). Какого размера матрица B?

1.3. Пусть B – матрица размера 3×5, AB – матрица размера 4×5. Какого размера матрица A?

1.4. Пусть A – матрица размера (5×3), B – матрица размера (3×4). Существует ли матрица $2A + B^T$?

1.5. Пусть A – матрица размера (5×2), AB – квадратная матрица. Какой размер имеет матрица B?

1.6. Пусть A – матрица размера (2×3), B – матрица размера (2×4), C – матрица размера (3×4). Какое из произведений AB, AC, BC определено?

1.7. Пусть A – матрица размера (2×6), B – матрица размера (2×4). Укажите размер матрицы $A^T B$.

1.8. Пусть A – матрица размера (4×5). Какой размер имеет матрица $A^T A$?
1.9. Пусть A – квадратная, B – не квадратная матрицы. Может ли произведение AB быть квадратной матрицей?
1.10. Пусть A и B – не квадратные матрицы. Может ли произведение AB быть квадратной матрицей?
1.11. Пусть для матриц A и B выполняется равенство $AB = BA$. Могут ли A и B быть не квадратными матрицами?
1.12. Пусть $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$. Найдите матрицу $3A + B$.
1.13. Пусть $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Найдите матрицу $A - 4I$ (I – единичная матрица).
1.14. Пусть $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$. Найдите матрицу $2A - B^T$.
1.15. Пусть $A = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Найдите матрицу $3A + 2B$.
1.16. Пусть

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 4 & 2i \\ 3i & 1-i & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5i & 1-3i & 1 \\ 4 & 3i & 2-i \end{bmatrix}.$$

Найдите матрицы: а) $A + 2i \cdot B$, б) $A^* - B^*$.
1.17. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -7 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 5 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$. Из трех заданных матриц B выберите такую матрицу, для которой определено произведение AB. Укажите размер матрицы $C = AB$. Найдите значение элемента c_{31} матрицы C.

Найдите матрицы AB и BA:
1.18. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$. **1.19.** $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.

Найдите матрицы AB и BA, если соответствующее произведение определено:
1.20. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.
1.21. $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. **1.22.** $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$,

$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. **1.23.** $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Найдите произведение матриц:

1.24. $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$. **1.25.** $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

1.26. $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$.

1.27. $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, $\Lambda = \operatorname{diag}[1, -2, 3]$. Найдите матрицы $A\Lambda$ и ΛA.

1.28. $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 8 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Найдите матрицы AB и BA.
Сравните полученные матрицы с матрицей A. Какой должна быть матрица B, чтобы при умножении на нее в матрице A менялись местами первый и третий столбцы (первая и третья строки)?

Найдите $X^T AX$:

1.29. $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$, $\quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. **1.30.** $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 5 & -3 & 4 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$, $\quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

Найдите матрицу $AB - BA$:

1.31. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. **1.32.** $A = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Найдите матрицу A^2:

1.33. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$. **1.34.** $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Найдите матрицу A^3:

1.35. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$. **1.36.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Найдите матрицу A^4:

1.37. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. **1.38.** $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. **1.39.** $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

1.40. $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Найдите матрицу $A^4 - A^2$.

1.41. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Найдите матрицу A^6.

Найдите матрицу A^n, $n \in \mathbf{N}$:

1.42. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. **1.43.** $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

Найдите матрицы $A^T \cdot A$ и $A \cdot A^T$:

1.44. $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$. **1.45.** $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. **1.46.** $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Найдите матрицы $A \cdot A^*$ и $A^* \cdot A$:

1.47. $A = \begin{bmatrix} 3i & 1-2i & i \end{bmatrix}$. **1.48.** $A = \begin{bmatrix} 1-2i & 3i \\ 5i & 0 \\ 2 & 1-i \end{bmatrix}$.

1.49. $A = \begin{bmatrix} 4i & 1-3i \\ 1+i & i \end{bmatrix}$.

Найдите все матрицы, перестановочные с матрицей A:

1.50.* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. **1.51.*** $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. **1.52.*** $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

1.53.* $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$. Найдите все такие матрицы B, для которых $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

1.54.* Найдите все такие матрицы A, для которых $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

1.55.* Найдите все такие матрицы A, для которых $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1.56.* $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Найдите все такие матрицы B, для которых выполняется равенство $A^2 = AB$.

1.57.* Приведите пример таких симметричных матриц A и B размера 2×2, для которых AB – несимметричная матрица.

1.58.* Справедливы ли равенства

а) $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$, б) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

для любых квадратных матриц? Для каких матриц эти равенства выполняются?

1.59. Пусть A – квадратная матрица. Докажите, что $A + A^T$ – симметричная матрица.

1.60. Пусть A – квадратная комплексная матрица. Докажите, что $A + A^*$ – самосопряженная (эрмитова) матрица.

1.61. Пусть A – произвольная числовая матрица. Докажите, что AA^T,

$A^T A$ – симметричные матрицы.

1.62. Пусть A – произвольная комплексная матрица. Докажите, что AA^*, A^*A – самосопряженные (эрмитовы) матрицы.

1.4. Ответы

1.1. 4×5. **1.2.** 4×7. **1.3.** 4×3. **1.4.** Нет. **1.5.** 2×5. **1.6.** AC. **1.7.** 6×4. **1.8.** 5×5. **1.9.** Нет. **1.10.** Да. **1.11.** Нет. **1.12.** $\begin{bmatrix}1 & -8\\ 10 & 11\end{bmatrix}$. **1.13.** $\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}$.

1.14. $\begin{bmatrix}4 & -7 & 0\\ -4 & 4 & 7\end{bmatrix}$. **1.15.** $\begin{bmatrix}17 & -19\\ -12 & 12\\ 1 & 23\end{bmatrix}$. **1.16.** а) $\begin{bmatrix}-9+i & 10+2i & 4i\\ 11i & -5-i & 1+4i\end{bmatrix}$,

б) $\begin{bmatrix}1+4i & -4-3i\\ 3-3i & 1+4i\\ -1-2i & -3-i\end{bmatrix}$. **1.17.** $B=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 6 & 5\\ -4 & 8\end{bmatrix}$; 3×2; $c_{31}=18$.

1.18. $AB=[20]$; $BA=\begin{bmatrix}2 & 4 & 8\\ 1 & 2 & 4\\ 4 & 8 & 16\end{bmatrix}$. **1.19.** $AB=\begin{bmatrix}-12 & 0 & 0\\ 26 & 2 & 0\\ -7 & -5 & 8\end{bmatrix}$;

$BA=\begin{bmatrix}-12 & 0 & 0\\ 11 & 2 & 0\\ 26 & -14 & 8\end{bmatrix}$. **1.20.** $AB=\begin{bmatrix}8\\ 3\\ 13\end{bmatrix}$; BA не определено.

1.21. $AB=\begin{bmatrix}-5 & -1 & -16\\ 6 & 0 & 12\\ -4 & 2 & 4\end{bmatrix}$; $BA=\begin{bmatrix}-4 & -6\\ -15 & 3\end{bmatrix}$.

1.22. $AB=\begin{bmatrix}-8 & -2 & 18 & 7\\ -2 & -2 & -12 & -2\\ 9 & 5 & -4 & -4\end{bmatrix}$; BA не определено.

1.23. $AB=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 20 & 15\end{bmatrix}$; $BA=\begin{bmatrix}7 & 16\\ 1 & 8\end{bmatrix}$. **1.24.** $\begin{bmatrix}11\\ 15\end{bmatrix}$. **1.25.** $\begin{bmatrix}18 & -14\\ -9 & 7\\ -27 & 21\end{bmatrix}$.

1.26. $[-9]$. **1.27.** $A\Lambda=\begin{bmatrix}1 & -12 & 12\\ 3 & -4 & 3\\ 7 & -10 & 9\end{bmatrix}$; $\Lambda A=\begin{bmatrix}1 & 6 & 4\\ -6 & -4 & -2\\ 21 & 15 & 9\end{bmatrix}$. **1.28.**

$AB=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4 & 7\\ 1 & 4 & 3 & 5\\ 3 & 1 & 2 & 8\\ 4 & 5 & 6 & 3\end{bmatrix}$; $BA=\begin{bmatrix}2 & 7 & 4 & 3\\ 4 & 3 & 6 & 5\\ 3 & 8 & 2 & 1\\ 1 & 5 & 3 & 4\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$. **1.29.**

$4x^2-6xy+5y^2$. **1.30.** $2x^2-3y^2+7z^2+10xy-2xz+8yz$. **1.31.** $\begin{bmatrix}0 & -22 & -8\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

1.32. $\begin{bmatrix}-13 & 22\\ 8 & 13\end{bmatrix}$. **1.33.** $\begin{bmatrix}2 & 2\\ -4 & -2\end{bmatrix}$. **1.34.** I. **1.35.** $\begin{bmatrix}7 & 35\\ -70 & 42\end{bmatrix}$. **1.36.** $\begin{bmatrix}13 & 21\\ 14 & 6\end{bmatrix}$. **1.37.** $\begin{bmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. **1.38.** $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$. **1.39.** $\begin{bmatrix}16 & 24\\ 0 & 0\end{bmatrix}$. **1.40.** $\begin{bmatrix}72 & -72\\ 0 & 0\end{bmatrix}$. **1.41.** $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 12 & 1\end{bmatrix}$. **1.42.** $A^n = 2^{n-1}A$. **1.43.** $\begin{bmatrix}\cos(n\alpha) & -\sin(n\alpha)\\ \sin(n\alpha) & \cos(n\alpha)\end{bmatrix}$. **1.44.** $A^T \cdot A = \begin{bmatrix}9 & -6 & -12\\ -6 & 4 & 8\\ -12 & 8 & 16\end{bmatrix}$, $A \cdot A^T = [29]$. **1.45.** $A^T \cdot A = \begin{bmatrix}4 & -2 & 0\\ -2 & 10 & -12\\ 0 & -12 & 16\end{bmatrix}$, $A \cdot A^T = \begin{bmatrix}25 & -3\\ -3 & 5\end{bmatrix}$. **1.46.** $A^T \cdot A = \begin{bmatrix}4 & -2 & 8\\ -2 & 5 & -10\\ 8 & -10 & 26\end{bmatrix}$, $A \cdot A^T = \begin{bmatrix}21 & 14 & 4\\ 14 & 13 & 3\\ 4 & 3 & 1\end{bmatrix}$. **1.47.** $A \cdot A^* = [15]$, $A^* \cdot A = \begin{bmatrix}9 & -6-3i & 3\\ -6+3i & 5 & -2+i\\ 3 & -2-i & 1\end{bmatrix}$.

1.48. $A \cdot A^* = \begin{bmatrix}14 & -10-5i & -1-i\\ -10+5i & 25 & 10i\\ -1+i & -10i & 6\end{bmatrix}$, $A^* \cdot A = \begin{bmatrix}34 & -4+i\\ -4-i & 11\end{bmatrix}$.

1.49. $A \cdot A^* = \begin{bmatrix}26 & 1+3i\\ 1-3i & 3\end{bmatrix}$, $A^* \cdot A = \begin{bmatrix}18 & -11-3i\\ -11+3i & 11\end{bmatrix}$.

1.50. $\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & a-3b\end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbf{R}$. **1.51.** $\begin{bmatrix}a & b\\ b & a\end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbf{R}$. **1.52.** $\begin{bmatrix}a & b\\ -b & a+\frac{b}{3}\end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbf{R}$. **1.53.** $\begin{bmatrix}a & b\\ 3a & 3b\end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbf{R}$. **1.54.** $\begin{bmatrix}0 & 0\\ c & 0\end{bmatrix}$, $c \in \mathbf{R}$, $\begin{bmatrix}0 & b\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $b \in \mathbf{R}$, $\begin{bmatrix}a & b\\ -\frac{a^2}{b} & -a\end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbf{R}, b \neq 0$. **1.55.** $\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & d\end{bmatrix}$, $a = \pm 1$, $d = \pm 1$, $\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & -a\end{bmatrix}$, $a = \pm 1, b \in \mathbf{R}$, $\begin{bmatrix}a & 0\\ c & -a\end{bmatrix}$, $a = \pm 1, c \in \mathbf{R}$, $\begin{bmatrix}a & b\\ \frac{1-a^2}{b} & -a\end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbf{R}, b \neq 0$.

1.56. $B = \begin{bmatrix}a & b\\ 1-a & 1-b\end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbf{R}$. **1.57.** Например, $A = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$. **1.58.** Нет. Равенства справедливы для перестановочных матриц ($AB = BA$). **1.59.** Указание: транспонируйте $A + A^T$ и сравните полученную матрицу с исходной. **1.60.** Указание: для $A + A^*$ найдите сопряженную матрицу и сравните с исходной. **1.61.** Указание: транспонируйте $A \cdot A^T$ и $A^T \cdot A$ и сравните результат с исходными матрицами. **1.62.** Указание: для $A \cdot A^*$ и $A^* \cdot A$ найдите сопряженные матрицы и сравните с исходными.

2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Основные понятия

Теоретический материал данного раздела подробно изложен в учебном пособии [1].

Определение 2.1. *Система вида*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{cases}$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ *– неизвестные,* a_{11}, a_{12}, $\dots$, a_{mn} *и* b_1, $\dots$, b_m *– заданные числа, называется системой* m *линейных алгебраических уравнений с* n *неизвестными.*

В дальнейшем такие системы будем называть системами линейных уравнений или просто системами.

Определение 2.2. *Решением системы линейных алгебраических уравнений называется такой набор чисел* $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$*, при подстановке которых вместо соответствующих неизвестных каждое уравнение системы становится верным равенством.*

Система линейных алгебраических уравнений может иметь одно решение, бесконечно много решений или не иметь решений.

Определение 2.3. *Система, которая имеет хотя бы одно решение, называется совместной, в противном случае – несовместной.*

Определение 2.4. *Две системы линейных алгебраических уравнений с одинаковым числом неизвестных называются равносильными (эквивалентными), если множества решений этих систем совпадают. Другими словами, каждое решение первой системы является решением второй, и каждое решение второй системы является решением первой.*

Для обозначения равносильных систем будем использовать символ $\Leftrightarrow$.

Пример 2.1. Решить системы линейных уравнений:

$$1) \begin{cases} x - y & = & 1, \\ x + 2y & = & 4 \end{cases}, \quad 2) \begin{cases} x + y & = & 2, \\ -3x - 3y & = & -6 \end{cases}, \quad 3) \begin{cases} x - 2y & = & 2, \\ -x + 2y & = & 2 \end{cases}.$$

Геометрически интерпретировать полученные решения.

Решение. Заданные системы состоят из двух уравнений с двумя неизвестными. Для решения таких систем можно использовать метод подстановки или метод алгебраического сложения уравнений.

1) Найдем решение первой системы методом подстановки:

$$\begin{cases} x - y &= 1, \\ x + 2y &= 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y &= -1 + x, \\ x + 2(-1 + x) &= 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y &= -1 + x, \\ 3x &= 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 2, \\ y &= 1 \end{cases}.$$

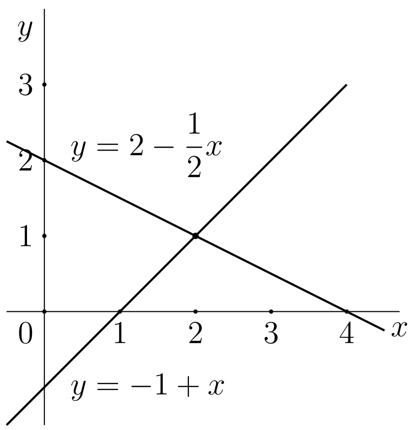

Рис. 2.1

Система имеет единственное решение.

Для геометрической интерпретации выберем на плоскости прямоугольную систему координат. Тогда каждое уравнение в заданной системе можно рассматривать как уравнение прямой:

$$\begin{cases} x - y &= 1, \\ x + 2y &= 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y &= -1 + x, \\ y &= 2 - \dfrac{1}{2}x \end{cases}.$$

Изобразим на плоскости прямые $y = -1 + x$ и $y = 2 - \dfrac{1}{2}x$ (рис. 2.1). Найденное решение системы $x = 2$, $y = 1$ соответствует точке пересечения этих прямых (задает ее координаты $(2, 1)$).

2) Для нахождения решения второй системы разделим второе уравнение на (-3):

$$\begin{cases} x + y &= 2, \\ -3x - 3y &= -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y &= 2, \\ x + y &= 2 \end{cases}.$$

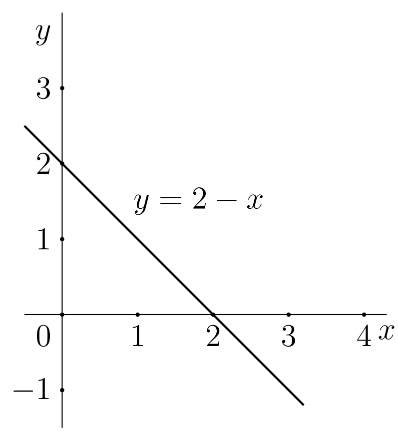

Рис. 2.2

Поскольку система содержит 2 одинаковых уравнения, одно из них можно удалить. Останется одно уравнение $x + y = 2$, связывающее неизвестные. Ясно, что система имеет бесконечно много решений. Одну неизвестную, например x, можно задать произвольно, при этом вторая определяется из равенства $y = 2 - x$. Решения системы запишем в виде:

$$\begin{cases} x &= t, \\ y &= 2 - t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

Интерпретируем полученный результат геометрически. Оба уравнения второй системы преобразуются к виду $y = 2 - x$. Это означает, что прямые совпадают (рис. 2.2). Каждая пара чисел $(x, 2 - x)$ $(x \in \mathbf{R})$, соответствующая точкам, лежащим на прямой $y = 2 - x$, является решением второй системы. Система имеет бесконечно много решений.

3) Сложим уравнения третьей системы. Получится: $0 \cdot x + 0 \cdot y = 4$. Такое равенство не может выполняться ни при каких значениях x и y. Система не имеет решений.

Для геометрической интерпретации преобразуем уравнения третьей системы:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y & = & 2, \\ -x + 2y & = & 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & -1 + \dfrac{1}{2}x, \\ y & = & 1 + \dfrac{1}{2}x \end{array} \right. .$$

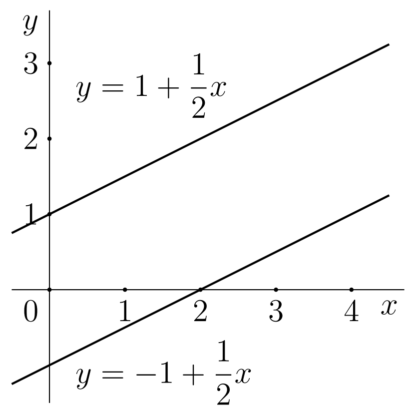

Рис. 2.3

Прямые, соответствующие этим уравнениям, не имеют общих точек (они параллельны) (рис. 2.3).

В разобранном примере первые две системы – совместные, третья система – несовместная.

2.2. Метод полного исключения неизвестных

Пусть требуется выяснить, совместна или нет система из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными:

$$\left\{ \begin{array}{lllllllll} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array} \right.$$

и, если совместна, найти все ее решения.

Эту задачу всегда позволяет решить метод полного исключения неизвестных, называемый также методом (алгоритмом) Гаусса–Жордана.

Рассматриваемую систему можно задать с помощью матрицы вида:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \ldots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array} \right].$$

Ее называют расширенной матрицей системы. При этом матрицу, записанную слева от черты, называют матрицей коэффициентов системы или просто матрицей системы.

Иногда над столбцами матрицы коэффициентов системы записывают соответствующие им неизвестные или номера неизвестных:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \ldots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \ldots & n \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \ldots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \end{array}.$$

Для решения системы линейных алгебраических уравнений используют допустимые преобразования системы, т. е. такие преобразования, которые переводят систему в равносильную ей.

При применении метода Гаусса–Жордана используют следующие допустимые преобразования системы:

1) перестановка двух уравнений в системе (перестановка двух соответствующих строк в расширенной матрице системы);

2) перестановка двух слагаемых с одинаковыми неизвестными во всех уравнениях системы (перестановка двух соответствующих столбцов матрицы системы с записанными над ними неизвестными (или номерами неизвестных));

3) деление (умножение) произвольного уравнения системы на число, не равное нулю (деление (умножение) соответствующей строки расширенной матрицы системы на число, не равное нулю);

4) прибавление к одному уравнению системы другого уравнения, умноженного на произвольное число (прибавление к одной строке расширенной матрицы другой строки, умноженной на произвольное число).

При применении метода Гаусса–Жордана указанные допустимые преобразования выполняют так, чтобы столбцы матрицы исходной системы последовательно преобразовывать к столбцам единичной матрицы.

Такой подход позволяет исключить часть неизвестных из уравнений системы и преобразовать исходную систему в такую равносильную ей систему, решение которой легко получить, или легко обнаружить несовместность системы.

2.2.1. *Алгоритм полного исключения неизвестных*

Запишем расширенную матрицу исходной системы линейных уравнений:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \ldots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Шаг* 1. *Первый столбец матрицы системы преобразуем к первому столбцу единичной матрицы:

1. Переставляем (если нужно) строки расширенной матрицы или (и) столбцы матрицы системы, чтобы на месте элемента с номером $(1,1)$ стояло число, не равное нулю.

2. Делим первую строку расширенной матрицы на это число. На месте элемента с номером $(1,1)$ появляется единица.

3. Прибавляем ко всем строкам расширенной матрицы, начиная со второй, первую строку, умноженную на подходящие множители, для обращения в нуль всех элементов первого столбца матрицы системы (кроме элемента с номером $(1,1)$). Чтобы на месте элемента с номером $(2,1)$ появился 0, следует ко второй строке прибавить первую строку, умноженную на число $(-a_{21})$. Чтобы на месте элемента с номером $(3,1)$ появился 0, следует к третьей строке прибавить первую строку, умноженную на $(-a_{31})$, и т. д.

В полученной расширенной матрице могут появиться нулевые строки:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Нулевая строка соответствует уравнению вида $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0$. Поскольку для любых значений неизвестных x_1, x_2, ..., x_n это уравнение превращается в равенство $0 = 0$, оно не влияет на результат решения системы и может быть исключено из нее, поэтому нулевые строки расширенной матрицы удаляют.

В расширенной матрице может появиться строка вида

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \ldots & 0 & b \end{array}\right], \quad \text{где } b \neq 0.$$

Такая строка соответствует уравнению $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b$, которое ни при каких значениях неизвестных x_1, x_2, ..., x_n не может превратиться в верное равенство. Это означает, что данная система несовместна. Выполнение алгоритма прекращается.

Если в результате первого шага несовместность системы не обнаружена, то расширенная матрица преобразуется к виду

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & & \ldots & & \vdots \\ 0 & a_{m_1 2}^{(1)} & \ldots & a_{m_1 n}^{(1)} & b_{m_1}^{(1)} \end{array}\right].$$

Количество строк m_1 полученной матрицы может быть меньше количества строк m исходной матрицы ($m_1 \leq m$).

Если $m_1 > 1$, то переходим ко второму шагу алгоритма.

Шаг 2. Второй столбец матрицы системы преобразуем ко второму столбцу единичной матрицы:

1. Переставляем (если нужно) строки расширенной матрицы или (и) столбцы матрицы системы, чтобы на месте элемента с номером $(2,2)$ матрицы системы стояло число, не равное нулю. При этом первая строка расширенной матрицы для перестановок строк не используется.

2. Делим вторую строку расширенной матрицы на элемент с номером $(2,2)$. На его месте появляется единица.

3. Прибавляем ко всем строкам расширенной матрицы (включая первую) вторую строку, умноженную на подходящие множители, для обращения в нуль всех элементов второго столбца (кроме элемента с номером $(2,2)$).

Если в расширенной матрице появились нулевые строки:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{array}\right],$$

то их удаляют.

Если появилась строка вида

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \ldots & 0 & b \end{array}\right], \quad \text{где } b \neq 0,$$

соответствующая уравнению $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b$, то система несовместна. Выполнение алгоритма прекращается.

Если в результате второго шага несовместность системы не обнаружена, то расширенная матрица преобразуется к виду

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & a_{13}^{(2)} & \ldots & a_{1n}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & \ldots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & & & \ldots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{m_2 3}^{(2)} & \ldots & a_{m_2 n}^{(2)} & b_{m_2}^{(2)} \end{array}\right].$$

Количество строк m_2 этой расширенной матрицы может быть меньше количества строк m_1 матрицы, полученной после первого шага алгоритма ($m_2 \leq m_1$).

Если $m_2 > 2$, то переходим к третьему шагу алгоритма и т. д.

Алгоритм Гаусса–Жордана содержит не более m и не более n шагов и заканчивается одним из трех исходов:

1. Заданная система несовместна. Ее несовместность обнаруживается на одном из шагов алгоритма.

2. Число шагов n. Заданная система преобразуется к равносильной системе вида

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \ldots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & b_2 \\ \vdots & & \ldots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & b_n \end{array}\right] \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & b_1, \\ x_2 & = & b_2, \\ \vdots & & \vdots \\ x_n & = & b_n. \end{array} \right. \tag{2.1}$$

Здесь b_i $(i = 1, \ldots, n)$ – элементы расширенной матрицы, полученной после последнего шага алгоритма.

Система имеет единственное решение.

Заметим, что если в процессе выполнения алгоритма была перестановка столбцов, то неизвестные, записанные над столбцами матрицы коэффициентов, будут стоять в другом порядке.

3. Число шагов k меньше n. Заданная система преобразуется к равносильной системе вида

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & \ldots & x_k & x_{k+1} & \ldots & x_n & \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & \ldots & 0 & a_{1k+1} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\
0 & 1 & \ldots & 0 & a_{2k+1} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & & \ldots & & & \ldots & & \vdots \\
0 & 0 & \ldots & 1 & a_{kk+1} & \ldots & a_{mn} & b_k
\end{array}\right]
\end{array} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{lllllllll}
x_1 & + & a_{1k+1}x_{k+1} & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\
x_2 & + & a_{2k+1}x_{k+1} & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\
\vdots & & & & & & & & \vdots \\
x_k & + & a_{kk+1}x_{k+1} & + & \ldots & + & a_{kn}x_n & = & b_k.
\end{array}\right. \tag{2.2}$$

Здесь a_{ij} $(i = 1, \ldots, k, \quad j = k+1, \ldots, n)$, b_i $(i = 1, \ldots, k)$ – элементы расширенной матрицы, полученной после последнего шага алгоритма.

Порядок неизвестных над столбцами матрицы коэффициентов может быть другим, если в ходе выполнения алгоритма переставляли столбцы.

Неизвестные, связанные с единичной матрицей (в рассматриваемой системе $x_1, x_2, \ldots, x_k$), называются базисными, остальные $(x_{k+1}, \ldots, x_n)$ – свободными. Базисные неизвестные легко выражаются через свободные:

$$\left\{\begin{array}{lllllllll}
x_1 & = & b_1 & - & a_{1k+1}x_{k+1} & - & \ldots & - & a_{1n}x_n, \\
x_2 & = & b_2 & - & a_{2k+1}x_{k+1} & - & \ldots & - & a_{2n}x_n, \\
\vdots & & & & & & & & \vdots \\
x_k & = & b_k & - & a_{kk+1}x_{k+1} & - & \ldots & - & a_{kn}x_n.
\end{array}\right. \tag{2.3}$$

Если $x_{k+1}, \ldots, x_n$ задавать как произвольные числа, а $x_1, x_2, \ldots, x_k$ выражать через них по формулам (2.3), то получатся все решения исходной системы уравнений.

Система уравнений имеет бесконечно много решений.

Пример 2.2. Методом Гаусса–Жордана решить систему линейных уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr}
3x_1 & + & 6x_2 & + & 9x_3 & = & 18, \\
3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2, \\
2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -3, \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2.
\end{array}\right.$$

Решение. Запишем расширенную матрицу заданной системы. Над столбцами матрицы коэффициентов системы напишем соответствующие неизвестные. Последовательно столбцы этой матрицы будем преобразовывать к столбцам единичной матрицы. Справа от расширенной матрицы будем записывать соответствующую ей систему линейных уравнений:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 6 & 9 & 18 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \end{array} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 6x_2 & + & 9x_3 & = & 18, \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -3, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2. \end{array}\right.$$

Шаг 1. ***Первый столбец матрицы системы преобразуем к первому столбцу единичной матрицы.***

Преобразование первого столбца матрицы начинаем с элемента с номером $(1,1)$. В первой строке первого столбца записано число 3. Разделим первую строку расширенной матрицы на 3:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{rrr|r} \mathbf{3} & 6 & 9 & 18 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} :\mathbf{3} \\ \\ \\ \\ \end{array} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \mathbf{3}x_1 & + & 6x_2 & + & 9x_3 & = & 18, \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -3, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2. \end{array}\right. \begin{array}{l} :\mathbf{3} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

На месте элемента с номером $(1,1)$ появится 1:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \end{array} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6, \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -3, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2. \end{array}\right.$$

Обозначим первую строку расширенной матрицы римской цифрой I. Прибавим ко второй строке расширенной матрицы первую строку, умноженную на (-3), затем прибавим к третьей строке первую строку, умноженную на (-2), и, наконец, прибавим к четвертой строке первую строку, умноженную на (-1):

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 6 \\ \mathbf{3} & 2 & 1 & 2 \\ \mathbf{2} & -1 & 1 & -3 \\ \mathbf{1} & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ +\mathrm{I}\cdot(-\mathbf{3}) \\ +\mathrm{I}\cdot(-\mathbf{2}) \\ +\mathrm{I}\cdot(-\mathbf{1}) \end{array} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6, \\ \mathbf{3}x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2, \\ \mathbf{2}x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -3, \\ \mathbf{1}x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2. \end{array}\right.$$

Первый столбец матрицы системы преобразуется к первому столбцу единичной матрицы. При этом из всех уравнений системы, кроме первого уравнения, будет исключена неизвестная x_1:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -4 & -8 & -16 \\ 0 & -5 & -5 & -15 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \end{array}\right] \end{array} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6, \\ & & -4x_2 & - & 8x_3 & = & -16, \\ & & -5x_2 & - & 5x_3 & = & -15, \\ & & -x_2 & - & 2x_3 & = & -4. \end{array}\right.$$

Шаг* 2. *Второй столбец матрицы системы преобразуем ко второму столбцу единичной матрицы.

Преобразование столбца начинаем с элемента с номером $(2,2)$. Во второй стоке второго столбца записано число (-4). Разделим вторую строку расширенной матрицы на (-4):

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & \mathbf{-4} & -8 & -16 \\ 0 & -5 & -5 & -15 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \end{array}\right] \end{array} : (\mathbf{-4}) \quad \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6, & \\ & & \mathbf{-4}x_2 & - & 8x_3 & = & -16, & : (\mathbf{-4}) \\ & & -5x_2 & - & 5x_3 & = & -15, & \\ & & -x_2 & - & 2x_3 & = & -4. & \end{array}\right.$$

На месте элемента с номером $(2,2)$ появится 1:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -5 & -15 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \end{array}\right] \end{array} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 6, \\ x_2 + 2x_3 & = & 4, \\ -5x_2 - 5x_3 & = & -15, \\ -1x_2 - 2x_3 & = & -4. \end{array}\right.$$

Обозначим вторую строку расширенной матрицы римской цифрой II. Прибавим к первой строке расширенной матрицы вторую строку, умноженную на (-2), затем прибавим к третьей строке вторую, умноженную на 5, и прибавим к четвертой строке вторую строку:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \mathbf{2} & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & \mathbf{-5} & -5 & -15 \\ 0 & \mathbf{-1} & -2 & -4 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} +\mathrm{II}\cdot(\mathbf{-2}) \\ \mathrm{II} \\ +\mathrm{II}\cdot\mathbf{5} \\ +\mathrm{II} \end{array} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x_1 + \mathbf{2}x_2 + 3x_3 & = & 6, \\ x_2 + 2x_3 & = & 4, \\ \mathbf{-5}x_2 - 5x_3 & = & -15, \\ \mathbf{-1}x_2 - 2x_3 & = & -4. \end{array}\right.$$

Второй столбец матрицы системы преобразуется ко второму столбцу единичной матрицы. Из всех уравнений системы, кроме второго уравнения, исключается неизвестная x_2. На этом шаге алгоритма в расширенной матрице появляется нулевая строка, соответствующая уравнению $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right] \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcr} x_1 & & -\ x_3 & = & -2, \\ & x_2 & +2x_3 & = & 4, \\ & & 5x_3 & = & 5, \\ \mathbf{0}x_1 & +\mathbf{0}x_2 & +\mathbf{0}x_3 & = & \mathbf{0}. \end{array} \right.$$

Из матрицы удаляем нулевую строку, при этом из системы удаляется нулевое уравнение.

Шаг* 3. *Третий столбец матрицы системы преобразуем к третьему столбцу единичной матрицы.

Элемент с номером $(3,3)$ матрицы – число 5. Разделим третью строку расширенной матрицы на 5:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{5} & 5 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ : \mathbf{5} \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrcr} x_1 & -\ x_3 & = & -2, \\ x_2 & +2x_3 & = & 4, \\ & \mathbf{5}x_3 & = & 5. \end{array} \right. \quad : \mathbf{5}$$

На месте элемента с номером $(3,3)$ появится 1:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \end{array}\right] \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrcr} x_1 & -1x_3 & = & -2, \\ x_2 & +2x_3 & = & 4, \\ & x_3 & = & 1. \end{array} \right.$$

Обозначим третью строку расширенной матрицы римской цифрой III. Прибавим к первой строке расширенной матрицы третью строку, затем прибавим ко второй строке третью, умноженную на (-2):

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\mathbf{1} & -2 \\ 0 & 1 & \mathbf{2} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} + \mathrm{III} \\ + \mathrm{III} \cdot (-\mathbf{2}) \\ \mathrm{III} \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrcr} x_1 & -\mathbf{1}x_3 & = & -2, \\ x_2 & +\mathbf{2}x_3 & = & 4, \\ & x_3 & = & 1. \end{array} \right.$$

Матрица системы преобразуется к единичной матрице. Заданная система преобразуется к системе вида (2.1), она имеет единственное решение:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 1 \end{array}\right] \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} x_1 & = & -1, \\ x_2 & = & 2, \\ x_3 & = & 1. \end{array} \right.$$

Выполним проверку. Для этого подставим найденные значения x_1, x_2 и x_3 во все уравнения системы:

$$\left\{\begin{array}{rcr} 3\cdot(-1)+6\cdot 2+9\cdot 1 &=& 18,\\ 3\cdot(-1)+2\cdot 2+1 &=& 2,\\ 2\cdot(-1)-2+1 &=& -3,\\ -1+2+1 &=& 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} 18 &=& 18,\\ 2 &=& 2,\\ -3 &=& -3,\\ 2 &=& 2. \end{array}\right.$$

Получились верные равенства.

Пример 2.3. Методом Гаусса–Жордана решить систему линейных уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 &+& 2x_2 &-& 4x_3 &-& 2x_4 &=& -6,\\ -2x_1 &-& 2x_2 &+& 3x_3 &-& x_4 &=& 3,\\ 3x_1 &+& 3x_2 &+& 2x_3 &+& 2x_4 &=& -4,\\ -2x_1 &-& 2x_2 &-& 2x_3 &-& x_4 &=& 3. \end{array}\right.$$

Решение. Все преобразования системы будем выполнять, используя расширенную матрицу.

Шаг 1***. Первый столбец матрицы системы преобразуем к первому столбцу единичной матрицы.***

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{2} & 2 & -4 & -2 & -6\\ -2 & -2 & 3 & -1 & 3\\ 3 & 3 & 2 & 2 & -4\\ -2 & -2 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right] \end{array} : \mathbf{2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1} & 1 & -2 & -1 & -3\\ \mathbf{-2} & -2 & 3 & -1 & 3\\ \mathbf{3} & 3 & 2 & 2 & -4\\ \mathbf{-2} & -2 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \mathrm{I}\\ +\mathrm{I}\cdot\mathbf{2}\\ +\mathrm{I}\cdot(-\mathbf{3})\\ +\mathrm{I}\cdot\mathbf{2} \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & \mathbf{0} & -1 & -3 & -3\\ 0 & 0 & 8 & 5 & 5\\ 0 & 0 & -6 & -3 & -3 \end{array}\right] \end{array}.$$

Шаг 2***. Второй столбец матрицы системы преобразуем ко второму столбцу единичной матрицы.***

На месте элемента с номером $(2,2)$ стоит 0. Перестановка строк не позволяет получить на месте этого элемента число, отличное от нуля. Первую строку для перестановок использовать не можем, поэтому поменяем местами второй и третий столбцы вместе с неизвестными, записанными над этими столбцами. Тем самым перестановку запомним:

$$
\begin{array}{cccc|c}
x_1 & \boldsymbol{x_3} & \boldsymbol{x_2} & x_4 & \\
\end{array}
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & -2 & 1 & -1 & -3 \\
0 & -\mathbf{1} & 0 & -3 & -3 \\
0 & 8 & 0 & 5 & 5 \\
0 & -6 & 0 & -3 & -3
\end{array}\right] : (-\mathbf{1}) \Leftrightarrow
\begin{array}{cccc|c}
x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & \\
\end{array}
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & -\mathbf{2} & 1 & -1 & -3 \\
0 & \mathbf{1} & 0 & 3 & 3 \\
0 & \mathbf{8} & 0 & 5 & 5 \\
0 & -\mathbf{6} & 0 & -3 & -3
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
+\mathrm{II}\cdot\mathbf{2} \\
\mathrm{II} \\
+\mathrm{II}\cdot(-\mathbf{8}) \\
+\mathrm{II}\cdot\mathbf{6}
\end{array} \Leftrightarrow
$$

$$
\Leftrightarrow
\begin{array}{cccc|c}
x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & \\
\end{array}
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 1 & 5 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\
0 & 0 & \mathbf{0} & -19 & -19 \\
0 & 0 & 0 & -15 & -15
\end{array}\right].
$$

Шаг* 3. *Третий столбец матрицы системы преобразуем к третьему столбцу единичной матрицы.

В третьей строке третьего столбца – число 0. Поменяем местами третий и четвертый столбцы матрицы системы вместе с неизвестными, записанными над ними:

$$
\begin{array}{cccc|c}
x_1 & x_3 & \boldsymbol{x_4} & \boldsymbol{x_2} & \\
\end{array}
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 5 & 1 & 3 \\
0 & 1 & 3 & 0 & 3 \\
0 & 0 & -\mathbf{19} & 0 & -19 \\
0 & 0 & -15 & 0 & -15
\end{array}\right] : (-\mathbf{19}) \Leftrightarrow
\begin{array}{cccc|c}
x_1 & x_3 & x_4 & x_2 & \\
\end{array}
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & \mathbf{5} & 1 & 3 \\
0 & 1 & \mathbf{3} & 0 & 3 \\
0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\
0 & 0 & -\mathbf{15} & 0 & -15
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
+\mathrm{III}\cdot(-\mathbf{5}) \\
+\mathrm{III}\cdot(-\mathbf{3}) \\
\mathrm{III} \\
+\mathrm{III}\cdot(\mathbf{15})
\end{array} \Leftrightarrow
$$

$$
\Leftrightarrow
\begin{array}{cccc|c}
x_1 & x_3 & x_4 & x_2 & \\
\end{array}
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}
\end{array}\right] \Leftrightarrow
\begin{array}{cccc|c}
\boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_3} & \boldsymbol{x_4} & x_2 & \\
\end{array}
\left[\begin{array}{cccc|c}
\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & -2 \\
\mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 & 0 \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 1
\end{array}\right] \Leftrightarrow
$$

$$
\Leftrightarrow \begin{cases}
\boldsymbol{x_1} + x_2 = -2, \\
\boldsymbol{x_3} = 0, \\
\boldsymbol{x_4} = 1.
\end{cases}
$$

На третьем шаге алгоритма в расширенной матрице появилась нулевая строка. Ее удалили из матрицы. В результате, в левом углу прямоугольной матрицы системы получилась единичная матрица. Исходная система преобразована к равносильной системе вида (2.2). Она имеет бесконечно много решений.

В полученной системе неизвестные x_1, x_3 и x_4, записанные над единичной матрицей, – базисные, неизвестная x_2 – свободная. Зададим $x_2 = t$, где t – произвольное число, и выразим x_1 через x_2. Получим все решения системы:

$$\begin{cases} x_1 &= -2-t, \\ x_2 &= t, \\ x_3 &= 0, \\ x_4 &= 1, \quad t \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Выполним проверку. Подставим найденные значения x_1, x_2, x_3, x_4 во все уравнения исходной системы:

$$\begin{cases} 2\cdot(-2-t)+2\cdot t-4\cdot 0-2\cdot 1 &= -6, \\ -2\cdot(-2-t)-2\cdot t+3\cdot 0-1 &= 3, \\ 3\cdot(-2-t)+3\cdot t+2\cdot 0+2\cdot 1 &= -4, \\ -2\cdot(-2-t)-2\cdot t-2\cdot 0-1 &= 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 &= -6, \\ 3 &= 3, \\ -4 &= -4, \\ 3 &= 3. \end{cases}$$

Для любых значений t получились верные равенства.

Пример 2.4. Методом Гаусса–Жордана решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 7, \\ x_1 + x_2 - x_4 = -1, \\ -3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 9x_4 = -10, \\ -2x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 13x_4 = -11. \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы и начнем преобразовывать столбцы матрицы системы к столбцам единичной матрицы:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -2 & -7 & 7 \\ \mathbf{1} & 1 & 0 & -1 & -1 \\ \mathbf{-3} & -4 & 2 & 9 & -10 \\ \mathbf{-2} & 6 & -2 & 13 & -11 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ +\mathrm{I}\cdot(-\mathbf{1}) \\ +\mathrm{I}\cdot\mathbf{3} \\ +\mathrm{I}\cdot\mathbf{2} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -2 & -7 & 7 \\ 0 & -\mathbf{1} & 2 & 6 & -8 \\ 0 & 2 & -4 & -12 & 11 \\ 0 & 2 & -6 & -1 & 3 \end{array}\right] \end{array} :(-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & \mathbf{2} & -2 & -7 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & -6 & 8 \\ 0 & \mathbf{2} & -4 & -12 & 11 \\ 0 & \mathbf{2} & -6 & -1 & 3 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} +\mathrm{II}\cdot(-\mathbf{2}) \\ \mathrm{II} \\ +\mathrm{II}\cdot(-\mathbf{2}) \\ +\mathrm{II}\cdot(-\mathbf{2}) \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -6 & 8 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-5} \\ 0 & 0 & -2 & 11 & -13 \end{array}\right] \end{array}.$$

В расширенной матрице появилась строка $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right]$, соответствующая уравнению $0x_1+0x_2+0x_3+0x_4=-5$, которое не может выполняться ни при каких значениях x_1, x_2, x_3, x_4. Значит, заданная система линейных уравнений несовместна.

Пример 2.5. Методом Гаусса–Жордана решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 8x_4 = 0, \\ -2x_1 - 2x_2 + 10x_3 + 8x_4 = -4, \\ -3x_1 + x_2 + 7x_3 + 8x_4 = -2. \end{cases}$$

Решение. В этой системе 3 уравнения связывают 4 неизвестных. Такая система не может иметь единственного решения. Используя допустимые преобразования, матрицу системы размера 3×4 нельзя преобразовать к квадратной единичной матрице размера 4×4. Найдем все решения этой системы или установим ее несовместность:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{4} & -4 & -4 & -8 & 0 \\ -2 & -2 & 10 & 8 & -4 \\ -3 & 1 & 7 & 8 & -2 \end{array}\right] \end{array} : 4 \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ -\mathbf{2} & -2 & 10 & 8 & -4 \\ -\mathbf{3} & 1 & 7 & 8 & -2 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ +\mathrm{I}\cdot\mathbf{2} \\ +\mathrm{I}\cdot\mathbf{3} \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{4} & 8 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & -2 \end{array}\right] \end{array} : (-4) \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -\mathbf{1} & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -\mathbf{2} & 4 & 2 & -2 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} +\mathrm{II} \\ \mathrm{II} \\ +\mathrm{II}\cdot\mathbf{2} \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right] \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1} & \mathbf{0} & -3 & -3 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & -2 & -1 & 1 \end{array}\right] \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x_1} - 3x_3 - 3x_4 = 1, \\ \boldsymbol{x_2} - 2x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

Исходная система уравнений равносильна системе из двух уравнений. Зададим свободные неизвестные x_3 и x_4, не связанные с единичной матрицей, как произвольные числа: $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$. Выразим x_1 и x_2 через них и получим все решения системы:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 3\alpha + 3\beta, \\ x_2 = 1 + 2\alpha + \beta, \\ x_3 = \alpha, \\ x_4 = \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Выполним проверку. Подставим значения x_1, x_2, x_3, x_4 во все уравнения заданной системы:

$$\begin{cases} 4(1 + 3\alpha + 3\beta) - 4(1 + 2\alpha + \beta) - 4\alpha - 8\beta = 0, \\ -2(1 + 3\alpha + 3\beta) - 2(1 + 2\alpha + \beta) + 10\alpha + 8\beta = -4, \\ -3(1 + 3\alpha + 3\beta) + (1 + 2\alpha + \beta) + 7\alpha + 8\beta = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0, \\ -4 = -4, \\ -2 = -2. \end{cases}$$

Для любых значений α и β получились верные равенства.

2.3. Упражнения

Решите системы линейных уравнений:

2.1. $\begin{cases} x - y = -1, \\ 5x - 2y = 4. \end{cases}$ **2.2.** $\begin{cases} 4x - 6y = 1, \\ -2x + 3y = -2. \end{cases}$ **2.3.** $\begin{cases} 4x - y = 2, \\ -8x + 2y = -4. \end{cases}$

2.4. Система линейных алгебраических уравнений состоит из пяти уравнений с семью неизвестными. Может ли такая система иметь
а) единственное решение,
б) бесконечно много решений,
в) быть несовместной?

2.5. Система линейных алгебраических уравнений состоит из семи уравнений с пятью неизвестными. Может ли такая система иметь
а) единственное решение,
б) бесконечно много решений,
в) быть несовместной?

2.6. При каком значении a система $\begin{cases} x - y = 2, \\ 2x + ay = 1 \end{cases}$ является несовместной?

2.7. При каком значении a система $\begin{cases} -x + ay = -2, \\ 4x + 4y = 8 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

2.8. При каких значениях a система $\begin{cases} 3x - y = -1, \\ 6x - 2y = a \end{cases}$ является несовместной?

2.9. При каких значениях a система $\begin{cases} 2x - y = -1, \\ ax + 3y = 6 \end{cases}$ имеет единственное решение?

Сколько решений в зависимости от a имеет заданная система уравнений:

2.10. $\begin{cases} ax + 2y = -3, \\ 3x - y = 6; \end{cases}$ **2.11.** $\begin{cases} x - 3y = a, \\ 2x - 6y = 4; \end{cases}$ **2.12.** $\begin{cases} 2x + y = -1, \\ ax - 4y = 4? \end{cases}$

Являются ли равносильными системы линейных уравнений?

2.13. $\begin{cases} x - y = 2, \\ x + y = 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x - y = 2, \\ 2x + 2y = 1. \end{cases}$ **2.14.** $\begin{cases} x + y = 4, \\ x + y = 2, \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 4, \\ 3x + 3y = 2. \end{cases}$

2.15. $\begin{cases} x + 3y = 1, \\ x + y = 2, \end{cases}$ $\begin{cases} 3y + x = 1, \\ 4y + 4x = 8. \end{cases}$ **2.16.** $\begin{cases} 2x + y = 3, \\ x + y = 1, \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + 2y = 2, \\ 2x + y = 3. \end{cases}$

2.17. Расширенная матрица системы линейных уравнений имеет вид

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & -6 & t & 4 \end{array}\right]$. При каком значении t система имеет бесконечно много решений?

2.18. Расширенная матрица системы линейных уравнений имеет вид $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 8 & 4 & t \end{array}\right]$. При каких значениях t система является несовместной?

2.19. Расширенная матрица системы линейных уравнений имеет вид $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & 4 & t & -5 \end{array}\right]$. При каких значениях t система имеет единственное решение?

Задана расширенная матрица системы линейных уравнений. Определите, сколько решений в зависимости от t имеет эта система:

2.20. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & t & 0 \end{array}\right]$, **2.21.** $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{array}\right]$, **2.22.** $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & t \end{array}\right]$.

Решите системы линейных уравнений методом Гаусса–Жордана:

2.23. $x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 3.$ **2.24.** $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 = 2.$

2.25. $\left\{\begin{aligned} x_2 + x_4 &= 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 1. \end{aligned}\right.$ **2.26.** $\left\{\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 2. \end{aligned}\right.$

2.27. $\left\{\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= -3, \\ 2x_1 + 3x_2 &= -4, \\ x_1 + x_2 &= -1, \\ x_1 + 3x_2 &= -5. \end{aligned}\right.$ **2.28.** $\left\{\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 2, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 &= 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= -1. \end{aligned}\right.$

2.29. $\left\{\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= -4, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= -2. \end{aligned}\right.$ **2.30.** $\left\{\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 2, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 &= 1, \\ x_1 - 5x_2 - 4x_3 &= 1. \end{aligned}\right.$

2.31. $\left\{\begin{aligned} x_2 + x_3 &= -1, \\ x_1 - x_3 &= 1, \\ x_1 - x_2 &= 4. \end{aligned}\right.$ **2.32.** $\left\{\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 3, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &= 1. \end{aligned}\right.$

2.33. $\left\{\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 4, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= -8, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 10x_4 &= 16, \\ -3x_1 + 6x_2 + x_3 - 7x_4 &= -2. \end{aligned}\right.$ **2.34.** $\left\{\begin{aligned} x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 3, \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 &= 2, \\ -2x_1 - x_2 + x_4 &= 1, \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 &= 0. \end{aligned}\right.$

2.35. $\begin{cases} x_2+2x_3+3x_4 = 5, \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4 = 7, \\ 2x_1+3x_2+4x_3 = -1, \\ 3x_1+4x_2+x_4 = 1. \end{cases}$ **2.36.** $\begin{cases} x_1+2x_2 = 2, \\ 2x_1+3x_2+3x_3 = 9, \\ 3x_2+3x_3+2x_4 = 7, \\ 2x_3+4x_4 = 0. \end{cases}$

2.37. $\begin{cases} -x_1+x_2-x_3-2x_4 = -3, \\ -x_1-2x_2-2x_3-x_4 = -13, \\ 3x_1-6x_2+10x_4 = -2, \\ 2x_1+4x_2+6x_3+x_4 = 29. \end{cases}$ **2.38.** $\begin{cases} x_3+2x_4 = 1, \\ x_1+2x_3 = -1, \\ 2x_1+x_2 = 4, \\ 2x_2+x_3 = 3. \end{cases}$

2.39. $\begin{cases} 2x_1-2x_2+4x_3-14x_4 = 10, \\ 2x_1-3x_2+5x_3-20x_4 = 12, \\ x_1+2x_2-2x_3+14x_4 = -2, \\ x_1+x_2-x_3+8x_4 = 0, \\ -x_1-3x_2+3x_3-20x_4 = 4. \end{cases}$ **2.40.** $\begin{cases} 3x_1+x_4 = -5, \\ 3x_2+x_4 = -2, \\ 3x_3+x_4 = 7, \\ x_3+3x_4 = 5. \end{cases}$

2.41. $\begin{cases} x_1-2x_2-4x_3+2x_4 = 3, \\ x_1-x_2-3x_3-2x_4 = 1, \\ 2x_1-5x_2-9x_3+8x_4 = 8, \\ 3x_1-5x_2-11x_3+2x_4 = 7, \\ x_1-2x_3-6x_4 = -1. \end{cases}$ **2.42.** $\begin{cases} x_2+3x_3 = 1, \\ x_1-x_3 = 2, \\ 3x_1+x_2 = 7. \end{cases}$

2.43. $\begin{cases} -2x_1+6x_2+4x_3-14x_4 = -2, \\ -3x_1+7x_2+4x_3-17x_4 = -1, \\ x_1-x_2+3x_4 = -1, \\ -4x_1+12x_2+8x_3-28x_4 = -4. \end{cases}$

2.44. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4+5x_5 = 3, \\ 2x_1-5x_2+3x_3-8x_4+7x_5 = 2, \\ x_1-x_2+6x_3-4x_4+8x_5 = 7. \end{cases}$

2.4. Ответы

2.1. $x=2, y=3$. **2.2.** Решений нет. **2.3.** $x=t, y=-2+4t \quad (t\in\mathbf{R})$. **2.4.** а) нет, б) да, в) да. **2.5.** а) да, б) да, в) да. **2.6.** $a=-2$. **2.7.** $a=-1$. **2.8.** $a\neq-2$. **2.9.** $a\neq-6$. **2.10.** При $a\neq-6$ – единственное решение, при $a=-6$ – решений нет. **2.11.** При $a=2$ – бесконечно много решений, при $a\neq2$ – решений нет. **2.12.** При $a=-8$ – бесконечно много решений, при $a\neq-8$ – единственное решение. **2.13.** Нет. **2.14.** Да. **2.15.** Да. **2.16.** Да. **2.17.** $t=-4$. **2.18.** $t\neq8$. **2.19.** $t\neq12$. **2.20.** При $t=0$ – бесконечно много решений, при $t\neq0$ – единственное решение. **2.21.** При $t=0$ – бесконечно много решений, при $t\neq0$ – решений нет. **2.22.** При $t=4$ – бесконечно много решений, при $t\neq4$ – решений нет. **2.23.** $x_1=3+\alpha+3\beta-2\gamma+\delta$, $x_2=\alpha$, $x_3=\beta$, $x_4=\gamma$, $x_5=\delta$ $(\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbf{R})$. **2.24.** $x_1=\alpha$, $x_2=\beta$,

$x_3 = 2$ ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}$). **2.25.** $x_1 = 3 - \alpha - \beta$, $x_2 = 2 - \beta$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}$). **2.26.** $x_1 = 3 - 3\alpha - 3\beta$, $x_2 = -1 + \alpha + 2\beta$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}$). **2.27.** $x_1 = 1$, $x_2 = -2$. **2.28.** Решений нет. **2.29.** $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$. **2.30.** $x_1 = 1 - \alpha$, $x_2 = -\alpha$, $x_3 = \alpha$ ($\alpha \in \mathbf{R}$). **2.31.** $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$. **2.32.** Решений нет. **2.33.** $x_1 = 3 + 2\alpha$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = 0$, $x_4 = -1$ ($\alpha \in \mathbf{R}$). **2.34.** $x_1 = -2 + \alpha + 2\beta$, $x_2 = 3 - 2\alpha - 3\beta$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}$). **2.35.** $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$. **2.36.** $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = -1$. **2.37.** $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$, $x_4 = 1$. **2.38.** $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$. **2.39.** $x_1 = 2 - 2\alpha$, $x_2 = -1 - 3\alpha$, $x_3 = 1 + 3\alpha$, $x_4 = \alpha$ ($\alpha \in \mathbf{R}$). **2.40.** $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 1$. **2.41.** $x_1 = -1 + 2\alpha + 6\beta$, $x_2 = -2 - \alpha + 4\beta$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$ (α, $\beta \in \mathbf{R}$). **2.42.** $x_1 = 2 + \alpha$, $x_2 = 1 - 3\alpha$, $x_3 = \alpha$ ($\alpha \in \mathbf{R}$). **2.43.** $x_1 = -2 - \alpha - \beta$, $x_2 = -1 - \alpha + 2\beta$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$ (α, $\beta \in \mathbf{R}$). **2.44.** $x_1 = 11 - 9\alpha + 4\beta - 11\gamma$, $x_2 = 4 - 3\alpha - 3\gamma$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, $x_5 = \gamma$ (α, β, $\gamma \in \mathbf{R}$).

3. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

3.1. Основные понятия

Теоретический материал этого раздела подробно изложен в учебном пособии [1].

Каждой квадратной матрице A ставится в соответствие число, которое называется определителем или детерминантом и обозначается $\det A$.

Определение определителя матрицы дадим по индукции.

Определение 3.1. 1. *Пусть* $A = [a_{11}]$ *– квадратная матрица 1-го порядка. Тогда*

$$\det A = a_{11}.$$

2. *Предположим, что известно правило нахождения определителя квадратной матрицы* $(n-1)$*-го порядка* $(n \geq 2)$.

Введем вспомогательные понятия. Удалим из квадратной матрицы A n*-го порядка* i*-ю строку и* j*-й столбец. Оставшиеся элементы образуют квадратную матрицу порядка* $(n-1)$.

Число M_{ij}*, равное определителю полученной матрицы, называется дополнительным минором или минором элемента* a_{ij} *матрицы* A.

Число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ *называется алгебраическим дополнением элемента* a_{ij} *матрицы* A.

3. *Пусть* $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \ldots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$ *– квадратная матрица порядка*

n $(n \geq 2)$.

Определитель матрицы A равен сумме произведений элементов ее первой строки на их алгебраические дополнения:

$$\det A = \boldsymbol{a_{11}} A_{11} + \boldsymbol{a_{12}} A_{12} + \ldots + \boldsymbol{a_{1n}} A_{1n} =$$
$$= \boldsymbol{a_{11}} (-1)^{1+1} M_{11} + \boldsymbol{a_{12}} (-1)^{1+2} M_{12} + \ldots + \boldsymbol{a_{1n}} (-1)^{1+n} M_{1n}.$$

Эту формулу называют разложением определителя по первой строке.

Пример 3.1. Рассмотрим матрицу $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 2-го порядка. Согласно определению

$$\det A = a_{11}(-1)^{1+1} a_{22} + a_{12}(-1)^{1+2} a_{21} =$$
$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Для вычисления определителя матрицы второго порядка получилось простое правило:

$$\det A = \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} \\ a_{21} & \boldsymbol{a_{22}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{a_{11}} \boldsymbol{a_{22}} - a_{12}a_{21}.$$

Пример 3.2. Найти минор и алгебраическое дополнение элемента a_{23} матрицы $A = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 2 \\ 8 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$.

Решение. Удалим из матрицы A вторую строку и третий столбец. Минор элемента a_{23} равен определителю оставшейся матрицы:

$$M_{23} = \det \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = -4 \cdot 3 - 5 \cdot (-2) = -2.$$

Алгебраическое дополнение этого элемента выражается через минор по правилу $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23}$. Значит,

$$A_{23} = (-1)^{2+3}(-2) = 2.$$

Пример 3.3. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

Решение. Разложим определитель этой матрицы по первой строке:

$$\det A = \det \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \mathbf{3}(-1)^{1+1}\det\begin{bmatrix}4 & 2\\ 3 & 3\end{bmatrix} + \mathbf{2}(-1)^{1+2}\det\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix} + \mathbf{4}(-1)^{1+3}\det\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix} =$$

$$= 3(12-6) - 2(3-4) + 4(3-8) = 18 + 2 - 20 = 0.$$

Определение 3.2. *Если* $\det A = 0$*, то матрица* A *называется вырожденной. В противном случае – невырожденной.*

Матрица A, заданная в последнем примере, является вырожденной.

3.2. Некоторые свойства определителей

1. *Определитель матрицы не изменится, если его разложить по любой строке или любому столбцу матрицы.*

Разложение определителя по i*-й строке:*

$$\det A = \boldsymbol{a_{i1}}A_{i1} + \boldsymbol{a_{i2}}A_{i2} + \ldots + \boldsymbol{a_{in}}A_{in} =$$

$$= \boldsymbol{a_{i1}}(-1)^{i+1}M_{i1} + \boldsymbol{a_{i2}}(-1)^{i+2}M_{i2} + \ldots + \boldsymbol{a_{in}}(-1)^{i+n}M_{in}.$$

Разложение определителя по j*-му столбцу:*

$$\det A = \boldsymbol{a_{1j}}A_{1j} + \boldsymbol{a_{2j}}A_{2j} + \ldots + \boldsymbol{a_{nj}}A_{nj} =$$

$$= \boldsymbol{a_{1j}}(-1)^{1+j}M_{1j} + \boldsymbol{a_{2j}}(-1)^{2+j}M_{2j} + \ldots + \boldsymbol{a_{nj}}(-1)^{n+j}M_{nj}.$$

Разложение определителя удобно выполнять по той строке (столбцу), в которой находится наибольшее количество нулей.

2. *Для любой квадратной матрицы* A

$$\det A^T = \det A.$$

3. *Для любой квадратной матрицы* A

$$\det A^* = \overline{\det A}.$$

4. *Если* A *и* B *– квадратные матрицы одинакового порядка, то определитель произведения матриц равен произведению определителей:*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Для формулировки свойств 5 – 10 будем записывать матрицу A как совокупность столбцов:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{bmatrix} = [A_1 A_2 \ldots A_n], \quad A_j = \begin{bmatrix} a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{nj}\end{bmatrix}$$

– j-й столбец матрицы.

Свойства 5 – 10 будут сформулированы для столбцов матрицы. Аналогично эти свойства формулируются и для строк матрицы.

5. *Если в матрице поменять местами 2 столбца, то определитель матрицы меняет знак (умножается на (-1)):*

$$\det\left[A_1 \ldots \boldsymbol{A_j} \ldots \boldsymbol{A_k} \ldots A_n\right] = -\det\left[A_1 \ldots \boldsymbol{A_k} \ldots \boldsymbol{A_j} \ldots A_n\right].$$

6. *Если в матрице какой-то столбец умножить на число, то определитель матрицы умножается на это число:*

$$\det\left[A_1 \ldots \boldsymbol{\lambda} A_j \ldots A_n\right] = \boldsymbol{\lambda} \det\left[A_1 \ldots A_j \ldots A_n\right].$$

Это свойство можно сформулировать иначе.

Если элементы какого-то столбца матрицы имеют общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.

7. *Определитель матрицы равен нулю, если в матрице – 2 пропорциональных столбца:*

$$\det\left[A_1 \ldots \boldsymbol{B} \ldots \boldsymbol{\lambda B} \ldots A_n\right] = 0.$$

В частности, если в матрице – 2 одинаковых столбца, то ее определитель равен нулю.

8. *Если в матрице какой-то столбец представляется в виде суммы двух столбцов $A_j = A_j^{'} + A_j^{''}$, то определитель матрицы будет равен сумме определителей двух матриц, в первой из которых на месте столбца A_j будет стоять столбец $A_j^{'}$, а во второй – столбец $A_j^{''}$:*

$$\det\left[A_1 \ldots (\boldsymbol{A_j^{'}} + \boldsymbol{A_j{''}}) \ldots A_n\right] =$$

$$= \det\left[A_1 \ldots \boldsymbol{A_j^{'}} \ldots A_n\right] + \det\left[A_1 \ldots \boldsymbol{A_j{''}} \ldots A_n\right].$$

9. *Определитель матрицы не изменится, если какой-то ее столбец умножить на число и сложить с другим столбцом этой матрицы:*

$$\det\left[A_1 \ldots \boldsymbol{A_j} \ldots \boldsymbol{A_k} \ldots A_n\right] = \det\left[A_1 \ldots (\boldsymbol{A_j} + \boldsymbol{\lambda A_k}) \ldots \boldsymbol{A_k} \ldots A_n\right].$$

10. *Сумма произведений элементов произвольного столбца A_j матрицы на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого столбца A_k этой матрицы равна нулю:*

$$a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \ldots + a_{nj}A_{nk} = 0, \quad j \neq k.$$

Пример 3.4. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 0 & 5 \\ 8 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Решение. Третий столбец матрицы содержит 3 нуля. Разложим определитель по третьему столбцу, а затем разложим определитель полученной матрицы по тому столбцу, который содержит наибольшее количество нулей:

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 0 & 9 & \mathbf{0} & 5 \\ 8 & 3 & \mathbf{2} & 6 \\ 0 & 3 & \mathbf{0} & 1 \\ 4 & 7 & \mathbf{0} & 2 \end{bmatrix} = 2(-1)^{2+3} \det \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 9 & 5 \\ \mathbf{0} & 3 & 1 \\ \mathbf{4} & 7 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= -2 \cdot 4(-1)^{3+1} \det \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = -8(9-15) = 48.$$

Пример 3.5. Известно, что $\det A = 60$. Последовательно выполнили следующие преобразования:

1) поменяли местами первую и последнюю строки матрицы;

2) к последней строке матрицы прибавили первую строку, умноженную на 7;

3) элементы второй строки матрицы разделили на 5;

4) матрицу транспонировали;

5) поменяли местами первый и второй столбцы матрицы;

6) элементы первого столбца матрицы умножили на 2.

Найти определители матриц, полученных после каждого преобразования.

Решение. 1) $\det A_1 = -60$ (если в матрице поменять местами строки, то определитель меняет знак, свойство 5);

2) $\det A_2 = -60$ (если к строке прибавить другую строку, умноженную на любое число, то определитель не изменится, свойство 9);

3) $\det A_3 = -12$ (если строку или столбец матрицы разделить на число, не равное нулю, то определитель матрицы делится на это число, свойство 6);

4) $\det A_4 = -12$ (если матрицу транспонировать, то определитель сохранит свое значение, свойство 2);

5) $\det A_5 = 12$ (если в матрице поменять местами столбцы, то определитель меняет знак, свойство 5);

6) $\det A_6 = -24$ (если строку или столбец матрицы умножить на любое число, то определитель матрицы умножается на это число, свойство 6).

Пример 3.6. Известно, что $\det A = 3 - 7i$. Найти определитель матрицы $A^* \cdot A$.

Решение. Воспользуемся свойствами 3 и 4 определителя:

$$\det A^* = 3 + 7i,$$

$$\det(A^* \cdot A) = \det(A^*) \cdot \det A = (3+7i)(3-7i) = 9 + 49 = 58.$$

3.3. Вычисление определителей методом понижения порядка матрицы

Одним из методов вычисления определителя матрицы является метод, в котором вычисление определителя матрицы n-го порядка сводится к вычислению определителя одной матрицы $(n-1)$-го порядка.

При применении этого метода используют следующие преобразования матрицы:

1) перестановка двух столбцов (строк) в матрице (определитель матрицы при этом меняет знак, свойство 5);

2) вынесение общего множителя столбца (строки) матрицы за знак определителя (свойство 6);

3) прибавление к одному столбцу (одной строке) матрицы другого столбца (другой строки), умноженного (умноженной) на произвольное число (определитель матрицы не меняется, свойство 9).

Сначала с помощью описанных преобразований заданную матрицу n-го порядка преобразуют так, чтобы один из ее столбцов содержал (одна из ее строк содержала) только один отличный от нуля элемент. После этого разлагают определитель полученной матрицы по этому столбцу (этой строке). В разложении будет только одно слагаемое. Задача сведется к вычислению определителя одной матрицы $(n-1)$-го порядка и т. д.

Пример 3.7. Вычислить определитель матрицы

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -4 \\ -4 & -1 & -3 & -6 \end{bmatrix}.$$

Решение. Преобразуем, например, второй столбец матрицы так, чтобы только один элемент этого столбца был отличен от нуля. Для преобразований будем использовать третью строку.

Прибавим к первой строке третью строку, умноженную на (-2). Прибавим ко второй строке третью строку, умноженную на 3, и прибавим к четвертой строке третью строку.

При выполнении этих действий определитель матрицы не меняется (свойство 9).

Действия описываем справа от матрицы. Как и раньше, строки обозначаем римскими цифрами:

$$\det \begin{bmatrix} -3 & \mathbf{2} & 1 & -2 \\ -1 & -\mathbf{3} & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -4 \\ -4 & -\mathbf{1} & -3 & -6 \end{bmatrix} \begin{matrix} +\mathrm{III}\cdot(-\mathbf{2}) \\ +\mathrm{III}\cdot\mathbf{3} \\ \mathrm{III} \\ +\mathrm{III} \end{matrix} = \det \begin{bmatrix} -7 & 0 & -5 & 6 \\ 5 & 0 & 5 & -10 \\ 2 & 1 & 3 & -4 \\ -2 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} =$$

$$\left[\text{Разложим определитель полученной матрицы по второму столбцу. Задача сводится к задаче вычисления определителя матрицы 3-го порядка. Второй столбец новой матрицы уже содержит один нулевой элемент. Преобразуем этот столбец. Прибавим к первой строке вторую строку.}\right]$$

$$= 1 \cdot (-1)^{3+2} \det \begin{bmatrix} -7 & \mathbf{-5} & 6 \\ 5 & 5 & -10 \\ -2 & \mathbf{0} & -10 \end{bmatrix} \begin{matrix} +\mathrm{II} \\ \mathrm{II} \\ \end{matrix} = (-1) \cdot \det \begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 5 & 5 & -10 \\ -2 & 0 & -10 \end{bmatrix} =$$

$$\left[\text{Разложим определитель этой матрицы по второму столбцу. Задача сводится к задаче вычисления определителя матрицы 2-го порядка.}\right]$$

$$= (-1) \cdot 5 \cdot (-1)^{2+2} \det \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -2 & -10 \end{bmatrix} = -5(20 - 8) = -60.$$

3.4. Определители верхней треугольной и нижней треугольной матриц

Квадратные матрицы вида

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \boldsymbol{a_{22}} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \boldsymbol{a_{33}} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b_{11}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & \boldsymbol{b_{22}} & 0 & \dots & 0 \\ b_{31} & b_{32} & \boldsymbol{b_{33}} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & \boldsymbol{b_{nn}} \end{bmatrix}$$

называют верхней треугольной и нижней треугольной матрицами соответственно.

Утверждение 3.1. *Определители верхней треугольной и нижней треугольной матриц равны произведению диагональных элементов этих матриц:*

$$\det A = \boldsymbol{a_{11}a_{22}\dots a_{nn}}, \quad \det B = \boldsymbol{b_{11}b_{22}\dots b_{nn}}.$$

Справедливость этого утверждения проверьте самостоятельно.

Заданную матрицу с помощью описанных ранее преобразований можно привести либо к верхней треугольной, либо к нижней треугольной матрице. Определитель такой матрицы находят, перемножив ее диагональные элементы.

Пример 3.8. Вычислить определитель матрицы

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & 5 & -2 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ -6 & 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}.$$

Решение. Будем последовательно по столбцам приводить матрицу A к верхней треугольной матрице:

$$\det \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 & -1 \\ -\mathbf{3} & -3 & 5 & -2 \\ \mathbf{3} & 4 & 2 & 4 \\ -\mathbf{6} & 1 & 5 & 9 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ +\mathrm{I} \\ +\mathrm{I}\cdot(-\mathbf{1}) \\ +\mathrm{I}\cdot\mathbf{2} \end{array} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & \mathbf{2} & 5 & 5 \\ 0 & \mathbf{5} & -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \mathrm{II} \\ +\mathrm{II}\cdot\mathbf{2} \\ +\mathrm{II}\cdot\mathbf{5} \end{array} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{9} & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{9} & -8 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III} \\ +\mathrm{III}\cdot(-\mathbf{1}) \end{array} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} \mathbf{3} & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -\mathbf{1} & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{9} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{7} \end{bmatrix} = 3\cdot(-1)\cdot 9\cdot(-7) = 189.$$

Пример 3.9. Вычислить определитель матрицы

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & -3 & 4 \\ -4 & 5 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решение. Поменяем местами в заданной матрице первый и последний столбцы (определитель матрицы меняет знак, свойство 5). Тем самым преобразуем матрицу к верхней треугольной:

$$\det \begin{bmatrix} 7 & 3 & -3 & 4 \\ -4 & 5 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 4 & 3 & -3 & 7 \\ 0 & 5 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = -4\cdot 5\cdot 2\cdot 3 = -120.$$

3.5. Теорема и формулы Крамера

Рассмотрим систему из n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{cases} \tag{3.1}$$

Матрица такой системы – квадратная.

Теорема 3.1. (Крамера) *Система линейных алгебраических уравнений (3.1) с квадратной матрицей A имеет единственное решение тогда и только тогда, когда* $\det A \neq 0$ *(матрица системы – невырожденная).*

Для системы уравнений (3.1) введем обозначения:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} = [A_1 A_2 \ldots A_n] \quad \text{– матрица системы,}$$

где $A_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} \quad (j = 1, \ldots, n)$ – столбцы матрицы A;

$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ – столбец свободных членов.

Используя эти матрицы, составим новые:

$$B_1 = [BA_2A_3 \ldots A_n], \quad B_2 = [A_1BA_3 \ldots A_n], \quad \ldots, \quad B_n = [A_1A_2A_3 \ldots B].$$

Матрица B_k получается из матрицы A заменой k-го столбца на столбец B.

Утверждение 3.2. *Если* $\det A \neq 0$, *то для единственного решения системы линейных уравнений (3.1) справедливы формулы Крамера:*

$$x_k = \frac{\det B_k}{\det A}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{3.2}$$

Иногда используют обозначения $\det A = \Delta$, $\det B_k = \Delta_k$, $k = 1, \ldots, n$. При таком обозначении формулы Крамера записывают в виде

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Пример 3.10. Применяя формулы Крамера, решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 7x + 8y = -10, \\ 11x + 9y = -5. \end{cases}$$

Решение. Найдем определитель матрицы системы:

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 11 & 9 \end{bmatrix} = 63 - 88 = -25 \neq 0.$$

Матрица A – невырожденная. Из этого следует (по теореме Крамера), что система имеет единственное решение. Вычислим $\det B_1$ и $\det B_2$:

$$\det B_1 = \det \begin{bmatrix} \mathbf{-10} & 8 \\ \mathbf{-5} & 9 \end{bmatrix} = -50, \quad \det B_2 = \det \begin{bmatrix} 7 & \mathbf{-10} \\ 11 & \mathbf{-5} \end{bmatrix} = 75.$$

По формулам Крамера (3.2) получим решение системы:

$$x = \frac{\det B_1}{\det A} = \frac{-50}{-25} = 2, \quad y = \frac{\det B_2}{\det A} = \frac{75}{-25} = -3.$$

3.6. Однородные системы линейных уравнений

Определение 3.3. *Система линейных алгебраических уравнений, правые части всех уравнений которой равны нулю:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

называется однородной.

Однородная система линейных уравнений всегда имеет нулевое решение: $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$, поэтому такая система всегда совместна.

Теорема 3.2. *Однородная система линейных уравнений с квадратной матрицей системы A $(m = n)$ имеет единственное (нулевое) решение тогда и только тогда, когда матрица системы невырожденная ($\det A \neq 0$).*

Теорема 3.3. *Если в однородной системе линейных уравнений число уравнений меньше числа неизвестных $(m < n)$, то такая система имеет бесконечно много решений.*

Пример 3.11. Решить однородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель матрицы системы, выполнив разложение по второй строке:

$$\det A = \det\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 4\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix} = 3(-1)^{2+1}\det\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix} + 4(-1)^{2+3}\det\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix} =$$

$$= -3(6-1) - 4(1-4) = -15 + 12 = -3 \neq 0.$$

Матрица невырожденная. Следовательно, заданная однородная система имеет единственное (нулевое) решение $\begin{cases} x_1 = 0,\\ x_2 = 0,\\ x_3 = 0.\end{cases}$

Пример 3.12. Решить однородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 - 4x_4 = 0,\\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 8x_4 = 0.\end{cases}$$

Решение. В заданной системе количество уравнений меньше количества неизвестных. Такая система имеет бесконечно много решений. Найдем все решения методом Гаусса–Жордана:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & -4 & 0\\ \mathbf{1} & -5 & 3 & -8 & 0\end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ +\mathrm{I}\cdot(-\mathbf{1}) \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & -4 & 0\\ 0 & -\mathbf{2} & 4 & -4 & 0\end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ :(-\mathbf{2}) \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\mathbf{3} & -1 & -4 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0\end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} +\mathrm{II}\cdot\mathbf{3} \\ \mathrm{II} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -7 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0\end{array}\right] \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 7x_3 + 2x_4 = 0,\\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0.\end{cases}$$

Зададим свободные неизвестные x_3 и x_4 как произвольные числа: $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$. Выразим x_1 и x_2 через них и получим все решения системы:

$$\begin{cases} x_1 = 7\alpha - 2\beta,\\ x_2 = 2\alpha - 2\beta,\\ x_3 = \alpha,\\ x_4 = \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}.\end{cases}$$

3.7. Упражнения

Вычислите определители матриц:

3.1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. **3.2.** $\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. **3.3.** $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. **3.4.** $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

3.5. $\begin{bmatrix} 3+i & 4i \\ 2 & i \end{bmatrix}$. **3.6.** $\begin{bmatrix} 2 & 1+3i \\ 1-3i & 4 \end{bmatrix}$. **3.7.** $\begin{bmatrix} 2-i & 1 \\ 5 & 2+i \end{bmatrix}$.

3.8. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$. Найдите A_{21} и M_{32}.

3.9. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$. Найдите A_{32} и M_{23}.

Вычислите определители матриц, выполнив разложение по строке или столбцу, в которых наибольшее количество нулей:

3.10. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. **3.11.** $\begin{bmatrix} -2 & 6 & 5 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$. **3.12.** $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. **3.13.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \\ 5 & 6 & -3 \end{bmatrix}$.

3.14. $\begin{bmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **3.15.** $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2+i & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2-i \end{bmatrix}$. **3.16.** $\begin{bmatrix} 1-3i & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1+3i \end{bmatrix}$.

3.17. $\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. **3.18.** $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. **3.19.** $\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 2 \\ 0 & b & 0 & 3 \\ 4 & 5 & c & 6 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$.

3.20. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$. **3.21.** $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. **3.22.** $\begin{bmatrix} 1-2i & 0 & 0 & 0 \\ 5i & 1+2i & 0 & 0 \\ 1+i & 2 & 3i & 0 \\ 4-i & i & 0 & -3i \end{bmatrix}$.

3.23. $A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 2 & 8 & -1 \\ 6 & -7 & -2 \end{bmatrix}$. При каком значении a $\det A = 8$?

3.24. $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -4 \\ 0 & a & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$. При каком значении a $\det A = 27$?

3.25. Известно, что $\det A = -40$. Выполнили следующие преобразования:
1) элементы последней строки матрицы разделили на 5;
2) к первой строке матрицы прибавили предпоследнюю строку, умноженную на 3.
Найдите определитель матрицы, полученной после преобразований.

3.26. Известно, что $\det A = 50$. Выполнили следующие преобразования:

1) поменяли местами первый и последний столбцы матрицы;
2) к последней строке матрицы прибавили вторую строку, умноженную на 4.
Найдите определитель матрицы, полученной после преобразований.

3.27. Известно, что $\det A = 12$. Выполнили следующие преобразования:
1) элементы первого столбца матрицы умножили на 2;
2) поменяли местами первую и последнюю строки матрицы.
Найдите определитель матрицы, полученной после преобразований.

3.28. Известно, что A – матрица размера 3×3, $\det A = 4$. Выполнили следующие преобразования:
1) все элементы матрицы умножили на 3;
2) поменяли местами первый и второй столбцы матрицы.
Найдите определитель матрицы, полученной после преобразований.

3.29. Известно, что A – матрица размера 4×4, $\det A = 3$. Выполнили следующие преобразования:
1) все элементы матрицы умножили на 2;
2) к первому столбцу матрицы прибавили второй столбец, умноженный на 5.
Найдите определитель матрицы, полученной после преобразований.

3.30. У всех элементов квадратной матрицы A размера $n \times n$ изменили знак. Выразите определитель полученной матрицы через определитель матрицы A. Может ли определитель новой матрицы быть равным определителю матрицы A?

3.31. Все элементы квадратной матрицы A размера 5×5 разделили на 2. Выразите определитель полученной матрицы через определитель матрицы A.

3.32. Столбцы матрицы A записали в обратном порядке. Выразите определитель полученной матрицы через определитель матрицы A, если A – это квадратная матрица размера а) 5×5, б) 6×6, в) 7×7.

3.33. Сумма столбцов матрицы A с четными номерами равна сумме столбцов с нечетными номерами. Чему равен определитель матрицы A?

3.34. $\det A = 5$, $\det B = -2$. Чему равен $\det(A^T B)$?

3.35. A – квадратная матрица 4-го порядка, $\det(3A) = 162$. Чему равен $\det A$?

3.36. A и B – квадратные матрицы 3-го порядка, $\det A = -4$, $\det B = 3$. Чему равен $\det(2AB^2)$?

3.37. A и B – квадратные матрицы, $AB = 12I$, I – единичная матрица, $\det A^3 = 8$. Найдите $\det B$.

3.38. $\det A = 4 + 5i$, I – единичная матрица. Чему равен $\det(IA^*)$?

3.39. $\det A = 2 - i$. Чему равен $\det(A^2 A^*)$?

3.40. $\det A = 1 + 3i$, $\det B = 3 - 2i$. Чему равен $\det(AB)^*$?

Найдите значения a, при которых заданная матрица вырождена:

3.41. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & a \end{bmatrix}$. **3.42.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ a & 3 & 2 \\ a^2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$. **3.43.** $\begin{bmatrix} a & 2 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & a \end{bmatrix}$.

Используя свойства определителя, докажите, что заданные матрицы вырождены:

3.44. $\begin{bmatrix} x+2 & x & 1 \\ y+2 & y & 1 \\ z+2 & z & 1 \end{bmatrix}$. **3.45.** $\begin{bmatrix} (x+1)^2 & x^2+1 & x \\ (y+1)^2 & y^2+1 & y \\ (z+1)^2 & z^2+1 & z \end{bmatrix}$. **3.46.** $\begin{bmatrix} x+1 & x+4 & 1 \\ x+2 & x+5 & 1 \\ x+3 & x+6 & 1 \end{bmatrix}$.

3.47. $\begin{bmatrix} x^2+x+1 & x^2 & 2x & 1 \\ y^2+y+1 & y^2 & 2y & 1 \\ z^2+z+1 & z^2 & 2z & 1 \\ w^2+w+1 & w^2 & 2w & 1 \end{bmatrix}$. **3.48.** $\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ y & z & x & 1 \\ z & x & y & 1 \\ x+z & x+y & y+z & 2 \end{bmatrix}$.

3.49. Числа 7918, 3367, 4551, 8029 делятся на 37. Не вычисляя определитель, докажите, что число, равное $\det \begin{bmatrix} 7 & 9 & 1 & 8 \\ 3 & 3 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 5 & 1 \\ 8 & 0 & 2 & 9 \end{bmatrix}$, также делится на 37.

3.50. Докажите, что $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{bmatrix} = (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1).$

Используя только перестановки строк или столбцов матрицы, преобразуйте матрицу к верхней или нижней треугольной матрице и вычислите определитель:

3.51. $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 0 & 5 \\ 8 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **3.52.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. **3.53.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Вычислите определители матриц:

3.54. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$. **3.55.** $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. **3.56.** $\begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

3.57. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. **3.58.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **3.59.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -3 \\ 3 & 5 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 4 & 7 \end{bmatrix}$.

3.60. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -4 \\ -5 & -3 & -4 & 7 \\ 12 & 4 & 2 & -2 \\ -6 & -2 & -4 & 10 \end{bmatrix}$. **3.61.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. **3.62.** $\begin{bmatrix} 2 & -3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 4 & 2 \\ 4 & -3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & -4 \end{bmatrix}$.

3.63. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. **3.64.** $\begin{bmatrix} 8 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$. **3.65.*** $\begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{bmatrix}$.

3.66.* $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$. **3.67.*** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. **3.68.*** $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

3.69.* Вычислите определитель матрицы A порядка n, элементы которой определяются по правилу: а) $a_{ij} = i - j$ $(i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n)$;
б) $a_{ij} = i + j$ $(i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n)$.

3.70. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$. Найдите $\det(AB)$ и $\det(BA)$.

3.71. $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Найдите $\det(AA^T)$ и $\det(A^T A)$.

Решите системы линейных алгебраических уравнений, применяя формулы Крамера:

3.72. $\begin{cases} 11x + 8y = -2, \\ 9x + 7y = -3. \end{cases}$ **3.73.** $\begin{cases} \sqrt{3}x - y = 2, \\ x + \sqrt{3}y = 2\sqrt{3}. \end{cases}$

3.74. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -5, \\ 3x_1 + 4x_3 = -11, \\ x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$ **3.75.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = -9, \\ -3x_1 - 8x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 32, \\ 2x_1 + 8x_2 - 3x_3 - 3x_4 = -17, \\ x_1 + 6x_2 + x_3 - 6x_4 = 6. \end{cases}$

3.76. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$ **3.77.** $\begin{cases} -x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 = -4, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 = 8, \\ 3x_1 + 11x_2 + 2x_3 - 9x_4 = 17, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 7x_4 = 15. \end{cases}$

3.78. Расширенная матрица однородной системы линейных алгебраических уравнений имеет вид $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & t & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 0 \end{array}\right]$. При каком значении t система имеет бесконечно много решений?

3.79. Расширенная матрица однородной системы имеет вид

$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & t & 0 \\ 0 & -8 & 4 & 0 \end{array}\right]$. Сколько решений в зависимости от t имеет эта система?

Для всех значений a решите системы линейных уравнений:

3.80. $\left\{\begin{array}{rcl} ax+20y & = & 0, \\ 3x+4y & = & 0. \end{array}\right.$ **3.81.** $\left\{\begin{array}{rcl} x_1+2x_2-5x_3 & = & 0, \\ x_1+3x_2-2x_3 & = & 0, \\ 4x_1+ax_2-8x_3 & = & 0. \end{array}\right.$

Решите системы линейных алгебраических уравнений:

3.82. $\left\{\begin{array}{rcl} x_1+2x_2-2x_3 & = & 0, \\ -3x_1-x_2+3x_3 & = & 0, \\ 2x_1-x_2+x_3 & = & 0. \end{array}\right.$ **3.83.** $\left\{\begin{array}{rcl} -x_1-3x_2+2x_3 & = & 0, \\ -2x_1-7x_2+5x_3 & = & 0, \\ 2x_1+5x_2-3x_3 & = & 0. \end{array}\right.$

3.84. $\left\{\begin{array}{rcl} x_1+3x_2+5x_3+7x_4 & = & 0, \\ 3x_1+8x_2+13x_3+18x_4 & = & 0, \\ 2x_1+5x_2+8x_3+11x_4 & = & 0. \end{array}\right.$

3.85. $\left\{\begin{array}{rcl} x_1-4x_2+2x_3-10x_4 & = & 0, \\ x_1-8x_2+6x_3-22x_4 & = & 0, \\ 2x_1-12x_2+8x_3-32x_4 & = & 0. \end{array}\right.$

3.8. Ответы

3.1. -2. **3.2.** 0. **3.3.** -16. **3.4.** 1. **3.5.** $-1-5i$. **3.6.** -2. **3.7.** 0. **3.8.** $A_{21}=6$, $M_{32}=-6$. **3.9.** $A_{32}=4$, $M_{23}=7$. **3.10.** 18. **3.11.** 54. **3.12.** 24. **3.13.** -60. **3.14.** -36. **3.15.** -9. **3.16.** 20. **3.17.** -120. **3.18.** -18. **3.19.** $abcd$. **3.20.** -6. **3.21.** -60. **3.22.** 45. **3.23.** $a=-4$. **3.24.** $a=-2$. **3.25.** -8. **3.26.** -50. **3.27.** -24. **3.28.** -108. **3.29.** 48. **3.30.** $(-1)^n \det A$. Да, если n – четное число. **3.31.** $\frac{\det A}{32}$. **3.32.** а) $\det A$, б) $-\det A$, в) $-\det A$. **3.33.** 0. **3.34.** -10. **3.35.** 2. **3.36.** -288. **3.37.** 6. **3.38.** $4-5i$. **3.39.** $10-5i$. **3.40.** $9-7i$. **3.41.** $a=-3$.

3.42. $a=1$, $a=2$. **3.43.** $a=0$, $a=\pm 2$. **3.51.** $(-1)^2 \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} =$ $= 400$. **3.52.** $(-1)^2 \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = 18$. **3.53.** $(-1)^3 \det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$ $= -4$. **3.54.** 0. **3.55.** 7. **3.56.** 24. **3.57.** 55. **3.58.** 5. **3.59.** -9. **3.60.** 48. **3.61.** -63. **3.62.** -90. **3.63.** 141. **3.64.** 0. **3.65.** a^2b^2. **3.66.** 0. **3.67.** 9. **3.68.** -71. **3.69.** а) При $n=1$ $\det A=0$, при $n=2$ $\det A=1$, при $n\geq 3$ $\det A=0$; б) при $n=1$ $\det A=2$, при $n=2$ $\det A=-1$, при $n\geq 3$ $\det A=0$. **3.70.** $\det(AB)=8$, $\det(BA)=0$. **3.71.** $\det(AA^T)=0$,

$\det(A^TA) = 49$. **3.72.** $x = 2$, $y = -3$, $\Delta = 5$. **3.73.** $x = \sqrt{3}$, $y = 1$, $\Delta = 4$. **3.74.** $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = -5$, $\Delta = 2$. **3.75.** $x_1 = -2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$, $x_4 = -3$, $\Delta = 2$. **3.76.** $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 2$, $\Delta = 5$. **3.77.** $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$, $\Delta = -4$. **3.78.** $t = 3$. **3.79.** При $t = -3$ – бесконечно много решений, при $t \neq -3$ – единственное решение. **3.80.** При $a = 15$ $x = -4t$, $y = 3t$, $t \in \mathbf{R}$; при $a \neq 15$ $x = 0$, $y = 0$. **3.81.** При $a = 12$ $x_1 = 11t$, $x_2 = -3t$, $x_3 = t$, $t \in \mathbf{R}$; при $a \neq 12$ $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. **3.82.** $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. **3.83.** $x_1 = -\alpha$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = \alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$. **3.84.** $x_1 = \alpha + 2\beta$, $x_2 = -2\alpha - 3\beta$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. **3.85.** $x_1 = 2\alpha - 2\beta$, $x_2 = \alpha - 3\beta$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

4. МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

4.1. Матричные уравнения $AX = B$ и $XA = B$

Теоретический материал данного раздела подробно изложен в учебном пособии [1].

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \qquad\qquad\vdots & \ \ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{cases}$$

Введем обозначения: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$ – матрица системы, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ – матрица-столбец свободных членов, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ – матрица-столбец неизвестных. Найдем произведение AX:

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Видим, что выполняется равенство

$$AX = B.$$

Это означает, что систему линейных уравнений можно записать как одно матричное уравнение с заданными матрицами A и B и неизвестной матрицей-столбцом X. Такое матричное уравнение – это другая форма записи системы линейных уравнений. Для решения этого матричного уравнения методом Гаусса–Жордана записываем расширенную матрицу в виде $[A|B]$, где B – матрица-столбец свободных членов.

Рассмотрим матричное уравнение такого же вида:

$$AX = B,$$

где теперь A – заданная матрица размера $m \times n$; B – заданная матрица размера $m \times k$, а X – неизвестная матрица размера $n \times k$.

Количество столбцов матриц X и B совпадает. Запишем эти матрицы, выделив их столбцы:

$$X = [X_1\, X_2 \ldots X_k]\,, \quad B = [B_1\, B_2 \ldots B_k]\,.$$

Здесь X_j и B_j $(j = 1, \ldots, k)$ – столбцы матриц X и B соответственно.

Теорема 4.1. *Матричное уравнение $AX = B$ равносильно системе матричных уравнений:*

$$\begin{cases} AX_1 &= B_1, \\ AX_2 &= B_2, \\ \quad\vdots & \\ AX_k &= B_k. \end{cases}$$

Все матрицы $X_j, \quad B_j \quad (j = 1, \ldots, k)$ – это матрицы-столбцы. Каждое уравнение в этой системе представляет собой систему линейных уравнений с матрицей коэффициентов A. Поскольку все шаги алгоритма Гаусса–Жордана определяются исключительно матрицей A, все эти системы уравнений с расширенными матрицами $[A|B_j] \quad (j = 1, \ldots, k)$ можно решать одновременно, записав исходную расширенную матрицу в виде
$[A|B_1\, B_2 \ldots B_k] \quad \Leftrightarrow [A|B]$.

Если матричное уравнение $AX = B$ имеет единственное решение и в процессе применения метода Гаусса–Жордана столбцы не переставляются, то в итоге получится расширенная матрица вида

$$[I|X_1\, X_2 \ldots X_k] \quad \Leftrightarrow [I|X]$$

с искомой матрицей X справа от единичной матрицы.

Как и система линейных уравнений, матричное уравнение также может быть несовместным или иметь бесконечно много решений.

Пример 4.1. Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Решение. Неизвестной в этом уравнении является матрица

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \end{bmatrix}$$

размера 2×3. Здесь $X_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix}$, $X_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix}$, $X_3 = \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \end{bmatrix}$ – столбцы этой матрицы. Уравнение равносильно трем системам линейных уравнений:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} X_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} X_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} X_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

с неизвестными матрицами-столбцами X_1, X_2, X_3 соответственно.

Все эти системы будем решать одновременно методом Гаусса–Жордана:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ +\mathrm{I}\cdot(-2) \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & -7 & -8 & -9 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ :(-1) \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & 9 \end{array}\right] \begin{array}{c} +\mathrm{II}\cdot(-2) \\ \mathrm{II} \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & -10 & -11 & -12 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & 9 \end{array}\right].$$

Перестановок столбцов не было, значит,

$$X = \begin{bmatrix} -10 & -11 & -12 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Убедимся, что найденная матрица действительно является решением заданного матричного уравнения. Для этого подставим матрицу X в исходное уравнение:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 & -11 & -12 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Получилось верное равенство.

Пример 4.2. Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 14 & 20 \\ 21 & 30 \end{bmatrix}.$$

Решение. Искомой является матрица $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$ размера 2×2.

Заданное матричное уравнение равносильно двум системам линейных уравнений:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \\ 21 \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix}.$$

Решим эти системы методом Гаусса–Жордана:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 7 & 10 \\ 2 & 4 & 14 & 20 \\ 3 & 6 & 21 & 30 \end{array}\right] \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ +\mathrm{I}\cdot(-2) \\ +\mathrm{I}\cdot(-3) \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 7 & 10 \end{array}\right].$$

Первая система (с неизвестными x_{11} и x_{21}) преобразовалась к одному уравнению вида

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_{11} & x_{21} \end{array} \\ \hline \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \end{array}\right] \end{array} \Leftrightarrow x_{11} + 2x_{21} = 7,$$

а вторая (с неизвестными x_{12} и x_{22}) – к виду

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_{12} & x_{22} \end{array} \\ \hline \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 10 \end{array}\right] \end{array} \Leftrightarrow x_{12} + 2x_{22} = 10.$$

Обе системы имеют бесконечно много решений. Найдем их:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_{11} & = & 7 - 2\alpha, \\ x_{21} & = & \alpha, \end{array} \right. , \alpha \in \mathbf{R}, \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x_{12} & = & 10 - 2\beta, \\ x_{22} & = & \beta, \end{array} \right. , \beta \in \mathbf{R}.$$

Таким образом, заданное матричное уравнение имеет бесконечно много решений:

$$X = \begin{bmatrix} 7 - 2\alpha & 10 - 2\beta \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}$$

Выполним проверку, подставив матрицу X в исходное уравнение:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 - 2\alpha & 10 - 2\beta \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 - 2\alpha + 2\alpha & 10 - 2\beta + 2\beta \\ 14 - 4\alpha + 4\alpha & 20 - 4\beta + 4\beta \\ 21 - 6\alpha + 6\alpha & 30 - 6\beta + 6\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 14 & 20 \\ 21 & 30 \end{bmatrix}.$$

Для любых $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ получилось верное равенство.

Рассмотрим теперь матричное уравнение вида

$$XA = B$$

с заданными матрицами A и B и неизвестной матрицей X.

Для решения этого уравнения применим операцию транспонирования к обеим частям уравнения:

$$(XA)^T = B^T \quad \Leftrightarrow \quad A^T X^T = B^T.$$

Получится матричное уравнение рассмотренного ранее вида. Неизвестную матрицу X^T находим методом Гаусса–Жордана, а затем, транспонируя результат, получаем матрицу X:

$$X = \left(X^T\right)^T.$$

Пример 4.3. Решить матричное уравнение

$$X\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & -3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -3 & 1\\ -4 & -5 & 1\end{bmatrix}.$$

Решение. Транспонируем правую и левую части заданного уравнения:

$$\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & -3\\ -1 & 1\end{bmatrix}X^T=\begin{bmatrix}-2 & -4\\ -3 & -5\\ 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Найдем матрицу X^T методом Гаусса–Жордана:

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1 & -2 & -2 & -4\\ 2 & -3 & -3 & -5\\ -1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right]\begin{array}{c}\mathrm{I}\\ +\mathrm{I}\cdot(-2)\\ +\mathrm{I}\end{array}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{cc|cc}1 & -2 & -2 & -4\\ 0 & 1 & 1 & 3\\ 0 & -1 & -1 & -3\end{array}\right]\begin{array}{c}+\mathrm{II}\cdot 2\\ \mathrm{II}\\ +\mathrm{II}\end{array}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right].$$

Удалим из расширенной матрицы нулевую строку и получим матрицу $X^T=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$.

Найдем теперь искомую матрицу: $X=(X^T)^T=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$.

Проверка:

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & -3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -3 & 1\\ -4 & -5 & 1\end{bmatrix}.$$

Равенство выполняется.

Пример 4.4. Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & -3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-14 & -18 & 4\\ -2 & -3 & 1\end{bmatrix}.$$

Решение. Неизвестной в этом уравнении является матрица X размера 2×2.

Пусть $X\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & -3 & 1\end{bmatrix}=Y$, где Y – матрица размера 2×3. Тогда исходное уравнение равносильно системе матричных уравнений:

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}Y=\begin{bmatrix}-14 & -18 & 4\\ -2 & -3 & 1\end{bmatrix},\\ X\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & -3 & 1\end{bmatrix}=Y.\end{cases}$$

Решим сначала первое уравнение системы с неизвестной матрицей Y методом Гаусса–Жордана:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 3 & -14 & -18 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ +\mathrm{I}\cdot(-2) \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 3 & -14 & -18 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & 5 & -1 \end{array}\right] : (-1) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 3 & -14 & -18 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & -5 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} +\mathrm{II}\cdot(-3) \\ \mathrm{II} \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -5 & 1 \end{array}\right].$$

Искомая матрица

$$Y = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -4 & -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Подставим теперь матрицу Y во второе уравнение:

$$X \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -4 & -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Получилось матричное уравнение, решенное в примере 4.3.

Искомая матрица $\quad X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$

Для проверки подставим матрицу X в исходное уравнение:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & -18 & 4 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Получилось верное равенство.

4.2. Обратная матрица

Пусть A – квадратная матрица порядка n.

Определение 4.1. *Квадратная матрица X порядка n называется обратной к матрице A, если выполняется равенство $AX = I$.*

Обратную матрицу обозначают A^{-1}, т. е. $AA^{-1} = I$.

Теорема 4.2. *Для матрицы A существует единственная обратная матрица A^{-1} тогда и только тогда, когда* $\det A \neq 0$ *(A – невырожденная матрица).*

Если для матрицы A существует обратная матрица, то справедливо равенство $A^{-1}A = I$.

Для нахождения обратной матрицы A^{-1} достаточно решить матричное уравнение $AX = I$.

Пример 4.5. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Найти обратную матрицу.

Решение. Решим матричное уравнение $AX = I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \\ +\mathrm{I} \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} +\mathrm{II} \\ \mathrm{II} \\ +\mathrm{II} \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ :2 \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \begin{array}{c} +\mathrm{III}\cdot(-1) \\ +\mathrm{III}\cdot(-1) \\ \mathrm{III} \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Искомая матрица

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Проверка: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

Укажем другой способ нахождения обратной матрицы A^{-1}.

Определение 4.2. *Пусть* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ *– квадратная матрица.*

Если каждый элемент матрицы A заменить на его алгебраическое дополнение, а затем матрицу транспонировать, то получится матрица

$$A^{\Pi} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^T,$$

которая называется присоединенной к матрице A.

Теорема 4.3. *Если A – невырожденная матрица, то*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{\Pi}.$$

Пример 4.6. $A = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$. Найти обратную матрицу.

Решение. $\det A = \det \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = 27 - 35 = -12 \neq 0.$

Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} 3 = 3, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} 5 = -5,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} 7 = -7, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} 9 = 9.$$

Найдем

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{\Pi} = \frac{1}{-12} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -7 & 9 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{-12} \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -5 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{7}{12} \\ \frac{5}{12} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

Некоторые свойства обратной матрицы.

Пусть A – невырожденная квадратная матрица. Тогда:

1. *Для матрицы A^{-1} существует обратная матрица*

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A.$$

2. *Для матрицы A^T существует обратная матрица*

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T.$$

3. *Для матрицы A^n существует обратная матрица*

$$(A^n)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^n.$$

4. *Определители матриц A и A^{-1} связаны соотношением:*

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

5. *Пусть A и B – невырожденные квадратные матрицы, тогда*

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}.$$

Если A – невырожденная квадратная матрица, то решением матричного уравнения $AX = B$ является матрица $X = A^{-1} B$, а решением матричного уравнения $XA = B$ – матрица $X = BA^{-1}$.

4.3. Упражнения

Запишите систему линейных уравнений в виде матричного уравнения $AX = B$, где X – искомая матрица-столбец:

4.1. $\begin{cases} 3x - 5y = 1, \\ 7x + 8y = 22. \end{cases}$ **4.2.** $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$

Решите матричное уравнение:

4.3. $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 7 & 18 \end{bmatrix}$. **4.4.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$. **4.5.** $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -8 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$.

4.6. $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -5 & -8 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}$. **4.7.** $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$.

4.8. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 12 & 14 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. **4.9.** $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

4.10. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$. **4.11.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 5 \\ -4 & -2 & 0 \\ 5 & -2 & -9 \end{bmatrix}$.

Для всех значений a решите матричное уравнение:

4.12. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -6 & a \end{bmatrix}$. **4.13.** $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ a & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$.

4.14. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & a \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$.

Решите матричное уравнение:

4.15. $X \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$. **4.16.** $X \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

4.17. $X \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -7 & 5 \\ -13 & 9 \end{bmatrix}$. **4.18.** $X \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 10 & -2 \\ -6 & 12 & 0 \end{bmatrix}$.

4.19. $X \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Решите матричное уравнение:

4.20. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}$.

4.21. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ -17 & -26 & -9 \\ 9 & 14 & 5 \end{bmatrix}$.

Решите систему матричных уравнений:

4.22. $\begin{cases} X+Y &= A, \\ X-Y &= B, \end{cases}$ где $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -5 & -9 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

4.23. $\begin{cases} 2X+Y &= A, \\ 5X+3Y &= B, \end{cases}$ где $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 15 \end{bmatrix}$.

4.24. Решите систему матричных уравнений $\begin{cases} XA_1 &= C_1, \\ A_2X+B_2Y &= C_2, \end{cases}$ где

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & -7 & -7 \\ -2 & 3 & 10 & 16 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -15 & -19 \\ -2 & 6 & 1 & 5 \\ -1 & -3 & 23 & 31 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ -3 & 10 & -4 & -5 \\ -3 & 8 & -7 & -2 \\ -3 & 11 & -3 & -5 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} -10 & 11 & -3 \\ 4 & -40 & 41 \\ 5 & -34 & 29 \\ 18 & -37 & 32 \end{bmatrix}.$$

При каких значениях a для матрицы A существует единственная обратная матрица:

4.25. $A = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 3 & a^2 \end{bmatrix}$. **4.26.** $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1-i & 2i \end{bmatrix}$. **4.27.** $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

4.28. Известно, что $\det A = -3$, $\det B = 5$. Существует ли для матрицы AB^2 обратная матрица? Ответ обоснуйте.

4.29. Известно, что $\det A = 5$, $\det B = 0$. Существует ли для матрицы A^3B обратная матрица? Ответ обоснуйте.

4.30. Известно, что $\det A = 7 - 2i$. Верно ли, что для матрицы AA^* существует единственная обратная матрица? Ответ обоснуйте.

4.31. В квадратной матрице A первая и вторая строки совпадают. Существует ли для матрицы A обратная матрица? Ответ обоснуйте.

4.32. В матрице A^3 первый и последний столбцы совпадают. Существует ли для матрицы A обратная матрица? Ответ обоснуйте.

4.33. В квадратной матрице A сумма столбцов с четными номерами равна первому столбцу. Существует ли для матрицы A^2 обратная матрица? Ответ обоснуйте.

4.34. Матрица $X = A^{-1}B^{-1}$ является решением уравнения $AX = B$. Найдите B^2.

4.35. Пусть A и B – невырожденные квадратные матрицы. Найдите матрицу $(A \cdot B^{-1})^{-1} \cdot A^2 \cdot (B \cdot A)^{-1}$.

4.36. Пусть A и B – невырожденные квадратные матрицы. Решите уравнение $(A \cdot I)^{-1} \cdot (B \cdot A^{-1})^{-1}X = I$.

4.37. Для невырожденной квадратной матрицы A выполняется равенство

$A = A^2$. Найдите A^{-1}.

4.38. Для невырожденной квадратной матрицы A выполняется равенство $A = A^3$. Найдите A^{-1}.

4.39.* Известно, что $A^2 = \Theta$ (Θ – нулевая матрица). Докажите, что $A+I$ и $A-I$ – невырожденные матрицы.

4.40.* Для матрицы A выполняется равенство $A^2 - 3A + 2I = \Theta$ (Θ – нулевая матрица). Докажите, что A – невырожденная матрица.

4.41.* A – невырожденная матрица. Докажите, что а) $(A^{-1})^{-1} = A$, б) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, в) $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.

4.42.* A и B – невырожденные квадратные матрицы одинакового порядка. Докажите, что $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

4.43. Является ли матрица $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$ обратной к матрице $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$?

Для матрицы 2-го порядка найдите обратную матрицу:

4.44. $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. **4.45.** $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. **4.46.** $\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$. **4.47.** $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

4.48. Используя присоединенную матрицу, найдите для матрицы $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ обратную матрицу.

Для матрицы 3-го порядка найдите обратную матрицу:

4.49. $\begin{bmatrix} 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **4.50.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. **4.51.** $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

4.52. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. **4.53.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 11 \\ -2 & -3 & -7 \end{bmatrix}$. **4.54.** $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

4.55. $\begin{bmatrix} -2 & -5 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

Для матрицы 4-го порядка найдите обратную матрицу:

4.56. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. **4.57.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **4.58.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

4.59. $\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&5&6\\0&0&1&7\\0&0&0&1\end{bmatrix}$. **4.60.** $\begin{bmatrix}1&-1&1&-3\\-1&2&-4&2\\-2&1&2&8\\1&-4&11&2\end{bmatrix}$. **4.61.** $\begin{bmatrix}1&1&2&1\\-2&-1&-3&0\\1&0&2&1\\3&2&6&4\end{bmatrix}$.

4.4. Ответы

4.1. $\begin{bmatrix}3&-5\\7&8\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\22\end{bmatrix}$. **4.2.** $\begin{bmatrix}4&1&-1\\1&-2&3\\5&-3&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\6\\9\end{bmatrix}$. **4.3.** $\begin{bmatrix}-1&0\\1&2\end{bmatrix}$. **4.4.** $\begin{bmatrix}-2&-1\\1&2\end{bmatrix}$. **4.5.** $\varnothing$. **4.6.** $\begin{bmatrix}-2&1\\3&2\end{bmatrix}$. **4.7.** $\begin{bmatrix}-2+3\alpha&4+3\beta\\\alpha&\beta\end{bmatrix}$, $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$. **4.8.** $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$. **4.9.** $\begin{bmatrix}2&1&0\\0&1&2\end{bmatrix}$. **4.10.** $\begin{bmatrix}1&1\\2&-1\\3&1\end{bmatrix}$. **4.11.** $\begin{bmatrix}0&1&2\\-1&0&1\\-2&-1&0\end{bmatrix}$. **4.12.** Если $a=9$, то $X=\begin{bmatrix}-2-2\alpha&3-2\beta\\\alpha&\beta\end{bmatrix}$, $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$; если $a\neq 9$, то $\varnothing$. **4.13.** Если $a=-1$, то $X=\begin{bmatrix}2+2\alpha&1+2\beta\\\alpha&\beta\end{bmatrix}$, $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$; если $a\neq -1$, то $X=\begin{bmatrix}0&0\\-1&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$. **4.14.** Если $a=6$, то $\varnothing$, если $a\neq 6$, то $X=\begin{bmatrix}-3&\frac{a+6}{a-6}\\0&\frac{-4}{a-6}\end{bmatrix}$. **4.15.** $\begin{bmatrix}-2&0\\1&2\end{bmatrix}$. **4.16.** $\begin{bmatrix}3&2\\1&0\end{bmatrix}$. **4.17.** $\begin{bmatrix}-1&0\\1&2\\3&4\end{bmatrix}$. **4.18.** $\begin{bmatrix}-2&1\\0&3\end{bmatrix}$. **4.19.** $\begin{bmatrix}-1&1\\1&2\end{bmatrix}$. **4.20.** $\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}$. **4.21.** $\begin{bmatrix}-1&0\\1&2\end{bmatrix}$. **4.22.** $X=\begin{bmatrix}-2&-3\\4&4\end{bmatrix}$, $Y=\begin{bmatrix}3&6\\1&3\end{bmatrix}$. **4.23.** $X=\begin{bmatrix}-1&4\\2&0\end{bmatrix}$, $Y=\begin{bmatrix}4&-7\\-3&5\end{bmatrix}$. **4.24.** $X=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\-2&-1&2\end{bmatrix}$, $Y=\begin{bmatrix}-2&1&-1\\2&-2&2\\2&2&-1\\2&1&-2\end{bmatrix}$, $C_2-A_2X=\begin{bmatrix}-2&12&-11\\8&-36&37\\4&-35&30\\12&-36&38\end{bmatrix}$. **4.25.** При $a\neq 6$ или $a\neq -6$. **4.26.** При $a\neq -1+i$. **4.27.** При $a\neq 1$ или $a\neq -1$. **4.28.** Да, $\det(AB^2)=-75\neq 0$. **4.29.** Нет, $\det(A^3B)=125\cdot 0=0$. **4.30.** Да, $\det(AA^*)=53\neq 0$. **4.31.** Нет, $\det A=0$. **4.32.** Нет, $\det A=0$. **4.33.** Нет, $\det A=0$. **4.34.** $B^2=I$. **4.35.** I. **4.36.** $X=B$. **4.37.** $A^{-1}=I$. **4.38.** $A^{-1}=A$. **4.39.** Указание: найдите произведение $(A-I)(A+I)$. **4.40.** Указание: преобразуйте равенство к виду $A(A-3I)=-2I$. **4.43.** Да, $AB=I$.

4.44. $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$. **4.45.** $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. **4.46.** $\begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}$. **4.47.** $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

4.48. $\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$. **4.49.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{7} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$.

4.50. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. **4.51.** $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. **4.52.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

4.53. $\begin{bmatrix} 2 & -5 & -7 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. **4.54.** $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$. **4.55.** $\begin{bmatrix} -9 & 23 & -40 \\ 3 & -8 & 14 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$.

4.56. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. **4.57.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **4.58.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -8 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. **4.59.**

$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 & -41 \\ 0 & 1 & -5 & 29 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **4.60.** $\begin{bmatrix} 6 & 7 & 0 & 2 \\ 12 & 0 & 5 & -2 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. **4.61.** $\begin{bmatrix} -8 & -2 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Список литературы

1. Линейная алгебра: учеб. пособие / А. Л. Белопольский, Н. А. Бодунов, А. Л. Меркулов, А. П. Щеглова СПб.: Изд-во СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, 2012. 140 с.

2. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Физматлит, 2008. 312 с.

3. Бондарев А. С., Червинская Н. М. Линейная алгебра в примерах и задачах: учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, 2002. 139 с.

4. Типовые расчеты по курсу „Алгебра и геометрия“: учеб. пособие / А. Л. Белопольский, Н. А. Бодунов, Е. З. Боревич и др. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, 2017. 80 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Бодунов Николай Александрович
Дороденков Александр Александрович
Колбина Светлана Анатольевна
Червинская Нина Михайловна

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Часть 1

Учебное пособие

Редактор Э. К. Долгатов

Подписано в печать 14.09.20. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Печать цифровая. Гарнитура „Times New Roman“. Печ. л. 4,0.
Тираж 594 экз. Заказ .

Издательство СПбГЭТУ „ЛЭТИ“
197376, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5