

**Федеральное агентство по образованию**

---

**Санкт-Петербургский государственный электротехнический  
университет „ЛЭТИ“**

---

**А. Л. Белопольский    Н. А. Бодунов  
Н. М. Червинская**

**ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ ПО КУРСУ  
„АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ“**

**Санкт-Петербург  
2008**

**Федеральное агентство по образованию**

---

**Санкт-Петербургский государственный электротехнический  
университет „ЛЭТИ“**

---

**А. Л. Белопольский    Н. А. Бодунов  
Н. М. Червинская**

**ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ ПО КУРСУ  
„АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ“**

**Учебное пособие**

**Санкт-Петербург  
Издательство СПбГЭТУ „ЛЭТИ“  
2008**

УДК 514.12 : 512(07)  
ББК В14я7 + В15я7  
Б43

Белопольский А. Л., Бодунов Н. А., Червинская Н. М. Типовые  
Б43 расчеты по курсу „Алгебра и геометрия“: Учеб. пособие.  
СПб.: Изд-во СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, 2008. 92 с.  
ISBN 5-7629-0888-7

Описываются типовые расчеты, предлагаемые студентам первого курса для самостоятельного выполнения. Каждый типовой расчет предваряется необходимым для его выполнения подробным изложением теории (без доказательств). Кроме того даются ссылки на учебники и учебные пособия, в которых можно найти доказательство приведенных теорем и утверждений. В конце каждого раздела приводится вариант задания с его полным решением. Пособие соответствует унифицированной рабочей программе дисциплины „Алгебра и геометрия“ для студентов факультетов электротехники и автоматизации, электроники, экономики и менеджмента и открытого факультета.

Предназначено для студентов всех направлений и специальностей факультетов электротехники и автоматизации, электроники, экономики и менеджмента и открытого факультета.

УДК 514.12 : 512(07)  
ББК В14я7 + В15я7

Рецензенты: кафедра прикладной математики и информатики  
СПбГАСУ; д-р физ.-мат. наук Н. В. Смородина (СПбГУ).

Утверждено  
редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного пособия

## **ВВЕДЕНИЕ**

Созданный на кафедре ВМ–1 компьютерный пакет индивидуальных типовых расчетов (ТР) с возможностью генерации любого числа различных вариантов способствует активизации самостоятельной работы студентов и более глубокому усвоению теоретического материала, излагаемого на лекциях.

Данное учебное пособие посвящено подробному описанию ТР, которые предлагаются студентам для самостоятельного выполнения. В издании содержатся необходимые теоретические сведения и примеры выполнения конкретных ТР.

В учебном пособии рассмотрены 7 ТР, предлагаемых студентам при изучении курса „Алгебра и геометрия“ и соответствующие унифицированной рабочей программе:

1. Комплексные числа (ТР 2.1).
2. Решение систем линейных уравнений (ТР 1.1).
3. Решение матричных уравнений и нахождение обратной матрицы (ТР 1.2).
4. Аналитическая геометрия (ТР 1.3. (д. ф.) и ТР 1.3. (о. ф.)).
5. Собственные числа и собственные векторы матриц. Приведение уравнений кривых второго порядка к каноническому виду (ТР 1.4).
6. Решение задачи Коши для систем линейных дифференциальных уравнений и линейных дифференциальных уравнений операционным методом (ТР 2.9).
7. Решение задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений со специальной правой частью (ТР 2.10).

Студенту выдается распечатка, содержащая номер варианта и условие ТР. Алгоритмы выполнения ТР обсуждаются на лекциях и на соответствующих практических занятиях. Все ТР ориентированы на использование калькуляторов. Студенты могут выполнять ТР с использованием программ, реализующих заданный алгоритм, при условии, что приложена распечатка с текстом программы, результатами вычислений и студент может пояснить работу всех операторов и программы в целом.

Отчет по ТР должен включать в себя: 1) стандартный титульный лист; 2) условие ТР (распечатку с условием ТР, студенты наклеивают в самом начале своего отчета); 3) содержание ТР (в этом разделе формулируется математическая задача, которая решается в ТР); 4) достаточно подробное описание выполнения ТР; 5) ответы на все пункты задания.

Студентам настоятельно рекомендуется (везде, где это возможно) делать проверку полученных результатов. В примерах конкретных ТР пособии даны указания относительно выполнения проверок.

# 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Подробное изложение теории комплексных чисел (КЧ) с доказательствами, необходимое для выполнения ТР данного раздела, можно найти в учебном пособии [1].

## 1.1. Определение КЧ. Основные свойства КЧ

Рассмотрим множество  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  всех упорядоченных пар  $(x, y)$ , где  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}$  ( $\mathbb{R}$  – множество вещественных чисел). При этом, естественно, если  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , то

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \iff \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2. \end{cases} \quad (1.1)$$

На множестве  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  определим две операции:

1) сложение

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2); \quad (1.2)$$

2) умножение

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1). \quad (1.3)$$

**Определение 1.1.** Множество всех упорядоченных пар вещественных чисел с определенными на нем операциями сложения и умножения согласно (1.2), (1.3) называется множеством КЧ и обозначается  $\mathbb{C}$ .

Таким образом, условие  $z \in \mathbb{C}$  означает, что  $z = (x, y)$ , где  $x \in \mathbb{R}$  и  $y \in \mathbb{R}$ .

**Определение 1.2.** Пусть  $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ . Вещественное число  $x$  называется вещественной частью КЧ  $z$  и обозначается  $x = \operatorname{Re}(z)$ , а вещественное число  $y$  – мнимой частью КЧ  $z$  и обозначается  $y = \operatorname{Im}(z)$ .

В этих обозначениях условие (1.1), определяющее равенство двух комплексных чисел  $z_1 = (x_1, y_1)$  и  $z_2 = (x_2, y_2)$ , запишется в виде

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} \operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2), \\ \operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2). \end{cases}$$

Сложение и умножение КЧ обладают следующими свойствами:

- 1) коммутативность сложения:  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ ;
- 2) ассоциативность сложения:  $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ ;
- 3) коммутативность умножения:  $z_1z_2 = z_2z_1$ ;
- 4) ассоциативность умножения:  $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$ ;
- 5) дистрибутивность умножения относительно сложения:  $(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$ .

**Утверждение 1.1.** Для любого  $z \in \mathbb{C}$ :

$$z + (0, 0) = z; \quad (1.4)$$

$$z(0, 0) = (0, 0); \quad (1.5)$$

$$z(1, 0) = z. \quad (1.6)$$

Формулы (1.4) – (1.6) показывают, что КЧ  $(0, 0)$  и  $(1, 0)$  в множестве  $\mathbb{C}$  играют роль, аналогичную роли чисел  $0$  и  $1$  в множестве  $\mathbb{R}$ .

Рассмотрим теперь вопрос об обратных операциях (вычитания и деления) в множестве  $\mathbb{C}$ .

**Определение 1.3.** Разностью КЧ  $z_1$  и  $z_2$  называется такое КЧ  $z$  (пишут  $z = z_1 - z_2$ ), что  $z_1 = z_2 + z$ .

Пусть  $z_1 = (x_1, y_1)$ ,  $z_2 = (x_2, y_2)$  и  $z = (x, y)$ . Тогда

$$z_1 = z_2 + z \iff \begin{cases} x_1 = x_2 + x, \\ y_1 = y_2 + y \end{cases} \iff \begin{cases} x = x_1 - x_2, \\ y = y_1 - y_2. \end{cases}$$

Таким образом, разностью чисел  $z_1 = (x_1, y_1)$  и  $z_2 = (x_2, y_2)$  является число

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \quad (1.7)$$

и эта разность определена однозначно.

Для любого КЧ  $z$  определим противоположное ему число  $(-z)$  равенством

$$z + (-z) = (0, 0).$$

Если  $z = (x, y)$ , то  $(-z) = (0, 0) - z = (0, 0) - (x, y)$ . С учетом (1.7)

$$(-z) = (-x, -y).$$

Ясно, что

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2). \quad (1.8)$$

**Определение 1.4.** Частным от деления КЧ  $z_1$  на КЧ  $z_2 \neq (0, 0)$  называется такое КЧ  $z$  (пишут  $z = \frac{z_1}{z_2}$ ), что

$$z_1 = z_2 z. \quad (1.9)$$

**Замечание 1.1.** В этом определении ограничение  $z_2 \neq (0, 0)$  естественно, поскольку при  $z_2 = (0, 0)$  уравнение (1.9) принимает вид  $z_1 = (0, 0)z$  и, как следует из (1.5), при  $z_1 \neq (0, 0)$  оно решений не имеет, а при  $z_1 = (0, 0)$  этому уравнению удовлетворяет любое число  $z \in \mathbb{C}$ , т. е. в обоих случаях поиск частного теряет смысл.

Пусть  $z_1 = (x_1, y_1)$ ,  $z_2 = (x_2, y_2) \neq (0, 0)$  и  $z = (x, y)$ . Тогда

$$z_1 = z_2 z \iff \begin{cases} x_1 = x_2 x - y_2 y, \\ y_1 = y_2 x + x_2 y. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим ее единственное решение

$$x = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Таким образом, при  $z_2 \neq (0, 0)$  ( $x_2^2 + y_2^2 > 0$ ) частное  $\frac{z_1}{z_2}$  существует и однозначно определено:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1, y_1)}{(x_2, y_2)} = \left( \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right). \quad (1.10)$$

Учитывая особую роль в множестве  $\mathbb{C}$  числа  $(1, 0)$  (см.(1.6)), аналогичную роли числа  $1$  в множестве  $\mathbb{R}$ , определим теперь для любого числа  $z = (x, y) \neq (0, 0)$  обратное ему число  $z^{-1}$  равенством  $z z^{-1} = (1, 0)$  (вспомним, что в  $\mathbb{R}$ :  $xx^{-1} = 1$ ).

С учетом (1.10)

$$z^{-1} = \frac{(1, 0)}{z} = \frac{(1, 0)}{(x, y)} = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right).$$

Покажем, что

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} \quad (z_2 \neq (0, 0)).$$

Для этого обозначим  $z = z_1 z_2^{-1}$  и убедимся в справедливости (1.9):

$$z_2 z = z_2 z_1 z_2^{-1} = z_2 z_2^{-1} z_1 = (1, 0) z_1 = z_1.$$

**Утверждение 1.2.** Справедливы следующие равенства:

$$1) \frac{z_1 + z_2}{z_3} = \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3}, \quad z_3 \neq (0, 0);$$

$$2) (z^{-1})^{-1} = z;$$

$$3) (z_1 z_2)^{-1} = z_1^{-1} z_2^{-1}.$$

По аналогии с  $\mathbb{R}$  в множестве  $\mathbb{C}$  определим  $z^n$  при  $n \in \mathbb{Z}$  – степень числа  $z$  с целым показателем:

1) если  $n \in \mathbb{N}$ , то  $z^n = z \cdots z$  (произведение  $n$  множителей);

2) если  $z \neq (0, 0)$ , то  $z^0 = (1, 0)$ ;

3) если  $z \neq (0, 0)$ , то  $z^{-n} = (z^n)^{-1}$  при  $n \in \mathbb{N}$ .

Из утверждения 1.2 следует, что

$$z^{-n} = (z^{-1})^n.$$

Рассмотрим теперь КЧ вида  $z = (x, 0)$ . С учетом (1.1)

$$(x_1, 0) = (x_2, 0) \iff x_1 = x_2.$$

Кроме того, для КЧ такого вида справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} (x_1, 0) + (x_2, 0) &= (x_1 + x_2, 0), \\ (x_1, 0) - (x_2, 0) &= (x_1 - x_2, 0), \\ (x_1, 0)(x_2, 0) &= (x_1 x_2, 0), \\ \frac{(x_1, 0)}{(x_2, 0)} &= \left( \frac{x_1}{x_2}, 0 \right) \text{ при } x_2 \neq 0, \\ (x, 0)^{-1} &= \left( \frac{1}{x}, 0 \right) \text{ при } x \neq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, арифметические операции с КЧ вида  $(x, 0)$  сводятся к аналогичным операциям с их вещественными частями, т. е. с вещественными числами. Эти свойства КЧ вида  $(x, 0)$  позволяют отождествить КЧ  $z = (x, 0)$  с вещественным числом  $x$ . Итак, впредь будем считать, что

$$(x, 0) = x. \quad (1.11)$$

Тогда, в частности, получаем:

- 1)  $(0, 0) = 0$ ;
- 2)  $(1, 0) = 1$ ;
- 3)  $z^{-1} = \frac{(1, 0)}{z} = \frac{1}{z}$  при  $z \neq 0$  и  $\frac{1}{(x, 0)} = \frac{1}{x}$  при  $x \neq 0$ .

Кроме того,  $(-1)z = -z$ , так как если  $z = (x, y)$ , то  $(-1)(x, y) = (-1, 0)(x, y) = (-x, -y) = -z$ .

Таким образом, множество КЧ  $\mathbb{C}$  можно рассматривать как расширение множества вещественных чисел  $\mathbb{R}$  (множество  $\mathbb{R}$  входит в множество  $\mathbb{C}$  в качестве подмножества, причем арифметика КЧ (рассмотренные ранее действия над ними) согласуется с арифметикой вещественных чисел).

Теперь рассмотрим КЧ вида  $z = (0, y)$ , для которых  $\operatorname{Re}(z) = 0$ . Их называют мнимыми комплексными числами. При  $y = 1$  легко находим, что

$$(0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Это означает, в частности, что мнимое КЧ  $z = (0, 1)$  является корнем квадратного уравнения

$$z^2 + 1 = 0, \quad (1.12)$$

которое не имеет решений в множестве вещественных чисел.

**Определение 1.5.** КЧ  $(0, 1)$  называется мнимой единицей и обозначается буквой  $i$ :

$$i = (0, 1). \quad (1.13)$$

Как было показано ранее,  $i^2 = -1$ . Легко вычислить, что  $(-i)^2 = (0, -1)^2 = -1$  и, значит, число  $(-i)$ , как и число  $i$ , является корнем уравнения (1.12).

Найдем произведение вещественного числа  $y$  на мнимую единицу  $i$ , используя соглашения (1.11) и (1.13):

$$yi = (y, 0)(0, 1) = (0, y). \quad (1.14)$$

Кроме того, из (1.11) и (1.14) следует, что

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + yi. \quad (1.15)$$

**Определение 1.6.** Представление КЧ  $z = (x, y)$  в виде  $z = x + yi$  называется его алгебраической формой записи.

**Замечание 1.2.** Поскольку  $yi = iy$ , можно записать число  $z$  в виде  $z = x + iy$  – это другой вариант алгебраической формы записи числа  $z$ . В дальнейшем используем оба варианта и различия между ними не делаем.

Формула (1.15) означает, что любое КЧ  $z = (x, y)$  можно рассматривать как сумму двух КЧ – вещественного  $x = \operatorname{Re}(z)$  и мнимого  $yi$ , которое, в свою очередь, является, согласно (1.14), произведением вещественного  $y = \operatorname{Im}(z)$  на мнимую единицу  $i$  ( $y$  можно считать коэффициентом при  $i$  в сумме  $x + yi$ ).

Использование алгебраической формы представления КЧ существенно упрощает вычисления. При этом необходимо учитывать основное равенство  $i^2 = -1$ .

Пример

$$\frac{2+3i}{1-2i} = \frac{(2+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{2+3i+4i-6}{1^2+2^2} = -\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i.$$

Введем еще одну операцию в множестве  $\mathbb{C}$ .

**Определение 1.7.** Число  $\bar{z} = (x, -y) = x - yi$  называется комплексно-сопряженным числу  $z = (x, y) = x + yi$ , а нахождение  $\bar{z}$  по числу  $z$  называют операцией комплексного сопряжения.

Перечислим основные свойства этой операции:

- 1) если  $\bar{z}_1 = z_2$ , то  $z_1 = \bar{z}_2$  или, иначе,  $(\bar{\bar{z}}) = z$ ;
- 2)  $\bar{z} = z \iff (\operatorname{Im}(z) = 0)$ , т. е.  $z \in \mathbb{R}$ ;
- 3)  $\bar{z} = -z \iff \operatorname{Re}(z) = 0$ ;
- 4)  $\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ ;
- 5)  $\overline{(z_1 - z_2)} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$ ;
- 6)  $\overline{(z_1 z_2)} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ ;

- 7)  $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \quad z_2 \neq 0;$   
 8)  $\overline{(z^n)} = (\bar{z}^n).$

## 1.2. Модуль и аргумент КЧ, тригонометрическая и показательная формы записи КЧ

Введем на плоскости декартову прямоугольную систему координат и каждому КЧ  $z = x + iy$  поставим в соответствие (взаимно-однозначное) точку плоскости с координатами  $(x; y)$ . Эту точку обозначим  $z$ , так же как и соответствующее ей число. вещественным числам (т. е. КЧ вида  $z = x + i0$ ) соответствуют при этом точки оси абсцисс, и поэтому ось абсцисс будем называть также вещественной осью. Точкам оси ординат соответствуют КЧ вида  $z = 0 + iy = iy$ ; эту ось назовем мнимой осью. Началу координат, очевидно, соответствует число  $0 + i0$  (или просто 0).

Плоскость с фиксированной декартовой прямоугольной системой координат, на которой изображаются описанным образом комплексные числа, будем называть комплексной плоскостью (плоскостью  $\mathbb{C}$ ).

Отметим, что точки  $z$  и  $(-z)$  симметричны относительно начала координат, а точки  $z$  и  $\bar{z}$  симметричны относительно вещественной оси.

Наряду с изображением КЧ точками на плоскости  $\mathbb{C}$  удобно с каждым КЧ  $z$  связывать вектор  $\overrightarrow{Oz}$ , идущий из начала координат в точку  $z$  (рис. 1.1).

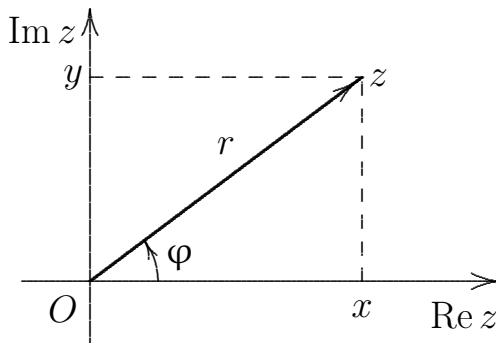


Рис. 1.1

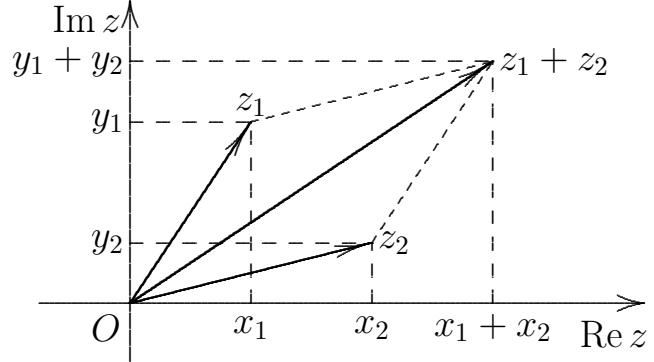


Рис. 1.2

Ясно, что соответствие между множеством таких векторов и множеством КЧ также является взаимно-однозначным. При этом сумме  $z_1 + z_2$  КЧ  $z_1$  и  $z_2$  соответствует вектор, равный сумме векторов, отвечающих числам  $z_1$  и  $z_2$  (рис. 1.2).

**Определение 1.8.** Длина  $r$  вектора  $\overrightarrow{Oz}$  называется модулем КЧ  $z$  и обозначается  $|z|$  (рис. 1.1).

Ясно, что модуль КЧ  $z = x + iy$  определен однозначно, при этом:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0 \quad (1.16)$$

и  $r = |z| = 0 \iff z = 0$ .

**Определение 1.9.** Пусть  $z = x + iy$ ,  $r = |z| > 0$ . Угол  $\varphi$  между положительной полуосью вещественной оси и вектором  $\overrightarrow{Oz}$ , измеряемый в радианах и отсчитываемый от вещественной оси против хода часовой стрелки, называется аргументом КЧ  $z$  и обозначается  $\varphi = \arg(z)$ . Для КЧ  $z = 0$  аргумент не определяется.

Из определения ясно, что значение аргумента лежит в пределах  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

**Замечание 1.3.** Иногда значение аргумента из промежутка  $[0, 2\pi)$  называют его главным значением. При этом, если  $\varphi_0$  – главное значение аргумента, то другими его допустимыми значениями служат

$$\varphi = \varphi_0 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.17)$$

Отсюда, в частности, следует условие равенства ненулевых КЧ:

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} |z_1| = |z_2|, \\ \exists k \in \mathbb{Z} : \arg(z_1) = \arg(z_2) + 2\pi k, \end{cases} \quad (1.18)$$

где  $\arg(z_1)$  и  $\arg(z_2)$  – какие-либо фиксированные значения аргументов чисел  $z_1$  и  $z_2$ .

Если заданы модуль  $r$  и аргумент  $\varphi$  КЧ  $z = x + iy$ , то

$$\begin{cases} x = r \cos(\varphi), \\ y = r \sin(\varphi) \end{cases} \quad (1.19)$$

и поэтому

$$z = r[\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)] = |z|[\cos(\arg(z)) + i \sin(\arg(z))]. \quad (1.20)$$

**Определение 1.10.** Представление КЧ  $z$  в виде (1.20) называют его тригонометрической формой.

Формулы (1.19) позволяют находить  $x = \operatorname{Re}(z)$  и  $y = \operatorname{Im}(z)$  по значениям модуля и аргумента КЧ. Рассмотрим обратную задачу: для КЧ  $z = x + iy$  требуется найти модуль и аргумент (главное значение). Модуль  $z$  находится по формуле (1.16), а главное значение аргумента – по

формулам:

$$\varphi_0 = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{|z|}\right), & \text{если } y \geq 0, \\ 2\pi - \arccos\left(\frac{x}{|z|}\right), & \text{если } y < 0. \end{cases} \quad (1.21)$$

Пусть  $z_1 = r_1 (\cos(\varphi_1) + i \sin(\varphi_1))$ ,  $z_2 = r_2 (\cos(\varphi_2) + i \sin(\varphi_2))$ . Тогда

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \quad (1.22)$$

Полученная тригонометрическая форма КЧ  $z_1 z_2$  показывает, что модуль произведения двух КЧ равен произведению модулей сомножителей, а аргумент произведения (точнее, одно из его значений) равен сумме аргументов сомножителей:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2). \quad (1.23)$$

Эти правила распространяются на произведение любого числа сомножителей:

$$|z_1 z_2 \dots z_k| = |z_1| |z_2| \dots |z_k|, \quad (1.24)$$

$$\arg(z_1 z_2 \dots z_k) = \arg(z_1) + \dots + \arg(z_k). \quad (1.25)$$

Из формул (1.24), (1.25) следует (при  $z_1 = z_2 = \dots = z_k = z$ ), что при  $k \in \mathbb{N}$

$$|z^k| = |z|^k, \quad \arg(z^k) = k \arg(z),$$

т. е. если  $z = r (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$ , то

$$z^k = [r (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))]^k = r^k [\cos(k\varphi) + i \sin(k\varphi)]. \quad (1.26)$$

При  $r = |z| = 1$  из формулы (1.26) получаем так называемую формулу Муавра:

$$[\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)]^k = \cos(k\varphi) + i \sin(k\varphi). \quad (1.27)$$

Рассмотрим теперь деление КЧ в тригонометрической форме. Пусть

$$z_1 = r_1 [\cos(\varphi_1) + i \sin(\varphi_1)], \quad z_2 = r_2 [\cos(\varphi_2) + i \sin(\varphi_2)] \neq 0.$$

Тогда

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)], \quad (1.28)$$

т. е.

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \varphi_1 - \varphi_2 = \arg(z_1) - \arg(z_2). \quad (1.29)$$

Итак, модуль частного двух КЧ равен частному их модулей, а аргумент частного (одно из возможных значений) равен разности аргументов делимого и делителя.

Пусть  $z = r[\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)]$ . Тогда

$$\begin{aligned}\bar{z} &= r \cos(\varphi) - ir \sin(\varphi) = r[\cos(\varphi) - i \sin(\varphi)] = \\ &= r[\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)].\end{aligned}$$

Это означает (рис. 1.3), что

$$|\bar{z}| = r = |z|, \quad \arg(\bar{z}) = -\varphi = -\arg(z).$$

Укажем еще следующие свойства модуля КЧ:  $z\bar{z} = |z|^2$  и

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \quad (1.30)$$

**Замечание 1.4.** Неравенство (1.30) обычно называют неравенством треугольника. Это связано с его геометрической интерпретацией – длина стороны треугольника не превосходит суммы длин двух других его сторон (рис. 1.2). Это неравенство очевидным образом распространяется на сумму нескольких слагаемых:

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_k| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_k|.$$

Учитывая формулу (1.8) и геометрический смысл суммы КЧ, изобразим на рисунке разность КЧ (рис. 1.4).

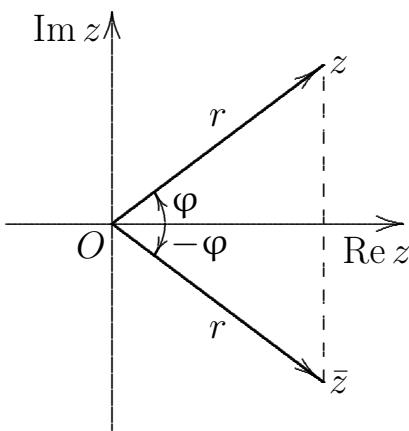


Рис. 1.3

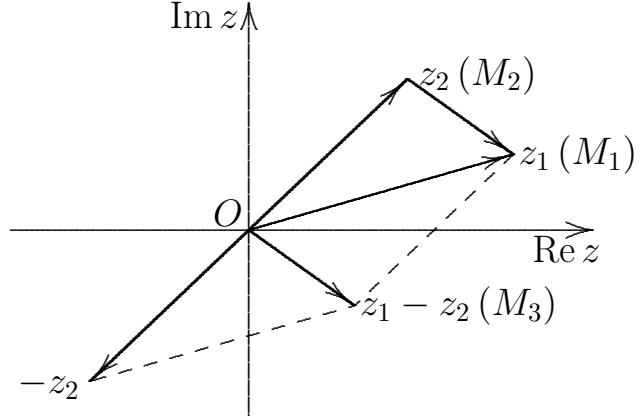


Рис. 1.4

Из рис. 1.4 очевидно:

$$\overrightarrow{M_2 M_1} = \overrightarrow{O M_3} \implies |\overrightarrow{M_2 M_1}| = |\overrightarrow{O M_3}| = |z_1 - z_2|,$$

следовательно, **модуль разности КЧ равен расстоянию между точками**  $z_1$  и  $z_2$  на комплексной плоскости. В конце параграфа рассмотрим еще одну форму записи КЧ.

**Определение 1.11.** Если  $\varphi \in \mathbb{R}$ , то

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi). \quad (1.31)$$

В соответствии с (1.20), (1.31) получаем для любого ненулевого КЧ  $z$  представление

$$z = r e^{i\varphi}$$

( $r = |z|$ ,  $\varphi = \arg(z)$ ), называемое показательной формой КЧ. Ясно, что  $|e^{i\varphi}| = 1 \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}$ .

С использованием показательной формы КЧ многие из ранее доказанных формул допускают более компактную запись, в частности:

- 1)  $z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$ , где  $\varphi_1 = \arg(z_1)$ ,  $\varphi_2 = \arg(z_2)$ ;
- 2)  $z^n = |z|^n e^{in\varphi}$ ,  $\varphi = \arg(z)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;
- 3)  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$ ,  $z_2 \neq 0$ ;
- 4) если  $z = |z| e^{i\varphi}$ , то  $\bar{z} = |z| e^{-i\varphi}$ ;
- 5)  $e^{i\varphi_1} = e^{i\varphi_2} \iff \exists k \in \mathbb{Z} : \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k$  (следует из (1.18)).

### 1.3. Двучленные уравнения

Уравнение вида

$$z^n = a, \quad (1.32)$$

где  $n$  – натуральное число, а  $a$  – заданное КЧ, обычно называют двучленным уравнением.

Если  $a = 0$ , то решением уравнения (1.32) служит только  $z = 0$ . Далее будем считать, что  $a \neq 0$  и, следовательно,  $z \neq 0$ .

Запишем КЧ  $a$  и  $z$  в тригонометрической форме:

$$\begin{aligned} a &= |a| [\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)], \quad \alpha = \arg(a), \\ z &= |z| [\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)], \quad \varphi = \arg(z). \end{aligned}$$

Тогда уравнение (1.32) с учетом (1.26) примет вид

$$|z|^n [\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)] = |a| [\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)]. \quad (1.33)$$

Учитывая условия равенства КЧ (1.18), получаем, что для любого решения  $z$  уравнения (1.32) (или (1.33)) выполняются условия:

$$\begin{cases} |z^n| = |a|, \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \quad n\varphi = \alpha + 2\pi k, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} |z| = \sqrt[n]{|a|}, \\ \varphi = \frac{\alpha + 2\pi k}{n} = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k. \end{cases}$$

Таким образом, любое решение уравнения (1.32) имеет вид

$$z = \sqrt[n]{|a|} \left[ \cos \left( \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k \right) + i \sin \left( \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k \right) \right], \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.34)$$

В результате исследования формулы (1.34), можно доказать следующее утверждение (см. теорему 2.1 в [1]).

**Утверждение 1.3.** Уравнение (1.32) при  $a \neq 0$  имеет ровно  $n$  различных решений, представимых формулой:

$$z_k = \sqrt[n]{|a|} \left[ \cos \left( \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k \right) + i \sin \left( \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k \right) \right], \quad k = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (1.35)$$

#### 1.4. Типовой расчет по теме „Комплексные числа“ (TP 2.1)

TP 2.1 содержит задания на выполнение арифметических действий с комплексными числами, записанными в алгебраической и тригонометрической (показательной) формах, решение двучленного уравнения, нахождение вещественного полинома по его комплексным корням и выяснение геометрического смысла заданного неравенства.

Студент получает индивидуальное задание, имеющее следующий вид:

**TP 2.1. Вар. 12.** Дано:  $\alpha = 1+9i$ ,  $\beta = 8-6i$ ,  $\gamma = -1.9+3.0i$ ,  $\delta = 2.6+3.2i$ .

1. Найти в алгебраической форме:  $\alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta}$ ,  $\alpha/\bar{\gamma} - \beta/\bar{\delta}$ ,  $\alpha^3$ .
2. Записать в тригонометрической и показательной формах:  $\gamma$ ,  $\bar{\delta}$ ,  $\gamma\bar{\delta}$ ,  $\gamma/\bar{\delta}$ .
3. Найти в алгебраической форме  $\gamma^5$ .
4. Найти все корни уравнения  $z^3 = \gamma$  и записать их в тригонометрической и алгебраической формах.
5. Построить полином с вещественными коэффициентами  $z^4 + a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$ , если известно, что  $\alpha$  и  $\beta$  его корни.
6. Определить внутренний  $R_1$  и внешний  $R_2$  радиусы и центр  $C$  кольца, заданного неравенством  $46.000 < |\alpha z + \beta| < 79.000$ .

**Замечание 1.5.** Окончательные результаты округляются с точностью до 3-го знака после десятичной запятой (точки). Кроме того, в п. 2 задания для всех КЧ требуется указывать главные значения аргументов.

В п. 4 задания можно использовать любые значения аргументов (см. формулу (1.17)).

### Пример выполнения ТР 2.1. Вар. 12.

1. Произведем требуемые действия с комплексными числами:

$$a. \alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta} = (1 + 9i)(-1.9 - 3i) + (8 - 6i)(2.6 - 3.2i) = \\ = -1.9 - 3i - 17.1i + 27 + 20.8 - 25.6i - 15.6i - 19.2 = 26.7 - 61.3i.$$

$$b. \frac{\alpha}{\bar{\gamma}} - \frac{\beta}{\bar{\delta}} = \frac{1 + 9i}{-1.9 - 3i} - \frac{8 - 6i}{2.6 - 3.2i} = \frac{(1 + 9i)(-1.9 + 3i)}{(-1.9 - 3i)(-1.9 + 3i)} - \\ - \frac{(8 - 6i)(2.6 + 3.2i)}{(2.6 - 3.2i)(2.6 + 3.2i)} = \frac{-28.9 - 14.1i}{12.61} - \frac{40 + 10i}{17} = \\ = -2.2918 - 1.1182i - 2.3530 - 0.5882i = -4.645 - 1.706i.$$

$$c. \alpha^3 = (1 + 9i)^3 = 1 + 3 \cdot 9i + 3 \cdot (9i)^2 + (9i)^3 = \\ = 1 + 27i - 243 - 729i = -242 - 702i.$$

2. Переведем числа  $\gamma$  и  $\bar{\delta}$  в тригонометрическую (показательную) форму (см. определения 1.8 – 1.11) и произведем требуемые действия с использованием формул (1.22), (1.28):

a. Если  $\gamma = -1.9 + 3.0i$ , то  $|\gamma| = \sqrt{(1.9)^2 + (3.0)^2} = \sqrt{12.61} = 3.551$  и, так как  $\operatorname{Im}(\gamma) > 0$ , то (см. формулу (1.21))  $\arg(\gamma) = \arccos \frac{-1.9}{\sqrt{12.61}} = 2.135$ .

Таким образом  $\gamma = 3.551(\cos(2.135) + i \sin(2.135)) = 3.551e^{2.135i}$ .

b. Если  $\delta = 2.6 + 3.2i$ , то  $\bar{\delta} = 2.6 - 3.2i$  и  $|\bar{\delta}| = \sqrt{(2.6)^2 + (3.2)^2} = \sqrt{17} = 4.123$ . Так как  $\operatorname{Im}(\bar{\delta}) < 0$ , то по (1.21)  $\arg(\bar{\delta}) = 2\pi - \arccos \frac{2.6}{\sqrt{17}} = 5.395$ .

Итак,  $\bar{\delta} = 4.123(\cos(5.395) + i \sin(5.395)) = 4.123e^{5.395i}$ .

c. Согласно формуле (1.23):  $|\gamma\bar{\delta}| = |\gamma||\bar{\delta}| = 3.551 \cdot 4.123 = 14.641$  и  $\arg(\gamma\bar{\delta}) = 2.135 + 5.395 = 7.530$ , при этом главное значение аргумента  $\arg(\gamma\bar{\delta}) = 7.530 - 2\pi = 1.247$ . Следовательно:

$$\gamma\bar{\delta} = 14.641(\cos(1.247) + i \sin(1.247)) = 14.641e^{1.247i}.$$

d. Согласно формуле (1.29):  $\left| \frac{\gamma}{\bar{\delta}} \right| = \frac{|\gamma|}{|\bar{\delta}|} = \frac{3.551}{4.123} = 0.861$  и  $\arg(\gamma/\bar{\delta}) = 2.1354 - 5.3947 = -3.2593$ , при этом главное значение аргумента  $\arg(\gamma/\bar{\delta}) = -3.259 + 2\pi = 3.024$ . Следовательно:

$$\frac{\gamma}{\bar{\delta}} = 0.861(\cos(3.024) + i \sin(3.024)) = 0.861e^{3.024i}.$$

3. Воспользуемся результатом предыдущего пункта и используем формулу Муавра (1.27):

$$\gamma^5 = (3.551e^{i \cdot 2.135})^5 = (3.551)^5 e^{i \cdot 5 \cdot 2.135} = 564.616e^{10.675i} = \\ = 564.616 \cos(10.675) + i \cdot 564.616 \sin(10.675) = -177.917 - 535.852i.$$

4. Согласно п. 2:  $\gamma = 3.551(\cos(2.135) + i \sin(2.135))$ . Корни уравнения

$z^3 = \gamma$  находим по формуле (1.35), принимающей вид

$$z_k = \sqrt[3]{3.551} \left[ \cos \left( \frac{2.135}{3} + \frac{2\pi}{3}k \right) + i \sin \left( \frac{2.135}{3} + \frac{2\pi}{3}k \right) \right], \quad k = 0, 1, 2.$$

Записываем корни в тригонометрической форме и находим их в алгебраической форме:

$$\begin{aligned} z_0 &= 1.526(\cos(0.712) + i \sin(0.712)) = 1.155 + 0.997i, \\ z_1 &= 1.526(\cos(2.806) + i \sin(2.806)) = -1.441 + 0.503i, \\ z_2 &= 1.526(\cos(4.901) + i \sin(4.901)) = 0.285 - 1.499i. \end{aligned}$$

**5.** Известно, что если комплексное число является корнем многочлена с вещественными коэффициентами, то сопряженное комплексное число также является корнем этого многочлена. Значит числа  $\bar{\alpha}$  и  $\bar{\beta}$  являются корнями искомого многочлена. Многочлен степени 4 имеет ровно 4 комплексных корня, следовательно, числа  $\alpha, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta}$  – все корни искомого многочлена. Так как старший коэффициент по условию равен единице, этот многочлен имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} P(z) &= (z - 1 - 9i)(z - 1 + 9i)(z - 8 + 6i)(z - 8 - 6i) = \\ &= ((z - 1)^2 + 81)(z - 8)^2 + 36 = (z^2 - 2z + 82)(z^2 - 16z + 100) = \\ &= z^4 - 18z^3 + 214z^2 - 1512z + 8200. \end{aligned}$$

**6.** Воспользуемся свойствами модуля комплексного числа и его геометрическим смыслом.

$$46 < |\alpha z + \beta| < 79, \quad 46 < |\alpha| \left| z + \frac{\beta}{\alpha} \right| < 79, \quad \frac{46}{|\alpha|} < \left| z + \frac{\beta}{\alpha} \right| < \frac{79}{|\alpha|}.$$

Полученное неравенство можно записать в виде

$$R_1 < |z - C| < R_2, \quad (1.36)$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{46}{|\alpha|} = \frac{46}{\sqrt{82}} = 5.080, \quad R_2 = \frac{79}{|\alpha|} = \frac{79}{\sqrt{82}} = 8.724, \\ C &= -\frac{\beta}{\alpha} = \frac{8 - 6i}{1 + 9i} = -\frac{(8 - 6i)(1 - 9i)}{82} = \frac{46 + 78i}{82} = 0.561 + 0.951i. \end{aligned}$$

Из геометрического смысла модуля разности КЧ следует, что неравенство (1.36) задает на комплексной плоскости внутренность кольца с центром в точке  $C$  и радиусами  $R_1$  и  $R_2$ .

**Ответы:** 1.  $\alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta} = 26.7 - 61.3i$ ,  $\alpha/\bar{\gamma} + \beta/\bar{\delta} = -4.645 - 1.706i$ ,  $\alpha^3 = -242 - 702i$ .

$$\begin{aligned} 2. \gamma &= 3.551(\cos(2.135) + i \sin(2.135)) = 3.551e^{2.135i}, \\ \bar{\delta} &= 4.123(\cos(5.395) + i \sin(5.395)) = 4.123e^{5.395i}, \end{aligned}$$

$$\gamma\bar{\delta} = 14.641(\cos(1.247) + i \sin(1.247)) = 14.641e^{1.247i},$$

$$\gamma/\bar{\delta} = 0.861(\cos(3.024) + i \sin(3.024)) = 0.861e^{3.024i}.$$

3.  $\gamma^5 = -177.917 - 535.852i$ .

4. Корни двучленного уравнения  $z^3 = \gamma$ :

$$z_0 = 1.526(\cos(0.712) + i \sin(0.712)) = 1.155 + 0.997i,$$

$$z_1 = 1.526(\cos(2.806) + i \sin(2.806)) = -1.441 + 0.503i,$$

$$z_2 = 1.526(\cos(4.901) + i \sin(4.901)) = 0.285 - 1.499i.$$

5.  $P_4(z) = z^4 - 18z^3 + 214z^2 - 1512z + 8200$ .

6. Кольцо с центром  $C = 0.561 + 0.951i$  и радиусами: внутренним  $R_1 = 5.080$  и внешним  $R_2 = 8.724$ .

## 2. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Подробное изложение теории с доказательствами, необходимое для выполнения ТР данного раздела, можно найти в учебнике [2], а также в учебном пособии [3].

### 2.1. Матрицы. Действия с матрицами

**Определение 2.1.** Числовой матрицей  $A$  размера  $m \times n$  называется совокупность  $mn$  чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы, содержащей  $m$  строк и  $n$  столбцов.

Матрицы обычно обозначают прописными латинскими буквами, а числа, образующие матрицу (элементы матрицы), – соответствующими строчными буквами с двумя индексами. При этом первый индекс элемента матрицы обозначает номер строки, а второй – номер столбца, в которых расположен данный элемент:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Кроме того, часто используется обозначение

$$A = \{a_{lj}\}, \quad 1 \leq l \leq m, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Если число строк равно числу столбцов ( $m = n$ ), то матрица называется *квадратной*, а число  $n$  – ее порядком. Например, матрица  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$  – квадратная матрица второго порядка.

Элементы квадратной матрицы  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  образуют так называемую *главную диагональ* (или просто *диагональ*) матрицы. Если на главной

диагонали расположены числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , а остальные элементы равны нулю, то матрица называется *диагональной*. При этом часто используется обозначение

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n].$$

Среди диагональных матриц выделяют *единичную* матрицу

$$I_n = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}}_n \quad n = \text{diag}[\underbrace{1, 1, \dots, 1}_n].$$

Когда порядок матрицы  $I_n$  понятен, то индекс  $n$  опускается.

**Замечание 2.1.** Если все элементы матрицы  $A$  вещественны ( $a_{lj} \in \mathbb{R}$ ), то матрицу  $A$  называют вещественной, а в случае  $a_{lj} \in \mathbb{C}$  – комплексной.

Множество всех матриц размера  $m \times n$  обозначается через  $\mathcal{M}_{m \times n}$ .

**Определение 2.2.** Матрицы  $A$  и  $B$  равны, если: они имеют одинаковые размеры и все элементы одной матрицы равны соответствующим элементам другой ( $a_{lj} = b_{lj}; l = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ ).

**Определение 2.3.** Суммой матриц  $A$  и  $B$  одинакового размера называется матрица  $C$  того же размера, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц  $A$  и  $B$ :

$$C = A + B \iff c_{lj} = a_{lj} + b_{lj}; \quad l = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.1)$$

Произведением матрицы  $A$  произвольного размера  $m \times n$  на число  $\lambda$  называется матрица  $D$  того же размера, элементы которой получаются умножением элементов матрицы  $A$  на число  $\lambda$ :

$$D = \lambda A \iff d_{lj} = \lambda a_{lj}; \quad l = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.2)$$

**Теорема 2.1.** Введенные в определении 2.3 (см. (2.1), (2.2)) операции обладают следующими свойствами:

1.  $A + B = B + A$ .
2.  $A + (B + C) = (A + B) + C$ .
3.  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ .
4.  $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ .
5.  $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$ ,

где  $A, B, C$  – матрицы одинакового размера,  $\lambda, \mu$  – числа.

**Определение 2.4.** Пусть  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ . Матрица  $B = A^T \in \mathcal{M}_{n \times m}$  называется транспонированной (иногда ее обозначают  $A'$ ) по отношению к матрице  $A$ , если  $b_{lj} = a_{jl}$ , где  $l = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ .

**Определение 2.5.** Пусть  $C \in \mathcal{M}_{m \times n}$ . Матрица  $D = C^* \in \mathcal{M}_{n \times m}$  называется сопряженной по отношению к матрице  $C$ , если  $d_{lj} = \bar{c}_{jl}$ , где  $l = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, \dots, m$ .

**Определение 2.6.** Квадратная матрица  $A$  называется симметричной, если  $A^T = A$ .

**Определение 2.7.** Квадратная матрица  $A$  называется самосопряженной, если  $A^* = A$ .

**Замечание 2.2.** Если матрица  $A$  симметрична, то  $a_{lj} = a_{jl}$ , ( $1 \leq l \leq n$ ,  $1 \leq j \leq n$ ), где  $n$  — порядок матрицы  $A$ . Если  $A$  самосопряженная, то  $a_{lj} = \bar{a}_{jl}$  и, следовательно,  $a_{ll} \in \mathbb{R}$ , т. е. на диагонали самосопряженной матрицы стоят вещественные числа.

**Определение 2.8.** Произведением матрицы  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$  на матрицу  $B \in \mathcal{M}_{n \times k}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{bmatrix}$$

называется матрица  $C = AB = \{c_{lj}\} \in \mathcal{M}_{m \times k}$ , элементы которой находятся по следующей формуле:

$$c_{lj} = a_{l1}b_{1j} + a_{l2}b_{2j} + \dots + a_{ln}b_{nj} = \sum_{p=1}^n a_{lp}b_{pj}, \quad (2.3)$$

где  $l = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, k$ .

**Замечание 2.3.** Как следует из равенства (2.3), размеры перемножаемых матриц должны быть согласованы, а именно, число столбцов первой матрицы должно равняться числу строк второй матрицы. Если это условие не выполнено, то произведение матриц не определено.

**Теорема 2.2.** Операция умножения матриц обладает следующими свойствами:

1) ассоциативностью:

$$(AB)C = A(BC);$$

2) дистрибутивностью:

$$A(B + C) = AB + AC, \quad (A + B)C = AC + BC;$$

3) если  $\lambda$  – число, то

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B);$$

4)

$$(AB)^T = B^T A^T, \quad (AB)^* = B^* A^*.$$

Подчеркнем, что, в общем случае, произведение матриц не коммутативно:  $AB \neq BA$ .

## 2.2. Системы линейных алгебраических уравнений

Одним из объектов, изучаемых в курсе линейной алгебры, является система линейных алгебраических уравнений (СЛУ), которую обычно записывают в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (2.4)$$

Здесь  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – неизвестные числа (или просто неизвестные);  $a_{ij}$  – коэффициенты при неизвестных, где первый индекс  $i$  указывает номер уравнения, а второй индекс  $j$  – номер соответствующего неизвестного (если существует неопределенность при записи индексов, то первый и второй индексы разделяются запятой: например, когда первый индекс равен 15, а второй равен 17, пишется  $a_{15,17}$ ), которые будем называть коэффициентами СЛУ (2.4);  $b_i$  – правые части уравнений системы (называемые также свободными членами СЛУ (2.4)). Коэффициенты  $a_{ij}$  и свободные члены  $b_i$  – заданные комплексные или вещественные числа. Число уравнений  $m$  ( $m \geq 1$ ) и число неизвестных  $n$  ( $n \geq 1$ ) в СЛУ (2.4) могут быть произвольными, при этом возможен любой из трех случаев:  $m > n$ ,  $m < n$  и  $m = n$ .

**Определение 2.9.** Решением СЛУ (2.4) называется такой набор чисел  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ , при подстановке которого в систему (2.4) ( $x_1^0$  вместо  $x_1$ ,  $x_2^0$  вместо  $x_2$  и т. д.) все уравнения этой СЛУ становятся верными числовыми равенствами.

Если СЛУ не имеет решений (множество решений пусто), то она называется несовместной. Если СЛУ имеет решение, то говорят, что она совместна.

**Определение 2.10.** Две СЛУ с одинаковым числом неизвестных называются равносильными, если множество решений этих СЛУ совпадают.

В частности, равносильными являются любые две несовместные СЛУ с одинаковым числом неизвестных.

СЛУ (2.4) можно задать следующей числовой таблицей:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right), \quad (2.5)$$

составленной из коэффициентов СЛУ и ее правых частей. Часто таблицу (2.5) называют расширенной матрицей системы (2.4). При этом таблицу из коэффициентов СЛУ (2.4)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

называют матрицей этой СЛУ. Если две СЛУ равносильны, то соответствующие им расширенные матрицы будем связывать логическим знаком эквивалентности: “ $\iff$ ”.

В основе большинства известных методов решения СЛУ (2.4) лежит идея преобразования этой системы в некоторую другую СЛУ, ей равносильную, решать которую оказывается проще, чем исходную СЛУ. Такие преобразования обычно называют *допустимыми* (в некоторых учебниках данные преобразования называются *элементарными*) преобразованиями СЛУ (2.4). Ясно, что любое допустимое преобразование СЛУ (2.4) приводит к преобразованию соответствующей расширенной матрицы (2.5). Перечислим типы допустимых преобразований СЛУ (2.4):

- 1) перестановка уравнений в СЛУ (перестановка строк в расширенной матрице системы);
- 2) перестановка слагаемых с одинаковыми неизвестными во всех уравнениях СЛУ (перестановка столбцов коэффициентов при этих неизвестных в расширенной матрице СЛУ с обязательным указанием измененного порядка следования неизвестных);
- 3) умножение обеих частей произвольного уравнения СЛУ на число, отличное от нуля (умножение на это число всех элементов соответствующей строки расширенной матрицы СЛУ);
- 4) прибавление к одному из уравнений СЛУ другого ее уравнения, умноженного на число (прибавление к элементам одной строки расширен-

ной матрицы СЛУ соответствующих элементов другой ее строки, умноженных на число).

Перечисленные преобразования сохраняют неизменным множество решений системы (подробное изложение с доказательствами можно найти в пособии [3]).

**Утверждение 2.1.** *Если СЛУ (2.4) содержит уравнение вида*

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b,$$

*где  $b \neq 0$  (расширенная матрица этой СЛУ содержит строку вида  $[0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ | \ b]$ ,  $b \neq 0$ ), то такая система несовместна.*

**Утверждение 2.2.** *Если к СЛУ (2.4) добавить уравнение вида*

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0 \quad (2.6)$$

*(к расширенной матрице СЛУ добавить строку  $[0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ | \ 0]$ ), то получим систему, равносильную исходной.*

**Следствие 2.1.** *Если в СЛУ (2.4) содержится уравнение вида (2.6) или несколько таких уравнений, то эти уравнения можно исключить из СЛУ (2.4), получив при этом СЛУ с меньшим числом уравнений, равносильную исходной.*

### 2.3. Метод полного исключения неизвестных

Метод полного исключения неизвестных, или метод (алгоритм) Гаусса–Жордана (Г.–Ж.) является одним из методов решения СЛУ (2.4) и сводится к последовательному применению допустимых преобразований СЛУ.

#### Шаг 1.

1. Выберем какой-либо ненулевой элемент  $a_{ij}$  матрицы СЛУ и назовем его ведущим элементом. Переставляя строки и столбцы расширенной матрицы (т. е. используя допустимые преобразования первого и второго типа), поместим ведущий элемент в первую строку и первый столбец (разумеется, если в качестве ведущего элемента был выбран элемент  $a_{11}$ , то никаких преобразований не делается).

Заметим, что в вычислительных алгоритмах на место элемента  $a_{11}$  помещают наибольший по модулю элемент матрицы. Его также называют ведущим элементом.

Отметим, что при перестановке столбцов в матрице системы меняется порядок следования неизвестных во всех уравнениях системы. В связи с этим при реализации алгоритма Г.–Ж. над столбцами в матрице системы указывают порядок соответствующих неизвестных (как будет показано в примере выполнения ТР 2.1).

Полученную расширенную матрицу запишем в виде

$$\left( \begin{array}{cccc|c} a_{11}^1 & a_{12}^1 & \cdots & a_{1n}^1 & b_1^1 \\ a_{21}^1 & a_{22}^1 & \cdots & a_{2n}^1 & b_2^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}^1 & a_{m2}^1 & \cdots & a_{mn}^1 & b_m^1 \end{array} \right) \quad (2.7)$$

(верхний индекс указывает номер шага). В этой матрице  $a_{11}^1 \neq 0$ .

2. Умножим первую строку матрицы (2.7) на  $1/a_{11}^1$  (это – преобразование третьего типа). Получим равносильную СЛУ с расширенной матрицей

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & \tilde{a}_{12}^1 & \cdots & \tilde{a}_{1n}^1 & \tilde{b}_1^1 \\ a_{21}^1 & a_{22}^1 & \cdots & a_{2n}^1 & b_2^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}^1 & a_{m2}^1 & \cdots & a_{mn}^1 & b_m^1 \end{array} \right), \quad (2.8)$$

где  $\tilde{a}_{1j}^1 = a_{1j}^1/a_{11}^1$ ,  $j = 2, 3, \dots, n$  и  $\tilde{b}_1^1 = b_1^1/a_{11}^1$ .

3. Ко второй строке матрицы (2.8) прибавим 1-ю строку, умноженную на  $(-a_{21}^1)$ , к третьей строке прибавим 1-ю, умноженную на  $(-a_{31}^1)$ , и т. д. до последней строки, к которой прибавим 1-ю строку, умноженную на  $(-a_{m1}^1)$  (это – преобразование четвертого типа). В результате получим равносильную СЛУ с расширенной матрицей вида

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & \tilde{a}_{12}^1 & \cdots & \tilde{a}_{1n}^1 & \tilde{b}_1^1 \\ 0 & \tilde{a}_{22}^1 & \cdots & \tilde{a}_{2n}^1 & \tilde{b}_2^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \tilde{a}_{m2}^1 & \cdots & \tilde{a}_{mn}^1 & \tilde{b}_m^1 \end{array} \right). \quad (2.9)$$

Таким образом, неизвестное, соответствующие первому столбцу в матрице (2.9), остается только в первом уравнении и исключено из всех остальных уравнений.

Если в матрице (2.9) содержатся нулевые строки, то исключим их (см. следствие 2.1); при этом число уравнений в СЛУ уменьшится. Если же эта матрица содержит строку вида  $[0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ | \ b]$ , где  $b \neq 0$ , то согласно утверждению 2.1, соответствующая СЛУ несовместна, а значит, несовместна и исходная СЛУ (2.4). В этом случае работа метода заканчивается.

Пусть в результате первого шага не обнаружена несовместность СЛУ, а в получившейся матрице после отбрасывания возможных нулевых строк

число оставшихся строк равно  $m_1$  ( $m_1 \leq m$ ), при этом  $m_1 \geq 2$ . Записывая эту матрицу в виде

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12}^2 & \cdots & a_{1n}^2 & b_1^2 \\ 0 & a_{22}^2 & \cdots & a_{2n}^2 & b_2^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{m_1 2}^2 & \cdots & a_{m_1 n}^2 & b_{m_1}^2 \end{array} \right), \quad (2.10)$$

переходим ко второму шагу. Отметим, что в каждой строке матрицы (2.10), начиная со второй, хотя бы один из коэффициентов  $a_{ij}^2$  отличен от нуля.

### Шаг 2.

1. Среди коэффициентов  $a_{ij}^2$ ,  $2 \leq i \leq m_1$ ,  $2 \leq j \leq n$ , выберем какой-либо ненулевой и назовем его ведущим элементом второго шага. Переставляя, если нужно, строки и столбцы матрицы (2.10), поместим ведущий элемент во вторую строку и второй столбец. Для получившейся расширенной матрицы сохраним прежнюю запись в виде (2.10), считая теперь, что  $a_{22}^2 \neq 0$ .

2. Умножим вторую строку матрицы (2.10) на  $\frac{1}{a_{22}^2}$ . Получим равносильную СЛУ с расширенной матрицей

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & a_{12}^2 & a_{13}^2 & \cdots & a_{1n}^2 & b_1^2 \\ 0 & 1 & \tilde{a}_{23}^2 & \cdots & \tilde{a}_{2n}^2 & \tilde{b}_2^2 \\ 0 & a_{32}^2 & a_{33}^2 & \cdots & a_{3n}^2 & b_3^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{m_1 2}^2 & a_{m_1 3}^2 & \cdots & a_{m_1 n}^2 & b_{m_1}^2 \end{array} \right), \quad (2.11)$$

где, очевидно,  $\tilde{a}_{2j}^2 = \frac{a_{2j}^2}{a_{22}^2}$ ,  $j = 3, 4, \dots, n$  и  $\tilde{b}_2^2 = \frac{b_2^2}{a_{22}^2}$ .

3. К первой строке матрицы (2.11) прибавим вторую строку, умноженную на  $(-a_{12}^2)$ , к третьей строке прибавим вторую, умноженную на  $(-a_{32}^2)$ , и т. д. до последней строки, к которой прибавим вторую строку, умноженную на  $(-a_{m_1 2}^2)$ . В результате получим равносильную систему с расширенной матрицей вида

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \tilde{a}_{13}^2 & \cdots & \tilde{a}_{1n}^2 & \tilde{b}_1^2 \\ 0 & 1 & \tilde{a}_{23}^2 & \cdots & \tilde{a}_{2n}^2 & \tilde{b}_2^2 \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{33}^2 & \cdots & \tilde{a}_{3n}^2 & \tilde{b}_3^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{m_1 3}^2 & \cdots & \tilde{a}_{m_1 n}^2 & \tilde{b}_{m_1}^2 \end{array} \right). \quad (2.12)$$

Таким образом, во втором шаге алгоритма неизвестное, соответствующее второму столбцу в матрице (2.12), остается только во втором уравнении системы, а из остальных уравнений исключено.

Как и на первом шаге, если в матрице (2.12) содержатся нулевые строки, то они отбрасываются (число уравнений в системе уменьшается), если же в этой матрице содержится строка вида  $[0 \ 0 \ \dots \ 0 \ | \ b]$ ,  $b \neq 0$ , то соответствующая СЛУ вместе с исходной СЛУ несовместна.

Итак, в результате выполнения второго шага метода Гаусса–Жордана либо устанавливается несовместность СЛУ, либо она приводится к равносильной СЛУ с расширенной матрицей вида

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & a_{13}^3 & \cdots & a_{1n}^3 & b_1^3 \\ 0 & 1 & a_{23}^3 & \cdots & a_{2n}^3 & b_2^3 \\ 0 & 0 & a_{33}^3 & \cdots & a_{3n}^3 & b_3^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{m_23}^3 & \cdots & a_{m_2n}^3 & b_{m_2}^3 \end{array} \right), \quad (2.13)$$

где  $2 \leq m_2 \leq m_1$ . Если  $m_2 > 2$  (в этом случае в (2.13) в каждой строке, начиная с третьей, хотя бы один из коэффициентов  $a_{ij}^3$  отличен от нуля), то переходим к третьему шагу и т. д. Задачей очередного  $i$ -го шага (если он выполняется) является получение в  $i$ -м столбце матрицы системы единицы на месте элемента  $a_{ii}^i$  и нулей — на месте остальных элементов этого столбца. При этом предыдущие столбцы остаются неизменными.

Если в процессе выполнения шагов метода (алгоритма) Гаусса–Жордана не устанавливается несовместность системы, то этот процесс всегда заканчивается (после некоторого  $k$ -го шага,  $1 \leq k \leq n$ ) получением либо (когда  $k = n$ ) СЛУ с расширенной матрицей вида

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_1^n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & b_2^n \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & b_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & b_n^n \end{array} \right) \quad (2.14)$$

(верхний индекс “ $n$ ” указывает номер последнего шага), либо (когда  $k < n$ ) СЛУ с расширенной матрицей вида

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,k+1}^k & \cdots & a_{1n}^k & b_1^k \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{2,k+1}^k & \cdots & a_{2n}^k & b_2^k \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{3,k+1}^k & \cdots & a_{3n}^k & b_3^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{k,k+1}^k & \cdots & a_{kn}^k & b_k^k \end{array} \right). \quad (2.15)$$

Каждая строка матрицы (2.14) соответствует уравнению с одним неизвестным, коэффициент при котором равен 1, а единственное значение неизвестного, удовлетворяющее этому уравнению, совпадает с правой частью этого уравнения. Таким образом, если алгоритм Гаусса—Жордана приводит систему (2.4) к равносильной СЛУ с расширенной матрицей вида (2.14), то СЛУ (2.4) имеет единственное решение. Соответствующий единственный набор значений неизвестных  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  легко находится по последнему столбцу матрицы (2.14). Если при выполнении метода Гаусса—Жордана столбцы матрицы СЛУ не переставлялись, то

$$\begin{cases} x_1^0 = b_1^n, \\ x_2^0 = b_2^n, \\ \dots \\ x_n^0 = b_n^n. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь СЛУ с расширенной матрицей (2.15). Для простоты и наглядности изложения предположим, что в процессе приведения исходной СЛУ (2.4) к СЛУ с расширенной матрицей (2.15) порядок следования неизвестных в уравнениях СЛУ не менялся, т. е. столбцы матрицы СЛУ не переставлялись. По расширенной матрице (2.15) запишем соответствующие уравнения СЛУ

$$\begin{cases} x_1 + a_{1,k+1}^k x_{k+1} + \dots + a_{1n}^k x_n = b_1^k, \\ x_2 + a_{2,k+1}^k x_{k+1} + \dots + a_{2n}^k x_n = b_2^k, \\ \dots \\ x_k + a_{k,k+1}^k x_{k+1} + \dots + a_{kn}^k x_n = b_k^k. \end{cases} \quad (2.16)$$

Очевидно, что, задавая произвольно  $x_{k+1}, \dots, x_n$  и вычисляя по формулам

$$\begin{cases} x_1 = b_1^k - a_{1,k+1}^k x_{k+1} - \dots - a_{1n}^k x_n, \\ x_2 = b_2^k - a_{2,k+1}^k x_{k+1} - \dots - a_{2n}^k x_n, \\ \dots \\ x_k = b_k^k - a_{k,k+1}^k x_{k+1} - \dots - a_{kn}^k x_n \end{cases}$$

значения неизвестных  $x_1, \dots, x_k$ , получим все решения рассматриваемой СЛУ.

Если в процессе приведения системы (2.4) к СЛУ с расширенной матрицей (2.15) менялся порядок следования неизвестных, т. е. переставлялись столбцы в матрице СЛУ, то уравнения СЛУ, соответствующей матрице (2.15), будут отличаться от уравнений СЛУ (2.16) номерами только отдельных или даже всех неизвестных. Однако структура всего множества решений СЛУ не меняется:  $k$  неизвестных СЛУ однозначно выражаются

через остальные  $(n - k)$  неизвестные, которые можно задавать произвольно. Таким образом, если алгоритм Гаусса — Жордана приводит СЛУ (2.4) к равносильной СЛУ с расширенной матрицей вида (2.15), то СЛУ имеет бесконечно много решений.

## 2.4. Определитель квадратной матрицы

Определитель матрицы  $A$  (обозначается  $\det(A)$ ) — функция, определенная на множестве всех квадратных матриц. Следуя [2], дадим индукционное определение этой функции.

**Определение 2.11.** 1. Определитель матрицы первого порядка  $A = [a_{11}]$  принимается равным ее единственному элементу:  $\det(A) = a_{11}$ .

2. Предположим, что известно как вычисляют определители матриц до порядка  $(n - 1)$  включительно. Рассмотрим квадратную матрицу  $n$ -го порядка:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad i .$$

$k$

Если исключить  $i$ -ю строку и  $k$ -й столбец, то получим квадратную матрицу  $(n - 1)$ -го порядка  $\tilde{A}_{ik}$ , определитель которой назовем дополнительным минором (или просто минором) исходной матрицы  $A$ , отвечающим элементу  $a_{ik}$  (минор элемента  $a_{ik}$  матрицы  $A$ ), и обозначим его  $M_{ik}$ . Таким образом,

$$M_{ik} = \det(\tilde{A}_{ik}) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} .$$

Число  $A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$  назовем алгебраическим дополнением элемента  $a_{ik}$  матрицы  $A$ .

3. Определитель квадратной матрицы  $n$ -го порядка определим как сумму произведений всех элементов первой строки на их алгебраические дополнения:

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{k=1}^n a_{1k}A_{1k} = \sum_{k=1}^n (-1)^{1+k} a_{1k}M_{1k}. \quad (2.17)$$

Формулу (2.17) обычно называют разложением определителя матрицы по элементам первой строки, или просто по первой строке.

**Теорема 2.3.** Для каждой матрицы  $A$  порядка  $n \geq 2$  при произвольном  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) справедлива формула

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} a_{ik} M_{ik} \quad (2.18)$$

и при произвольном  $j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) – формула

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n a_{kj} A_{kj} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} M_{kj}. \quad (2.19)$$

Равенство (2.18) называется разложением определителя по  $i$ -й строке, а (2.19) – разложением определителя по  $j$ -му столбцу.

## 2.5. Вычисление определителя матрицы

Рассмотрим способ вычисления определителя, состоящий в последовательном понижении порядка матрицы.

**Шаг 1.** Пусть дана матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Считаем, что  $a_{11} \neq 0$ . Если  $a_{11} = 0$ , то, переставляя строки, помещаем в левый верхний угол ненулевой элемент первого столбца ; если все элементы первого столбца равны нулю, то  $\det(A) = 0$ . Отметим, что при перестановке двух строк определитель умножается на  $(-1)$ . Делим первую строку на  $a_{11}$ , вынося при этом  $a_{11}$  за знак определителя:

$$\det(A) = a_{11} \det \begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Прибавляем ко второй строке первую, умноженную на  $-a_{21}$ ; к третьей строке – первую, умноженную на  $-a_{31}$  и т. д.; к  $n$ -й строке – первую, умножен-

ную на  $-a_{n1}$ ; получим:

$$\det(A) = a_{11} \det \begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} = a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Здесь использована теорема 2.3 для случая разложения по первому столбцу (см. (2.19) с  $j = 1$ ).

Если все элементы первого столбца полученной матрицы равны нулю, то ее определитель, а следовательно, и  $\det(A)$  равны нулю. Если это не так, то считаем, что  $a_{22}^{(1)} \neq 0$  (см. 1-й шаг).

**Шаг 2.** Поступаем аналогично с полученной на первом шаге матрицей  $(n - 1)$ -го порядка — вычисление ее определителя сведем к вычислению определителя порядка  $n - 2$ :

$$\det(A) = a_{11}a_{22}^{(1)} \det \begin{bmatrix} a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix}.$$

Следующие шаги выполняются аналогично. В итоге на  $(n - 1)$ -м шаге получаем:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}^{(1)}a_{33}^{(2)} \cdots a_{nn}^{(n-1)}.$$

## 2.6. Теорема и формулы Крамера

Рассмотрим СЛУ (2.4) с квадратной матрицей, т. е. когда число уравнений равно числу неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (2.20)$$

**Определение 2.12.** Если  $\det(A) = 0$ , то матрица  $A$  называется вырожденной, в противном случае — невырожденной.

**Теорема 2.4 (Крамера).** Для того чтобы система (2.20) имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы матрица этой системы была невырожденна:

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \neq 0.$$

**Утверждение 2.3 (формулы Крамера).** Если  $\det(A) \neq 0$ , то решение СЛУ (2.20) вычисляется по формулам

$$x_1 = \frac{\det(B_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(B_2)}{\det(A)}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\det(B_n)}{\det(A)}, \quad (2.21)$$

где матрицы

$$B_k = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{k,k-1} & b_k & a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad k = 1, \dots, n$$

получаются из матрицы системы  $A$  заменой  $k$ -го столбца столбцом свободных членов этой системы.

## 2.7. Типовой расчет по теме „Решение СЛУ“ (ТР 1.1)

Студент получает индивидуальное задание, имеющее следующий вид:

**ТР 1.1. Вар. 22.** Решить СЛУ 1, 2, 3 методом Гаусса–Жордана, а СЛУ 4 с помощью формул Крамера.

$$\begin{aligned} 1. \quad & \begin{cases} -3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 1x_4 = 8, \\ 9x_1 - 6x_2 + 9x_3 + 1x_4 = -8, \\ 3x_1 + 0x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 17, \\ -6x_1 + 3x_2 - 10x_3 + 6x_4 = -21. \end{cases} & 2. \quad & \begin{cases} 1x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 19x_4 = -7, \\ -1x_1 + 0x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ -2x_1 - 3x_2 - 14x_3 - 27x_4 = 15, \\ 0x_1 + 0x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 4, \\ -2x_1 + 0x_2 - 8x_3 - 12x_4 = 12. \end{cases} \\ 3. \quad & \begin{cases} -2x_1 - 6x_2 - 14x_3 - 8x_4 = 12, \\ -3x_1 - 10x_2 - 23x_3 - 13x_4 = 21, \\ -5x_1 - 16x_2 - 37x_3 - 21x_4 = 33, \\ 10x_1 + 32x_2 + 74x_3 + 42x_4 = -66. \end{cases} & 4. \quad & \begin{cases} -1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 3x_4 = -11, \\ 1x_1 - 4x_2 + 0x_3 - 4x_4 = 18, \\ 3x_1 + 0x_2 - 5x_3 - 9x_4 = 28, \\ -2x_1 + 8x_2 - 2x_3 + 5x_4 = /1 - 29. \end{cases} \end{aligned}$$

### Пример выполнения ТР 1.1. Вар. 22.

1. Запишем расширенную матрицу системы, обозначив сверху переменные, соответствующие столбцам матрицы:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline -3 & 3 & -2 & -1 & 8 \\ 9 & -6 & 9 & 1 & -8 \\ 3 & 0 & 6 & -4 & 17 \\ -6 & 3 & -10 & 6 & -21 \end{array} \right).$$

**Шаг 1.** Выберем в качестве ведущего элемента  $a_{14}$ , переставим столбцы матрицы (отмечая их номера), поставив ведущий элемент на место 1,1 и поделим на него первую строку расширенной матрицы:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} x_4 & x_2 & x_3 & x_1 & \\ \hline 1 & -3 & 2 & 3 & -8 \\ 1 & -6 & 9 & 9 & -8 \\ -4 & 0 & 6 & 3 & 17 \\ 6 & 3 & -10 & -6 & -21 \end{array} \right)$$

Прибавляя ко 2-й строке 1-ю, умноженную на  $-1$ , к 3-й строке 1-ю, умноженную на 4 и к 4-й строке 1-ю, умноженную на  $-6$ , получим равносильную СЛУ с расширенной матрицей:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} x_4 & x_2 & x_3 & x_1 & \\ \hline 1 & -3 & 2 & 3 & -8 \\ 0 & -3 & 7 & 6 & 0 \\ 0 & -12 & 14 & 15 & -15 \\ 0 & 21 & -22 & -24 & 27 \end{array} \right).$$

**Шаг 2.** Выберем в качестве ведущего элемента  $a_{22}^{(1)}$  (перестановки не требуются) и поделим на него элементы второй строки:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} x_4 & x_2 & x_3 & x_1 & \\ \hline 1 & -3 & 2 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & -7/3 & -2 & 0 \\ 0 & -12 & 14 & 15 & -15 \\ 0 & 21 & -22 & -24 & 27 \end{array} \right).$$

Аналогично первому шагу с помощью допустимых преобразований 4-го типа исключим неизвестное  $x_2$  из всех уравнений системы, кроме второго уравнения:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} x_4 & x_2 & x_3 & x_1 & \\ \hline 1 & 0 & -5 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & -7/3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & -9 & -15 \\ 0 & 0 & 27 & 18 & 27 \end{array} \right).$$

**Шаг 3.** Выберем в качестве ведущего элемента  $a_{33}^{(2)}$  (перестановки не требуются) и поделим на него элементы третьей строки. Аналогично предыдущим шагам получим нули в третьем столбце во всех строках, кроме

третьей:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} x_4 & x_2 & x_3 & x_1 & -8 \\ 1 & 0 & -5 & -3 & \\ 0 & 1 & -7/3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9/14 & 15/14 \\ 0 & 0 & 27 & 18 & 27 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} x_4 & x_2 & x_3 & x_1 & -37/14 \\ 1 & 0 & 0 & 3/14 & -37/14 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 9/14 & 15/14 \\ 0 & 0 & 0 & 9/14 & -27/14 \end{array} \right).$$

**Шаг 4.** Выберем в качестве ведущего элемента  $a_{44}^{(3)}$  (перестановки не требуются) и поделим на него элементы четвертой строки. Теперь получим нули в четвертом столбце во всех строках, кроме четвертой:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} x_4 & x_2 & x_3 & x_1 & -37/14 \\ 1 & 0 & 0 & 3/14 & -37/14 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 9/14 & 15/14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} x_4 & x_2 & x_3 & x_1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right).$$

Итак, получили СЛУ с расширенной матрицей вида (2.14), равносильную исходной СЛУ. Следовательно, имеем решение

$$\begin{cases} x_1 = -3, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 3, \\ x_4 = -2. \end{cases}$$

Делаем проверку найденного решения:

$$\begin{cases} -3 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) = 8, \\ 9 \cdot (-3) - 6 \cdot 1 + 9 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) = -8, \\ 3 \cdot (-3) + 0 \cdot 1 + 6 \cdot 3 - 4 \cdot (-2) = 17, \\ -6 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 - 10 \cdot 3 + 6 \cdot (-2) = -21. \end{cases}$$

**2.** Запишем расширенную матрицу системы, обозначив сверху переменные, соответствующие столбцам матрицы (при этом не делаем перестановок строк и столбцов).

**Шаг 1.**

$$\left( \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & -7 \\ 1 & 3 & 9 & 19 & -7 \\ -1 & 0 & -3 & -4 & 4 \\ -2 & -3 & -14 & -27 & 15 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 4 \\ -2 & 0 & -8 & -12 & 12 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & -7 \\ 1 & 3 & 9 & 19 & -7 \\ 0 & 3 & 6 & 15 & -3 \\ 0 & 3 & 4 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 6 & 10 & 26 & -2 \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

### Шаг 2.

$$\Leftrightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & -7 \\ 1 & 3 & 9 & 19 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 6 & 10 & 26 & -2 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & -4 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 4 \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

### Шаг 3.

$$\Leftrightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & -4 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 4 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Последние две строки расширенной матрицы СЛУ состоят из нулей и их можно вычеркнуть:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{array} \right).$$

Итак получили СЛУ с расширенной матрицей вида (2.15), равносильную исходной СЛУ, следовательно, имеем систему:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_4 = 2, \\ x_2 + x_4 = 3, \\ x_3 + 2x_4 = -2. \end{cases}$$

Неизвестные  $x_1, x_2, x_3$  однозначно выражаются через неизвестное  $x_4$ , которое может принимать произвольные значения. Следовательно, все решения исходной системы имеют вид:

$$\begin{cases} x_1 = 2 + 2\alpha, \\ x_2 = 3 - \alpha, \\ x_3 = -2 - 2\alpha, \\ x_4 = \alpha, \end{cases}$$

где  $\alpha$  – произвольное число.

Проверка:

$$\begin{cases} 1 \cdot (2 + 2\alpha) + 3 \cdot (3 - \alpha) + 9 \cdot (-2 - 2\alpha) + 19 \cdot (\alpha) = -7, \\ -1 \cdot (2 + 2\alpha) + 0 \cdot (3 - \alpha) - 3 \cdot (-2 - 2\alpha) - 4 \cdot (\alpha) = 4, \\ -2 \cdot (2 + 2\alpha) - 3 \cdot (3 - \alpha) - 14 \cdot (-2 - 2\alpha) - 27 \cdot (\alpha) = 15, \\ 0 \cdot (2 + 2\alpha) + 0 \cdot (3 - \alpha) - 2 \cdot (-2 - 2\alpha) - 4 \cdot (\alpha) = 4, \\ -2 \cdot (2 + 2\alpha) + 0 \cdot (3 - \alpha) - 8 \cdot (-2 - 2\alpha) - 12 \cdot (\alpha) = 12. \end{cases}$$

**3.** Запишем расширенную матрицу системы, обозначив сверху переменные, соответствующие столбцам матрицы (перестановка строк и столбцов не делается).

$$\left( \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline -2 & -6 & -14 & -8 & 12 \\ -3 & -10 & -23 & -13 & 21 \\ -5 & -16 & -37 & -21 & 33 \\ 10 & 32 & 74 & 42 & -66 \end{array} \right).$$

**Шаг 1.**

$$\left( \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & -6 \\ \hline 1 & 3 & 7 & 4 & \\ -3 & -10 & -23 & -13 & 21 \\ -5 & -16 & -37 & -21 & 33 \\ 10 & 32 & 74 & 42 & -66 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & -6 \\ \hline 1 & 3 & 7 & 4 & -6 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & -6 \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

**Шаг 2.**

$$\Leftrightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & -6 \\ \hline 1 & 3 & 7 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & -6 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & -3 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Последние две строки расширенной матрицы СЛУ состоят из нулей и их можно вычеркнуть. Итак, мы получили СЛУ с расширенной матрицей вида (2.15), равносильную исходной СЛУ, следовательно имеем решение

$$\begin{cases} x_1 = -3 - \alpha - \beta, \\ x_2 = -3 - 2\alpha - \beta, \\ x_3 = \alpha, \\ x_4 = \beta, \end{cases}$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – произвольные числа.

Проверка:

$$\begin{cases} -2 \cdot (-3 - \alpha - \beta) - 6 \cdot (-3 - 2\alpha - \beta) - 14 \cdot (\alpha) - 8 \cdot (\beta) = 12, \\ -3 \cdot (-3 - \alpha - \beta) - 10 \cdot (-3 - 2\alpha - \beta) - 23 \cdot (\alpha) - 13 \cdot (\beta) = 21, \\ -5 \cdot (-3 - \alpha - \beta) - 16 \cdot (-3 - 2\alpha - \beta) - 37 \cdot (\alpha) - 21 \cdot (\beta) = 33, \\ 10 \cdot (-3 - \alpha - \beta) + 32 \cdot (-3 - 2\alpha - \beta) + 74 \cdot (\alpha) + 42 \cdot (\beta) = -66. \end{cases}$$

4. Решаем СЛУ используя теорему и формулы Крамера. Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 3 & -11 \\ 1 & -4 & 0 & -4 & 18 \\ 3 & 0 & -5 & -9 & 28 \\ -2 & 8 & -2 & 5 & -29 \end{array} \right).$$

Сначала вычисляем определитель матрицы СЛУ:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & -5 & -9 \\ -2 & 8 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -4 & -1 \end{bmatrix} = \\ &= (-1) \det \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 6 & -4 & -1 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \\ &= 3 \det \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = 3(3 - 2) = 3 \neq 0. \end{aligned}$$

Заметим, что для вычисления определителя второго порядка не использовалась явная формула.

Так как  $\det(A) = 3 \neq 0$ , то согласно теореме 2.4 СЛУ имеет единственное решение, которое может быть получено по формулам Крамера (см. (2.21)).

При формировании матриц  $B_i$  следует в матрице СЛУ  $A$  заменить  $i$ -й столбец столбцом свободных членов (в данном случае  $i = 1, 2, 3, 4$ ).

Сформируем матрицы  $B_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) и вычислим их определители (для экономии места подробные вычисления опущены). Отметим, что для удобства вычислений можно воспользоваться свойством перестановки столбцов матрицы (см. описание шага 1 вычисления определителя):

$$\det(B_1) = \det \begin{bmatrix} -11 & 1 & 1 & 3 \\ 18 & -4 & 0 & -4 \\ 28 & 0 & -5 & -9 \\ -29 & 8 & -2 & 5 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 1 & -11 & 1 & 3 \\ -4 & 18 & 0 & -4 \\ 0 & 28 & -5 & -9 \\ 8 & -29 & -2 & 5 \end{bmatrix} = 6,$$

$$\det(B_2) = \det \begin{bmatrix} -1 & -11 & 1 & 3 \\ 1 & 18 & 0 & -4 \\ 3 & 28 & -5 & -9 \\ -2 & -29 & -2 & 5 \end{bmatrix} = -3,$$

$$\det(B_3) = \det \begin{bmatrix} -1 & 1 & -11 & 3 \\ 1 & -4 & 18 & -4 \\ 3 & 0 & 28 & -9 \\ -2 & 8 & -29 & 5 \end{bmatrix} = 3,$$

$$\det(B_4) = \det \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -11 \\ 1 & -4 & 0 & 18 \\ 3 & 0 & -5 & 28 \\ -2 & 8 & -2 & -29 \end{bmatrix} = -9.$$

Находим решение СДУ по формулам Крамера (см. (2.21)):

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\det(B_1)}{\det(A)} = \frac{6}{3} = 2, \\ x_2 = \frac{\det(B_2)}{\det(A)} = \frac{-3}{3} = -1, \\ x_3 = \frac{\det(B_3)}{\det(A)} = \frac{3}{3} = 1, \\ x_4 = \frac{\det(B_4)}{\det(A)} = \frac{-9}{3} = -3. \end{cases}$$

Проверка:  $\begin{cases} -2 - 1 + 1 - 9 = -11, \\ 2 + 4 + 0 + 12 = 18, \\ 6 + 0 - 5 + 27 = 28, \\ -4 - 8 - 2 - 15 = -29. \end{cases}$

**Ответ:**

$$1. \begin{cases} x_1 = -3, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 3, \\ x_4 = -2. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x_1 = 2 + 2\alpha, \\ x_2 = 3 - \alpha, \\ x_3 = -2 - 2\alpha, \\ x_4 = \alpha. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x_1 = -3 - \alpha - \beta, \\ x_2 = -3 - 2\alpha - \beta, \\ x_3 = \alpha, \\ x_4 = \beta. \end{cases} \quad 4. \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 1, \\ x_4 = -3. \end{cases}$$

В ответе  $\alpha$  и  $\beta$  – произвольные числа.

### 3. РЕШЕНИЕ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

Подробное изложение теории с доказательствами, необходимое для выполнения ТР данного раздела можно найти в учебнике [2], а также в учебном пособии [3].

#### 3.1. Матричные уравнения

Пусть  $A$  и  $B$  — заданные числовые матрицы размером  $m \times n$  и  $m \times k$  соответственно. Запишем уравнение

$$AX = B. \quad (3.1)$$

Здесь искомый объект — матрица  $X$  размером  $n \times k$ .

Обозначая в уравнении (3.1)

$$X = [X_{(1)} \ X_{(2)} \ \cdots \ X_{(k)}], \quad B = [B_{(1)} \ B_{(2)} \ \cdots \ B_{(k)}],$$

где  $X_{(i)}$ ,  $B_{(i)}$  —  $i$ -е столбцы матриц  $X$  и  $B$  соответственно, легко видеть, что равенство столбцов матричного уравнения

$$A [X_{(1)} \ X_{(2)} \ \cdots \ X_{(k)}] = [B_{(1)} \ B_{(2)} \ \cdots \ B_{(k)}]$$

приводит к матричным уравнениям

$$AX_{(1)} = B_{(1)}, \quad AX_{(2)} = B_{(2)}, \quad \dots, \quad AX_{(k)} = B_{(k)}, \quad (3.2)$$

каждое из которых представляет собой систему из  $m$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными. Все эти системы имеют *общую матрицу*  $A$ . Решая эти системы (например, методом Гаусса–Жордана), можно последовательно найти все столбцы  $X_{(i)}$  искомой матрицы  $X$ .

Отметим, что при решении системы методом полного исключения шаги алгоритма определяются матрицей системы  $A$ . Следовательно, для всех  $k$  систем (3.2) все шаги метода Гаусса–Жордана будут одинаковыми — различия только в столбцах свободных членов. В связи с этим системы уравнений (3.2), получающиеся при “расщеплении” матричного уравнения, целесообразно решать все сразу, записывая расширенную матрицу, соответствующую матричному уравнению (3.1), в виде

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mk} \end{array} \right) \quad (3.3)$$

и выполняя, как обычно, все шаги алгоритма полного исключения.

**Замечание 3.1.** Отметим, что если алгоритм заканчивается получением системы с единичной матрицей порядка  $n$

$$\left( \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{21} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{n1} & \cdots & c_{nk} \end{array} \right)$$

(это возможно только, если  $m \geq n$ ) и порядок следования неизвестных в уравнениях не менялся (столбцы не переставлялись), то искомая матрица  $X$  совпадает с получающейся справа от черты матрицей:

$$X = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим теперь матричное уравнение вида

$$XA = B, \quad (3.4)$$

где матрицы  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ ,  $B \in \mathcal{M}_{k \times n}$  и, следовательно,  $X \in \mathcal{M}_{k \times m}$ .

**Замечание 3.2.** Транспонируя обе части уравнения (3.4), получаем:

$$A^T X^T = B^T. \quad (3.5)$$

Матричное уравнение (3.5) есть матричное уравнение вида (3.1). Решая его, находим матрицу  $X^T$  и, транспонируя результат, получаем искомую матрицу  $X$ .

### 3.2. Обратная матрица

**Определение 3.1.** Пусть  $A$  – квадратная матрица. Если

$$AX = I, \quad (3.6)$$

где  $I$  – единичная матрица того же порядка, что и матрица  $A$ , то матрицу  $X$  называют обратной матрицей для  $A$ . Обратную матрицу обозначают  $X = A^{-1}$ .

**Утверждение 3.1.** Если для квадратной матрицы  $A$  существует обратная матрица  $A^{-1}$ , то  $A^{-1}A = I$ .

**Теорема 3.1.** Произвольная невырожденная квадратная матрица имеет единственную обратную.

Обратную матрицу можно найти решая матричное уравнение (3.6) методом Гаусса – Жордана с расширенной матрицей вида (3.3)

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right).$$

Обратная матрица может быть также найдена с использованием формулы Крамера (см. [1]).

**Утверждение 3.2.** Элемент обратной матрицы, стоящий в  $i$ -й строке и  $k$ -м столбце:

$$x_{ik} = A_{ki}/\det(A). \quad (3.7)$$

**Утверждение 3.3.** Формула (3.7) позволяет получить алгоритм построения матрицы  $A^{-1}$ , обратной матрице  $A$ :

- 1) заменяем каждый элемент матрицы  $A$  его алгебраическим дополнением;
- 2) полученную матрицу транспонируем, получаем матрицу  $A^{\Pi}$ , которая называется присоединенной по отношению к матрице  $A$ ;
- 3) каждый элемент присоединенной матрицы делим на  $\det(A)$ , т. е. умножаем матрицу  $A^{\Pi}$  на  $1/\det(A)$ .

Указанный алгоритм используют для матриц невысокого порядка и при проведении символьных вычислений.

### 3.3. Типовой расчет по теме „Решение матричных уравнений и нахождение обратной матрицы“ (ТР 1.2)

Студент получает индивидуальное задание, имеющее следующий вид:

**TP 1.2. Вар. 12.1.** Решить матричное уравнение  $XA = B$ . 2. Найти матрицу  $D^{-1}$ , обратную для  $D$ . 3. Решить матричное уравнение  $C + DY = F$  с помощью обратной матрицы  $D^{-1}$ .

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 3 & -8 \\ 2 & -4 & -3 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -7 & -4 & 13 \\ 0 & 4 & 1 & -5 \\ -7 & 12 & 10 & -29 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 8 & -6 & -5 \\ 4 & -5 & 1 \\ -6 & 5 & 16 \\ -5 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 1 \\ -3 & 10 & 8 & -5 \\ 2 & -8 & -7 & 4 \\ 3 & -8 & -6 & 6 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} -3 & -23 & 10 \\ 38 & 58 & -57 \\ -33 & -46 & 64 \\ -29 & -53 & 55 \end{bmatrix}.$$

### Пример выполнения ТР 1.2. Вар. 12.

1. Решаем матричное уравнение  $XA = B$ . Данное уравнение имеет вид (3.4), поэтому согласно замечанию 3.2, решаем уравнение (3.5)  $A^T X^T = B^T$ . Записываем расширенную матрицу  $(A^T | B^T)$  и применяем метод Гаусса–Жордана.

#### Шаг 1.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 2 & 0 & -7 \\ -1 & 3 & -4 & -7 & 4 & 12 \\ -1 & 3 & -3 & -4 & 1 & 10 \\ 3 & -8 & 9 & 13 & -5 & -29 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 7 & -5 & -8 \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

#### Шаг 2.

$$\Leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -8 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 3 & 2 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -8 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

Последняя строка состоит из одних нулей и может быть вычеркнута.

#### Шаг 3.

$$\Leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 & -2 \end{array} \right). \text{ Следовательно: } X^T = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{и } X = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

**Проверка.** Перемножим матрицы  $X$  и  $A$  (используя формулу (2.3)):

$$XA = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 3 & -8 \\ 2 & -4 & -3 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -7 & -4 & 13 \\ 0 & 4 & 1 & -5 \\ -7 & 12 & 10 & -29 \end{bmatrix}.$$

2. Найдем матрицу  $D^{-1}$ , обратную для  $D$ . Нахождение обратной матрицы равносильно решению матричного уравнения  $DD^{-1} = I$ . Составим для него расширенную матрицу  $(D|I)$  и методом Гаусса–Жордана (не переставляя столбцы) приведем ее к виду  $(I|D^{-1})$ .

#### Шаг 1.

$$\left( \begin{array}{cccc|ccccc} 1 & -3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 10 & 8 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & -7 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -8 & -6 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left( \begin{array}{cccc|ccccc} 1 & -3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

**Шаги 2,3.** На шаге 2 сначала сделаны перестановки 2-й и 4-й строк.

$$\Leftrightarrow \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 4 & -5 & 10 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 6 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -6 & -5 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -2 & -3 & -2 & -1 \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

**Шаг 4.**

$$\Leftrightarrow \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -12 & -14 & -10 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -9 & -9 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 & 8 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right), D^{-1} = \begin{bmatrix} -12 & -14 & -10 & -3 \\ -9 & -9 & -6 & -2 \\ 8 & 8 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Проверка.** Перемножим матрицы  $D$  и  $D^{-1}$ :

$$DD^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 1 \\ -3 & 10 & 8 & -5 \\ 2 & -8 & -7 & 4 \\ 3 & -8 & -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12 & -14 & -10 & -3 \\ -9 & -9 & -6 & -2 \\ 8 & 8 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

**3.** Решаем матричное уравнение  $C + DY = F$ . Вычтем из обеих частей уравнения матрицу  $C$  получим равносильное уравнение  $DY = F - C = G$ . Вычислим  $F - C =$

$$F - C = \begin{bmatrix} -11 & -17 & 15 \\ 34 & 63 & -58 \\ -27 & -51 & 48 \\ -24 & -55 & 51 \end{bmatrix} = G.$$

Очевидно, что  $Y = D^{-1}G$ :

$$Y = \begin{bmatrix} -12 & -14 & -10 & -3 \\ -9 & -9 & -6 & -2 \\ 8 & 8 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -11 & -17 & 15 \\ 34 & 63 & -58 \\ -27 & -51 & 48 \\ -24 & -55 & 51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

**Проверка.** Подставляя  $Y$  в уравнение  $C + DY = F$  убеждаемся, что получили тождество. Для экономии места вычисление не приводим.

$$\text{Ответ: } X = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, D^{-1} = \begin{bmatrix} -12 & -14 & -10 & -3 \\ -9 & -9 & -6 & -2 \\ 8 & 8 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что обратную матрицу целесообразно использовать для решения матричных уравнений в тех случаях, когда обратная матрица уже известна или когда количество столбцов матрицы  $F$  больше порядка матрицы  $D$ .

## 4. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Подробное изложение теории, необходимой для выполнения ТР данного раздела, можно найти в учебнике [2], а также в учебном пособии [3].

### 4.1. Векторы. Координаты векторов

Выберем в пространстве декартову прямоугольную систему координат

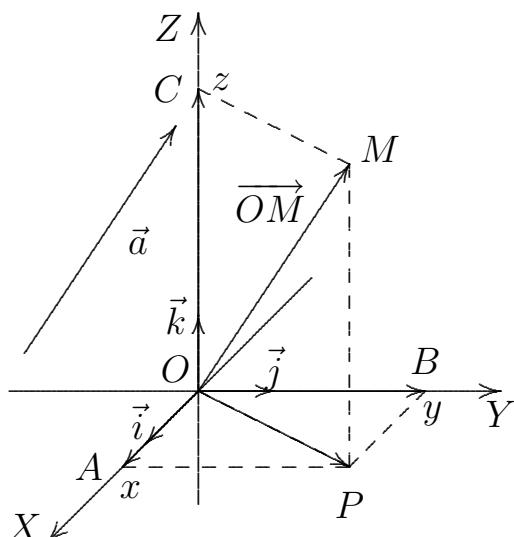


Рис. 4.1

$OXYZ$  с началом координат в точке  $O$  (рис. 4.1). На координатных осях  $OX$ ,  $OY$  и  $OZ$  возьмем единичные векторы  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  и  $\vec{k}$  соответственно, которые называются координатными ортами. Считаем, что масштаб на координатных осях совпадает с выбранным масштабом для измерения длин векторов. В силу основного предположения о неизменности векторов при параллельном переносе, можно считать, что любой вектор  $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ , т. е. совпадает с вектором, имеющим начало в точке  $O$  и однозначно определяемым своей конечной точкой  $M(x; y; z)$ , где  $x, y, z$  –

координаты точки  $M$  в выбранной системе координат. Отметим, что вектор  $\overrightarrow{OM}$  часто называют радиусом-вектором точки  $M$ . При этом, если  $A$ ,  $B$  и  $C$  – проекции точки  $M$  на координатные оси  $OX$ ,  $OY$  и  $OZ$  (рис. 4.1), то  $x$ ,  $y$  и  $z$  – координаты точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  на соответствующих осях. Заметим, что точкам  $A$ ,  $B$  и  $C$  соответствуют векторы  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$  и  $\overrightarrow{OC}$ , причем очевидны равенства (следуют из правила умножения вектора на число)

$$\overrightarrow{OA} = x\vec{i}, \quad \overrightarrow{OB} = y\vec{j}, \quad \overrightarrow{OC} = z\vec{k}. \quad (4.1)$$

Из правила сложения векторов (по правилу параллелограмма) следует, что

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \quad (\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}),$$

и с учетом (4.1) получаем:

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (4.2)$$

Итак, любой вектор  $\vec{a}$  однозначно представим в виде (4.2). Числа  $x$ ,  $y$  и  $z$  называют координатами (проекциями) этого вектора.

Будем записывать координаты вектора в виде матрицы-столбца:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Поскольку при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число, а при сложении векторов их соответствующие координаты складываются, справедливы следующие формулы:

$$\lambda\vec{a} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{bmatrix}; \quad (4.4)$$

если  $\vec{a} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$ , то

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Формулы (4.4), (4.5) показывают, что при использовании записи векторов в виде одностолбцовых матриц (4.3) операции умножения векторов на число и сложения векторов совпадают с аналогичными операциями над матрицами.

Множество всех пространственных (трехмерных) векторов будем обозначать  $\mathbb{R}^3$  (это обозначение оправдано соотношением (4.3) – любой вектор в выбранной системе координат однозначно представим упорядоченной тройкой вещественных чисел).

В заключение приведем формулы для вычисления длины вектора  $\vec{a}$ .

Если  $\vec{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ , то

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (4.6)$$

Если точки  $M_1(x_1; y_1; z_1)$  и  $M_2(x_2; y_2; z_2)$  задают вектор  $\overrightarrow{M_1 M_2}$ , то

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

и в силу (4.6), (4.7)

$$\left| \overrightarrow{M_1 M_2} \right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (4.8)$$

Таким образом, формула (4.8) определяет расстояние между точками  $M_1$  и  $M_2$ .

## 4.2. Скалярное, векторное и смешанное произведения

**Определение 4.1.** Для любых двух векторов  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$  их скалярным произведением называется число:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}), \quad (4.9)$$

где  $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$  – угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  ( $0 \leq (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) \leq \pi$ ).

Если хотя бы один из векторов  $\vec{a}$  или  $\vec{b}$  – нулевой (в этом случае угол между векторами не определен), то  $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ .

Если  $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ , то формула для вычисления скалярного произведения имеет вид

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \quad (4.10)$$

Ясно, что условием перпендикулярности (ортогональности) векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  (пишут  $\vec{a} \perp \vec{b}$ ) служит равенство нулю их скалярного произведения (см. формулу (4.9)). При этом предполагается, что нулевой вектор ортогонален любому другому вектору.

**Определение 4.2.** Векторным произведением  $\vec{a} \times \vec{b}$  векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  из  $\mathbb{R}^3$  называется вектор  $\vec{c}$ , такой, что:

- 1) вектор  $\vec{c}$  ортогонален векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ;
- 2)  $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ ;
- 3) векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  (если  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  неколлинеарны) образуют правую тройку.

Из определения следует, что равенство  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$  равносильно коллинеарности векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Заметим также, что для неколлинеарных векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  длина их векторного произведения численно равна площади параллелограмма, построенного на этих векторах как на сторонах.

**Утверждение 4.1.** Векторное произведение обладает следующими свойствами:

- 1) антикоммутативностью:  $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ ;
- 2) если  $\lambda$  — число, то  $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ ;
- 3) дистрибутивностью:

$$(\vec{a} + \vec{c}) \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{c} \times \vec{b}$$

и

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

**Утверждение 4.2.** Для векторов  $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$  и  $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$  их векторное произведение вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \vec{i}(a_2 b_3 - a_3 b_2) - \vec{j}(a_1 b_3 - a_3 b_1) + \vec{k}(a_1 b_2 - a_2 b_1) = \\ &= \vec{i} \det \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix} - \vec{j} \det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix} + \vec{k} \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Формулу (4.11) часто записывают в виде „символического“ определителя:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & a_1 & b_1 \\ \vec{j} & a_2 & b_2 \\ \vec{k} & a_3 & b_3 \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

формальное разложение которого по первому столбцу совпадает с (4.11).

**Определение 4.3.** Скалярное произведение вектора  $\vec{a}$  на векторное произведение векторов  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ :  $\lambda = (\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c})$  называется смешанным произведением векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ .

Очевидно, смешанное произведение трех векторов  $\lambda = (\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c})$  есть число.

Можно показать, что  $(\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})$ , и поэтому смешанное произведение трех векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  записывают в виде  $\lambda = \vec{a} \vec{b} \vec{c}$ .

Зная координаты векторов, смешанное произведение можно вычислить по формуле

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Если  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  — некомпланарны, то

$$|\vec{a} \vec{b} \vec{c}| = V, \quad (4.14)$$

где  $V$  – объем параллелепипеда, построенного на этих векторах как на ребрах (исходящих из одной вершины параллелепипеда).

### 4.3. Уравнения плоскости

Рассмотрим в пространстве произвольную плоскость  $\Pi$ . Фиксируем некоторую декартову прямоугольную систему координат. Положение плоскости в пространстве однозначно определяется какой-либо точкой  $M_0$  с координатами  $(x_0; y_0; z_0)$ , принадлежащей этой плоскости, и нормальным вектором  $\vec{n} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$  (ненулевым вектором, перпендикулярным плоскости).

Возьмем произвольную точку  $M(x; y; z)$ , лежащую в плоскости  $\Pi$ . Тогда вектор  $\overrightarrow{M_0M}$  лежит в этой плоскости, и потому  $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$ , т. е.

$$(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0. \quad (4.15)$$

Если точка  $M$  не лежит в плоскости  $\Pi$ , то вектор  $\overrightarrow{M_0M}$  не перпендикулярен вектору  $\vec{n}$ , и тогда  $(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}) \neq 0$ . Таким образом, (4.15) является векторным уравнением рассматриваемой плоскости.

Запишем это уравнение в координатной форме. Поскольку  $\overrightarrow{M_0M} = \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix}$ , уравнение (4.15) с учетом (4.10) принимает вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (4.16)$$

Раскрывая в (4.16) скобки и обозначая  $-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$ , можем записать это уравнение в виде

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 > 0). \quad (4.17)$$

Уравнение вида (4.17) называют общим уравнением плоскости.

Выведем уравнение плоскости, проходящей через 3 заданные точки  $M_1(x_1; y_1; z_1)$ ,  $M_2(x_2; y_2; z_2)$  и  $M_3(x_3; y_3; z_3)$ , не лежащие на одной прямой. Пусть  $M(x; y; z)$  – произвольная точка этой плоскости. Тогда 3 вектора  $\overrightarrow{M_1M}$ ,  $\overrightarrow{M_1M_2}$  и  $\overrightarrow{M_1M_3}$  лежат в данной плоскости, т. е. являются компланарными, и поэтому их смешанное произведение равно нулю:

$$\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0. \quad (4.18)$$

Если точка  $M$  не лежит в рассматриваемой плоскости, то, разумеется, векторы  $\overrightarrow{M_1M}$ ,  $\overrightarrow{M_1M_2}$ ,  $\overrightarrow{M_1M_3}$  не являются компланарными и условие (4.18) в этом случае не выполняется. Таким образом, (4.18) является векторным

уравнением плоскости, проходящей через 3 точки. Запишем это уравнение в координатной форме. Имеем:

$$\overrightarrow{M_1M} = \begin{bmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \\ z - z_1 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{M_1M_2} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{bmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \end{bmatrix}$$

и с учетом (4.13) получаем уравнение вида

$$\det \begin{bmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ z - z_1 & z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{bmatrix} = 0. \quad (4.19)$$

Пусть заданы две плоскости  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ :

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0. \end{aligned}$$

Обозначим через  $\vec{n}_1 = [A_1 \ B_1 \ C_1]^T$ ,  $\vec{n}_2 = [A_2 \ B_2 \ C_2]^T$  нормальные векторы плоскостей  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  соответственно, а через  $\beta$  – угол между этими векторами:  $\beta = (\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ .

**Определение 4.4.** Углом  $\alpha = (\widehat{\Pi_1, \Pi_2})$  между плоскостями  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  называется угол  $\beta$ , если  $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ , либо угол  $\pi - \beta$ , если  $\frac{\pi}{2} < \beta \leq \pi$ .

Согласно этому определению угол  $\alpha = (\widehat{\Pi_1, \Pi_2})$  всегда принадлежит отрезку  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , при этом

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos (\widehat{\Pi_1, \Pi_2}) = |\cos \beta| = \left| \cos (\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}) \right| = \frac{|(\vec{n}_1, \vec{n}_2)|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \\ &= \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

#### 4.4. Уравнения прямой

Известно, что пересечением двух несовпадающих и непараллельных плоскостей является прямая. Верно и обратное утверждение: любая прямая в пространстве принадлежит по крайней мере двум различным плоскостям. Следовательно, прямая в пространстве может быть задана системой двух линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (4.21)$$

Прямую  $L$  в пространстве можно задать и другими способами. Например, можно задать одну точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  на данной прямой и

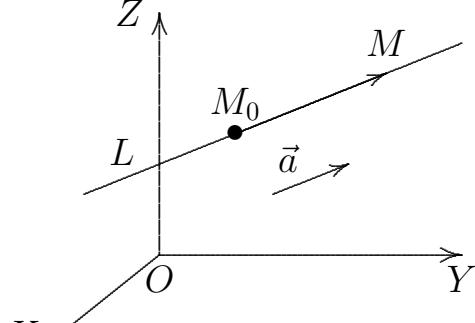


Рис. 4.2

направляющий вектор  $\vec{a} = \begin{bmatrix} m \\ n \\ p \end{bmatrix}$  —

любой ненулевой вектор, параллельный прямой или лежащий на данной прямой (рис. 4.2). Пусть  $M(x, y, z)$  — произвольная точка на прямой  $L$ , тогда ясно, что вектор  $\overrightarrow{M_0M}$  коллинеарен  $\vec{a}$ , т. е. найдется такое вещественное число  $t$ , что  $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}$ . Верно и обратное: если  $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}$ , то

$M(x, y, z)$  лежит на данной прямой. Таким образом,

$$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (4.22)$$

— уравнение данной прямой. Запишем (4.22) в координатах:

$$\begin{cases} x - x_0 = tm, \\ y - y_0 = tn, \\ z - z_0 = tp, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + tn, \\ z = z_0 + tp, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.23)$$

Уравнения (4.23) называют параметрическими уравнениями прямой в пространстве. Исключая из уравнений (4.23) параметр  $t$ , получаем:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \quad (4.24)$$

Уравнения (4.24) называют каноническими уравнениями прямой в пространстве. Заметим, что если одна из координат вектора  $\vec{a}$  равна нулю, например, если  $m = 0$ , то  $x - x_0 = 0$  или  $x = x_0$ , и нуль в знаменателе дроби в (4.24) означает, таким образом, что и числитель равен нулю.

Если прямая задана системой уравнений (4.21), то параметрические уравнения (4.22) легко получить следующим образом. В качестве направляющего вектора прямой можно взять  $\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ , где  $\vec{n}_1 = \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{bmatrix}$

$\vec{n}_2 = \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{bmatrix}$ , а в качестве координат точки  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  — любое решение системы (4.21).

**Пример 4.1.** Найти уравнение прямой, проходящей через две точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ . Ясно, что в этом случае в качестве  $M_0$  можно взять любую из этих точек, например  $M_1$ , а в качестве направляющего вектора прямой можно взять  $\vec{a} = \overrightarrow{M_1 M_2}$ , т. е.

$$\vec{a} = \overrightarrow{M_1 M_2} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \\ p \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Подставляя (4.25) в (4.23), получаем:

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1), \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1), \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.26)$$

а уравнения (4.24) принимают вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (4.27)$$

Итак, получили (4.26) – параметрические уравнения прямой и (4.27) – канонические уравнения прямой, проходящей через две точки.

В учебном пособии [3] приведены уравнения отрезка прямой и формулы, определяющие его деление в заданном отношении. Приведем здесь только формулы координат середины отрезка  $M_1 M_2$ :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (4.28)$$

Пусть даны прямая  $L$  с направляющим вектором  $\vec{a} = [m \ n \ p]^T$  и плоскость  $\Pi$  с нормальным вектором  $\vec{n} = [A \ B \ C]^T$ . Обозначим  $\gamma = (\widehat{\vec{a}, \vec{n}})$ .

**Определение 4.5.** Углом  $\beta = (\widehat{L, \Pi})$  между прямой  $L$  и плоскостью  $\Pi$  называется угол  $\beta = \frac{\pi}{2} - \gamma$ , если  $0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2}$ , либо угол  $\beta = \gamma - \frac{\pi}{2}$ , если  $\frac{\pi}{2} < \gamma \leq \pi$ .

Из этого определения следует, что угол  $\beta = (\widehat{L, \Pi})$  всегда принадлежит отрезку  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , при этом

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \sin (\widehat{L, \Pi}) = |\cos \gamma| = \left| \cos (\widehat{\vec{a}, \vec{n}}) \right| = \frac{|(\vec{a}, \vec{n})|}{|\vec{a}| |\vec{n}|} = \\ &= \frac{|mA + nB + pC|}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

#### 4.5. Типовой расчет по теме „Аналитическая геометрия“ (TP 1.3 (д. ф.))

Студент получает индивидуальное задание, имеющее следующий вид:

**TP 1.3 (д. ф.). Вар. 30.** Заданы вершины пирамиды:

$A_1(-3, 8, -7)$ ,  $A_2(-8, 3, 3)$ ,  $A_3(2, -2, -2)$ ,  $A_4(2, 8, 3)$ . Требуется найти:

1. Угол  $\alpha$  между плоскостями  $(A_1A_2A_3)$  и  $(A_2A_3A_4)$ . 2. Угол  $\beta$  между прямой  $(A_1A_4)$  и плоскостью  $(A_1A_2A_3)$ . 3. Площадь треугольника  $A_1A_2A_3$ .

4. Объем пирамиды  $A_1A_2A_3A_4$ . 5. Точку  $A_5$ , симметричную  $A_4$  относительно плоскости  $(A_1A_2A_3)$ . 6. Точку  $A_6$ , симметричную  $A_4$  относительно прямой  $(A_2A_3)$ .

Данное задание предназначено для студентов дневных факультетов.

**Пример выполнения TP 1.3 (д. ф.). Вар. 30.** Для геометрической наглядности сделаем схематический чертеж пирамиды. На рис. 4.3 исполь-

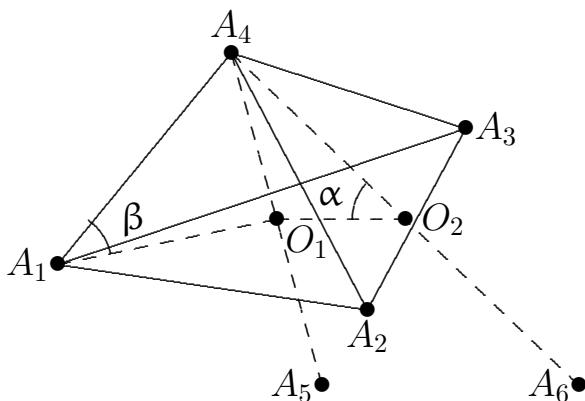


Рис. 4.3

зованы следующие обозначения:  $\alpha$  – угол между плоскостями  $(A_1A_2A_3)$  и  $(A_2A_3A_4)$ ,  $\beta$  – угол между прямой  $(A_1A_4)$  и плоскостью  $(A_1A_2A_3)$ , точка  $A_5$  симметрична точке  $A_4$  относительно плоскости  $(A_1A_2A_3)$ , точка  $A_6$  симметрична точке  $A_4$  относительно прямой  $(A_2A_3)$ . Точка  $O_1$  – середина отрезка  $A_4A_5$ , а точка  $O_2$  – середина отрезка  $A_4A_6$ . Прямая  $(A_4O_1)$  перпендикулярна плоскости  $(A_1A_2A_3)$ , а прямая  $(A_4O_2)$

лежит в плоскости  $(A_2A_3A_4)$  и перпендикулярна прямой  $(A_2A_3)$ .

1. Найдем угол  $\alpha$  между плоскостями  $(A_1A_2A_3)$  и  $(A_2A_3A_4)$ . Согласно формуле (4.19) уравнение плоскости  $(A_1A_2A_3)$  имеет вид:

$$\det \begin{bmatrix} x+3 & -5 & 5 \\ y-8 & -5 & -10 \\ z+7 & 10 & 5 \end{bmatrix} = 0; \quad (x+3)75 - (y-5)(-75) + (z+7)75 = 0$$

или

$$x + y + z + 2 = 0. \quad (4.30)$$

Вектор нормали к плоскости  $(A_1A_2A_3)$  есть  $\vec{n}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  (см. (4.17)).

Аналогично находим уравнение плоскости ( $A_2A_3A_4$ ):

$$\det \begin{bmatrix} x+8 & 10 & 10 \\ y-3 & -5 & 5 \\ z-3 & -5 & 0 \end{bmatrix} = 0; \quad (x+8)25 - (y-3)50 + (z-3)100 = 0$$

или

$$x - 2y + 4z - 12 = 0.$$

Вектор нормали к плоскости ( $A_2A_3A_4$ ) есть  $\vec{n}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ .

Согласно формуле (4.20)

$$\cos \alpha = \left| \cos (\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}) \right| = \frac{|(\vec{n}_1, \vec{n}_2)|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{|1 - 2 + 4|}{\sqrt{3} \sqrt{21}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \approx 0.378,$$

следовательно,  $\alpha = \arccos(\frac{1}{\sqrt{7}}) \approx 1.183$ .

**2.** Найдем угол  $\beta$  между прямой ( $A_1A_4$ ) и плоскостью ( $A_1A_2A_3$ ). Вектор  $\overrightarrow{A_1A_4} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$  коллинеарен вектору  $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ , следовательно, согласно формуле (4.29)

$$\sin \beta = \left| \cos (\widehat{\vec{n}_1, \vec{a}}) \right| = \frac{|(\vec{n}_1, \vec{a})|}{|\vec{n}_1| |\vec{a}|} = \frac{|1 + 0 + 2|}{\sqrt{3} \sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3}{5}} \approx 0.775$$

и  $\beta = \arcsin(\sqrt{\frac{3}{5}}) \approx 0.886$ .

**3.** Найдем площадь треугольника  $A_1A_2A_3$ . Согласно определению 4.2 векторного произведения длина вектора  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Следовательно, площадь треугольника  $A_1A_2A_3$   $S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}|$ . Находим  $\overrightarrow{A_1A_2} = \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \\ 10 \end{bmatrix}$ ,

$\overrightarrow{A_1A_3} = \begin{bmatrix} 5 \\ -10 \\ 5 \end{bmatrix}$ . Тогда (см. (4.12))

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} \vec{i} & -5 & 5 \\ \vec{j} & -5 & -10 \\ \vec{k} & 10 & 5 \end{bmatrix} \right| = \frac{25}{2} \left| \det \begin{bmatrix} \vec{i} & -1 & 1 \\ \vec{j} & -1 & -2 \\ \vec{k} & 2 & 1 \end{bmatrix} \right| = \\ &= \frac{25}{2} \left| 3\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k} \right| = \frac{25}{2} 3\sqrt{3} = \frac{75\sqrt{3}}{2} \approx 64.952. \end{aligned}$$

4. Объем  $V$  пирамиды  $A_1A_2A_3A_4$ , очевидно, равен  $\frac{1}{6}$  объема параллелепипеда, построенного на векторах  $\overrightarrow{A_1A_2}$ ,  $\overrightarrow{A_1A_3}$ ,  $\overrightarrow{A_1A_4}$ . Согласно формулам (4.14) и (4.13) находим:

$$V = \frac{1}{6} |\overrightarrow{A_1A_2} \overrightarrow{A_1A_3} \overrightarrow{A_1A_4}| = \frac{1}{6} \left| \det \begin{bmatrix} -5 & 5 & 5 \\ -5 & -10 & 0 \\ 10 & 5 & 10 \end{bmatrix} \right| = \frac{375}{2} = 187.5.$$

5. Найдем точку  $A_5$ , симметричную точке  $A_4$  относительно плоскости  $(A_1A_2A_3)$ . В п. 1 было найдено уравнение плоскости  $(A_1A_2A_3)$ :

$$x + y + z + 2 = 0.$$

Найдем уравнение прямой  $A_4O_1$ , проходящей через точку  $A_4$  (см. рис. 4.3) перпендикулярно плоскости  $(A_1A_2A_3)$ . Ясно, что нормальный вектор  $\vec{n}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  плоскости  $(A_1A_2A_3)$  является направляющим вектором прямой  $A_4O_1$  и поэтому согласно (4.23):

$$\begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 8 + t, \\ z = 3 + t. \end{cases} \quad (4.31)$$

Найдем координаты точки  $O_1$  пересечения прямой  $A_4O_1$  и плоскости  $(A_1A_2A_3)$ . Для этого вычислим значение параметра  $t$ , при котором точка  $O_1$  одновременно принадлежит прямой  $(A_4O_1)$  и плоскости  $(A_1A_2A_3)$ :

$$\begin{cases} x + y + z + 2 = 0, \\ x = 2 + t, \\ y = 8 + t, \\ z = 3 + t \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} (2 + t) + (8 + t) + (3 + t) + 2 &= 0 \Leftrightarrow \\ 3t + 15 &= 0 \Leftrightarrow t = -5. \end{aligned}$$

Подставляя в (4.31)  $t = -5$  находим координаты точки  $O_1$ :  $(-3, 3, -2)$ . Точка  $A_5$  симметрична точке  $A_4$ , значит, точка  $O_1$  – середина отрезка  $A_4A_5$  и согласно (4.28):

$$x_{O_1} = \frac{x_{A_4} + x_{A_5}}{2}, \quad y_{O_1} = \frac{y_{A_4} + y_{A_5}}{2}, \quad z_{O_1} = \frac{z_{A_4} + z_{A_5}}{2}.$$

Из этих уравнений находим координаты точки  $A_5$ :

$$-3 = \frac{2 + x_{A_5}}{2}, \quad 3 = \frac{8 + y_{A_5}}{2}, \quad -2 = \frac{3 + z_{A_5}}{2} \Rightarrow A_5(-8, -2, -7).$$

6. Найдем точку  $A_6$ , симметричную  $A_4$  относительно прямой  $(A_2A_3)$ .

Найдем координаты вектора  $\overrightarrow{A_2A_3}$ :  $\overrightarrow{A_2A_3} = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ -5 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ . Следо-

вательно, вектор  $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$  является направляющим вектором прямой  $(A_2A_3)$ . Согласно (4.23) уравнение прямой  $(A_2A_3)$  имеет вид

$$\begin{cases} x = -8 + 2t, \\ y = 3 - t, \\ z = 3 - t. \end{cases}$$

Очевидно, точка  $O_2$  является точкой пересечения прямой  $(A_2A_3)$  с плоскостью  $\Pi$ , проходящей через точку  $A_4$  перпендикулярно прямой  $(A_2A_3)$ . При этом нормальным вектором  $\vec{a}$  этой плоскости служит направляющий вектор прямой  $(A_2A_3)$ . Согласно (4.16) уравнение плоскости  $\Pi$  будет иметь вид

$$2(x - 2) - (y - 8) - (z - 3) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - z + 7 = 0.$$

Найдем координаты точки  $O_2$  пересечения плоскости  $\Pi$  и прямой  $(A_2A_3)$ :

$$2(-8 + 2t) - (3 - t) - (3 - t) + 7 = 0 \Leftrightarrow 6t = 15 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2} \Rightarrow O_2 \left( -3, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

Точка  $A_6$  симметрична точке  $A_4$  относительно прямой  $(A_2A_3)$ , поэтому точка  $O_2$  – середина отрезка  $A_4A_6$  и согласно (4.28):

$$-3 = \frac{2 + x_{A_6}}{2}, \quad \frac{1}{2} = \frac{8 + y_{A_6}}{2}, \quad \frac{1}{2} = \frac{3 + z_{A_6}}{2} \Rightarrow A_6(-8, -7, -2).$$

**Ответы:** 1 Угол между плоскостями  $(A_1A_2A_3)$  и  $(A_2A_3A_4)$   $\alpha \approx 1.183$  рад. 2. Угол между прямой  $(A_1A_4)$  и плоскостью  $(A_1A_2A_3)$   $\beta \approx 0.886$  рад. 3. Площадь треугольника  $A_1A_2A_3$  –  $S \approx 64.952(\text{ед}^2)$ . 4. Объем пирамиды  $A_1A_2A_3A_4$  –  $V = 187.5(\text{ед}^3)$ . 5.  $A_5(-8, -2, -7)$ . 6.  $A_6(-8, -7, -2)$ .

#### 4.6. Типовой расчет по теме „Аналитическая геометрия“ (TP 1.3 (о. ф.))

Данное задание предназначено для студентов открытого факультета. Оно по большинству пунктов повторяет задание ТР 1.3 (д. ф.), поэтому исходные данные повторяют задание для дневных факультетов (для экономии места аналогичные задания приводятся без подробных решений).

Студент получает индивидуальное задание, имеющее следующий вид:

**ТР 1.3 (о. ф.). Вар. 30.** Даны точки:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ -7 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -8 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Найти: 1. Уравнение плоскости  $P_1$ , проходящей через точки  $A_1, A_2, A_3$ , и плоскости  $P_2$ , проходящей через точки  $A_1, A_3, A_4$ .

2. Уравнения прямой  $L_1$ , проходящей через точки  $A_1, A_4$ .

3. Косинус угла  $\alpha$  между  $P_1$  и  $P_2$  и синус угла  $\beta$  между  $L_1$  и  $P_1$ .

4. Площадь  $S$  треугольника  $A_1 A_2 A_3$ .

5. Объем  $V$  тетраэдра  $A_1 A_2 A_3 A_4$ .

6. Точку  $A_5$ , симметричную  $A_4$  относительно  $P_1$ .

7. Расстояние  $H$  от  $A_4$  до  $P_1$  как длину перпендикуляра из  $A_4$  до  $P_1$  как половину длины  $A_4 A_5$ , по формулам:  $H = |A_1 A_4| \sin \beta$  и  $H = 3V/S$ .

**Пример выполнения ТР 1.3 (о. ф.). Вар. 30.**

1. Уравнение плоскости  $P_1$  было найдено в ТР 1.3 (д. ф.) (см. (4.30)):

$$x + y + z + 2 = 0.$$

Найдем уравнение плоскости  $P_2$ . Применяя формулу (4.19), получим:

$$\det \begin{bmatrix} x+3 & 5 & 5 \\ y-8 & -10 & 0 \\ z+7 & 5 & 10 \end{bmatrix} = 0; \quad (x+3)(-100) - (y-8)25 + (z+7)50 = 0$$

или  $-4x - y + 2z + 10 = 0$ .

2. Вектор  $\overrightarrow{A_1 A_4} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$  коллинеарен вектору  $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,

значит, параметрические уравнения прямой  $L_1$  имеют вид:  $\begin{cases} x = -3 + t, \\ y = 8, \\ z = -7 + 2t. \end{cases}$

3. Из уравнений плоскостей  $P_1$  и  $P_2$  следует (см. (4.17)), что их норма-

ли равны:  $\vec{n}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  и  $\vec{n}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ . Согласно определению 4.4 угол между плоскостями можно определить используя угол между нормалами к этим плоскостям:

$$\cos \alpha = \frac{|(\vec{n}_1, \vec{n}_2)|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{|-4 - 1 + 2|}{\sqrt{3} \sqrt{21}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \approx 0.378.$$

Заметим, что  $\sin \beta$  между плоскостью  $P_1$  и прямой  $L_1$  был найден в ТР 1.3. (о. ф.):  $\sin \beta = \sqrt{\frac{3}{5}} \approx 0.775$ .

**4.** Площадь  $S$  треугольника  $A_1A_2A_3$  была найдена в ТР 1.3. (о. ф.) (в п. 3):  $S = \frac{75\sqrt{3}}{2} \approx 64.952$ .

**5.** Объем  $V$  тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$  был найден в ТР 1.3. (о. ф.) (в п. 4):  $V = 128.5$ .

**6.** Точка  $A_5$ , симметричная точке  $A_4$  относительно плоскости  $P_1$ , была найдена в ТР 1.3 (о. ф.) (в п. 5):  $A_5(-8, -2, -7)$ . Отметим также, что там же была найдена точка  $O_1 = (-3, 3, -2)$  – основание перпендикуляра, опущенного из точки  $A_4$  на плоскость  $P_1$ .

**7.** Находим расстояние  $H$  от  $A_4$  до  $P_1$  несколькими способами.

a. Как длину перпендикуляра из  $A_4$  до  $P_1$ , которая равна расстоянию от точки  $A_4$  до точки  $O_1$ :  $H_1 = |\overrightarrow{A_4O_1}| = 5\sqrt{3} \approx 8.660$ .

b. Как половину длины  $A_4A_5$ :  $H_2 = \frac{|\overrightarrow{A_4A_5}|}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{2} \approx 8.660$ .

c. По формуле  $H_3 = |\overrightarrow{A_1A_4}| \sin(\beta) = 5\sqrt{5} \sqrt{\frac{3}{5}} \approx 8.660$ .

d. По формуле  $H = 3V/S = 3 \frac{128.5}{75\sqrt{3}/2} \approx 8.660$ .

Расстояния  $H$  от  $A_4$  до  $P_1$ , вычисленныеическими способами, совпали, что является частичной **проверкой** правильности выполнения предыдущих пунктов.

**Ответы:** 1. Уравнение плоскости  $P_1$ :  $x + y + z + 2 = 0$ ; уравнение плоскости  $P_2$ :  $-4x - y + 2z + 10 = 0$ . 2. Уравнения прямой  $L_1$ :

$$\begin{cases} x = -3 + t, \\ y = 8, \\ z = -7 + 2t. \end{cases}$$

3. Косинус угла между плоскостями  $P_1$  и  $P_2$   $\cos \alpha \approx 0.378$ ; синус угла между прямой  $L_1$  и плоскостью  $P_1$   $\sin \beta \approx 0.775$ . 4. Площадь треугольника  $A_1A_2A_3$   $S \approx 64.952(\text{ед}^2)$ . 5. Объем тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$   $V = 128.5(\text{ед}^3)$ . 6.  $A_5(-8, -2, -7)$ . 7.  $H \approx 8.660$ .

## 5. СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ

### 5.1. Собственные числа и собственные векторы квадратных матриц

Подробное изложение теории, необходимой для выполнения ТР 1.4, можно найти в учебнике [2].

Пусть  $A = \{a_{ik}\}$ ,  $i, k = 1, \dots, n$  – квадратная матрица порядка  $n$ .

**Определение 5.1.** Число  $\lambda$  называется собственным числом матрицы  $A$ , а ненулевой вектор  $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$  – собственным вектором этой матрицы, соответствующим собственному числу  $\lambda$ , если выполняется равенство:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad (\vec{x} \neq \vec{0}). \quad (5.1)$$

Преобразуем это равенство

$$A\vec{x} - \lambda\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}. \quad (5.2)$$

Из определения следует, что собственное число матрицы  $A$  – это такое число  $\lambda$ , для которого уравнение (5.2), равносильное уравнению (5.1), имеет ненулевые решения  $\vec{x}$ . Эти решения являются собственными векторами, соответствующими числу  $\lambda$ .

Определим условия, при которых уравнение (5.2) имеет ненулевые решения. При фиксированном  $\lambda$  это уравнение является однородной системой линейных уравнений с матрицей коэффициентов  $A - \lambda I$

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases} \quad (5.3)$$

Известно [2], что однородная система (5.3) всегда совместна. Она может иметь единственное нулевое решение  $\vec{x} = \vec{0}$  или бесконечно много решений. Однородная система (5.3) с квадратной матрицей коэффициентов  $A - \lambda I$  имеет бесконечно много решений тогда и только тогда, когда матрица коэффициентов этой системы вырождена. Таким образом, уравнение (5.2) имеет ненулевые решения только в том случае, когда

$$\det(A - \lambda I) = 0. \quad (5.4)$$

Это равенство является уравнением относительно  $\lambda$ . Функция  $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$  есть многочлен степени  $n$  относительно  $\lambda$ . Многочлен  $P_A(\lambda)$

называется характеристическим многочленом, а уравнение (5.4) – характеристическим уравнением матрицы  $A$ . (Значит, собственные числа матрицы  $A$  – это корни ее характеристического многочлена.) Известно, что многочлен  $P_A(\lambda)$  раскладывается на множители:

$$P_A(\lambda) \equiv a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0 = a_n(\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_m)^{k_m},$$

где  $\lambda_i$  – корни многочлена,  $k_i$  – кратности этих корней ( $i = 1, \dots, m$ ), причем  $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ . Таким образом, любая квадратная матрица  $A$  порядка  $n$  имеет ровно  $n$  собственных чисел с учетом их кратности.

Собственные числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  находят, решая характеристическое уравнение (5.4).

Для определения собственных векторов  $\vec{x}_i$ , соответствующих собственному числу  $\lambda_i$ , это число подставляют в однородную систему уравнений (5.2):

$$(A - \lambda_i I)\vec{x}_i = \vec{0}.$$

Каждое ненулевое решение  $\vec{x}_i$  является собственным вектором матрицы  $A$ , соответствующим числу  $\lambda_i$ .

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 5.1.** *Если  $A$  – самосопряженная матрица порядка  $n$ , то*

- 1) все ее собственные числа вещественные;
- 2) собственные векторы, отвечающие различным собственным числам, ортогональны;
- 3) существует  $n$  попарно ортогональных собственных векторов матрицы  $A$  (собственный базис матрицы  $A$ ).

Эта теорема будет справедлива и для вещественной симметричной матрицы.

Если все собственные числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  самосопряженной матрицы различны, то соответствующие им собственные векторы  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$  попарно ортогональны и образуют ортогональный базис в  $\mathbb{C}^n$  (собственный базис матрицы  $A$ ). Нормированные собственные векторы  $\vec{e}_1 = \frac{1}{\|\vec{x}_1\|} \vec{x}_1, \dots, \vec{e}_n = \frac{1}{\|\vec{x}_n\|} \vec{x}_n$  образуют ортонормированный собственный базис матрицы  $A$ . Если составить из ортонормированных собственных векторов матрицу  $U = [\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n]$ , то верна следующая теорема.

**Теорема 5.2.** *Если  $A$  – самосопряженная матрица, то*

$$U^*AU = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]. \quad (5.5)$$

## 5.2. Приведение уравнений кривых второго порядка к каноническому виду

Рассмотрим произвольное уравнение второй степени с двумя неизвестными

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (5.6)$$

(предполагается, что хотя бы один из коэффициентов  $A$ ,  $B$  или  $C$  отличен от нуля). Канонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы служат примерами этого уравнения. Однако кроме перечисленных кривых уравнение (5.6) может задавать в декартовой системе координат на плоскости и другие множества. Приведем несколько примеров:

1) уравнение  $x^2 + y^2 = 0$  удовлетворяется только при  $x = y = 0$  и, следовательно, задает единственную точку – начало координат  $O$ ;

2) уравнение  $x^2 - y^2 = 0$  равносильно совокупности двух линейных уравнений  $x - y = 0$  и  $x + y = 0$  и задает, таким образом, пару пересекающихся прямых;

3) если в уравнении (5.6)  $A = C = 1$ ,  $B = 2$ ,  $E = D = 0$ , то оно принимает вид

$$(x + y)^2 = -F$$

и при  $F < 0$  определяет пару параллельных прямых  $x + y = \sqrt{-F}$  и  $x + y = -\sqrt{-F}$ , при  $F = 0$  – одну прямую  $x + y = 0$ , а при  $F > 0$  – пустое множество.

Множества, определяемые уравнением (5.6), следуя традиции, называют кривыми второго порядка (КВП). Доказывается, что эллипс (в частности, окружность), гипербола, парабола и перечисленные в примерах случаи (одна точка, пара пересекающихся либо параллельных прямых, одна прямая, пустое множество) исчерпывают все КВП.

Рассмотрим один из способов исследования уравнения (5.6) и определения задаваемой им КВП. Заменим  $x$  на  $x_1$ ,  $y$  на  $x_2$  и, переобозначая коэффициенты, запишем уравнение (5.6) в виде

$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1 + ex_2 + f = 0. \quad (5.7)$$

Требуется выяснить, какую КВП задает уравнение (5.7) в декартовой системе координат  $X_1OX_2$ .

Сумма первых трех членов уравнения (5.7) представляет собой квадратичную форму  $(A\vec{x}, \vec{x})$ , где

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$$

( $\vec{i}, \vec{j}$  – координатные орты системы координат  $X_1OX_2$ ). Пусть  $\lambda_1, \lambda_2$  – собственные числа матрицы  $A$ , а  $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \end{bmatrix}$ ,  $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} e_{21} \\ e_{22} \end{bmatrix}$  – соответствующие им

ортонормированные собственные векторы. Разложим вектор  $\vec{x}$  по ортонормированному базису  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ :

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} y_1 e_{11} + y_2 e_{21} \\ y_1 e_{12} + y_2 e_{22} \end{bmatrix}$$

т. е.

$$\begin{cases} x_1 = e_{11} y_1 + e_{21} y_2, \\ x_2 = e_{12} y_1 + e_{22} y_2. \end{cases} \quad (5.8)$$

Новую систему координат, порожденную базисом  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ , обозначим через  $Y_1 O Y_2$  (рис. 5.1).

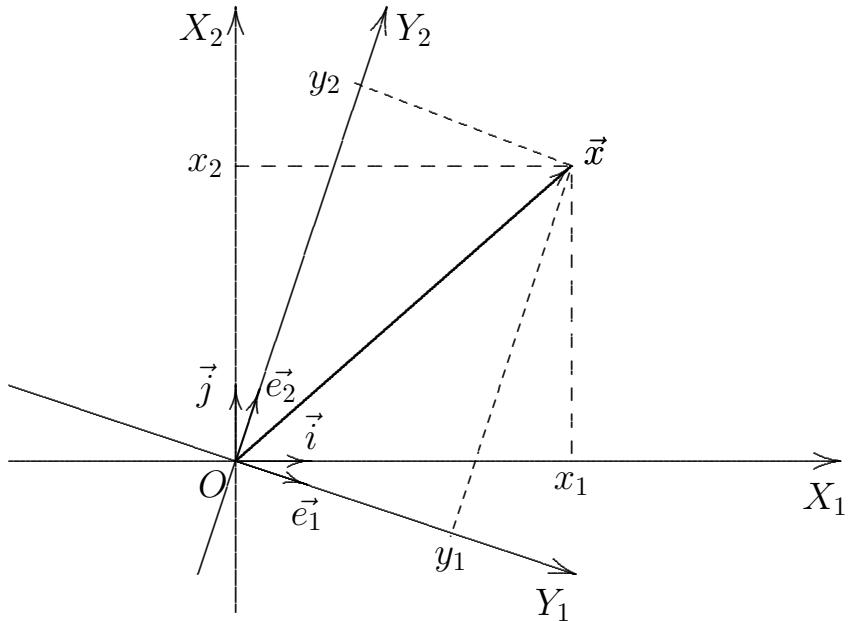


Рис. 5.1

При переходе к базису  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  – собственному базису матрицы  $A$  квадратичная форма  $(A\vec{x}, \vec{x})$  принимает канонический вид  $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$ , а исследуемая КВП описывается уравнением

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + d(y_1 e_{11} + y_2 e_{21}) + e(y_1 e_{12} + y_2 e_{22}) + f = 0.$$

Обозначая  $d e_{11} + e e_{12} = d'$ ,  $d e_{21} + e e_{22} = e'$  получим уравнение

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + d' y_1 + e' y_2 + f = 0, \quad (5.9)$$

задающее исследуемую КВП в системе координат  $Y_1 O Y_2$ . Если уравнение (5.9) содержит неизвестное и во второй, и в первой степенях, то соответствующие слагаемые дополняются до полного квадрата. После этого выяснение типа кривой не вызывает каких-либо трудностей.

**5.3. Типовой расчет по теме „Собственные числа и собственные векторы матриц. Приведение уравнений кривых второго порядка к каноническому виду“ (ТР 1.4)**

Студент получает индивидуальное задание, имеющее следующий вид:

**TP 1.4. Вар. 30. а.** Найти собственные числа и векторы матриц:

$$A = \begin{bmatrix} -15 & -2 & -17 \\ -2 & -34 & -2 \\ -17 & -2 & -15 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 22 & 9 - 9i & 24 \\ 9 + 9i & 46 & 9 + 9i \\ 24 & 9 - 9i & 22 \end{bmatrix}.$$

**б.** Уравнение кривой второго порядка

$$6x^2 + 36xy + 54y^2 - 48\sqrt{10}x - 184\sqrt{10}y + 1380 = 0$$

привести к каноническому виду и изобразить кривую на координатной плоскости.

**Пример выполнения ТР 1.4. Вар. 30.**

**а. Нахождение собственных чисел и векторов матриц  $A$  и  $B$ .**

1. Нахождение собственных чисел симметричной матрицы  $A$ . Для нахождения собственных чисел матрицы  $A$  решим характеристическое уравнение (5.4):

$$\det \begin{bmatrix} -15 - \lambda & -2 & -17 \\ -2 & -34 - \lambda & -2 \\ -17 & -2 & -15 - \lambda \end{bmatrix} = 0.$$

Сначала преобразуем левую часть этого уравнения:

$$\begin{aligned} -\det \begin{bmatrix} 15 + \lambda & 2 & 17 \\ 2 & 34 + \lambda & 2 \\ 17 & 2 & 15 + \lambda \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} 15 + \lambda & 2 & 17 \\ 2 & 34 + \lambda & 2 \\ 2 - \lambda & 0 & -2 + \lambda \end{bmatrix} = \\ &= (2 - \lambda) \det \begin{bmatrix} 15 + \lambda & 2 & 17 \\ 2 & 34 + \lambda & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = (2 - \lambda) \det \begin{bmatrix} 15 + \lambda & 2 & 32 + \lambda \\ 2 & 34 + \lambda & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= (2 - \lambda) A_{31} = (2 - \lambda) \det \begin{bmatrix} 2 & 32 + \lambda \\ 34 + \lambda & 4 \end{bmatrix} = (2 - \lambda)(\lambda^2 + 66\lambda + 1080), \end{aligned}$$

где  $A_{31}$  – алгебраическое дополнение элемента (3,1) матрицы.

Характеристическое уравнение принимает вид

$$(2 - \lambda)(\lambda^2 + 66\lambda + 1080) = 0.$$

Таким образом собственные числа матрицы  $A$ :  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = -36$ ,  $\lambda_3 = -30$ .

**2.** Нахождение собственных векторов матрицы  $A$ . Для нахождения собственных векторов, соответствующих собственному числу  $\lambda_1 = 2$  матрицы  $A$ , подставим в однородную систему (5.3) вместо  $\lambda$  число  $\lambda_1 = 2$  и решим эту систему методом Гаусса–Жордана:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} -17 & -2 & -17 & 0 \\ -2 & -36 & -2 & 0 \\ -17 & -2 & -17 & 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 17 & 2 & 17 & 0 \\ 1 & 18 & 1 & 0 \\ 17 & 2 & 17 & 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 18 & 1 & 0 \\ 17 & 2 & 17 & 0 \\ 17 & 2 & 17 & 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 18 & 1 & 0 \\ 0 & 304 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 18 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Система имеет бесконечно много ненулевых решений. Каждое решение есть собственный вектор  $\vec{x}_1$ , соответствующий собственному числу  $\lambda_1 = 2$ . Та-

ким образом, любой вектор вида  $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -\alpha_1 \\ 0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix}$  ( $\alpha_1 \neq 0$ ) является собствен-

ным вектором. Построим нормированный собственный вектор  $\vec{e}_1 = \frac{\vec{x}_1}{\|\vec{x}_1\|} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ .

Аналогично находим собственные векторы  $\vec{x}_2$ , соответствующие собственному числу  $\lambda_2 = -36$ :  $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ 2\alpha_2 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$  ( $\alpha_2 \neq 0$ ) и нормированный собственный вектор  $\vec{e}_2 = \frac{\vec{x}_2}{\|\vec{x}_2\|} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$ . Определим собственные векторы

$\vec{x}_3$ , соответствующие собственному числу  $\lambda_3 = -30$ :  $\vec{x}_3 = \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ -\alpha_3 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$  ( $\alpha_3 \neq 0$ ) и нормированный собственный вектор  $\vec{e}_3 = \frac{\vec{x}_3}{\|\vec{x}_3\|} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$ .

Собственные числа матрицы  $A$  различны, а значит, соответствующие

им собственные векторы будут ортогональны. Проверим это утверждение:

$$(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = -\alpha_1 \alpha_2 + 0 \cdot 2\alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2 = 0,$$

$$(\vec{x}_1, \vec{x}_3) = -\alpha_1 \alpha_3 + 0 \cdot (-\alpha_3) + \alpha_1 \alpha_3 = 0,$$

$$(\vec{x}_2, \vec{x}_3) = \alpha_2 \alpha_3 + 2\alpha_2 \cdot (-\alpha_3) + \alpha_2 \alpha_3 = 0.$$

Скалярные произведения векторов равны нулю, значит, собственные векторы ортогональны.

**3.** Приведение матрицы  $A$  к диагональному виду. Составим матрицу

$$U = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{2} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Вычислим произведения матриц  $U^T A U$ :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -15 & -2 & -17 \\ -2 & -34 & -2 \\ -17 & -2 & -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{2}} & -\frac{36}{\sqrt{6}} & -\frac{30}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{72}{\sqrt{6}} & \frac{30}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & -\frac{36}{\sqrt{6}} & -\frac{30}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & -30 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

В результате получили диагональную матрицу, на главной диагонали которой стоят собственные числа матрицы  $A$ . В соответствии с теоремой 5.2 (формула (5.5)) убеждаемся, что собственные числа и собственные векторы матрицы  $A$  найдены верно. Это показывает важность выполнения данного пункта, так как является проверкой правильности нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы  $A$ .

**4.** Нахождение собственных чисел самосопряженной матрицы  $B$ . Для нахождения собственных чисел матрицы  $B$  решаем характеристическое

уравнение для матрицы  $B$ :

$$\det \begin{bmatrix} 22 - \lambda & 9 - 9i & 24 \\ 9 + 9i & 46 - \lambda & 9 + 9i \\ 24 & 9 - 9i & 22 - \lambda \end{bmatrix} = 0.$$

Преобразуем левую часть уравнения:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 22 - \lambda & 9 - 9i & 24 \\ 9 + 9i & 46 - \lambda & 9 + 9i \\ 24 & 9 - 9i & 22 - \lambda \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} 22 - \lambda & 9 - 9i & 24 \\ 9 + 9i & 46 - \lambda & 9 + 9i \\ 2 + \lambda & 0 & -2 - \lambda \end{bmatrix} = \\ &= (2 + \lambda) \det \begin{bmatrix} 22 - \lambda & 9 - 9i & 46 - \lambda \\ 9 + 9i & 46 - \lambda & 18 + 18i \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= (2 + \lambda) A_{31} = (2 + \lambda) \det \begin{bmatrix} 22 - \lambda & 9 - 9i \\ 9 + 9i & 46 - \lambda \end{bmatrix} = (2 + \lambda)(\lambda^2 - 92\lambda + 1792), \end{aligned}$$

где  $A_{31}$  – алгебраическое дополнение элемента (3,1) матрицы  $B$ .

Решая уравнение

$$(2 + \lambda)(\lambda^2 - 92\lambda + 1792) = 0,$$

найдем собственные числа матрицы  $B$ :  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = 28$ ,  $\lambda_3 = 64$ .

**5.** Нахождение собственных векторов матрицы  $B$ . Для нахождения собственных векторов, отвечающих собственному числу  $\lambda_1 = -2$  матрицы  $B$ , подставим в однородную СЛУ  $(B - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$  число  $\lambda_1 = -2$  и решим СЛУ методом Гаусса–Жордана:

$$\begin{bmatrix} 24 & 9 - 9i & 24 & 0 \\ 3 & 8 - 8i & 3 & 0 \\ 24 & 9 - 9i & 24 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 24 & 9 - 9i & 24 & 0 \\ 3 & 8 - 8i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -55 & 0 & 0 \\ 3 & 8 - 8i & 3 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 8 - 8i & 3 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда каждый собственный вектор  $\vec{x}_1$ , соответствующий собственному числу  $\lambda_1 = -2$ , определяется равенством  $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -\alpha_1 \\ 0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix}$  ( $\alpha_1 \neq 0$ ), а нормированный собственный вектор  $\vec{e}_1 = \frac{\vec{x}_1}{\|\vec{x}_1\|} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ . Аналогично находим собственные векторы  $\vec{x}_2$ , соответствующие собственному числу  $\lambda_2 = 28$ , и  $\vec{x}_3$ , соответствующие собственному числу  $\lambda_3 = 64$ .

лу  $\lambda_2 = 24$ :  $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ (-1-i)\alpha_2 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$  ( $\alpha_2 \neq 0$ ) и построим нормирован-

ный собственный вектор  $\vec{e}_2 = \frac{\vec{x}_2}{\|\vec{x}_2\|} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -(1+i)/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ . Затем находим

собственные векторы  $\vec{x}_3$ , соответствующие собственному числу  $\lambda_3 = 64$ :

$$\vec{x}_3 = \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ (1+i)\alpha_3 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} (\alpha_3 \neq 0) \text{ и нормированный собственный вектор } \vec{e}_3 = \\ = \frac{\vec{x}_3}{\|\vec{x}_3\|} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ (1+i)/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

Проверим ортогональность собственных векторов:

$$(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = -\alpha_1 \bar{\alpha}_2 + 0 \cdot \bar{\alpha}_2(-1+i) + \alpha_1 \bar{\alpha}_2 = 0,$$

$$(\vec{x}_1, \vec{x}_3) = -\alpha_1 \bar{\alpha}_3 + 0 \cdot \bar{\alpha}_3(1-i) + \alpha_1 \bar{\alpha}_3 = 0,$$

$$(\vec{x}_2, \vec{x}_3) = \alpha_2 \bar{\alpha}_3 + \alpha_2(-1-i) \cdot \bar{\alpha}_3(1-i) + \alpha_2 \bar{\alpha}_3 = 0.$$

Свойство ортогональности выполнено.

**6.** Приведение матрицы  $B$  к диагональному виду. Составим матрицу

$$U = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{-1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Вычислим произведения матриц (для экономии места подробности вычислений опущены)

$$U^* B U = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с теоремой 5.2 (формула (5.5)) убеждаемся, что собственные числа и собственные векторы матрицы  $B$  найдены верно.

**6. Приведение КВП к каноническому виду.** Запишем уравнение КВП из ТР в виде (5.7)  $ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1 + ex_2 + f = 0$ . Здесь введены обозначения:  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $a = 6$ ,  $b = 18$ ,  $c = 54$ ,  $d = -48\sqrt{10}$ ,  $e = -184\sqrt{10}$  и  $f = 1380$ . Первые 3 слагаемых данного уравнения представляют собой квадратичную форму  $(A\vec{x}, \vec{x})$ , где  $A = \begin{bmatrix} 6 & 18 \\ 18 & 54 \end{bmatrix}$ ,  $\vec{x} =$

$$= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j}.$$

**1.** Собственные числа матрицы  $A$  найдем, решая характеристическое уравнение

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = 0 &\Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} 6 - \lambda & 18 \\ 18 & 54 - \lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (6 - \lambda)(54 - \lambda) - 324 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 60\lambda = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 60. \end{cases} \end{aligned}$$

Найдем ортонормированные собственные векторы, соответствующие найденным собственным числам.

Найдем  $\vec{e}_1$ :

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I) \vec{x}_1 = \vec{0} &\Leftrightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 6 & 18 & 0 \\ 18 & 54 & 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x_{11} + 3x_{12} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_{11} = -3\alpha, \\ x_{12} = \alpha, \end{cases} \quad \alpha \neq 0 \Leftrightarrow \vec{x}_1 = \alpha \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Нормируя  $\vec{x}_1$ , получим  $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} -3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{bmatrix}$ . Аналогично  $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \end{bmatrix}$ . Таким образом,  $\lambda_1 = 0$ ,  $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} -3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{bmatrix}$ ;  $\lambda_2 = 60$ ,  $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \end{bmatrix}$ .

**2.** Систему координат, порожденную базисом  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ , обозначим  $Y_1 O Y_2$ . Старые  $(x_1; x_2)$  и новые  $(y_1; y_2)$  координаты в базисе  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ , согласно формулам (5.8), связаны соотношениями:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-3}{\sqrt{10}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{10}} y_2, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} y_1 + \frac{3}{\sqrt{10}} y_2. \end{cases}$$

Подставляя данные выражения в уравнение кривой, получим:

$$\begin{aligned} \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 - 48\sqrt{10} \left( \frac{-3}{\sqrt{10}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{10}} y_2 \right) - \\ - 184\sqrt{10} \left( \frac{1}{\sqrt{10}} y_1 + \frac{3}{\sqrt{10}} y_2 \right) + 1380 = 0. \end{aligned}$$

Приведем подобные члены и сократим на 20:

$$3y_2^2 - 30y_1 - 2y_1 + 69 = 0.$$

Выделяя полный квадрат по переменной  $y_2$ :

$$3(y_2^2 - 10y_2 + 25) - 75 - 2y_1 + 69 = 0$$

получим уравнение параболы в системе координат  $Y_1OY_2$ :

$$3(y_2 - 5)^2 - 2(y_1 + 3) = 0.$$

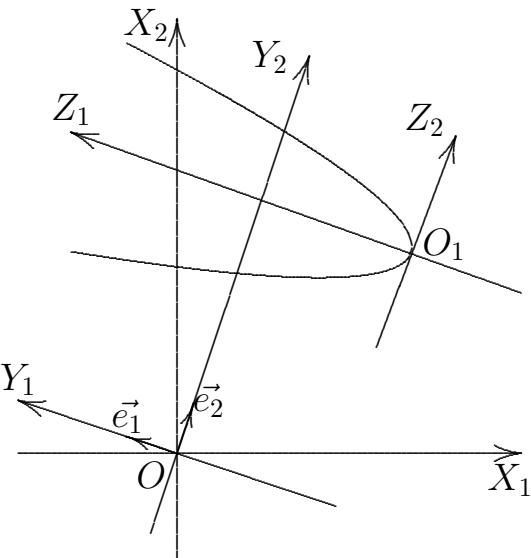


Рис. 5.2

**Ответы:**

**a.** Собственные числа матрицы  $A$ :  $\begin{cases} \lambda_1 = 2, \\ \lambda_2 = -36, \\ \lambda_3 = -30. \end{cases}$  Собственные векторы

матрицы  $A$ :  $\vec{x}_1 = \alpha_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{x}_2 = \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{x}_3 = \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

Собственные числа матрицы  $B$ :  $\begin{cases} \lambda_1 = -2, \\ \lambda_2 = 28, \\ \lambda_3 = 64. \end{cases}$  Собственные векторы

матрицы  $B$ :  $\vec{x}_1 = \alpha_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{x}_2 = \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1-i \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{x}_3 = \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$

**б.** Парабола  $\frac{3}{2}z_2^2 = z_1$ , где  $\begin{cases} z_1 = y_1 + 3, \\ z_2 = y_2 - 5 \end{cases}$  и  $\begin{cases} x_1 = \frac{-3}{\sqrt{10}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{10}}y_2, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}y_1 + \frac{3}{\sqrt{10}}y_2. \end{cases}$

**3.** Перенесем начало координат  $O$  в точку  $O_1(-3, 5)$  (в системе координат  $Y_1OY_2$ ), используя замену  $\begin{cases} z_1 = y_1 + 3, \\ z_2 = y_2 - 5, \end{cases}$  и перейдя таким образом к новой системе координат  $Z_1O_1Z_2$ . В системе координат  $Z_1O_1Z_2$  уравнение искомой КВП имеет канонический вид параболы:  $\frac{3}{2}z_2^2 = z_1$ . Системы координат  $X_1OX_2$ ,  $Y_1OY_2$ ,  $Z_1O_1Z_2$  и график параболы схематично изображены на рис. 5.2.

## 6. ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Краткое изложение теории операционного исчисления можно найти в учебнике [4] (гл. 7), а более подробное – в учебном пособии [5]. В [4] приведена таблица изображений элементарных функций (см. с. 445, 446).

### 6.1. Функция-оригинал

Обозначим через  $\langle a, b \rangle$  произвольный промежуток числовой оси. Допускается, что  $a = -\infty$ , а  $b = +\infty$ .

**Определение 6.1.** Пусть на  $\langle a, b \rangle$  задана комплекснозначная функция  $f : \langle a, b \rangle \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , т. е.  $f = \varphi + i\psi$ , где  $\varphi, \psi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ . Пусть  $\varphi, \psi$  интегрируемы на  $\langle a, b \rangle$ . Тогда  $f$  считается интегрируемой на  $\langle a, b \rangle$  и по определению

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \varphi(x) + i \int_a^b \psi(x)dx.$$

**Определение 6.2.** Комплекснозначная функция  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  называется функцией-оригиналом, если она удовлетворяет условиям:

- 1)  $f(t) = 0$  для всех  $t < 0$ ;
- 2) существуют вещественные постоянные  $M > 0$  и  $\sigma \geq 0$ , такие, что  $|f(t)| \leq M e^{\sigma t}$  для всех  $t \in \mathbb{R}$ ;
- 3)  $f$  интегрируема на любом конечном промежутке.

**Замечание 6.1.** В качестве функций-оригиналов будем рассматривать и вещественозначные функции  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , являющиеся частным случаем комплекснозначных (для таких функций  $\psi(t) \equiv 0$  (см. определение 6.1)).

Заметим также, что если неравенство (см. п. 2 определения 6.2) выполняется при некоторых  $M > 0$  и  $\sigma \geq 0$ , то аналогичное неравенство верно и при постоянных  $M_1$  и  $\sigma_1$ , удовлетворяющих условиям  $M_1 \geq 0$  и  $\sigma_1 \geq \sigma$ . Таким образом, выбор постоянных  $M$  и  $\sigma$  данного пункта неоднозначен.

**Утверждение 6.1.** Указанные ниже функции являются функциями-оригиналами. Первое и третье условия определения 6.2 для них очевидны, а для второго укажем возможные значения соответствующих постоянных  $M$  и  $\sigma$ :

- 1) функция Хевисайда  $\delta_1 : \delta_1(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \geq 0, \\ 0, & \text{если } t < 0, \end{cases} \quad \sigma = 0, M = 1;$

2)  $f(t) = t^n \delta_1(t)$  (в качестве  $\sigma$  можно взять любое положительное число, а существование  $M > 0$  следует из ограниченности функции  $t^n e^{-\sigma t}$ );

3)  $f(t) = \sin(kt + \omega)\delta_1(t)$ ,  $\sigma > 0$ ,  $M = 1$ ;

4)  $f(t) = e^{at}\delta_1(t)$ ,  $\sigma > \operatorname{Re} a$ ,  $M = 1$ .

**Утверждение 6.2.** Если  $f, g$  – функции-оригиналы, то:

1) для любого  $\lambda \in \mathbb{C}$   $\lambda f$  – функция-оригинал;

2)  $f \pm g$  – функция-оригинал;

3)  $fg$  – функция-оригинал;

4)  $\Phi(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$  – функция-оригинал.

## 6.2. Преобразование Лапласа

**Утверждение 6.3.** Если  $f(t)$  – функция-оригинал, то  $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$  сходится абсолютно для всех  $s \in \mathbb{C}$ , таких, что  $\operatorname{Re} s > \sigma$  (см. свойство 2 определения 6.2).

**Определение 6.3.** Пусть  $f$  – функция-оригинал и задана область  $D = \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > \sigma\} \subset \mathbb{C}$ . Тогда функция комплексной переменной  $\tilde{f}: D \rightarrow \mathbb{C}$

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

называется изображением по Лапласу оригинала  $f(t)$ .

Применяются следующие обозначения:

$$\tilde{f}(s) = \mathcal{L}[f(t)], \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\tilde{f}(s)].$$

Соответствие между оригиналами и изображениями называют преобразованием Лапласа.

**Пример 6.1.** Для любых  $s \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re} s > 0$   $\mathcal{L}[\delta_1(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st}dt = \frac{1}{s}$ .

Пусть  $f, g$  – функции-оригиналы. Тогда по определению 6.2 существуют такие  $M_1, M_2 > 0$  и  $\sigma_1, \sigma_2 \geq 0$ , что  $|f(t)| \leq M_1 e^{\sigma_1 t}$ ,  $|g(t)| \leq M_2 e^{\sigma_2 t}$ . Справедливы следующие теоремы.

**Теорема 6.1 (линейности).** Для любых  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{L}[c_1 f(t) + c_2 g(t)] = c_1 \mathcal{L}[f(t)] + c_2 \mathcal{L}[g(t)]$$

при  $\operatorname{Re} s > \max(\sigma_1, \sigma_2)$ .

**Теорема 6.2 (смещения).** Если  $\tilde{f}(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ , то для любого  $a \in \mathbb{C}$   $\mathcal{L}[f(t)e^{at}] = \tilde{f}(s - a)$  при  $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a + \sigma_1$ .

**Теорема 6.3 (запаздывания).** Для любого  $t_0 > 0$

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)\delta_1(t - t_0)] = e^{-st_0} \mathcal{L}[f(t)]$$

при  $\operatorname{Re} s > \sigma_1$ .

**Теорема 6.4 (о дифференцировании оригинала).** Пусть функция  $f$  и ее производные  $f^{(k)}$  ( $k = 0, \dots, n$ ) являются функциями-оригиналами, и при этом выполнены оценки:  $|f^{(k)}(t)| \leq M_k e^{\sigma_k t}$ ,  $k = 0, \dots, n$ . Тогда при  $\operatorname{Re} s > \max(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n)$ :

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n \tilde{f}(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \quad (6.1)$$

**Теорема 6.5 (об интегрировании оригинала).** Предположим, что функция  $f$  является функцией-оригиналом, и при этом выполнена оценка:  $|f(t)| \leq M e^{\sigma t}$ . Тогда при  $\operatorname{Re} s > \sigma$ :

$$\mathcal{L} \left[ \int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{\tilde{f}(s)}{s}.$$

Сформулированные теоремы часто позволяют находить изображения по оригиналу, не вычисляя интегралов из определения 6.3. Приведем краткую таблицу оригиналов и их изображений (доказательство соответствий можно найти в пособии [5]).

$f(t)$	$\tilde{f}(s)$	$f(t)$	$\tilde{f}(s)$
1	$\frac{1}{s}$	$e^{at}$	$\frac{1}{s - a}$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$e^{at} t^n$	$\frac{n!}{(s - a)^{n+1}}$
$\cos(bt)$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$	$e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 + b^2}$
$\sin(bt)$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$	$e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s - a)^2 + b^2}$

**Замечание 6.2.** Представленные в этой таблице функции  $f(t)$ , вообще говоря, не являются оригиналами в смысле определения 6.2, так как заданы на всей оси и не удовлетворяют условию п. 1 данного определения. Корректней было бы домножать эти функции на  $\delta_1(t)$  (см. утверждение 6.1). Для сокращения записи опускаем множитель  $\delta_1(t)$  в приведенной таблице и в последующем изложении.

**Определение 6.4.** Пусть  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Функция  $f * g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau \text{ называется сверткой функций } f \text{ и } g.$$

**Утверждение 6.4.** Если  $f, g$  – функции-оригиналы, то  $(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau$  и  $f * g$  – функция-оригинал.

**Теорема 6.6 (о свертке).** Предположим, что функции  $f, g$  являются функциями-оригиналами, и при этом выполнены оценки:  $|f(t)| \leq M_1 e^{\sigma_1 t}$ ,  $|g(t)| \leq M_2 e^{\sigma_2 t}$ . Тогда при  $\operatorname{Re} s > \max(\sigma_1, \sigma_2)$ :

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)] = \tilde{f}(s)\tilde{g}(s).$$

**Нахождение оригинала правильной рациональной дроби.** Часто возникает потребность найти оригинал по изображению, представляющему собой правильную рациональную дробь. Напомним, что рациональной дробью называют отношение  $\frac{P_m(s)}{Q_n(s)}$  двух полиномов  $P_m(s)$  и  $Q_n(s)$ , степени которых равны  $m$  и  $n$  соответственно. Дробь называют правильной, если  $m < n$ , и неправильной, если  $m \geq n$ .

**Теорема 6.7.** Всякая правильная рациональная дробь  $\frac{P_m(s)}{Q_n(s)}$  имеет оригинал, т. е. существует функция-оригинал  $f(t)$ , такая, что  $\tilde{f}(s) = \frac{P_m(s)}{Q_n(s)}$  ( $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{P_m(s)}{Q_n(s)}$ ).

### 6.3. Элементы теории дифференциальных уравнений

Полное изложение теории дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений первого порядка можно найти в учебнике [4] (гл. 1) и в учебном пособии [6].

Пусть  $F = F(t, x, y_1, \dots, y_n)$  – заданная функция  $n + 2$  вещественных переменных, непрерывная в некоторой области  $G \subset \mathbb{R}^{n+2}$ .

**Определение 6.5.** Уравнение

$$F(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0, \quad (6.2)$$

где  $t$  – независимая переменная, а  $x$  – искомая функция, называется дифференциальным уравнением (ДУ)  $n$ -го порядка.

Функция  $\bar{x}(t)$  называется решением ДУ, если при подстановке ее в уравнение получается тождество

$$F(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t), \dots, \bar{x}^{(n)}(t)) \equiv 0.$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая, когда ДУ (6.2) может быть представлено в виде, разрешенном относительно старшей производной:

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)). \quad (6.3)$$

Здесь  $f$  – заданная функция  $n+1$  вещественной переменной, непрерывная в некоторой области  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ .

Уравнение (6.3) в большинстве случаев имеет бесконечно много решений. Для нахождения конкретного решения уравнения (6.3) к нему добавляют так называемые начальные условия – значения решения и его производных до порядка  $(n-1)$  включительно в некоторой начальной точке  $t_0$  (часто независимую переменную  $t$  называют временем и тогда  $t_0$  – начальный момент времени).

**Определение 6.6.** Задачей Коши для ДУ (6.3) называется задача

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)), \\ x(t_0) = x_0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}. \end{cases} \quad (6.4)$$

Решить задачу Коши (6.4) означает найти решение уравнения (6.3), удовлетворяющее указанным в (6.4) начальным условиям.

**Теорема 6.8.** Если функция  $f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$  стоящая в правой части уравнения (6.3) непрерывна в области  $D$  вместе со своими частными производными  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x'}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^{(n-1)}}$ , то для любой точки области  $D : (t_0, x_0, \dots, x_{n-1}) \in D$  существует единственное решение  $x(t)$  задачи Коши (6.4), заданное на некотором интервале, содержащем точку  $t_0$ .

**Определение 6.7.** Дифференциальное уравнение вида

$$a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = f(t), \quad (6.5)$$

где  $a_n(t) \neq 0$ , называется линейным ДУ(ЛДУ) порядка  $n$ . Функцию  $f(t)$  обычно называют свободным членом данного уравнения.

Если функции  $a_k(t)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , являются постоянными, то ЛДУ (6.5) называется ЛДУ порядка  $n$  с постоянными коэффициентами.

Заметим, что уравнение (6.5) легко приводится к виду (6.3).

**Теорема 6.9.** *Если функции  $f(t)$  и  $a_k(t)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , непрерывны при  $t \in (a, b)$ , то любая задача Коши вида (6.4), где  $t_0 \in (a, b)$ , имеет для ЛДУ (6.5) единственное решение, определенное на  $(a, b)$ .*

**Определение 6.8.** *Нормальной системой дифференциальных уравнений (СДУ) первого порядка называется система уравнений вида*

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, \dots, x_n), \end{cases} \quad (6.6)$$

где  $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , непрерывны в некоторой области  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , а  $x_1, \dots, x_n$  – искомые функции независимой переменной  $t$ .

Обозначая через  $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$  и  $\vec{f}(t, \vec{x}) = \begin{bmatrix} f_1(t, \vec{x}) \\ \vdots \\ f_n(t, \vec{x}) \end{bmatrix}$ , систему (6.6) часто записывают в векторном виде

$$\vec{x}' = \vec{f}(t, \vec{x}). \quad (6.7)$$

**Определение 6.9** Задачей Коши для нормальной СДУ (6.7) называется задача

$$\begin{cases} \vec{x}' = \vec{f}(t, \vec{x}), \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0. \end{cases} \quad (6.8)$$

Определим матрицу Якоби вектор-функция  $\vec{f}(t, \vec{x})$  по переменной  $\vec{x}$ :

$$J = \frac{d\vec{f}}{d\vec{x}}(t, \vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(t, \vec{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(t, \vec{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(t, \vec{x}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(t, \vec{x}) \end{bmatrix}$$

Сформулируем теорему, дающую достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши (6.8).

**Теорема 6.10.** *Если вектор-функция  $\vec{f}(t, \vec{x})$  и матрица  $J = \frac{d\vec{f}}{d\vec{x}}(t, \vec{x})$  непрерывны в области  $D$ , то для любой точки  $(t_0, \vec{x}_0) \in D$  существует единственное решение  $\vec{x} = \vec{x}(t)$  задачи Коши (6.8), заданное на некотором интервале  $(a_0, b_0)$ , содержащем точку  $t_0$ .*

**Определение 6.10.** СДУ первого порядка (6.7) называется линейной СДУ (ЛСДУ), если она имеет вид

$$\vec{x}' = A(t)\vec{x} + \vec{f}(t), \quad (6.9)$$

где

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}.$$

Если  $a_{ik}(t)$  при  $i, k = 1, \dots, n$  являются постоянными, то ЛСДУ (6.9) называется ЛСДУ с постоянными коэффициентами.

**Теорема 6.11.** Если  $a_{ik}(t)$  при  $i, k = 1, \dots, n$  являются непрерывными функциями при  $t \in (a, b)$ , то любая задача Коши при  $t_0 \in (a, b)$  для СДУ (6.9) имеет единственное решение  $\vec{x}(t)$ , заданное на  $(a, b)$ .

#### 6.4. Решение ЛДУ и ЛСДУ с помощью преобразования Лапласа

Математической моделью линейных задач электротехники является задача Коши для ЛДУ с постоянными коэффициентами (или СЛДУ с постоянными коэффициентами). При этом начальное условие часто задается в точке  $t_0 = 0$ , а решение ищется на полуоси  $t_0 \geq 0$ .

Необходимо заметить, что теоремы 6.9 и 6.11 существования и единственности решений задачи Коши остаются справедливыми и в этом случае (интервал  $(a, b)$  заменяется на полуось  $[0, +\infty)$ ).

Рассмотрим задачу Коши для ЛДУ с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = f(t), \\ x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}. \end{cases} \quad (6.10)$$

**Утверждение 6.5.** Если свободный член  $f(t)$  – функция-оригинал, то решение  $x(t)$  задачи Коши (6.10) тоже является функцией-оригиналом.

Пусть изображение  $\tilde{f}(s)$  является правильной рациональной дробью. Обозначим через  $\tilde{x}(s)$  изображение решения  $x(t)$  ( $\tilde{x}(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ ). Используя теоремы 6.1 и 6.4 (формула (6.1)), вычислим преобразование Лапласа для левой и правой частей ЛДУ в задаче Коши, сразу подставив начальные условия

$$\begin{aligned} a_n(s^n \tilde{x}(s) - s^{n-1} x_0 - \cdots - x_{n-1}) + a_{n-1}(s^{n-1} \tilde{x}(s) - s^{n-2} x_0 - \cdots \\ - x_{n-2}) + \cdots + a_1(s \tilde{x}(s) - x_0) + a_0 \tilde{x}(s) = \tilde{f}(s). \end{aligned}$$

Оставим в левой части только члены, содержащие  $\tilde{x}(s)$ , и приведем подобные члены:

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0) \tilde{x}(s) = \tilde{f}(s) + a_n x_0 s^{n-1} + \\ + (a_n x_1 + a_{n-1} x_0) s^{n-2} + \cdots + a x_{n-1} + a_{n-1} x_{n-2} + \cdots + a_1 x_0.$$

Введем следующие обозначения:  $\varphi(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$ ,  $\psi(s) = a_n x_0 s^{n-1} + (a_n x_1 + a_{n-1} x_0) s^{n-2} + \cdots + a_n x_{n-1} + a_{n-1} x_{n-2} + \cdots + a_1 x_0$ . Тогда, поделив уравнение для изображения  $\tilde{x}(s)$  на  $\varphi(s)$ , получим, что изображение искомой функции имеет вид

$$\tilde{x}(s) = \frac{\psi(s)}{\varphi(s)} + \frac{1}{\varphi(s)} \tilde{f}(s). \quad (6.11)$$

Так как  $\psi(s)$  – полином степени  $n-1$ , а  $\varphi(s)$  – полином степени  $n$ , то  $\frac{\psi(s)}{\varphi(s)}$  – правильная рациональная дробь. Рациональная дробь  $\frac{1}{\varphi(s)} \tilde{f}(s)$  – правильная, поскольку изображение  $\tilde{f}(s)$  является по предположению правильной рациональной дробью.

Остается в выражении (6.11) разложить полученную правильную рациональную дробь в сумму простейших дробей и по изображению  $\tilde{x}(s)$  восстановить соответствующий оригинал. Так находится  $x(t)$  – решение задачи Коши (6.10) на полуоси  $[0, +\infty)$ .

**Пример 6.2.** Решить задачу Коши:  $\begin{cases} x'' - x = 2t, \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = -1. \end{cases}$  (решение  $x(t)$  ищется на полуоси  $[0, +\infty)$ ).

1. Вычислим изображение свободного члена  $\mathcal{L}[2t] = \frac{2}{s^2}$ .

2. Обозначим  $\tilde{x}(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ . Тогда

$$\mathcal{L}[x''(t)] = s^2 \tilde{x}(s) - sx(0) - x'(0) = s^2 \tilde{x}(s) + 1.$$

Находим изображение для левой и правой частей данного ЛДУ:

$$s^2 \tilde{x}(s) + 1 - \tilde{x}(s) = \frac{2}{s^2},$$

$$\text{откуда } \tilde{x}(s) = \frac{2 - s^2}{s^2(s^2 - 1)}.$$

3. Разложим полученную правильную рациональную дробь в сумму простейших

$$\tilde{x}(s) = \frac{2 - s^2}{s^2(s^2 - 1)} = -\frac{2}{s^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{s+1}.$$

4. Находим оригинал для  $\tilde{x}(s)$ :

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ -\frac{2}{s^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{s+1} \right] = -2t + \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}).$$

Задача решена.

Рассмотрим на примере случай, когда изображение свободного члена не является правильной рациональной дробью. В этом случае можно воспользоваться теоремой 6.6 (о свертке).

**Пример 6.3.** Решить задачу Коши:  $\begin{cases} x'' + 3x' + 2x = \frac{1}{e^t + 1}, \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 1. \end{cases}$

1. Обозначим  $\mathcal{L} \left[ \frac{1}{e^t + 1} \right] = \tilde{f}(s)$ .

2. Обозначим  $\tilde{x}(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ . Тогда

$$\mathcal{L}[x''(t)] = s^2 \tilde{x}(s) - sx(0) - x'(0) = s^2 \tilde{x}(s) - 1, \quad \mathcal{L}[x'(t)] = s \tilde{x}(s) - x(0) = s \tilde{x}(s).$$

Находим изображение для левой и правой частей данного ЛДУ:

$$s^2 \tilde{x}(s) - 1 + 3s \tilde{x}(s) + 2 \tilde{x}(s) = \tilde{f}(s),$$

откуда

$$\tilde{x}(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} + \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \tilde{f}(s).$$

3. Разложим правильную рациональную дробь  $\frac{1}{s^2 + 3s + 2}$  в сумму простейших дробей

$$\frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}.$$

4. Находим оригинал для  $\frac{1}{s^2 + 3s + 2}$ :

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \right] = (e^{-t} - e^{-2t}).$$

Используя теорему 6.6, получим:

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}[\tilde{x}(s)] = e^{-t} - e^{-2t} + \int_0^t (e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}) \frac{d\tau}{e^\tau + 1} = \\ &= e^{-t} - e^{-2t} + \int_0^t \frac{(e^{-t} - e^{-2t}) e^\tau d\tau}{e^\tau + 1} = [e^\tau = z] = e^{-t} - e^{-2t} + \int_1^{e^t} \frac{e^{-t} - e^{-2t} z}{1+z} dz = \end{aligned}$$

$$= e^{-t} - e^{-2t} + (e^{-t} + e^{-2t}) \ln(1+z) \Big|_1^{e^t} - e^{-2t} z \Big|_1^{e^t} = (e^{-t} + e^{-2t}) \ln \left( \frac{1+e^t}{2} \right).$$

Задача решена.

Рассмотрим задачу Коши для системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \vec{x}' = A\vec{x} + \vec{f}(t), \\ \vec{x}(0) = \vec{x}_0. \end{cases}$$

Пусть изображения компонент векторнозначной функции  $\vec{f}(t)$  являются правильными рациональными дробями.

Введем следующие обозначения:

$$\mathcal{L}[\vec{x}(t)] = \tilde{\vec{x}}(s) = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(s) \\ \vdots \\ \tilde{x}_n(s) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{L}[\vec{f}(t)] = \tilde{\vec{f}}(s) = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1(s) \\ \vdots \\ \tilde{f}_n(s) \end{bmatrix}.$$

Воспользовавшись теоремами 6.1 и 6.4, запишем изображение задачи Коши  $s\tilde{\vec{x}}(s) - \vec{x}_0 = A\tilde{\vec{x}}(s) + \tilde{\vec{f}}(s)$ . Перепишем полученную систему в виде

$$(sI - A)\tilde{\vec{x}}(s) = \vec{x}_0 + \tilde{\vec{f}}(s), \quad (6.12)$$

где  $I$  – единичная матрица порядка  $n$ .

Система (6.12) является системой линейных алгебраических уравнений относительно  $\tilde{\vec{x}}(s)$ , при этом диагональные элементы матрицы системы  $(sI - A)$  зависят от параметра  $s$ . Решение этой системы найдем по формулам Крамера. Обозначим через

$$B = sI - A = \begin{bmatrix} s - a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & s - a_{nn} \end{bmatrix},$$

а через  $B_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  – матрицы, получающиеся из матрицы  $B$  заменой  $k$ -го столбца столбцом правых частей  $\vec{x}_0 + \tilde{\vec{f}}(s)$  системы (6.12). Введем следующие обозначения:

$$\Delta = \det(B), \quad \Delta_k = \det(B_k), \quad k = 1, \dots, n. \quad (6.13)$$

По формулам Крамера (см. (2.21)), учитывая обозначения (6.13), получим

$$\begin{cases} \tilde{x}_1(s) = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \\ \vdots \\ \tilde{x}_n(s) = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \end{cases} \quad (6.14)$$

Можно показать, что  $\frac{\Delta_k}{\Delta}$ ,  $k = 1, \dots, n$  – правильные рациональные дроби. Разлагая их в сумму простейших дробей, для изображений  $\tilde{x}_k(s)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , находим соответствующие оригиналы, т. е. компоненты искомого решения  $\vec{x}(t)$  задачи Коши.

### 6.5. Типовой расчет по теме „Решение задачи Коши для ЛСДУ и ЛДУ операционным методом“ (ТР 2.9)

Примеры решения задач, включенных в ТР, можно найти в учебном пособии [5] и в методических указаниях [7]. Студент получает индивидуальное задание, имеющее следующий вид:

**ТР 2.9. Вар. 6.** Найти решения задачи Коши для ЛСДУ (при  $t \geq 0$ ):

$$1. \begin{cases} x'_1 = -6x_1 - 8x_2 - 3e^{-2t}, & x_1(0) = 2, \\ x'_2 = 2x_1 + 2x_2 + e^{-2t}, & x_2(0) = -1. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x'_1 = 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 11, & x_1(0) = -3, \\ x'_2 = -x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 7, & x_2(0) = 0, \\ x'_3 = -2x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 11, & x_3(0) = 4. \end{cases}$$

3. Найти решение задачи Коши для ЛДУ:

$$x'' + 8x' + 20x = \begin{cases} 120, & t \in [0, 5), \\ 0, & t \notin [0, 5), \end{cases} \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 10.$$

#### Пример выполнения ТР 2.9. Вар. 6.

1. Решаем задачу Коши для ЛСДУ.

a. Найдем изображения свободных членов уравнений системы:

$$\mathcal{L}[-3e^{-2t}] = \frac{-3}{s+2}, \quad \mathcal{L}[e^{-2t}] = \frac{1}{s+2}.$$

b. Обозначим  $\tilde{x}_1(s) = \mathcal{L}[x_1(t)]$  и  $\tilde{x}_2(s) = \mathcal{L}[x_2(t)]$ . Тогда

$$\mathcal{L}[x'_1(t)] = s\tilde{x}_1(s) - x_1(0) = s\tilde{x}_1(s) - 2, \quad \mathcal{L}[x'_2(t)] = s\tilde{x}_2(s) - x_2(0) = s\tilde{x}_2(s) + 1.$$

Запишем изображения левых и правых частей уравнений системы:

$$\begin{cases} s\tilde{x}_1(s) - 2 = -6\tilde{x}_1(s) - 8\tilde{x}_2(s) - \frac{3}{s+2}, \\ s\tilde{x}_2(s) + 1 = 2\tilde{x}_1(s) + 2\tilde{x}_2(s) + \frac{1}{s+2}, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} (s+6)\tilde{x}_1(s) + 8\tilde{x}_2(s) = 2 - \frac{3}{s+2}, \\ -2\tilde{x}_1(s) + (s-2)\tilde{x}_2(s) = -1 + \frac{1}{s+2}. \end{cases}$$

**c.** Решаем полученную систему по формулам Крамера (6.14). Находим

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} s+6 & 8 \\ -2 & s-2 \end{bmatrix} = s^2 + 4s + 4 = (s+2)^2,$$

$$\Delta_1 = \det \begin{bmatrix} \frac{2s+1}{s+2} & 8 \\ \frac{-s-1}{s+2} & s-2 \end{bmatrix} = \frac{2s^2 + 5s + 6}{s+2},$$

$$\Delta_2 = \det \begin{bmatrix} s+6 & \frac{2s+1}{s+2} \\ -2 & \frac{-s-1}{s+2} \end{bmatrix} = \frac{-s^2 - 3s - 4}{s+2}.$$

Найдем  $\tilde{x}_1(s)$  и разложим результат в сумму простейших дробей:

$$\tilde{x}_1(s) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2s^2 + 5s + 6}{(s+2)^3} = \frac{A_1}{s+2} + \frac{A_2}{(s+2)^2} + \frac{A_3}{(s+2)^3}.$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая числители, получим уравнение для нахождения неопределенных коэффициентов:

$$A_1(s+2)^2 + A_2(s+2) + A_3 = 2s^2 + 5s + 6.$$

Для поиска коэффициентов приравняем коэффициенты полиномов при одинаковых степенях  $s$ :

$$\begin{array}{c|ccccc} s^2 & A_1 = 2 & & & A_1 = 2, \\ s^1 & 4A_1 + A_2 = 5 & & & A_2 = -3, \\ s^0 & 4A_1 + 2A_2 + A_3 = 6 & & & A_3 = 4. \end{array}$$

Следовательно,  $\tilde{x}_1(s) = \frac{2}{s+2} - \frac{3}{(s+2)^2} + \frac{4}{(s+2)^3}$ . Аналогично находим

$$\tilde{x}_2(s) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{1}{s+2} + \frac{1}{(s+2)^2} - \frac{2}{(s+2)^3}.$$

**d.** Находим оригиналы для  $\tilde{x}_1(s)$  и  $\tilde{x}_2(s)$  (используя таблицу изображений):

$$\begin{cases} x_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{2}{s+2} - \frac{3}{(s+2)^2} + \frac{4}{(s+2)^3} \right] = (2 - 3t + 2t^2)e^{-2t}, \\ x_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ -\frac{1}{s+2} + \frac{1}{(s+2)^2} - \frac{2}{(s+2)^3} \right] = (-1 + t - t^2)e^{-2t}. \end{cases}$$

**2.** Решаем задачу Коши для ЛСДУ.

**a.** Найдем изображения свободных членов:

$$\mathcal{L}[11] = \frac{11}{s}, \quad \mathcal{L}[-7] = \frac{-7}{s}, \quad \mathcal{L}[-11] = \frac{-11}{s}.$$

**b.** Обозначим  $\tilde{x}_1(s) = \mathcal{L}[x_1(t)]$ ,  $\tilde{x}_2(s) = \mathcal{L}[x_2(t)]$  и  $\tilde{x}_3(s) = \mathcal{L}[x_3(t)]$ .

Тогда, с учетом начальных условий,

$$\mathcal{L}[x'_1(t)] = s\tilde{x}_1(s) + 3, \quad \mathcal{L}[x'_2(t)] = s\tilde{x}_2(s), \quad \mathcal{L}[x'_3(t)] = s\tilde{x}_3(s) - 4.$$

Найдем изображения для левой и правой частей уравнений данной ЛСДУ:

$$\begin{cases} s\tilde{x}_1(s) + 3 = 3\tilde{x}_1(s) + 6\tilde{x}_2(s) - 2\tilde{x}_3(s) + \frac{11}{s}, \\ s\tilde{x}_2(s) + 0 = -\tilde{x}_1(s) - 4\tilde{x}_2(s) + 2\tilde{x}_3(s) - \frac{7}{s}, \\ s\tilde{x}_3(s) - 4 = -2\tilde{x}_1(s) - 6\tilde{x}_2(s) + 3\tilde{x}_3(s) - \frac{11}{s}, \end{cases}$$

преобразуем систему к виду:

$$\begin{cases} (s-3)\tilde{x}_1(s) - 6\tilde{x}_2(s) + 2\tilde{x}_3(s) = \frac{11}{s} - 3, \\ \tilde{x}_1(s) + (s+4)\tilde{x}_2(s) - 2\tilde{x}_3(s) = -\frac{7}{s}, \\ 2\tilde{x}_1(s) + 6\tilde{x}_2(s) + (s-3)\tilde{x}_3(s) = -\frac{11}{s} + 4. \end{cases}$$

**c.** Решение этой системы найдем по формулам Крамера (6.14):

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} s-3 & -6 & 2 \\ 1 & s+4 & -2 \\ 2 & 6 & s-3 \end{bmatrix} = s^3 - 2s^2 - s + 2 = (s-1)(s-2)(s+1),$$

$$\Delta_1 = \det \begin{bmatrix} \frac{11}{s} - 3 & -6 & 2 \\ -\frac{7}{s} & s+4 & -2 \\ -\frac{11}{s} + 4 & 6 & s-3 \end{bmatrix} = \frac{-3s^3 + 7s - 2}{s},$$

$$\Delta_2 = \det \begin{bmatrix} s-3 & \frac{11}{s} - 3 & 2 \\ 1 & -\frac{7}{s} & -2 \\ 2 & -\frac{11}{s} + 4 & s-3 \end{bmatrix} = \frac{4s^2 - 4s - 2}{s},$$

$$\Delta_3 = \det \begin{bmatrix} s-3 & -6 & \frac{11}{s}-3 \\ 1 & s+4 & -\frac{7}{s} \\ 2 & 6 & -\frac{11}{s}+4 \end{bmatrix} = \frac{4s^3 - s^2 - 9s + 2}{s}.$$

Вычислим  $\tilde{x}_1(s)$  и разложим результат в сумму простейших рациональных дробей:

$$\tilde{x}_1(s) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-3s^3 + 7s - 2}{(s-1)(s-2)(s+1)s} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s}.$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая числители, получим уравнение для нахождения неопределенных коэффициентов:

$$\begin{aligned} As(s-1)(s+1) + B(s-2)(s+1)s + C(s-2)(s-1)s + \\ + D(s-2)(s-1)(s+1) = -3s^3 + 7s - 2. \end{aligned}$$

Для поиска коэффициентов приравняем значения полиномов при различных значениях  $s$ , взяв в качестве  $s$  корни знаменателя правильной рациональной дроби  $\tilde{x}_1(s)$ :

$$\begin{array}{l|l} s = 0 & 2D = -2 \implies D = -1, \\ s = 1 & -2B = 2 \implies B = -1, \\ s = -1 & -6C = -6 \implies C = 1, \\ s = 2 & 6A = -12 \implies A = -2. \end{array}$$

Следовательно,  $\tilde{x}_1(s) = -\frac{2}{s-2} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s}$ . Аналогично находим

$$\begin{aligned} \tilde{x}_2(s) &= \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s}, \\ \tilde{x}_3(s) &= \frac{2}{s-2} + \frac{2}{s-1} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

d. Переходя от изображений к оригиналам, получаем решение исходной задачи:

$$\begin{cases} x_1(t) = -2e^{2t} - e^t + e^{-t} - 1, \\ x_2(t) = e^{2t} + e^t - e^{-t} - 1, \\ x_3(t) = 2e^{2t} + 2e^t - e^{-t} + 1. \end{cases}$$

**Замечание 6.3.** Найденные решения задачи Коши для обеих систем пп. 1,2 ТР, по условию, заданы на полуоси  $[0, +\infty)$ . Простой подстановкой найденных решений в исходные уравнения можно убедиться в том, что эти

решения удовлетворяют системам не только при  $t \geq 0$ , но и при  $t < 0$ . Это означает, что операционным методом можно в большинстве случаев находить решения ЛДУ и СЛДУ с постоянными коэффициентами на всей числовой оси.

### 3. Для решения задачи Коши

$$\begin{cases} x'' + 8x' + 20x = \begin{cases} 120, & t \in [0, 5), \\ 0, & t \notin [0, 5), \end{cases} \\ x(0) = -1, \quad x'(0) = 10 \end{cases} \quad (6.15)$$

применим операционный метод.

Заметим, что для задачи Коши (6.15) теорема 6.9 неприменима, так как правая часть уравнения не является непрерывной функцией в точке  $t = 5$  (имеет в этой точке разрыв 1-го рода). Тем не менее, решение данной задачи существует, единственное и найти его можно операционным методом. Обоснованием этого случая служит следующая теорема.

**Теорема 6.12.** *Если в ЛДУ (см. (6.5)) с постоянными коэффициентами ( $a_n \neq 0$ ) свободный член  $f(t)$  является кусочно-непрерывной функцией (на любом отрезке  $[0, T]$ ,  $T > 0$ ,  $f(t)$  имеет конечное число точек разрыва 1-го рода), то любая задачи Коши для ЛДУ (6.5) имеет единственное решение, непрерывное на полуоси  $[0, +\infty)$  вместе с производными до порядка  $(n - 1)$  включительно (производная  $n$ -го порядка, как и функция  $f(t)$ , является кусочно-непрерывной функцией). При этом, если  $f(t)$  является функцией-оригиналом, то решение задачи Коши для уравнения (6.5) и все его производные до порядка  $n$  включительно являются функциями-оригиналами.*

**а.** Запишем правую часть  $f(t)$  данного уравнения, используя функцию Хевисайда, в следующем виде:

$$f(t) = 120(\delta_1(t) - \delta_1(t - 5)).$$

Очевидно, что  $f(t)$  является оригиналом. Изображение этой функции легко находится с использованием свойства линейности преобразования Лапласа и теоремы запаздывания (теорема 6.3):

$$\mathcal{L}[f(t)] = 120 \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-5s} \right) = \frac{120}{s} (1 - e^{-5s}).$$

Пусть  $\mathcal{L}[x(t)] = \tilde{x}(s)$ , тогда

$$\mathcal{L}[x'(t)] = s\tilde{x}(s) + 1, \quad \mathcal{L}[x''(t)] = s^2\tilde{x}(s) + s - 10.$$

**b.** Найдем изображения левой и правой частей заданного дифференциального уравнения (6.15):

$$s^2\tilde{x}(s) + s - 10 + 8(\tilde{x}(s) + 1) + 20\tilde{x}(s) = \frac{120}{s} (1 - e^{-5s}).$$

Отсюда

$$\tilde{x}(s) = \frac{-s + 2}{s^2 + 8s + 20} + \frac{120}{s(s^2 + 8s + 20)} (1 - e^{-5s}).$$

**c.** Первое слагаемое правой части  $\frac{-s + 2}{s^2 + 8s + 20}$  – простейшая рациональная дробь. Рациональную дробь  $\frac{120}{s(s^2 + 8s + 20)}$  разложим в сумму простейших:

$$\frac{120}{s(s^2 + 8s + 20)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 8s + 20}.$$

Найдем значения неопределенных коэффициентов. Для этого правую часть разложения приведем к общему знаменателю:

$$\frac{120}{s(s^2 + 8s + 20)} = \frac{A(s^2 + 8s + 20) + (Bs + C)s}{s(s^2 + 8s + 20)}.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $s$  полиномов в числителях рациональных дробей:

$$\begin{array}{c|l} s^2 & A + B = 0, \\ s^1 & 8A + C = 0, \\ s^0 & 20A = 120. \end{array}$$

Решая систему, получим  $A = 6$ ,  $B = -6$ ,  $C = -48$ . Таким образом, справедливо разложение

$$\frac{120}{s(s^2 + 8s + 20)} = \frac{6}{s} + \frac{-6s - 48}{s^2 + 8s + 20}.$$

Преобразуем теперь  $\tilde{x}(s)$  к виду, удобному для применения таблицы изображений:

$$\tilde{x}(s) = \frac{-(s + 4) + 6}{(s + 4)^2 + 4} + \left( \frac{6}{s} + \frac{-6(s + 4) - 24}{(s + 4)^2 + 4} \right) (1 - e^{-5s})$$

или

$$\begin{aligned} \tilde{x}(s) = & \frac{-(s + 4)}{(s + 4)^2 + 4} + 3 \frac{2}{(s + 4)^2 + 4} + \\ & + \left( \frac{6}{s} - 6 \frac{(s + 4)}{(s + 4)^2 + 4} - 12 \frac{2}{(s + 4)^2 + 4} \right) (1 - e^{-5s}). \end{aligned}$$

**d.** Применяя таблицу изображений, а также свойство линейности преобразования Лапласа и теорему запаздывания, находим оригинал  $x(t)$ :

$$x(t) = (6 - 7e^{-4t} \cos(2t) - 9e^{-4t} \sin(2t)) \delta_1(t) - \\ - (6 - 6e^{-4(t-5)} \cos(2(t-5)) - 12e^{-4(t-5)} \sin(2(t-5))) \delta_1(t-5).$$

Эту функцию можно записать в следующей форме:

$$x(t) = \begin{cases} 6 - 7e^{-4t} \cos(2t) - 9e^{-4t} \sin(2t), & 0 \leq t < 5, \\ -7e^{-4t} \cos(2t) - 9e^{-4t} \sin(2t) + \\ +6e^{-4(t-5)} \cos(2(t-5)) + 12e^{-4(t-5)} \sin(2(t-5)), & t \geq 5. \end{cases}$$

**Замечание 6.4.** Убедимся в непрерывности найденного решения в точке  $t = 5$  (см. теорему 6.12). Действительно:

$$\lim_{t \rightarrow 5^-} (6 - 7e^{-4t} \cos(2t) - 9e^{-4t} \sin(2t)) = 6 - 7e^{-20} \cos(10) - 9e^{-20} \sin(10), \\ \lim_{t \rightarrow 5^+} (-7e^{-4t} \cos(2t) - 9e^{-4t} \sin(2t) + 6e^{-4(t-5)} \cos(2(t-5)) + \\ + 12e^{-4(t-5)} \sin(2(t-5))) = -7e^{-20} \cos(10) - 9e^{-20} \sin(10) + 6.$$

Студентам предоставляется возможность самостоятельно проверить непрерывность производной  $x'(t)$  в точке  $t = 5$ .

**Ответы:**

$$1. \begin{cases} x_1(t) = (2 - 3t + 2t^2)e^{-2t}, \\ x_2(t) = (-1 + t - t^2)e^{-2t}. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1(t) = -2e^{2t} - e^t + e^{-t} - 1, \\ x_2(t) = e^{2t} + e^t - e^{-t} - 1, \\ x_3(t) = 2e^{2t} + 2e^t - e^{-t} + 1. \end{cases}$$

$$3. x(t) = \begin{cases} 6 - 7e^{-4t} \cos(2t) - 9e^{-4t} \sin(2t), & 0 \leq t < 5, \\ -7e^{-4t} \cos(2t) - 9e^{-4t} \sin(2t) + \\ +6e^{-4(t-5)} \cos(2(t-5)) + 12e^{-4(t-5)} \sin(2(t-5)), & t \geq 5. \end{cases}$$

## 7. ЛДУ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Подробное изложение теории ЛДУ можно найти в учебнике [4] гл. 1 и в учебном пособии [6]. Примеры решения ЛДУ с постоянными коэффициентами можно найти в методических указаниях [7].

## 7.1. Решение задачи Коши для ЛДУ с постоянными коэффициентами

Рассмотрим неоднородное ЛДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (7.1)$$

и соответствующее ему однородное ЛДУ:

$$y'' + py' + qy = 0. \quad (7.2)$$

Согласно теореме 6.9 любая задача Коши для ЛДУ (7.2) имеет единственное решение, и если функция  $f(x)$  непрерывна на вещественной оси, то любая задача Коши для ЛДУ (7.1) также имеет единственное решение. При этом все решения уравнений (7.1) и (7.2) определены на всей вещественной оси.

**Определение 7.1.** Говорят, что набор решений  $\{y_1(x), y_2(x)\}$  ЛДУ (7.2) является фундаментальной системой решений ( $\Phi CP$ ) этого уравнения, если существует точка  $x_0 \in \mathbb{R}$ , такая, что векторы  $\begin{bmatrix} y_1(x_0) \\ y'_1(x_0) \end{bmatrix}$  и  $\begin{bmatrix} y_2(x_0) \\ y'_2(x_0) \end{bmatrix}$  линейно независимы.

**Теорема 7.1.** Если  $\{y_1(x), y_2(x)\}$  –  $\Phi CP$  для ЛДУ (7.2), то

$$y_0(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad (7.3)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные постоянные, есть общее решение для ЛДУ (7.2).

Это означает, что при любых значениях  $C_1$  и  $C_2$   $y_0(x)$  является решением уравнения (7.2) и одновременно для любого решения  $y_0(x)$  уравнения (7.2) справедливо представление в виде (7.3) с некоторыми однозначно определяемыми постоянными  $C_1$  и  $C_2$ .

Квадратное уравнение

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \quad (7.4)$$

называется характеристическим уравнением для ЛДУ (7.2).

**Теорема 7.2.** Пусть  $\lambda_1, \lambda_2$  – корни уравнения (7.4). Тогда

1) при  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2 : \{y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, y_2(x) = e^{\lambda_2 x}\}$  –  $\Phi CP$  для ЛДУ (7.2) и его общее решение

$$y_0(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x};$$

2) при  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$  :  $\{y_1(x) = e^{\lambda x}, y_2(x) = xe^{\lambda x}\}$  – ФСР для ЛДУ (7.2) и его общее решение

$$y_0(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x};$$

3) при  $\lambda_{1,2} = a \pm ib$  ( $b \neq 0$ )  $\{y_1(x) = \cos(bx)e^{ax}, y_2(x) = \sin(bx)e^{ax}\}$  – ФСР для ЛДУ (7.2) и его общее решение

$$y_0(x) = C_1 \cos(bx) + C_2 \sin(bx)e^{ax}.$$

**Теорема 7.3.** Если  $y_0(x)$  – общее решение ЛДУ (7.2), а  $\tilde{y}(x)$  – произвольное частное решение ЛДУ (7.1), то  $y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x)$  есть общее решение ЛДУ (7.1) (см. [6]).

Таким образом, если  $\{y_1(x), y_2(x)\}$  – ФСР для ЛДУ (7.2), то

$$y_0(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \tilde{y}(x)$$

есть общее решение ЛДУ (7.1) ( $C_1$  и  $C_2$  – произвольные постоянные), т. е. этой формулой представлены все решения данного уравнения.

Если в правой части ЛДУ (7.1) стоит функция  $f(x)$  вида

$$f(x) = (P_l(x) \cos(bx) + Q_k(x) \sin(bx)) e^{ax}, \quad (7.5)$$

где  $P_l(x)$  и  $Q_k(x)$  – полиномы степеней  $l$  и  $k$  соответственно, то это уравнение обычно называют ЛДУ со специальной правой частью (не исключается, что  $a$  и  $b$  могут быть равными нулю). Для такого уравнения справедлива следующая теорема (см. [6]).

**Теорема 7.4.** Пусть в ЛДУ (7.1) функция  $f(x)$  имеет вид (7.5). Введем числа  $n = \max\{l, k\}$ ,  $\alpha = a + ib$  и

$$m = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha \text{ – не корень уравнения (7.4);} \\ t, & \text{если } \alpha \text{ – корень кратности } t \text{ уравнения (7.4).} \end{cases}$$

Тогда ЛДУ (7.1) имеет единственное решение вида

$$\tilde{y}(x) = x^m \left( \tilde{P}_n(x) \cos(bx) + \tilde{Q}_n(x) \sin(bx) \right) e^{ax}, \quad (7.6)$$

где  $\tilde{P}_n(x)$ ,  $\tilde{Q}_n(x)$  – полиномы от  $x$  степени  $n$ .

Теорему 7.4 применяют для нахождения частного решения ЛДУ (7.1)  $\tilde{y}(x)$ . В выражении (7.6) неизвестными являются коэффициенты полиномов  $\tilde{P}_n(x)$ ,  $\tilde{Q}_n(x)$ . Записывая  $\tilde{y}(x)$  в виде (7.6) с неопределенными коэффициентами для полиномов подставляем  $\tilde{y}(x)$  в ЛДУ (7.1), сокращаем на  $e^{ax}$  и приравниваем коэффициенты при функциях  $x^r \cos(bx)$ ,  $x^r \sin(bx)$ , где

$r = 0, 1, \dots, n$ . Теорема 7.4 гарантирует, что полученная СЛУ относительно коэффициентов полиномов  $\tilde{P}_n(x)$ ,  $\tilde{Q}_n(x)$  имеет решение, и притом единственное. Такой метод нахождения частного решения ЛДУ (7.1)  $\tilde{y}(x)$  называется методом неопределенных коэффициентов.

Отметим, что если в (7.5)  $b = 0$ , то  $\tilde{y}(x)$  ищется в виде:  $\tilde{y}(x) = x^m \tilde{P}_l(x) e^{ax}$ .

## 7.2. Типовой расчет по теме „Решение задачи Коши для ЛДУ со специальной правой частью“ (ТР 2.10)

Студент получает индивидуальное задание, имеющее следующий вид:

---

**ТР 2.10. Вар. 1.** Найти решения задачи Коши для ЛДУ:

$$1. y'' - 2y' - 8y = e^{-3x}(-14x^2 + 67x - 16)$$

с начальными условиями  $y(0) = 9$ ,  $y'(0) = -5$ .

$$2. y'' + 1y' - 20y = e^{-5x}((66x - 63)\cos(2x) + (-42x - 35)\sin(2x))$$

с начальными условиями  $y(0) = -9$ ,  $y'(0) = 34$ .

---

### Пример выполнения ТР 2.10. Вар. 1.

1. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y'' - 2y' - 8y = e^{-3x}(-14x^2 + 67x - 16) \\ y(0) = 9, \quad y'(0) = -5. \end{cases} \quad (7.7)$$

a. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y'' - 2y' - 8y = 0.$$

Его характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0,$$

или

$$(\lambda + 2)(\lambda - 4) = 0,$$

имеет корни  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = 4$ .

Следовательно,  $\{e^{-2x}, e^{4x}\}$  – ФСР и общее решение однородного уравнения имеет вид (см. теорему 7.2)

$$y_0(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{4x}.$$

b. Частное решение неоднородного уравнения найдем методом неопределенных коэффициентов. Так как  $\lambda = -3$  не является корнем характеристического уравнения, то частное решение будем искать в виде (см. теорему 7.4)  $\tilde{y}(x) = (Ax^2 + Bx + C)e^{-3x}$ .

Найдем производные

$$\begin{aligned}\tilde{y}'(x) &= (2Ax + B - 3Ax^2 - 3Bx - 3C)e^{-3x}, \\ \tilde{y}''(x) &= (2A - 12Ax - 6B + 9Ax^2 + 9Bx + 9C)e^{-3x}.\end{aligned}$$

Подставляя  $\tilde{y}(x)$  и его производные в уравнение (7.7) и сокращая на  $e^{-3x}$ , получим:

$$\begin{aligned}(2A - 12Ax - 6B + 9Ax^2 + 9Bx + 9C) - \\ - 2(2Ax + B - 3Ax^2 - 3Bx - 3C) - \\ - 8(Ax^2 + Bx + C) &= (-14x^2 + 67x - 16).\end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты полиномов в обеих частях равенства, получаем систему уравнений для определения неизвестных  $A, B, C$ :

$$\begin{array}{l|ll} x^2 & 9A + 6A - 8A = -14, & 7A = -14, \\ x^1 & -12A + 9B - 4A + 6B - 8B = 67, & \Leftrightarrow -16A + 7B = 67, \\ x^0 & 2A - 6B + 9C - 2B + 6C - 8C = -16, & 2A - 8B + 7C = -16. \end{array}$$

Решая полученную СЛУ находим:  $A = -2, B = 5, C = 4$ . Таким образом, частное решение неоднородного уравнения (7.7) имеет вид

$$\tilde{y}(x) = (-2x^2 + 5x + 4)e^{-3x}.$$

**c.** Общее решение неоднородного уравнения (см. теорему 7.3) записываем в виде

$$y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{4x} + (-2x^2 + 5x + 4)e^{-3x}.$$

**d.** Решим задачу Коши (7.7). Найдем коэффициенты  $c_1, c_2$  из начальных условий  $y(0) = 9, y'(0) = -5$ . Так как

$$y'(x) = -2c_1 e^{-2x} + 4c_2 e^{4x} + (-4x + 5)e^{-3x} + (-2x^2 + 5x + 4)(-3)e^{-3x},$$

то

$$\begin{aligned}y(0) &= c_1 + c_2 + 4 = 9, \\ y'(0) &= -2c_1 + 4c_2 + 5 - 12 = -5,\end{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 5, \\ -2c_1 + 4c_2 = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 3, \\ c_2 = 2. \end{cases}$$

Решение задачи Коши:

$$y(x) = 3e^{-2x} + 2e^{4x} + (-2x^2 + 5x + 4)e^{-3x}.$$

Студентам рекомендуется делать проверку найденного решения задачи Коши. Продемонстрируем это на решенном примере.

**Проверка.** Вычислим производные от  $y(x)$  (алгебраические преобразования опускаем):

$$y'(x) = -6e^{-2x} + 8e^{4x} + (6x^2 - 19x - 7)e^{-3x},$$

$$y''(x) = 12e^{-2x} + 32e^{4x} + (-18x^2 + 69x + 2)e^{-3x}$$

и подставим в левую часть уравнения (7.7) (алгебраические преобразования опускаем):

$$y'' - 2y' - 8y = e^{-3x}(-14x^2 + 67x - 16).$$

Получили правую часть уравнения, а значит, функция  $y(x)$  удовлетворяет ЛДУ (7.7).

Подставив в  $y(x)$  и  $y'(x)$   $x = 0$ , получим начальные условия:  $y(0) = 9$  и  $y'(0) = -5$ . Проверка закончена.

**2.** Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y'' + y' - 20y = e^{-5x}((66x - 63)\cos(2x) + (-42x - 35)\sin(2x)), \\ y(0) = -9, \quad y'(0) = 34. \end{cases} \quad (7.8)$$

**a.** Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y'' + y' - 20y = 0.$$

Его характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + \lambda - 20 = 0$$

имеет корни  $\lambda_1 = -5$ ,  $\lambda_2 = 4$ .

Следовательно,  $\{e^{-5x}, e^{4x}\}$  – ФСР и общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_0(x) = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{4x}.$$

**b.** Частное решение неоднородного уравнения найдем методом неопределенных коэффициентов. Так как  $\lambda = -5 + 2i$  не является корнем характеристического уравнения, то частное решение будем искать в виде (см. теорему 7.3)  $\tilde{y}(x) = e^{-5x}((Ax + B)\cos(2x) + (Cx + D)\sin(2x))$ . Найдем производные (алгебраические преобразования опускаем):

$$\begin{aligned} \tilde{y}'(x) &= e^{-5x}((( -5A + 2C)x + A - 5B + 2D)\cos(2x) + \\ &\quad + (( -5C - 2A)x + C - 2B - 5D))\sin(2x)), \\ \tilde{y}''(x) &= e^{-5x}(((21A - 20C)x - 10A + 21B + 4C - 20D)\cos(2x) + \\ &\quad + ((21C + 20A)x - 4A + 20B - 10C + 21D)\sin(2x)). \end{aligned}$$

Подставляя  $\tilde{y}(x)$  и его производные в уравнение (7.8) и сокращая на  $e^{-5x}$  (алгебраические преобразования опускаем), получим тождество:

$$\begin{aligned} & (((-4A - 18C)x - 9A - 4B + 4C - 18D) \cos(2x) + \\ & + ((18A - 4C)x - 4A + 18B - 9C - 4D) \sin(2x)) = \\ & = ((66x - 63) \cos(2x) + (-42x - 35) \sin(2x)). \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты в левой и правой частях тождества при функциях  $x \cos(2x)$ ,  $\cos(2x)$ ,  $x \sin(2x)$ ,  $\sin(2x)$ , получаем систему уравнений для определения неизвестных  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ :

$$\begin{array}{l|l} \begin{array}{l} x \cos(2x) \\ \cos(2x) \\ x \sin(2x) \\ \sin(2x) \end{array} & \begin{array}{l} -4A - 18C = 66, \\ -9A - 4B + 4C - 18D = -63, \\ 18A - 4C = -42, \\ -4A + 18B - 9C - 4D = -35, \end{array} \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -3, \\ B = -3, \\ C = -3, \\ D = 5. \end{cases}$$

Следовательно, частное решение неоднородного уравнения (7.8):

$$\tilde{y}(x) = e^{-5x}((-3x - 3) \cos(2x) + (-3x + 5) \sin(2x)).$$

**c.** Общее решение неоднородного уравнения:

$$\begin{aligned} y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x) &= c_1 e^{-5x} + c_2 e^{4x} + \\ &+ e^{-5x}((-3x - 3) \cos(2x) + (-3x + 5) \sin(2x)). \end{aligned}$$

**d.** Решим задачу Коши. Найдем коэффициенты  $c_1$ ,  $c_2$  из начальных условий  $y(0) = -9$ ,  $y'(0) = 34$ . Так как

$$y'(x) = -5c_1 e^{-5x} + 4c_2 e^{4x} + e^{-5x}((9x + 22) \cos(2x) + (21x - 22) \sin(2x)),$$

то

$$\begin{array}{l} y(0) = c_1 + c_2 - 3 = -9, \\ y'(0) = -5c_1 + 4c_2 + 22 = 34, \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = -6, \\ -5c_1 + 4c_2 = 12, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -4, \\ c_2 = -2. \end{cases}$$

Решение задачи Коши:

$$y(x) = -4e^{-5x} - 2e^{4x} + e^{-5x}((-3x - 3) \cos(2x) + (-3x + 5) \sin(2x)).$$

Сделаем проверку найденного решения.

**Проверка.** Вычислим производные от  $y(x)$  (алгебраические преобразования опускаем):

$$y'(x) = 20e^{-5x} - 8e^{4x} + e^{-5x}((9x + 22) \cos(2x) + (21x - 22) \sin(2x)),$$

$$y''(x) = -100e^{-5x} - 32e^{4x} + e^{-5x}((-3x - 145) \cos(2x) + (-123x + 87) \sin(2x))$$

и подставим в левую часть уравнения (7.8) (алгебраические преобразования опускаем):

$$y'' + y' - 20y = e^{-5x}((66x - 63)\cos(2x) + (-42x - 35)\sin(2x)).$$

Получили правую часть уравнения, а значит, функция  $y(x)$  удовлетворяет ЛДУ (7.8).

Подставив в  $y(x)$  и  $y'(x)$   $x = 0$ , получим начальные условия:  $y(0) = -9$  и  $y'(0) = 34$ . Проверка закончена.

**Ответы:** 1.  $y(x) = 3e^{-2x} + 2e^{4x} + (-2x^2 + 5x + 4)e^{-3x}$ .  
2.  $y(x) = -4e^{-5x} - 2e^{4x} + e^{-5x}((-3x - 3)\cos(2x) + (-3x + 5)\sin(2x))$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бодунов Н. А., Челкак С. И., Чистяков В. М. Комплексные числа. Многочлены. Векторная алгебра и аналитическая геометрия: Учеб. пособие / ГЭТУ. СПб., 1996.
2. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учеб. для вузов. М.: Наука, 2003.
3. Белопольский А. Л., Бодунов Н. А., Меркулов А. Л. Линейная алгебра: Учеб. пособие СПб : Изд-во СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, 2000.
4. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного: Учеб. для вузов. М.: Наука, 1981, 1985.
5. Каразеева Н. А., Трегуб В. Л., Фролова Е. В. Операционное исчисление: Учеб. пособие / Под ред. С. И. Челкака. СПб : Изд-во СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, 1998.
6. Бодунов Н. А., Пилигин С. Ю. Дифференциальные уравнения.: Учеб. пособие / ГЭТУ. СПб., 1994.
7. Дифференциальные уравнения: Методические указания / Сост.: Е. З. Боревич, Е. Е. Жукова, А. А. Меркулов, В. Л. Трегуб. СПб : Изд-во СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, 2003.

# СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	3
1. Комплексные числа .....	4
1.1. Определение КЧ. Основные свойства КЧ .....	4
1.2. Модуль и аргумент КЧ, тригонометрическая и показательная формы записи КЧ .....	9
1.3. Двучленные уравнения .....	13
1.4. Типовой расчет по теме „Комплексные числа“ (ТР 2.1) .....	14
2. Решение систем линейных уравнений .....	17
2.1. Матрицы. Действия с матрицами .....	17
2.2. Системы линейных алгебраических уравнений .....	20
2.3. Метод полного исключения неизвестных .....	22
2.4. Определитель квадратной матрицы .....	27
2.5. Вычисление определителя матрицы .....	28
2.6. Теорема и формулы Крамера .....	29
2.7. Типовой расчет по теме „Решение СЛУ“ (ТР 1.1) .....	30
3. Решение матричных уравнений .....	37
3.1. Матричные уравнения .....	37
3.2. Обратная матрица .....	38
3.3. Типовой расчет по теме „Решение матричных уравнений и нахождение обратной матрицы“ (ТР 1.3) .....	39
4. Аналитическая геометрия .....	42
4.1. Векторы. Координаты векторов .....	42
4.2. Скалярное, векторное смешанное произведение .....	44
4.3. Уравнения плоскости .....	46
4.4. Уравнения прямой .....	47
4.5. Типовой расчет по теме „Аналитическая геометрия“ (ТР 1.3. (д. ф.)) .....	50
4.6. Типовой расчет по теме „Аналитическая геометрия“ (ТР 1.3. (о. ф.)) .....	53
5. Собственные числа и собственные векторы .....	56
5.1. Собственные числа и собственные векторы квадратных матриц .....	56
5.2. Приведение уравнений кривых второго порядка к каноническому виду .....	58
5.3. Типовой расчет по теме „Собственные числа и собственные векторы матриц. Приведение уравнений кривой второго порядка к каноническому виду“ (ТР 1.4) .....	60
6. Применение операционного исчисления .....	67
6.1. Функция-оригинал .....	67

6.2. Преобразование Лапласа .....	68
6.3. Элементы теории дифференциальных уравнений .....	70
6.4. Решение ЛДУ и ЛСДУ с помощью преобразования Лапласа...	73
6.5. Типовой расчет по теме „Решение задачи Коши для ЛСДУ и ЛДУ операционным методом“ (ТР 2.9) .....	77
7. ЛДУ с постоянными коэффициентами .....	83
7.1. Решение задачи Коши для ЛДУ с постоянными коэффициентами .....	84
7.2. Типовой расчет по теме „Решение задачи Коши для ЛДУ со специальной правой частью“ (ТР 2.12) .....	86
Список литературы .....	90

Белопольский Андрей Львович, Бодунов Николай Александрович,  
Червинская Нина Михайловна

Типовые расчеты по курсу „Алгебра и геометрия“

Учебное пособие

Редактор Э. К. Долгатов

---

Подписано в печать

Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Гарнитура „Times“ Печ. л. 5,75.

Тираж 550 экз. Заказ

---

Издательство СПбГЭТУ „ЛЭТИ“  
197376, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5