Министерство общего и профессионального образования РФ

Санкт–Петербургский государственный электротехнический университет

РЯДЫ ФУРЬЕ
КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Методические указания
к курсовой работе по дисциплине
″Высшая математика″

Санкт–Петербург
1997

Министерство общего и профессионального образования РФ

Санкт–Петербургский государственный электротехнический университет

РЯДЫ ФУРЬЕ
КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Методические указания
к курсовой работе по дисциплине
″Высшая математика″

Санкт–Петербург
1997

УДК 517.9

Ряды Фурье. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений: Методические указания к курсовой работе по дисциплине ″Высшая математика″ / Сост.: Е.З.Боревич, К.В.Каврайская, С.И.Челкак; ГЭТУ. — СПб., 1997. — 32 с.

Рассматриваются ряды Фурье, разложение функций в ряды Фурье, краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений и методы их решения.

Предназначены для студентов, обучающихся по направлению ″Электроника и микроэлектроника″.

Утверждено
редакционно–издательским советом университета
в качестве методических указаний

Методические указания предназначены для студентов второго курса ФЭТ ЭТУ, выполняющих курсовую работу по математике на тему "Ряды Фурье и краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка".

Авторы благодарны своим коллегам по кафедре ВМ-1 ЭТУ, в первую очередь проф.В.М.Чистякову и доцентам А.Л.Белопольскому и Г.М.Коновалову, за полезные обсуждения, предложения и помощь при работе над данным изданием.

Введение

Классическая теория рядов Фурье, возникшая в 18 веке, к настоящему времени превратилась в большую область математики, часто называемую гармоническим анализом. Разумеется, курсовая работа касается лишь самых основ этой теории. Необходимость изучения теории рядов Фурье в техническом вузе вызвана тем, что ряды Фурье уже давно являются одним из основных инструментов при изучении курса теоретических основ электротехники. Кроме того, ряды Фурье имеют широкое применение и при решении различных краевых задач математической физики.

С рядами Фурье тесно связаны и краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти задачи, с одной стороны, приводят к различным полным ортогональным системам функций и, с другой стороны, сами требуют для своего решения применения рядов Фурье. Важность изучения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений связана как с необходимостью их использования в математической физике, так и, возможно в первую очередь, с тем, что краевые задачи (одномерные и многомерные) являются одним из основных аппаратов квантовой механики.

В курсе математики в техническом вузе нет возможности (а часто и необходимости) добиться полной математической строгости. В связи с этим в настоящих указаниях мы вынуждены в некоторых случаях не приводить точные определения. В частности, пространство $\mathcal{L}_2[a, b; \rho(x)]$ можно ввести достаточно элементарно (но зато не строго) либо дать его строгое определение (которое, однако, совсем не элементарно).

Курсовая работа по рассматриваемой теме состоит из выполнения трех заданий, первым двум из них посвящены предлагаемые методические указания. Эти задания выполняются вручную (если необходимо, с применением микрокалькулятора). Необходимая для выполнения курсовой работы теория имеется в $[1-3]$.

1. Ряды Фурье

1.1. Пространство $\mathcal{L}_2[a,b;\rho(x)]$

Пусть на промежутке $[a,b]$ задана такая интегрируемая функция $\rho(x)$, что $\rho(x) \ge \rho_0 > 0$ при $x \in [a,b]$. Рассмотрим множество $\mathcal{L}$ всех комплекснозначных функций $f(x)$, определенных на $[a,b]$, для которых существует интеграл

$$\|f\|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 \rho(x) dx \tag{1.1}$$

(в частности, этот интеграл существует для любой кусочно-непре-рывной на $[a,b]$ функции). Из неравенства Коши-Буняковского (для интегралов) следует, что если для функций f и g величины $\|f\|$ и $\|g\|$ конечны, то определено выражение

$$(f,g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\rho(x) dx. \tag{1.2}$$

Таким образом, множество $\mathcal{L}$ является линейным векторным пространством, так как если $\|f\| < +\infty$ и $\|g\| < +\infty$, то

$$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + (f,g) + (g,f) + \|g\|^2 < +\infty.$$

Легко проверить, что величина (f,g), определенная равенством (1.2), удовлетворяет соотношениям:

$$(f,g) = \overline{(g,f)},$$

$$(\alpha f_1 + \beta f_2, g) = \alpha(f_1,g) + \beta(f_2,g), \quad \alpha,\beta \in \mathbb{C}.$$

Будем считать совпадающими между собой (равными) любые две функции f_1 и f_2, для которых $\|f_1 - f_2\| = 0$. В частности, функции, различающиеся лишь в конечном числе точек, будем считать равными. При таком определении равенства функций соотношение $(f,f) = 0$ верно только в том случае, когда $f = 0$.

Таким образом, для величины (f,g) справедливы все аксиомы скалярного произведения в линейном векторном пространстве и, следовательно, неотрицательная величина $\|f\|$ является нормой. Линейное векторное пространство $\mathcal{L}$ с введенными соотношениями (1.1) и (1.2) нормой и скалярным произведением будем называть пространством $\mathcal{L}_2[a,b;\rho(x)]$, а функцию $\rho(x)$ — весовой функцией или просто весом. Для пространства $\mathcal{L}_2[a,b;\rho(x)]$ справедливы многие факты из теории линейных векторных пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$. Главное и чрезвычайно существенное отличие пространства $\mathcal{L}_2[a,b;\rho(x)]$

от пространств $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{R}^n$ состоит в том, что пространство $\mathcal{L}_2[a,b;\rho(x)]$ является бесконечномерным. Это означает, что при любом k существует линейно независимая система функций, содержащая k элементов. Такой системой является, например, система $\{1, x, ..., x^{k-1}\}$.

Вопрос о том, что целесообразно назвать базисом в $\mathcal{L}_2[a,b;\rho(x)]$, а также вопросы о существовании в $\mathcal{L}_2[a,b;\rho(x)]$ базиса (который должен, очевидно, состоять из бесконечного числа элементов) и о свойствах разложений по базису являются основными вопросами теории рядов Фурье. Для формулировки этих результатов необходимо понятие о сходимости в $\mathcal{L}_2[a,b;\rho(x)]$. Будем говорить, что последовательность функций $f_n(x)$ сходится в $\mathcal{L}_2[a,b;\rho(x)]$ к функции $f(x)$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$. Сходимость в $\mathcal{L}_2[a,b;\rho(x)]$ часто называют среднеквадратической сходимостью (обычно в случае $\rho(x) \equiv 1$).

Отметим, что из сходимости последовательности $f_n(x)$ к $f(x)$ в $\mathcal{L}_2[a,b;\rho(x)]$ не следует поточечная сходимость этой последовательности, означающая, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \forall x \in [a,b]$, и, тем более, не следует равномерная на $[a,b]$ сходимость последовательности $f_n(x)$ к $f(x)$, т.е. выполнение условия

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Если же последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ на $[a,b]$ поточечно, то из этого также не следует ни сходимость в $\mathcal{L}_2[a,b;\rho(x)]$, ни равномерная на $[a,b]$ сходимость (это можно увидеть на достаточно простых примерах). Наконец, равномерно сходящаяся на $[a,b]$ последовательность $f_n(x)$ будет сходящейся как поточечно (на $[a,b]$), так и в смысле сходимости в $\mathcal{L}_2[a,b;\rho(x)]$. Доказательство этого утверждения оставляем в качестве упражнения.

1.2. Основные сведения из теории рядов Фурье

Пусть в $\mathcal{L}_2[a,b;\rho(x)]$ задана последовательность функций $\{\varphi_k(x)\}$, $k = 1, 2, ...$ Будем считать, что $\|\varphi_k\| \neq 0$ и $(\varphi_k, \varphi_m) = 0$ при $k \neq m$; систему функций $\{\varphi_k\}$ в этом случае называем ортогональной. Если $f \in \mathcal{L}_2[a,b;\rho(x)]$, то определены числа

$$f_k = \frac{(f, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2},$$

называемые коэффициентами Фурье функции $f(x)$ относительно системы $\{\varphi_k(x)\}$.

Коэффициенты Фурье являются решением следующей экстремальной задачи о наилучшем среднеквадратичном приближении функции $f(x)$ линейными комбинациями функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$: при заданном n найти параметры $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ так, чтобы величина $\|f - \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\|$ была минимальна. Эта задача имеет единственное решение $\alpha_k = f_k$, $k = 1, \ldots, n$, и при этом

$$\min_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \left\|f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\right\|^2 = \left\|f - \sum_{k=1}^{n} f_k \varphi_k\right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |f_k|^2 \|\varphi_k\|^2. \quad (1.3)$$

Из (1.3) следует, что при каждом $n \in I\!N$ справедливо неравенство Бесселя

$$\sum_{k=1}^{n} |f_k|^2 \|\varphi_k\|^2 \le \|f\|^2,$$

из которого вытекает сходимость числового ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_k|^2 \|\varphi_k\|^2$.

Определение 1.1[1] *Ортогональная система функций $\{\varphi_k(x)\}$ называется полной в пространстве $\mathcal{L}_2[a, b; \rho(x)]$ (или ортогональным базисом), если для любой $f \in \mathcal{L}_2[a, b; \rho(x)]$ справедливо равенство (равенство Парсеваля)*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2 \|\varphi_k\|^2 = \|f\|^2.$$

Если система $\{\varphi_k(x)\}$ полна, то из равенства Парсеваля следует, что для любой $f \in \mathcal{L}_2[a, b; \rho(x)]$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k(x), \quad (1.4)$$

называемый рядом Фурье функции f, сходится к f в пространстве $\mathcal{L}_2[a, b; \rho(x)]$. Это означает, что $S_n \to f$ (в $\mathcal{L}_2[a, b; \rho(x)]$), где $S_n = S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k \varphi_k(x)$ — последовательность частичных сумм ряда (1.4). При этом (в соответствии с (1.3))

$$\|S_n - f\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |f_k|^2 \|\varphi_k\|^2. \quad (1.5)$$

Как и в случае произвольной последовательности функций, из сходимости ряда Фурье (1.4) в $\mathcal{L}_2[a, b; \rho(x)]$ не следует его поточечная сходимость

[1] В литературе чаще встречается другое определение полноты системы функций, однако при этом речь идет о функциях не только из пространства $\mathcal{L}_2$. Полные в смысле определения 1.1 системы в этом случае называют замкнутыми. Для пространства $\mathcal{L}_2$ полнота и замкнутость эквивалентны. Точные определения полноты и замкнутости в общем случае и свойства полных и замкнутых систем функций приведены, например, в [2].

(см.1.1), т.е. его сходимость при каждом $x \in [a,b]$, которая определяется не только полнотой системы $\{\varphi_k(x)\}$, но и другими, более специфическими свойствами функций $\varphi_k(x)$ и $f(x)$.

Тригонометрическими рядами Фурье будем называть ряды Фурье на промежутке $[a,b]$, связанные с системой функций

$$\{1,\ \cos\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right),\ \sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right), ..., \cos\left(\frac{2\pi kx}{\ell}\right),\ \sin\left(\frac{2\pi kx}{\ell}\right), ...\}, \ell = b-a, \tag{1.6}$$

которая ортогональна и полна в $\mathcal{L}_2[a,b;1]$. Нормы всех этих функций, кроме первой, равны (также проверьте!) $\sqrt{\ell/2}$, а $\|1\| = \sqrt{\ell}$. Ряд Фурье функции $f(x)$, соответствующий системе функций (1.6), принято записывать в виде

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos\left(\frac{2\pi kx}{\ell}\right) + b_k\sin\left(\frac{2\pi kx}{\ell}\right)\right], \tag{1.7}$$

где

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\ell}\int_a^b f(x)\cos\left(\frac{2\pi kx}{\ell}\right)dx,\ k = 0,1,2,...,\\ b_k &= \frac{2}{\ell}\int_a^b f(x)\sin\left(\frac{2\pi kx}{\ell}\right)dx,\ k = 1,2,... \end{aligned} \tag{1.8}$$

Как любой ряд Фурье, ряд (1.7) сходится к $f(x)$ в $\mathcal{L}_2[a,b;1]$. Справедливо также следующее утверждение о поточечной сходимости (теорема Дирихле): если $f(x)$ ограничена и кусочно-непрерывна на $[a,b]$ и промежуток $[a,b]$ может быть разбит на конечное число промежутков, на каждом из которых $f(x)$ монотонна, то для любого $x_0 \in]a,b[$ ряд Фурье функции $f(x)$ сходится и

$$\begin{aligned} S(x_0) \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos\left(\frac{2\pi kx_0}{\ell}\right) + b_k\sin\left(\frac{2\pi kx_0}{\ell}\right)\right] &= \\ = \frac{1}{2}\left(f(x_0+0) + f(x_0-0)\right), \end{aligned} \tag{1.9}$$

где $f(x_0 \pm 0) = \lim\limits_{x\to x_0\pm 0} f(x)$; при $x_0 = a$ и $x_0 = b$ ряд сходится к $\frac{1}{2}(f(a+0) + f(b-0))$.

Отметим, что приведенные условия теоремы Дирихле являются глобальными, т.е. относятся к свойствам функции $f(x)$ на всем промежутке $[a,b]$. При этом и равенство (1.9) также выполнено $\forall x_0 \in [a,b]$. Однако для справедливости (1.9) при каком-либо фиксированном $x_0 \in [a,b]$ на самом деле достаточно, чтобы функция $f(x)$ удовлетворяла определенным условиям лишь в некоторой окрестности x_0 (а не всюду на $[a,b]$). Например, равенство (1.9) будет выполнено при заданном $x_0 \in]a,b[$, если существуют конечные числа $f(x_0 \pm 0)$ и функция $f(x)$ удовлетворяет в x_0 еще некоторому дополнительному условию (условию Ди́ни). В частности, если $f(x)$ непрерывна в x_0 и удовлетворяет условию Ди́ни, то ее ряд Фурье в этой точке сходится к $f(x_0)$. Точные формулировки теорем типа теоремы Дирихле имеются в [2].

В теории и в приложениях рядов Фурье весьма важным является вопрос о скорости убывания коэффициентов Фурье при $k \to \infty$. Для системы функций(1.6) равенство Парсеваля имеет вид:

$$\frac{\ell}{2}\left[\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|^2 + |b_k|^2)\right] = \|f\|^2.$$

Поэтому $|a_k|^2 + |b_k|^2 \to 0$ при $k \to \infty$ (как общий член сходящегося ряда) и $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = 0$ для любой $f \in \mathcal{L}_2[a,b;1]$. Более точная характеристика последовательностей $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ связана с гладкостью функции $f(x)$. Именно: а) если $f(x)$ кусочно-непрерывна на $[a,b]$, то $|a_k| + |b_k| \le \dfrac{C}{k}$, $k \in I\!N$; б) если существует непрерывная на $[a,b]$ производная $f^{(\ell)}(x)$, $f^{(\ell)}(a+0) = f^{(\ell)}(b-0)$, а $f^{(\ell+1)}(x)$ — кусочно-непрерывна на $[a,b]$, то $|a_k| + |b_k| \le \dfrac{C}{k^{\ell+2}}$, $k \in I\!N$.

К тригонометрическим рядам Фурье относятся также и ряды Фурье на промежутке $[a,b]$, связанные со следующими двумя системами функций:

$$\{1, \cos\left(\frac{\pi(x-a)}{\ell}\right), \ldots, \cos\left(\frac{\pi k(x-a)}{\ell}\right), \ldots\},\ \ \ell = b-a, \tag{1.10}$$

$$\{\sin\left(\frac{\pi(x-a)}{\ell}\right), \ldots, \sin\left(\frac{\pi k(x-a)}{\ell}\right), \ldots\},\ \ \ell = b-a. \tag{1.11}$$

Эти системы, как и система функций (1.6), ортогональны и полны в $\mathcal{L}_2[a,b;1]$. Отметим, что, как легко видеть, ни одна из систем (1.10) и (1.11) не является подсистемой системы (1.6). Соответствующие ряды Фурье имеют вид:

$$\frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\tilde{a}_k \cos\left(\frac{\pi k(x-a)}{\ell}\right) \tag{1.12}$$

— для системы (1.10) и

$$\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{b}_k \sin\left(\frac{\pi k(x-a)}{\ell}\right) \tag{1.13}$$

— для системы (1.11). Здесь коэффициенты Фурье $\tilde{a}_k$ и $\tilde{b}_k$ вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_k &= \frac{2}{\ell}\int_a^b f(x)\cos\left(\frac{\pi k(x-a)}{\ell}\right)dx,\ k=0,1,\ldots, \\ \tilde{b}_k &= \frac{2}{\ell}\int_a^b f(x)\sin\left(\frac{\pi k(x-a)}{\ell}\right)dx,\ k=1,2,\ldots \end{aligned} \tag{1.14}$$

Ряды Фурье (1.12) и (1.13) иногда называют ″неполными рядами Фурье″. Этот термин имеет историческое происхождение. Ни в коем случае не следует думать, что он отражает какую-либо ″неполноту″ систем (1.10) и (1.11).

Наконец, часто бывает удобно представить ряд (1.7) в комплексной форме, используя формулы Муавра для тригонометрических функций. Это приводит к ряду Фурье

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{exp}\left(\frac{2\pi ikx}{\ell}\right), \tag{1.15}$$

где $c_k = \dfrac{1}{\ell}\displaystyle\int_a^b f(x)\exp\left(-\frac{2\pi ikx}{\ell}\right)dx,\ \ k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ Ряд (1.15) называют комплексной формой ряда Фурье.

Ряды Фурье (1.12), (1.13), (1.15) имеют все свойства ряда (1.7): они сходятся в $\mathcal{L}_2[a,b;1]$ и для них справедлива теорема Дирихле. При этом в случае ряда (1.15) при выполнении условий теоремы Дирихле имеет место поточечная сходимость последовательности $\{S_n\}$ симметричных частичных сумм ряда (1.15):

$$S_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{exp}\left(\frac{2\pi ikx}{\ell}\right).$$

Для несимметричных частичных сумм теорема Дирихле может быть неверной.

1.3. Задание по рядам Фурье

В качестве задания по рядам Фурье студентам может быть предложен один из двух вариантов типового расчета. В первом варианте рассматривается кусочно-линейная на $[-T,T]$ функция $f(x)$. Требуется:

1) разложить $f(x)$ в ряд Фурье (1.7) (получить формулы для коэффициентов a_k, b_k);

2) вычислить коэффициенты a_0, a_1, b_1, a_2, b_2;

3) построить графики $f(x)$ и частичных сумм $S_0(x) = \dfrac{a_0}{2}$, $S_1(x)$ и $S_2(x)$, где

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi kx}{\ell}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kx}{\ell}\right) \right],\ n \geq 1;$$

4) вычислить ″невязки в $\mathcal{L}_2[-T, T; 1]$″: $\|f - S_0\|$, $\|f - S_1\|$ и $\|f - S_2\|$.

Для выполнения этого задания достаточно воспользоваться формулами (1.8) и (1.5).

Во втором варианте задания рассматривается также кусочно-линейная функция $f(x)$, заданная на промежутке $[0, T]$. Требуется:

1) разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье по системе функций $\{1, \cos\left(\dfrac{\pi kx}{T}\right)\}$ и на $[-T, T]$ построить графики суммы ряда Фурье и третьей частичной суммы ряда;

2) разложить $f(x)$ в ряд Фурье по системе функций $\{\sin\left(\dfrac{\pi kx}{T}\right)\}$ и также на $[-T, T]$ построить графики суммы ряда Фурье и третьей частичной суммы ряда.

Для выполнения этого варианта задания достаточно использовать формулы (1.14). Как и в первом варианте, по формуле (1.5) могут быть вычислены соответствующие ″ невязки в $\mathcal{L}_2[0, T; 1]$″.

2. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

2.1. Основные сведения

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$-\frac{1}{\rho(x)} \left(p(x)y'\right)' + q(x)y = f(x), \tag{2.1}$$

где ρ, p, p', q, f — непрерывные на $[a, b]$ функции. Предположим, что $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$, $p(x) \geq p_0 > 0$ при всех $x \in [a, b]$. Множество всех решений уравнения (2.1) представимо в виде $y(x, C_1, C_2) = = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y^*(x)$, где $y_1(x)$, $y_2(x)$ — линейно независимые решения соответствующего однородного уравнения, а $y^*(x)$ — частное решение уравнения (2.1). Отметим, что функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ и $y^*(x)$ определены на всем промежутке $[a, b]$ (так как уравнение (2.1) — линейное).

Вместе с уравнением (2.1) рассмотрим дополнительные условия

$$R_1 y'(a) - S_1 y(a) = t_1\,, \qquad R_2 y'(b) + S_2 y(b) = t_2\,, \tag{2.2}$$

где $R_1 S_1 \geq 0$, $R_2 S_2 \geq 0$ и $R_1^2 + S_1^2 > 0$, $R_2^2 + S_2^2 > 0$. Задача о нахождении функции $y(x)$, удовлетворяющей уравнению (2.1) и краевым условиям (2.2), называется краевой задачей.

Если $R_1 = R_2 = 0$, $S_1 = -1$, $S_2 = 1$, то условия (2.2) имеют вид: $y(a) = t_1\,,\ y(b) = t_2\,$; эти краевые условия принято называть условиями Дирихле, а соответствующую краевую задачу — задачей Дирихле.

При $S_1 = S_2 = 0$, $R_1 = R_2 = 1$ условия (2.2) сводятся к условиям $y'(a) = t_1\,, \quad y'(b) = t_2\,$, которые называются краевыми условиями Неймана (а краевая задача — задачей Неймана).

Отметим также, что при $R_1 \neq 0$, $S_1 \neq 0$ краевое условие вида (2.2) часто называют ″третьим краевым условием″.

Оказывается, что свойства краевой задачи существенно отличаются от свойств задачи Коши и, с другой стороны, имеют много общего с задачей решения систем линейных уравнений.

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L(y) \equiv -\frac{1}{\rho(x)}\left(p(x)y'\right)' + q(x)y,$$

определенный на множестве $D(L)$ дважды непрерывно дифференцируемых на $]a,b[$ функций $y = y(x)$, удовлетворяющих однородным (т.е. $t_1 = t_2 = 0$) краевым условиям (2.2). Множество $D(L)$ является линейным пространством, т.е. если $y, z \in D(L)$, то и $\alpha y + \beta z \in D(L)$ при $\alpha, \beta \in I\!R$, а оператор L является линейным оператором.

Число λ называется собственным числом оператора L, если существует ненулевая функция $y(x)$ (называемая собственной функцией, соответствующей этому λ) из $D(L)$, для которой $L(y) = \lambda y$.

Таким образом, λ и $y(x)$ являются решением следующей задачи (задачи Штурма-Лиувилля):

$$\begin{cases} L(y) = \lambda y, \\ R_1 y'(a) - S_1 y(a) = 0, \\ R_2 y'(b) + S_2 y(b) = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Множество всех собственных чисел будем называть спектром оператора L или спектром задачи (2.3).

Свойства оператора L оказываются аналогичными некоторым свойствам самосопряженных матриц. Именно:

1) L является симметричным оператором в $\mathcal{L}_2[a,b;\rho(x)]$, т.е. $\forall y, z \in D(L)$ справедливо равенство $(L(y), z) = (y, L(z))$, где $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в $\mathcal{L}_2[a,b;\rho(x)]$;

2) L — ограниченный снизу оператор в $\mathcal{L}_2[a,b;\rho(x)]$, т.е. $\forall y \in D(L)$ верно неравенство $(L(y),y) \geq \gamma\|y\|^2$; в качестве постоянной γ можно взять $\gamma = \min\limits_{x\in[a,b]} q(x)$. (Если это неравенство верно при некотором $\gamma > 0$, то L называется положительно определенным оператором.)

Перечисленные свойства оператора L приводят к следующим свойствам его спектра:

1) спектр оператора L вещественный;

2) спектр оператора L дискретный, т.е. представляет собой последовательность $\{\lambda_n\}$, $n = 1, 2, ...$;

3) последовательность $\{\lambda_n\}$ ограничена снизу, $\lambda_n \geq \min\limits_{x\in[a,b]} q(x)$, и ее единственной предельной точкой является $+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$;

4) при некоторых положительных постоянных A и B неравенства $An^2 \leq \lambda_n \leq Bn^2$ верны для всех достаточно больших n.

Множество собственных функций оператора L обладает следующими свойствами:

1) каждому собственному числу соответствует одна (с точностью до знака) собственная функция $y_n(x)$, для которой $\|y_n\| = 1$;

2) система $\{y_n(x)\}$ является полной системой в $\mathcal{L}_2[a,b;\rho(x)]$, и, значит, любая функция из этого пространства может быть разложена в сходящийся к ней (в $\mathcal{L}_2[a,b;\rho(x)]$) ряд Фурье (по системе $\{y_n\}$);

3) если $y \in D(L)$, то соответствующий ряд Фурье абсолютно сходится $\forall x \in]a,b[$ к $y(x)$; этот ряд можно почленно дифференцировать два раза, и полученные ряды будут сходиться, соответственно, к $y'(x)$ поточечно и к $y''(x)$ в $\mathcal{L}_2[a,b;\rho(x)]$.

Знание спектра задачи Штурма-Лиувилля и системы ее собственных функций позволяет решить задачу (2.1), (2.2) методом Фурье. Общая схема решения соответствует одному из методов решения систем линейных уравнений с самосопряженной матрицей.

Сначала найдем какую-нибудь функцию $v(x)$, дважды дифференцируемую и удовлетворяющую краевым условиям (2.2). Как правило, это сделать легко. Положим $y(x) = u(x) + v(x)$. Тогда для функции $u(x)$ получим краевую задачу

$$L(u) = f(x) - L(v) = g(x), \tag{2.4}$$

$$\begin{cases} R_1 u'(a) - S_1 u(a) = 0, \\ R_2 u'(b) + S_2 u(b) = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Решение $u(x)$ задачи (2.4), (2.5) будем искать в виде ряда Фурье по системе $\{y_n(x)\}$ собственных функций оператора L:

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n y_n(x). \tag{2.6}$$

Краевые условия (2.5) для $u(x)$ при этом удовлетворяются автоматически. Так как $u \in D(L)$, то ряд (2.6) можно дважды почленно дифференцировать.[1] Тогда из уравнения (2.4) получим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \lambda_n y_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n y_n(x),$$

где g_n — коэффициенты Фурье функции g. В силу единственности разложения в ряд Фурье найдем, что $u_n = \dfrac{g_n}{\lambda_n}$, если $\lambda_n \neq 0$ при всех n. При этом решение задачи (2.4),(2.5) имеет вид

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{\lambda_n} y_n(x).$$

Таким образом, условие $\lambda_n \neq 0$ является достаточным условием однозначной разрешимости краевой задачи (2.1), (2.2). Для выполнения же условия $\lambda_n \neq 0$ достаточным является, например, справедливость неравенства $q(x) \geq q_0 > 0$ при всех $x \in [a, b]$, так как в этом случае $\lambda_n \geq q_0$.

Если же $\lambda_{n_0} = 0$ при некотором n_0, то решение задачи (2.4), (2.5) существует не для любой функции $g(x)$. В этом случае ясно, что для разрешимости краевой задачи достаточно условия

$$g_{n_0} = \frac{1}{\|y_{n_0}\|^2} \int_a^b g(x) y_{n_0}(x) dx = 0. \tag{2.7}$$

Можно доказать, что решение существует только при выполнении этого условия. Равенство (2.7) представляет собой условие ортогональности функции $g(x)$ и собственной функции y_{n_0}, соответствующей собственному числу $\lambda_{n_0} = 0$. Оно является обобщением на дифференциальные операторы L так называемой альтернативы Фредгольма, известной в теории систем линейных уравнений [4]. Если для функции $g(x)$ условие (2.7) выполнено, то краевая задача (2.4), (2.5) имеет бесконечно много решений, которые все имеют вид

$$u(x) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq n_0}}^{\infty} \frac{g_n}{\lambda_n} y_n(x) + C y_{n_0}(x),$$

[1] Подчеркнем важность того, что функция $u(x)$ удовлетворяет однородным краевым условиям. Ряд Фурье исходной функции $y(x)$, вообще говоря, нельзя почленно дифференцировать даже один раз.

где C — произвольная константа.

Изучим более подробно спектр оператора L, задаваемого дифференциальным оператором $L(y) = -y''$ (т.е. $\rho(x) \equiv p(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 0$) и однородными граничными условиями (условиями (2.2) при $t_1 = t_2 = 0$). Задача Штурма-Лиувилля имеет вид

$$-y'' = \lambda y, \tag{2.8}$$

$$\begin{cases} R_1 y'(a) - S_1 y(a) = 0, \\ R_2 y'(b) + S_2 y(b) = 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

Так как $q(x) \equiv 0$, то $\lambda_n \geq 0$ при всех n. Если $\lambda = 0$, то $y(x, C_1, C_2) = C_1 x + C_2$ будет общим решением уравнения (2.8) и из краевых условий (2.9) следует, что постоянные C_1 и C_2 должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} R_1 C_1 - S_1 a C_1 - S_1 C_2 = 0, \\ R_2 C_1 + S_2 b C_1 + S_2 C_2 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет ненулевое решение лишь при условии

$$\det \begin{bmatrix} R_1 - aS_1 & -S_1 \\ R_2 + bS_2 & S_2 \end{bmatrix} = R_1 S_2 + R_2 S_1 + (b-a) S_1 S_2 = 0,$$

а это равенство возможно только в случае $S_1 = S_2 = 0$, т.е. для краевых условий Неймана. Таким образом, $\lambda = 0$ принадлежит спектру оператора L только в случае задачи Неймана, и этому собственному числу соответствует собственная функция $y_0(x) \equiv 1$. Условие (2.7) разрешимости краевой задачи в этом случае имеет вид

$$\int_a^b g(x) dx = 0,$$

и при выполнении этого условия решение задачи Неймана определено с точностью до постоянного слагаемого.

Если же $\lambda > 0$, то обозначим $\lambda = \mu^2$ и рассмотрим общее решение уравнения (2.8):

$$y(x, C_1, C_2) = C_1 \cos(\mu x) + C_2 \sin(\mu x).$$

Задача состоит теперь в нахождении постоянных C_1, C_2 (не равных нулю одновременно), при которых будут выполнены условия (2.9). Вычисляя значения $y(a)$, $y(b)$, $y'(a)$, $y'(b)$, получим для C_1, C_2 систему линейных уравнений

$$\begin{cases} -(R_1 \mu \sin(\mu a) + S_1 \cos(\mu a)) C_1 + (R_1 \mu \cos(\mu a) - S_1 \sin(\mu a)) C_2 = 0, \\ -(R_2 \mu \sin(\mu b) - S_2 \cos(\mu b)) C_1 + (R_2 \mu \cos(\mu b) + S_2 \sin(\mu b)) C_2 = 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Однородная система уравнений (2.10) имеет ненулевое решение только в том случае, когда определитель соответствующей матрицы равен нулю. Таким образом, должно быть выполнено равенство

$$\det \begin{bmatrix} -(R_1\mu\sin(\mu a) + S_1\cos(\mu a)) & R_1\mu\cos(\mu a) - S_1\sin(\mu a) \\ -(R_2\mu\sin(\mu b) - S_2\cos(\mu b)) & R_2\mu\cos(\mu b) + S_2\sin(\mu b) \end{bmatrix} =$$

$$= R_1R_2\mu^2\sin(\mu\ell) - (R_1S_2 + R_2S_1)\mu\cos(\mu\ell) - S_1S_2\sin(\mu\ell) = 0,$$

где $\ell = b - a$.

В случаях $R_1 = R_2 = 0$ или $S_1 = S_2 = 0$ (т.е. для краевых условий Дирихле или Неймана) это уравнение сводится к уравнению $\sin(\mu\ell) = 0$, имеющему положительными корнями числа $\mu_n = \dfrac{\pi n}{\ell}$, $n \in I\!N$. Итак, в случае краевых условий Дирихле спектром является множество $\{\lambda_n : \lambda_n = \left(\dfrac{\pi n}{\ell}\right)^2,\ n \in I\!N\}$, а в случае краевых условий Неймана — множество $\{\lambda_n : \lambda_n = \left(\dfrac{\pi n}{\ell}\right)^2,\ n \in I\!N \cup \{0\}\}$. Соответствующие собственные функции найдем, решив при $\mu = \mu_n = \sqrt{\lambda_n}$ систему (2.10). Для краевых условий Дирихле будем иметь $C_1 = 0$, $C_2 = C$, где C — произвольная постоянная. Взяв $C = 1$, получим собственные функции (при краевых условиях Дирихле):

$$y_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right), \quad n \in I\!N.$$

Аналогично для краевых условий Неймана найдем, что собственными функциями будут

$$y_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right), \quad n \in I\!N \cup \{0\}.$$

Если же краевые условия не являются условиями Дирихле или Неймана, то рассматриваемое уравнение равносильно такому:

$$\operatorname{ctg}(\gamma) = \left(\frac{R_1R_2}{\ell}\gamma - \frac{S_1S_2}{\gamma}\ell\right)\frac{1}{R_1S_2 + R_2S_1} \equiv \varphi(\gamma), \quad \gamma = \mu\ell. \tag{2.11}$$

Геометрически очевидно (рис.2.1), что уравнение (2.11) имеет бесконечно много положительных решений $\gamma_n, \quad n = 1, 2, \ldots$

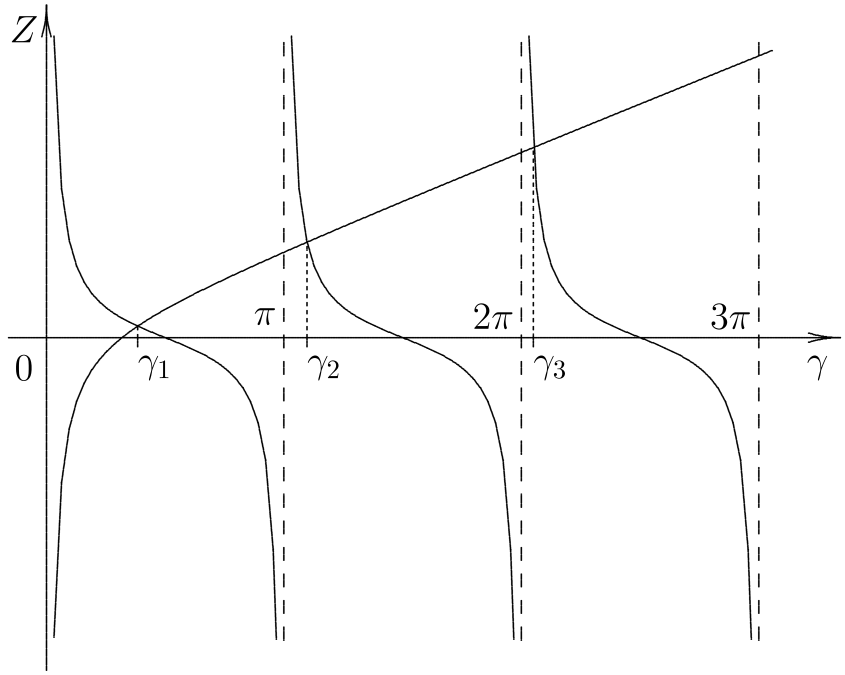

Рис.2.1

На рис.2.1 изображены графики функций $z = \operatorname{ctg}(\gamma)$ и $z = A\gamma - -\dfrac{B}{\gamma}$ при $A = B = 1$. Первые три положительных корня уравнения $\operatorname{ctg}(\gamma) = \gamma - \dfrac{1}{\gamma}$ обозначены γ_1, γ_2, γ_3.

Итак, если краевые условия не есть условия Дирихле или Неймана, то спектром задачи (2.8), (2.9) является множество $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n = \left(\dfrac{\gamma_n}{\ell}\right)^2$, где γ_n — положительные корни уравнения (2.11). Соответствующие собственные функции получим, решив при $\mu = \mu_n$ систему (2.10). Решение имеет вид

$$C_1 = (R_1\mu_n \cos(\mu_n a) - S_1 \sin(\mu_n a))C,$$
$$C_2 = (R_1\mu_n \sin(\mu_n a) + S_1 \cos(\mu_n a))C,$$

где C — произвольная константа. Взяв $C = 1$, найдем собственные функции

$$y_n(x) = R_1\mu_n \cos(\mu_n(x-a)) + S_1 \sin(\mu_n(x-a)), \qquad \mu_n = \frac{\gamma_n}{\ell}. \qquad (2.12)$$

Как было отмечено, система собственных функций $\{y_n(x)\}$ полна в $\mathcal{L}_2[a,b;1]$. Нормы $\|y_n(x)\|$ могут быть легко вычислены. Именно, учитывая (2.12), найдем, что

$$\|y_n\|^2 = \int_a^b [R_1\mu_n \cos(\mu_n(x-a)) + S_1 \sin(\mu_n(x-a))]^2 dx =$$

$$= \frac{\ell}{2}(R_1^2\mu_n^2 + S_1^2) + \frac{1}{2}R_1S_1 + \frac{1}{4\mu_n}(R_1^2\mu_n^2 - S_1^2)\sin(2\mu_n\ell) - \frac{1}{2}R_1S_1\cos(2\mu_n\ell). \tag{2.13}$$

Кроме того, здесь $\sin(2\mu_n\ell)$ и $\cos(2\mu_n\ell)$ могут быть выражены через $\varphi(\mu_n\ell)$ с использованием известных формул тригонометрии, что часто приводит к упрощению равенства (2.13).

2.2. Метод сеток численного решения краевой задачи

Одним из численных методов решения задачи (2.1), (2.2) является метод сеток. Рассмотрим его для случая $\rho(x) \equiv p(x) \equiv 1$, $q(x) \geq q_0 > 0$, т.е. для задачи

$$-y'' + q(x)y = f(x), \tag{2.14}$$

$$\begin{cases} R_1y'(a) - S_1y(a) = t_1\,, \\ R_2y'(b) - S_2y(b) = t_2\,. \end{cases} \tag{2.15}$$

На промежутке $[a, b]$ выберем точки x_k , $k = 0, 1, ..., n$, так, что

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b.$$

Совокупность точек $\{x_k\}$ принято называть сеткой, сами точки x_k – узлами сетки, а функции, имеющие $\{x_k\}$ в качестве области определения – сеточными функциями.

Часто удобно выбирать сетку равномерной; это значит, что

$$x_k = a + kh, \quad k = 0, 1, ..., n, \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Будем искать решение $y(x)$ задачи (2.14),(2.15) только при $x = x_k$. Возьмем равномерную сетку и обозначим $y_k = y(x_k)$. Из формулы Тейлора следует, что

$$y''(x_k) = \frac{y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}}{h^2} + O(h^2), \quad k = 1, 2, ..., n-1,$$

если функция $y(x)$ четыре раза непрерывно дифференцируема на $]a, b[$. Кроме того,

$$y'(a) = \frac{y_1 - y_0}{h} + O(h), \qquad y'(b) = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} + O(h).$$

Так как в каждой из точек x_k , $k = 1, ..., n-1$, должно быть справедливо уравнение (2.14) и в точках x_0 и x_n выполнены условия (2.15), то числа y_k должны являться решением следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} R_1\dfrac{y_1-y_0}{h} - S_1y_0 = t_1 + O(h), \\ \dfrac{-y_{k-1}+2y_k-y_{k+1}}{h^2} + q_ky_k = f_k + O(h^2),\ k=1,...,n-1, \\ R_2\dfrac{y_n-y_{n-1}}{h} + S_2y_n = t_2 + O(h), \end{cases} \tag{2.16}$$

где $q_k = q(x_k)$, $f_k = f(x_k)$. В системе (2.16), очевидно, функции $O(h^2)$, $O(h)$ неизвестны. Поэтому будем решать систему уравнений

$$\begin{cases} R_1\dfrac{u_1-u_0}{h} - S_1u_0 = t_1\,, \\ \dfrac{-u_{k-1}+2u_k-u_{k+1}}{h^2} + q_ku_k = f_k\,, \quad k=1,...,n-1, \\ R_2\dfrac{u_n-u_{n-1}}{h} + S_2u_n = t_2 \end{cases}$$

относительно новых неизвестных чисел $\{u_k\}$. Эта система равносильна системе

$$\begin{cases} -(R_1+hS_1)u_0 + R_1u_1 = ht_1\,, \\ -u_{k-1} + (2+q_kh^2)u_k - u_{k+1} = h^2f_k\,, \quad k=1,...,n-1, \\ -R_2u_{n-1} + (R_2+hS_2)u_n = ht_2\,. \end{cases} \tag{2.17}$$

Можно доказать, что решения систем (2.16) и (2.17) близки между собой, если h достаточно мало. Точнее, справедливо неравенство (при некоторой постоянной C)

$$\max_{k=0,1,\ldots,n} |u_k - y_k| \le Ch, \tag{2.18}$$

которое и означает, что приближенное решение $\{u_k\}$ близко к точному решению $\{y_k\}$ при малых h.

Отметим, что для справедливости неравенства (2.18) необходимо предполагать функцию $y(x)$ достаточно гладкой на $[a,b]$; во всяком случае она должна быть ″лучше″, чем дважды непрерывно дифференцируемая функция. Различные достаточные условия, обеспечивающие выполнение неравенства (2.18), можно найти в специальной литературе (см., например, [3]).

Система уравнений (2.17) имеет трехдиагональную матрицу со строгим диагональным преобладанием и может быть решена методом прогонки. Метод прогонки подробно изложен в [3]. Краткое описание метода прогонки см. в [5, с.17-18].

2.3. Задание по краевым задачам

Изучается краевая задача

$$\begin{cases} -y'' - By = -f(x), \quad x \in]0, a[, \\ R_1 y'(0) - S_1 y(0) = t_1\,, \\ R_2 y'(a) + S_2 y(a) = t_2\,, \quad S_{1,2}\,, R_{1,2} \geq 0, \end{cases}$$

где $f(x)$ — одна из четырех следующих функций: $\cos(Cx)$, $\sin(Dx)$, Ex, $\exp(Fx)$ ($a, B, C, D, E, F, t_1\,, t_2$ — заданные параметры, $B < 0$).

Задача 1. Проверить, что рассматриваемая краевая задача однозначно разрешима, и найти общее решение дифференциального уравнения $-y'' - By = -f(x)$, а также частное решение $y(x)$, удовлетворяющее заданным краевым условиям.

Задача 2. Решить исходную краевую задачу методом Фурье:

1) заменой $y(x) = v(x) + \alpha x + \beta$ (где функция $\alpha x + \beta$ удовлетворяет тем же граничным условиям, что и $y(x)$) свести данную краевую задачу к краевой задаче относительно $v(x)$ с однородными граничными условиями (в случае задачи Неймана следует использовать замену $y(x) = v(x) + x(\alpha x + \beta)$);

2) найти собственные числа $\{\lambda_k\}$ и собственные функции $\{\varphi_k(x)\}$ соответствующей задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} -\varphi'' - B\varphi = \lambda\varphi, \\ R_1\varphi'(0) - S_1\varphi(0) = 0, \\ R_2\varphi'(a) - S_2\varphi(A) = 0; \end{cases}$$

3) показать, что система собственных функций $\{\varphi_k\}$ ортогональна в $\mathcal{L}_2[0, a; 1]$;

4) вычислить нормы $\|\varphi_k\|$ и построить ортонормированную систему собственных функций $\varphi_k^0(x) = \dfrac{\varphi_k(x)}{\|\varphi_k(x)\|}$;

5) разложить $g(x)$ — новую полученную правую часть дифференциального уравнения — в ряд Фурье по ортонормированной системе функций $\{\varphi_k^0\}$: $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k \varphi_k^0(x)$. Вычислить первые три коэффициента $g_1\,, g_2\,, g_3$ полученного ряда;

6) найти решение $v(x)$ в виде ряда Фурье $v(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k \varphi_k^0(x)$. Вычислить первые три коэффициента $v_1\,, v_2\,, v_3$ полученного ряда;

7) построить график функции $y_3(x) = \sum\limits_{k=1}^{3} v_k \varphi_k^0(x) + \alpha x + \beta$.

Задача 3. Решить исходную краевую задачу методом сеток:

1) разбивая промежуток $[0, a]$ на 5 равных частей, найти приближенное решение краевой задачи методом сеток;

2) построить график полученной сеточной функции.

Задача 4. 1) Пусть B — неизвестный параметр в рассматриваемой задаче. Найти наименьшее положительное значение параметра B, при котором краевая задача не имеет единственного решения;

2) пусть теперь $B = B_1$, где B_1 — найденное в п.1 значение параметра B, а параметр $(C, D, E$ или $F)$, определяющий правую часть дифференциального уравнения, является неизвестным. Обозначим сейчас этот параметр P. Показать, что рассматриваемая краевая задача разрешима лишь для конечного множества вещественных значений P (при каждом таком P число решений краевой задачи бесконечно). Найти наименьшее (по модулю) вещественное значение параметра P, при котором краевая задача разрешима.

Условие ТР содержит параметры a, B, C, D, E, F, S_1 , S_2 , R_1 , R_2 , t_1 , t_2 .

Дополнительные задачи. 1. Доказать, что следующие задачи Дирихле (Д) и Неймана (Н)

$$() \begin{cases} y'' + By = \sin(Dx), \\ y(0) = y(a) = 0; \end{cases} \qquad () \begin{cases} y'' + By = \cos(Cx), \\ y'(0) = y'(a) = 0 \end{cases}$$

имеют бесконечно много решений только при выполнении двух условий: а) число B принадлежит спектру соответствующей задачи Штурма-Лиувилля:

$$-y'' = \lambda y, \quad y(0) = y(a) = 0 \quad (\ ),$$

$$-y'' = \lambda y, \quad y'(0) = y'(a) = 0 \quad (\ );$$

б) $D = C = \dfrac{\pi k}{a}$, $\quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$ и $D^2 \neq B$, $C^2 \neq B$.

2. Доказать, что краевая задача

$$\begin{cases} y'' + By = \sin(Dx), \\ y(0) = y'(a) = 0 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений лишь при выполнении следующих условий:

1) число B является собственным числом соответствующей задачи Штурма-Лиувилля,

2) $D = 0$ или $D = \pm\dfrac{1}{a}(\pi k + \dfrac{\pi}{2}),\ k \in I\!N$, и $D^2 \neq B$.

При каких условиях, налагаемых на параметры B и D, эта краевая задача решения не имеет?

3. Изучить разрешимость в зависимости от параметров B и C краевых задач:

а) $\begin{cases} y'' + By = \cos(Cx), \\ y'(0) = y(a) = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y'' + By = \cos(Cx), \\ y(0) = y'(a) = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y'' + By = \sin(Cx), \\ y'(0) = y(a) = 0. \end{cases}$

Пример выполнения и оформления задания

Условие задания, выдаваемое студентам, имеет вид

ВАР.	S_1 R_1 t_1	S_2 R_2 t_2	a C E	B D F
1	1.0 0.0 0.0	2.1 4.5 0.5	2.0 3.5 ***	-1.7 *** ***

В этом варианте на промежутке $[0, 2]$ $(a = 2.0)$ рассматривается краевая задача

$$\begin{cases} -y'' + 1.7y = -\cos(3.5x), \\ y(0) = 0, \\ 4.5y'(2) + 2.1y(2) = 0.5. \end{cases}$$

Решение задачи 1

Так как для рассматриваемой краевой задачи $q(x) \equiv 1.7$, она однозначно разрешима. Общее решение дифференциального уравнения $y'' - 1.7y = \cos(3.5x)$ имеет вид $y(x) = C_1 \exp(-px) + C_2 \exp(px) + +G\cos(3.5x)$, где $p = \sqrt{1.7} = 1.3038$, $G = \dfrac{1}{B - C^2} = -0.0717$. Искомые константы C_1 и C_2 являются решением следующей системы:

$$\begin{bmatrix} -S_1 - R_1 p & -S_1 + R_1 p \\ (S_2 - R_2 p)\exp(-pa) & (S_2 + R_2 p)\exp(pa) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix},$$

где $\ell_1 = t_1 + S_1 G$, $\ell_2 = t_2 - S_2 G\cos(Ca) + R_2 GC\sin(Ca)$.

Эту систему запишем в виде $D\vec{C} = \vec{\ell}$, где

$$D = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -0.27767 & 108.0965 \end{bmatrix}, \quad \vec{\ell} = \begin{bmatrix} -0.07168 \\ -0.12827 \end{bmatrix}, \quad \vec{C} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}.$$

Решая систему, получим $\vec{C} = \begin{bmatrix} 0.07268 \\ -0.00100 \end{bmatrix}$. Следовательно, решением краевой задачи является

$$y(x) = -0.0010\exp(1.304x) + 0.07268\exp(-1.304x) - 0.0717\cos(3.5x).$$

Решение задачи 2

1) Для нахождения решения краевой задачи методом Фурье сделаем сначала замену $y(x) = v(x) + \alpha x + \beta$, где константы определяются из условия однородности граничных условий. Значит, искомые α и β являются решением следующей системы:

$$\begin{cases} R_1\alpha - S_1\beta = t_1\,, \\ (S_2 a + R_2)\alpha + S_2\beta = t_2\,, \end{cases}$$

т.е. $\beta = 0$, $\alpha = 0.05747$.

2) Найдем собственные числа λ_k и собственные функции $\varphi_k(x)$ соответствующей задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} -\varphi'' - B\varphi = \lambda\varphi, \\ \varphi(0) = 0, \\ 4.5\varphi'(2) + 2.1\varphi(2) = 0. \end{cases} \tag{2.19}$$

Обозначив $\lambda_k + B = \mu_k^2$, получим для чисел μ_k уравнение (2.11), которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$\mathrm{ctg}(\gamma) = -\frac{b}{\gamma}\,, \quad \gamma = 2\mu, \quad b = 0.93333. \tag{2.20}$$

Найдем три первых положительных корня этого уравнения: $\gamma_1 = 2.0062$, $\gamma_2 = 4.9006$, $\gamma_3 = 7.9705$. Тогда $\lambda_1 = 2.7062$, $\lambda_2 = 7.7039$, $\lambda_3 = 17.5824$. Собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (2.19) имеют вид

$$\varphi_k(x) = \sin(\mu_k x), \quad k \in I\!N.$$

3) Ортогональность системы полученных собственных функций проверяется прямым вычислением.

4) Найдем нормированные собственные функции $\varphi_k^0(x) = \dfrac{\varphi_k(x)}{\|\varphi_k\|}$, для чего вычислим $\|\varphi_k\|$:

$$\|\varphi_k\|^2 = \int_0^a \varphi_k^2(x)dx = \int_0^a \sin^2(\mu_k x)dx = \frac{a}{2} - \frac{a\sin(2\gamma_k)}{4\gamma_k}\,,$$

где γ_k — положительные корни уравнения (2.20). Так как $\mathrm{ctg}(\gamma_k) = = -b/\gamma_k$, то

$$\sin(2\gamma_k) = \frac{2\mathrm{ctg}(\gamma_k)}{1 + \mathrm{ctg}^2(\gamma_k)} = -\frac{2b\gamma_k}{\gamma_k^2 + b^2}$$

и, значит,

$$\|\varphi_k\|^2 = \frac{a}{2}\left[1 + \frac{b}{\gamma_k^2 + b^2}\right], \quad k \in I\!N.$$

При $k=1,2,3$ получим: $\|\varphi_1\|=1.0912$, $\|\varphi_2\|=1.0186$, $\|\varphi_3\|=1.0072$. Следовательно,

$$\varphi_1^0(x)=\frac{\sin(\mu_1 x)}{1.0912}\,,\quad \varphi_2^0(x)=\frac{\sin(\mu_2 x)}{1.0186}\,,\quad \varphi_3^0(x)=\frac{\sin(\mu_3 x)}{1.0072}\,.$$

5) После замены $y(x)=v(x)+\alpha x+\beta$, где $\alpha=0.05747$, $\beta=0$, получим краевую задачу для неизвестной функции $v(x)$:

$$-v''+1.7v=g(x),\quad g(x)=-\cos(3.5x)+\alpha Bx,$$

$$v(0)=0,\quad 4.5v'(2)+2.1v(2)=0.$$

Разложим функцию $g(x)$ в ряд Фурье по ортонормированному базису $\{\varphi_k^0(x)\}$:

$$g(x)=\sum_{k=1}^{\infty} g_k\varphi_k^0(x),$$

где

$$\begin{aligned}
g_k=(g,\varphi_k^0) &= \int_0^a g(x)\varphi_k^0(x)dx= \\
&= \frac{1}{\|\varphi_k\|}\int_0^a[-\cos(Cx)+\alpha Bx]\sin(\mu_k x)dx= \\
&= \frac{1}{\|\varphi_k\|}\left\{\frac{\cos[(\mu_k+C)a]-1}{2(\mu_k+C)}+\frac{\cos[(\mu_k-C)a]-1}{2(\mu_k-C)}+\right. \\
&+ \left.\alpha B\left[\frac{\sin(\mu_k a)}{\mu_k^2}-\frac{a\cos(\mu_k a)}{\mu_k}\right]\right\} \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

и $C=3.5$, $a=2$, $B=-1.7$, $\alpha=0.05747$, $\mu_k=2\gamma_k$, γ_k – положительные корни уравнения (2.20). При $k=1,2,3$ получим: $g_1=-0.2182$, $g_2=0.7162$, $g_3=-0.5723$.

6) Решение $v(x)$ находим в виде ряда Фурье $v(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}v_k\varphi_k^0(x)$, где $v_k=\dfrac{g_k}{\lambda_k}$ и g_k определены равенствами (2.21). Вычислим первые три коэффициента v_1, v_2, v_3 : $v_1=-0.0806$, $v_2=0.0930$, $v_3=-0.0325$. Выпишем приближенное решение исходной краевой задачи

$$y_3(x)=\sum_{k=1}^{3}v_k\varphi_k^0(x)+\alpha x=-0.0739\sin(1.0031x)+$$

$$+0.0913\sin(2.4503x)-0.0323\sin(3.9270x)+0.05747x.$$

Решение задачи 3

1) Разобьем промежуток $[0, 2]$ на 5 равных частей. Узлы сетки обозначим $x_i = ih$, $i = 0, ..., 5$; $h = \dfrac{2}{5} = 0.4$. Значения приближенного решения u_i (вычисленного по методу сеток) в узлах сетки удовлетворяют следующей линейной системе:

$$\begin{cases} -hu_0 = 0, \\ -u_{k-1} + (qh^2 + 2)u_k - u_{k+1} = f(x_k)h^2, \ \ k = 1, ..., 4, \\ -4.5u_4 + (4.5 + 2.1h)u_5 = t_2 h, \end{cases}$$

где $q = -B = 1.7$, $f(x_k) = -\cos(3.5x_k)$. Вычисляя $f(x_k)$, получим систему

$$\begin{bmatrix} -0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2.272 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2.272 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2.272 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2.272 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4.5 & 5.34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.02719 \\ 0.15076 \\ 0.07844 \\ -0.12409 \\ 0.2 \end{bmatrix}.$$

Эту систему решаем методом прогонки [4], [5]. Ясно, что $u_0 = 0$. Полагая $u_1 = \alpha_1 u_2 + \beta_1$, из второго уравнения системы получим, что $\alpha_1 = \dfrac{1}{2.272}$, $\beta_1 = -\dfrac{0.02719}{2.272}$. Далее, полагая $u_2 = \alpha_2 u_3 + \beta_2$, из третьего уравнения найдем

$$\alpha_2 = \frac{1}{2.272 - \alpha_1}, \quad \beta_1 = \frac{0.15076 + \beta_1}{2.272 - \alpha_1}.$$

Аналогично, используя четвертое и пятое уравнения, определяем α_k и β_k при $k = 3, 4$. Теперь последнее уравнение системы сводится к уравнению

$$-4.5(\alpha_4 u_5 + \beta_4) + 5.34u_5 = 0.2,$$

откуда находим u_5. По формулам $u_{k-1} = \alpha_{k-1}u_k + \beta_{k-1}$, $k = 5, 4, 3, 2$, вычисляем все u_k. Окончательно, решением системы является

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.04328 \\ 0.12553 \\ 0.09118 \\ 0.00318 \\ 0.04013 \end{bmatrix}.$$

2) Графики $y_3(x)$ (пунктирная линия), сеточной функции u_i (крестики) и точного решения $y(x)$ (сплошная линия) приведены на рис.2.2.

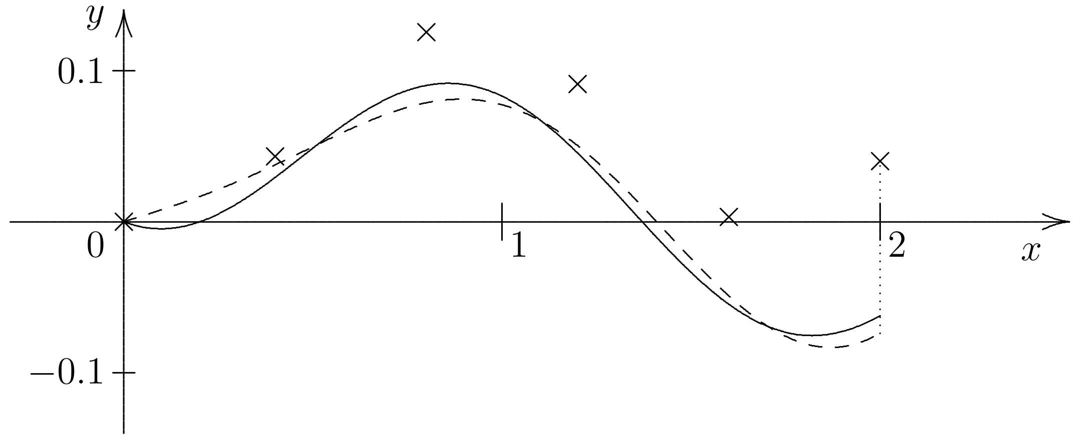

Рис.2.2

Обсудим "качество" полученных приближенных решений u_i и $y_3(x)$. Как видно из рис.2.2, сеточная функция u_i приближает точное решение с заметной погрешностью. Это объясняется тем, что для вычисления u_i взят шаг $h = 0.4$, а при таком шаге в соответствии с оценкой (2.18) нет оснований ожидать хорошего приближения.

Из того же рисунка видно, что функция $y_3(x)$ является лучшим приближением к точному решению $y(x)$. Отметим, что, используя явную формулу (2.21) для коэффициентов g_k , можно оценить величины v_k . Это дает возможность оценить точность, с которой функция $y_3(x)$ приближает решение $y(x)$. Именно,

$$\sup_{x\in[0,2]} |y(x) - y_3(x)| = \sup_{x\in[0,2]} \Big| \sum_{k=4}^{\infty} v_k \varphi_k^0(x) \Big| \le \sum_{k=4}^{\infty} |v_k| ,$$

так как $|\varphi_k^0(x)| \le 1$. Последний ряд оценивается с использованием интегрального признака сходимости. В качестве дополнительной задачи рекомендуем получить по изложенной схеме оценку для $\sup\limits_{x\in[0,2]} |y(x) - y_3(x)|$ в рассматриваемом случае.

Решение задачи 4

1) Пусть теперь параметр B произволен. Краевая задача не будет однозначно разрешима только в том случае, когда число $\lambda = 0$ будет собственным числом задачи Штурма-Лиувилля (2.19). Это значит, что число B должно в этом случае быть собственным числом задачи

$$\begin{cases} -y'' = \lambda y, \\ y(0) = 0, \\ 4.5y'(2) + 2.1y(2) = 0 \end{cases}$$

и, значит, при $B = \mu^2$ и $2\mu = \gamma$ число γ должно быть корнем уравнения (2.20). Наименьшее положительное значение B_1 параметра B соответствует корню γ_1 этого уравнения. Таким образом,

$$B_1 = \left(\frac{\gamma_1}{2}\right)^2 = 1.0062.$$

2) Положим $B = B_1 = \mu_1^2$, где $\mu_1 = \gamma_1/2 = 1.0031$, и будем считать параметр C произвольным. В этом случае краевая задача разрешима не при любых значениях параметра C. Решение будет существовать лишь в случае, если выполнено условие ортогональности (2.7), которое сейчас принимает вид

$$\int_0^2 g(x)\sin(\mu_1 x)dx = 0, \quad g(x) = -\cos(Cx) + \alpha B_1 x.$$

Поэтому должно быть выполнено равенство

$$\int_0^2 \sin(\mu_1 x)\cos(Cx)dx = \alpha B_1 \int_0^2 x\sin(\mu_1 x)dx =$$
$$= \alpha\mu_1^2\left[\frac{\sin(2\mu_1)}{\mu_1^2} - \frac{2\cos(2\mu_1)}{\mu_1}\right] = 0.1007. \tag{2.22}$$

При $C = \pm\mu_1$ равенство (2.22) не выполняется, так как

$$\int_0^2 \sin(\mu_1 x)\cos(\mu_1 x)dx = \frac{1-\cos(4\mu_1)}{4\mu_1} = 0.4098.$$

Если же $C \neq \pm\mu_1$, то

$$\int_0^2 \sin(\mu_1 x)\cos(Cx)dx = \frac{1}{2}\left\{\frac{1-\cos[2(\mu_1+C)]}{\mu_1+C} + \frac{1-\cos[2(\mu_1-C)]}{\mu_1-C}\right\}$$

и уравнение (2.22) сводится к уравнению

$$\frac{1-\cos[2(\mu_1+C)]}{\mu_1+C} + \frac{1-\cos[2(\mu_1-C)]}{\mu_1-C} = 0.2014. \tag{2.23}$$

Это уравнение относительно C имеет только конечное число вещественных корней, так как при $C \to \pm\infty$ его левая часть имеет нулевой предел. Находя корни уравнения (2.23) (например, методом половинного деления или с помощью пакета MatLab), получим наименьший положительный корень $C_1 = 1.2002$. Ясно, что $C_2 = -C_1$ также является корнем этого уравнения.

Отметим, что уравнение (2.23) имеет всего десять вещественных корней; помимо чисел C_1 и C_2 ими являются:

$$C_{3,4} = \pm 3.5733; \quad C_{5,6} = \pm 4.3715; \quad C_{7,8} = \pm 6.8852; \quad C_{9,10} = \pm 7.2711.$$

Задача 4 может быть решена и без привлечения задачи Штурма-Лиувилля (2.19) и условия (2.7). Достаточно изучить общее решение уравнения $y'' - By = \cos(Cx)$; при этом необходимо различать случаи, когда $B < 0$, $B = 0$ и $B > 0$.

Список литературы

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. — М.: Наука, 1985.

2. Харди Г.Х., Рогозинский В.В. Ряды Фурье. — М.: Физматгиз, 1959.

3. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. — М.: Наука, 1973.

4. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. — М.: Наука, 1971.

5. Уравнения математической физики: Методические указания к выполнению курсовой работы по дисциплине "Высшая математика" / Сост.: А.С.Бондарев, Л.А.Оганесян, Л.М.Товкач и др.; ЛЭТИ. — Л., 1990.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Редактор Э.К.Долгатов
Лицензия ЛР N 020617 от 10.08.92

Подписано в печать Формат 60×84 1/16. Бумага тип. N2.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,86. Уч. -изд. л. 2,0.
Тираж 250 экз. Заказ
Издательско–полиграфический центр ГЭТУ

197376, С.–Петербург, ул. Проф. Попова, 5