Министерство общего и профессионального образования РФ
———————————
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

Е. З. Боревич К. В. Каврайская С. И. Челкак

КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Санкт-Петербург
1997

Министерство общего и профессионального образования РФ
———————————
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

Е. З. Боревич К. В. Каврайская С. И. Челкак

КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
1997

ББК В1161.12 я7
Б82
УДК 517.37

Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы: Учеб. пособие/ Сост.: Е. З. Боревич, К. В. Кавpайская, С. И. Челкак; ГЭТУ. СПб., 1997. 1 с.

Излагаются разделы теории интегрирования функций нескольких переменых, входящие в программу курса высшей математики для технических вузов.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению ″Электроника и микроэлектроника″.

Рецензенты: кафедра высшей математики СПбГТУ; д-р физ.-мат. наук В. Г. Осмоловский (мат.-мех. факультет СПбГУ).

Утверждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

ISBN 5-7629-0245-5

Введение

В пособии рассматриваются разделы теории интегрирования функций двух и трех вещественных переменных, обычно включаемые в курс высшей математики для технических вузов. Изложены принципы построения и основные свойства двойных, тройных, криволинейных и повторных интегралов. Последняя часть пособия посвящена разделу теории интегрирования, обычно называемому теорией поля и связанному с приложением теории в физике. Этот материал является основой для специального курса математической физики.

Для большинства утверждений, сформулированных в пособии, приведены полные доказательства. Однако иногда такие доказательства оказываются столь громоздкими, что их приходится опускать. Но и некоторые из изложенных доказательств являются все-таки достаточно длинными; их можно (и, вероятно, целесообразно) не приводить в курсе лекций для технического вуза.

Рассматриваемым вопросам посвящено достаточно много литературы, из которой следует отметить учебники [1–4]. Книги [1, 2] предназначены для университетов, а [3] – для студентов МФТИ. Эти учебники предполагают высокий уровень математической подготовки читателей и для студентов технических вузов являются, вероятно, слишком трудными. Книга [4] является вузовским учебником по рассматриваемым в данном пособии темам.

Построение теории интегрирования функций нескольких переменных тесно связано с такими основными геометрическими (или, точнее, топологическими) понятиями, как область, линия, поверхность и т. д. Довольно сложно дать точные геометрические определения этих понятий. Поэтому естественно описывать такие объекты аналитически, т. е. как множества точек в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$, координаты которых удовлетворяют некоторым соотношениям. Эти соотношения могут быть разными в различных случаях и приводят к различным аналитическим определениям кривых, поверхностей и т. д.; при этом такие объекты обладают и различными геометрическими свойствами.

Приведем те аналитические определения указанных геометрических объектов, которые используются в данном пособии.

Кривые (линии) в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$. Пусть Oxy – декартова система координат на плоскости. *Непрерывной (жордановой)* кривой называется множество точек $\ell = \big\{(x, y)\colon x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [t^{(1)}, t^{(2)}]\big\}$, где $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывные на $[t^{(1)}, t^{(2)}]$ функции. Если $\vec{r}$ – радиус-вектор[1] точки (x, y), то непрерывная кривая задается соотношениями:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \big[x(t), y(t)\big]^T, \quad t \in [t^{(1)}, t^{(2)}], \quad t^{(1)} \in \mathbb{R}, \quad t^{(2)} \in \mathbb{R}.$$

[1] Для вектора $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ всюду в пособии используется обозначение $\vec{x} = [x_1, x_2]^T$, где x_1 и x_2 – декартовы координаты $\vec{x}$. Аналогично, $\vec{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$ – вектор в $\mathbb{R}^3$ с декартовыми координатами x_1, x_2, x_3.

В частности, непрерывными кривыми являются графики функций $y = g(x)$, $x \in [a, b]$, и $x = h(y)$, $y \in [c, d]$, если функции $g(x)$ и $h(y)$ непрерывны, соответственно, на промежутках $[a, b]$ и $[c, d]$.

Известно, что множество точек, являющееся жордановой (т.е. непрерывной) кривой, может быть весьма сложным с геометрической точки зрения. Поэтому оказывается целесообразным выделить среди этих кривых более узкий класс. Так, жорданову кривую назовем гладкой, если функция $\vec{r}(t)$ дифференцируема на $[t^{(1)}, t^{(2)}]$ и $\|\vec{r}\,'(t)\| \neq 0$. Вектор $\vec{r}\,'(t)$ является касательным вектором к гладкой кривой. Будем называть жорданову кривую *кусочно-гладкой*, если отрезок $[t^{(1)}, t^{(2)}]$ может быть разбит на конечное число отрезков $[t_{i-1}, t_i]$, где $t^{(1)} = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t^{(2)}$, и каждая из кривых $r = \vec{r}(t) = \big[x(t), y(t)\big]^T$, $t \in [t_{i-1}, t_i]$, является гладкой кривой.

Для гладкой кривой ℓ

$$L(\ell) \equiv \int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}dt < +\infty.$$

Число $L(\ell)$ называется *длиной* ℓ.

Кривая ℓ называется *замкнутой*, если $\vec{r}(t^{(1)}) = \vec{r}(t^{(2)})$. Замкнутая кривая ℓ гладкая, если ℓ – гладкая кривая и $\vec{r}\,'(t^{(1)}) = \vec{r}\,'(t^{(2)})$. Если ℓ – кусочно-гладкая кривая и $\vec{r}(t^{(1)}) = \vec{r}(t^{(2)})$, то ℓ – замкнутая кусочно-гладкая кривая.

Если $\vec{r}(t^*) = \vec{r}(t^{**})$ при $t^* \in [t^{(1)}, t^{(2)}]$, $t^{**} \in [t^{(1)}, t^{(2)}]$ и $t^* \neq t^{**}$, то кривая ℓ имеет точку самопересечения. Всюду в данном пособии предполагается (и особо не оговаривается), что рассматриваемые кривые точек самопересечения не имеют, хотя многие из формулируемых утверждений справедливы и без этого ограничения.

Понятия жордановой, гладкой и кусочно-гладкой кривых в $I\!\!R^3$ аналогичны случаю плоскости.

Области в $I\!\!R^2$. Для точек плоскости определено понятие расстояния между ними и, тем самым, понятие окрестности. Для любого множества $X \subset I\!\!R^2$ обычным образом определяются его внутренние и граничные точки.

Назовем множество D точек плоскости ограниченной областью, если множество граничных точек D (*граница* D) являются кусочно-гладкой замкнутой несамопересекающейся кривой на плоскости. В случае, когда граница D не принадлежит D, область D называется *открытой*. Если же граница D принадлежит D, то D называется *замкнутой* областью. Везде в данном пособии области на плоскости предполагаются замкнутыми, и в большинстве случаев это условие явно не формулируется. Некоторые из приводимых в пособии утверждений верны и для открытых областей.

Для рассматриваемых в пособии областей определено понятие их площади, которая в простейших случаях вычисляется с помощью определенного интеграла. Площадь области D обозначим $S(D)$. Отметим используемые далее естественные свойства площади:

1) $S(D) \geq 0$ для любой области D, для которой понятие площади определено;

2) если области D_1 и D_2 имеют площади $S(D_1)$ и $S(D_2)$ соответственно, $D = D_1 \cup D_2$ и D_1 и D_2 не пересекаются, т. е. $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, то $S(D)$ также определено и $S(D) = S(D_1) + S(D_2)$.

Второе из указанных свойств называется аддитивностью площади. Важно отметить, что если D_1 и D_2 – замкнутые области с кусочно-гладкими границами, то равенство $S(D) = S(D_1) + S(D_2)$ справедливо и в том случае, когда D_1 и D_2 имеют общие точки, но только такие, которые являются граничными точками как области D_1, так и области D_2 (будем при этом говорить, что области D_1 и D_2 пересекаются разве лишь по своим границам).

Поверхности в $I\!R^3$. Пусть $Oxyz$ – декартова система координат в $I\!R^3$. *Непрерывной* поверхностью Σ в $I\!R^3$ называется множество точек, радиус-векторы которых задаются соотношениями

$$\vec{r} = \vec{r}(\xi, \eta) = \big[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), z(\xi, \eta)\big]^T, \quad (\xi, \eta) \in D_{\xi\eta},$$

где $D_{\xi\eta}$ – некоторая область на плоскости с декартовой системой координат $O'\xi\eta$. В частности, непрерывной поверхностью в $I\!R^3$ является график функции $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$, где D_{xy} – область на плоскости Oxy, если функция $g(x, y)$ непрерывна на D_{xy}.

Среди множества непрерывных поверхностей выделяется класс гладких поверхностей. Назовем непрерывную поверхность Σ гладкой, если функция $\vec{r}(\xi, \eta)$ имеет непрерывные на D_{xy} производные $\vec{r}'_\xi = \left[\dfrac{\partial x}{\partial \xi}, \dfrac{\partial y}{\partial \xi}, \dfrac{\partial z}{\partial \xi}\right]^T$, $\vec{r}'_\eta = \left[\dfrac{\partial x}{\partial \eta}, \dfrac{\partial y}{\partial \eta}, \dfrac{\partial z}{\partial \eta}\right]^T$ и $\big\|[\vec{r}'_\xi, \vec{r}'_\eta]\big\| \neq 0$ для всех точек $D_{\xi\eta}$. Здесь и далее в пособии $[\vec{a}, \vec{b}]$ означает векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Поверхность Σ будем называть *кусочно-гладкой*, если всюду на $D_{\xi\eta}$, исключая конечное число кусочно-гладких кривых, определены непрерывные производные $\vec{r}'_\xi$ и $\vec{r}'_\eta$ и выполнено условие $\big\|[\vec{r}'_\zeta, \vec{r}'_\eta]\big\| \neq 0$. Гладкая поверхность может иметь точки (и линии) самопересечения. Будем везде предполагать (и не отмечать это особо), что все рассматриваемые поверхности не имеют точек самопересечения.

Для гладкой поверхности может быть определено понятие ″*край поверхности*″. Привести здесь точное определение этого понятия не представляется возможным, поэтому в тех случаях, когда оно используется, приходится ограничиваться наглядным геометрическим представлением.

Область в $I\!\!R^3$. Для множества $X \subset I\!\!R^3$ также естественно определяются его внутренние и граничные точки. Ограниченной областью в $I\!\!R^3$ будем называть множество Ω в том случае, если множество его граничных точек (граница Ω) является кусочно-гладкой поверхность Σ. Поверхность Σ в этом случае называется *замкнутой*. Определения открытых и замкнутых областей в $I\!\!R^3$ аналогичны случаю плоскости. Все области в $I\!\!R^3$ предполагаются замкнутыми.

В школьной программе по математике рассматривается понятие объема для простейших геометрических тел. Это понятие может быть распространено и на более сложные множества $X \subset I\!\!R^3$. При этом объем $V(X)$ множества X обладает следующими естественными свойствами:

1) $V(X) \geq 0$ для любого $X \subset I\!\!R^3$, объем которого определен;

2) если $X = X_1 \cup X_2$ и $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ и существуют $V(X)$, $V(X_1)$, $V(X_2)$, то $V(X) = V(X_1) + V(X_2)$.

Второе свойство, как и для площади, называется аддитивностью объема. Для Ω_1 и Ω_2, являющихся областями в $I\!\!R^3$ с кусочно-гладкими границами, равенство $V(\Omega) = V(\Omega_1) + V(\Omega_2)$ справедливо и в том случае, когда Ω_1 и Ω_2 пересекаются, но разве лишь по своим границам. Из отмеченных свойств объема следует, в частности, что если Ω_1 и Ω – области с кусочно-гладкими границами и $\Omega_1 \subset \Omega$, то $V(\Omega_1) \leq V(\Omega)$.

В пособии изучаются функции, заданные на кривых, областях или поверхностях. Часто будет использоваться следующее утверждение (теорема Вейерштрасса): если функция $f(P)$, $P \in D$, определена и непрерывна на ограниченной замкнутой области D, то $f(P)$ ограничена на D и достигает своих наибольшего и наименьшего значений, т. е. существуют такие точки $P_* \in D$, $P^* \in D$, что $f(P_*) = \inf\limits_{P \in D} f(P)$, $f(P^*) = \sup\limits_{P \in D} f(P)$.

В некоторых случаях используется также свойство равномерной непрерывности функций. Функция $f(P)$, $P \in X$, называется *равномерно непрерывной* на множестве X, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых точек $P' \in X$, $P'' \in X$, удовлетворяющих условию $\rho(P', P'') < \delta$, выполнено неравенство $\big|f(P') - f(P'')\big| < \varepsilon$; здесь $\rho(P', P'')$ – расстояние между точками P' и P''.

Справедлива теорема (Вейерштрасс): если функция непрерывна на замкнутом ограниченном множестве X, то она равномерно непрерывна на X.

Функцию $f(P)$, $P \in D$, будем называть *кусочно-непрерывной* на D, если область D (замкнутую) можно разбить на конечное число замкнутых областей D_i, пересекающихся между собой разве лишь по своим границам, и $f(P)$ непрерывна на каждой области D_i.

1. Двойной интеграл

1.1. Определение двойного интеграла

Рассмотрим в $I\!R^2$ некоторую ограниченную замкнутую область D с кусочно-гладкой границей. Для любого ограниченного множества X точек из $I\!R^2$ определим его диаметр $d(X)$ равенством

$$d(X) = \sup_{P' \in X, P'' \in X} \rho(P', P''),$$

где $\rho(P', P'')$ – расстояние между P' и P''. В частности, для ограниченной замкнутой области диаметром является наибольшая хорда.

Обозначим $S(D)$ площадь области D. Всюду далее будем считать, что для рассматриваемых областей выполнено неравенство $S(D) > 0$.

Пусть на области D задана вещественная функция $f\colon D \to I\!R$.

Рассмотрим разбиение $\{D_i\}$ области D на частичные (замкнутые) области D_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, с кусочно-гладкими границами, которые могут пересекаться между собой разве лишь по своим границам. Для областей D_i также определены их площади, которые обозначим ΔS_i, $i = 1, 2 \ldots, n$. Обозначим $\lambda = \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} d(D_i)$ наибольший из диаметров частичных областей и назовем λ рангом разбиения. В каждой из областей D_i выберем произвольную точку $P_i \in D_i$ и рассмотрим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i,$$

называемую интегральной суммой для функции $f(P)$, области D, разбиения $\{D_i\}$ и точек P_i.

Определение 1.1. *Число I называется двойным интегралом функции $f(P)$ по области D, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого разбиения $\{D_i\}$ с рангом, удовлетворяющим условию $\lambda < \delta$, и любого выбора точек $P_i \in D_i$ справедливо неравенство*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i - I \right| < \varepsilon.$$

Функция $f(P)$ называется в этом случае интегрируемой по области D и для двойного интеграла используется обозначение

$$I = \iint\limits_{D} f(P)dS.$$

Двойной интеграл существует не для всякой функции $f(P)$. Необходимым условием существования интеграла является ограниченность функции $f(P)$.

Теорема 1.1. *Если функция $f(P)$ интегрируема по области D, то $f(P)$ ограничена на D.*

Доказательство. Действительно, предположим, например, что $f(P)$ не ограничена сверху на D. Тогда существует такая последовательность $\{P_k\}$ точек $P_k \in D$, что $\lim\limits_{k\to\infty} f(P_k) = +\infty$. При любом разбиении $\{D_i\}$ в какую-либо из частичных областей попадет бесконечно много точек из последовательности $\{P_k\}$. Тогда, последовательно выбирая эти точки в качестве соответствующей точки P_i, получим последовательность интегральных сумм, не ограниченную сверху. Следовательно, требуемого в соответствии с определением 1.1 числа I в этом случае существовать не может, что и доказывает теорему[1]. ■

Утверждение, обратное теореме 1.1, не является верным: ограниченности функции $f(P)$ не достаточно для ее интегрируемости. Сформулируем без доказательства простейшую теорему о достаточных для интегрируемости $f(P)$ условиях.

Теорема 1.2. *Если функция $f(P)$ кусочно-непрерывна в замкнутой области D, то она интегрируема по D.*

Условие кусочной непрерывности $f(P)$ является весьма сильным ограничением и может быть в значительной степени ослаблено. Мы не будем приводить соответствующие точные формулировки, поскольку в приложениях двойного интеграла обычно достаточно рассматривать кусочно-непрерывные функции.

Понятие двойного интеграла естественным образом распространяется на комплекснозначные функции, определенные на D. Так, если $f(P) = f_1(P) + if_2(P)$, то по определению

$$\iint\limits_D f(P)dS = \iint\limits_D f_1(P)dS + i\iint\limits_D f_2(P)dS$$

в том случае, когда функции $f_1(P)$ и $f_2(P)$ интегрируемы по D.

1.2. Свойства двойного интеграла

Основные свойства двойного интеграла аналогичны свойствам обычного определенного интеграла. Сформулируем их для случая вещественных функций.

[1] Знак ■ означает конец доказательства.

Теорема 1.3. *Справедливо равенство*

$$\iint\limits_D dS = S(D). \tag{1.1}$$

Доказательство. Указанный двойной интеграл соответствует случаю $f(P) \equiv 1$. Для этой функции $f(P)$ при любом разбиении и любом выборе точек P_i интегральная сумма совпадает с $S(D)$ по свойству аддитивности площади. Следовательно, функция $f(P) \equiv 1$ интегрируема на D и выполнено равенство (1.1). ■

Теорема 1.4. *Если функции $f_1(P)$ и $f_2(P)$ интегрируемы по области D, $\alpha_1 \in I\!R$, $\alpha_2 \in I\!R$ и $f(P) = \alpha_1 f_1(P) + \alpha_2 f_2(P)$, то функция $f(P)$ также интегрируема по D и*

$$\iint\limits_D f(P)dS = \alpha_1 \iint\limits_D f_1(P)dS + \alpha_2 \iint\limits_D f_2(P)dS. \tag{1.2}$$

Отметим, что равенство (1.2) обычно называют свойством линейности двойного интеграла.

Теорема 1.5. *Если $f_1(P)$ и $f_2(P)$ интегрируемы по области D и $f_1(P) \leq f_2(P)$ при $P \in D$, то*

$$\iint\limits_D f_1(P)dS \leq \iint\limits_D f_2(P)dS.$$

Доказательства теорем 1.4 и 1.5 аналогичны доказательству соответствующих теорем для определенного интеграла (см. [5]).

Теорема 1.6. *Если функция $f(P)$ интегрируема по области D, то функция $|f(P)|$ также интегрируема по D и*

$$\left| \iint\limits_D f(P)dS \right| \leq \iint\limits_D |f(P)|dS. \tag{1.3}$$

Доказательство. Прежде всего необходимо установить интегрируемость по D функции $|f(P)|$. Ограничимся доказательством этого факта только для непрерывных на D функций. В этом случае $|f(P)|$ также будет непрерывной и, следовательно, интегрируемой по D функцией на основании теоремы 1.2. Так как при всех $P \in D$ справедливы неравенства

$$-|f(P)| \leq f(P) \leq |f(P)| \tag{1.4}$$

и функции $f(P)$, $|f(P)|$, $-|f(P)|$ интегрируемы по D, то из (1.4) по теореме 1.5 следуют неравенства

$$-\iint\limits_D |f(P)|dS \leq \iint\limits_D f(P)dS \leq \iint\limits_D |f(P)|dS,$$

равносильные неравенству (1.3). ■

Теорема 1.7. *Если функция $f(P)$ интегрируема и ограничена в области D, то справедливы неравенства*

$$mS(D) \leq \iint\limits_D f(P)dS \leq MS(D), \tag{1.5}$$

где $m = \inf\limits_{P\in D} f(P)$, $M = \sup\limits_{P\in D} f(P)$.

Доказательство. Отметим сначала, что существование чисел m и M следует из ограниченности функции $f(P)$. Ясно, что при всех $P \in D$ справедливы неравенства $m \leq f(P) \leq M$. Из этих неравенств, интегрируемости функции $f(P)$ и равенства (1.1) следуют (с учетом теоремы 1.4) неравенства (1.5). ■

Теорема 1.8 (теорема о среднем). *Если $f(P)$ непрерывна в замкнутой области D, то существует такая точка $P^* \in D$, что*

$$\iint\limits_D f(P)dS = f(P^*)S(D). \tag{1.6}$$

Доказательство. Напомним, что предполагается выполненным неравенство $S(D) > 0$. Интеграл $\iint\limits_D f(P)dS$ существует, так как $f(P)$ непрерывна. Для числа $\mu = \left[S(D)\right]^{-1} \iint\limits_D f(P)dS$ из соотношений (1.5) следуют неравенства $m \leq \mu \leq M$. Поэтому для непрерывной функции $f(P)$ по теореме Вейерштрасса найдется точка P^*, что $f(P^*) = \mu$. Это равенство равносильно (1.6). ■

Теорема 1.9 (аддитивность двойного интеграла). *Если $D = D^{(1)} \cup D^{(2)}$, где $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$ – области с кусочно-гладкими границами, пересекающиеся разве лишь по своим границам, и функция $f(P)$ интегрируема по D, то $f(P)$ интегрируема по $D^{(1)}$ и по $D^{(2)}$ и*

$$\iint\limits_D f(P)dS = \iint\limits_{D^{(1)}} f(P)dS + \iint\limits_{D^{(2)}} f(P)dS. \tag{1.7}$$

Наоборот, если при тех же условиях на области D, $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$ функция $f(P)$ интегрируема по областям $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$, то $f(P)$ интегрируема по D и справедливо равенство (1.7).

Доказательство. Наиболее трудной частью доказательства теоремы является доказательство интегрируемости $f(P)$ по областям $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$ (в первом случае) или по области D (во втором случае). Ограничимся здесь только случаем кусочно-непрерывной на D функции $f(P)$. В общем случае доказательство приведено в [1]. Кусочно-непрерывная на D функция $f(P)$ будет также кусочно-непрерывной и на $D^{(1)}$, и на $D^{(2)}$. Поэтому все интегралы, входящие в равенство (1.7), существуют, и для доказательства теоремы необходимо только установить справедливость (1.7).

Рассмотрим разбиения $\{D_i^{(1)}\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, области $D^{(1)}$ и $\{D_j^{(2)}\}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, области $D^{(2)}$. Пусть $\varepsilon > 0$ и ранги λ_1 разбиения $\{D_i^{(1)}\}$ и λ_2 разбиения $\{D_j^{(2)}\}$ таковы, что

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(P_i^{(1)})\Delta S_i^{(1)} - I_1\right| \le \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left|\sum_{j=1}^{m} f(P_j^{(2)})\Delta S_j^{(2)} - I_2\right| \le \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.8}$$

для любого выбора точек $P_i^{(1)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и $P_j^{(2)}$, $j = 1, 2, \ldots, m$; здесь

$$I_1 = \iint\limits_{D^{(1)}} f(P)dS, \quad I_2 = \iint\limits_{D^{(2)}} f(P)dS.$$

Объединение разбиений $\{D_i^{(1)}\}$ и $\{D_j^{(2)}\}$ порождает разбиение области D. Обозначим его $\{D_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, n+m$; частичные области D_k совпадают либо с $D_i^{(1)}$, либо с $D_j^{(2)}$. Соответственно обозначим P_k, $k = 1, 2, \ldots, n+m$, точки $P_i^{(1)}$ (в $D^{(1)}$) и точки $P_j^{(2)}$ (в $D^{(2)}$). Тогда для разбиения $\{D_k\}$ области D и точек P_k справедливо равенство:

$$\sum_{k=1}^{n+m} f(P_k)\Delta S_k = \sum_{i=1}^{n} f(P_i^{(1)})\Delta S_i^{(1)} + \sum_{j=1}^{m} f(P_j^{(2)})\Delta S_j^{(2)}.$$

Поэтому из неравенств (1.8) следует:

$$\left|\sum_{k=1}^{n+m} f(P_k)\Delta S_k - I_1 - I_2\right| \le$$

$$\le \left|\sum_{i=1}^{n} f(P_i^{(1)})\Delta S_i^{(1)} - I_1\right| + \left|\sum_{j=1}^{m} f(P_j^{(2)})\Delta S_j^{(2)} - I_2\right| \le \varepsilon. \tag{1.9}$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такое разбиение $\{D_k\}$ области D и такие точки P_k, что справедливо неравенство (1.9). Поэтому интеграл $\iint\limits_D f(P)dS$ должен совпадать с числом $I_1 + I_2$, что и означает выполнение равенства (1.7). ■

Замечание 1.1. Теоремы 1.4 и 1.9 справедливы также и для двойных интегралов от комплекснозначных функций. Доказательства для этого случая непосредственно следуют из этих теорем в вещественном случае и из определения интеграла от комплекснозначных функций. Теорема 1.6 также верна для комплекснозначных функций, но ее доказательство в этом случае несколько усложняется.

1.3. Повторный интеграл в декартовых координатах

Пусть на плоскости задана декартова система координат Oxy. Рассмотрим область D, декартовы координаты (x, y) точек которой удовлетворяют соотношениям: $a \leq x \leq b$; $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, где $g_1(x)$ и $g_2(x)$ – непрерывные на $[a, b]$ функции. Назовем такую область правильной относительно оси Ox (рис. 1.1).

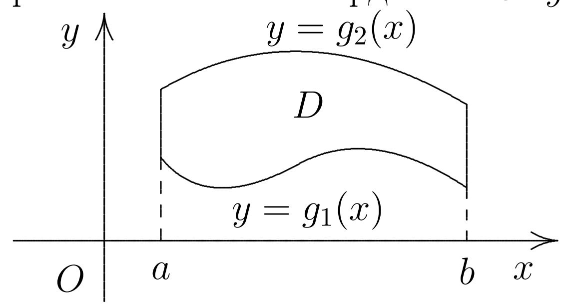

Рис. 1.1

Пусть на D задана непрерывная функция $f(x, y)$. Рассмотрим функцию[1]

$$F(x) = \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dy. \tag{1.10}$$

Теорема 1.10. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна на области $D = \big\{(x, y)\colon a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\big\}$, а функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ непрерывны на $[a, b]$, то функция $F(x)$, определяемая равенством* (1.10), *непрерывна на $[a, b]$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $g_1(x) < g_2(x)$ при всех $x \in [a, b]$. Возьмем $x_0 \in [a, b]$. Так как $g_1(x_0) < g_2(x_0)$, то найдется такая окрестность $K_\delta(x_0) = \big\{x \in [a, b]\colon\ x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\big\}$, что для всех $x \in K_\delta(x_0)$ справедливо неравенство $g_1(x) \leq A \leq g_2(x)$ при некотором $A \in I\!R$; в качестве числа A можно взять, например, $\big[g_1(x_0) + g_2(x_0)\big]/2$.

[1] Обычно говорят, что $F(x)$ – интеграл, зависящий от параметра x.

Тогда при $x \in K_\delta(x_0)$

$$F(x) = \int\limits_{g_1(x)}^{A} f(x,y)dy + \int\limits_{A}^{g_2(x)} f(x,y)dy = F_2(x) - F_1(x),$$

где $F_1(x) = \int\limits_A^{g_1(x)} f(x,y)dy$, $F_2(x) = \int\limits_A^{g_2(x)} f(x,y)dy$. Докажем непрерывность в точке x_0 функции $F_2(x)$, для $F_1(x)$ доказательство аналогично. По определению функции $F_2(x)$

$$F_2(x) = \int\limits_A^{g_2(x)} f(x,y)dy; \quad F_2(x_0) = \int\limits_A^{g_2(x_0)} f(x_0,y)dy.$$

Предположим, что $g_2(x) \geq g_2(x_0)$; случай, когда $g_2(x) < g_2(x_0)$ рассматривается аналогично. Тогда

$$F_2(x) = \int\limits_A^{g_2(x_0)} f(x,y)dy + \int\limits_{g_2(x_0)}^{g_2(x)} f(x,y)dy$$

и, значит,

$$F_2(x) - F_2(x_0) = \int\limits_{g_2(x_0)}^{g_2(x)} f(x,y)dy + \int\limits_A^{g_2(x_0)} \big[f(x,y) - f(x_0,y)\big]dy. \qquad (1.11)$$

Так как $f(x,y)$ ограничена на D, т. е. $|f(x,y)| \leq M_f$, то для первого интеграла, входящего в (1.11), получим:

$$\left|\int\limits_{g_2(x_0)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\right| \leq M_f\big(g_2(x) - g_2(x_0)\big) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$$

в силу непрерывности в точке x_0 функции $g_2(x)$.

Рассмотрим второй интеграл, входящий в (1.11). Отметим, что расстояние между точками (x_0,y) и (x,y) не превосходит δ. Возьмем $\varepsilon > 0$ и будем считать, что $\delta > 0$ выбрано столь малым, что

$$\big|f(x,y) - f(x_0,y)\big| \leq \varepsilon.$$

Это возможно в силу непрерывности функции $f(x,y)$ на области D, причем δ можно взять не зависящим от y, так как непрерывная на замкнутой области D функция $f(x,y)$ равномерно непрерывна на D. Считая, что δ выбрано указанным образом, получим при $x \in K_\delta(x_0)$

$$\left| \int\limits_A^{g_2(x_0)} \big[f(x,y) - f(x_0,y)\big]dy \right| \le \varepsilon\big|g_2(x_0) - A\big| \le \varepsilon\big(M_g + |A|\big), \qquad (1.12)$$

где $M_g = \sup\limits_{x\in[a,b]} g_2(x)$. Из неравенства (1.12) следует:

$$\lim_{x\to x_0} \int\limits_A^{g_2(x_0)} \big[f(x,y) - f(x_0,y)\big]dy = 0,$$

т. е. непрерывность в x_0 второго слагаемого правой части (1.11). Таким образом, $F_2(x)$ непрерывна в x_0 как сумма двух непрерывных функций. Тогда и $F(x)$ непрерывна в x_0. Итак, теорема доказана для случая, когда $g_1(x) < g_2(x)$ при всех $x \in [a,b]$. Если же $g_1(x_0) = g_2(x_0)$ при некотором $x_0 \in [a,b]$, то для доказательства теоремы требуются дополнительные рассуждения; их можно найти, например, в [1]. ■

Теорема 1.10 обеспечивает существование определенного интеграла $\int\limits_a^b F(x)dx$ в случае непрерывных функций f, g_1 и g_2.

Определение 1.2. *Если функция $F(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то интеграл*

$$\int\limits_a^b F(x)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy$$

называется повторным интегралом функции $f(x,y)$ по области $D = \big\{(x,y)\colon a \le x \le b,\ \ g_1(x) \le y \le g_2(x)\big\} \subset \mathbb{R}^2$; при этом сначала $f(x,y)$ интегрируется по переменной y, а затем полученная функция интегрируется по x. В этом определении (x,y) – декартовы координаты в $\mathbb{R}^2$.

Если область D правильна относительно оси Oy, т. е. декартовы координаты (x,y) ее точек удовлетворяют соотношениям $c \le y \le d$, $h_1(y) \le x \le h_2(y)$, то аналогично может быть определен повторный интеграл

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx,$$

в котором $f(x,y)$ сначала интегрируется по x, а затем – по y.

Для повторного интеграла справедлива теорема о среднем.

Теорема 1.11. *Если $f(x,y)$ непрерывна на D, то существует такая точка $P^*(x^*,y^*) \in D$, что*

$$\int\limits_c^d dx \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy = f(x^*,y^*)S(D),$$

где $S(D)$ – площадь области D.

Доказательство. Непрерывная на D функция $f(x,y)$ ограничена; обозначим $m = \inf\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$; $M = \sup\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$. Тогда $m \leq f(x,y) \leq M$ для всех $(x,y) \in D$. Поэтому

$$\int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} m dy \leq \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy \leq \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} M dy$$

и, значит,

$$m\big[g_2(x) - g_1(x)\big] \leq \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy \leq M\big[g_2(x) - g_1(x)\big].$$

Так как для непрерывной функции f существует повторный интеграл, то это неравенство можно проинтегрировать по отрезку $[a,b]$. В результате получим:

$$m\int\limits_a^b \big[g_2(x) - g_1(x)\big]dx \leq \int\limits_a^b dx \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy \leq M\int\limits_a^b \big[g_2(x) - g_1(x)\big]dx$$

или, так как $S(D) = \int\limits_a^b \big[g_2(x) - g_1(x)\big]dx$, неравенство

$$m \leq \frac{1}{S(D)} \int\limits_a^b dx \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy \leq M.$$

По теореме Вейерштрасса, для непрерывной функции $f(x,y)$ существуют такие x^*, y^*, что

$$f(x^*, y^*) = \frac{1}{S(D)} \int\limits_a^b dx \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dy.$$

Это равенство равносильно утверждению теоремы. ■

1.4. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах

Пусть положение точки P на плоскости описывается декартовыми координатами (x, y), а область D является правильной относительно оси Ox. Пусть на D задана непрерывная функция $f(P)$, $P \in D$. Иначе говоря, на D определена непрерывная функция двух переменных $f\big(P(x, y)\big)$, которую для сокращения записи будем обозначать $f(x, y)$. В этом случае двойной интеграл функции f по D существует и может быть вычислен с помощью повторного интеграла.

Теорема 1.12. *Если (x, y) – декартовы координаты, $D = \big\{(x, y)\colon a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\big\}$ – правильная относительно оси Ox область, функция $f(P)$ непрерывна на D, а функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ непрерывны на $[a, b]$, то*

$$\iint\limits_D f(P)dS = \int\limits_a^b dx \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dy. \tag{1.13}$$

Доказательство. Построим сначала некоторое разбиение области D отрезками, параллельными осям Ox и Oy, ранг которого может быть сделан произвольно малым. Возьмем $\varepsilon > 0$. Так как функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ непрерывны на $[a, b]$, то они и равномерно непрерывны на этом отрезке. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta_1 > 0$, что $|g_1(x') - g_1(x'')| < \varepsilon$ для любых таких x' и x'' из отрезка $[a, b]$, что $|x' - x''| < \delta_1$, и существует аналогичное число $\delta_2 > 0$ для функции $g_2(x)$. Возьмем $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ и разобьем отрезок $[a, b]$ точками x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, $x_0 = a$, $x_n = b$, на n равных частей так, чтобы длина каждой из них была меньше δ (рис. 1.2). Отметим, что если $g_2(x) \not\equiv \mathrm{const}$, то $\delta \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и, следовательно, $b \to \infty$. Если же $g_2(x) \equiv \mathrm{const}$, то δ может быть любым; в этом случае будем выбирать n таким, чтобы выполнялось условие: $n \to \infty$ при

$\varepsilon \to 0$. Ясно, что

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy. \tag{1.14}$$

Рассмотрим каждый из повторных интегралов, входящих в сумму. Пусть номер i фиксирован. Соответствующий ему повторный интеграл является интегралом по правильной относительно оси Ox области $D_i = \big\{(x,y)\colon x_{i-1} \le x \le x_i,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\big\}$ (на рис. 1.2 область D_i заштрихована).

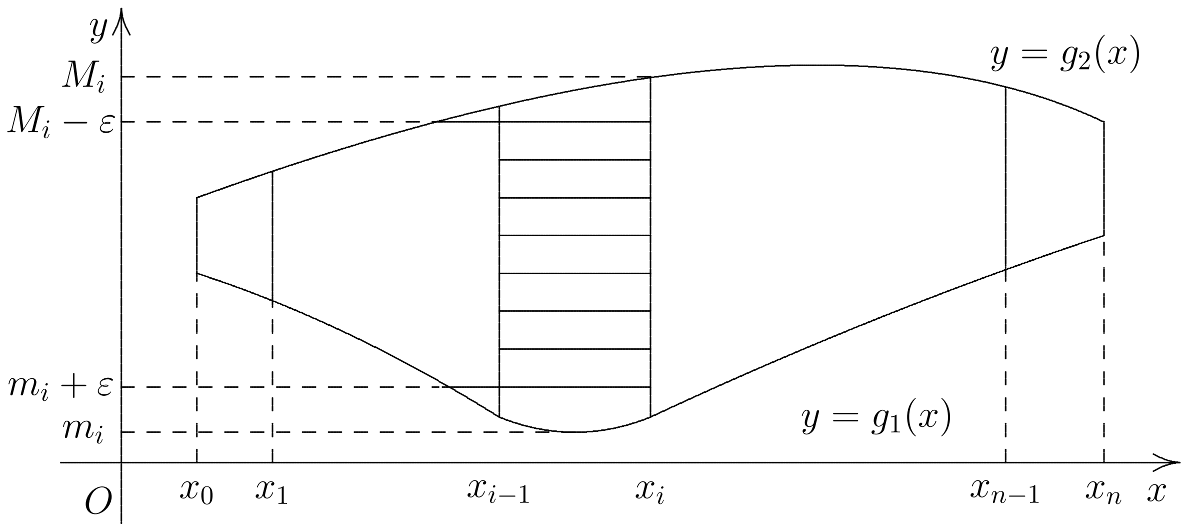

Рис. 1.2

Пусть $m_i = \inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} g_1(x)$; $M_i = \sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} g_2(x)$. Рассмотрим горизонтальные прямые $y = M_i - \varepsilon$ и $y = m_i + \varepsilon$. Предположим сначала, что выполнено неравенство $m_i + \varepsilon < M_i - \varepsilon$. Тогда обе рассматриваемые прямые пересекают область D_i. Обозначим D_i° прямоугольник $\big\{(x,y)\colon x_{i-1} \le x \le x_i,\ m_i + \varepsilon \le y \le M_i - \varepsilon\big\}$. Этот прямоугольник не пересекается с кривыми $y = g_2(x)$ и $y = g_1(x)$ в силу выбора числа δ. Действительно, если бы D_i° пересекался, например, с кривой $y = g_2(x)$, то на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, длина которого меньше δ, нашлись бы две такие точки x', x'', что $\big|g_2(x'') - g_2(x')\big| > \varepsilon$, что противоречит выбору δ. Таким образом, в рассматриваемом случае

$$D_i = D_i^- \cup D_i^\circ \cup D_i^+,$$

где $D_i^- = \big\{(x,y)\colon x_{i-1} \le x \le x_i,\ g_1(x) \le y \le m_i - \varepsilon\big\}$;

$D_i^+ = \big\{(x,y)\colon x_{i-1} \le x \le x_i,\ M_i - \varepsilon \le y \le g_2(x)\big\}$.

Разобьем теперь прямоугольник D_i° горизонтальными отрезками прямых $y = y_j$, $j = 0, 1, \ldots, n$, $y_0 = m_i + \varepsilon$, $y_n = M_i - \varepsilon$ на n равных прямоугольников, которые обозначим D°_{ij}, $j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда

$$D_i = D_i^- \cup D^\circ_{i1} \cup D^\circ_{i2} \cup \ldots \cup D^\circ_{in} \cup D_i^+. \tag{1.15}$$

Отметим, что все области, входящие в разложение (1.15) правильны относительно оси Ox, и диаметр каждой из них будет сколь угодно малым при соответствующем выборе ε.

Если же выполнено неравенство $m_i + \varepsilon \geq M_i - \varepsilon$, т. е. $M_i \leq m_i + 2\varepsilon$, то сама область D_i содержится в прямоугольнике со сторонами $x_i - x_{i-1}$ и 2ε и при $\varepsilon \to 0$ ее диаметр имеет нулевой предел. В этом случае никакого разбиения D_i делать не будем.

В соответствии с разбиением (1.15) получим равенство

$$\int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy = \int\limits_{g_1(x)}^{m_i+\varepsilon} f(x,y)dy + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)dy + \int\limits_{M_i-\varepsilon}^{g_2(x)} f(x,y)dy.$$

Поэтому

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int\limits_{g_1(x)}^{m_i+\varepsilon} f(x,y)dy +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)dy + \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int\limits_{M_i-\varepsilon}^{g_2(x)} f(x,y)dy.$$

Применяя теперь теорему о среднем к каждому из повторных интегралов, входящих в правую часть этого равенства, получим:

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy = f(P_i^-)\Delta S_i^- + \sum_{j=1}^{n} f(P_{ij})\Delta S^\circ_{ij} + f(P_i^+)\Delta S_i^+, \tag{1.16}$$

где $P_i^- \in D_i^-$, $P_i^+ \in D_i^+$, $P_{ij} \in D^\circ_{ij}$, $\Delta S_i^- = S(D_i^-)$, $\Delta S_i^+ = S(D_i^+)$, $\Delta S^\circ_{ij} = S(D^\circ_{ij})$.

В случае $m_i + \varepsilon \geq M_i - \varepsilon$ теорему о среднем применим просто к повторному интегралу по D_i.

Описанное построение проведем для каждой из областей D_i. В результате получим разбиение области D на правильные относительно оси Ox области, диаметры которых сколь угодно малы при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Обозначим N число полученных частичных областей, а сами эти области далее будем обозначать[1] ω_k, $k = 1, 2, \ldots, N$. Равенства (1.14) и (

[1] Разумеется, каждая область ω_k совпадает с одной из построенных частичных областей D_i^-, D°_{ij}, D_i^+ или, может быть, с областью D_i, если для нее не потребовалось строить разбиение (1.15).

1.16) теперь приводят к соотношению

$$\int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy = \sum_{k=1}^{N} f(P_k)\Delta\omega_k, \tag{1.17}$$

где $\Delta\omega_k = S(\omega_k)$, а P_k – та точка, которая соответствует области ω_k в соответствии с равенством (1.16).

Правая часть равенства (1.17) является интегральной суммой для функции $f(P)$, области D, разбиения $\{\omega_k\}$ и точек P_k. Ясно, что ранг λ_ε разбиения $\{\omega_k\}$ зависит от ε и $\lambda_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Так как функция $f(P)$ интегрируема по D, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{k=1}^{N} f(P_k)\Delta\omega_k = \iint_D f(P)dS\,,$$

и так как левая часть равенства (1.17) не зависит от ε, то, переходя в (1.17) к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим требуемое равенство (1.13). ■

Равенство (1.13) позволяет вычислять двойной интеграл для случая, когда используются декартовы координаты и область D правильна относительно оси Ox.

Для правильной относительно оси Oy области D и непрерывной на D функции $f(P)$ аналогично доказывается равенство:

$$\iint_D f(P)dS = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx. \tag{1.18}$$

Если D правильна одновременно относительно осей Ox и Oy, то из (1.13) и (1.18) следует соотношение

$$\int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx \tag{1.19}$$

для непрерывной функции $f(x,y)$. Равенство (1.19) означает, что при сформулированных условиях в повторном интеграле можно менять порядок интегрирования.

Если же область D не является правильной ни относительно оси Ox, ни относительно оси Oy, то вычисление двойного интеграла непосредственно по теореме 1.12 невозможно. Обычно, однако, удается разбить область D на конечное число правильных областей, пересекающихся между собой разве лишь по своим границам. После такого разбиения двойной интеграл вычисляется на основе свойства аддитивности с применением равенств (1.13) или (1.18) к каждой из полученных правильных областей.

Замечание 1.2. В декартовых координатах двойной интеграл $\iint\limits_D f(P)dS$ обозначается символом $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

1.5. Геометрическая интерпретация двойного интеграла. Вычисление объема

Пусть в $I\!R^3$ введена декартова система координат $Oxyz$ и заданы ограниченная замкнутая область D в плоскости Oxy и непрерывная функция $f(P)$, определенная на D. Предположим, что $f(P) \geq 0$ при $P \in D$. Множество точек, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению[1] $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, является поверхностью в $I\!R^3$ – графиком функции f.

Рассмотрим трехмерную цилиндрическую область

$$\Omega = \big\{(x,y,z)\colon (x,y) \in D,\ 0 \leq z \leq f(x,y)\big\},$$

которая ограничена ″снизу″ плоскостью Oxy, ″сверху″ – поверхностью $z = f(x,y)$ и ″сбоку″ – цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной Oz, и направляющей, которая совпадает с границей области D.

Будем считать известным, что для областей (рис. 1.3) указанного вида определено понятие объема.

[1] Как и раньше, $f(x,y) \equiv f\big(P(x,y)\big)$.

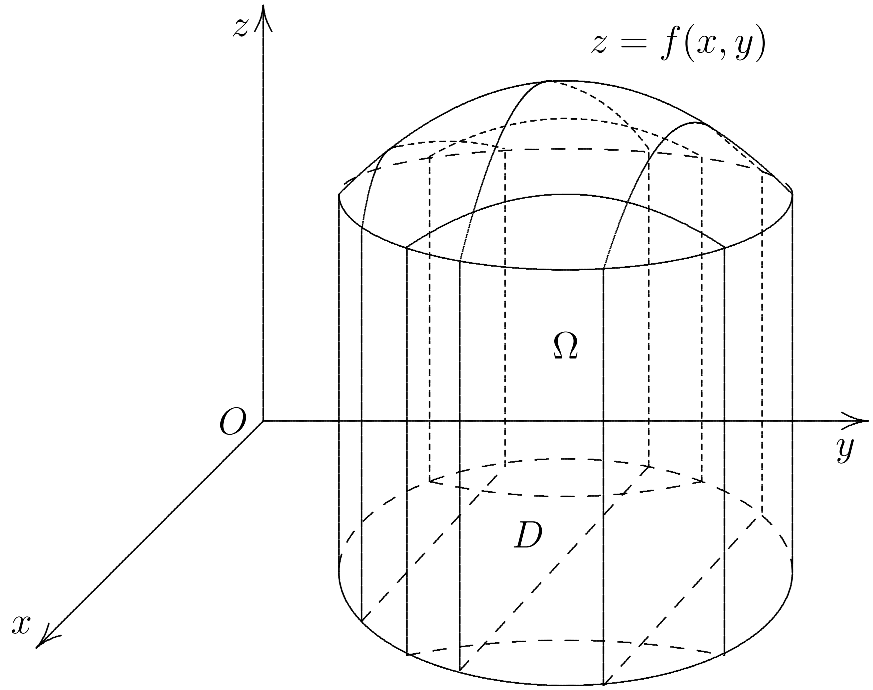

Рис. 1.3

Рассмотрим произвольное разбиение $\{D_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, области D с рангом λ. Выберем точки P_i^- и P_i^+ так, что

$$f(P_i^-) = \inf_{P \in D_i} f(P); \quad f(P_i^+) = \sup_{P \in D_i} f(P).$$

Это возможно, так как функция $f(P)$ непрерывна и, по теореме Вейерштрасса, достигает в каждой частичной области D_i своих наименьшего и наибольшего значений.

Разбиение $\{D_i\}$ порождает разбиение $\{\Omega_i\}$ области Ω на соответствующие цилиндрические области:

$$\Omega_i = \big\{(x, y, z) \colon (x, y) \in D_i,\ 0 \le z \le f(x, y)\big\}.$$

Рассмотрим цилиндр $\Omega_i^- = \big\{(x, y, z) \colon (x, y) \in D_i,\ 0 \le z \le f(P_i^-)\big\}$ высотой $f(P_i^-)$. Его объем $V(\Omega_i^-) = f(P_i^-)\Delta S_i$, где ΔS_i – площадь области D_i, являющейся основанием этого цилиндра. Ясно, что цилиндр Ω_i^- содержится в области Ω_i. Поэтому $V(\Omega_i^-) \le V(\Omega_i)$. Используя свойство аддитивности объема, получим:

$$V(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} V(\Omega_i) \ge \sum_{i=1}^{n} V(\Omega_i^-) = \sum_{i=1}^{n} f(P_i^-)\Delta S_i. \tag{1.20}$$

Аналогично рассмотрим цилиндр $\Omega_i^+ = \big\{(x, y, z) \colon (x, y) \in D_i,$ $0 \le z \le f(P_i^+)\big\}$, содержащий Ω_i и имеющий объем $V(\Omega_i^+) = f(P_i^+)\Delta S_i$.

Получим неравенство:

$$V(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} V(\Omega_i) \le \sum_{i=1}^{n} V(\Omega_i^+) = \sum_{i=1}^{n} f(P_i^+)\Delta S_i. \tag{1.21}$$

Из неравенств (1.20) и (1.21) следует, что для $V(\Omega)$ справедливы соотношения:

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i^-)\Delta S_i \le V(\Omega) \le \sum_{i=1}^{n} f(P_i^+)\Delta S_i. \tag{1.22}$$

Обе суммы, входящие в это соотношение, являются интегральными суммами, отвечающими разбиению $\{D_i\}$ и указанному выбору точек P_i^- и P_i^+. Так как $f(P)$ интегрируема по D, то при $\lambda \to 0$ эти суммы имеют в качестве передела интеграл $\iint\limits_D f(P)dS$. Поэтому из (1.22) следует равенство

$$V(\Omega) = \iint\limits_D f(P)dS, \tag{1.23}$$

позволяющее вычислять объем указанной области Ω.

Замечание 1.3. Часто равенство (1.23) принимают в качестве определения объема $V(\Omega)$ области Ω. При этом рассуждения, приводящие к (1.23), являются мотивировкой такого определения.

1.6. Криволинейные координаты в $\mathbb{R}^2$

Для описания геометрического положения точки на плоскости чаще всего используются обычные декартовы координаты. Однако применение лишь декартовых координат не является обязательным; более того, во многих задачах это не является и целесообразным. Поэтому важно изучить и другие возможные системы координат.

Будем считать, что в $\mathbb{R}^2$ наряду с декартовой системой координат Oxy ведена также и некоторая другая система координат (система криволинейных координат), в которой положение точки P задается парой вещественных чисел (ξ, η), являющихся координатами P в этой системе. Например, в качестве пары (ξ, η) можно рассматривать пару (ρ, φ) полярных координат точки P. Так как каждой точке P взаимно однозначно соответствует пара ее декартовых координат (x, y), а также пара координат (ξ, η), то по каждому набору координат (ξ, η) однозначно находятся числа x и y. Наоборот, по каждому набору координат (x, y) однозначно вычисляются числа ξ и η. Иначе говоря, это означает, что

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta); \\ y = y(\xi, \eta) \end{cases} \tag{1.24}$$

и эта система уравнений однозначно разрешима относительно ξ, η при любых значениях x и y. По теореме об обратной функции, достаточными условиями однозначной разрешимости системы (1.24) являются непрерывная дифференцируемость функций $x(\xi,\eta)$, $y(\xi,\eta)$ и условие $J \neq 0$, где J – якобиан преобразования (1.24), т. е.

$$J = \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}.$$

Будем предполагать эти условия выполненными. Запишем решение системы (1.24) в виде:

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,y); \\ \eta = \eta(x,y). \end{cases} \tag{1.25}$$

Система (1.25), естественно, также однозначно разрешима[1] относительно x, y, так как для нее

$$J' = \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1} \neq 0.$$

Пусть ξ_0 – некоторое фиксированное значение координаты ξ. Тогда уравнение $\xi(x,y) = \xi_0$ определяет множество точек плоскости, имеющих в качестве координаты ξ величину ξ_0. Это множество в случае всех обычно используемых систем координат является некоторой линией на плоскости. Эту линию будем называть координатной линией η, соответствующей значению ξ_0. Аналогично, уравнение $\eta(x,y) = \eta_0$ определяет координатную линию ξ, соответствующую η_0. В каждой точке $P(\xi_0,\eta_0)$ определен касательный вектор $\vec{\tau}_\xi$ к координатной линии ξ. Так как параметрические уравнения этой линии имеют вид:

$$\vec{r} = \left[x(\xi,\eta_0), y(\xi,\eta_0)\right]^T,$$

где роль параметра играет ξ, то $\vec{\tau}_\xi = \left[\dfrac{\partial x(\xi_0,\eta_0)}{\partial \xi}, \dfrac{\partial y(\xi_0,\eta_0)}{\partial \xi}\right]^T$. Поскольку $J \neq 0$, то $\|\vec{\tau}_\xi\| \neq 0$, и определен вектор $\vec{e}_\xi = \dfrac{1}{\|\vec{\tau}_\xi\|}\vec{\tau}_\xi$, называемый координатным ортом координаты ξ. При этом $\|\vec{e}_\xi\| = 1$. Аналогично опре-

[1] И ее решение, конечно, задается формулами (1.24).

делены векторы $\vec{\tau}_\eta = \left[\dfrac{\partial x(\xi_0, \eta_0)}{\partial \eta}, \dfrac{\partial y(\xi_0, \eta_0)}{\partial \eta}\right]^T \neq \vec{0}$ и $\vec{e}_\eta = \dfrac{1}{\|\vec{\tau}_\eta\|}\vec{\tau}_\eta$. Из условия $J \neq 0$ следует, что векторы $\vec{e}_\xi$ и $\vec{e}_\eta$ линейно независимы. Таким образом, в каждой точке P определен базис $\{\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta\}$, соответствующий координатам (ξ, η). Отметим, что этот базис зависит от точки P.

Естественная геометрическая картина координатных линий представлена на рис. 1.4, где $x_0 = x(\xi_0, \eta_0)$, $y_0 = y(\xi_0, \eta_0)$.

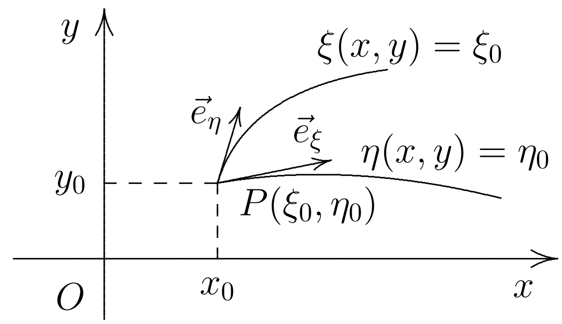

Рис. 1.4

Рассмотрим четыре точки P_1, P_2, P_3, P_4, имеющие криволинейные координаты (ξ_0, η_0), $(\xi_0 + \Delta\xi, \eta_0)$, $(\xi_0, \eta_0 + \Delta\eta)$ и $(\xi_0 + \Delta\xi, \eta_0 + \Delta\eta)$ соответственно (рис. 1.5).

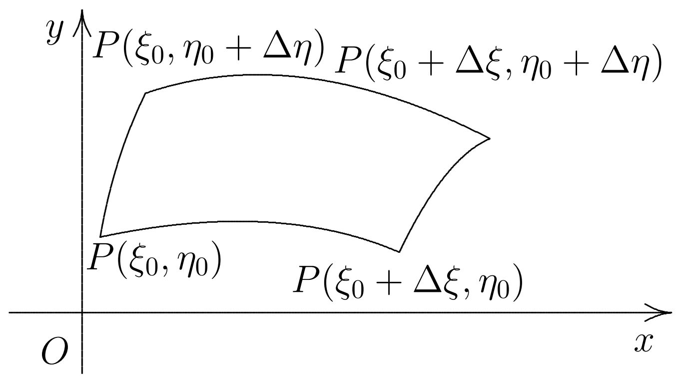

Рис. 1.5

Точки P_1 и P_2 ограничивают часть координатной линии $\eta = \eta_0$, точки P_1 и P_3 – линии $\xi = \xi_0$, точки P_2 и P_4 – линии $\xi = \xi_0 + \Delta\xi$ и точки P_3 и P_4 – часть линии $\eta = \eta_0 + \Delta\eta$. Эти части координатных линий образуют на плоскости фигуру, которую естественно назвать криволинейным параллелограммом. Для дальнейшего важно найти выражения для длин ″сторон″ этого криволинейного параллелограмма и для его площади.

Рассмотрим ″сторону″ P_1P_2. Ее параметрическими уравнениями являются:

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta_0), \\ y = y(\xi, \eta_0), \end{cases} \qquad \xi \in [\xi_0, \xi_0 + \Delta\xi].$$

По формуле для вычисления длины дуги получим длину $|P_1P_2|$ ″стороны″ P_1P_2:

$$|P_1P_2| = \int\limits_{\xi_0}^{\xi_0+\Delta\xi} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2} d\xi.$$

Применяя к полученному определенному интегралу теорему о среднем и учитывая непрерывность функций $\dfrac{\partial x}{\partial \xi}$ и $\dfrac{\partial y}{\partial \eta}$, найдем:

$$|P_1P_2| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2}\,\Bigg|_{\substack{\xi=\xi*\\ \eta=\eta_0}} \Delta\xi =$$

$$= \left[\left(\frac{\partial x(\xi_0,\eta_0)}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y(\xi_0,\eta_0)}{\partial \xi}\right)^2\right]^{1/2} \Delta\xi + o(\Delta\xi).$$

Здесь $\xi^* \in [\xi_0, \xi_0 + \Delta\xi]$ – некоторая средняя точка. Выражение

$$H_\xi = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2\right]^{1/2}$$

называется коэффициентом Ламе координаты ξ. Таким образом,

$$|P_1P_2| = H_\xi(\xi_0,\eta_0)\Delta\xi + o(\Delta\xi).$$

Аналогично вычисляется длина "стороны" P_1P_3:

$$|P_1P_3| = H_\eta(\xi_0,\eta_0)\Delta\eta + o(\Delta\eta),$$

где $H_\eta = \left[\left(\dfrac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2\right]^{1/2}$ – коэффициент Ламе координаты η. Так же получаются и равенства:

$$|P_2P_4| = H_\eta(\xi_0 + \Delta\xi, \eta_0)\Delta\eta + o(\Delta\eta);$$

$$|P_3P_4| = H_\xi(\xi_0, \eta_0 + \Delta\eta)\Delta\xi + o(\Delta\xi).$$

Нахождение площади S криволинейного параллелограмма $P_1P_2P_4P_3$ требует бо́льших вычислений. Естественно ожидать, что площадь этой фигуры при малых $\Delta\xi$ и $\Delta\eta$ будет мало отличаться от площади S обычного параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{P_1P_2}$ и $\overrightarrow{P_1P_3}$. Действительно, можно доказать[1], что при малых значениях $\Delta\xi$ и $\Delta\eta$ справедливо соотношение

$$S = \big[1 + o(1)\big]S, \tag{1.26}$$

причем величина $o(1)$ не зависит от положения точки P_1 внутри заданной ограниченной области. Соотношение (1.26) может быть записано также в виде:

$$S = S + o(\Delta\xi\Delta\eta). \tag{1.27}$$

[1] Здесь мы не будем приводить доказательство, так как оно достаточно громоздко.

Таким образом, для вычисления S достаточно вычислить величину S. Это сделать относительно просто. Обозначим (x_0, y_0) декартовы координаты точки P_1, тогда $x_0 = x(\xi_0, \eta_0)$, $y_0 = y(\xi_0, \eta_0)$. Пусть декартовыми координатами точки P_2 являются x_2 и y_2, значит $x_2 = x(\xi_0 + \Delta\xi, \eta_0)$, $y_2 = y(\xi_0 + \Delta\xi, \eta_0)$. Используя теорему Тейлора, получим:

$$x_2 = x(\xi_0, \eta_0) + \frac{\partial x(\xi_0, \eta_0)}{\partial \xi}\Delta\xi + o(\Delta\xi);\ \ y_2 = y(\xi_0, \eta_0) + \frac{\partial y(\xi_0, \eta_0)}{\partial \xi}\Delta\xi + o(\Delta\xi).$$

Поэтому

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{bmatrix} x_2 - x_0 \\ y_2 - y_0 \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial x(\xi_0, \eta_0)}{\partial \xi},\ \frac{\partial y(\xi_0, \eta_0)}{\partial \xi}\right]^T \Delta\xi + \vec{o}(\Delta\xi).$$

Аналогично,

$$\overrightarrow{P_1P_3} = \left[\frac{\partial x(\xi_0, \eta_0)}{\partial \eta},\ \frac{\partial y(\xi_0, \eta_0)}{\partial \eta}\right]^T \Delta\eta + \vec{o}(\Delta\eta).$$

Применяя теперь формулу $S = \|[\vec{a}, \vec{b}]\|$ для площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, получим:

$$S = \|[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}]\| =$$
$$= \left\|\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\Delta\xi + o(\Delta\xi)\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\Delta\xi + o(\Delta\xi)\right)\vec{j}, \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\Delta\eta + o(\Delta\eta)\right)\vec{i} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\Delta\eta + o(\Delta\eta)\right)\vec{j}\right]\right\| =$$
$$= \left\|\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}\Delta\xi\Delta\eta - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\Delta\xi\Delta\eta + o(\Delta\xi\Delta\eta)\right)\vec{k}\right\| =$$
$$= \left|\frac{\partial x(\xi_0, \eta_0)}{\partial \xi}\frac{\partial y(\xi_0, \eta_0)}{\partial \eta} - \frac{\partial x(\xi_0, \eta_0)}{\partial \eta}\frac{\partial y(\xi_0, \eta_0)}{\partial \xi}\right| |\Delta\xi|\ |\Delta\eta| + o(\Delta\xi\Delta\eta). \quad (1.28)$$

Из соотношений (1.27) и (1.28) следует равенство:

$$S = |J(\xi_0, \eta_0)|\ |\Delta\xi|\ |\Delta\eta| + o(\Delta\xi\Delta\eta), \quad (1.29)$$

где J – якобиан преобразования (1.24).

Криволинейные координаты часто удобно рассматривать и с иной точки зрения. Рассмотрим две плоскости Π и Π', на которых введены декартовы системы координат Oxy и $O'\xi\eta$. Тогда равенства (1.24) определяют взаимно однозначное соответствие между точками плоскости Π и некоторым множеством точек плоскости Π'. При таком соответствии области D в плоскости Π отвечает некоторая область D' в Π'. Криволинейному параллелограмму $P_1P_2P_4P_3$ соответствует прямоугольник $P_1'P_2'P_4'P_3' = \big\{(\xi, \eta)\colon \xi_0 \leq$

$\xi \le \xi_0 + \Delta\xi,\ \eta_0 \le \eta \le \eta_0 + \Delta\eta\}$, площадь которого равна $|\Delta\xi\Delta\eta|$. Поэтому равенство (1.29) может быть также записано в виде:

$$S(P_1P_2P_4P_3) = |J(\xi_0,\eta_0)|S(P_1'P_2'P_4'P_4') + o(\Delta\xi\Delta\eta).$$

Таким образом, $|J(\xi_0,\eta_0)|$ может рассматриваться как коэффициент изменения площади при отображении (1.24).

Важным частным случаем криволинейных координат являются криволинейные ортогональные координаты. Криволинейные координаты называются ортогональными, если в каждой точке P координатный базис $\{\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta\}$ является ортогональным, т. е. если при всех ξ и η выполняется равенство:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}\,\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi}\,\frac{\partial y}{\partial \eta} = 0. \tag{1.30}$$

В случае ортогональных координат

$$J^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 - 2\frac{\partial x}{\partial \xi}\,\frac{\partial x}{\partial \eta}\,\frac{\partial y}{\partial \xi}\,\frac{\partial y}{\partial \eta} + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 =$$

$$= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2\right] - \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 -$$

$$-2\frac{\partial x}{\partial \xi}\,\frac{\partial x}{\partial \eta}\,\frac{\partial y}{\partial \xi}\,\frac{\partial y}{\partial \eta} - \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 =$$

$$= H_\xi^2 H_\eta^2 - \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\,\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi}\,\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 = H_\xi^2 H_\eta^2,$$

так как справедливо равенство (1.30). Таким образом, для ортогональных координат $|J| = H_\xi H_\eta$ и

$$S = H_\xi H_\eta |\Delta\xi|\ |\Delta\eta| + o(\Delta\xi\Delta\eta). \tag{1.31}$$

Равенство (1.31), впрочем, следует и из того факта, что для ортогональных координат векторы $\overrightarrow{P_1P_2}$ и $\overrightarrow{P_1P_3}$ "почти ортогональны".

Примером криволинейных координат являются полярные координаты (ρ,φ) точек на плоскости. Если декартова и полярная системы координат согласованы друг с другом стандартным образом, то декартовы и полярные координаты связаны равенствами:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi; \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $\dfrac{\partial x}{\partial \rho} = \cos\varphi$, $\dfrac{\partial x}{\partial \varphi} = -\rho\sin\varphi$, $\dfrac{\partial y}{\partial \rho} = \sin\varphi$, $\dfrac{\partial y}{\partial \varphi} = \rho\cos\varphi$. Таким образом,

$$\frac{\partial x}{\partial \rho}\,\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial \rho}\,\frac{\partial y}{\partial \varphi} = 0$$

и полярные координаты являются ортогональными. Для них

$$H_\rho = 1, \quad H_\varphi = \rho, \quad J = H_\rho H_\varphi = \rho.$$

Отметим, что в случае полярных координат полюс является особой точкой. В этой точке $J = 0$. Это качественно отличает полярные координаты от декартовых.

1.7. Вычисление двойного интеграла в криволинейных координатах

В разд. 1.4 получена формула для вычисления двойного интеграла в том случае, когда область и точки области описываются декартовыми координатами. Пусть теперь на плоскости вместе с декартовой системой координат Oxy заданы криволинейные координаты (ξ, η), связанные с декартовыми координатами соотношениями:

$$\begin{cases} x = x(\xi,\eta); \\ y = y(\xi,\eta); \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi = \xi(x,y); \\ \eta = \eta(x,y). \end{cases}$$

Рассмотрим вопрос о вычислении двойного интеграла в координатах (ξ, η). Пусть область Π описывается неравенствами $\alpha \le \xi(x,y) \le \beta$, $\gamma \le \eta(x,y) \le \delta$, где α, β, γ, δ – заданные постоянные. Выберем точки $\xi_i \in [\alpha, \beta]$, $i = 0, 1, \ldots, n$, так, что $\alpha = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_n = \beta$ и точки $\eta_j \in [\gamma, \delta]$, $j = 0, 1, \ldots, m$, так, что $\gamma = \eta_0 < \eta_1 < \ldots < \eta_m = \delta$, за-

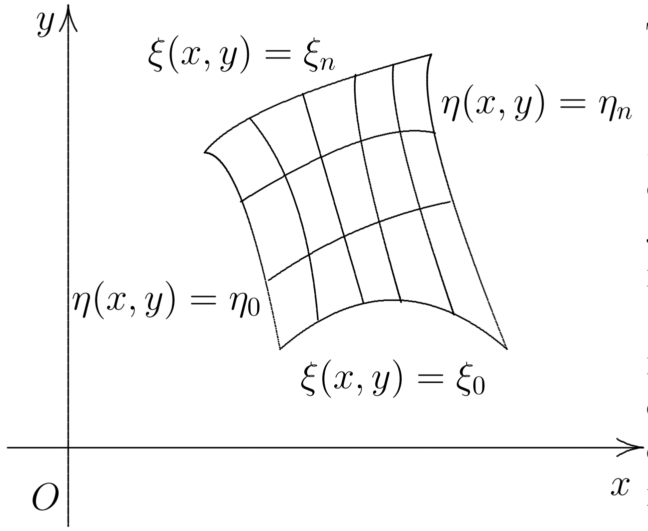

Рис. 1.6

дающие разбиения отрезков $[\alpha, \beta]$ и $[\gamma, \delta]$ соответственно. Обозначим $\Delta\xi_i = \xi_i - \xi_{i-1}$ и $\Delta\eta_j = \eta_j - \eta_{j-1}$. Точкам ξ_i соответствуют координатные линии $\xi = \xi_i$, а точкам η_j – координатные линии $\eta = \eta_j$. Совокупность этих координатных линий определяет разбиение области Π на частичные области Π_{ij}, координаты точек которых удовлетворяют неравенствам $\xi_{i-1} \leq \xi(x,y) \leq \xi_i$, $\eta_{j-1} \leq \eta(x,y) \leq \eta_j$ (рис. 1.6).

Пусть теперь на области Π задана кусочно-непрерывная функция $f(P)$, $P \in \Pi$. Будем по-прежнему использовать обозначение $f(x,y) == f\big(P(x,y)\big)$. Выберем в каждой из частичных областей Π_{ij} точку P_{ij}^* и обозначим (ξ_i^*, η_j^*) ее криволинейные координаты. Ясно, что $\xi_i^* \in [\xi_{i-1}, \xi_i]$, $\eta_j^* \in [\eta_{j-1}, \eta_j]$. Для функции $f(P)$, разбиения $\{\Pi_{ij}\}$ и точек P_{ij}^* для интеграла $\iint\limits_D f(P)dS = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$ запишем интегральную сумму:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(P_{ij}^*) \Delta S_{ij},$$

где $\Delta S_{ij} = S(\Pi_{ij})$.

Декартовыми координатами точки P_{ij}^* являются (x_i^*, y_j^*), где $x_i^* = x(\xi_i^*, \eta_j^*)$, $y_j^* = y(\xi_i^*, \eta_j^*)$. Поэтому

$$f(P_{ij}^*) = f(x_i^*, y_j^*) = f\big(x(\xi_i^*, \eta_j^*), y(\xi_i^*, \eta_j^*)\big). \tag{1.32}$$

Каждая из областей Π_{ij} – криволинейный параллелограмм, рассмотренный в разд. 1.6. Для площади $\Delta S_{ij} = S(\Pi_{ij})$ при $\Delta\xi_i \to 0$, $\Delta\eta_j \to 0$ справедливо равенство

$$\Delta S_{ij} = \big|J(\xi_i, \eta_j)\big| \Delta\xi_i \Delta\eta_j \big(1 + o(1)\big),$$

в котором величину $o(1)$ можно считать не зависящей от i и j. Будем считать $J(\xi, \eta)$ непрерывной, а значит, и равномерно непрерывной на Π функцией. Поэтому $J(\xi_i, \eta_j) = J(\xi_i^*, \eta_J^*)\big(1 + o(1)\big)$, где $o(1)$ не зависит от i и j. Следовательно,

$$\Delta S_{ij} = \big|J(\xi_i^*, \eta_j^*)\big| \Delta\xi_i \Delta\eta_j \big(1 + o(1)\big). \tag{1.33}$$

Из равенств (1.32) и (1.33) для интегральной суммы σ следует соотношение

$$\sigma = \sigma'\big(1 + o(1)\big), \tag{1.34}$$

где $\sigma' = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} f\big(x(\xi_i^*, \eta_j^*), y(\xi_i^*, \eta_j^*)\big)\big|J(\xi_i^*, \eta_j^*)\big|\Delta\xi_i\Delta\eta_j$. Если рассмотреть плоскость с декартовыми координатами $O'\xi\eta$, то сумма σ' является интегральной суммой для области $\Pi' = \big\{(\xi,\eta)\colon\ \alpha \le \xi \le \beta,\ \gamma \le \eta \le \delta\big\}$ на этой плоскости и функции $f\big(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\big)\big|J(\xi,\eta)\big|$, соответствующей разбиению этой области прямыми, параллельными координатным осям $O'\xi$ и $O'\eta$. При $\Delta\xi_i \to 0$ и $\Delta\eta_j \to 0$ эта интегральная сумма имеет пределом двойной интеграл

$$\iint\limits_{\Pi'} f\big(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\big)\big|J(\xi,\eta)\big|d\xi d\eta.$$

Отметим, что для этого интеграла использовано обозначение, подчеркивающее, что ξ и η теперь играют роль декартовых координат (см. замечание 1.2).

С другой стороны, при $\Delta\xi_i \to 0$, $\Delta\eta_j \to 0$ ранг разбиения $\{\Pi_{ij}\}$ области Π (в плоскости с координатами Oxy) имеет нулевой предел, так как длины сторон криволинейного параллелограмма Π_{ij} пропорциональны $\Delta\xi_i$ и $\Delta\eta_j$ (см. разд. 1.6). Поэтому при $\Delta\xi_i \to 0$, $\Delta\eta_j \to 0$ интегральная сумма σ имеет пределом интеграл

$$\iint\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy,$$

и из (1.34) следует, что

$$\iint\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Pi'} f\big(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\big)\big|J(\xi,\eta)\big|d\xi d\eta \tag{1.35}$$

для рассматриваемой области Π (т. е. когда Π' – прямоугольник в плоскости с координатами $O'\xi\eta$).

Покажем, что равенство (1.35) справедливо и для случая произвольной области D с кусочно-гладкой границей.

Итак, пусть D – ограниченная область в плоскости Oxy с кусочно-гладкой границей, а D' – соответствующая ей ограниченная область в плоскости $O'\xi\eta$. Так как D' – ограниченная область, то она содержится в некотором прямоугольнике[1] Π'. Обозначим Π область плоскости Oxy, соответствующую Π'. Ясно, что $D \subset \Pi$. Продолжим функцию $f(P)$ нулем на

[1] Отметим, что для обычно используемых систем координат расширение D' для прямоугольника Π' всегда возможно.

область П, т. е. примем

$$\tilde{f}(P) = \begin{cases} f(P), & P \in D; \\ 0, & P \in \Pi \setminus D. \end{cases}$$

Применим формулу (1.35) к функции $\tilde{f}(P)$ и области П:

$$\iint\limits_{\Pi} \tilde{f}(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Pi'} \tilde{f}\big(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\big)\big|J(\xi,\eta)\big|d\xi d\eta.$$

В силу аддитивности двойного интеграла

$$\iint\limits_{\Pi} \tilde{f}(x,y)dxdy = \iint\limits_{D} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{\Pi\setminus D} \tilde{f}(x,y)dxdy = \iint\limits_{D} f(x,y)dxdy.$$

Аналогично, двойной интеграл по Π' совпадает с соответствующим интегралом по D'. Поэтому

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f\big(x(\xi,\eta)y(\xi,\eta)\big)\big|J(\xi,\eta)\big|d\xi d\eta \qquad (1.36)$$

для любой области D с кусочно-гладкой границей.

Так как в (1.36) в интеграле по области D' координаты ξ и η играют роль декартовых координат, то этот интеграл может быть вычислен (см. разд. 1.4) как соответствующий ему повторный интеграл. Таким образом, равенство (1.36) дает новые возможности вычисления двойного интеграла. Формулу (1.36) называют формулой преобразования двойного интеграла при замене переменных.

В частности, для полярных координат $|J| = \rho$ равенство (1.36) имеет вид:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f\big(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\big)\rho d\rho d\varphi. \qquad (1.37)$$

Пример 1. Вычислим несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx$.

Обозначим $I_R = \int\limits_0^R e^{-x^2}dx$, тогда

$$I_R^2 = \left(\int\limits_0^R e^{-x^2}dx\right)\left(\int\limits_0^R e^{-y^2}dy\right) = \int\limits_0^R e^{-x^2}\left(\int\limits_0^R e^{-y^2}dy\right)dx = \int\limits_0^R dx\int\limits_0^R e^{-x^2-y^2}dy.$$

Таким образом, I_R^2 является повторным интегралом. В соответствии с равенством (1.13)

$$I_R^2 = \iint\limits_{\Pi} e^{-x^2-y^2} dxdy,$$

где $\Pi = \big\{(x,y)\colon\, 0 \le x \le R,\ 0 \le y \le R\big\}$ – квадрат в плоскости Oxy. Обозначим $K_R = \big\{(x,y)\colon\, x \ge 0,\ y \ge 0,\ x^2+y^2 \le R^2\big\}$ четверть круга радиуса R с центром в начале координат. Так как $K_R \subset \Pi$, то

$$I_R^2 \ge \iint\limits_{K_R} e^{-x^2-y^2} dx\, dy.$$

С другой стороны, область $K_{\sqrt{2}R}$ содержит Π, и потому

$$I_R^2 \le \iint\limits_{K_{\sqrt{2}R}} e^{-x^2-y^2} dx\, dy.$$

Для вычисления интеграла по K_R перейдем к полярным координатам (ρ,φ). Соответствующая K_R область K_R' в плоскости $O'\rho\varphi$ является прямоугольником: $K_R' = \Big\{(\rho,\varphi)\colon\, 0 \le \rho \le R,\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}\Big\}$. Поэтому, в соответствии с формулой (1.37)

$$\iint\limits_{K_R} e^{-x^2-y^2} dx\, dy = \iint\limits_{K_R'} e^{-\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin^2\varphi} \rho d\rho\, d\varphi = \iint\limits_{K_R'} e^{-\rho^2} \rho d\rho\, d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{R} \rho e^{-\rho^2} d\rho = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\big(1-e^{-R^2}\big) d\varphi = \frac{\pi}{4}\big(1-e^{-R^2}\big).$$

Таким образом,

$$\frac{\pi}{4}\big(1-e^{-R^2}\big) \le I_R^2 \le \frac{\pi}{4}\big(1-e^{-2R^2}\big). \tag{1.38}$$

Переходя в неравенствах (1.38) к пределу при $R \to +\infty$, найдем, что $\lim\limits_{R\to\infty} I_R^2 = \dfrac{\pi}{4}$. Поэтому

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Пример 2. Вычислим площадь эллипса.

Уравнение эллипса в декартовых координатах имеет вид: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Поэтому его площадь совпадает с интегралом $\iint\limits_D dxdy$, где $D = \left\{(x, y)\colon \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1\right\}$.

Для вычисления этого интеграла перейдем к так называемым обобщенным полярным координатам (ρ, φ), связанным с декартовыми координатами соотношениями $x = a\rho\cos\varphi$, $y = b\rho\sin\varphi$, $a > 0$, $b > 0$. Легко вычислить, что для этих координат $J = ab\rho$. Область D' в координатах $O'\rho\varphi$ является прямоугольником: $D' = \left\{(\rho, \varphi)\colon\ 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\right\}$. Поэтому

$$\iint\limits_D dx\,dy = \iint\limits_{D'} ab\rho d\rho\,d\varphi = ab\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho d\rho = ab\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2} = \pi ab.$$

1.8. Площадь поверхности

Площадь простейших поверхностей в $\mathbb{R}^3$ вычисляется в школьном курсе математики. Проще всего определяется и вычисляется площадь цилиндрической и конической поверхностей, так как для них возможна развертка на плоскость. Для более сложных поверхностей площадь определить сложнее.

Пусть в $\mathbb{R}^3$ заданы декартова система координат $Oxyz$ и поверхность $\Sigma = \left\{(x, y, z)\colon (x, y) \in D_{xy},\ z = f(x, y)\right\}$, где D_{xy} – ограниченная область на плоскости Oxy с кусочно-гладкой границей, а функция $f(x, y)$ – непрерывно дифференцируема на D_{xy}. Таким образом, Σ является частью графика функции f, лежащей над D_{xy}.

Рассмотрим разбиение $\{D_i\}$ области D_{xy} с рангом λ и возьмем точки $P_i \in D_i$. Так как функция f дифференцируема, то поверхность Σ имеет в точке P_i касательную плоскость Π_i. Цилиндрическая поверхность с образующей, параллельной Oz, и направляющей, совпадающей с границей D_i, вырезает на плоскости Π_i некоторую область σ_i, площадь которой обозначим $\Delta\sigma_i$.

Рассмотрим сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i$. Эта сумма является площадью кусочно-линейной поверхности Σ', являющейся объединением рассмотренных частей плоскостей, касательных к Σ. Естественно считать рассматриваемую сумму приближением к площади поверхности Σ. Поэтому разумно принять следующее определение.

Определение 1.3. *Если существует предел*

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i,$$

то он называется площадью поверхности Σ.

Замечание 1.4. Отметим, что кусочно-линейная поверхность Σ', площадью которой является $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i$, является графиком разрывной функции. Иначе говоря, Σ' – не ″сплошная поверхность″.

Покажем, что вычисление площади поверхности сводится к вычислению некоторого двойного интеграла. Область σ_i лежит в плоскости Π_i и при ортогональном проектировании на Oxy переходит в область D_i. Обозначим α_i угол между плоскостями Π_i и Oxy. Угол α_i совпадает с углом между нормалью $\vec{N}_i$ к плоскости Π_i и осью Oz, а нормаль $\vec{N}_i$ является нормалью к поверхности Σ в точке P_i. Поэтому α_i – угол между нормалью к Σ в точке P_i и Oz.

Площади областей σ_i и D_i связаны равенством

$$\Delta\sigma_i |\cos\alpha_i| = S(D_i). \tag{1.39}$$

Это соотношение очевидно, если D_i и σ_i являются прямоугольниками. В общем случае равенство (1.39) доказывается следующим образом. Рассмотрим две плоскости $\Pi^{(1)}$ и $\Pi^{(2)}$ с углом α между ними и введенными на них декартовыми системами координат Ox_1y_2 и Ox_2y_2 так, как указано на рис. 1.7.

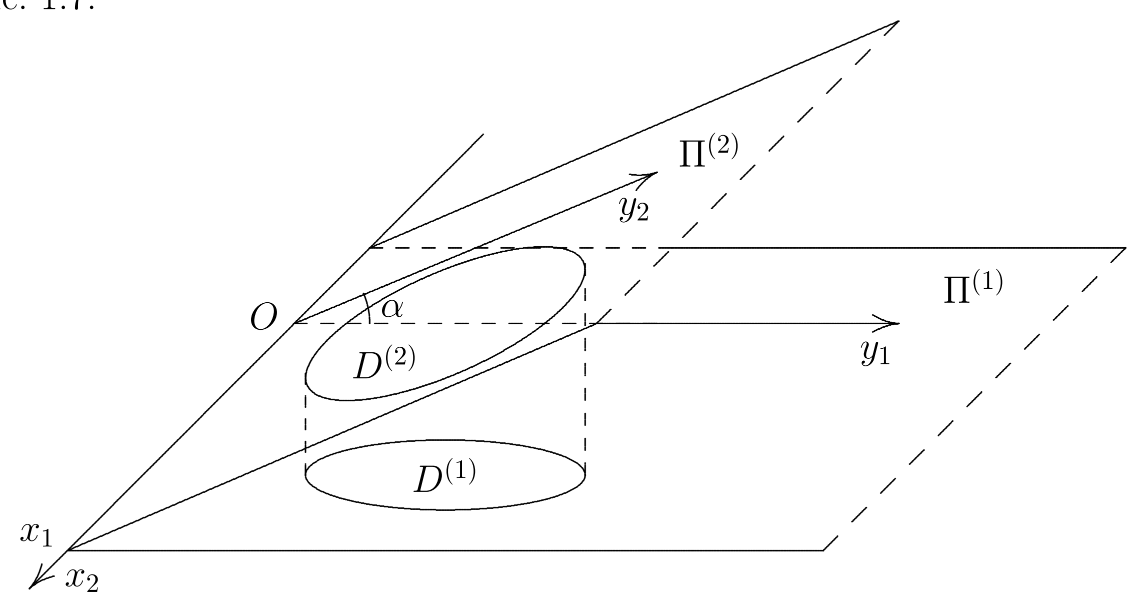

Рис. 1.7

Тогда

$$x_2 = x_1; \quad y_2 = \frac{y_1}{|\cos\alpha|}. \tag{1.40}$$

Далее,

$$S(D^{(2)}) = \iint\limits_{D^{(2)}} dx_2 dy_2 = \iint\limits_{D^{(1)}} |J| dx_1 dy_1 = \frac{1}{|\cos\alpha|} \iint\limits_{D^{(1)}} dx_1 dy_1 = \frac{S(D^{(1)})}{|\cos\alpha|},$$

так как якобиан J преобразования координат (1.40) равен $1/\cos\alpha$.

Таким образом,

$$S = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|\cos\alpha_i|} \Delta S_i,$$

где $\Delta S_i = S(D_i)$ и, по определению двойного интеграла,

$$S = \iint\limits_{D_{xy}} \frac{dx\,dy}{|\cos\alpha|}, \tag{1.41}$$

где α – угол между нормалью $\vec{N}$ к Σ и осью Oz.

Вычислим $\cos\alpha$. В качестве нормали $\vec{N}$ можно взять вектор $\vec{N} = \left[-\dfrac{\partial f}{\partial x}, -\dfrac{\partial f}{\partial y}, 1 \right]^T$. Тогда

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{N}, \vec{k})}{\|\vec{N}\|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}}\,.$$

Поэтому

$$S = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}\; dx\,dy. \tag{1.42}$$

Равенство (1.42) дает способ вычисления площади поверхности Σ, т. е. поверхности, являющейся графиком функции $z = f(x, y)$. Такую поверхность любая прямая, параллельная оси Oz, пересекает не более одного раза. Если же поверхность Σ такова, что каждая прямая, параллельная оси Oy, пересекает ее не более одного раза, то Σ является частью графика функции $y = g(x, z)$. В этом случае справедлива аналогичная (1.42) формула

$$S = \iint\limits_{D_{xz}} \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2 + 1}\; dx\,dz, \tag{1.43}$$

где D_{xz} – область в плоскости Oxz, являющаяся ортогональной проекцией Σ на эту плоскость.

Наконец, если $\Sigma = \big\{(x,y,z)\colon (x,z) \in D_{yz},\ x = h(y,z)\big\}$, то

$$S = \iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2 + 1}\, dy\, dz. \tag{1.44}$$

В общем случае поверхность Σ обычно возможно разбить на конечное число таких частей, что для вычисления их площадей можно применить одну из формул (1.42) – (1.44).

Рассмотрим теперь вопрос о вычислении площади поверхности Σ, заданной параметрически. Пусть параметрические уравнения Σ имеют вид:

$$\vec{r} = \vec{r}(\xi,\eta) = \left[x(\xi,\eta), y(\xi,\eta), z(\xi,\eta)\right]^T, \quad (\xi,\eta) \in D_{\xi\eta}. \tag{1.45}$$

Для гладкой поверхности выполнено условие $[\vec{r}\,'_\xi, \vec{r}\,'_\eta] \neq \vec{0}$. В этом случае, в окрестности каждой своей точки поверхность Σ является графиком либо функции $z = f(x,y)$, либо функции $y = g(x,z)$, либо функции $x = h(y,z)$, и вся поверхность Σ может быть разбита на конечное число таких окрестностей. Рассмотрим, например, такую часть $\Sigma^{(1)}$, в которой Σ является графиком функции $z = f(x,y)$. Пусть ей соответствует часть $D^{(1)}_{\xi\eta}$ области $D_{\xi\eta}$. Обозначим $D^{(1)}_{xy}$ ортогональную проекцию $\Sigma^{(1)}$ на плоскость Oxy. В соответствии с (1.41) площадь $S^{(1)}$ поверхности $\Sigma^{(1)}$ вычисляется по формуле

$$S^{(1)} = \iint\limits_{D^{(1)}_{xy}} \frac{dx\, dy}{|\cos\alpha(x,y)|}.$$

В этом двойном интеграле перейдем от декартовых координат к координатам (ξ,η), т. е. примем

$$\begin{cases} x = x(\xi,\eta); \\ y = y(\xi,\eta). \end{cases} \tag{1.46}$$

Тогда

$$S^{(1)} = \iint\limits_{D^{(1)}_{\xi\eta}} \frac{|J(\xi,\eta)| d\xi\, d\eta}{\left|\cos\alpha\big(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\big)\right|},$$

где J – якобиан преобразования (1.46).

Нормалью к $\Sigma^{(1)}$ является вектор

$$[\vec{r}\,'_\xi, \vec{r}\,'_\eta] = \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\,\frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta}\,\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\,\frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \eta}\,\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\,\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\,\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\vec{k},$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – орты декартовой системы координат. Поэтому

$$|\cos\alpha| = \frac{\left|(\vec{N},\vec{k})\right|}{\|\vec{N}\|} = \frac{1}{\|\vec{N}\|}\left|\frac{\partial x}{\partial\xi}\,\frac{\partial y}{\partial\eta} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\,\frac{\partial y}{\partial\xi}\right| = \frac{|J|}{\|\vec{N}\|},$$

так как $J = \dfrac{\partial x}{\partial\xi}\,\dfrac{\partial y}{\partial\eta} - \dfrac{\partial x}{\partial\eta}\,\dfrac{\partial y}{\partial\xi}$. Таким образом,

$$S^{(1)} = \iint\limits_{D^{(1)}_{\xi\eta}} \|\vec{N}\| d\xi\, d\eta = \iint\limits_{D^{(1)}_{\xi\eta}} \left\|[\vec{r}'_\xi, \vec{r}'_\eta]\right\| d\xi\, d\eta.$$

Аналогично вычисляются площади и остальных частей поверхности Σ. Суммируя площади всех частей, получим формулу для вычисления площади поверхности, заданной соотношениями (1.45):

$$S = \iint\limits_{D_{\xi\eta}} \left\|[\vec{r}'_\xi, \vec{r}'_\eta]\right\| d\xi\, d\eta. \tag{1.47}$$

2. Тройной интеграл

2.1. Определение тройного интеграла и его основные свойства

Определение тройного интеграла и его свойства аналогичны определению и свойствам двойного интеграла.

Рассмотрим ограниченную замкнутую область $\Omega \subset I\!R^3$ с кусочно-гладкой границей. Для такой области определено понятие объема. Как и в случае плоскости, назовем $d = \sup\limits_{P',\,P''\in X} \rho(P', P'')$ диаметром множества $X \subset I\!R^3$; $\rho(P', P'')$ – расстояние между точками P' и P''.

Пусть на области Ω задана вещественная функция $f(P)$, $P \in \Omega$.

Рассмотрим произвольное разбиение $\{\omega_i\}$ области Ω на частичные области ω_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, с кусочно-гладккими границами, которые могут пересекаться между собой разве лишь по своим границам. Назовем рангом разбиения число $\lambda = \max\limits_i d(\omega_i)$. Выберем произвольные точки $P_i \in \Omega_i$ и рассмотрим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i, \tag{2.1}$$

где $\Delta V_i = V(\omega_i)$ – объем области ω_i. Сумма (2.1) называется интегральной суммой для функции $f(P)$, области Ω, разбиения $\{\omega_i\}$ и точек P_i.

Определение 2.1. *Число I называется тройным интегралом функции $f(P)$ по области Ω, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого разбиения $\{\omega_i\}$, ранг которого удовлетворяет условию $\lambda < \sigma$, и любых точек $P_j \in \Omega_i$ справедливо неравенство:*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i - I \right| < \varepsilon.$$

Функция $f(P)$ называется в этом случае интегрируемой по области ω, а для ее интеграла используется обозначение

$$I = \iiint\limits_{\Omega} f(P)dV.$$

Как и для двойного интеграла, необходимым условием интегрируемости функции $f(P)$ является ее ограниченность на области Ω, а достаточным условием – ее кусочная непрерывность на Ω.

Перечислим основные свойства тройного интеграла, доказательства которых аналогичны доказательствам, приведенным в разд. 1.2 для двойного интеграла:

1) $\iiint\limits_{\Omega} dV = V(\Omega)$;

2) если $\alpha_1 \in I\!R$, $\alpha_2 \in I\!R$ и $f_1(P)$, $f_2(P)$ интегрируемы по Ω, то функция $\alpha_1 f_1(P) + \alpha_2 f_2(P)$ тоже интегрируема по Ω и

$$\iiint\limits_{\Omega} \big[\alpha_1 f_1(P) + \alpha_2 f_2(P)\big] dV = \alpha_1 \iiint\limits_{\Omega} f_1(P)dV + \alpha_2 \iiint\limits_{\Omega} f_2(P)dV;$$

3) если $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ и области Ω_1 и Ω_2 пересекаются разве лишь по своим границам, то

$$\iiint\limits_{\Omega} f(P)dV = \iiint\limits_{\Omega_1} f(P)dV + \iiint\limits_{\Omega_2} f(P)dV,$$

при этом, если функция $f(P)$ интегрируема по Ω, то она интегрируема и по областям Ω_1, Ω_2 и наоборот, если $f(P)$ интегрируема по каждой из областей Ω_1 и Ω_2, то она интегрируема и по области Ω;

4) если $f_1(P) \le f_2(P)$ для всех точек $P \in \Omega$ и функции $f_1(P)$, $f_2(P)$ интегрируемы по Ω, то

$$\iiint\limits_{\Omega} f_1(P)dV \le \iiint\limits_{\Omega} f_2(P)dV;$$

5) если $f(P)$ интегрируема по Ω, то функция $|f(P)|$ также интегрируема по Ω и

$$\left|\iiint\limits_{\Omega} f(P)dV\right| \le \iiint\limits_{\Omega} |f(P)|dV;$$

6) для интегрируемой по Ω функции $f(P)$ справедливы неравенства

$$mV(\Omega) \le \iiint\limits_{\Omega} f(P)dV \le MV(\Omega),$$

где $m = \inf\limits_{P\in\Omega} f(P)$, $M = \sup\limits_{P\in\Omega} f(P)$;

7) если функция $f(P)$ непрерывна в области Ω (замкнутой), то существует такая точка $P^* \in \Omega$, что

$$\iiint\limits_{\Omega} f(P)dV = f(P^*)V(\Omega).$$

2.2. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах

Пусть в $\mathbb{R}^3$ введена декартова система координат $Oxyz$ и на области Ω задана функция $f(P)$. Как и в случае двойного интеграла, будем использовать обозначение $f(x,y,z) \equiv f\big(P(x,y,z)\big)$.

Рассмотрим правильную относительно плоскости Oxy область Ω, т. е. область, декартовы координаты (x,y,z) точек которой удовлетворяют соотношениям: $(x,y) \in D_{xy}$, $g_1(x,y) \le z \le g_2(x,y)$, где D_{xy} – замкнутая ограниченная область с кусочно-гладкой границей в плоскости Oxy а $g_1(x,y)$ и $g_2(x,y)$ – непрерывные на D_{xy} функции.

Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна на Ω, то функция

$$F(x,y) = \int\limits_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

будет непрерывной в области D_{xy} (это доказывается так же, как в случае двойного интеграла) и существует интеграл

$$\iint\limits_{D_{xy}} dx\,dy \int\limits_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz,$$

называемый повторным интегралом функции $f(x, y, z)$. При этом справедливо равенство

$$\iiint\limits_{\Omega} f(P)dV \equiv \iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dx\,dy\,dz = \iint\limits_{D_{xy}} dx\,dy \int\limits_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)dz, \tag{2.2}$$

которое тоже доказывается аналогично случаю двойного интеграла. Если область D_{xy} (плоская) является правильной относительно оси Ox, т. е. $D_{xy} = \big\{(x, y)\colon x_1 \le x \le x_2,\ h_1(x) \le y \le h_2(x)\big\}$, то двойной интеграл по D_{xy}, в свою очередь, сводится к повторному интегралу и, следовательно,

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dx\,dy\,dz = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{h_1(x)}^{h_2(x)} dy \int\limits_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)dx. \tag{2.3}$$

Для других возможных случаев справедливы формулы, аналогичные равенствам (2.2) и (2.3). В частности:

1) если Ω правильна относительно плоскости Oxy, а D_{xy} – относительно оси Oy, т. е. $D_{xy} = \big\{y_1 \le y \le y_2,\ p_1(y) \le x \le p_2(y)\big\}$, то

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dx\,dy\,dz = \int\limits_{y_1}^{y_2} dy \int\limits_{p_1(y)}^{p_2(y)} dx \int\limits_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)dz;$$

2) если Ω правильна относительно плоскости Oyz, (рис. 2.1) т. е. $\Omega = \big\{(x, y, z)\colon (y, z) \in D_{yz},\ g_1(y, z) \le x \le g_2(y, z)\big\}$,

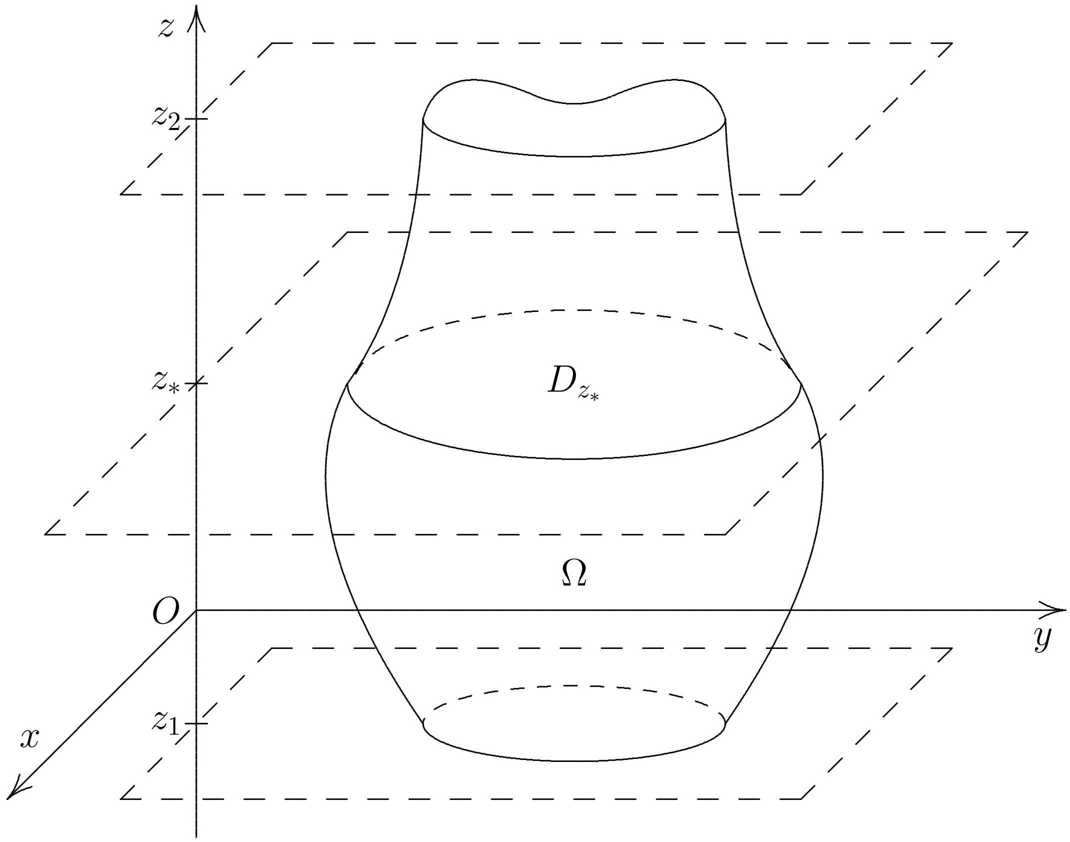

Рис. 2.1

а $D_{yz} = \big\{ z_1 \leq z \leq z_2,\ h_1(z) \leq y \leq h_2(z) \big\}$ – правильна относительно Oz, то

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dx\,dy\,dz = \iint\limits_{D_{yz}} dy\,dz \int\limits_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dx =$$

$$= \int\limits_{z_1}^{z_2} dz \int\limits_{h_1(z)}^{h_2(z)} dy \int\limits_{g_1(y,z)}^{g_2(y,z)} f(x,y,z)dx. \tag{2.4}$$

Рассмотрим подробнее последний случай при $f(x,y,z) \equiv 1$. Если $z_* \in [z_1, z_2]$, то горизонтальная плоскость $z = z_*$ пересекает область Ω по некоторой области D_{z_*}, лежащей в этой плоскости. Координаты точек D_{z_*} описываются соотношениями: $z = z_*,\ h_1(z_*) \leq y \leq h_2(z_*),\ g_1(y,z_*) \leq x \leq g_2(y,z_*)$. Значит D_{z_*} является плоской областью, правильной относительно оси Oy. Поэтому ее площадь $S(z_*) = S(D_{z_*})$ вычисляется по формуле:

$$S(z_*) = \int\limits_{h_1(z_*)}^{h_2(z_*)} dy \int\limits_{g_1(y,z_*)}^{g_2(y,z_*)} dx.$$

Иначе говоря, функция

$$S(z) = \int\limits_{h_1(z)}^{h_2(z)} dy \int\limits_{g_1(y,z)}^{g_2(y,z)} dx$$

описывает площади сечений области Ω плоскостями, параллельными Oxy. Из равенства (2.4) следует, что

$$V(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} dx\,dy\,dz = \int\limits_{z_1}^{z_2} S(z)dz. \tag{2.5}$$

Формула (2.5) позволяет вычислить объем Ω, если известны площади $S(z)$ сечений Ω плоскостями, ортогональными оси Oz. Заметим, что в рассматриваемом случае отрезок $[z_1, z_2]$ является ортогональной проекцией Ω на Oz. Равенство (2.5) называется принципом Кавальери. Справедливы и формулы, аналогичные (2.5). Например, если проекция Ω на ось Ox – отрезок $[x_1, x_2]$, а $S(x)$ – площади сечений, ортогональных Ox, то

$$V(\Omega) = \int\limits_{x_1}^{x_2} S(x)dx.$$

2.3. Криволинейные координаты в $I\!R^3$

Построение криволинейных координат в $I\!R^3$, по существу, аналогично их построению на плоскости, рассмотренному в разд. 1.6. Пусть в $I\!R^3$ вместе с декартовой системой координат $Oxyz$ задана система координат, в которой точка P описывается тройкой чисел (ξ, η, ζ). Тогда, как и в случае криволинейных координат на плоскости,

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta, \zeta); \\ y = y(\xi, \eta, \zeta); \\ z = z(\xi, \eta, \zeta). \end{cases} \tag{2.6}$$

Функции $x(\xi, \eta, \zeta)$, $y(\xi, \eta, \zeta)$ и $z(\xi, \eta, \zeta)$ предположим непрерывно дифференцируемыми и будем считать, что

$$J = \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \neq 0. \tag{2.7}$$

Величина J по-прежнему называется якобианом преобразования координат (ξ, η, ζ) в декартовы координаты. При этих условиях система (2.6) однозначно разрешима относительно ξ, η, ζ; ее решение будем записывать в виде:

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y, z); \\ \eta = \eta(x, y, z); \\ \zeta = \zeta(x, y, z). \end{cases}$$

Уравнение $\xi(x, y, z) = \xi_0$ задает множество точек в $I\!R^3$, являющееся для используемых систем координат некоторой поверхностью в $I\!R^3$, которая называется координатной поверхностью $\eta\zeta$, соответствующей значению ξ_0. Аналогично, уравнение $\eta(x, y, z) = \eta_0$ определяет координатную поверхность $\xi\zeta$, а уравнение $\zeta(x, y, z) = \zeta_0$ – поверхность $\xi\eta$.

Множество точек пересечения координатных поверхностей $\xi\zeta$ и $\xi\eta$ определяется системой уравнений

$$\begin{cases} \eta(x, y, z) = \eta_0; \\ \zeta(x, y, z) = \zeta_0 \end{cases} \tag{2.8}$$

и является обычно некоторой кривой в $I\!R^3$. Различные точки этой кривой отличаются только значением координаты ξ; в связи с этим линия, определяемая системой (2.8), называется координатной линией ξ, проходящей через точку $P(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$. Аналогично определяются координатные линии η и ζ, проходящие через P и определяемые системами

$$\begin{cases} \xi(x, y, z) = \xi_0; \\ \zeta(x, y, z) = \zeta_0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi(x, y, z) = \xi_0; \\ \eta(x, y, z) = \eta_0, \end{cases}$$

соответственно. В каждой точке P определены ненулевые касательные к координатным линиям векторы, которые в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ выражаются следующим образом:

$$\vec{\tau}_\xi = \left[\frac{\partial x(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)}{\partial \xi}, \frac{\partial y(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)}{\partial \xi}, \frac{\partial z(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)}{\partial \xi}\right]^T;$$

$$\vec{\tau}_\eta = \left[\frac{\partial x(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)}{\partial \eta}, \frac{\partial y(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)}{\partial \eta}, \frac{\partial z(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)}{\partial \eta}\right]^T;$$

$$\vec{\tau}_\zeta = \left[\frac{\partial x(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)}{\partial \zeta}, \frac{\partial y(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)}{\partial \zeta}, \frac{\partial z(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)}{\partial \zeta}\right]^T.$$

Из условия $J \neq 0$ следует линейная независимость системы векторов $\{\vec{\tau}_\xi, \vec{\tau}_\eta, \vec{\tau}_\zeta\}$ и, значит, существование в каждой точке P базиса $\{\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta\}$, где $\vec{e}_\xi = \dfrac{1}{\|\vec{\tau}_\xi\|}\vec{\tau}_\xi$, $\vec{e}_\eta = \dfrac{1}{\|\vec{\tau}_\eta\|}\vec{\tau}_\eta$, $\vec{e}_\zeta = \dfrac{1}{\|\vec{\tau}_\zeta\|}\vec{\tau}_\zeta$.

Как в случае координат в $\mathbb{R}^2$, важным является вычисление числовых характеристик "криволинейного параллелепипеда", образованного точками $P_1(\xi_0, \eta_0), \zeta_0)$, $P_2(\xi_0 + \Delta\xi, \eta_0, \zeta_0)$, $P_3(\xi_0, \eta_0 + \Delta\eta, \zeta_0)$, $P_4(\xi_0 + +\Delta\xi, \eta_0 + \Delta\eta, \zeta_0)$, $P_5(\xi_0, \eta_0, \zeta_0 + \Delta\zeta)$, $P_6(\xi_0 + \Delta\xi, \eta_0, \zeta_0 + \Delta\zeta)$, $P_7(\xi_0, \eta_0 + +\Delta\eta, \zeta_0 + \Delta\zeta)$ и $P_8(\xi_0 + \Delta\xi, \eta_0 + \Delta\eta, \zeta_0 + \Delta\zeta)$. Эти точки и криволинейный параллелепипед изображены на рис. 2.2.

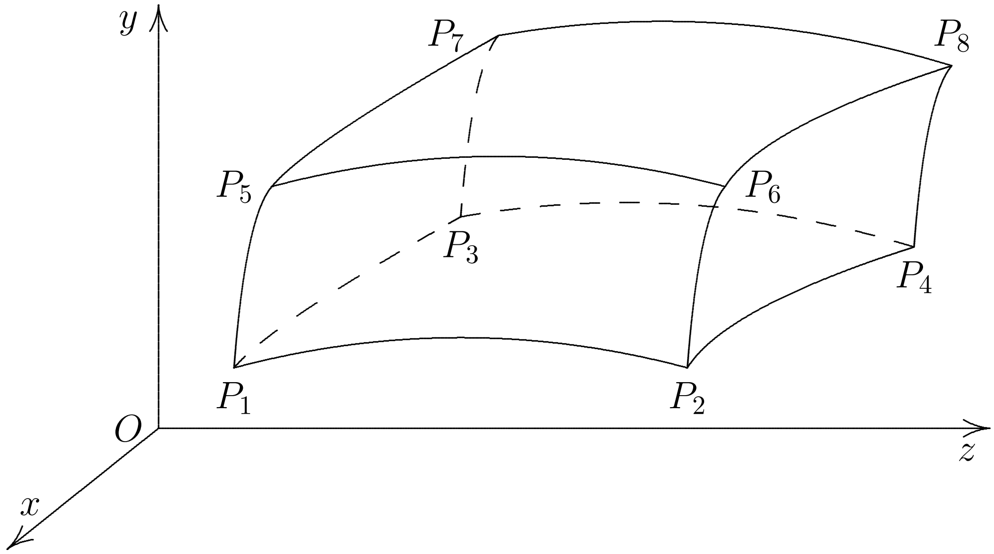

Рис. 2.2

Вычисление длин "ребер" этого криволинейного параллелепипеда полностью аналогично вычислению длин "сторон" криволинейного паралеллограмма в плоском случае. Теперь формулы имеют вид:

$$|P_1P_2| = H_\xi(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)\Delta\xi + o(\Delta\xi);$$

$$|P_1P_3| = H_\eta(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)\Delta\eta + o(\Delta\eta);$$

$$|P_1P_5| = H_\zeta(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)\Delta\zeta + o(\Delta\zeta),$$

где

$$H_\xi(\xi, \eta, \zeta) = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2\right]^{1/2}; \tag{2.9}$$

$$H_\eta(\xi, \eta, \zeta) = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2\right]^{1/2}; \tag{2.10}$$

$$H_\zeta(\xi, \eta, \zeta) = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \zeta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right)^2\right]^{1/2} \tag{2.11}$$

– соответствующие коэффициенты Ламе. Для длины "ребра" P_2P_6 получим соотношение:

$$|P_2P_6| = H_\zeta(\xi_0 + \Delta\xi, \eta_0, \zeta_0)\Delta\zeta + o(\Delta\zeta);$$

аналогичные соотношения справедливы и для других "ребер".

Рассмотрим вопрос о вычислении объема V криволинейного параллелепипеда $P_1 \dots P_8$. Как и в случае плоскости, можно доказать, что при малых $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ и $\Delta\zeta$ справедливо соотношение

$$V = V + o(\Delta\xi\Delta\eta\Delta\zeta), \tag{2.12}$$

где V – объем обычного параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_1P_3}$ и $\overrightarrow{P_1P_5}$. Координаты этих векторов вычисляются так же, как и в плоском случае. В результате получим:

$$\begin{cases} \overrightarrow{P_1P_2} = \left[\dfrac{\partial x(\xi_0,\eta_0,\zeta_0)}{\partial\xi}, \dfrac{\partial y(\xi_0,\eta_0,\zeta_0)}{\partial\xi}, \dfrac{\partial z(\xi_0,\eta_0,\zeta_0)}{\partial\xi}\right]^T \Delta\xi + \vec{o}(\Delta\xi); \\ \overrightarrow{P_1P_3} = \left[\dfrac{\partial x(\xi_0,\eta_0,\zeta_0)}{\partial\eta}, \dfrac{\partial y(\xi_0,\eta_0,\zeta_0)}{\partial\eta}, \dfrac{\partial z(\xi_0,\eta_0,\zeta_0)}{\partial\eta}\right]^T \Delta\eta + \vec{o}(\Delta\eta); \\ \overrightarrow{P_1P_5} = \left[\dfrac{\partial x(\xi_0,\eta_0,\zeta_0)}{\partial\zeta}, \dfrac{\partial y(\xi_0,\eta_0,\zeta_0)}{\partial\zeta}, \dfrac{\partial z(\xi_0,\eta_0,\zeta_0)}{\partial\zeta}\right]^T \Delta\zeta + \vec{o}(\Delta\zeta). \end{cases} \tag{2.13}$$

Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, равен $\bigl|\bigl(\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]\bigr)\bigr|$, а для смешанного произведения трех векторов справедлива формула:

$$\bigl(\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]\bigr) = \det\begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{bmatrix}.$$

Учитывая равенства (2.13), находим объем V:

$$V = |J|\,|\Delta\xi\Delta\eta\Delta\zeta| + o(\Delta\xi\Delta\eta\Delta\zeta),$$

где J – якобиан, определенный в (2.7). Поэтому из равенства (2.12) следует, что

$$V = |J|\,|\Delta\xi\Delta\eta\Delta\zeta| + o(\Delta\xi\Delta\eta\Delta\zeta).$$

Криволинейные координаты в $I\!R^3$, как и в $I\!R^2$, также удобно рассматривать как взаимно однозначное соответствие точек двух пространств с декартовыми системами координат $Oxyz$ и $O'\xi\eta\zeta$. Если при таком соответствии области Ω отвечает область Ω', то

$$V(\Omega) = |J|V(\Omega')\bigl(1 + o(1)\bigr).$$

Функция $|J|$ теперь может рассматриваться как коэффициент изменения объема при отображении (2.6).

Координаты (ξ,η,ζ) называются ортогональными, если в каждой точке P базис $\{\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta\}$ является ортогональным. Условия ортогональности этих векторов сводятся к равенствам:

$$\begin{cases} (\vec{\tau}_\xi, \vec{\tau}_\eta) = \dfrac{\partial x}{\partial \xi}\,\dfrac{\partial x}{\partial \eta} + \dfrac{\partial y}{\partial \xi}\,\dfrac{\partial y}{\partial \eta} + \dfrac{\partial z}{\partial \xi}\,\dfrac{\partial z}{\partial \eta} = 0; \\ (\vec{\tau}_\xi, \vec{\tau}_\zeta) = \dfrac{\partial x}{\partial \xi}\,\dfrac{\partial x}{\partial \zeta} + \dfrac{\partial y}{\partial \xi}\,\dfrac{\partial y}{\partial \zeta} + \dfrac{\partial z}{\partial \xi}\,\dfrac{\partial z}{\partial \zeta} = 0; \\ (\vec{\tau}_\eta, \vec{\tau}_\zeta) = \dfrac{\partial x}{\partial \eta}\,\dfrac{\partial x}{\partial \zeta} + \dfrac{\partial y}{\partial \eta}\,\dfrac{\partial y}{\partial \zeta} + \dfrac{\partial z}{\partial \eta}\,\dfrac{\partial z}{\partial \zeta} = 0, \end{cases} \tag{2.14}$$

которые должны быть выполнены при всех ξ, η, ζ.

С помощью непосредственного, но довольно громоздкого вычисления можно убедиться[1] (как и в случае $I\!R^2$), что для ортогональных координат

$$|J| = H_\xi H_\eta H_\zeta.$$

Таким образом, в этом случае

$$V = H_\xi H_\eta H_\zeta |\Delta\xi\Delta\eta\Delta\zeta| + o(\Delta\xi\Delta\eta\Delta\zeta).$$

Наконец, для случая ортогональных координат вычислим площади ″граней″ криволинейного параллелепипеда $P_1 \dots P_8$. Рассмотрим, например, ″грань″ $P_1P_2P_4P_3$. Ее площадь обозначим S_{1243}. Эта грань – пространственный ″криволинейный параллелограмм″, который, вообще говоря, не является плоской фигурой. Параметрические уравнения этой ″грани″ могут быть выбраны в виде:

$$\vec{r} = \vec{r}(\xi, \eta) = [x(\xi, \eta, \zeta_0), y(\xi, \eta, \zeta_0), z(\xi, \eta, \zeta_0)]^T, \quad (\xi, \eta) \in D_{\xi\eta},$$

где $D_{\xi\eta}$ – множество точек (ξ, η), координаты которых удовлетворяют неравенствам $\xi_0 \le \xi \le \xi_0 + \Delta\xi$, $\eta_0 \le \eta \le \eta_0 + \Delta\eta$. По формуле (1.47) для вычисления площади поверхности получим

$$S_{1243} = \iint\limits_{D_{\xi\eta}} \|[\vec{r}\,'_\xi, \vec{r}\,'_\eta]\| d\xi d\eta.$$

Так как

$$\vec{r}\,'_{xi} = \left[\frac{\partial x}{\partial \xi}, \ \frac{\partial y}{\partial \xi}, \ \frac{\partial z}{\partial \xi}\right]^T; \quad \vec{r}\,'_\eta = \left[\frac{\partial x}{\partial \eta}, \ \frac{\partial y}{\partial \eta}, \ \frac{\partial z}{\partial \eta}\right]^T,$$

то

$$\left\|[\vec{r}\,'_\xi, \vec{r}\,'_\eta]\right\|^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\,\frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta}\,\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\,\frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\,\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2 + \\ + \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\,\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\,\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 =$$

[1] Оставим проверку этого факта в качестве упражнения.

$$= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\xi}\right)^2\right] \left[\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\eta}\right)^2\right] -$$
$$- \left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\,\frac{\partial y}{\partial\eta} + \frac{\partial y}{\partial\xi}\,\frac{\partial y}{\partial\eta} + \frac{\partial z}{\partial\xi}\,\frac{\partial z}{\partial\eta}\right)^2 = H_\xi^2(\xi,\eta,\zeta_0)H_\eta^2(\xi,\eta,\zeta_0), \qquad (2.15)$$

поскольку для ортогональных координат выполнены равенства (2.14). Здесь H_ξ и H_η – коэффициенты Ламе. Используя теперь теорему о среднем для двойного интеграла, найдем:

$$S_{1243} = H_\xi(\xi^*,\eta^*,\zeta_0)H_\eta(\xi^*,\eta^*,\zeta_0)|\Delta\xi\Delta\eta)|,$$

где $\xi^* \in [\xi_0, \xi_0 + \Delta\xi]$, $\eta^* \in [\eta_0, \eta_0 + \Delta\eta]$. Так как функции H_ξ и H_η непрерывны, то

$$S_{1243} = H_\xi(\xi_0,\eta_0,\zeta_0)H_\eta(\xi_0,\eta_0,\zeta_0)|\Delta\xi\Delta\eta| + o(\Delta\xi\Delta\eta). \qquad (2.16)$$

Таким же образом доказываются равенства

$$S_{1265} = H_\xi(\xi_0,\eta_0,\zeta_0)H_\zeta(\xi_0,\eta_0,\zeta_0)|\Delta\xi\Delta\zeta| + o(\Delta\xi\Delta\zeta),$$
$$S_{1375} = H_\eta(\xi_0,\eta_0,\zeta_0)H_\zeta(\xi_0,\eta_0,\zeta_0)|\Delta\eta\Delta\zeta| + o(\Delta\eta\Delta\zeta)$$

для площадей ″граней″ $P_1P_2P_6P_5$ и $P_1P_3P_7P_5$. Верхняя ″грань″ $P_5P_6P_8P_7$ отличается от ″грани″ $P_1P_2P_4P_3$ только значением координаты ζ. Поэтому в соответствии с равенством (2.16) справедливы соотношение

$$S_{5687} = H_\xi(\xi_0,\eta_0,\zeta_0+\Delta\zeta)H_\eta(\xi_0,\eta_0,\zeta_0+\Delta\zeta)|\Delta\xi\Delta\eta| + o(\Delta\xi\Delta\eta)$$

и аналогичные соотношения для остальных ″граней″.

В качестве примера криволинейных координат в $\mathbb{R}^3$ рассмотрим сферические координаты (ρ,φ,ϑ). Если взаимное расположение сферической и декартовой систем координат согласовано обычным образом, то эти координаты связаны между собой соотношениями:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\vartheta; \\ y = \rho\sin\varphi\sin\vartheta; \\ z = \rho\cos\vartheta. \end{cases}$$

В этом случае

$$\frac{\partial x}{\partial\rho} = \cos\varphi\sin\vartheta; \quad \frac{\partial x}{\partial\varphi} = -\rho\sin\varphi\sin\vartheta; \quad \frac{\partial x}{\partial\vartheta} = \rho\cos\varphi\cos\vartheta;$$
$$\frac{\partial y}{\partial\rho} = \sin\varphi\sin\vartheta; \quad \frac{\partial y}{\partial\varphi} = \rho\cos\varphi\sin\vartheta; \quad \frac{\partial y}{\partial\vartheta} = \rho\sin\varphi\cos\vartheta;$$
$$\frac{\partial z}{\partial\rho} = \cos\vartheta; \quad \frac{\partial z}{\partial\varphi} = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial\vartheta} = -\rho\sin\vartheta.$$

Поэтому $\dfrac{\partial x}{\partial \rho}\,\dfrac{\partial x}{\partial \varphi}+\dfrac{\partial y}{\partial \rho}\,\dfrac{\partial y}{\partial \varphi}+\dfrac{\partial z}{\partial \rho}\,\dfrac{\partial z}{\partial \varphi}=0$, т. е. выполнено первое из равенств (2.14), и координатные линии ρ и φ ортогональны. Аналогично проверяется и выполнение двух других равенств (2.14). Таким образом, сферические координаты являются ортогональными. Для них легко вычислить коэффициенты Ламе:

$$H_\rho = 1, \quad H_\varphi = \rho \sin\vartheta, \quad H_\vartheta = \rho.$$

Так как сферические координаты ортогональны, то $J = \rho^2 \cos\vartheta$. Как и для полярных координат на плоскости, для сферических координат имеются особые точки, в которых $J = 0$.

2.4. Вычисление тройного интеграла в криволинейных интегралах

Вычисление тройного интеграла в криволинейных координатах, посуществу, не отличается от аналогичного вычисления двойного интеграла. Приведем лишь соответствующие формулы.

Пусть в $I\!R^3$ заданы декартова система координат $Oxyz$ и криволинейные координаты (ξ, η, ζ), связанные соотношениями

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta, \zeta); \\ y = y(\xi, \eta, \zeta); \\ z = z(\xi, \eta, \zeta), \end{cases} \tag{2.17}$$

а также область Ω с кусочно-гладкой границей. Пусть Ω' – образ области Ω при преобразовании координат (2.17), т. е. область в пространстве с декартовой системой координат $O'\xi\eta\zeta$, которая соответствует Ω при преобразовании (2.17). Тогда

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega'} f\big(x(\xi,\eta,\zeta), y(\xi,\eta,\zeta), z(\xi,\eta,\zeta)\big)\big|J(\xi,\eta,\zeta)\big|d\xi d\eta d\zeta,$$

где $J(\xi, \eta, \zeta)$ – якобиан преобразования координат (2.17).

В частности, для цилиндрической системы координат (ρ, φ, z), где $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, получим равенство:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\Omega'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,d\rho d\varphi dz,$$

а для сферической системы координат $(\rho\varphi\vartheta)$ – равенство:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega'} f(\rho\cos\varphi\sin\vartheta, \rho\sin\varphi\sin\vartheta, \rho\cos\vartheta)\rho^2\sin\vartheta d\rho d\varphi d\vartheta.$$

В качестве примера вычислим объем $V_э$ эллипсоида

$$\Omega = \Big\{(x,y,z)\colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\Big\}.$$

Введем при $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$ обобщенные сферические координаты $(\rho, \varphi, \vartheta)$ соотношениями:

$$x = a\rho\cos\varphi\sin\vartheta; \quad y = b\rho\sin\varphi\sin\vartheta; \quad z = c\rho\cos\vartheta, \tag{2.18}$$

где[1] $\rho \ge 0$, $\varphi \in [0, 2\pi[$, $\vartheta \in [0,\pi]$. В координатах (ρ,φ,ϑ) эллипсоид задается условием $\rho \le 1$. Так как якобиан преобразования (2.18) равен $abc\rho^2\sin\vartheta$, то

$$V_э = \iiint\limits_{\Omega} dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\Omega'} abc\rho^2\sin\vartheta d\rho d\varphi d\vartheta =$$

$$= abc\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\vartheta \int\limits_0^{1} \rho^2 \sin\vartheta d\rho = abc\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{3}\sin\vartheta d\vartheta = \frac{abc}{3}\int\limits_0^{2\pi} 2d\varphi = \frac{4\pi}{3}abc.$$

3. Криволинейные интегралы

Криволинейные интегралы, как и кратные интегралы, являются расширением определеного интеграла. Для случая криволинейных интегралов возможны два способа такого расширения, соответствующие понятиям криволинейных интегралов первого и второго рода. Интегралы и первого, и второго рода находят применение в геометрии и физике. Эти интегралы могут быть определены для функций двух, трех и большего числа переменных. Учитывая основные применения криволинейных интегралов, ограничимся случаями функций двух и трех переменных.

[1] Более точно, как и для обычных сферических координат, множеством допустимых координат (ρ,φ,ϑ) является множество: $\big\{(\rho,\varphi,\vartheta)\colon \rho > 0,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 < \vartheta < \pi\big\} \cup \big\{(\rho,0,0)\colon \rho > 0\big\} \cup \big\{(\rho,0,\pi)\colon \rho>0\big\} \cup \big\{(0,0,0)\big\}$.

3.1. Криволинейный интеграл первого рода

Рассмотрим случай функций двух переменных. Пусть на плоскости $I\!R^2$ задана кусочно-гладкая кривая ℓ и скалярная функция $f(P)$, определенная во всех точках кривой ℓ. Обозначим A и B точки, являющиеся концам кривой ℓ. Пусть $P_i \in \ell$, $i = 0, 1, \ldots, n$ – точки на кривой ℓ; $P_0 = A$, $P_n = B$. Точки P_i задают разбиение кривой ℓ на части ℓ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, с концами P_{i-1} и P_i. Каждая кривая ℓ_i имеет длину, которую обозначим $\Delta\ell_i$. На кривых ℓ_i выберем (произвольно) точки $P_i^* \in \ell_i$ и вычислим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i^*)\Delta\ell_i,$$

называемую интегральной суммой для функции $f(P)$, кривой ℓ, заданного разбиения $\{P_i\}$ и заданного выбора точек P_i^*. Назовем рангом разбиения число $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta\ell_i$.

Определение 3.1. *Число I называется криволинейным интегралом первого рода функции $f(P)$ по кривой ℓ, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого разбиения $\{P_i\}$, удовлетворяющего условию $\lambda < \delta$, и любого выбора точек P_i^* справедливо неравенство:*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(P_i^*)\Delta\ell_i - I\right| < \varepsilon.$$

Функция $f(P)$ называется в этом случае интегрируемой по ℓ. Для криволинейного интеграла используется обозначение:

$$I = \int\limits_{\ell} f(P)d\ell.$$

Теорема 3.1. *Если множество $\{f(P)\colon P \in \ell\}$, т. е. множество значений функции $f(P)$ на кривой ℓ, неограничено, то функция $f(P)$ не интегрируема по кривой ℓ.*

Доказательство этой теоремы приводить не будем – оно, в основном, повторяет доказательство аналогичной теоремы для определенного интеграла [5].

Таким образом, для интегрируемости функция $f(P)$ должна быть, по крайней мере, ограниченной функцией.

Однако, как и для определенного интеграла, не всякая ограниченная функция интегрируема по ℓ. Достаточным условием интегрируемости функции является ее непрерывность. Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2. *Пусть функция $f(P)$ непрерывна в замкнутой области D, содержащей кусочно-гладкую кривую ℓ. Тогда $f(P)$ интегрируема по ℓ.*

Отметим, что условия теоремы 3.2 можно значительно ослабить; в частности, эта теорема справедлива для кусочно-непрерывной на ℓ функции $f(P)$, но точная формулировка теоремы в этом случае требует как уточнения понятия кривой, так и точного определения термина "кусочно-непрерывная функция".

Приведем без доказательства еще одну теорему, выражающую свойство аддитивности криволинейного интеграла.

Теорема 3.3. *Пусть кусочно-гладкая кривая ℓ разбита на две части ℓ_1 и ℓ_2, $\ell = \ell_1 \cup \ell_2$, имеющие лишь одну общую точку, и функция $f(P)$ интегрируема по ℓ. Тогда $f(P)$ интегрируема по ℓ_1 и ℓ_2 и*

$$\int\limits_{\ell} f(P)d\ell = \int\limits_{\ell_1} f(P)d\ell + \int\limits_{\ell_2} f(P)d\ell. \tag{3.1}$$

Наоборот, если в этом случае $f(P)$ интегрируема по ℓ_1 и ℓ_2, то $f(P)$ интегрируема по ℓ, и также справедливо равенство (3.1).

Для криволинейных интегралов первого рода справедливы также и другие теоремы, аналогичные соответствующим теоремам для определенного интеграла.

Теорема 3.4. *Если $f(P) \equiv 1$ на ℓ и L – длина кривой ℓ, то*

$$\int\limits_{\ell} d\ell = L. \tag{3.2}$$

Доказательство. Действительно, при $f(P) \equiv 1$ и любом выборе точек P_i^* получим:

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i^*)\Delta\ell_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta\ell_i = L$$

для любого разбиения. Поэтому все интегральные суммы имеют одно и то же значение L и ясно, что справедливо равенство (3.2). ■

Приведем еще четыре утверждения. Доказательства этих утверждений аналогичны доказательствам соответствующих теорем для определенного интеграла (см. [5]).

Теорема 3.5. *Если $f_1(P)$ и $f_2(P)$ интегрируемы по ℓ и $f(P) = \alpha_1 f_1(P) + \alpha_2 f_2(P)$, $\alpha_1 \in I\!R$, $\alpha_2 \in I\!R$, то функция $f(P)$ также* *интегрируема по ℓ и*

$$\int\limits_{\ell} f(P)d\ell = \alpha_1 \int\limits_{\ell} f_1(P)d\ell + \alpha_2 \int\limits_{\ell} f_2(P)d\ell.$$

Теорема 3.6. *Если $f_1(P) \le f_2(P)$ на ℓ и функции $f_1(P)$ и $f_2(P)$ интегрируемы по ℓ, то*

$$\int\limits_{\ell} f_1(P)d\ell \le \int\limits_{\ell} f_2(P)d\ell.$$

Теорема 3.7. *Если $f(P)$ интегрируема и ограничена на ℓ, $m = \inf\{f(P)\colon P \in \ell\}$, $M = \sup\{f(P)\colon P \in \ell\}$, то*

$$mL \le \int\limits_{\ell} f(P)d\ell \le ML,$$

где L – длина кривой ℓ.

Теорема 3.8 (теорема о среднем). *Если $f(P)$ непрерывна в некоторой замкнутой области D, содержащей кривую ℓ, то на ℓ существует такая точка P^*, что*

$$\int\limits_{\ell} f(P)d\ell = f(P^*)L.$$

3.2. Вычисление криволинейного интеграла первого рода

Рассмотрим вопрос о вычислении криволинейного интеграла первого рода в том случае, когда кривая ℓ является гладкой кривой, а функция $f(P)$ непрерывна. Напомним, что кривая ℓ называется гладкой, если множество точек ℓ описывается соотношениями

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad t \in [t^{(1)}, t^{(2)}],$$

где $\vec{r}(t)$ – непрерывнодифференцируемая на $[t^{(1)}, t^{(2)}]$ функция и $\|\vec{r}\,'(t)\| \ne 0$. Отметим, что так как промежуток $[t^{(1)}, t^{(2)}]$ замкнут, а $\|\vec{r}\,'(t)\|$ – непрерывная функция, то

$$\inf_{t\in[t^{(1)},t^{(2)}]} \|\vec{r}\,'(t)\| = r_0 > 0.$$

Действительно, в противном случае, т. е. при $\inf\limits_{t\in[t^{(1)},t^{(2)}]} \|\vec{r}\,'(t)\| = 0$, на промежутке $[t^{(1)}, t^{(2)}]$ существовала бы точка t^*, в которой $\|\vec{r}\,'(t^*)\| = 0$, что невозможно для гладкой кривой.

До сих пор точка P и вектор $\vec{r}(t)$ являлись, по существу, геометрическими объектами. Для вычисления интеграла необходимо перейти к аналитическому описанию этих объектов, т. е. ввести некоторую систему координат. Проще всего криволинейный интеграл вычисляется в том случае, когда для задания P и ℓ используются декартовы координаты. Итак, пусть на плоскости, где заданы ℓ и $f(P)$, введена декартова система координат Oxy. Тогда уравнения кривой ℓ имеют вид:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = [x(t), y(t)]^T, \quad t \in [t^{(1)}, t^{(2)}], \tag{3.3}$$

где $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцируемые на $[t^{(1)}, t^{(2)}]$ функции и $\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 \geq r_0^2 > 0$.

Отметим, что если кривая ℓ задана геометрически, то уравнения (3.3) не заданы и их нахождение является задачей, предшествующей задаче вычисления криволинейного интеграла. Для заданной кривой ℓ параметрическое описание (3.3) всегда не единственно. Например, верхняя полуокружность единичной окружности может быть описана двумя различными способами:

$$\vec{r} = \left[t, \sqrt{1-t^2}\right]^T, \ \ t \in [-1, 1]; \quad \vec{r} = [\cos t, \sin t]^T, \ \ t \in [0, \pi];$$

легко предложить и другие способы параметрического описания той же кривой. Для дальнейшего выберем какой-нибудь один способ описания кривой ℓ.

Обозначим (x, y) декартовы координаты точки P, и пусть, как и в гл. 1, $f(x, y) = f\big(P(x, y)\big)$.

Рассмотрим какое-либо разбиение ℓ точками P_i. Каждой точке P_i соответствует такое значение t_i, что если x_{P_i} и y_{P_i} – декартовы координаты P_i, то $x(t_i) = x_{P_i}$ и $y(t_i) = y_{P_i}$. Значения $t^{(1)}$ и $t^{(2)}$ соответствуют при этом концам A и B кривой ℓ. Будем считать, что все t_i различны и $t^{(1)} = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t^{(2)}$. Тогда по известной формуле для вычисления длины дуги получим:

$$\Delta\ell_i = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2} dt = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \|\vec{r}\,'(t)\| dt. \tag{3.4}$$

Значит,

$$\Delta\ell_i \geq \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} r_0 dt = r_0 \Delta t_i,$$

где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Поэтому разбиение $\{P_i\}$ кривой ℓ порождает такое разбиение $\{t_i\}$ отрезка $[t^{(1)}, t^{(2)}]$, что $\mu = \sup\limits_{1\le i\le n} |\Delta t_i| \le \sup\limits_{1\le i\le n} |\Delta \ell_i|/r_0 = \lambda/r_0$, где μ – ранг разбиения $\{t_i\}$, а λ – ранг разбиения $\{P_i\}$.

Используя теорему о среднем, из (3.4) получим:

$$\Delta \ell_i = \|\vec{r}\,'(\tilde{t}_i)\|\Delta t_i,$$

где $\tilde{t}_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i^*)\Delta\ell_i = \sum_{i=1}^{n} f\big(x(t_i^*), y(t_i^*)\big)\|\vec{r}\,'(\tilde{t}_i)\|\Delta t_i,$$

где значения t_i^* соответствуют точкам P_i^*.

Таким образом, любая интегральная сумма для криволинейного интеграла первого рода совпадает с суммой

$$S = \sum_{i=1}^{n} f\big(x(t_i^*), y(t_i^*)\big)\|\vec{r}\,'(\tilde{t}_i)\|\Delta t_i. \tag{3.5}$$

Если бы в сумме (3.5) значения $\tilde{t}_i$ совпадали с t_i^*, то она являлась бы интегральной суммой для интеграла

$$J = \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} f\big(x(t), y(t)\big)\|\vec{r}\,'(t)\|dt.$$

Так как равенства $\tilde{t}_i = t_i^*$, вообще говоря, не выполняются, то сумма (3.5) не является интегральной. Однако (3.5) является так называемой обобщенной интегральной суммой, и можно доказать, что если функции $f\big(x(t), y(t)\big)$ и $\|\vec{r}\,'(t)\|$ непрерывны при $t \in [t^{(1)}, t^{(2)}]$, то $|S - J| < \varepsilon$, если только ранг μ разбиения $\{t_i\}$ достаточно мал. Следовательно, если λ/r_0 достаточно мало, то

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(P_i^*)\Delta\ell_i - J\right| < \varepsilon$$

для любого разбиения $\{P_i\}$ и любого выбора точек P_i^*. Поэтому справедливо равенство

$$\int\limits_{\ell} f(P)d\ell = \int\limits_{\ell} f(x,y)d\ell = \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} f\big(x(t), y(t)\big)\sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}dt \tag{3.6}$$

для непрерывной функции $f(P)$ и гладкой кривой ℓ.

Замечание 3.1. Полное доказательство соотношения (3.6) приведено, например, в [1]. Здесь мы вынуждены опустить обоснование некоторых утверждений относительно обобщенных интегральных сумм. Можно принять равенство (3.6) в качестве определения криволинейного интеграла первого рода для непрерывной функции $f(P)$ и гладкой кривой ℓ в том случае, когда для описания P и ℓ применяются декартовы координаты.

Как было отмечено, параметрическое описание (3.3) кривой ℓ не единственно. Однако для любого способа (при $\|\vec{r}\,'\| \neq 0$) описания ℓ справедлива формула (3.6), что следует из приведенных рассуждений. Если же равенство (3.6) принято в качестве определения криволинейного интеграла, но кривая задана геометрически, то возможность использовать любую параметризацию ℓ необходимо доказать. Сделаем это в простейшем случае.

Теорема 3.9. *Пусть*

$$\vec{r} = \vec{r}_1(t) = [x(t), y(t)]^T, \quad t \in [t^{(1)}, t^{(2)}], \quad t^{(1)} < t^{(2)},$$

и

$$\vec{r} = \vec{r}_2(\tau) = [\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau)]^T, \quad \tau \in [\tau^{(1)}, \tau^{(2)}]$$

– два параметрических задания кривой ℓ, причем $t = h(\tau)$, где $h(\tau)$ – такая непрерывно дифференцируемая при $\tau \in [\tau^{(1)}, \tau^{(2)}]$ функция, что либо $h'(\tau) > 0$, $g(\tau^{(1)}) = t^{(1)}$, $g(\tau^{(2)}) = t^{(2)}$, либо $h'(\tau) < 0$, $g(\tau^{(1)}) = t^{(2)}$, $g(\tau^{(2)}) = t^{(1)}$. Тогда

$$\int\limits_{\tau^{(1)}}^{\tau^{(2)}} f\big(\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau)\big)\sqrt{\big(\bar{x}'(\tau)\big)^2 + \big(\bar{y}'(\tau)\big)^2}d\tau =$$

$$= \int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} f\big(x(t), y(t)\big)\sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}dt.$$

Доказательство. Пусть P_0 – какая-либо точка на ℓ. Ей соответствуют такие значения параметров t_0 и τ_0, что

$$x_{P_0} = x(t_0) = \bar{x}(\tau_0); \quad y_{P_0} = y(t_0) = \bar{y}(\tau_0).$$

Так как $t_0 = h(\tau_0)$, то $x\big(h(\tau_0)\big) = \bar{x}(\tau_0)$ и $y\big(h(\tau_0)\big) = \bar{y}(\tau_0)$ при всех $\tau_0 \in [\tau^{(1)}, \tau^{(2)}]$. Преобразуем интеграл

$$I = \int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} f\big(x(t), y(t)\big)\sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}dt$$

с помощью замены переменных $t = h(\tau)$. Пусть $h'(\tau) > 0$. Тогда

$$I = \int\limits_{\tau^{(1)}}^{\tau^{(2)}} f\big(x(h(\tau)), y(h(\tau))\big)\sqrt{\big[\big(x(h(\tau))\big)'_t\big]^2 + \big[\big(y(h(\tau))\big)'_t\big]^2}h'(\tau)d\tau =$$

$$= \int\limits_{\tau^{(1)}}^{\tau^{(2)}} f\big(\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau)\big) \sqrt{\left[\big(x(h(\tau))\big)'_\tau \tau'_t\right]^2 + \left[\big(y(h(\tau))\big)'_\tau \tau'_t\right]^2 \big(h'(\tau)\big)^2} d\tau =$$

$$= \int\limits_{\tau^{(1)}}^{\tau^{(2)}} f\big(\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau)\big) \sqrt{\left[\big(\bar{x}'(\tau)\big)^2 + \big(y'(\tau)\big)^2\right] (\tau'_t h')^2} d\tau =$$

$$= \int\limits_{\tau^{(1)}}^{\tau^{(2)}} f\big(\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau)\big) \sqrt{\big(\bar{x}(\tau)\big)^2 + \big(y'(\tau)\big)^2} d\tau, \tag{3.7}$$

так как $\tau'_t = 1/h'(\tau)$. Полученное равенство доказывает теорему для случая $h'(\tau) > 0$. Если же $h'(\tau) < 0$, то

$$I = -\int\limits_{\tau^{(1)}}^{\tau^{(2)}} f\big(x(t), y(t)\big) \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2} dt.$$

Теперь та же самая замена переменных приводит также к равенству (3.7), поскольку в этом случае $\sqrt{\big(h'(\tau)\big)^2} = -h'(\tau)$. ■

Замечание 3.2. В теореме 3.9 рассматриваются только параметризации кривой ℓ, связанные соотношением $t = h(\tau)$ с монотонной функцией $h(\tau)$. Это вызвано тем, что для задач, приводящих к криволинейному интегралу первого рода, такие параметризации являются наиболее естественными.

Пусть теперь в $I\!R^2$ введены не декартовы, а какие-нибудь другие координаты (ξ, η). Введем дополнительно декартову систему координат. Тогда между парами чисел (x, y) и (ξ, η) существует взаимно однозначное соответствие:

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta); \\ y = y(\xi, \eta). \end{cases}$$

Если в этом случае кривая ℓ задана параметрически в координатах (ξ, η), т. е. ее уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} \xi = \xi(\tau); \\ \eta = \eta(\tau); \end{cases} \qquad \tau \in [\tau^{(1)}, \tau^{(2)}],$$

то ее параметрическим заданием в декартовых координатах будет

$$\vec{r} = \vec{r}(\tau) = \left[\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau)\right]^T, \quad \tau \in [\tau^{(1)}, \tau^{(2)}],$$

где $\bar{x}(\tau) = x\bigl(\xi(\tau), \eta(\tau)\bigr)$, $\bar{y}(\tau) = y\bigl(\xi(\tau), \eta(\tau)\bigr)$. Криволинейный интеграл может быть по-прежнему вычислен по формуле (3.6). В частности, пусть (ξ, η) – полярные координаты (ρ, φ) и уравнения ℓ имеют вид:

$$\begin{cases} \rho = \rho(\tau); \\ \varphi = \varphi(\tau); \end{cases} \qquad \tau \in [\tau^{(1)}, \tau^{(2)}].$$

Тогда $\bar{x}(\tau) = \rho\cos\varphi = \rho(\tau)\cos\bigl(\varphi(\tau)\bigr)$, $\bar{y}(\tau) = \rho(\tau)\sin\bigl(\varphi(\tau)\bigr)$, $\bar{x}\,'(\tau) = \rho'\cos\varphi - \rho\varphi'\sin\varphi$, $\bar{y}\,'(\tau) = \rho'\sin\varphi + \rho\varphi'\cos\varphi$ и

$$\int\limits_{\ell} f(P)d\ell =$$

$$= \int\limits_{\tau^{(1)}}^{\tau^{(2)}} f\left(\rho(\tau)\cos\bigl(\varphi(\tau)\bigr), \rho(\tau)\sin\bigl(\varphi(\tau)\bigr)\right)\sqrt{\bigl(\rho'(\tau)\bigr)^2 + \bigl(\rho(\tau)\varphi'(\tau)\bigr)^2}d\tau.$$

Замечание 3.3. Физический смысл интеграла первого рода состоит в том, что этот интеграл дает, например, решение задачи о вычислении массы (или заряда), распределенной вдоль кривой ℓ с линейной плотностью $f(P)$.

3.3. Криволинейный интеграл второго рода

Пусть задана кривая ℓ и векторная функция $\vec{f}(P)$. На кривой ℓ выберем одно из двух возможных направлений, иначе говоря, выберем одну из двух точек A и B, являющихся концами ℓ, а именно, точку A, в качестве начала ℓ, а другую (точку B) в качестве конца ℓ. Кривую ℓ с выбранным на ней направлением будем называть ориентированной кривой и обозначим ℓ_+, а ту же кривую с противоположным направлением обозначим ℓ_-. Введем такое разбиение $\{P_i\}$ ориентированной кривой ℓ_+, что $P_0 = A$, $P_n = B$ и $P_i \in \ell_{i-1}$ для $i = 1, 2, \ldots, n-1$, где ℓ_{i-1} – часть кривой ℓ с началом в точке P_{i-1} и концом в точке B. Такое разбиение будем называть согласованным с направлением на ℓ_+. Ранг разбиения $\{P_i\}$ обозначим λ. Рассмотрим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} \bigl(\vec{f}(P_i^*), \overrightarrow{\Delta\ell_i}\bigr), \tag{3.8}$$

где $\overrightarrow{\Delta\ell_i}$ – вектор $\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$. Сумму (3.8) будем называть интегральной суммой для криволинейного интеграла второго рода.

Определение 3.2. *Число I называется криволинейным интегралом функции $\vec{f}(P)$ по кривой ℓ_+, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta >$*

0, что для любого согласованного с направлением на ℓ_+ разбиения $\{P_i\}$, для которого $\lambda < \delta$, и любого выбора точек P_i^* выполнено неравенство:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \left(\vec{f}(P_i^*), \overrightarrow{\Delta\ell_i}\right) - I\right| < \varepsilon.$$

Если криволинейный интеграл второго рода существует, то функция $\vec{f}(P)$ называется интегрируемой по ℓ_+, а для интеграла используется обозначение $\int\limits_{\ell_+} \left(\vec{f}(P), \overrightarrow{d\ell}\right)$.

Ясно, что для кривой ℓ_- согласованным с ее направлением разбиением будет разбиение $\{P_i'\}$, где $P_i' = P_{n-i}$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Для разбиений $\{P_i\}$ кривой ℓ_+ и $\{P_i'\}$ кривой ℓ_- соответствующие векторы $\overrightarrow{\Delta\ell_i}$ различаются только знаком. Поэтому

$$\int\limits_{\ell_-} \left(\vec{f}(P), \overrightarrow{d\ell}\right) = -\int\limits_{\ell_+} \left(\vec{f}(P), \overrightarrow{d\ell}\right), \tag{3.9}$$

если, конечно, $\vec{f}(P)$ интегрируема по ℓ_+.

Отметим, что с физической точки зрения такое определение интеграла соответствует задаче вычисления работы силы $\vec{f}(P)$ при перемещении по кривой ℓ.

Для криволинейного интеграла второго рода справедливы теоремы, аналогичные некоторым теоремам для интеграла первого рода. В частности, криволинейный интеграл второго рода обладает свойствами аддитивности и линейности.

Задача вычисления интеграла второго рода является, вообще говоря, более сложной, чем задача вычисления интеграла первого рода. Для решения этой задачи необходимо, во-первых, ввести в $\mathbb{R}^2$ какую-либо систему координат и, во-вторых, задать в каждой точке некоторый базис. Целесообразно в качестве базиса взять базис из координатных ортов, соответствующих введенной системе координат. В простейшем случае декартовых координат такой базис не зависит от точки – это обстоятельство существенно упрощает вычисление криволинейного интеграла второго рода.

Итак, пусть в $\mathbb{R}^2$ введены система декартовых координат Oxy и соответствующий ей базис $\{\vec{i}, \vec{j}\}$. Пусть уравнение гладкой кривой ℓ имеет вид

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}, \quad t \in [t^{(1)}, t^{(2)}]. \tag{3.10}$$

Будем считать параметризацию ℓ (3.10) согласованной с направлением на ℓ_+, т. е. предположим, что $\vec{r}(t^{(1)}) = \vec{r}_A$, $\vec{r}(t^{(2)}) = \vec{r}_B$, где $\vec{r}_A$ и $\vec{r}_B$

– радиус-векторы, соответствующие точкам A и B. В дальнейшем будем также считать (для некоторого сокращения изложения), что $t^{(1)} < t^{(2)}$. Это предположение не ограничивает общности.

Тогда

$$\overrightarrow{\Delta\ell_i} = \big[x(t_i) - x(t_{i-1})\big]\vec{i} + \big[y(t_i) - y(t_{i-1})\big]\vec{j} =$$
$$= \big[x'(\tilde{t}_i)\vec{i} + y'(\tilde{\tilde{t}}_i)\vec{j}\big]\Delta t_i,$$

где $\tilde{t}_i$ и $\tilde{\tilde{t}}_i$ – некоторые точки из $[t_{i-1}, t_i]$.

Обозначим t_i^* значения параметра t, соответствующие точкам P_i^*, т. е. $\vec{r}_{P_i^*} = \vec{r}(t_i^*)$.

Разложим теперь $\vec{f}(P)$ по выбранному базису $\{\vec{i}, \vec{j}\}$:

$$\vec{f}(P) = f_x(x, y)\vec{i} + f_y(x, y)\vec{j}.$$

При сделанных предположениях интегральная сумма (3.8) сводится к сумме:

$$\sum_{i=1}^{n} \big[f_x\big(x(t_i^*), y(t_i^*)\big)x'(\tilde{t}_i) + f_y\big(x(t_i^*), y(t_i^*)\big)y'(\tilde{\tilde{t}}_i)\big]\Delta t_i,$$

являющейся обобщенной интегральной суммой для функции $f_x\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + f_y\big(x(t), y(t)\big)y'(t)$, соответствующей разбиению $\{t_i\}$ отрезка $[t^{(1)}, t^{(2)}]$. Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 3.10. *Если (x, y) – декартовы координаты и ℓ – гладкая кривая, соответствующая уравнению* (3.10), *то для интегрируемой по ℓ функции $\vec{f}(P)$ справедливо равенство:*

$$\int\limits_{\ell_+} (\vec{f}(P), \overrightarrow{d\ell}) = \int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} \big[f_x\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + f_y\big(x(t), y(t)\big)y'(t)\big]\, dt, \tag{3.11}$$

где f_x и f_y – проекции вектора $\vec{f}$ на оси Ox и Oy соответственно.

Полное доказательство этой теоремы приведено, например, в [1].

Как и в случае криволинейного интеграла первого рода, равенство (3.11) может быть принято в качестве определения интеграла второго рода. В этом случае, однако, необходимо доказать, что при геометрическом задании кривой ℓ_+ интеграл

$$\int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} \big[f_x\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + f_y\big(x(t), y(t)\big)y'(t)\big]\, dt, \tag{3.12}$$

не зависит от способа параметризации (согласованного с ℓ_+) кривой ℓ_+. Действительно, пусть заданы две параметризации ℓ_+

$$\vec{r} = \vec{r}_1(t) = [x(t), y(t)]^T, \quad t \in [t^{(1)},\ t^{(2)}], \quad t^{(1)} < t^{(2)}; \tag{3.13}$$

$$r = \vec{r}_2(t) = [\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau)]^T, \quad \tau \in [\tau^{(1)},\ \tau^{(2)}], \quad \tau^{(1)} < \tau^{(2)}, \tag{3.14}$$

согласованные с направлением кривой, и $t = h(\tau)$, $t^{(1)} = h(\tau^{(1)})$, $t^{(2)} = h(\tau^{(2)})$.

Пусть также $h(\tau)$ – монотонная дифференцируемая функция.

Так как $t^{(1)} < t^{(2)}$ и $\tau^{(1)} < \tau^{(2)}$, то в этом случае $h'(\tau) \geq 0$. Как и в раз. 3.2, замена переменных $t = h(\tau)$ в интеграле (3.11) приводит к равенству:

$$\int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} [f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)]dt =$$

$$= \int\limits_{\tau^{(1)}}^{\tau^{(2)}} [f_x\big(x(h(\tau)), y(h(\tau))\big)x'_t(h(\tau)) + f_y\big(x(h(\tau)), y(h(\tau))\big)y'_t(h(\tau))]h'(\tau)d\tau =$$

$$= \int\limits_{\tau^{(1)}}^{\tau^{(2)}} \left[f_x\big(\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau)\big)\bar{x}'(\tau) + f_y\big(\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau)\big)\bar{y}'(\tau)\right] d\tau,$$

которое и означает независимость интеграла (3.12) от способа параметризации.

Если же параметризация (3.13) согласована с ℓ_+, а параметризация (3.14) – с ℓ_-, то точке A соответствуют значения параметров $t^{(1)}$ и $\tau^{(2)}$, а точке B – значения $t^{(2)}$ и $\tau^{(1)}$. В этом случае для функции $h(\tau)$ справедливы равенства: $t^{(1)} = h(\tau^{(2)})$, $t^{(2)} = h(\tau^{(1)})$ и

$$\int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} \big[f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)\big]dt =$$

$$= \int\limits_{\tau^{(1)}}^{\tau^{(2)}} \big[f_x(\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau))\bar{x}'(\tau) + f_y(\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau))\bar{y}'(\tau)\big]d\tau =$$

$$= -\int\limits_{\tau^{(1)}}^{\tau^{(2)}} \big[f_x(\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau))\bar{x}'(\tau) + f_y(\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau))\bar{y}'(\tau)\big]d\tau = -\int\limits_{\ell_-} (\vec{f}(P), \overrightarrow{d\ell}),$$

что соответствует соотношению (3.9).

3.4. Теорема Грина

Кривая ℓ в определении криволинейных интегралов может быть замкнутой. В этом случае точки A и B (концы ℓ) совпадают, и в качестве точки A можно вообще взять любую точку ℓ. Криволинейный интеграл второго рода по замкнутой кривой ℓ_+ принято обозначать символом

$$\oint\limits_{\ell_+} (\vec{f}(P), \overrightarrow{d\ell}).$$

Замкнутая кривая ℓ разбивает плоскость $I\!R^2$ на две части: ограниченную часть D и неограниченную – $I\!R^2 \setminus D$. Будем далее считать, что направление на ℓ_+ согласовано с D так, что при движении по ℓ в выбранном направлении часть D плоскости остается слева.

Криволинейный интеграл второго рода (в $I\!R^2$) по замкнутой кривой ℓ тесно связан с двойным интегралом. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.11 (теорема Грина). *Пусть D – ограниченная замкнутая область в $I\!R^2$ с кусочно-гладкой границей ℓ, и на ℓ выбрано направление, согласованное с D. Пусть функция $\vec{f}(P)\colon I\!R^2 \to I\!R^2$ непрерывно дифференцируема на области D. Тогда справедливо равенство:*

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right) dS = \oint\limits_{\partial D} \big(\vec{f}(P), \overrightarrow{d\ell}\big), \tag{3.15}$$

где $\vec{f} = f_x(x,y)\vec{i} + f_y(x,y)\vec{j}$; (x,y) – декартовы координаты в $I\!R^2$, $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ – соответствующий этим координатам базис, а символом ∂D обозначена ориентированная граница ℓ_+ области D.

Доказательство. Отметим, прежде всего, что любая ограниченная область с кусочно-гладкой границей может быть разбита на конечное число так называемых правильных областей.

Правильной будем называть область, являющуюся одновременно правильной относительно осей Ox и Oy (см. раз. 1.4). Правильной будет, например, любая выпуклая область с гладкой границей.

Докажем сначала теорему Грина для случая, когда D – правильная относительно оси Ox область, и $\vec{f} = \vec{f}^{(1)}(P) = f_x^{(1)}(x,y) + f_y^{(1)}(x,y)\vec{i}$, где $f_x^{(1)} = f_x$, $f_y^{(1)} = 0$. Итак, пусть

$$D = \big\{(x,y)\colon a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\big\}.$$

На рис. 3.1 изображена область D и части $\ell_+^{(1)}$, $\ell_+^{(2)}$, $\ell_+^{(3)}$, $\ell_+^{(4)}$, на которые в этом случае разбивается граница ℓ области D. Направления на $\ell_+^{(1)}$, $\ell_+^{(2)}$, $\ell_+^{(3)}$, $\ell_+^{(4)}$, согласованные с D, указаны стрелками.

По теореме 1.12 справедливо равенство:

$$I_1 \equiv \iint\limits_D \left(\frac{\partial f_y^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial f_x^{(1)}}{\partial y} \right) dS = -\iint\limits_D \frac{\partial f_x^{(1)}}{\partial y} dS = -\int\limits_a^b \left(\int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial f_x}{\partial y} dy \right) dx.$$

Рис. 3.1

Вычисляя внутренний интеграл, получим:

$$I_1 = -\int\limits_a^b \left[f_x(x,y) \Big|_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} \right] dx = -\int\limits_a^b \left[f_x\big(x, g_2(x)\big) - f_x\big(x, g_1(x)\big) \right] dx.$$

Вычислим теперь интеграл $\oint\limits_{\ell_+} (\vec{f}^{(1)}, \overrightarrow{d\ell})$, который совпадает с суммой таких же интегралов по кривым $\ell_+^{(1)}$, $\ell_+^{(2)}$, $\ell_+^{(3)}$, $\ell_+^{(4)}$. Для кривой $\ell_+^{(1)}$ возможна такая параметризация:

$$\ell_+^{(1)}\colon \vec{r} = \vec{r}_1(t) = [t, g_1(t)]^T, \quad t \in [a,\ b].$$

Поэтому по формуле (3.11)

$$\int\limits_{\ell_+^{(1)}} (\vec{f}^{(1)}, \overrightarrow{d\ell}) = -\int\limits_a^b \left[f_x^{(1)}(t, g_1(t))t' + f_y^{(1)}(t, g_1(t))g_1' \right] dt = \int\limits_a^b f_x(t, g_1(t))dt. \tag{3.16}$$

Для кривой $\ell_-^{(3)}$ в качестве параметризации возьмем:

$$\ell_-^{(3)}\colon \vec{r} = \vec{r}_3(t) = [t, g_2(t)]^T, \quad t \in [a, b].$$

Тогда аналогично (3.16) получим равенство:

$$\int\limits_{\ell_+^{(3)}} (\vec{f}^{(1)}, \overrightarrow{d\ell}) = -\int\limits_{\ell_-^{(3)}} (\vec{f}^{(1)}, \overrightarrow{d\ell}) = -\int\limits_a^b f_x(t, g_2(t))dt. \tag{3.17}$$

Для кривой $\ell_+^{(2)}$ выбираем параметризацию:

$$\ell_+^{(2)}: \vec{r} = \vec{r}_2(t) = [b, t]^T, \quad t \in [g_1(b), g_2(b)].$$

Тогда

$$\int\limits_{\ell_+^{(2)}} (\vec{f}^{(1)}, \overrightarrow{d\ell}) = \int\limits_{g_1(b)}^{g_2(b)} \left[f_x^{(1)}(b,t)b' + f_y^{(1)}(b,t)t' \right] dt = 0. \tag{3.18}$$

Точно так же

$$\int\limits_{\ell_+^{(4)}} (\vec{f}^{(1)}, \overrightarrow{d\ell}) = 0. \tag{3.19}$$

Складывая равенства (3.16)–(3.19), получим

$$\int\limits_{\ell_+} (\vec{f}^{(1)}, \overrightarrow{d\ell}) = \int\limits_a^b \left[f_x(t, g_1(t)) - f_x(t, g_2(t)) \right] dt = I_1, \tag{3.20}$$

что доказывает теорему в рассматриваемом случае.

Пусть теперь D – область, правильная относительно оси Oy и $\vec{f} = \vec{f}^{(2)}(P) = f_y(x,y)\vec{j}$. Этот случай изображен на рис. 3.2

Рис.3.2

В этом случае

$$I_2 \equiv \iint\limits_D \left(\frac{\partial f_y^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial f_x^{(2)}}{\partial y} \right) dS = \iint\limits_D \frac{\partial f_y}{\partial x} dS =$$

$$= \int\limits_c^d \left(\int\limits_{h_1(y)}^{h_2(y)} \frac{\partial f_y}{\partial x} dx \right) dy = \int\limits_c^d \left[f_y(h_2(y), y) - f_y(h_1(y), y) \right] dy.$$

Для кривых $\ell_+^{(2)}$ и $\ell_+^{(2)}$, как и в предыдущем случае, получим равенства:

$$\int\limits_{\ell_+^{(2)}} (\vec{f}^{(2)}, \overrightarrow{d\ell}) = \int\limits_{\ell_+^{(4)}} (\vec{f}^{(2)}, \overrightarrow{d\ell}) = 0.$$

Для $\ell_-^{(1)}$ и $\ell_+^{(4)}$ параметризациями в рассматриваемом случае будут:

$$\ell_-^{(1)} \colon \vec{r} = \vec{r}_1(t) = [h_1(t), t]^T, \quad t \in [c, d];$$

$$\ell_+^{(3)} \colon \vec{r} = \vec{r}_3(t) = [h_2(t), t]^T, \quad t \in [c, d].$$

Поэтому

$$\int\limits_{\ell_+^{(1)}} (\vec{f}^{(2)}, \overrightarrow{d\ell}) = -\int\limits_{\ell_-^{(1)}} (\vec{f}^{(2)}, \overrightarrow{d\ell}) = -\int\limits_c^d \left[f_x^{(2)}(h_1(t), t)h_1' + f_y^{(2)}(h_1(t), t)t'\right] dt =$$

$$= \int\limits_c^d f_y\big(h_1(t), t\big)\, dt; \quad \int\limits_{\ell_+^{(3)}} (\vec{f}^{(2)}, \overrightarrow{d\ell}) = \int\limits_c^d f_y\big(h_2(t), t\big)\, dt.$$

Складывая полученные равенства, получим и в этом случае соотношение:

$$\int\limits_{\ell_+} (\vec{f}^{(2)}, \overrightarrow{d\ell}) = \iint\limits_D \left(\frac{\partial f_y^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial f_x^{(2)}}{\partial y}\right) dS. \tag{3.21}$$

Если D – правильная область, то для нее справедливы одновременно формулы (3.20) и (3.21). Так как $\vec{f}(P) = \vec{f}^{(1)}(P) + \vec{f}^{(2)}(P)$, то складывая равенства (3.20) и (3.21) получим:

$$\int\limits_{\ell_+} (\vec{f}, \overrightarrow{d\ell}) = \iint\limits_D \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right) dS. \tag{3.22}$$

Таким образом, теорема Грина для правильной области доказана.

Наконец, пусть область D представляет собой объединение конечного числа правильных областей. Покажем, что теорема Грина справедлива и для такой области D. Рассмотрим простейший случай, когда D является объединением двух правильных областей D_1 и D_2 (рис. 3.3).

Обозначим $\ell^{(1)}$ ту часть границы D, которая входит и в границу D_1, а $\ell^{(2)}$ – оставшуюся часть границы D (являющуюся частью границы D_2). Общую границу D_1 и D_2 обозначим ℓ. Введем на границе D направление, согласованное с D, а на кривой ℓ – произвольное направление. Тогда из соотношения (3.22) для правильных областей D_1 и D_2 получим:

Рис.3.3

$$\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial f_y}{\partial x}-\frac{\partial f_x}{\partial y}\right)dS=\iint\limits_{D_1}\left(\frac{\partial f_y}{\partial x}-\frac{\partial f_x}{\partial y}\right)dS+\iint\limits_{D_2}\left(\frac{\partial f_y}{\partial x}-\frac{\partial f_x}{\partial y}\right)dS=$$

$$=\oint\limits_{\partial D_1}(\vec{f},\overrightarrow{d\ell})+\oint\limits_{\partial D_2}(\vec{f},\overrightarrow{d\ell}). \tag{3.23}$$

С другой стороны,

$$\oint\limits_{\partial D_1}(\vec{f},\overrightarrow{d\ell})=\int\limits_{\ell_+}(\vec{f},\overrightarrow{d\ell})+\int\limits_{\ell_+^{(1)}}(\vec{f},\overrightarrow{d\ell}); \tag{3.24}$$

$$\int\limits_{\partial D_2}(\vec{f},\overrightarrow{d\ell})=\int\limits_{\ell_+^{(2)}}(\vec{f},\overrightarrow{d\ell})+\int\limits_{\ell_-^{(1)}}(\vec{f},\overrightarrow{d\ell})=\int\limits_{\ell_+^{(2)}}(\vec{f},\overrightarrow{d\ell})-\int\limits_{\ell_+^{(1)}}(\vec{f},\overrightarrow{d\ell}). \tag{3.25}$$

Складывая равенства (3.24) и (3.25), получим:

$$\oint\limits_{\partial D_1}(\vec{f},\overrightarrow{d\ell})+\oint\limits_{\partial D_2}(\vec{f},\overrightarrow{d\ell})=\int\limits_{\ell_+^{(1)}}(\vec{f},\overrightarrow{d\ell})+\int\limits_{\ell_+^{(2)}}(\vec{f},\overrightarrow{d\ell})=\oint\limits_{\partial D}(\vec{f},\overrightarrow{d\ell}),$$

и теперь из равенства (3.23) следует теорема Грина для области D. Аналогично рассматривается случай, когда D является объединением трех или большего числа правильных областей. ■

Замечание 3.4. Теорема Грина и формула Грина (3.15) справедливы и для более широкого класса областей, чем те, которые указаны в теореме 3.11, но точное описание допустимых областей выходит за рамки данного пособия.

4. Поверхностные интегралы

И определения и теория поверхностных интегралов первого и второго рода в значительной степени подобны случаю криволинейных интегралов. Как и криволинейные, поверхностные интегралы находят применение в геометрии и физике.

4.1. Поверхностный интеграл первого рода

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ задана некоторая гладкая поверхность Σ. Напомним, что под гладкой поверхностью Σ мы понимаем множество тех (и только тех) точек P в $I\!R^3$, радиус-векторы $\vec{r}$ которых удовлетворяют соотношению:

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) = [g_x(u, v), g_y(u, v), g_z(u, v)]^T, \quad (u, v) \in D, \tag{4.1}$$

где D – ограниченная замкнутая область в $I\!R^2$, (u, v) – координаты точек из D, а g_x, g_y, g_z – непрерывно дифференцируемые функции. Дополнительно предполагается, что для всех точек D

$$\left[\vec{r}'_u, \vec{r}'_v\right] \neq \vec{0}, \tag{4.2}$$

где

$$\vec{r}'_u = \left[\frac{\partial g_x}{\partial u}, \frac{\partial g_y}{\partial u}, \frac{\partial g_z}{\partial u}\right]^T, \quad \vec{r}'_v = \left[\frac{\partial g_x}{\partial v}, \frac{\partial g_y}{\partial v}, \frac{\partial g_z}{\partial v}\right]^T$$

– ″частные″ производные функции $\vec{r}(u, v)$ по u и v соответственно.

Для гладкой поверхности Σ определено понятие площади, которую сейчас будем обозначать $|\Sigma|$.

В п.1.8 было показано, что

$$|\Sigma| = \iint\limits_D \left\| \left[\vec{r}'_u, \vec{r}'_v\right] \right\| dS. \tag{4.3}$$

Пусть дана также некоторая функция $f(P)$, определенная, по крайней мере, для всех точек Σ. Разобьем поверхность Σ на части $\Delta\sigma_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, таким образом, что для каждой из этих частей определена площадь $|\Delta\sigma_i|$. Будем считать, что каждой части $\Delta\sigma_i$ соответствует такая часть ΔD_i области D, что

$$\Delta\sigma_i = \left\{(x, y, z) \in S \colon (u, v) \in \Delta D_i\right\}.$$

Выберем произвольно точки $P_i^* \in \Delta\sigma_i$ и вычислим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i^*)|\Delta\sigma_i|, \tag{4.4}$$

называемую интегральной суммой для функции $f(P)$, поверхности Σ, выбранного разбиения поверхности Σ и выбранных точек P_i^*.

Рангом заданного разбиения назовем число $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \operatorname{diam}(\Delta\sigma_i)$.

Определение 4.1. *Число I называется поверхностным интегралом первого рода функции $f(P)$ по поверхности Σ, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого разбиения с рангом λ, удовлетворяющим неравенству $\lambda < \delta$, и любого выбора точек P_i^* справедливо неравенство*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(P_i^*)|\Delta\sigma_i| - I \right| < \varepsilon.$$

Функция $f(P)$ называется в этом случае интегрируемой по Σ. Для поверхностного интеграла первого рода используется обозначение:

$$I = \iint\limits_{\Sigma} f(P) d\sigma.$$

Замечание 4.1. Поверхностный интеграл первого рода обозначается так же, как и двойной интеграл. Обычно из контекста бывает ясно, о каком из этих интегралов идет речь. Использование же для этих интегралов одного обозначения обусловлено тем, что поверхностный интеграл первого рода является обобщением понятия двойного интеграла и сводится к двойному интегралу в том частном случае, когда $g_x(u,v) = u$, $g_y(u,v) = v$, $g_z(u,v) \equiv 0$; в этом случае $x = u$, $y = v$ и Σ – часть плоскости $z = 0$, совпадающая с D.

Свойства поверхностного интеграла первого рода аналогичны свойствам как криволинейного интеграла первого рода, так и двойного интеграла. В частности, для поверхностного интеграла первого рода справедливы теоремы, аналогичные теоремам 1.1-1.9.

Для вычисления поверхностного интеграла отметим, что в соответствии с (4.3)

$$|\Delta\sigma_i| = \iint\limits_{\Delta D_i} \left\| \left[\vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v \right] \right\| dS.$$

Так как функции $\vec{r}\,'_u$ и $\vec{r}\,'_v$ непрерывны, то по теореме о среднем для двойного интеграла

$$|\Delta\sigma_i| = \left\| \left[\vec{r}\,'_u(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i), \vec{r}\,'_v(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i) \right] \right\| |\Delta D_i|,$$

где $(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i)$ – некоторая точка из ΔD_i. Обозначим u_i^*, v_i^* значения параметров u и v, соответствующие точке P_i^*, т. е. пусть $f(P_i^*) = f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$, $x_i^* = g_x(u_i^*, v_i^*)$, $y_i^* = g_y(u_i^*, v_i^*)$, $z_i^* = g_z(u_i^*, v_i^*)$.

Таким образом, интегральная сумма (4.4) может быть записана в виде:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \left\| \left[\vec{r}\,'_u(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i), \vec{r}\,'_v(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i) \right] \right\| |\Delta D_i|,$$

т. е. является обобщенной интегральной суммой для функции $f\big(g_x(u,v), g_y(u,v), g_z(u,v)\big) \left\| \left[\vec{r}\,'_u(u,v), \vec{r}\,'_v(u,v) \right] \right\|$ и области D. Можно также доказать, что если ранг λ разбиения поверхности Σ достаточно мал, то и ранг $\mu = \max\limits_{1 \le i \le n} \operatorname{diam}(\Delta D_i)$ соответствующего разбиения области D будет также малым. Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1 *Если Σ – гладкая поверхность, задаваемая соотношениями (4.1), а функция $F(P)$ непрерывна в замкнутой области Ω,* *содержащей* Σ *то*

$$\iint\limits_{\Sigma} f(P)d\sigma = \iint\limits_{D} f\bigl(g_x(u,v), g_y(u,v), g_z(u,v)\bigr)\bigl\|\bigl[\vec{r}\,'_u(u,v), \vec{r}\,'_v(u,v)\bigr]\bigr\|dS. \tag{4.5}$$

Остановимся подробнее на важном частном случае, когда поверхность Σ является частью графика дифференцируемой функции $g(x,y)$ декартовых координат x, y. В этом случае в качестве параметрического задания Σ можно взять

$$\vec{r} = \vec{r}(x,y) = [x, y, g(x,y)]^T, \quad (x,y) \in D.$$

Тогда

$$\vec{r}\,'_u = \vec{r}\,'_x = \left[1, 0, \frac{\partial g}{\partial x}\right]^T, \quad \vec{r}\,'_v = \vec{r}\,'_y = \left[0, 1, \frac{\partial g}{\partial y}\right]^T;$$

$$\bigl[\vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v\bigr] = \left[-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1\right]^T, \quad \bigl\|\bigl[\vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v\bigr]\bigr\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}.$$

Поэтому в таком случае

$$\iint\limits_{\Sigma} F(P)d\sigma = \iint\limits_{D} f\bigl(x, y, g(x,y)\bigr)\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}dx\,dy. \tag{4.6}$$

Пример. Вычислим площадь поверхности сферы S_R радиуса R, применяя формулу (4.5). Возьмем параметрические уравнения сферы в виде:

$$\vec{r} = \vec{r}(\varphi, \vartheta) = [R\cos\varphi\sin\vartheta, R\sin\varphi\sin\vartheta, R\cos\vartheta]^T,$$

$$(\varphi, \vartheta) \in D = \{(\varphi, \vartheta)\colon 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \vartheta \le \pi\}.$$

Тогда

$$\vec{r}\,'_\varphi = [-R\sin\varphi\sin\vartheta, R\cos\varphi\sin\vartheta, 0]^T,$$

$$\vec{r}\,'_\vartheta = [R\cos\varphi\cos\vartheta, R\sin\varphi\cos\vartheta, -R\sin\vartheta]^T;$$

$$\bigl[\vec{r}\,'_\varphi, \vec{r}\,'_\vartheta\bigr] = \bigl[-R^2\cos\varphi\sin^2\vartheta, -R^2\sin\varphi\sin^2\vartheta, -R^2\sin\vartheta\cos\vartheta\bigr]^T;$$

$$\bigl\|\bigl[\vec{r}\,'_\varphi, \vec{r}\,'_\vartheta\bigr]\bigr\| = R^2\sin\vartheta;$$

$$|S_R| = \iint\limits_{S_R} d\sigma = \iint\limits_{D} R^2\sin\vartheta d\varphi d\vartheta = R^2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\pi}\sin\vartheta d\vartheta = 4\pi R^2.$$

4.2. Двухсторонние и односторонние поверхности

Пусть по-прежнему в $I\!R^3$ задана гладкая поверхность Σ, описываемая параметрическими уравнениями:

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) = [g_x(u,v), g_y(u,v), g_z(u,v)]^T, \quad (u,v) \in D.$$

Вектор $\vec{N} = \left[\vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v\right]$ является вектором, ортогональным к поверхности Σ (см. п.1.8). В силу уравнения (4.2) $\vec{N} \neq \vec{0}$. Пусть $\vec{n}_+ = \vec{n}(u,v) = \dfrac{1}{\|\vec{N}\|}\vec{N}$ – вектор единичной нормали к поверхности Σ в точке с декартовыми координатами $\big(g_x(u,v), g_y(u,v), g_z(u,v)\big)$. Отметим, что наряду с $\vec{n}_+$ единичным вектором, ортогональным к Σ, является также и вектор $\vec{n}_- = -\vec{n}_+$. Таким образом, в каждой точке Σ определены два взаимно противоположных единичных нормальных к Σ вектора. При этом каждая из функций $\vec{n}_+(u,v)$ и $\vec{n}_-(u,v)$ непрерывна в области D.

Пусть ℓ_D – гладкая замкнутая кривая, лежащая в области D, параметрическими уравнениями которой являются:

$$\ell_D\ :\begin{cases} u = h_1(t), \\ v = h_2(t), \end{cases} \quad t \in [t^{(1)}, t^{(2)}].$$

Так как ℓ_D замкнута, то $h_1(t^{(1)}) = h_1(t^{(2)})$ и $h_2(t^{(1)}) = h_2(t^{(2)})$. Кривой ℓ_D соответствует кривая ℓ_S с параметрическими уравнениями:

$$\ell_S\colon \vec{r} = \vec{r}(t) = \big[g_x(h_1(t), h_2(t)), g_y(h_1(t), h_2(t)), g_z(h^1(t), h^2(t))\big]^T,\ t \in [t^{(1)}, t^{(2)}],$$

лежащая на поверхности Σ. Так как $\vec{r}(t^{(1)}) = \vec{r}(t^{(2)})$, то кривая ℓ_S также замкнута.

Для точек кривой ℓ_S функции $\vec{n}_+(u,v)$ и $\vec{n}_-(u,v)$ являются непрерывными функциями $\vec{n}_+(h_1(t), h_2(t))$ и $\vec{n}_-(h_1(t), h_2(t))$ параметра t при $t \in [t^{(1)}, t^{(2)}]$. Это означает, в частности, что определены векторы

$$\vec{n}_+^{(1)} = \vec{n}_+\big(h_1(t^{(1)}), h_2(t^{(1)})\big) = \lim_{t\to t^{(1)}+0} \vec{n}_+\big(h_1(t), h_2(t)\big),$$

$$\vec{n}_+^{(2)} = \vec{n}_+\big(h_1(t^{(2)}), h_2(t^{(2)})\big) = \lim_{t\to t^{(2)}-0} \vec{n}_+\big(h_1(t), h_2(t)\big)$$

и аналогичные векторы $\vec{n}_-^{(1)}$ и $\vec{n}_-^{(2)}$ для функции $\vec{n}_-(h_1(t), h_2(t))$.

Оказывается, что, несмотря на то, что для замкнутой кривой ℓ_D выполняются равенства

$$h_i(t^{(1)}) = \lim_{t\to t^{(2)}+0} h_1(t) = h_i(t^{(2)}) = \lim_{t\to t^{(2)}-0} h_i(t), \quad i = 1, 2,$$

равенство $\vec{n}_+^{(1)} = \vec{n}_+^{(2)}$ может быть не выполнено.

В качестве простейшего геметрического примера такой ситуации приведем поверхность Σ_M, называемую (рис. 4.1), получающуюся путем "закручивания" на угол π и последующего склеивания *вытянутого* прямоугольника.

Рис.4.1

Параметрические уравнения листа Мсбиуса можно взять в виде:

$$\vec{r} = \vec{r}(t,s) = \left[R\cos t + hs\cos t \sin\frac{t}{2},\ R\sin t + hs\sin t\sin\frac{t}{2},\ sh\cos\frac{t}{2} \right]^T,$$

$$(t,s) \in D = \big\{(t,s)\ :\ 0 \le t \le 2\pi,\ -1 \le s \le 1\big\}.$$

Из геометрического описания листа Мсбиуса ясно, что S_M является гладкой поверхностью (это, естественно, может быть доказано и аналитически с использованием указанных параметрических уравнений Σ_M).

Кривая ℓ с параметрическими уравнениями:

$$\ell\colon \vec{r} = \vec{r}(t) = [R\cos t,\ R\sin t,\ 0]^T, \quad t \in [0, 2\pi],$$

является окружностью радиуса R в плоскости $z = 0$. Эта окружность, очевидно, есть замкнутая кривая, которая лежит на поверхности Σ_M (ей соответствуют те точки Σ_M, для которых $s = 0$).

Для поверхности Σ_M:

$$\vec{r}\,'_t = \begin{bmatrix} -R\sin t + hs\Big(-\sin t\sin\dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{2}\cos t\cos\dfrac{t}{2}\Big) \\ R\cos t + hs\Big(\cos t\sin\dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{2}\sin t\cos\dfrac{t}{2}\Big) \\ -\dfrac{1}{2}sh\sin\dfrac{t}{2} \end{bmatrix},\ \vec{r}\,'_s = \begin{bmatrix} h\cos t\sin\dfrac{t}{2} \\ h\sin t\sin\dfrac{t}{2} \\ h\cos\dfrac{t}{2} \end{bmatrix}.$$

$$\vec{N} = [\vec{r}\,'_t, \vec{r}\,'_s] = \begin{bmatrix} Rh\cos t\cos(t/2) + h^2 s\sin t(1+\cos t)/2 \\ Rh\sin t\cos(t/2) + h^2 s(\sin^2 t - \cos t)/2 \\ -Rh\sin(t/2) - h^2 s\sin^2(t/2) \end{bmatrix}.$$

$$\|\vec{N}\|^2 = h^2\big(R + hs\sin(t/2)\big)^2 + h^4 s^2/4.$$

Для точек кривой ℓ выполнены равенства: $s = 0$, $\vec{N}\|^2 = Rh$ и, значит, на ℓ

$$\vec{n}_+ = \vec{n}_+(t) = \left[\cos t \cos \frac{t}{2},\ \sin t \cos \frac{t}{2},\ -\sin \frac{t}{2}\right]^T .$$

Поэтому

$$\vec{n}_+^{(1)} = \lim_{t \to +0} \vec{n}_+(t) = [1,\ 0,\ 0]^T , \quad \vec{n}_+^{(2)} = \lim_{t \to 2\pi - 0} \vec{n}_+(t) = [-1,\ 0,\ 0]^T .$$

Таким образом, для поверхности S_M и кривой ℓ_1 действительно $\vec{n}_+^{(1)} \neq \vec{n}_+^{(2)}$.

Отметим, что в рассмотренном примере выполняется равенство $\vec{n}_+^{(2)} = \vec{n}_-^{(1)} = -\vec{n}_+^{(1)}$, что является частным случаем следующего общего утверждения: для любой гладкой поверхности Σ и любой гладкой замкнутой кривой ℓ, лежащай на Σ, возможны только два случая – либо $\vec{n}_+^{(2)} = \vec{n}_+^{(1)}$, либо $\vec{n}_+^{(2)} = -\vec{n}_+^{(1)}$. Эти две возможности разделяют гладкие поверхности в $I\!R^3$ на двухсторонние и односторонние. Поверхность Σ называется двухсторонней, если $\vec{n}_+^{(2)} = \vec{n}_+^{(1)}$ для любой гладкой замкнутой кривой ℓ, лежащей на Σ. Если же на Σ существует гладкая замкнутая кривая ℓ, для которой $\vec{n}_+^{(2)} = -\vec{n}_+^{(1)}$, то поверхность Σ называется односторонней; в частности, лист Мсбиуса является односторонней поверхностью в $I\!R^3$.

Заметим, что в случае односторонней поверхности Σ для некоторых кривых ℓ на Σ может выполняться и равенство $\vec{n}_+^{(2)} = \vec{n}_+^{(1)}$ (в качестве упражнения приведите пример такой кривой на листе Мсбиуса).

Для гладкой двухсторонней поверхности Σ в $I\!R^3$ в каждой точке $P \in \Sigma$ определены два взаимно противоположных вектора единичных нормалей $\vec{n}_+(P)$ и $\vec{n}_-(P) = -\vec{n}_+(P)$, причем функции $\vec{n}_+(P)$ и $\vec{n}_-(P)$ непрерывны в каждой точке P и непрерывны на каждой гладкой замкнутой кривой, лежащей на Σ.

4.3. Поверхностный интеграл второго рода

Пусть задана двухсторонняя поверхность Σ и на ней векторная функция $\vec{f}(P)$. Для поверхности Σ выберем одну из двух функций, $\vec{n}_+(P)$ или $\vec{n}_-(P)$, задающих нормаль к Σ в каждой точке $P \in \Sigma$. Как было сказано, каждая из этих функций непрерывна на Σ. Поверхность Σ с заданной на ней функцией $\vec{n}(P)$ будем называть ориентированной поверхностью и обозначать Σ_+ (в случае $\vec{n}(P) = \vec{n}_+(P)$) или Σ_- (при $\vec{n}(P) = \vec{n}_-(P)$).

Выберем разбиение поверхности Σ на части $\Delta\sigma_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, точки

$P_i \in \Delta\sigma_i$ и рассмотрим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} \big(\vec{f}(P_i^*), \vec{n}(P_i^*)\big)\big|\Delta\sigma_i\big|,$$

где $\big|\Delta\sigma_i\big|$ – площадь части $\Delta\sigma_i$ поверхности Σ. Эта интегральная сумма соответствует следующему поверхностному интегралу первого рода:

$$\iint\limits_{\Sigma} \big(\vec{f}(P), \vec{n}(P)\big) d\sigma.$$

Определение 4.2. *Поверхностным интегралом второго рода функции $\vec{f}(P)$ по ориентированной поверхности Σ_+ называется число*

$$I = \iint\limits_{\Sigma} \big(\vec{f}(P), \vec{n}_+(P)\big) d\sigma;$$

этот интеграл обозначается обычно так:

$$I = \iint\limits_{\Sigma_+} \big(\vec{f}(P), \overrightarrow{d\sigma}\big).$$

Итак, интеграл ворого рода сводится, к поверхностному интегралу первого рода специального вида. Из его определения ясно, что

$$\iint\limits_{\Sigma_+} \big(\vec{f}(P), \overrightarrow{d\sigma}\big) = -\iint\limits_{\Sigma_-} (f, \overrightarrow{d\sigma}),$$

так как $\vec{n}_+(P) = -\vec{n}_-(P)$.

Рассмотрим вопрос о вычислении поверхностного интеграла второго рода в том случае, когда уравнение поверхности Σ в декартовых координатах имеет вид: $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$, и $\vec{f} = \vec{f}^{(1)} = \big[0, 0, f_z(x, y, z)\big]^T$. Поверхность Σ в этом случае является частью графика функции $g(x, y)$, лежащей над областью D_{xy}. Такое задание Σ возможно в том случае, когда Σ однозначно ортогонально проектируется на плоскость Oxy.

Отметим, что поверхность Σ, заданная указанным образом, является двухсторонней. В качестве вектора нормали к Σ можно взять один из двух векторов, $\vec{N}_+$ или $\vec{N}_-$, где

$$\vec{N}_\pm = \pm\left[-\frac{\partial y}{\partial x},\ -\frac{\partial y}{\partial y},\ 1\right]^T.$$

При этом $(\vec{N}_+, \vec{k}) = 1$ в каждой точке Σ, а $(\vec{N}_-, \vec{k}) = -1$. Это означает, что вектор $\vec{N}_+$ образует острый угол с осью Oz, а вектор $\vec{N}_-$ – тупой угол.

Таким образом, можно сказать, что выбор на Σ вектора $\vec{N}_+$ в качестве нормали соответствует выбору $''$верхней$''$ стороны Σ, а выбор $\vec{N}_-$ — $''$нижней$''$ стороны Σ.

Рассматрим, например, поверхность S_+ (т. е. Σ с нормалью $\vec{N}_+$ на ней). Тогда

$$\vec{n} = \frac{1}{\|\vec{N}_+\|}\vec{N}_+ = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial g}{\partial y}\right)^2}} \left[-\frac{\partial g}{\partial x},\ -\frac{\partial g}{\partial y},\ 1\right]^T.$$

Так как $f_x = f_y = 0$, то

$$(\vec{f}, \vec{n}) = f_z(x, y, z) \left[1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2\right]^{-1/2}.$$

Поэтому в рассматриваемом случае

$$\int\limits_{\Sigma_+} (\vec{f}, \overrightarrow{d\sigma}) = \iint\limits_{\Sigma} \frac{f_z(x, y, z)}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial g}{\partial y}\right)^2}} d\sigma.$$

Используя формулу (4.6) для вычисления поверхностного интеграла первого рода, получим:

$$\iint\limits_{\Sigma_+} (\vec{f}^{(1)}, \overrightarrow{d\sigma}) = \iint\limits_{D_{xy}} f_z(x, y, g(x, y))dx\,dy, \quad \vec{f}^{(1)} = f_z(x, y, z)\vec{k}, \tag{4.7}$$

где $\Sigma\colon \big\{(x, y, z)\colon z = g(x, y), (x, y) \in D_{xy}\big\}$.

Аналогично, если в декартовых координатах поверхность Σ задается уравнением $y = h(x, z)$, $(x, z) \in D_{xz}$, в качестве Σ_+ выбрана $''$правая$''$ сторона Σ и $\vec{f} = \vec{f}^{(2)} = f_y(x, y, z)\vec{j}$, то

$$\iint\limits_{\Sigma_+} (\vec{f}^{(2)}, \overrightarrow{d\sigma}) = \iint\limits_{D_{xz}} f_y(x, h(x, z), z)dx\,dz, \quad \vec{f}^{(2)} = f_y(x, y, z)\vec{j}, \tag{4.8}$$

где $\Sigma\colon \big\{(x, y, z)\colon y = h(x, z), (x, z) \in D_{xz}\big\}$.

Наконец, если в декартовых координатах Σ задана уравнением $x = p(y, z)$, $(y, z) \in D_{yz}$, Σ_+ – $''$передняя$''$ сторона Σ и $\vec{f} = \vec{f}^{(3)} = f_x(x, y, z)\vec{i}$, то

$$\iint\limits_{\Sigma_+} (\vec{f}^{(3)}, \overrightarrow{d\sigma}) = \iint\limits_{D_{yz}} f_x(p(y, z), y, z), z)dy\,dz, \quad \vec{f}^{(3)} = f_x(x, y, z)\vec{i}, \tag{4.9}$$

где $\Sigma\colon \big\{(x, y, z)\colon x = p(y, z), (y, z) \in D_{yz}\big\}$.

Предположим теперь поверхность S однозначно проектируется на все три координатные плоскости Oxy, Oxz и Oyz, а $\vec{f}=f_x(x,y,z)\vec{i}+f_y(x,y,z)\vec{j}+f_z(x,y,z)\vec{k}$. Выберем, например, ″верхнюю″ сторону Σ и пусть она будет в то же самое время и ″правой″, и ″передней″ сторонами Σ. Тогда из равенств (4.7)-(4.9) получим:

$$\iint\limits_{\Sigma_+}(\vec{f},\overrightarrow{d\sigma})=\iint\limits_{\Sigma_+}\big(f_x(x,y,z)\vec{i},\overrightarrow{d\sigma}\big)+\iint\limits_{\Sigma_+}(f_y(x,y,z)\vec{j},\overrightarrow{d\sigma})+$$

$$+\iint\limits_{\Sigma_+}(f_z(x,y,z)\vec{k},\overrightarrow{d\sigma})=\iint\limits_{D_{yz}}f_x\big(p(y,z),y,z\big)dy\,dz+$$

$$+\iint\limits_{D_{xz}}f_y\big(x,h(x,z),z\big)dx\,dz+\iint\limits_{D_{xy}}f_z(x,y,g(x,y))dx\,dy. \tag{4.10}$$

Если же поверхность Σ не обладает указанными свойствами, но может быть разбита на конечное число частей $\Sigma^{(k)}$, каждая из которых однозначно проектируется на координатные плоскости, то поверхностный интеграл второго рода может быть вычислен как сумма интегралов по всем частям $\Sigma^{(k)}$ (поскольку поверхностный интеграл второго рода имеет свойство аддитивности); для каждой $\Sigma^{(k)}$ интеграл в этом случае вычисляется по формуле (4.10).

4.4. Теорема Гаусса-Остроградского

Если поверхность Σ замкнута, то соответствующий поверхностный интеграл второго рода обычно обозначается так:

$$\oiint\limits_{\Sigma_+}(\vec{f},\overrightarrow{d\sigma}).$$

Замкнутой поверхностью является, например, граница выпуклой области в $I\!R^3$. Отметим, что замкнутая поверхность является двухсторонней. Поверхностный интеграл второго рода по замкнутой поверхности может быть сведен к тройному интегралу (аналогично тому, что криволинейный интеграл второго рода по замкнутой кривой сводится к двойному интегралу в соответствии с теоремой Грина). Для формулировки соответствующего утверждения целесообразно ввести следующее определение.

Определение 4.3. *Пусть* (x,y,z) *– декартовы координаты в* $I\!R^3$ *и* $\vec{f}(x,y,z)=f_x(x,y,z)\vec{i}+f_y(x,y,z)\vec{j}+f_z(x,y,z)\vec{k}$ *– непрерывно дифференцируемая в точке* $P(x,y,z)$ *векторная функция. Дивергенцией функции*

$\vec{f}$ в точке P называется выражение

$$\mathrm{div}\vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z},$$

где все частные производные вычислены в P.

Теорема 4.2 (Гаусса-Остроградского). *Пусть Ω – замкнутая область в $\mathbb{R}^3$, ограниченная гладкой замкнутой поверхностью Σ, а Σ_+ – поверхность Σ, ориентированная так, что в каждой ее точке выбрана нормаль $\vec{n}$, являющаяся внешней по отношению к области Ω. Пусть также функция $\vec{f}(P)\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ непрерывно дифференцируема на области Ω. Тогда*

$$\mathop{{\int\!\!\!\!\int}\!\!\!\!\!\!\!\!\!\;\;\;\bigcirc}_{\Sigma_+} (\vec{f}, \overrightarrow{d\sigma}) = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{div}\vec{f}\, dV. \tag{4.11}$$

Доказательство. Любая ограниченная область с гладкой границей может быть разбита на конечное число правильных областей. Область Ω назовем правильной, если она является правильной одновременно относительно плоскостей Oxy, Oxz и Oyz (области, правильные относительно координатных плоскостей, определены в п.2.2). Правильной будет, например, любая выпуклая область.

Докажем сначала теорему Гаусса-Остроградского для случая, когда Ω – правильная относительно плоскости Oxy область и $\vec{f} = \vec{f}^{(1)}(P) = f_z(x, y, z)\vec{k}$.

На рис.4.2 изображены области Ω, D_{xy} и части $\Sigma_+^{(1)}$, $\Sigma_+^{(2)}$, $\Sigma_+^{(3)}$ (с указанными на них нормалями), на которые в этом случае может быть разбита граница Σ_+ области Ω. Естественно назвать $\Sigma_+^{(1)}$ нижней границей Ω, $\Sigma_+^{(2)}$ – верхней границей, а $\Sigma_+^{(3)}$ – боковой.

Рис.4.2

По свойству аддитивности поверхностного интеграла –

$$\oiint\limits_{\Sigma_+}(\vec{f},\overrightarrow{d\sigma}) = \iint\limits_{\Sigma_+^{(1)}}(\vec{f}^{(1)},\overrightarrow{d\sigma}) + \iint\limits_{\Sigma_+^{(3)}}(\vec{f}^{(1)},\overrightarrow{d\sigma}) + \iint\limits_{\Sigma_+^{(3)}}(\vec{f}^{(1)},\overrightarrow{d\sigma}). \tag{4.12}$$

Рассмотрим поверхностный интеграл по $\Sigma_+^{(1)}$. Уравнение $\Sigma^{(1)}$ имеет вид: $z = g_1(x,y)$, $(x,y) \in D_{xy}$. Для нормали $\vec{N}^{(1)}$ получим:

$$\vec{N}(1) = \pm\left[\frac{\partial g_1}{\partial x},\ \frac{\partial g_1}{\partial y},\ -1\right]^T.$$

Так как внешняя по отношению к Ω нормаль $\Sigma^{(1)}$ образует с осью Oz тупой угол, то

$$\vec{n}_+^{(1)} = \frac{\vec{N}_+^{(1)}}{\|\vec{N}_+^{(1)}\|} = \left[1 + \left(\frac{\partial g_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g_1}{\partial y}\right)^2\right]^{-1/2}\left[\frac{\partial g_1}{\partial x},\ \frac{\partial g_1}{\partial y},\ -1\right]^T$$

и $(\vec{f}^{(1)},\vec{n}_+^{(1)}) = -f_2(x,y,z)\left[1 + \left(\frac{\partial g_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g_1}{\partial y}\right)^2\right]^{-1/2}$. Поэтому в соответствии с формулой (4.5)

$$\iint\limits_{\Sigma_+^{(1)}}(\vec{f}^{(1)},\overrightarrow{d\sigma}) = -\iint\limits_{\Sigma^{(1)}} f_z(x,y,z)\left[1 + \left(\frac{\partial g_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g_1}{\partial y}\right)^2\right]^{-1/2} d\sigma =$$

$$= -\iint\limits_{D_{x,y}} f_z\big(x,y,g_1(x,y)\big)dS. \tag{4.13}$$

Аналогично для поверхности $\Sigma_+^{(2)}$:

$$\vec{N}^{(2)} = \pm\left[\frac{\partial g_2}{\partial x},\ \frac{\partial g_2}{\partial y},\ -1\right]^T,$$

$$\vec{n}_+^{(2)} = \left[1 + \left(\frac{\partial g_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g_2}{\partial y}\right)^2\right]^{-1/2}\left[-\frac{\partial g_2}{\partial x},\ -\frac{\partial g_2}{\partial y},\ 1\right]^T,$$

$$(\vec{f}^{(1)},\vec{n}_+^{(2)}) = f_z(x,y,z)\left[1 + \left(\frac{\partial g_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g_2}{\partial y}\right)^2\right]^{-1/2},$$

$$\iint\limits_{\Sigma_+^{(2)}}(\vec{f}^{(1)},\overrightarrow{d\sigma}) = \iint\limits_{\Sigma^{(2)}} f_z(x,y,z)\left[1 + \left(\frac{\partial g_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g_2}{\partial y}\right)^2\right]^{-1/2} d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{D_{x,y}} f_z\big(x, y, g_2(x, y)\big) dS. \tag{4.14}$$

Наконец, на поверхности $\Sigma_+^{(3)}$ нормаль $\vec{N}^{(3)}$ ортогональна вектору $\vec{k}$. Значит, $(f^{(1)}, \vec{n}_+^{(3)}) = 0$ и

$$\int\limits_{\Sigma_+^{(3)}} (\vec{f}^{(1)}, \overrightarrow{d\sigma}) = 0. \tag{4.15}$$

Таким образом, из равенств (4.12)-(4.15) получаем:

$$\oiint\limits_{\Sigma_+} (\vec{f}^{(1)}, \overrightarrow{d\sigma}) = \iint\limits_{D_{x,y}} \Big[f_z\big(x, y, g_2(x, y)\big) - f_z\big(x, y, g_1(x, y)\big) \Big] dS. \tag{4.16}$$

С другой стороны, $\mathrm{div} \vec{f}^{(1)} = \dfrac{\partial f_z}{\partial z}$ и по формуле вычисления тройного интеграла в декартовых координатах получим:

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{div} \vec{f}^{(1)} dV = \iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial f_z}{\partial z} dz\, dy\, dz = \iint\limits_{D_{xy}} dS \int\limits_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} \frac{\partial f_z(x, y, z)}{\partial z} dz =$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} \Big[f_z\big(x, y, g_1(x, y)\big) - f_z\big(x, y, g_1(x, y)\big) \Big] dS. \tag{4.17}$$

Теперь из равенств (4.16) и (4.17) следует соотношение (4.11) для правильной относительно плоскости Oxy области Ω и $\vec{f} = \vec{f}^{(1)}$.

Точно так же устанавливается равенство (4.11) и в тех случаях, когда Ω правильна относительно Oxz и $\vec{f} = \vec{f}^{(2)} = f_y(x, y, z)\vec{j}$ или когда Ω правильна относительно Oyz и $\vec{f} = \vec{f}^{(3)} = f_x(x, y, z)\vec{i}$.

Таким образом, для правильной области Ω справедливы равенства:

$$\iint\limits_{\Sigma_+} (\vec{f}^{(1)}, \overrightarrow{d\sigma}) = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{div} \vec{f}^{(1)} dV, \quad \iint\limits_{\Sigma_+} (\vec{f}^{(2)}, \overrightarrow{d\sigma}) = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{div} \vec{f}^{(2)} dV,$$

$$\iint\limits_{\Sigma_+} (\vec{f}^{(3)}, \overrightarrow{d\sigma}) = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{div} \vec{f}^{(3)} dV.$$

Так как $\vec{f} = \vec{f}^{(1)} + \vec{f}^{(2)} + \vec{f}^{(3)}$, то складывая эти три равенства, получим:

$$\iint\limits_{\Sigma_+} (\vec{f}, \overrightarrow{d\sigma}) = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{div} \vec{f} dV.$$

Таким образом, утверждение теоремы Гаусса-Остроградского доказано для правильной области Ω.

Пусть теперь область Ω разбита гладкой поверхностью Γ на две правильные области: Ω_1 и Ω_2 (рис.4.3). Общую границу Ω и Ω_1 обозначим $\Sigma^{(1)}$, а общую границу Ω и Ω_2 – $\Sigma^{(2)}$.

Рис.4.3

Тогда

$$\iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div}\vec{f} dV = \iiint\limits_{\Omega_1} \operatorname{div}\vec{f} dV + \iiint\limits_{\Omega_2} \operatorname{div}\vec{f} dV \tag{4.18}$$

$$\iiint\limits_{\Omega_1} \operatorname{div}\vec{f} dV = \iint\limits_{\Sigma_+^{(1)}} (\vec{f}, \overrightarrow{d\sigma}) + \iint\limits_{\Gamma_+^{(1)}} (\vec{f}, \overrightarrow{d\sigma}), \tag{4.19}$$

$$\iiint\limits_{\Omega_2} \operatorname{div}\vec{f} dV = \iint\limits_{\Sigma_+^{(2)}} (\vec{f}, \overrightarrow{d\sigma}) + \iint\limits_{\Gamma_+^{(2)}} (\vec{f}, \overrightarrow{d\sigma}), \tag{4.20}$$

где $\Gamma_+^{(1)}$ – ориентированная поверхность Γ с нормалью $\vec{n}_+^{(1)}$, внешней по отношению к Ω_1, а $\Gamma_+^{(2)}$ – тоже ориентированная поверхность Γ, но с нормалью $\vec{n}_+^{(2)}$, внешней по отношению к Ω_2. Ясно, что $\vec{n}_+^{(1)} = -\vec{n}_+^{(2)}$ и поэтому

$$\iint\limits_{\Gamma_+^{(1)}} (\vec{f}, \overrightarrow{d\sigma}) = -\iint\limits_{\Gamma_+^{(2)}} (\vec{f}, \overrightarrow{d\sigma}).$$

Складывая теперь равенства (4.19) и (4.20), получим из (4.18) формулу (4.11) для рассматриваемой области Ω. Ясно, что аналогичные рассуждения применимы и в случае, когда Ω разбита на любое конечное число правильных областей, что и завершит доказательство теоремы Гаусса-Остроградского.

4.5. Интегрирование по частям в $I\!R^3$

Теорема Гаусса-Остроградского позволяет получить формулу, являющуюся в случае пространства $I\!R^3$ аналогом формулы интегрирования по частям для обычного определенного интеграла. Пусть Ω – ограниченная область в $I\!R^3$ с гладкой границей Σ и $u(p)$ и $\vec{v}(p) = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$ – непрерывно дифференцируемые в Ω функции. Тогда

$$\mathrm{div}(u\vec{v}) = \frac{\partial(uv_x)}{\partial x} + \frac{\partial(uv_y)}{\partial y} + \frac{\partial(uv_z)}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}v_x + \frac{\partial u}{\partial y}v_y + \frac{\partial u}{\partial z}v_z + \Big(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\Big) = (\mathrm{grad}u, \vec{v}) + u\mathrm{div}\vec{v}.$$

Используя равенство (4.11), получим

$$\iiint\limits_{\Omega} u\mathrm{div}\vec{v}dV = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{div}(u\vec{v})dV - \iiint\limits_{\Omega}(\mathrm{grad}u, \vec{v})dV =$$

$$= -\iiint\limits_{\Omega}(\mathrm{grad}u, \vec{v})dV + \iint\limits_{\Sigma_+}(u\vec{v}, \overline{d\sigma}) =$$

$$= -\iiint\limits_{\Omega}(\mathrm{grad}u, \vec{v})dV + \iint\limits_{\Sigma} u(\vec{v}, \vec{n}_+)d\sigma =$$

$$= -\iiint\limits_{\Omega}(\mathrm{grad}u, \vec{v})dV + \iint\limits_{\Sigma} uv_n d\sigma, \tag{4.21}$$

где $v_n = (\vec{v}, \vec{n}_+)$ – проекция вектора $\vec{v}$ на направление внешней для области Ω нормали $\vec{n}_+$.

Формула (4.21) называется формулой интегрирования по частям в $I\!R^3$.

4.6. Теорема Стокса. Ротор

Рассмотрим в $I\!R^3$ гладкую ориентированную поверхность Σ_+, целиком лежащую в ограниченной области Ω. Обозначим ℓ замкнутую кривую в $I\!R^3$, являющуюся краем [1] поверхности Σ_+ и будем считать ℓ гладкой кривой. Зададим на ℓ направление, согласованное с ориентацией Σ_+: именно, в качестве направления на ℓ возьмем то из двух возможных направлений, при движении в котором по ℓ поверхность Σ остается ″слева″, а вектор $\vec{n}_+$ нормали на Σ_+ направлен ″вверх″. Так ориентированную кривую ℓ обозначим ℓ_+.

[1] Сформулировать точное определение понятия ″край гладкой поверхности″ не представляется возможным в рамках данного пособия и поэтому мы вынуждены опираться далее на наглядные геометрические представления.

На рис.4.4 изображены область Ω, поверхность Σ_+ и кривая ℓ_+.

Рис.4.4

Пусть в области Ω задана непрерывно дифференцируемая функция $\vec{f}(P)$. Криволинейный интеграл второго рода $\oint\limits_{\ell_+}(\vec{f},\overrightarrow{d\ell})$ оказывается связанным с некоторым поверхностным интегралом по Σ_+. Для формулировки соответствующего утверждения введем следующее определение.

Определение 4.4. *Пусть (x,y,z) – декартовы координаты в $I\!R^3$ и $\vec{f}(x,y,z) = f_x(x,y,z)\vec{i} + f_y(x,y,z)\vec{j} + f_z(x,y,z)\vec{k}$ – непрерывно дифференцируемая в точке $P(x,y,z)$ векторная функция. Ротором функции $\vec{f}$ в точке P называется вектор*

$$\mathrm{rot}\vec{f} = \Big(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\Big)\vec{i} + \Big(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\Big)\vec{j} + \Big(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\Big)\vec{k}, \tag{4.22}$$

где все частные производные вычислены в точке P.

Теорема 4.3 (Стокса.) *Пусть Ω – ограниченная область в $I\!R^3$, внутри которой лежит гладкая ориентированная поверхность Σ_+ с кусочно-гладким краем ℓ_+ и направление на ℓ_+ согласовано с ориентацией Σ_+. Пусть также функция $\vec{f}(P)$ непрерывно дифференцируема в Ω. Тогда*

$$\oint\limits_{\ell_+}(\vec{f},\overrightarrow{d\ell}) = \iint\limits_{\Sigma_+}(\mathrm{rot}\vec{f},\overrightarrow{d\sigma}). \tag{4.23}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда поверхность Σ правильна относительно плоскости Oxy, а $\vec{f} = \vec{f}^{(1)}(x,y,z) = f_x(x,y,z)\vec{i} + f_y(x,y,z)\vec{j}$. Правильная относительно Oxy поверхность Σ однозначно ортогонально проектируется на плоскость Oxy (ее проекцией является область D_{xy}), а кривая ℓ при этом проектируется в кусочно-гладкую кривую ℓ_{xy} на плоскости Oxy, являющуюся границей D_{xy}. Ориентацию Σ_+ выберем так, что в каждой точке S нормаль $\vec{n}_+$ образует острый угол с осью Oz.

В рассматриваемом случае

$$\mathrm{rot}\vec{f} = \mathrm{rot}\vec{f}^{(1)} = -\frac{\partial f_y}{\partial z}\vec{i} + \frac{\partial f_x}{\partial z}\vec{j} + \Big(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\Big)\vec{k}, \tag{4.24}$$

$$\vec{n}_+ = \left[1 + \Big(\frac{\partial g}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial g}{\partial y}\Big)^2\right]^{-1/2} [-\partial g/\partial x,\ -\partial g/\partial y,\ 1]^T,$$

где $z = g(x,y)$ – уравнение поверхности Σ. Поэтому

$$\iint\limits_{\Sigma_+} (\mathrm{rot}\vec{f}^{(1)}, \overrightarrow{d\sigma}) =$$

$$= \iint\limits_{\Sigma} \left[1 + \Big(\frac{\partial g}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial g}{\partial y}\Big)^2\right]^{-1/2} \Big(\frac{\partial f_y}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\Big) d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} [\ \frac{\partial f_y\big(x,y,g(x,y)\big)}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f_y\big(x,y,g(x,y)\big)}{\partial x} -$$

$$-\frac{\partial f_x\big(x,y,g(x,y)\big)}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f_x\big(x,y,g(x,y)\big)}{\partial y}\ ]\, dx\, dy. \tag{4.25}$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(f_y\big(x,y,g(x,y)\big)\Big) = \frac{\partial f_y\big(x,y,g(x,y)\big)}{\partial x} + \frac{\partial f_y\big(x,y,g(x,y)\big)}{\partial z}\ \frac{\partial g}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(f_x\big(x,y,g(x,y)\big)\Big) = \frac{\partial f_x\big(x,y,g(x,y)\big)}{\partial y} + \frac{\partial f_x\big(x,y,g(x,y)\big)}{\partial z}\ \frac{\partial g}{\partial y},$$

то

$$\iint\limits_{\Sigma_+} (\vec{f}^{(1)}, \overrightarrow{d\sigma}) = \iint\limits_{D_{xy}} \left[\frac{\partial}{\partial x}\Big(f_y\big(x,y,g(x,y)\big)\Big) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(f_x\big(x,y,g(x,y)\big)\Big)\right] dx\, dy. \tag{4.26}$$

По теореме Грина

$$\iint\limits_{D_{xy}} \left[\frac{\partial f_y\big(x,y,g(x,y)\big)}{\partial x} - \frac{\partial f_x\big(x,y,g(x,y)\big)}{\partial y}\right] dx\, dy = \oint\limits_{\ell_{xy}^+} (\vec{F}, \overrightarrow{d\ell}), \tag{4.27}$$

где

$$\vec{F} = \vec{F}(x,y) = \big[f_x\big(x,y,g(x,y)\big),\ f_y\big(x,y,g(x,y)\big)\big]^T,$$

а ℓ_{xy}^+ – ориентированная кривая ℓ_{xy}, направление на которой согласовано с областью D_{xy}. Отметим, что направление на ℓ_{xy}^+ естественным образом согласовано и с направлением на ℓ_+.

Рассмотрим теперь криволинейный интеграл, входящий в формулу (4.23) для $\vec{f} = \vec{f}^{(1)}$. Пусть параметрические уравнения ℓ_+ имеют вид:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = [x(t),\ y(t),\ z(t)]^T, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Так как кривая ℓ_+ лежит на поверхности S, то $z(t) = g\big(x(t), y(t)\big)$. Используя определение криволинейного интеграла и параметрические уравнения ℓ_+, получим:

$$\oint\limits_{\ell_+} (\vec{f}^{(1)}, \overrightarrow{d\ell}) =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big[f_x\Big(x(t), y(t), g\big(x(t), y(t)\big)\Big)x'(t) + f_y\Big(x(t), y(t), g\big(x(t), y(t)\big)\Big)y'(t)\Big]dt. \tag{4.28}$$

Проекция ℓ_{xy}^+ на плоскость Oxy кривой ℓ_+ имеет параметрические уравнения:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = [x(t),\ y(t),\ 0]^T, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\ell_{xy}^+} (\vec{F}, \overrightarrow{d\ell}) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \big[F_x(t)x'(t) + F_y(t)y'(t)\big]dt =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big[f_x\Big(x(t), y(t), g\big(x(t), y(t)\big)\Big)x'(t) + f_y\Big(x(t), y(t), g\big(x(t), y(t)\big)\Big)y'(t)\Big]dt.$$

Теперь из равенств (4.26)–(4.28) следует равенство

$$\int\limits_{\ell_+} (\vec{f}^{(1)}, \overrightarrow{d\ell}) = \iint\limits_{\Sigma_+} (\vec{f}^{(1)}, \overrightarrow{d\sigma}), \tag{4.29}$$

т. е. теорема Стокса при $\vec{f} = \vec{f}^{(1)}$ в случае поверхности Σ_+ , правильной относительно Oxy.

Аналогично рассматриваются случаи, когда Σ_+ правильна относительно плоскости Oxz; а $\vec{f} = \vec{f}^{(2)} = f_x\vec{i} + f_z\vec{k}$ и когда Σ_+ правильна относительно Oyz, и $\vec{f} = \vec{f}^{(3)} = f_x\vec{i} + f_u\vec{j}$. При этом получаются равенства:

$$\oint\limits_{\ell_+} (\vec{f}^{(2)}, \overrightarrow{d\ell}) = \iint\limits_{\Sigma_+} (\vec{f}^{(2)}, \overrightarrow{d\sigma}), \tag{4.30}$$

$$\oint_{\ell_+}(\vec{f}^{(3)},\overrightarrow{d\ell}) = \iint_{\Sigma_+}(\vec{f}^{(3)},\overrightarrow{d\sigma}), \tag{4.31}$$

Если Σ_+ правильна, т. е. правильна одновременно относительно всех трех плоскостей Oxy, Oxz и Oyz, то справедливы все три равенства (4.29)–(4.31). Так как $2\vec{f} = \vec{f}^{(1)} + \vec{f}^{(2)} + \vec{f}^{(3)}$, то складывая эти равенства, получаем соотношение (4.23) в случае правильной поверхности Σ_+.

Для завершения доказательства теоремы Стокса остается заметить, что гладкую поверхность с кусочно-гладким краем всегда можно разбить на конечное число частей, являющихся правильными поверхностями. Так как для каждой из полученных частей справедливо равенство (4.23), то складывая все такие равенства, получим теорему Стокса для произвольной гладкой поверхности с кусочно-гладким краем.

Отметим, что теорема Грина является частным случаем теоремы Стокса и соответствует тому случаю, когда Σ является частью плоскости Oxy, $\vec{n}_+ = \vec{k}$ и $\vec{f} = f_x\vec{i} + f_y\vec{j}$. При этом $\mathrm{rot}\vec{f} = \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\vec{k}$.

4.7. Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования

Пусть в области $\Omega \subset I\!\!R^3$ задана такая непрерывно дифференцируемая функция $\vec{f}(P)$, что

$$\mathrm{rot}\vec{f} = \vec{0}. \tag{4.32}$$

Пусть также ℓ_+ – замкнутая ориентированная кусочно-гладкая кривая, целиком лежащая в области Ω. Будем вначале считать, что кривая ℓ_+ не имеет самопересечений. Предположим, что можно построить[1] такую гладкую ориентированную несамопересекающуюся поверхность Σ_+, лежащую в Ω, для которой кривая ℓ_+ является краем и направление на ℓ_+ согласовано с ориентацией Σ_+. Так как из (4.32) следует, что $\iint\limits_{\Sigma_+}(\mathrm{rot}\vec{f},\overrightarrow{d\sigma}) = 0$, то по теореме Стокса

$$\oint_{\ell_+}(\vec{f},\overrightarrow{d\ell}) = 0. \tag{4.33}$$

Если же кривая ℓ_+ имеет конечное число самопересечений, то ℓ_+ будет объединением конечного числа замкнутых кривых ℓ_+^i, и интеграл $\oint\limits_{\ell_+}(\vec{f},\overrightarrow{d\ell})$

[1] Требуемую поверхность можно построить не всегда; например, такой несамопересекающейся поверхности не существует для кривой ℓ в виде простого узла. Отметим, однако, что и для таких случаев последующие утверждения остаются верными, но их доказательство существенно усложняется.

будет суммой конечного числа таких же интегралов по кривым $\ell_+^{(i)}$, каждый из которых равен нулю в соответствии с равенством (4.33). Поэтому равенство (4.33) является верным и для кривой ℓ_+ с конечным числом самопересечений.

Пусть теперь в области Ω зафиксированы две точки P_1 и P_2. Рассмотрим две различные кусочно-гладкие кривые $\ell_+^{(1)}$ и $\ell_+^{(2)}$, целиком лежащие в Ω, каждая из которых соединяет точки P_1 и P_2 и ориентированные так, что P_1 является их начальной точкой, а P_2 – конечной (рис.4.5).

Рис.4.5

Обозначим $\ell_-^{(2)}$ кривую $\ell^{(2)}$, ориентированную в противоположном по сравнению с $\ell_+^{(2)}$ направлении (началом $\ell_-^{(2)}$ является точка P_2, концом – P_1). Ясно, что объединение ориентированных кривых $\ell_+^{(1)}$ и $\ell_-^{(2)}$ дает ориентированную замкнутую кусочно-гладкую кривую, которую обозначим ℓ_+.

Если для функции $\vec{f}$ в области Ω выполнено условие (4.32), то $\oint\limits_{\ell_+}(\vec{f},\overrightarrow{d\ell}) = 0$. По свойству аддитивности криволинейного интеграла

$$\oint\limits_{\ell_+}(\vec{f},\overrightarrow{d\ell}) = \int\limits_{\ell_+^{(1)}}(\vec{f},\overrightarrow{d\ell}) + \int\limits_{\ell_-^{(2)}}(\vec{f},\overrightarrow{d\ell}) = 0.$$

Из соотношения (3.9) следует, что

$$\int\limits_{\ell_-^{(2)}}(\vec{f},\overrightarrow{d\ell}) = -\int\limits_{\ell_+^{(2)}}(\vec{f},\overrightarrow{d\ell})$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{\ell_+^{(1)}}(\vec{f},\overrightarrow{d\ell}) = \int\limits_{\ell_+^{(2)}}(\vec{f},\overrightarrow{d\ell}). \tag{4.34}$$

Равенство (4.34) означает, что при выполнении указанных условий криволинейный интеграл второго рода не зависит от пути интегрирования, а зависит только от его начальной и конечной точек. Поэтому для непрерывно дифференцируемых функций $\vec{f}$, удовлетворяющих условию (4.32), криволинейный интеграл второго рода записывают часто в виде $\int\limits_{P_1}^{P_2}(\vec{f},\overrightarrow{d\ell})$.

5. Элементы теории поля

В физике принято называть функции, заданные в $I\!R^3$, термином ″поле″. Мы также будем сейчас использовать эту терминологию: если рассматривается функция $f\colon I\!R^3 \to I\!R$, то будем говорить о скалярном поле, а для функций $\vec{f}\colon I\!R^3 \to I\!R^3$ – о векторном поле. Декартовы координаты в $I\!R^3$ обозначим (x, y, z), а соответствующие координатные орты – $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

5.1. Потенциальное поле

Определение 5.1. *Векторное поле* $\vec{f} = f_x\vec{i} + f_y\vec{j} + f_z\vec{k}$ *называется потенциальным (в области* Ω*), если существует такая непрерывно дифференцируемая на* Ω *скалярная функция* $\varphi\colon I\!R^3 \to I\!R$*, что в каждой точке* Ω *выполнено равенство*

$$\vec{f} = \mathrm{grad}\varphi. \tag{5.1}$$

Скалярное поле φ *называется при этом потенциалом поля* $\vec{f}$*.*

Отметим, что из условия (5.1) следуют равенства:

$$f_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad f_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad f_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{5.2}$$

Приведем одно важное свойство потенциального поля.

Теорема 5.1 *Если поле* $\vec{f}$ *потенциально в области* Ω *и потенциал* φ *является дважды непрерывно дифференцируемой в* Ω *функцией, то*

$$\mathrm{rot}\vec{f} = \vec{0}. \tag{5.3}$$

Доказательство. Так как в соответствии с (5.2) $f_z = \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$ и $f_y = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$, то

$$\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y} = 0,$$

так как вторые частные производные потенциала φ предполагаются непрерывными. Аналогично доказываются равенства $\dfrac{\partial f_x}{\partial z} - \dfrac{\partial f_z}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial f_y}{\partial x} - \dfrac{\partial f_x}{\partial y} = 0$. Теперь из определения ротора (4.22) следует равенство (5.3).

Теорема 5.1 означает, что равенство (5.3) является необходимым условием потенциальности гладкого поля. Это же условие (5.3) оказывается и достаточным для того, чтобы непрерывно дифференцируемое поле $\vec{f}$ имело потенциал.

Теорема 5.2 *Если векторное поле $\vec{f}$ непрерывно дифференцируемо в области Ω и выполнено условие (5.3), то $\vec{f}$ является потенциальным полем, т. е. существует потенциал φ, удовлетворяющий равенству (5.1). При дополнительном условии $\varphi(P_0) = \varphi_0$, где P_0 – некоторая фиксированная точка области Ω, потенциал φ определяется единственным образом и может быть вычислен по формуле*

$$\varphi(P) = \varphi_0 + \int\limits_{P_0}^{P} (\vec{f}, \overrightarrow{d\ell}). \tag{5.4}$$

Доказательство. Отметим, прежде всего, что так как $\mathrm{rot}\vec{f} = \vec{0}$, то криволинейный интеграл $\int\limits_{\ell_+(P_0,P)} (\vec{f}, \overrightarrow{d\ell})$ в соответствии с п.4.7 не зависит от пути интегрирования $\ell_+(P_0, P)$, соединяющего точки P_0 и P, а зависит только от самих точек P_0 и P. Именно поэтому в равенстве (5.4) в обозначении криволинейного интеграла указаны только P_0 и P.

Докажем сначала, что функция φ, определяемая равенством (5.4) является потенциалом поля $\vec{f}$. Для этого достаточно доказать справедливость равенств (5.2).

Обозначим (x, y, z) декартовы координаты точки P и рассмотрим точку P' с координатами $(x, y + \Delta y, z)$. Будем обозначать $\varphi\big(P(x, y, z)\big)$ просто $\varphi(x, y, z)$. Тогда

$$\varphi(P') = \varphi(x, y + \Delta y, z) = \varphi_0 + \int\limits_{P_0}^{P'} (\vec{f}, \overrightarrow{d\ell}) \tag{5.5}$$

и написанный криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования, соединяющего точки P_0 и P'. Выберем этот путь так, чтобы он проходил через точку P и его часть между точками P и P' являлась отрезком (рис.5.1). Ясно, что если P и P' – внутренние точки области Ω и Δy достаточно мало, то такой выбор пути интегрирования всегда возможен. Тогда по свойству аддитивности криволинейного интеграла

Рис.5.1

$$\int\limits_{P_0}^{P'} (\vec{f}, \overrightarrow{d\ell}) = \int\limits_{P_0}^{P} (\vec{f}, \overrightarrow{d\ell}) + \int\limits_{P}^{P'} (\vec{f}, \overrightarrow{d\ell})$$

и из равенств (5.4) и (5.5) получим:

$$\varphi(x, y + \Delta y, z) = \varphi(x, y, z) + \int\limits_{P}^{P'} (\vec{f}, \overrightarrow{d\ell}). \tag{5.6}$$

Параметрическими уравнениями отрезка с началом в P и концом в P' являются:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = [x,\ y + t,\ z]^T, \quad t \in [0, \Delta y].$$

Поэтому $\vec{r}\,'(t) = [0, 1, 0]^T$ и

$$\int\limits_{P}^{P'} (\vec{f}, \overrightarrow{d\ell}) = \int\limits_{0}^{\Delta y} f_y(x, y + t, z) dt.$$

Применяя к полученному определенному интегралу теорему о среднем, получим равенство:

$$\int\limits_{P}^{P'} (\vec{f}, \overrightarrow{d\ell}) = f_y(x, y^*, x) \Delta y,$$

где $y^* \in [y, y + \Delta y]$. Теперь из равенства (5.6) найдем, что

$$\frac{\varphi(x, y + \Delta y, z) - \varphi(x, y, z)}{\Delta y} = f_y(x, y^*, z).$$

Так как функция f_y непрерывна, то переходя в этом равенстве к пределу при $\Delta y \to 0$, получим соотношение

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\varphi(x, y + \Delta y, z) - \varphi(x, y, z)}{\Delta y} = \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial y} = f_y(x, y, z),$$

т. е. второе из равенств (5.2). Два других равенства (5.2) доказываются аналогично и, значит, функция φ является потенциалом поля $\vec{f}$.

Для завершения доказательства теоремы осталось доказать только единственность потенциала φ.

Предположим, что существуют две такие функции φ_1 и φ_2, для которых $\mathrm{grad}\varphi_1 = \mathrm{grad}\varphi_2 = \vec{f}$, $\varphi_1(P_0) = \varphi_2(P_0) = \varphi_0$. Тогда для функции

$\psi = \varphi_1 - \varphi_2$ получим равенства $\mathrm{grad}\psi = 0$, $\psi(P_0) = 0$, из которых следует, что $\psi \equiv 0$ в области Ω и, значит, $\varphi_1 \equiv \varphi_2$. Это завершает доказательство теоремы 5.1.

В физических приложениях чаще всего вектор $\vec{f}$ является силой, при этом говорят о силовом поле. В этом случае интеграл $\int\limits_{\ell_+(P_1,P_2)} (\vec{f}, \overrightarrow{d\ell})$ называется работой A силового поля $\vec{f}$ вдоль пути $\ell_+(P_1, P_2)$ с началом в точке P_1 и концом в P_2. Для потенциального поля работа поля зависит от точек P_1 и P_2 и не зависит от пути, соединяющего эти точки, т. е. в этом случае $A = A(P_1, P_2)$. Из равенства (5.4) следует, что для потенциального поля $A(P, P_0) = \varphi(P) - \varphi(P_0)$ и, значит (из-за аддитивности криволинейного интеграла), $A(P_1, P_2) = \varphi(P_2) - \varphi(P_1)$ для любых точек P_1 и P_2, лежащих в области Ω. Это известный физический факт: работа поля равна разности потенциалов конечной и начальной точек.

Добавим еще, что если силовое поле потенциально, то в физике принято говорить о консервативных системах. Наоборот, если силовое поле не является потенциальным, то соответствующие системы обычно называют диссипативными; это будет, например, в том случае, если среди сил, действующих в системе, имеются силы трения.

5.2. Соленоидальное поле

Определение 5.2. *Непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$ называется соленоидальным в области Ω, если*

$$\mathrm{div}\vec{v} = 0 \tag{5.7}$$

в каждой точке Ω.

Определение 5.3. *Если для поля $\vec{v}$ существует такая непрерывно дифференцируемая функция $\vec{A}$, что*

$$\mathrm{rot}\vec{A} = \vec{v} \tag{5.8}$$

в области Ω, то $\vec{A}$ называется векторным потенциалом поля $\vec{v}$.

Важным является следующее утверждение.

Теорема 5.3 *Если поле $\vec{v}$ имеет в области Ω дважды непрерывно дифференцируемый векторный потенциал $\vec{A}$, то $\vec{v}$ соленоидально в Ω.*

Доказательство. Так как в области Ω справедливо равенство (5.8), то в соответствии с (4.22),

$$v_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad v_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad v_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Поэтому

$$\mathrm{div}\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} = 0,$$

так как все эти частные производные по условию непрерывны.

Аналогично случаю потенциального поля, не только из равенства (5.8) следует соотношение (5.7), но и наоборот, из условия (5.7) следует существование вектора $\vec{A}$, удовлетворяющего (5.8). Это означает, что любое соленоидальное поле имеет векторный потенциал. Доказательство этого утверждения выходит за рамки данного пособия. Отметим только, что векторный потенциал $\vec{A}$ соленоидального поля определяется, вообще говоря, неоднозначно.

Для соленоидального поля из теоремы Гаусса-Остроградского следует, что для любой гладкой замкнутой поверхности Σ_+, лежащей в Ω, выполнено равенство

$$\oiint\limits_{\Sigma_+} v_n d\sigma = 0, \tag{5.9}$$

где v_n – проекция вектора $\vec{v}$ на направление нормали $\vec{n}_+$.

Вообще, для векторного поля $\vec{f}$ и ориентированной поверхности Σ_+ (не обязательно замкнутой) интеграл $\iint\limits_{\Sigma_+} v_n d\sigma$ называется потоком поля через поверхность Σ_+. Равенство (5.9) означает тогда, что для соленоидального поля поток через любую замкнутую поверхность равен нулю.

В качестве примера соленоидального поля можно привести поле скоростей движущейся жидкости. Соотношение (5.7) в этом случае является условием несжимаемости жидкости. В случае, когда $\vec{v}$ является полем скоростей, интеграл $\oint\limits_{\ell_+}(\vec{v}, \overrightarrow{d\ell})$ обычно называют циркуляцией[1] поля вдоль замкнутого ориентированного пути ℓ_+. Если ℓ_+ является краем поверхности Σ_+, то теорема Стокса означает, что циркуляция поля вдоль ℓ_+ совпадает с потоком поля через Σ_+.

Для соленоидальных полей представляет интерес рассмотрение так называемых трубок тока, но мы здесь останавливаться на этом не будем и рекомендуем читателям обратиться к соответствующей физической литературе.

---

[1] А не работой, как в случае силовых полей.

5.3. Представление градиента в криволинейных ортогональных координатах

Напомним, что для дифференцируемого скалярного поля $f\colon I\!R^3 \to I\!R$ в том случае, когда положение точки в $I\!R^3$ описывается декартовыми координатами, вектор $\mathrm{grad} f$ определяется равенством:

$$\mathrm{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}.$$

Пусть теперь в $I\!R^3$ заданы криволинейные ортогональые координаты (ξ, η, ζ). Как показано в п.2.3, в этом случае в каждой точке P определен координатный ортонормированный базис $\{\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta\}$, где

$$\vec{e}_\xi = \frac{1}{H_\xi}\left[\frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial y}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \xi},\right]^T, \ \vec{e}_\eta = \frac{1}{H_\eta}\left[\frac{\partial x}{\partial \eta}, \frac{\partial y}{\partial \eta}, \frac{\partial z}{\partial \eta},\right]^T, \ \vec{e}_\zeta = \frac{1}{H_\zeta}\left[\frac{\partial x}{\partial \zeta}, \frac{\partial y}{\partial \zeta}, \frac{\partial z}{\partial \zeta},\right]^T$$

– представления базисных векторов в исходном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а H_ξ, H_η, H_ζ – коэффициенты Ламе.

Разложим вектор $\mathrm{grad} f$ по базису $\{\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta\}$:

$$\mathrm{grad} f = a_\xi \vec{e}_\xi + a_\eta \vec{e}_\eta + a_\zeta \vec{e}_\zeta,$$

и найдем выражения для a_ξ, a_η, a_ζ. Для коэффициента a_ξ, например, получим:

$$a_\xi = (\mathrm{grad} f, \vec{e}_\xi) = \frac{1}{H_\xi}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial \xi}\Big) =$$

$$= \frac{1}{H_\xi}\,\frac{\partial}{\partial \xi}\Big(f\big(x(\xi,\eta,\zeta), y(\xi,\eta,\zeta), z(\xi,\eta,\zeta)\big)\Big).$$

Аналогичные формулы справедливы и для a_η, a_ζ.

Таким образом,

$$\mathrm{grad} f = \frac{1}{H_\xi}\,\frac{\partial f}{\partial \xi}\vec{e}_\xi + \frac{1}{H_\eta}\,\frac{\partial f}{\partial \eta}\vec{e}_\eta + \frac{1}{H_\zeta}\,\frac{\partial f}{\partial \zeta}\vec{e}_\zeta. \tag{5.10}$$

Полученное соотношение является представлением градиента в криволинейных ортогональных координатах.[1]

В частности, для полярной системы координат

$$\mathrm{grad} f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi,$$

а для сферической системы координат

$$\mathrm{grad} f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho \sin\vartheta}\,\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\vec{e}_\vartheta.$$

[1] Еще раз непомним, что в отличие от декартовых координат, базис $\{\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta\}$ зависит от положения точки P.

5.4. Представление дивергенции в криволинейных ортогональных координатах

Для векторного поля $\vec{f} = f_x\vec{i} + f_y\vec{j} + f_z\vec{k}$ величина $\operatorname{div}\vec{f}$ определена в п.4.4 равенством

$$\operatorname{div}\vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}. \tag{5.11}$$

Пусть теперь в криволинейной ортогональной системе координат (ξ, η, ζ) поле $\vec{f}$ задано разложением по базису $\{\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta\}$:

$$\vec{f} = f_\xi(\xi,\eta,\zeta)\vec{e}_\xi + f_\eta(\xi,\eta,\zeta)\vec{e}_\eta + f_\zeta(\xi,\eta,\zeta)\vec{e}_\zeta. \tag{5.12}$$

В этом случае для вычисления $\operatorname{div}\vec{f}$ можно сначала найти функции f_x, f_y, f_z, а потом использовать формулу (5.11). Однако такой способ оказывается очень громоздким. Проще использовать теорему Гаусса-Остроградского.

Рассмотрим снова "криволинейный параллелепипед" $\Pi = P_1 \dots P_8$, изображенный на рис.2.2 и запишем для него и функции $\vec{f}$ теорему Гаусса-Остроградского:

$$\iiint\limits_{\Pi} \operatorname{div}\vec{f}dV = \iint\limits_{\Sigma} f_n d\sigma, \tag{5.13}$$

где Σ – граница Π, а f_n – проекция вектора $\vec{f}$ на внешнюю нормаль. По теореме о среднем для тройного интеграла

$$\iiint\limits_{\Pi} \operatorname{div}\vec{f}dV = \operatorname{div}\vec{f}(P^*)V,$$

где $P^* \in \Pi$ – некоторая точка, а V – объем Π. Учитывая соотношение (2.16), получим равенство

$$\iiint\limits_{\Pi} \operatorname{div}\vec{f}dV = H_\xi H_\eta H_\zeta \operatorname{div}\vec{f}(P^*)|\Delta\xi\Delta\eta\Delta\zeta| + o(\Delta\xi\Delta\eta\Delta\zeta). \tag{5.14}$$

Вычислим теперь поверхностный интеграл, входящий в формулу (5.13). Этот интеграл равен сумме интегралов по всем шести "граням" Π. Рассмотрим "грань" $P_1P_2P_4P_3$ на рис.2.2. Эта грань является нижней гранью (по отношению к декартовым координатам) в случае, когда $\Delta\zeta > 0$ и $\dfrac{\partial z(\xi_0,\eta_0,\zeta_0)}{\partial\zeta} > 0$. Ограничимся только этим случаем, остальные возможности рассматриваются аналогично. Нормаль к грани $P_1P_2P_4P_3$ ортогональна к координатным линиям ξ и η, лежащим в этой грани, т. е. к векторам $\vec{e}_\xi$ и $\vec{e}_\eta$. Поэтому эта нормаль должна совпадать либо с $\vec{e}_\zeta$, либо с $-\vec{e}_\zeta$. Так как $(\vec{e}_\xi, \vec{k}) = \dfrac{\partial z}{\partial \zeta} > 0$, то вектор $\vec{e}_\zeta$ на рис.2.2 направлен ″вверх″, а внешняя нормаль $\vec{n}_+$ грани $P_1P_2P_4P_3$ направлена ″вниз″. Поэтому $\vec{n}_+ = -\vec{e}_\zeta$ на $P_1P_2P_4P_3$ и $f_n = (\vec{f}, \vec{n}_+) = -f_\zeta(\xi, \eta, \zeta)$. Следовательно,

$$\iint\limits_{P_1P_2P_4P_3} f_n d\sigma = -\iint\limits_{P_1P_2P_3P_4} f_\zeta d\sigma.$$

Параметрические уравнения $P_1P_2P_4P_3$ в декартовых координатах можно взять в виде:

$$\vec{r} = \vec{r}(\xi, \eta, \zeta_0)\left[x(\xi, \eta, \zeta_0),\ y(\xi, \eta, \zeta_0),\ z(\xi, \eta, \zeta_0)\right]^T, \quad (\xi, \eta) \in D_{\xi\eta},$$

где $D_{\xi\eta} = \big\{(\xi, \eta)\colon \xi_0 \le \xi \le \xi_0 + \Delta\xi,\ \eta_0 \le \eta \le \eta_0 + \Delta\eta\big\}$. Используя эти уравнения для вычисления поверхностного интеграла, получим:

$$\iint\limits_{P_1P_2P_4P_3} f_n d\sigma = -\iint_{D_{\xi\eta}} F(\xi, \eta, \zeta_0) d\xi d\eta, \tag{5.15}$$

где

$$F(\xi, \eta, \zeta) = f_\zeta(\xi, \eta, \zeta)\big\|[\vec{r}'_\xi(\xi, \eta, \zeta), \vec{r}'_\eta(\xi, \eta, \zeta)]\big\|. \tag{5.16}$$

Аналогично рассматривается интеграл по ″верхней″ грани $P_5P_6P_8P_7$. Отличие от интеграла по $P_1P_2P_4P_3$ только в том, что теперь $\zeta = \zeta_0 + \Delta\zeta$ и нормаль $\vec{n}_+$ на ″верхней″ грани совпадает с вектором $\vec{e}_\zeta$ (а не противоположна ему). Поэтому

$$\iint\limits_{P_5P_6P_8P_7} f_n d\sigma = \iint\limits_{D_{\xi\eta}} F(\xi, \eta, \zeta_0 + \Delta\zeta) d\xi d\eta. \tag{5.17}$$

Обозначим $\Sigma^{(1)}$ объединение ″вершней″ и ″нижней″ граней. Тогда, складывая равенства (5.15) и (5.17), получим

$$\iint\limits_{\Sigma^{(1)}} f_n d\sigma = \iint\limits_{D_{\xi\eta}} \big[F(\xi, \eta, \zeta_0 + \Delta\zeta) - F(\xi, \eta, \zeta_0)\big] d\xi d\eta.$$

По теореме о среднем для двойного интеграла:

$$\iint\limits_{D_{\xi\eta}} \big[F(\xi, \eta, \zeta_0 + \Delta\zeta) - F(\zeta, \eta, \zeta_0)\big] d\xi d\eta =$$

$$= \big[F(\xi^{**}, \eta^{**}, \zeta_0 + \Delta\zeta) - F(\xi^{**}, \eta^{**}, \zeta_0 + \Delta\zeta)\big]|\Delta\xi\Delta\eta|.$$

Будем считать функции $x(\xi,\eta,\zeta)$, $y(\xi,\eta,\zeta)$ и $z(\xi,\eta,\zeta)$ дважды непрерывно дифференцируемыми. Тогда используя теорему Лагранжа, получим равенство:

$$\iint\limits_{\Sigma^{(1)}} f_n d\sigma = \frac{\partial F(\xi^{**},\eta^{**},\zeta^{**})}{\partial\zeta}\Delta\zeta|\Delta\xi\Delta\eta|,$$

где $\zeta^{**}\in[\zeta_0,\zeta_0+\Delta\zeta]$. Так как функция $\dfrac{\partial F}{\partial\zeta}$ непрерывна, то

$$\frac{\partial F(\xi^{**},\eta^{**},\zeta^{**})}{\partial\zeta} = \frac{\partial F(\xi_0,\eta_0,\zeta_0)}{\partial\zeta} + o(1)$$

и, значит,

$$\iint\limits_{\Sigma^{(1)}} f_n d\sigma = \frac{\partial F(\xi_0,\eta_0,\zeta_0)}{\partial\zeta}\Delta\zeta|\Delta\xi\Delta\eta| + o(\Delta\xi\Delta\eta\Delta\zeta). \tag{5.18}$$

Осталось вычислить значение $F(\xi_0,\eta_0,\zeta_0)$. В соответствии с формулой (2.15)

$$\left\|[\vec{r}'_\xi,\vec{r}'_\eta]\right\| = H_\xi H_\eta,$$

Таким образом, из (5.16) получаем, что

$$\iint\limits_{\Sigma^{(1)}} f_n d\sigma = \frac{\partial}{\partial\zeta}(H_\xi H_\eta f_\zeta)\Delta\zeta|\Delta\xi\Delta\eta| + o(\Delta\xi\Delta\eta\Delta\zeta). \tag{5.19}$$

В точности аналогично вычисляются интегралы по двум другим парам ″граней″ П. Обозначив $\Sigma^{(2)}$ объединение ″левой″ и ″правой″ граней, а $\Sigma^{(3)}$ – ″передней″ и ″задней″ граней, получим

$$\iint\limits_{\Sigma^{(2)}} f_n d\sigma = \frac{\partial}{\partial\xi}(H_\eta H_\zeta f_\xi)\Delta\xi|\Delta\eta\Delta\zeta| + o(\Delta\xi\Delta\eta\Delta\zeta), \tag{5.20}$$

$$\iint\limits_{\Sigma^{(3)}} f_n d\sigma = \frac{\partial}{\partial\eta}(H_\xi H_\zeta f_\eta)\Delta\eta|\Delta\xi\Delta\eta| + o(\Delta\xi\Delta\eta\Delta\zeta). \tag{5.21}$$

В равенстве (5.20) предполагается, что $\Delta\xi>0$, а в равенстве (5.21) – что $\Delta\eta>0$. Ограничиваясь ради краткости изложения только случаем, когда $\Delta\xi>0$, $\Delta\eta>0$ и $\Delta\zeta>0$, и складывая равенства (5.19)–(5.21), найдем:

$$\iint\limits_{\Sigma} f_n d\sigma = \left[\frac{\partial}{\partial\xi}(H_\eta H_\zeta f_\xi) + \frac{\partial}{\partial\eta}(H_\xi H_\zeta f_\eta) + \frac{\partial}{\partial\zeta}(H_\xi H_\eta f_\zeta)\right]\Delta\xi\Delta\eta\Delta\zeta +$$

$$+o(\Delta\xi\Delta\eta\Delta\zeta).$$

Теперь, используя соотношения (5.13) и (5.14), получим

$$\operatorname{div} f(P^*)\Delta\xi\Delta\eta\Delta\zeta =$$

$$= \frac{1}{H_\xi H_\eta H_\zeta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(H_\eta H_\zeta f_\xi) + \frac{\partial}{\partial\eta}(H_\xi H_\zeta f_\eta) + \frac{\partial}{\partial\zeta}(H_\xi H_\eta f_\zeta)\right]\Delta\xi\Delta\eta\Delta\zeta +$$
$$+ o(\Delta\xi\Delta\eta\Delta\zeta).$$

Разделив это равенство на $\Delta\xi\Delta\eta\Delta\zeta$ и перейдя к пределу, когда $\Delta\xi \to 0$, $\Delta\eta \to 0$, $\Delta\zeta \to 0$ (при этом точка P^* переходит в точку P_1), получим равенство

$$\operatorname{div}\vec{f} = \frac{1}{H_\xi H_\eta H_\zeta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(H_\eta H_\zeta f_\xi) + \frac{\partial}{\partial\eta}(H_\xi H_\zeta f_\eta) + \frac{\partial}{\partial\zeta}(H_\xi H_\eta f_\zeta)\right], \qquad (5.22)$$

которое и является представлением дивергенции в криволинейных ортогональных координатах.

В частности, для цилиндрической системы координат (ρ, φ, z) получим:

$$\operatorname{div}\vec{f} = \frac{1}{H_\rho H_\varphi H_z}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(H_\varphi H_z f_\rho) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(H_\rho H_z f_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(H_\rho H_\varphi f_z)\right] =$$

$$= \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho f_\rho) + \frac{\partial f_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho f_z)\right] = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho f_\rho) + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial f_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial f_z}{\partial z},$$

так как $H_\rho = H_z = 1$, $H_\varphi = \rho$.

Для сферической системы координат:

$$\operatorname{div}\vec{f} = \frac{1}{H_\rho H_\varphi H_\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(H_\varphi H_\vartheta f_\rho) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(H_\rho H_\vartheta f_\varphi) + \frac{\partial}{\partial\vartheta}(H_\rho H_\varphi f_\vartheta)\right] =$$

$$= \frac{1}{\rho^2\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2\sin\vartheta f_\rho) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho f_\varphi) + \frac{\partial}{\partial\vartheta}(\rho\sin\vartheta f_\vartheta)\right] =$$

$$= \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2 f_\rho) + \frac{1}{\rho\sin\vartheta}\,\frac{\partial f_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{1}{\rho\sin\vartheta}\,\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta f_\vartheta)\right].$$

5.5. Представление ротора в криволинейных ортогональных координатах

Для векторного поля $\vec{f} = f_x\vec{i} + f_y\vec{j} + f_z\vec{k}$ вектор $\operatorname{rot}\vec{f}$ определен в п.4.6 равенством

$$\operatorname{rot}\vec{f} = \Big(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\Big)\vec{i} + \Big(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\Big)\vec{j} + \Big(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\Big)\vec{k}. \qquad (5.23)$$

Если же в криволинейной ортогональной системе координат (ξ,η,ζ) поле $\vec{f}$ задано соотношением

$$\vec{f}=f_\xi(\xi,\eta,\zeta)\vec{e}_\xi+f_\eta(\xi,\eta,\zeta)\vec{e}_\eta+f_\zeta(\xi,\eta,\zeta)\vec{e}_\zeta,$$

то вычисление $\mathrm{rot}\vec{f}$ непосредственно по формуле (5.23) оказывается весьма громоздким и оказывается целесообразным использовать для этого теорему Стокса.

Получим формулы для вычисления коэффициентов a_ξ, a_η, a_ζ разложения ротора

$$\mathrm{rot}\vec{f}=a_\xi\vec{e}_\xi+a_\eta\vec{e}_\eta+a_\zeta\vec{e}_\zeta \tag{5.24}$$

по базису $\{\vec{e}_\xi,\vec{e}_\eta,\vec{e}_\zeta\}$.

Обозначим $\Sigma_-^{(1)}$ ориентированную ″грань″ $P_1P_2P_4P_3$ параллелепипеда Π (рис.2.2) с нормалью $\vec{n}_-$, внутренней по отношению к Π. Напишем для $\Sigma_-^{(1)}$ и функции $\vec{f}$ теорему Стокса:

$$\oint\limits_{\ell_+}(\vec{f},\overrightarrow{d\ell})=\iint\limits_{\Sigma_-^{(1)}}(\mathrm{rot}\vec{f},\overrightarrow{d\sigma}). \tag{5.25}$$

Направлением на ℓ_+, согласованным с ориентацией $\Sigma_-^{(1)}$ является направление от P_1 к P_2 и далее к P_4, P_3.

Как показано в п.5.4, на ″грани″ $P_1P_2P_4P_3$ выполнено равенство $\vec{n}_-=-\vec{n}_+=\vec{e}_\zeta$ и, значит, $(\mathrm{rot}\vec{f},\vec{n}_-)=a_\zeta$. Поэтому

$$\iint\limits_{\Sigma^{(1)}}(\mathrm{rot}\vec{f},\overrightarrow{d\sigma})=\iint\limits_{\Sigma^{(1)}}(\mathrm{rot}\vec{f},\vec{n}_-)d\sigma=\iint\limits_{\Sigma^{(1)}}a_\zeta d\sigma.$$

По теореме о среднем для поверхностного интеграла получим

$$\iint\limits_{\Sigma^{(1)}}a_\zeta d\sigma=a_\zeta(P^*)S_{1243},$$

где S_{1243} – площадь ″грани″ $P_1P_2P_4P_3$, а P^* – некоторая точка этой грани. В силу непрерывности функции a_ζ справедливо равенство $a_\zeta(P^*)=a_\zeta(\xi_0,\eta_0,\zeta_0)+o(1)$. Учитывая это равенство и формулу (**??**) для S_{1243}, найдем:

$$\iint\limits_{\Sigma_-^{(1)}}(\mathrm{rot}\vec{f},\overrightarrow{d\sigma})=a_\zeta H_\xi H_\eta|\Delta\xi\Delta\eta|+o(\Delta\xi\Delta\eta). \tag{5.26}$$

Вычислим теперь криволинейный интеграл, входящий в равенство (5.25), который является суммой четырех интегралов по кривым P_1P_2, P_2P_4,

P_4P_3 и P_3P_1. Рассмотрим сначала интеграл по P_3P_1. Ясно, что $\int\limits_{P_3P_1}(\vec{f},\overrightarrow{d\ell}) = -\int\limits_{P_1P_3}(\vec{f},\overrightarrow{d\ell})$. В декартовых координатах параметрическими уравнениями кривой P_1P_3 являются:

$$\vec{r} = \vec{r}(\eta) = [x(\xi_0,\eta,\zeta_0),\ y(\xi_0,\eta,\zeta_0),\ z(\xi_0,\eta,\zeta_0)]^T, \quad \eta \in [\eta_0, \eta_0 + \Delta\eta].$$

Поэтому

$$\int\limits_{P_1P_3}(\vec{f},\overrightarrow{d\ell}) = \int\limits_{\eta_0}^{\eta_0+\Delta\eta}(\vec{f},\vec{r}\,'_\eta)d\eta.$$

Так как $\vec{r}\,'_\eta = \left[\dfrac{\partial x}{\partial\eta},\dfrac{\partial y}{\partial\eta},\dfrac{\partial z}{\partial\eta}\right]^T$ – касательный вектор к координтаной линии η, то из определения вектора $\vec{e}_\eta$, получим, что $\vec{r}_\eta = H_\eta\vec{e}_\eta$. Значит, $(\vec{f},\vec{r}\,'_\eta) = H_\eta f_\eta$ и, следовательно,

$$\int\limits_{P_3P_1}(\vec{f},\overrightarrow{d\ell}) = -\int\limits_{\eta_0}^{\eta_0+\Delta\eta} f_\eta(\xi_0,\eta,\zeta_0)H_\eta(\xi_0,\eta,\zeta_0)d\eta. \tag{5.27}$$

Аналогично интегралу по P_1P_3 вычисляется интеграл по P_2P_4; отличие от рассмотренного случая только в том, что сейчас $\xi = \xi_0 + \Delta\xi$. Таким образом,

$$\int\limits_{P_2P_4}(\vec{f},\overrightarrow{d\ell}) = \int\limits_{\eta_0}^{\eta_0+\Delta\eta} f_\eta(\xi_0+\Delta\xi,\eta,\zeta_0)H_\eta(\xi_0+\Delta\xi,\eta,\zeta_0)d\eta. \tag{5.28}$$

Складывая равенства (5.27) и (5.28), получим

$$\int\limits_{P_3P_1\cup P_2P_4}(\vec{f},\overrightarrow{d\ell}) = \int\limits_{\eta_0}^{\eta_0+\Delta\eta}\big[G(\xi_0+\Delta\xi,\eta,\zeta_0) - G(\xi_0,\eta,\zeta_0)\big]d\eta,$$

где $G(\xi,\eta,\zeta) = f_\eta(\xi,\eta,\zeta)H_\eta(\xi,\eta,\zeta)$. По теореме о среднем

$$\int\limits_{P_3P_1\cup P_2P_4}(\vec{f},\overrightarrow{d\ell}) = \big[G(\xi_0+\Delta\xi,\eta^*,\zeta_0) - G(\xi_0,\eta^*,\zeta_0)\big]d\eta,$$

где $\eta^* \in [\eta_0, \eta_0+\Delta\eta]$. Используя теперь для функции G теорему Лагранжа, найдем:

$$\int\limits_{P_3P_1\cup P_2P_4}(\vec{f},\overrightarrow{d\ell}) = \frac{\partial G(\xi^*,\eta^*,\zeta_0)}{\partial\xi}\Delta\xi\Delta\eta.$$

Наконец, учитывая непрерывность функции G, получим равенство

$$\int\limits_{P_3P_1\cup P_2P_4} (\vec{f}, \overrightarrow{d\ell}) = \frac{\partial(H_\eta f_\eta)}{\partial\xi}\Delta\xi\Delta\eta + o(\Delta\xi\Delta\eta). \tag{5.29}$$

Аналогично вычисляется интеграл по $P_1P_2 \cup P_4P_3$:

$$\int\limits_{P_1P_2\cup P_4P_3} (\vec{f}, \overrightarrow{d\ell}) = \frac{\partial(H_\xi f_\xi)}{\partial\eta}\Delta\xi\Delta\eta + o(\Delta\xi\Delta\eta). \tag{5.30}$$

Складывая равенства (5.29) и (5.30), находим, что

$$\oint\limits_{\ell_+} (\vec{f}, \overrightarrow{d\ell}) = \left[\frac{\partial}{\partial\xi}(H_\eta f_\eta) - \frac{\partial}{\partial\eta}(H_\xi f_\xi)\right]\Delta\xi\Delta\eta + o(\Delta\xi\Delta\eta).$$

Теперь из равенств (5.25) и (5.26) следует (при $\Delta\xi > 0$, $\Delta\eta > 0$) соотношение

$$a_\zeta H_\xi H_\eta \Delta\xi\Delta\eta = \left[\frac{\partial}{\partial\xi}(H_\eta f_\eta) - \frac{\partial}{\partial\eta}(H_\xi f_\xi)\right]\Delta\xi\Delta\eta + o(\Delta\xi\Delta\eta).$$

Разделив это равенство на $\Delta\xi\Delta\eta$ и перейдя к пределу при $\Delta\xi \to 0$, $\Delta\eta \to 0$, получим выражение для коэффициента a_ζ:

$$a_\zeta = \frac{1}{H_\xi H_\eta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(H_\eta f_\eta) - \frac{\partial}{\partial\eta}(H_\xi f_\xi)\right]. \tag{5.31}$$

Аналогично формуле (5.31) устанавливаются равенства

$$a_\xi = \frac{1}{H_\eta H_\zeta}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}(H_\zeta f_\zeta) - \frac{\partial}{\partial\zeta}(H_\eta f_\eta)\right],$$

$$a_\eta = \frac{1}{H_\xi H_\zeta}\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}(H_\xi f_\xi) - \frac{\partial}{\partial\xi}(H_\zeta f_\zeta)\right],$$

которые вместе с (5.31) и разложением (5.22) и дают представление ротора в криволинейных ортогональных координатах.

В частности, для цилиндрической системы координат (ρ, φ, z):

$$\operatorname{rot}\vec{f} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial f_z}{\partial\varphi} - \rho\frac{\partial f_\varphi}{\partial z}\right]\vec{e}_\rho + \left[\frac{\partial f_\rho}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial\rho}\right]\vec{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho f_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{\partial f_\rho}{\partial\varphi}\right]\vec{e}_z,$$

а для сферической системы координат $(\rho, \varphi, \vartheta)$:

$$\operatorname{rot}\vec{f} = \frac{1}{\rho\sin\vartheta}\left[\frac{\partial f_\vartheta}{\partial\varphi} - \frac{\partial(\sin\vartheta f_\varphi)}{\partial\vartheta}\right]\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial f_\rho}{\partial\vartheta} - \frac{\partial(\rho f_\vartheta)}{\partial\rho}\right]\vec{e}_\varphi$$

$$+\frac{1}{\rho\sin\vartheta}\left[\sin\vartheta\frac{\partial(\rho f_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{\partial f_\rho}{\partial\varphi}\right]\vec{e}_\vartheta.$$

5.6. Оператор Лапласа

В физических приложениях очень важную роль играет выражение $\Delta u = \mathrm{div}(\mathrm{grad} u)$, называемое оператором Лапласа функции u. Например, потенциал u электростатического поля в остутствие источников удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$. Можно привести много других математических моделей важных физических задач, в которых также используется оператор Лапласа. При изучении этих моделей часто необходимо иметь представление для оператора Лапласа в различных системах координат.

В декартовых координатах $\mathrm{grad} u = \left[\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right]^T$, а $\mathrm{div}\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$. Поэтому в этом случае

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Для криволинейных ортогональных координат (ξ, η, ζ) из представлений (5.10) и (5.22) следует, что

$$\Delta u = \frac{1}{H_\xi H_\eta H_\zeta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\Big(\frac{H_\eta H_\zeta}{H_\xi}\ \frac{\partial u}{\partial\xi}\Big) + \frac{\partial}{\partial\eta}\Big(\frac{H_\xi H_\zeta}{H_\eta}\ \frac{\partial u}{\partial\eta}\Big) + \frac{\partial}{\partial\zeta}\Big(\frac{H_\xi H_\eta}{H_\zeta}\ \frac{\partial u}{\partial\zeta}\Big)\right]. \tag{5.32}$$

В частности, для цилиндрической системы координат (ρ, φ, z):

$$\Delta u =$$

$$= \frac{1}{H_\xi H_\varphi H_z}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\frac{H_\varphi H_z}{H_\rho}\ \frac{\partial u}{\partial\rho}\Big) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\Big(\frac{H_\rho H_z}{H_\varphi}\ \frac{\partial u}{\partial\varphi}\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{H_\rho H_\varphi}{H_z}\ \frac{\partial u}{\partial z}\Big)\right] =$$

$$= \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\Big) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\Big(\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial u}{\partial\varphi}\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(\rho\frac{\partial u}{\partial z}\Big)\right] =$$

$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\Big) + \frac{1}{\rho^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

а для сферической системы координат $(\rho, \vartheta, \varphi)$:

$$\Delta u =$$

$$= \frac{1}{H_\rho H_\varphi H_\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\frac{H_\varphi H_\vartheta}{H_\rho}\ \frac{\partial u}{\partial\rho}\Big) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\Big(\frac{H_\rho H_\vartheta}{H_\varphi}\ \frac{\partial u}{\partial\varphi}\Big) + \frac{\partial}{\partial\vartheta}\Big(\frac{H_\rho H_\varphi}{H_\vartheta}\ \frac{\partial u}{\partial\vartheta}\Big)\right] =$$

$$= \frac{1}{\rho^2\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\rho^2\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial\rho}\Big) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\Big(\frac{1}{\sin\vartheta}\ \frac{\partial u}{\partial\varphi}\Big) + \frac{\partial}{\partial\vartheta}\Big(\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\Big)\right] =$$

$$= \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}\Big) + \frac{1}{\rho^2\sin^2\vartheta}\ \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\rho^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\Big(\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\Big).$$

Список литературы

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2. М.: Наука, 1969.

2. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.2. М.: Наука, 1974.

3. Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. М.: Наука, 1965.

4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М.: Наука, 1989.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Боревич Елена Зеноновна, Каврайская Кира Владимировна,
Челкак Сергей Иванович
Криволинейные и поверхностные интегралы
Учебное пособие

Редактор Н.В.Рощина
Лицензия ЛР N 020617 от 10.08.92

Подписано в печать Формат 60×84 1/16. Бумага тип. N2.
Печать офсетная. Усл. печ. л. . Уч. -изд. л. .
Тираж экз. Заказ
Издательско-полиграфический центр ГЭТУ

197376, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5