МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)»

КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство СПбГЭТУ „ЛЭТИ“
2016

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)»

КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебное пособие

Под ред. д-ра физ.-мат. наук Бодунова Н. А.

Санкт-Петербург
Издательство СПбГЭТУ „ЛЭТИ“
2016

УДК 517.958 (075)
ББК В162 я7
К 78

Авторы: А. Л. Белопольский, Е. З. Боревич, Е. С. Короткова, А. П. Щеглова.

К 78 Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы в примерах и задачах: Учеб. пособие / Под ред. д-ра. физ.-мат. наук Бодунова Н. А. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, 2016. 84с.

ISBN ?

Содержат разделы теории интегрирования функций нескольких переменных, входящие в программу курса высшей математики для технических университетов.

Указанные разделы включены в дисциплину: „ Математический анализ. Дополнительные главы “, которая читается студентам (бакалаврам) ФЭА и ФЭЛ СПбГЭТУ „ ЛЭТИ “ на втором курсе в 3 семестре.

УДК УДК 517.958 (075)
ББК В162 я7

Утверждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Рецензенты: кафедра высшей математики СПбГУТ д-р физ.-мат. наук, проф. Л.М.Баскин, кафедра высшей математики ВШТЭ СПбГУПТД.

ISBN ?

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее издание предназначено для студентов, изучающих теорию интегрирования функций двух и трех вещественных переменных, обычно включаемую в курс высшей математики для технических университетов.

Указанные разделы включены в дисциплину: „Математический анализ. Дополнительные главы“, которая читается студентам (бакалаврам) ФЭА и ФЭЛ СПбГЭТУ „ЛЭТИ“ на втором курсе в 3 семестре. Один из разделов настоящих указаний посвящен элементам теории поля и ее приложениям в физике. Этот материал является основой для специального курса математической физики, который включен в программу факультета ФЭЛ.

Подробную теорию с доказательствами изложенного материала можно найти в учебном электронном пособии [1] – (которое имеется в свободном доступе в библиотеке СПбГЭТУ „ЛЭТИ“ формат pdf) и учебниках [2] – (можно скачать в интернете формат djvu / zip), [3] – (можно скачать в интернете формат DJVU), [4] – (можно скачать в интернете http://pskgu.ru/ebooks/bulakfommmf.html). Для практических занятий полезно иметь задачник [5] – (имеется в библиотеке СПбГЭТУ „ЛЭТИ“ и в интернете формат DJVU).

Вектора обозначаются: $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{f}$. Для криволинейных интегралов второго рода используются обозначения $\boldsymbol{dl} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$ в пространстве $\mathbb{R}^2$ и $\boldsymbol{dl} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$. Для поверхностных интегралов второго рода используется обозначение $\boldsymbol{ds} = \begin{bmatrix} dy\,dz \\ dx\,dz \\ dx\,dy \end{bmatrix}$. Для векторов $\overrightarrow{\Delta l_i} = \overrightarrow{P_{i-1}P_i}$ используются старые обозначения.

Конец замечания обозначается символом $\otimes$, а конец доказательства обозначается символом $\blacksquare$.

1. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Определение и свойства

Напомним определение двойного интеграла [1]. Рассмотрим в $\mathbb{R}^2$ некоторую ограниченную замкнутую область D. Для любого ограниченного множества X точек из $\mathbb{R}^2$ определим его диаметр $d(X)$ равенством

$$d(X) = \sup_{P' \in X,\ P'' \in X} \rho(P', P''),$$

где $\rho(P', P'')$ – расстояние между точками P' и P''. В частности, для ограниченной замкнутой области диаметром является наибольшая хорда.

Обозначим $S(D)$ площадь области D. Всюду далее будем считать, что для рассматриваемых областей выполнено неравенство $S(D) > 0$.

Пусть на области D задана вещественная функция $f\colon D \to \mathbb{R}$.

Рассмотрим разбиение $\{D_i\}$ области D на частичные (замкнутые) области D_i $(i = 1, 2, ..., n)$ с кусочно-гладкими границами, которые могут пересекаться между собой разве лишь по своим границам. Для областей D_i также определены их площади, которые обозначим ΔS_i $(i = 1, 2, ..., n)$. Обозначим $\lambda = \max\limits_{i=1,2,...,n} d(D_i)$ наибольший из диаметров частичных областей и назовем λ рангом разбиения. В каждой из областей D_i выберем произвольную точку $P_i \in D_i$ и рассмотрим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i,$$

называемую интегральной суммой для функции $f(P)$, области D, разбиения $\{D_i\}$ и точек P_i.

Определение 1.1. *Число I называется двойным интегралом функции $f(P)$ по области D, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого разбиения $\{D_i\}$ с рангом, удовлетворяющим условию $\lambda < \delta$, и любого выбора точек $P_i \in D_i$ справедливо неравенство*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i - I\right| < \varepsilon.$$

Функция $f(P)$ называется в этом случае интегрируемой по области D, и для двойного интеграла используется обозначение:

$$I = \iint\limits_{D} f(P)dS.$$

Теорема 1.1. *Если функция $f(P)$ кусочно-непрерывна в замкнутой области D, то она интегрируема по D.*

Доказательство можно найти в учебнике [3].

Вычислять интеграл по определению крайне сложно, и на практике используется метод, который будет описан дальше.

Пока отметим несколько свойств двойного интеграла.

Теорема 1.2. *Если функции $f_1(P)$ и $f_2(P)$ интегрируемы по области D, $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ и $f(P) = \alpha_1 f_1(P) + \alpha_2 f_2(P)$, то функция $f(P)$ также* *интегрируема по D и*

$$\iint\limits_D f(P)dS = \alpha_1 \iint\limits_D f_1(P)dS + \alpha_2 \iint\limits_D f_2(P)dS.$$

Эта теорема позволит сводить интеграл суммы к сумме интегралов и выносить константу из-под знака интеграла. Это свойство обычно называют свойством линейности интеграла.

Еще одно важное свойство позволяет разбивать на части область интегрирования, что будет часто применяться при практическом вычислении.

Теорема 1.3 (аддитивность двойного интеграла). *Если $D = D^{(1)} \cup D^{(2)}$, где $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$ – области с кусочно-гладкими границами, пересекающиеся разве лишь по своим границам, и функция $f(P)$ интегрируема по D, то $f(P)$ интегрируема по $D^{(1)}$ и по $D^{(2)}$ и*

$$\iint\limits_D f(P)dS = \iint\limits_{D^{(1)}} f(P)dS + \iint\limits_{D^{(2)}} f(P)dS. \tag{1.1}$$

Наоборот, если при тех же условиях, накладываемых на области D, $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$, функция $f(P)$ интегрируема по областям $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$, то $f(P)$ интегрируема по D и справедливо равенство (1.1).

Приведем еще одно свойство, которое позволяет найти площадь фигуры через вычисление двойного интеграла.

Теорема 1.4. *Справедливо равенство*

$$\iint\limits_D dS = S(D).$$

1.2. Вычисление двойного интеграла сведением к повторному в декартовых координатах

Напомним определение повторного интеграла. Пусть на плоскости задана декартова система координат Oxy.

Рассмотрим область D, декартовы координаты (x, y) точек которой удовлетворяют соотношениям $a \le x \le b$; $g_1(x) \le y \le g_2(x)$, где $g_1(x)$ и $g_2(x)$ – непрерывные на $[a, b]$ функции. Назовем такую область правильной относительно оси Ox (рис. 1.1).

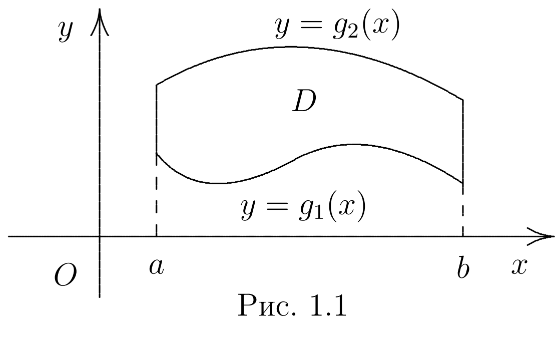

Рис. 1.1

Пусть на D задана непрерывная функция $f(x,y)$. Рассмотрим функцию[1]

$$F(x) = \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy. \tag{1.2}$$

Если функция $f(x,y)$ непрерывна на области $D = \{(x,y) : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$, а функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ непрерывны на $[a,b]$, то функция $F(x)$, определяемая равенством (1.2), непрерывна на $[a,b]$.

Если функция $F(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то интеграл

$$\int\limits_a^b F(x)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dx$$

называется повторным интегралом функции $f(x,y)$ по области

$$D = \{(x,y) :\ a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\} \subset \mathbb{R}^2;$$

при этом сначала $f(x,y)$ интегрируется по переменной y, а затем полученная функция интегрируется по x (здесь (x,y) – декартовы координаты в $\mathbb{R}^2$).

Если область D правильна относительно оси Oy, т. е. декартовы координаты (x,y) ее точек удовлетворяют соотношениям $c \leq y \leq d$, $h_1(y) \leq \leq x \leq h_2(y)$, то аналогично может быть определен повторный интеграл

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx,$$

в котором $f(x,y)$ сначала интегрируется по x, а затем – по y.

Для повторного интеграла справедлива теорема о среднем. Теперь все готово к сведению двойного интеграла к повторному.

Пусть положение точки P на плоскости описывается декартовыми координатами (x,y), а область D является правильной относительно оси $0x$. Пусть на D задана непрерывная функция $f(P)$, $P \in D$. Другими словами, на D определена непрерывная функция двух переменных $f(P(x,y))$, которую для сокращения записи будем обозначать $f(x,y)$. В этом случае двойной интеграл функции f по D существует и может быть вычислен с помощью повторного интеграла.

Теорема 1.5. *Если (x,y) – декартовы координаты, $D = \{(x,y) :\ a \leq \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ – правильная относительно оси Ox область,*

[1] Обычно говорят, что $F(x)$ – интеграл, зависящий от параметра x.

функция $f(P)$ *непрерывна на* D, *а функции* $g_1(x)$ *и* $g_2(x)$ *непрерывны на* $[a,b]$, *то*

$$\iint\limits_D f(P)dS = \int\limits_a^b dx \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy. \tag{1.3}$$

Именно эта теорема позволяет на практике вычислять двойные интегралы.

Для правильной относительно оси Oy области D и непрерывной на D функции $f(P)$ аналогично доказывается равенство

$$\iint\limits_D f(P)dS = \int\limits_c^d dy \int\limits_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx. \tag{1.4}$$

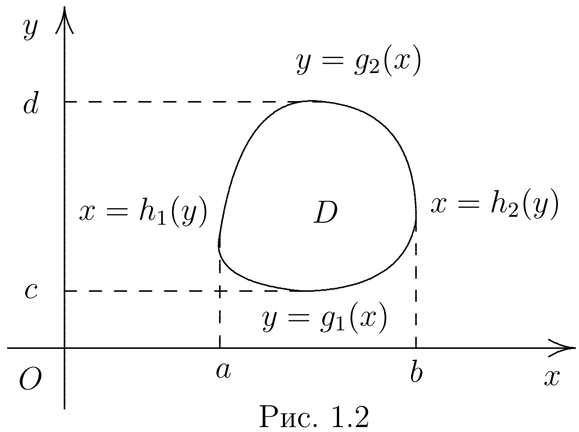

Рис. 1.2

Если D правильна одновременно относительно осей Ox и Oy, (рис. 1.2) то из (1.3) и (1.4) следует соотношение

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx \tag{1.5}$$

для непрерывной функции $f(x,y)$. Равенство (1.5) означает, что при сформулированных условиях в повторном интеграле можно менять порядок интегрирования.

Если же область D не является правильной ни относительно оси Ox, ни относительно оси Oy, то вычисление двойного интеграла непосредственно по теореме 1.5 невозможно. Обычно, однако, удается разбить область D на конечное число правильных областей, пересекающихся между собой разве лишь по своим границам. После такого разбиения двойной интеграл вычисляется на основе свойства аддитивности с применением равенства (1.3) или (1.4) к каждой из полученных правильных областей.

Замечание 1.1. В декартовых координатах обычно $\iint\limits_D f(P)dS$ обозначается символом $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$. $\otimes$

Именно теорема 1.5 позволяет на практике вычислять двойные интегралы.

Пример 1.1. Вычислить $\iint\limits_D xy\,dS$, где область D ограничена прямыми $y=0$, $x=1$, $y=x$ (рис. 1.3).

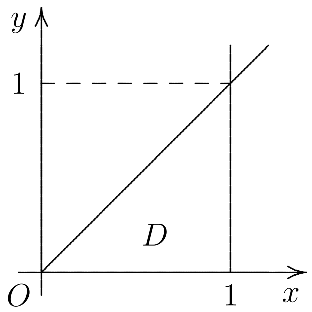

Рис. 1.3

Здесь $a=0$, $b=1$, $g_1(x)=0$, $g_2(x)=x$. В соответствии с теоремой имеем:

$$\iint\limits_D xy\,dS = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x xy\,dy = \int\limits_0^1 \left(x\frac{y^2}{2}\bigg|_{y=0}^{x} \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{x^3}{2}\,dx = \frac{x^4}{8}\bigg|_0^1 = \frac{1}{8}.$$

Пример 1.2. Вычислить $\iint\limits_D x^2y\,dS$, где область D ограничена прямыми $y=0$, $y=1$, $y=x$, $x+y=3$.

Здесь $a=0$, $b=3$, $g_1(x)=0$, $g_2(x)=\begin{cases} x,\ 0\le x\le 1,\\ 1,\ 1\le x\le 2,\\ -x+3,\ 2\le x\le 3.\end{cases}$

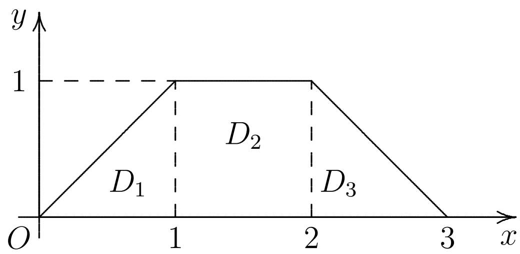

Рис. 1.4

Так как $g_2(x)$ задается разными формулами на разных отрезках, в этом примере придется воспользоваться аддитивностью интеграла (теорема 1.3) и разбить область на 3: $D = D_1\cup D_2\cup D_3$ (рис. 1.4):

$$\iint\limits_D x^2y\,dS = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x x^2y\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^1 x^2y\,dy + \int\limits_2^3 dx \int\limits_0^{-x+3} x^2y\,dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{x^2y^2}{2}\bigg|_{y=0}^{x} \right) dx + \int\limits_1^2 \left(\frac{x^2y^2}{2}\bigg|_{y=0}^{1} \right) dx + \int\limits_2^3 \left(\frac{x^2y^2}{2}\bigg|_{y=0}^{-x+3} \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{x^4}{2}\,dx + \int\limits_1^2 \frac{x^2}{2}\,dx + \int\limits_2^3 \frac{x^2(-x+3)^2}{2}\,dx = \frac{x^5}{10}\bigg|_0^1 + \frac{x^3}{6}\bigg|_1^2 +$$

$$+\int\limits_2^3 \frac{x^4-6x^3+9x^2}{2}\,dx = \frac{1}{10}+\frac{8-1}{6}+\left(\frac{x^5}{10}-\frac{3x^4}{4}+\frac{3x^3}{2}\right)\Bigg|_2^3 =$$

$$= \frac{38}{30}+\left(\frac{243}{10}-\frac{243}{4}+\frac{81}{2}\right)-\left(\frac{32}{10}-\frac{48}{4}+\frac{24}{2}\right)=\frac{127}{60}.$$

Для правильной относительно оси Oy области D и непрерывной на D функции $f(P)$ справедливо равенство

$$\iint\limits_D f(P)dS = \int\limits_c^d dy \int\limits_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx.$$

Пример 1.3. Вычислить интеграл из предыдущего примера, используя правильность области D относительно оси Oy.

Здесь $c=0$, $d=1$, $h_1(y)=y$, $h_2(y)=3-y$,

$$\iint\limits_D x^2y\,dS = \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{3-y} x^2y\,dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{x^3y}{3}\Bigg|_{x=y}^{3-y}\right)dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{(3-y)^3y}{3}-\frac{y^4}{3}\right)dy = \int\limits_0^1 \left(9y-9y^2+3y^3-\frac{2y^4}{3}\right)dy =$$

$$= \left(9\frac{y^2}{2}-3y^3+\frac{3y^4}{4}-\frac{2y^5}{15}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{9}{2}-3+\frac{3}{4}-\frac{2}{15}=\frac{127}{60}.$$

Приведем пример интеграла по области, правильной относительно Oy, но не относительно Ox.

Пример 1.4. Вычислить $\iint\limits_D (x+y)dS$, где D ограничена прямыми $x=0$, $y=0$, $y=2$, $y=x$ и $x+y=2$ (рис. 1.5).

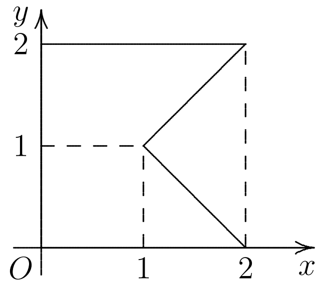

Рис. 1.5

Здесь $c=0$, $d=2$, $h_1(y)=0$,

$h_2(y) = \begin{cases} 2-y, & 0\le y\le 1, \\ y, & 1\le y\le 2. \end{cases}$ Так как $h_2(y)$ задается различными формулами на двух промежутках, в этом примере придется использовать аддитивность интеграла:

$$\iint\limits_D (x+y)dS = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{2-y} (x+y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{y} (x+y)dx =$$
$$= \int\limits_0^1 \left(\left(\frac{x^2}{2} + yx \right) \Big|_{x=0}^{2-y} \right) dy + \int\limits_1^2 \left(\left(\frac{x^2}{2} + xy \right) \Big|_{x=0}^{y} \right) dy =$$
$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{(2-y)^2}{2} + y(2-y) \right) dy + \int\limits_1^2 \left(\frac{y^2}{2} + y^2 \right) dy =$$
$$= \left(-\frac{(2-y)^3}{6} + y^2 - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{y^3}{6} + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_1^2 =$$
$$= -\frac{1}{6} + 1 - \frac{1}{3} + \frac{8}{6} + \frac{8}{6} + \frac{8}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{16}{3}.$$

Заметим, что эту область можно разбить на 3 области, правильные относительно Ox, и найти интеграл следующим образом (рис. 1.6):

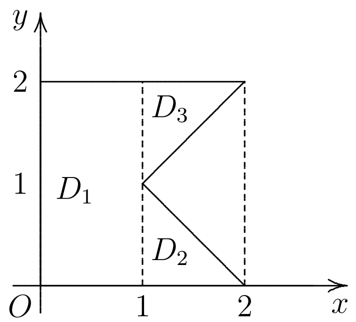

Рис. 1.6

$$\iint\limits_D (x+y)dS = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2} (x+y)dy +$$
$$+ \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} (x+y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{2} (x+y)dy =$$
$$= \int\limits_0^1 \left(\left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=0}^{2} \right) dx +$$
$$+ \int\limits_1^2 \left(\left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=0}^{2-x} \right) dx + \int\limits_1^2 \left(\left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=x}^{2} \right) dx = \int\limits_0^1 (2x+2)dx +$$
$$+ \int\limits_1^2 \left(x(2-x) + \frac{(2-x)^2}{2} \right) dx + \int\limits_1^2 \left(2x + 2 - x^2 - \frac{x^2}{2} \right) dx =$$
$$= \left(x^2 + 2x\right) \Big|_0^1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{3} + 2x - x^2 + \frac{x^3}{6} \right) \Big|_1^2 + \left(x^2 + 2x - \frac{x^3}{2} \right) \Big|_1^2 = \frac{16}{3}.$$

Приведем пример интеграла по области, правильной относительно $0x$ и относительно $0y$. Однако вычислительные трудности в этом примере существенно зависят от способа сведения и повторному интегралу.

Пример 1.5. Вычислить интеграл $\iint\limits_D \frac{1}{y}\,dS$, где D ограничена $x = 1$, $y = 1$, $y = e^x$ (рис. 1.7).

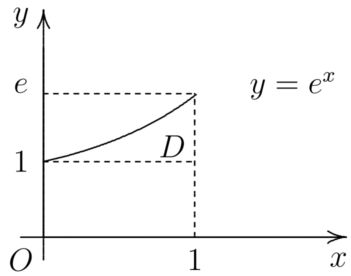

Рис. 1.7

Если рассматривать D как область, правильную относительно Ox, имеем $a = 0$, $b = 1$, $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = e^x$,

$$\iint\limits_D \frac{1}{y}\,dS = \int\limits_0^1 dx \int\limits_1^{e^x} \frac{1}{y}\,dy = \int\limits_0^1 \left(\ln|y| \Big|_{y=1}^{e^x} \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^1 (\ln e^x - \ln 1)dx = \int\limits_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Рассмотрим теперь область D как область, правильную относительно Oy, имеем $c = 1$, $d = e$, $h_1(y) = \ln y$, $h_2(y) = 1$ и

$$\iint\limits_D \frac{1}{y}\,dS = \int\limits_1^e dy \int\limits_{\ln y}^1 \frac{1}{y}\,dx = \int\limits_1^e \left(\frac{x}{y}\Big|_{x=\ln y}^1 \right) dy = \int\limits_1^e \frac{1-\ln y}{y}\,dy =$$

$$= \int\limits_1^e \frac{dy}{y} - \int\limits_1^e \frac{\ln y}{y}\,dy = \ln|y|\Big|_1^e - \frac{1}{2}(\ln y)^2\Big|_1^e = 1 - \frac{1}{2}\left(1^2 - 0\right) = \frac{1}{2}.$$

В заключение приведем пример интеграла по области, не являющейся правильной ни относительно Ox, ни относительно Oy.

Пример 1.6. Вычислить интеграл $\iint\limits_D x^2 dS$, где D – область, изображенная на рис. 1.8 (границами являются прямые $x = 0$, $x = 4$, $y = 0$, $y = 4$, $y = x+1$, $x = y+1$, $x+y = 5$).

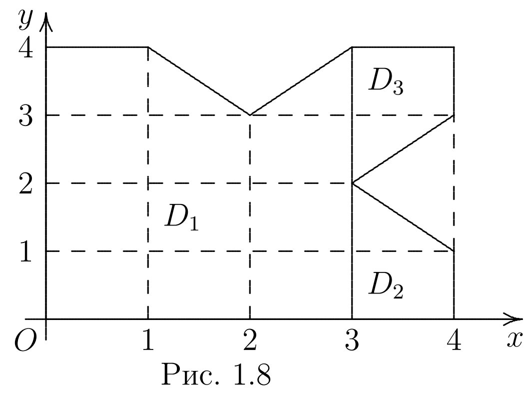

Рис. 1.8

Разобьем заданную область на 3 области, являющиеся правильными относительно Ox (рис. 1.8). При вычислении первой из них следует воспользоваться аддитивностью интеграла, так как функция $g_2(x)$ оказывается заданной тремя различными формулами.

Итак, для первой области имеем: $a = 0$, $b = 3$, $g_1(x) = 0$, $g_2(x) =$

$= \begin{cases} 4, \ 0 \le x \le 1, \\ 5-x, \ 1 \le x \le 2, \\ x+1, \ 2 \le x \le 3. \end{cases}$ Для второй области $a = 3$, $b = 4$, $g_1(x) = 0$, $g_2(x) = 5 - x$. Для третьей области $a = 3$, $b = 4$, $g_1(x) = x - 1$, $g_2(x) = 4$. Таким образом,

$$\iint\limits_D x^2 dS = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^4 x^2 dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{5-x} x^2 dy + \int\limits_2^3 dx \int\limits_0^{x+1} x^2 dy + \int\limits_3^4 dx \int\limits_0^{5-x} x^2 dy +$$

$$+ \int\limits_3^4 dx \int\limits_{x-1}^4 x^2 dy = \int\limits_0^1 \left((x^2 y)\Big|_{y=0}^{4} \right) dx + \int\limits_1^2 \left((x^2 y)\Big|_{y=0}^{5-x} \right) dx +$$

$$+ \int\limits_2^3 \left((x^2 y)\Big|_{y=0}^{x+1} \right) dx + \int\limits_3^4 \left((x^2 y)\Big|_{y=0}^{5-x} \right) dx + \int\limits_3^4 \left((x^2 y)\Big|_{y=x-1}^{4} \right) dx = \int\limits_0^1 4x^2 dx +$$

$$+ \int\limits_1^2 (5x^2 - x^3) dx + \int\limits_2^3 (x^3 + x) dx + \int\limits_3^4 (5x^2 - x^3) dx + \int\limits_3^4 (4x^2 - x^3 + x^2) dx =$$

$$= \frac{4x^3}{3}\Big|_0^1 + \left(\frac{5x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right)\Big|_1^2 + \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \right)\Big|_2^3 + 2 \left(\frac{5x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right)\Big|_3^4 = 64\,\frac{1}{3}.$$

Упражнения. Вычислить интегралы:

1.1. $\iint\limits_D x^2 dS$, где область D ограничена кривыми $y = e^x$, $y = x + 1$ и неравенством $x \le \dfrac{1}{2}$.

1.2. $\iint\limits_D xy\, dS$, где область D ограничена кривыми $y = x^2$ и $x = y^2$.

1.3. $\iint\limits_D x^3 y\, dS$, где область D ограничена кривыми $y = x^2 + 1$ и $y = 2$.

1.4. Найти площадь области D, ограниченной кривыми $y = \sin x$ и $y = \cos x$ при $\dfrac{\pi}{4} \le x \le \dfrac{3\pi}{4}$.

1.5. $\iint\limits_D y\, dS$, где область D ограничена кривыми $y = \ln x$, $y = 1$, $x = 5$.

Ответы: **1.1.** $\dfrac{388}{192} - \dfrac{5}{4}\sqrt{e}$. **1.2.** $\dfrac{1}{12}$. **1.3.** 0. **1.4.** $\sqrt{2}$.
1.5. $\dfrac{5}{2}\ln^2 5 - 5\ln 5 - \dfrac{5}{2} + e$.

В заключении данного подраздела приведем пример на изменение порядка интегрирования.

Пример 1.7. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$I = \int\limits_0^a dx \int\limits_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\,dy, \quad a > 0$$

Из повторного интеграла видно, что область интегрирования $D: y = \sqrt{a^2-x^2}$, $y = \dfrac{a^2-x^2}{2a}$, $y > 0$. Тогда $x = \sqrt{a^2-y^2}$ и $x = \sqrt{a^2-2ay}$.

Сделаем эскиз области интегрирования (рис. 1.9). Ясно, что изменив порядок интегрирования, придется разбить D на две части:

$$I = \int\limits_0^{a/2} dy \int\limits_{\sqrt{a^2-2ay}}^{\sqrt{a^2-y2}} f(x,y)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{a/2}^{a} dy \int\limits_0^{\sqrt{a^2-y2}} f(x,y)\,dx.$$

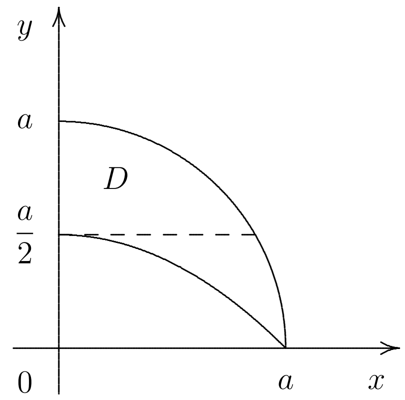

Рис. 1.9

1.3. Замена переменных в двойном интеграле

Будем считать, что в $\mathbb{R}^2$ наряду с декартовой системой координат $0xy$ введена также и некоторая другая система координат (система криволинейных координат), в которой положение точки P задается парой вещественных чисел (ξ, η), являющихся координатами P в этой системе. Например, в качестве пары (ξ, η) можно рассматривать пару (ρ, φ) полярных координат точки P. Так как каждой точке P взаимно-однозначно соответствует пара ее декартовых координат (x, y), а также пара координат (ξ, η), то по каждому набору координат (ξ, η) однозначно находятся числа x и y. Наоборот, по каждому набору координат (x, y) однозначно вычисляются числа ξ и η. Другими словами, это означает, что

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta); \\ y = y(\xi, \eta) \end{cases} \tag{1.6}$$

и эта система уравнений однозначно разрешима относительно ξ, η при любых значениях x и y. По теореме об обратной функции достаточными условиями однозначной разрешимости системы (1.6) являются непрерывная дифференцируемость функций $x(\xi,\eta)$, $y(\xi,\eta)$ и условие $J \neq 0$, где J – якобиан преобразования (1.6), т. е.

$$J = \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}.$$

Будем предполагать эти условия выполненными. Запишем решение системы (1.6) в виде

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,y); \\ \eta = \eta(x,y). \end{cases} \tag{1.7}$$

Система (1.7), естественно, также однозначно разрешима (ее решение задается формулами (1.6)) относительно x, y, так как для нее

$$J' = \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1} \neq 0.$$

Пусть D – ограниченная область с кусочно-гладкой границей в плоскости Oxy, а D' – соответствующая ей ограниченная область в плоскости $O'\xi\eta$. Тогда справедливо равенство

$$\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy = \iint\limits_{D'} f(x(\xi,\eta)y(\xi,\eta))\,|J(\xi,\eta)|d\xi\,d\eta. \tag{1.8}$$

Так как в (1.8) в интеграле по области D' координаты ξ и η играют роль декартовых координат, то этот интеграл может быть вычислен как соответствующий ему повторный интеграл. Таким образом, равенство (1.8) дает новые возможности вычисления двойного интеграла. Формулу (1.8) называют формулой преобразования двойного интеграла при замене переменных.

Пример 1.8. Вычислить $\iint\limits_D xy\,dS$, где область D ограничена кривыми $xy = 1$, $\dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{x}{y} = 2$, $x, y > 0$.

Область D имеет вид: рис. 1.10. Здесь удобно сделать замену $\xi = xy$, $\eta = = \dfrac{x}{y}$, т. е. $x = \sqrt{\xi\eta}$, $y = \sqrt{\dfrac{\xi}{\eta}}$. Тогда

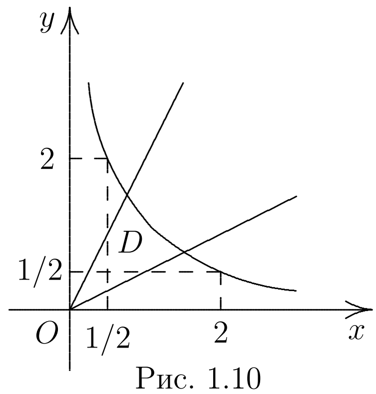

Рис. 1.10

$$J = \det \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\eta}{\xi}} & \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\xi}{\eta}} \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{\xi\eta}} & -\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\xi}{\eta^3}} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2\eta},$$

т. е.

$$\iint\limits_D xy\,dx\,dy = \iint\limits_{D'} \xi\left(\frac{1}{2\eta}\right) d\xi\,d\eta,$$

где область D' ограничена прямыми $\xi = 0$, $\xi = 1$, $\eta = \dfrac{1}{2}$, $\eta = 2$. Таким образом, двойной интеграл легко переписывается через повторный:

$$\frac{1}{2}\iint\limits_{D'} \frac{\xi}{\eta}\,d\xi\,d\eta = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} d\eta \int\limits_{0}^{1} \frac{\xi}{\eta}\,d\xi = -\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{2\eta}\,d\eta = \frac{1}{4}\,\ln|\eta|\Big|_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{1}{2}\,\ln 2.$$

Наиболее часто встречающимся примером криволинейных координат являются полярные координаты (ρ, φ) точек на плоскости. Если декартова и полярная системы координат согласованы друг с другом стандартным образом, то декартовы и полярные координаты связаны равенствам

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi; \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $\dfrac{\partial x}{\partial \rho} = \cos\varphi$, $\dfrac{\partial x}{\partial \varphi} = -\rho\sin\varphi$, $\dfrac{\partial y}{\partial \rho} = \sin\varphi$, $\dfrac{\partial y}{\partial \varphi} = \rho\cos\varphi$ и якобиан $J = \rho$.

Пример 1.9. Вычислить $\iint\limits_D (x^2 + y^2)dS$, где область D – круг с центром в начале координат и радиусом 2. Применим замену координат и перейдем к полярной системе

$$\iint\limits_D (x^2 + y^2)dx\,dy = \iint\limits_{D'} \rho^2\rho\,d\rho\,d\varphi,$$

где область D' ограничена условием $\rho = 2$ и естественными условиями

$0 \le \varphi \le 2\pi$ и $\rho \ge 0$. Перепишем этот интеграл через повторный:

$$\iint\limits_{D'} \rho^3 d\rho\, d\varphi = \int\limits_0^2 d\rho \int\limits_0^{2\pi} \rho^3 d\varphi = \int\limits_0^2 2\pi\rho^3 d\rho = 2\pi \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^2 = 8\pi.$$

Пример 1.10. $\iint\limits_D xy\, dS$, где D ограничена прямыми $\frac{x}{y} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{x}{y} = \sqrt{3}$ и дугой окружности $x^2 + y^2 = 1$.

Снова сделаем замену координат и перейдем к полярной системе:

$$\iint\limits_D xy\, dx\, dy = \iint\limits_{D'} \rho\cos\varphi\rho\sin\varphi\rho\, d\rho\, d\varphi,$$

где D' имеет границы $\varphi = \frac{\pi}{6}$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$ и $\rho = 1$.

Перепишем интеграл через повторный:

$$\iint\limits_{D'} \rho^3 \cos\varphi \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^3 \cos\varphi\sin\varphi\, d\rho = \frac{1}{4}\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{8}\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \sin 2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{8}\left(-\left.\frac{\cos 2\varphi}{2}\right|_{\pi/6}^{\pi/3}\right) = -\frac{1}{16}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}.$$

Упражнения. Вычислить интегралы:

1.6. $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\, dS$, где D – правый полукруг единичного радиуса с центром в начале координат.

1.7. $\iint\limits_D (x^2+y^2) dS$, где D – круг единичного радиуса с центром $(0,1)$.

1.8. $\iint\limits_D \frac{x}{y}\, dS$, где область D ограничена прямыми $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$, $\frac{x}{y} = 2$, $x + y = 1$.

1.9. $\iint\limits_D (x+y)^2 + (x-y)^3 dS$, где область D ограничена прямыми $x + y = 1$, $x + y = 2$, $x - y = 1$, $x - y = 2$.

1.10. $\iint\limits_D xy\, dS$, где D – четверть окружности радиуса 2 с центром в начале координат, лежащая в первой координатной четверти.

Ответы: **1.6.** $\pi(\sin 1 - \cos 1)$. **1.7.** $\dfrac{3\pi}{2}$. **1.8.** $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6}$. **1.9.** $\dfrac{73}{24}$. **1.10.** 2.

1.4. Применение двойного интеграла для вычисления площади и объема

Как уже упоминалось в теореме 1.3, $\iint\limits_D dS = S(D)$, т. е. для нахождения площади некоторой области можно найти интеграл от 1 по этой области.

Пример 1.11. Найти площадь области (рис. 1.11), ограниченной прямыми $x + y = -1$, $x + y = 1$, $x - y = -1$, $x - y = 1$.

Достаточно найти $\iint\limits_D dS$, где D ограничена этими прямыми:

$$\iint\limits_D dS = \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-x-1}^{x+1} dy + \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x-1}^{-x+1} dy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} \left(y \Big|_{y=-x-1}^{x+1} \right) dx + \int\limits_{0}^{1} \left(y \Big|_{y=x-1}^{-x+1} \right) dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} (2x+2)dx + \int\limits_{0}^{1} (-2x+2)dx =$$

$$= (x^2 + 2x)\Big|_{-1}^{0} + (-x^2 + 2x)\Big|_{0}^{1} = 1 + 1 = 2.$$

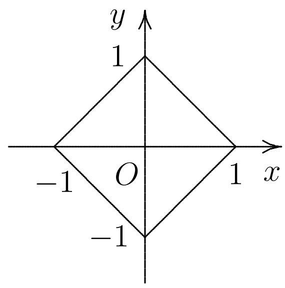

Рис. 1.11

Пример 1.12. Найти площадь области (рис. 1.12), ограниченной параболой $y = x^2$ и дугой окружности $x^2 + y^2 = 2$ (с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{2}$).

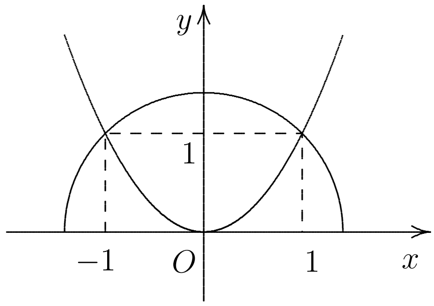

Рис. 1.12

Из рисунка видно, что для нахождения площади области, надо вычислить следующий интеграл:

$$\iint\limits_D dS = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{1-x^2}} dy = \int\limits_{-1}^{1} \left(\sqrt{1-x^2} - x^2 \right) dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx - \int\limits_{-1}^{1} x^2 dx = I_1 + I_2.$$

Первый интеграл найдем, сделав замену переменной $x = \cos\varphi$:

$$I_1 = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \int\limits_{\pi}^{0} \sqrt{1-\cos^2\varphi}(-\sin\varphi)d\varphi = \int\limits_{0}^{\pi} \sin^2\varphi\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_{0}^{\pi} \frac{1-\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi = \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда

$$\iint\limits_{D} dS = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}.$$

Двойной интеграл может применяться и для вычисления объема. Введем в $\mathbb{R}^3$ декартову систему координат $0xyz$. Заданы ограниченная замкнутая область D в плоскости Oxy и непрерывная функция $f(P)$, определенная на D. Предположим, что $f(P) \geq 0$ при $P \in D$. Множество точек, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению (как и раньше, $f(x, y) \equiv f(P(x, y)))$ $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, является поверхностью в $\mathbb{R}^3$ – графиком функции f.

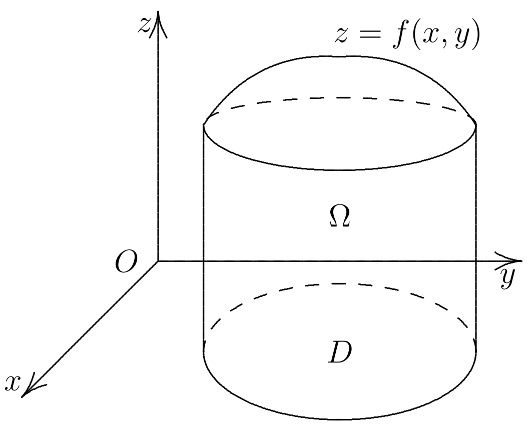

Рис. 1.13

Рассмотрим трехмерную цилиндрическую область (рис. 1.13)

$$\Omega = \{(x, y, z) : (x, y) \in D,$$
$$0 \leq z \leq f(x, y)\},$$

которая ограничена снизу плоскостью Oxy, сверху – поверхностью $z = = f(x, y)$ и сбоку – цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной Oz, и направляющей, совпадающей с границей области D.

Пусть для областей указанного вида определено понятие объема. Тогда объем области Ω можно вычислить как интеграл:

$$V(\Omega) = \iint\limits_{D} f(P)dS.$$

Пример 1.13. Найти объем области Ω, для которой $0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ при $x^2 + y^2 \leq 1$.

Имеем: $V(\Omega) = \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dS$, где D – единичный круг с центром в начале координат. Переходя к полярной системе координат, получим

$$V(\Omega) = \iint\limits_{\rho\le 1} \rho\rho\, d\rho\, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^2\, d\rho = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{3}\, d\varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

Пример 1.14. Найти объем области Ω, для которой $0 \le z \le x+y$, при $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x+y \le 1$.

Имеем: $V(\Omega) = \iint\limits_D (x+y) dS$, где D ограничена $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x+y \le 1$;

$$V(\Omega) = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (x+y)dy = \int\limits_0^1 \left(\left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{y=0}^{1-x} \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x - x^2 + \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{(1-x)^3}{6} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Упражнения.

1.11. Найти площадь области, ограниченной кривой $y = x^2$ и прямой $y = 2x + 1$.

1.12. Найти площадь области, ограниченной окружностями $x^2+y^2=4$ и $x^2+(y-1)^2=4$.

1.13. Найти объем области, для которой $0 \le z \le x^2+y^2$ при $x^2+y^2 \le 4$.

1.14. Найти объем области, для которой $0 \le z \le x+y$ при $(x-1)^2+$ $+(y-1)^2 \le 1$.

Ответы: **1.11.** $\frac{8\sqrt{2}}{3}$. **1.12.** $4\arcsin\frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{3\sqrt{15}}{4}$. **1.13.** 8π. **1.14.** 2π.

1.5. Использование двойного интеграла для вычисления площади поверхности

Напомним определение площади поверхности. Пусть в $\mathbb{R}^3$ заданы декартова система координат $Oxyz$ и поверхность $\Sigma = \{(x,y,z) : (x,y) \in \in D_{xy},\ z = f(x,y)\}$, где D_{xy} – ограниченная область с кусочно-гладкой границей на плоскости $0xy$, а функция $f(x,y)$ непрерывно дифференцируема на D_{xy}. Таким образом, Σ является частью графика функции f, лежащей над D_{xy}.

Рассмотрим разбиение $\{D_i\}$ области D_{xy} с рангом λ и возьмем точки $P_i \in D_i$. Так как функция F дифференцируема, то поверхность Σ имеет в точке P_i касательную плоскость Π_i. Цилиндрическая поверхность с образующей, параллельной $0z$, и направляющей, совпадающей с границей D_i, "вырезает" на плоскости Π_i некоторую область σ_i, площадь которой обозначим $\Delta\sigma_i$.

Рассмотрим сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i$. Эта сумма является площадью кусочно-линейной поверхности Σ', являющейся объединением рассмотренных частей плоскостей, касательных к Σ. Естественно считать рассматриваемую сумму приближением к площади поверхности Σ, поэтому разумно принять следующее определение.

Определение 1.2. *Если существует предел*

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i,$$

то он называется площадью поверхности Σ.

Напомним формулы, позволяющие вычислять площадь поверхности:

$$S = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dx\, dy. \tag{1.9}$$

Формула позволяет вычислять площадь поверхности Σ, являющейся графиком функции $z = f(x, y)$. Такую поверхность любая прямая, параллельная оси $0x$, пересекает не более одного раза. Если же поверхность Σ такова, что каждая прямая, параллельная оси $0y$, пересекает ее не более одного раза, то Σ является частью графика функции $y = g(x, z)$. В этом случае справедлива аналогичная (1.9) формула:

$$S = \iint\limits_{D_{xz}} \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2 + 1}\, dx\, dz, \tag{1.10}$$

где D_{xz} – область в плоскости $0xz$, являющаяся ортогональной проекцией Σ на эту плоскость.

Наконец, если $\Sigma = \{(x, y, z) : (x, z) \in D_{yz},\ x = h(y, z)\}$, то

$$S = \iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2 + 1}\, dy\, dz. \tag{1.11}$$

В общем случае поверхность Σ обычно возможно разбить на конечное число таких частей, для вычисления площадей которых можно применить одну из формул (1.9)–(1.11).

Рассмотрим теперь вопрос о вычислении площади поверхности Σ, заданной параметрически. Пусть параметрические уравнения поверхности Σ имеют вид:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,(\xi,\eta) = [x(\xi,\eta), y(\xi,\eta), z(\xi,\eta)]^T, \quad (\xi,\eta) \in D_{\xi\eta}. \tag{1.12}$$

Тогда площадь поверхности вычисляется по формуле

$$S = \iint\limits_{D_{\xi\eta}} \|\boldsymbol{r}\,'_{\xi} \times \boldsymbol{r}\,'_{\eta}\| d\xi\, d\eta.$$

Напомним как векторное произведение записывается в координатах: если $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$, $\quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}$ – векторы в $\mathbb{R}^3$, то $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y, \\ a_z b_x - a_x b_z, \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}$.

Символ $\|\boldsymbol{a}\|$ обозначает длину вектора, т. е. для $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$ имеем $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Пример 1.15. Найти площадь поверхности цилиндра $z^2 = x^3$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$.

Здесь $D_{xy} = \{(x,y) : \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 2\}$, $z = \pm\sqrt{x^3}$. Будем рассматривать $f(x,y) = \sqrt{x^3}$ и умножим интеграл на 2, что из соображений симметричности дает требуемую площадь поверхности:

$$S = 2 \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2 + 0^{\,2} + 1}\, dx\, dy = 2\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^1 \sqrt{\frac{9}{4}x + 1}\, dx =$$

$$= 2\int\limits_0^2 \left(\left(\frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{9}{4}x + 1 \right)^{3/2} \right) \Bigg|_{x=0}^{1} \right) dy = 2\int\limits_0^2 \left(\frac{8}{27} \left(\frac{13\sqrt{13}}{8} - 1 \right) \right) dy =$$

$$= \left(\frac{26\sqrt{13}}{27} - \frac{16}{27} \right) y \Bigg|_0^2 = \frac{52\sqrt{13} - 32}{27}.$$

Пример 1.16. Найти площадь поверхности верхней полусферы, заданной уравнением $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ при $x^2 + y^2 \le 1$.

Имеем:

$$S = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)^2 + 1}\, dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \sqrt{\frac{x^2+y^2}{1-x^2-y^2} + 1}\, dx\, dy = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \sqrt{\frac{1}{1-x^2-y^2}}\, dx\, dy.$$

Перейдем к полярной системе координат:

$$S = \iint\limits_{\rho\le 1} \sqrt{\frac{1}{1-\rho^2}}\, \rho\, d\rho\, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\, d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(\left(-\sqrt{1-\rho^2}\right)\Big|_{\rho=0}^{1} \right) d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} 1\, d\varphi = \varphi\Big|_0^{2\pi} = 2\pi.$$

Пример 1.17. Найти площадь поверхности, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\,\xi^2, \\ y = \eta^2, \\ z = \xi\eta, \end{cases}$$

где $(\xi, \eta) \in D_{\xi\eta}$, а область $D_{\xi\eta}$ ограничена прямыми $\eta = 0$, $\xi = \sqrt{2}$, $\eta = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\,\xi$.

Найдем $\boldsymbol{r}'_\xi \times \boldsymbol{r}'_\eta = \begin{bmatrix} \xi \\ 0 \\ \eta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 2\eta \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\eta^2 \\ -\xi^2 \\ 2\xi\eta \end{bmatrix}$,

$$\|\boldsymbol{r}'_\xi \times \boldsymbol{r}'_\eta\| = \sqrt{4\eta^4 + \xi^4 + 4\xi^2\eta^2} = \sqrt{(2\eta^2+\xi^2)^2} = 2\eta^2 + \xi^2,$$

$$S = \iint\limits_{D_{\xi\eta}} (2\eta^2+\xi^2) d\xi\, d\eta = \int\limits_0^{\sqrt{2}} d\xi \int\limits_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}\,\xi} (2\eta^2+\xi^2) d\eta =$$

$$= \int\limits_0^{\sqrt{2}} \left(\left(\frac{2}{3}\,\eta^3 + \xi^2\eta\right)\Bigg|_{\eta=0}^{\sqrt{\frac{3}{2}}\,\xi} \right) d\xi = \int\limits_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3 \xi^3 + \xi^2 \sqrt{\frac{3}{2}}\,\xi \right) d\xi =$$

$$= 2\sqrt{\frac{3}{2}}\int\limits_0^{\sqrt{2}} \xi^3 d\xi = \sqrt{6}\,\frac{1}{4}\,\xi^4\Big|_0^{\sqrt{2}} = \sqrt{6}.$$

Упражнения.

1.15. Найти площадь поверхности цилиндра $z = \frac{1}{2}x^2$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$.

1.16. Найти площадь поверхности $z = x^2 + y^2$, $z \le 1$.

1.17. Найти площадь поверхности $z = \sqrt{x^3} + \sqrt{y^3}$, $x, y \ge 0$, $x + y \le 1$.

1.18. Найти площадь поверхности, заданной параметрически:
$$\begin{cases} x = \xi + \eta, \\ y = \xi - \gamma, \quad \text{где } \xi, \eta \ge 0,\ \xi^2 + \eta^2 \le 2. \\ z = \xi\eta, \end{cases}$$

Ответы: **1.15.** $\frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2}$. **1.16.** $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)$. **1.17.** $\frac{416\sqrt{13}+64}{405}$. **1.18.** $\frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1)$.

2. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

2.1. Определение и свойства тройного интеграла

Определение, свойства и вычисление тройного интеграла аналогичны определению, свойствам и вычислению двойного интеграла. Напомним определение.

Рассмотрим ограниченную замкнутую область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей. Для такой области определено понятие объема. Как и в случае плоскости, назовем $d(X) = \sup\limits_{P', P'' \in X} \rho(P', P'')$ диаметром множества $X \subset \mathbb{R}^3$, где $\rho(P', P'')$ – расстояние между точками P' и P''.

Пусть на области Ω задана вещественная функция $f(P)$, $P \in \Omega$.

Рассмотрим произвольное разбиение $\{\omega_i\}$ области Ω на частичные области ω_i $(i = 1, 2, ..., n)$ с кусочно-гладкими границами, которые могут пересекаться между собой разве лишь по своим границам. Назовем рангом разбиения число $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d(\omega_i)$. Выберем произвольные точки $P_i \in \Omega_i$ и рассмотрим сумму
$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i, \tag{2.1}$$
где $\Delta V_i = V(\omega_i)$ – объем области ω_i. Сумма (2.1) называется интегральной суммой для функции $f(P)$, области Ω, разбиения $\{\omega_i\}$ и точек P_i.

Определение 2.1. *Число I называется тройным интегралом функции $f(P)$ по области Ω, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого разбиения $\{\omega_i\}$, ранг которого удовлетворяет условию $\lambda < \delta$, и любых точек $P_i \in \Omega_i$ справедливо неравенство*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i - I \right| < \varepsilon.$$

Функция $f(P)$ называется в этом случае интегрируемой по области Ω, а для ее интеграла используется обозначение

$$I = \iiint\limits_{\Omega} f(P)dV.$$

При вычислении тройного интеграла будут полезны следующие 2 свойства, аналогичные свойствам двойного интеграла:

1) если $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ и области Ω_1 и Ω_2 пересекаются разве лишь по своим границам, то

$$\iiint\limits_{\Omega} f(P)dV = \iiint\limits_{\Omega_1} f(P)dV + \iiint\limits_{\Omega_2} f(P)dV;$$

2) если $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ и $f_1(P)$, $f_2(P)$ интегрируемы по Ω, то функция $\alpha_1 f_1(P) + \alpha_2 f_2(P)$ тоже интегрируема по Ω и

$$\iiint\limits_{\Omega} [\alpha_1 f_1(P) + \alpha_2 f_2(P)]dV = \alpha_1 \iint\limits_{\Omega} f_1(P)dV + \alpha_2 \iint\limits_{\Omega} f_2(P)dV.$$

Приведем также свойство, связывающее интеграл с объемом:

3) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} dV = V(\Omega)$.

2.2. Вычисление тройного интеграла

Аналогично двойному интегралу сведем тройной интеграл к повторному. Пусть в $\mathbb{R}^3$ введена декартова система координат $0xyz$ и на области Ω задана функция $f(P)$. Как и в случае двойного интеграла, будем использовать обозначение $f(x, y, z) \equiv f(P(x, y, z))$.

Рассмотрим правильную относительно плоскости Oxy область Ω, т. е. область, декартовы координаты (x, y, z) точек которой удовлетворяют соотношениям: $(x, y) \in D_{xy}$, $g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)$, где D_{xy} – замкнутая ограниченная область с кусочно-гладкой границей в плоскости $0xy$, а $g_1(x, y)$ и $g_2(x, y)$ – непрерывные на D_{xy} функции.

Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна на Ω, то функция

$$F(x,y) = \int\limits_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

будет непрерывной в области D_{xy} и существует интеграл

$$\iint\limits_{D_{xy}} dx\,dy \int\limits_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz,$$

называемый повторным интегралом функции $f(x,y,z)$. При этом справедливо равенство

$$\iiint\limits_{\Omega} f(P)dV \equiv \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dx\,dy\,dz = \iint\limits_{D_{xy}} dx\,dy \int\limits_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \tag{2.2}$$

Если область D_{xy} (плоская) является правильной относительно оси Ox, т. е. $D_{xy} = \{(x,y):\ x_1 \le x \le x_2,\ h_1(x) \le y \le h_2(x)\}$, то двойной интеграл по D_{xy}, в свою очередь, сводится к повторному интегралу и, следовательно,

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dx\,dy\,dz = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{h_1(x)}^{h_2(x)} dy \int\limits_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \tag{2.3}$$

Для других возможных случаев справедливы формулы, аналогичные равенствам (2.2) и (2.3). В частности:

1) если Ω – правильная относительно плоскости Oxy, а D_{xy} – относительно оси Oy, т. е. $D_{xy} = \{y_1 \le y \le y_2,\ p_1(y) \le x \le p_2(y)\}$, то

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dx\,dy\,dz = \int\limits_{y_1}^{y_2} dy \int\limits_{p_1(y)}^{p_2(y)} dx \int\limits_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz;$$

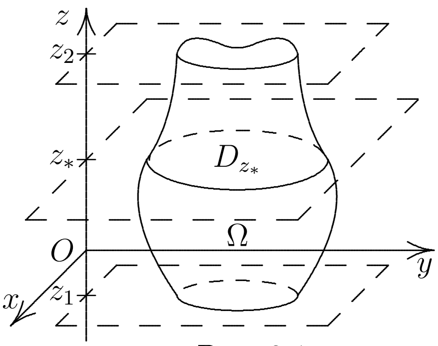

Рис. 2.1

2) если Ω – правильная относительно плоскости Oyz (рис. 2.1), т. е. $\Omega = \{(x,y,z) : (y,z) \in D_{yz},\ g_1(y,z) \le \le x \le g_2(y,z)\}$, а $D_{yz} = \{z_1 \le z \le \le z_2,\ h_1(z) \le y \le h_2(z)\}$ – правильна относительно Oz, то

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint\limits_{D_{yz}} dy\,dz \int\limits_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dx = \int\limits_{z_1}^{z_2} dz \int\limits_{h_1(z)}^{h_2(z)} dy \int\limits_{g_1(y,z)}^{g_2(y,z)} f(x,y,z)dx.$$

Пример 2.1. Вычислить интеграл $\iiint\limits_{\Omega} x^2yz\,dV$, где область Ω ограничена координатными плоскостями и плоскостью $x+y+z=1$.

Здесь Ω – правильная область относительно плоскости Oxy, $g_1(x,y) = = 0$, $g_2(x,y) = 1-x-y$. Плоская область D_{xy} ограничена прямыми $x=0$, $y=0$, $x+y=1$, и двойной интеграл, в свою очередь, можно переписать как повторный:

$$\iiint\limits_{\Omega} x^2yz\,dV = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} x^2yz\,dz =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left(\frac{x^2yz^2}{2}\bigg|_{z=0}^{z=1-x-y} \right) dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \frac{x^2y(1-x-y)^2}{2}\,dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \frac{1}{2}\left(x^2y + x^4y + x^2y^3 - 2x^3y - 2x^2y^2 + 2x^3y^2\right) dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2}\left(\frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^4y^2}{2} + \frac{x^2y^4}{4} - x^3y^2 - \frac{2x^2y^3}{3} + \frac{2x^3y^3}{3} \right)\bigg|_{y=0}^{1-x} \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{4}\,x^2(1-x)^2 + \frac{1}{4}\,x^4(1-x)^2 + \frac{1}{8}\,x^2(1-x)^4 - \frac{1}{2}\,x^3(1-x)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3}\,x^3(1-x)^3 \right) dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{24}\,x^2 - \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{4}\,x^4 - \frac{1}{6}\,x^5 + \frac{1}{24}\,x^6 \right) dx =$$

$$= \left(\frac{1}{72}\,x^3 - \frac{1}{24}\,x^4 + \frac{1}{20}\,x^5 - \frac{1}{36}\,x^6 + \frac{1}{168}\,x^7\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{72} - \frac{1}{24} + \frac{1}{20} - \frac{1}{36} + \frac{1}{168} = \frac{1}{2520}.$$

Пример 2.2. Вычислить интеграл $\iiint\limits_{\Omega} yz\,dV$, где область Ω ограничена поверхностями $z = x^2 + y^2$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

Область Ω – правильная относительно плоскости Oxy. Имеем:

$$g_1(x, y) = x^2 + \ y^2, \ \ g_2(x, y) = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$$

и область D_{xy} – круг $x^2 + y^2 \leq 1$. Отсюда:

$$\iiint\limits_{\Omega}(yz)dV = \iint\limits_{D_{xy}} dS \int\limits_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} yz\,dz = \iint\limits_{D_{xy}} \left(\frac{yz^2}{2}\Bigg|_{z=x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} \right) dS =$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}} (2y - x^2y - y^3 - x^4y - 2x^2y^3 - y^5)dS.$$

Таким образом, задача сведена к вычислению двойного интеграла. Поскольку область D_{xy} правильная относительно Ox, то двойной интеграл можно переписать через повторный:

$$\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}} (2y - x^2y - y^3 - x^4y - 2x^2y^3 - y^5)dS =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (2y - x^2y - y^3 - x^4y - 2x^2y^3 - y^5)dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} \left(\left(y^2 - \frac{1}{2}\,x^2y^2 - \frac{1}{4}\,y^4 - \frac{1}{2}\,x^4y^2 - \frac{1}{2}\,x^2y^4 - \frac{1}{6}\,y^6 \right)\Bigg|_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} 0\,dx = 0.$$

Пример 2.3. Вычислить интеграл $\iiint\limits_{\Omega} x\,dV$, где область Ω ограничена поверхностью $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ и плоскостью $x = 1$.

Здесь удобнее рассматривать область Ω как правильную относительно плоскости Oyz. Имеем: $g_1(y,z) = \sqrt{y^2+z^2}$, $g_2(y,z) = 1$ и

$$\iiint\limits_{\Omega} x\,dV = \iint\limits_{D_{yz}} dS \int\limits_{\sqrt{y^2+z^2}}^{1} x\,dx = \iint\limits_{D_{yz}} \left(\frac{x^2}{2}\bigg|_{x=\sqrt{y^2+z^2}}^{1} \right) dS =$$

$$= \iint\limits_{D_{yz}} \frac{1-y^2-z^2}{2}\,dS.$$

В этом двойном интеграле удобно применить полярную замену переменной:

$$\iint\limits_{D_{yz}} \frac{1-y^2-z^2}{2}\,dS = \iint\limits_{\rho\le 1} \frac{1-\rho^2}{2}\,\rho\,d\rho\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \frac{\rho-\rho^3}{2}\,d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(\left(\frac{\rho^2}{4} - \frac{\rho^4}{8} \right) \bigg|_{\rho=0}^{1} \right) d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{8}\,d\varphi = \frac{1}{8}\,\varphi\bigg|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}.$$

Упражнения.

2.1. Вычислить интеграл $\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3\,dV$, где область Ω ограничена $1 \le x \le 3$, $2 \le y \le 4$, $3 \le z \le 5$.

2.2. Вычислить интеграл $\iiint\limits_{\Omega} (x+y+z)dV$, где область Ω ограничена $2 \le x+z \le 4$, $3 \le y+z \le 5$, $4 \le x+y \le 6$.

2.3. Вычислить интеграл $\iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{(x+y+z+3)^2}\,dV$, где область Ω ограничена $x, y, z \ge 0$, $x+y+z = 3$.

2.4. Вычислить интеграл $\iiint\limits_{\Omega} x^2y^2z\,dV$, где область Ω ограничена $x^2 + y^2 = z^2$, $z \ge 0$, $z \le 4$.

2.5. Вычислить интеграл $\iiint\limits_{\Omega} x^2y\,dV$, где область Ω ограничена $x^2+y^2+z^2 = 4$, $x, y, z \ge 0$.

Ответы: **2.1.** $10154\,\frac{2}{3}$. **2.2.** 24. **2.3.** $\frac{9}{4} - 3\ln 2$. **2.4.** $\frac{4096\pi}{35}$. **2.5.** $\frac{2\pi}{3}$.

2.3. Замена переменной в тройном интеграле

При вычислении тройного интеграла, как и при вычислении двойного, бывает удобно перейти к криволинейным координатам. Пусть в $\mathbb{R}^3$ заданы декартова система координат $Oxyz$ и криволинейные координаты (ξ, η, ζ), связанные соотношениями

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta, \zeta), \\ y = y(\xi, \eta, \zeta), \\ z = z(\xi, \eta, \zeta), \end{cases} \tag{2.4}$$

а также область Ω с кусочно-гладкой границей. Пусть Ω' – образ области Ω при преобразовании координат (2.4), т. е. область в пространстве с декартовой системой координат $O'\xi\eta\zeta$, которая соответствует Ω при преобразовании (2.4). Тогда

$$\begin{aligned} &\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dx\,dy\,dz = \\ &= \iiint\limits_{\Omega'} f(x(\xi,\eta,\zeta), y(\xi,\eta,\zeta), z(\xi,\eta,\zeta))\,|J(\xi,\eta,\zeta)|d\xi\,d\eta\,d\zeta, \end{aligned} \tag{2.5}$$

где $J(\xi, \eta, \zeta)$ – якобиан, вычисляемый по следующей формуле:

$$J(\xi,\eta,\zeta) = \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}.$$

Пример 2.4. Вычислить интеграл $\iiint\limits_{\Omega} (x+y+z)^2 dV$, где Ω ограничена плоскостями $x+y=0$, $x+y=1$, $x+z=0$, $x+z=1$, $y+z=0$, $y+z=1$.

Здесь удобно перейти к новым координатам $\xi = x+y$, $\eta = x+z$, $\zeta = y+z$, т. е. $x = \dfrac{1}{2}(\xi+\eta-\zeta)$, $y = \dfrac{1}{2}(\xi+\zeta-\eta)$, $z = \dfrac{1}{2}(\eta+\zeta-\xi)$.

Имеем:

$$J(\xi,\eta,\zeta) = \det \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2},$$

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{\Omega'}\left(\frac{1}{2}(\xi+\eta+\zeta)\right)^2\frac{1}{2}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

где область Ω' – ограничена $\xi=0$, $\xi=1$, $\eta=0$, $\eta=1$, $\zeta=0$, $\zeta=1$. Тогда

$$\iiint\limits_{\Omega'}\frac{1}{8}(\xi+\eta+\zeta)^2d\xi\,d\eta\,d\zeta=\frac{1}{8}\int\limits_0^1d\xi\int\limits_0^1d\eta\int\limits_0^1(\xi+\eta+\zeta)^2d\zeta=$$
$$=\frac{1}{8}\int\limits_0^1d\xi\int\limits_0^1\left(\frac{1}{3}(\xi+\eta+\zeta)^3\Big|_{\zeta=0}^1\right)d\eta=\frac{1}{24}\int\limits_0^1d\xi\int\limits_0^1\left((\xi+\eta+1)^3-\right.$$
$$\left.-(\xi+\eta)^3\right)d\eta=\frac{1}{24}\int\limits_0^1\left(\left(\frac{1}{4}(\xi+\eta+1)^4-\frac{1}{4}(\xi+\eta)^4\right)\Big|_{\eta=0}^1\right)d\xi=$$

$$=\frac{1}{96}\int\limits_0^1\left((\xi+2)^4-2(\xi+1)^4+\xi^4\right)d\xi=\frac{1}{96}\left(\frac{1}{5}(\xi+2)^5-\frac{2}{5}(\xi+1)^5+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{5}\,\xi^5\right)\Big|_{\xi=0}^1=\frac{1}{480}(3^5-2\cdot2^5+1-2^5+2\cdot1-0)=\frac{150}{480}=\frac{5}{16}.$$

Цилиндрическая и сферическая системы координат.

В различных задачах часто приходится использовать цилиндрическую и сферическую системы координат. Приведем определение этих систем.

Цилиндрическая система координат связана с декартовой согласно формулам:

$$\begin{cases}x=\rho\cos\varphi,\\ y=\rho\sin\varphi,\\ z=z.\end{cases}$$

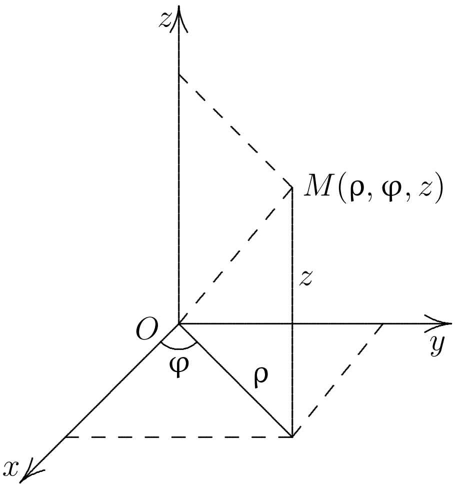

Рис. 2.2

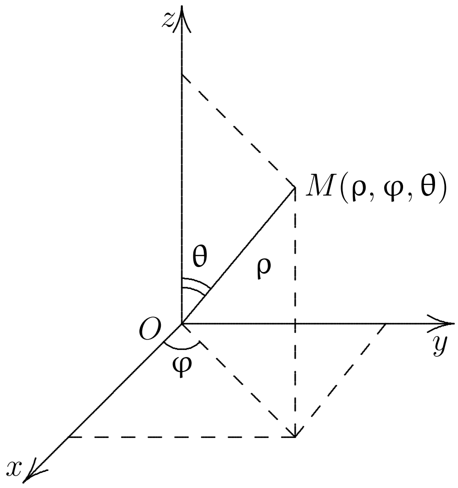

Рис. 2.3

Смотри рис. 2.2, при этом

$$J(\rho, \varphi, z) = \det \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \rho.$$

Значит, согласно формуле (2.5)

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z) dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{\Omega'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z))\, \rho d\xi, d\eta\, d\zeta.$$

Сферическая системы координат связана с декартовой согласно формулам: $x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$. (см. рис. 2.3). При этом

$$J(\rho, \varphi, \theta) = \det \begin{bmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\rho\sin\theta \end{bmatrix} = -\rho^2\sin\theta.$$

Значит, согласно формуле (2.5)

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z) dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega'} f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta), \rho\cos\theta)\, \rho^2\sin\theta\;\, d\varphi\, d\theta\, d\rho.$$

Пример 2.5. Вычислить интеграл $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2} dV$, где Ω – шар радиуса 2 с центром в начале координат.

В этом случае удобно сделать сферическую замену координат $x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$. Тогда

$$\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2}dV = \iiint\limits_{\Omega'} \rho\cdot\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta,$$

где Ω' – параллелепипед $\{(\rho,\varphi,\theta)\mid 0\le\rho\le 2,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\theta\le\pi\}$.

Имеем:

$$\iiint\limits_{\Omega'} \rho^3\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta = \int\limits_0^2 d\rho\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\pi}\rho^3\sin\theta\,d\theta =$$

$$= \int\limits_0^2 d\rho\int\limits_0^{2\pi}\left(\left(-\rho^3\cos\theta\right)\Big|_{\theta=0}^{\pi}\right)d\varphi = \int\limits_0^2 d\rho\int\limits_0^{2\pi} 2\rho^3 d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^2 4\pi\rho^3 d\rho = \pi\rho^4\Big|_{\rho=0}^{2} = 16\pi.$$

Пример 2.6. Вычислить интеграл $\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}dV$, где область Ω ограничена цилиндром $x^2+y^2=4$ и плоскостями $z=0$ и $z=5$.

Здесь удобно сделать цилиндрическую замену координат $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $z=z$. Тогда

$$\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\Omega'} z\sqrt{\rho^2+z^2}\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz,$$

где Ω' – параллелепипед $\{(z,\rho,\varphi)\mid 0\le z\le 5,\ 0\le\rho\le 2,\ 0\le\varphi\le 2\pi)\}$.

Имеем:

$$\iiint\limits_{\Omega'} z\rho\sqrt{\rho^2+z^2}d\rho\,d\varphi\,dz = \int\limits_0^5 dz\int\limits_0^2 d\rho\int\limits_0^{2\pi} z\rho\sqrt{\rho^2+z^2}d\varphi =$$

$$= 2\pi\int\limits_0^5 dz\int\limits_0^2 z\rho\sqrt{\rho^2+z^2}d\rho = 2\pi\int\limits_0^5\left(z\,\frac{1}{3}(\rho^2+z^2)^{3/2}\Big|_{\rho=0}^{2}\right)dz =$$

$$= \frac{2\pi}{3}\int\limits_0^5 (z(z^2+4)^{3/2}-z^4)dz = \frac{2\pi}{3}\left(\frac{1}{5}(z^2+4)^{5/2}-\frac{1}{5}\,z^5\right)\Big|_{z=0}^{5} =$$

$$= \frac{2\pi}{15}\left(29^{5/2}-5^5-2^5\right) = \frac{1682\sqrt{29}-6314}{15}\,\pi.$$

Пример 2.7. Вычислить интеграл $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dV$, где область Ω ограничена сферой $x^2+y^2+z^2=2z$.

В этом примере можно сделать различные замены.

<u>1-й способ.</u> Сделаем сферическую замену:

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{\Omega'}\rho^2\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta,$$

где Ω' – область $\left\{(\rho,\varphi,\theta)\mid 0\le\rho\le 2\cos\theta,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$.

Тогда

$$\iiint\limits_{\Omega'}\rho^4\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta=\int\limits_0^{\pi/2}d\theta\int\limits_0^{2\cos\theta}d\rho\int\limits_0^{2\pi}\rho^4\sin\theta\,d\varphi=$$

$$=2\pi\int\limits_0^{\pi/2}d\theta\int\limits_0^{2\cos\theta}\rho^4\sin\theta\,d\rho=2\pi\int\limits_0^{\pi/2}\left(\left(\frac{\rho^5}{5}\sin\theta\right)\Bigg|_{\rho=0}^{2\cos\theta}\right)d\theta=$$

$$=2\pi\int\limits_0^{\pi/2}\frac{2^5\cos^5\theta}{5}\sin\theta\,d\theta=\frac{64\pi}{5}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^5\theta\sin\theta\,d\theta=$$

$$=\frac{64\pi}{5}\left(-\frac{1}{6}\cos^6\theta\right)\Bigg|_{\theta=0}^{\pi/2}=\frac{64\pi}{30}=\frac{32\pi}{15}.$$

<u>2-й способ.</u> Сделаем замену $x=\rho\cos\varphi\sin\theta$, $y=\rho\sin\varphi\sin\theta$, $z=1+$ $+\rho\cos\theta$, которая получается сдвигом сферической замены на 1 вверх по оси $0z$.

Имеем:

$$J(\rho,\varphi,\theta)=\det\begin{bmatrix}\cos\varphi\sin\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta\\ \cos\theta & 0 & -\rho\sin\theta\end{bmatrix}=-\rho^2\sin\theta.$$

Тогда $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{\Omega''}(\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\theta+$

$$+\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+1+2\rho\cos\theta+\rho^2\cos^2\theta)\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta=$$

$$=\iiint\limits_{\Omega''}(\rho^2+2\rho\cos\theta+1)\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta,$$

где Ω'' – параллелепипед $\{(\rho, \varphi, \theta) \mid 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi\}$.

Имеем:

$$\iiint\limits_{\Omega''} (\rho^2 + 2\rho\cos\theta + 1)\rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\varphi \, d\theta =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^{1} (\rho^4 \sin\theta + 2\rho^3 \sin\theta\cos\theta + \rho^2\sin\theta) d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \left(\left(\frac{\rho^5}{5}\, \sin\theta + \frac{\rho^4}{4}\, \sin(2\theta) + \frac{\rho^3}{3}\, \sin\theta \right) \Bigg|_{\rho=0}^{1} \right) d\theta =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \left(\frac{1}{5}\, \sin\theta + \frac{1}{4}\, \sin(2\theta) + \frac{1}{3}\, \sin\theta \right) d\theta =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \left(\left(-\frac{1}{5}\, \cos\theta - \frac{1}{8}\, \cos(2\theta) - \frac{1}{3}\, \cos\theta \right) \Bigg|_{\theta=0}^{\pi} \right) d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{3} \right) d\varphi = \frac{16}{15}\, \varphi \Bigg|_0^{2\pi} = \frac{16}{15}\, 2\pi = \frac{32\pi}{15}.$$

<u>3-й способ.</u> Сделаем цилиндрическую замену:

$$\iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{\Omega'''} (\rho^2 + z^2)\rho \, d\rho \, d\varphi \, dz,$$

где Ω''' – область $\{(\rho, \varphi, z) \mid 0 \le \rho \le \sqrt{2z - z^2},\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le z \le 2\}$.

Тогда

$$\iiint\limits_{\Omega'''} (\rho^2 + z^2)\rho \, d\rho \, d\varphi \, dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} dz \int\limits_0^{\sqrt{2z - z^2}} \rho(\rho^2 + z^2) d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} \left(\left(\frac{1}{4} (\rho^2 + z^2)^2 \Bigg|_{\rho=0}^{\sqrt{2z - z^2}} \right) \right) dz =$$

$$= \frac{1}{4} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} \left((2z)^2 - z^4 \right) dz = \frac{1}{4} \int\limits_0^{2\pi} \left(\left(4\, \frac{z^3}{3} - \frac{1}{5}\, z^5 \right) \Bigg|_{z=0}^{2} \right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{4\cdot 8}{3}-\frac{32}{5}\right)d\varphi = \frac{64}{4\cdot 15}\,\varphi\Big|_{\varphi=0}^{2\pi} = \frac{32\pi}{15}.$$

Таким образом, этот пример демонстрирует, что к вычислению интеграла можно применить различные замены, что сказывается на технических трудностях дальнейших вычислений. Можно применить замену, упрощающую вид подынтегральной функции, а можно упрощать область интегрирования. В каждом интеграле это решается индивидуально.

Упражнения.

2.6. Вычислить интеграл $\iiint\limits_\Omega xy\,dV$, где область Ω ограничена $2 \le x+y \le 3$, $3 \le y+z \le 4$, $4 \le x+z \le 5$.

2.7. Вычислить интеграл $\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)\,dV$, где область Ω ограничена двумя сферами $4 \le x^2+y^2+z^2 \le 9$.

2.8. Вычислить интеграл $\iiint\limits_\Omega \dfrac{dV}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}}$, где область Ω ограничена сферой $x^2+y^2+z^2=1$ и условиями $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

2.9. Вычислить интеграл $\iiint\limits_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}dV$, где область Ω ограничена цилиндром $x^2+y^2=9$ и $z=0$ и $z=3$.

2.10. Вычислить интеграл $\iiint\limits_\Omega z^2(x^2+y^2)^2dV$, где область Ω ограничена $x^2+\,y^2=2x$, $z=1$, $z=3$.

2.11. Вычислить интеграл $\iiint\limits_\Omega y^2\,dV$, где область Ω заключена между поверхностями $z^2=3(x^2+y^2)$ и $x^2+y^2+z^2=36$, $z \ge 0$.

2.12. Вычислить интеграл $\iiint\limits_\Omega z^2\,dV$, где область Ω ограничена $z=x^2+y^2$ и $z=1$.

Ответы: **2.6.** $\dfrac{31}{48}$. **2.7.** $\dfrac{1688\pi}{15}$. **2.8.** $\dfrac{\pi}{8}\left(\sqrt{2}+\ln\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)$.
2.9. $27\pi\left(\dfrac{7\sqrt{2}}{4}+\dfrac{3}{8}\ln\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)$. **2.10.** $\dfrac{260\pi}{9}$. **2.11.** $\dfrac{6^5\pi(16-9\sqrt{3})}{120}$. **2.12.** $\dfrac{\pi}{4}$.

3. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

3.1. Криволинейный интеграл первого рода

Напомним определение криволинейного интеграла первого рода.

Рассмотрим случай функций двух переменных. Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ заданы кусочно-гладкая кривая l и скалярная функция $f(P)$, определенная во всех точках кривой l. Обозначим A и B точки, являющиеся концами кривой l. Пусть $P_i \in l$, $i = 0, 1, ..., n$ – точки на кривой l; $P_0 = A$, $P_n = B$. Точки P_i задают разбиение кривой l на части l_i $(i = 1, 2, ..., n)$ с концами P_{i-1} и P_i. Каждая кривая l_i имеет длину, которую обозначим Δl_i. На кривых l_i выберем (произвольно) точки $P_i^* \in l_i$ и вычислим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i^*)\Delta l_i,$$

называемую интегральной суммой для функции $f(P)$, кривой l, заданного разбиения $\{P_i\}$ и заданного выбора точек P_i^*. Назовем рангом разбиения число $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta l_i$.

Определение 3.1. *Число I называется криволинейным интегралом первого рода функции $f(P)$ по кривой l, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого разбиения $\{P_i\}$, удовлетворяющего условию $\lambda < \delta$, и любого выбора точек P_i^* справедливо неравенство*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(P_i^*)\Delta l_i - I\right| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Функция $f(P)$ называется в этом случае интегрируемой по l. Для криволинейного интеграла используется обозначение

$$I = \int\limits_{l} f(P)\, dl.$$

Приведем условия существования криволинейного интеграла первого рода. Необходимым условием существования является ограниченность функции $f(P)$ на кривой l. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. *Если множество $\{f(P)\colon P \in l\}$, т. е. множество значений функции $f(P)$ на кривой l, не ограничено, то функция $f(P)$ не интегрируема по кривой l.*

Однако, как и для определенного интеграла, не всякая ограниченная функция интегрируема по l. Достаточным условием интегрируемости функции является ее непрерывность, поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2. *Пусть функция $f(P)$ непрерывна в замкнутой области D, содержащей кусочно-гладкую кривую l. Тогда $f(P)$ интегрируема по l.*

Отметим, что условия теоремы 3.2 можно значительно ослабить; в частности, эта теорема справедлива для кусочно-непрерывной на l функции $f(P)$, но точная формулировка теоремы в этом случае требует как уточнения понятия кривой, так и точного определения термина „кусочно-непрерывная функция“.

Доказательство теорем 3.1 и 3.2 а так же усиленный вариант теоремы 3.2 можно найти в учебнике [2].

Замечание 3.1. Физический смысл криволинейного интеграла первого рода состоит в том, что этот интеграл дает, например, решение задачи о вычислении массы (или заряда), распределенной вдоль кривой l с плотностью $f(P)$. $\otimes$

Отметим свойства криволинейного интеграла, которые применяются при его вычислении. Во-первых, аддитивность криволинейного интеграла.

Теорема 3.3. *Пусть кусочно-гладкая кривая l разбита на две части l_1 и l_2, $l = l_1 \cup l_2$, имеющие лишь одну общую точку, и функция $f(P)$ интегрируема по l. Тогда $f(P)$ интегрируема по l_1 и l_2 и*

$$\int\limits_{l} f(P)\,dl = \int\limits_{l_1} f(P)\,dl + \int\limits_{l_2} f(P)\,dl. \tag{3.2}$$

Наоборот, если в этом случае $f(P)$ интегрируема по l_1 и l_2, то $f(P)$ интегрируема по l, и также справедливо равенство (3.2).

Это свойство позволяет (если это необходимо) разбивать кривую на несколько частей и вычислять несколько интегралов по отдельности. Например, это может быть удобно для параметризации кривой.

Во-вторых, линейность криволинейного интеграла.

Теорема 3.4. *Если $f_1(P)$ и $f_2(P)$ интегрируемы по l и $f(P) = \alpha_1 f_1(P) + \alpha_2 f_2(P)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, то функция $f(P)$ также интегрируема по l и*

$$\int\limits_{l} f(P)\,dl = \alpha_1 \int\limits_{l} f_1(P)\,dl + \alpha_2 \int\limits_{l} f_2(P)\,dl.$$

Кроме того, отметим, что криволинейный интеграл от 1 равен длине кривой.

Теорема 3.5. *Если $f(P) \equiv 1$ на l и L – длина кривой l, то*

$$\int\limits_{l} dl = L.$$

Доказательство данной теоремы очевидно. Согласно определению 3.1 , интегральная сумма (3.1), если $f(P) \equiv 1$, постоянна для любого разбиения кривой l и любого выбора точек $P_i^* \in l_i$, равна длине кривой (в силу аддитивности длины).

Утверждение 3.1. *Отметим, что в отличии от определенного интеграла, криволинейный интеграл первого рода не меняет знак при изменении направления интегрирования по кривой l*

$$\int\limits_{l,\ [A,B]} f(P)\, dl = \int\limits_{l,\ [B,A]} f(P)\, dl.$$

Это утверждение следует из определения 3.1 и положительности длины дуги Δl_i.

Рассмотрим вопрос о вычислении криволинейного интеграла первого рода в том случае, когда кривая l является гладкой кривой, а функция $f(P)$ непрерывна. Напомним, что кривая l называется гладкой, если множество точек l описывается соотношениями

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), \quad t \in \left[t^{(1)}, t^{(2)}\right],$$

где $\boldsymbol{r}(t)$ – непрерывно дифференцируемая на $\left[t^{(1)}, t^{(2)}\right]$ функция и $\|\boldsymbol{r}\,'(t)\| \neq \neq 0$.

Пусть на плоскости, где заданы l и $f(P)$, введена декартова система координат Oxy. Тогда уравнения кривой l имеют вид:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = [x(t), y(t)]^T, \quad t \in \left[t^{(1)}, t^{(2)}\right], \tag{3.3}$$

где $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцируемые на $\left[t^{(1)}, t^{(2)}\right]$ функции и $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \geq r_0^2 > 0$.

Отметим, что если кривая l задана геометрически, то уравнения (3.3) не заданы и их нахождение является задачей, предшествующей задаче вычисления криволинейного интеграла. Для заданной кривой ℓ параметрическое описание (3.3) всегда не единственно. Например, верхняя полуокружность единичной окружности может быть описана двумя различными способами:

$$\boldsymbol{r} = \left[t, \sqrt{1-t^2}\right]^T, \quad t \in [-1, 1]; \quad \boldsymbol{r} = [\cos t, \sin t]^T, \quad t \in [0, \pi];$$

легко предложить и другие способы параметрического описания той же кривой. Для дальнейшего выберем какой-нибудь один способ описания кривой l.

При выбранной параметризации справедливо равенство

$$\int\limits_l f(P)dl = \int\limits_l f(x,y)dl = \int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt \qquad (3.4)$$

для непрерывной функции $f(P)$ и гладкой кривой l.

Полное доказательство соотношения (3.4) приведено в учебнике [2].

Уравнение 3.4 можно принять за определение криволинейного интеграла первого рода, если доказать сохранение вида 3.4 при различной параметризации (см. [1], [2]).

Пример 3.1. Вычислить интеграл $\int\limits_l (x+y)^2 dl$ по ломаной с вершинами $(1;1)$, $(2;3)$, $(2;6)$.

Здесь удобно применить теорему об аддитивности. Сперва найдем интеграл по отрезку с концами $(1;1)$ и $(2;3)$. Удобно рассмотреть параметризацию $\begin{cases} x = 1+t, \\ y = 1+2t, \end{cases}$ где t меняется от 0 до 1. Имеем:

$$\int\limits_{[(1,1),(2,3)]} (x+y)^2\,dl = \int\limits_0^1 ((1+t)+(1+2t))^2\sqrt{((1+t)')^2+((1+2t)')^2}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^1 (2+3t)^2\sqrt{1^2+2^2}\,dt = \sqrt{5}\int\limits_0^1 (2+3t)^2\,dt = \frac{\sqrt{5}}{9}(2+3t)^3\Big|_0^1 = 13\sqrt{5}\ .$$

Теперь найдем интеграл по отрезку $[(2;3),(2;6)]$. Здесь удобно применить параметризацию $\begin{cases} x = 2, \\ y = 3+t, \end{cases}$ где t меняется от 0 до 3. Имеем:

$$\int\limits_{[(2,3),(2,6)]} (x+y)^2\,dl = \int\limits_0^3 (2+(3+t))^2\sqrt{(2')^2+((3+t)')^2}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^3 (t+5)^2\sqrt{0+1}\,dt = \int\limits_0^3 (t+5)^2\,dt = \frac{(t+5)^3}{3}\Big|_0^3 = \frac{512-125}{3} = 129.$$

По свойству аддитивности $\int\limits_l (x+y)^2\,dl = 13\sqrt{5}+129.$

Пример 3.2. Найти интеграл $\int\limits_l (x^2+y^2)\,dl$, где l – окружность радиуса 3 с центром в начале координат.

В этом примере рассмотрим параметризацию окружности $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 3\sin t, \end{cases}$ где t меняется от 0 до 2π.

Имеем:

$$\int\limits_l (x^2+y^2)\,dl = \int\limits_0^{2\pi} (9\cos^2 t + 9\sin^2 t)\sqrt{((3\cos t)')^2 + ((3\sin t)')^2}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} 9\sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t}\,dt = \int\limits_0^{2\pi} 27\,dt = 54\pi\,.$$

В случае криволинейной системы координат формула несколько изменяется. Пусть (ρ, φ) – полярные координаты и уравнения l имеют вид:

$$\begin{cases} \rho = \rho(\tau); \\ \varphi = \varphi(\tau); \end{cases} \qquad \tau \in \left[\tau^{(1)}, \tau^{(2)}\right].$$

Тогда

$$\int\limits_l f(P)\,dl = \int\limits_{\tau^{(1)}}^{\tau^{(2)}} f(\rho(\tau)\cos(\varphi(\tau)), \rho(\tau)\sin(\varphi(\tau)))\sqrt{(\rho'(\tau))^2 + (\rho(\tau)\varphi'(\tau))^2}\,d\tau.$$

Пример 3.3. Вычислить интеграл $\int\limits_l (\rho+\varphi)\,dl$, где кривая l задана параметрически в полярных координатах $\begin{cases} \rho = t^3, \\ \varphi = t, \end{cases}$ а t меняется от 0 до 4.

Имеем:

$$\int\limits_l (\rho+\varphi)\,dl = \int\limits_0^4 (t^3+t)\sqrt{(3t^2)^2 + (t^3\cdot 1)^2}\,dt = \int\limits_0^4 t(t^2+1)\sqrt{9t^4+t^6}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^4 t(t^2+1)t^2\sqrt{t^2+9}\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_9^{25} (u-8)(u-9)\sqrt{u}\,du =$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{9}^{25}\bigl(u^2-17u+72\bigr)\sqrt{u}\,du=\frac{u^{(3/2)}\,(840-119\,u+5\,u^2)}{35}\Bigg|_{9}^{25}=$$

$$=\frac{125(840-595+3125)-27(840-357+405)}{35}=\frac{119052}{35}=3401\frac{17}{35}.$$

В случае функции трех переменных $f(P)$ и кусочно-гладкой кривой l, заданной на $\mathbb{R}^3$, криволинейный интеграл имеет аналогичные определение и свойства.

Формула для вычисления интеграла имеет вид

$$\int\limits_{l} f(P)\,dl=\int\limits_{l} f(x,y,z)\,dl=$$

$$=\int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt,$$

где кривая имеет параметризацию $\boldsymbol{r}\ (t)=\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{bmatrix}$ при $t\in\left[t^{(1)},t^{(2)}\right]$.

Пример 3.4. Вычислить интеграл $\int\limits_{l}(xy^2+z)\,dl$, где кривая l имеет параметризацию $\begin{cases}x(t)=2t,\\ y(t)=t^2\sqrt{3}, & \text{при } t\in[0;1].\\ z(t)=t^3\end{cases}$

Имеем:

$$\int\limits_{l}(xy^2+z)\,dl=\int\limits_{0}^{1}(6t^5+t^3)\sqrt{2^2+(2t\sqrt{3})^2+(3t^2)^2}\,dt=$$

$$=\int\limits_{0}^{1}(6t^5+t^3)\sqrt{9t^4+12t^2+4}\,dt=\int\limits_{0}^{1}(6t^5+t^3)(3t^2+2)\,dt=$$

$$=\int\limits_{0}^{1}(18t^7+15t^5+2t^3)\,dt=\left(\frac{9}{4}\,t^8+\frac{5}{2}\,t^6+\frac{1}{2}\,t^4\right)\Bigg|_{0}^{1}=5\frac{1}{4}\,.$$

Упражнения.

3.1. Вычислить интеграл $\int\limits_{l}\sqrt{x^2+y^2}\,dl$, где l задана параметрически

$$\begin{cases} x = t\cos t, \\ y = t\sin t \end{cases} \quad \text{при } t \in [0, \pi].$$

3.2. Вычислить интеграл $\int\limits_l x^2y^2\,dl$, где l – окружность радиуса 2 с центром в начале координат.

3.3. Вычислить интеграл $\int\limits_l (x+y)\,dl$, где l – окружность $(x-1)^2+$ $+(y-2)^2 = 9$.

3.4. Вычислить интеграл $\int\limits_l (x+y)^3\,dl$, где l – прямоугольник с вершинами $(0;0)$, $(3;0)$, $(3;2)$, $(0;2)$.

3.5. Вычислить интеграл $\int\limits_l \rho\,dl$, где кривая l задана параметрически в полярной системе координат $\begin{cases} \rho = 1+t, \\ \varphi = t \end{cases}$ при $t \in [0, 1]$.

3.6. Вычислить интеграл $\int\limits_l \rho^3\,dl$, где кривая l задана параметрически в полярной системе кординат $\begin{cases} \rho = t, \\ \varphi = t^2 \end{cases}$ при $t \in [0, \sqrt[4]{2}]$.

3.7. Вычислить интеграл $\int\limits_l (x^2+y^2)z\,dl$, где кривая l задана параметрически $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = t \end{cases}$ при $t \in [0, 2\pi]$.

3.8. Вычислить интеграл $\int\limits_l (x+y+z)dl$, где l – ломаная с вершинами $(0;1;1)$, $(1;2;3)$, $(3;5;7)$, $(4;6;8)$.

Ответы: **3.1.** $\frac{1}{3}\left((\pi^2+1)^{3/2}-1\right)$. **3.2.** 8π. **3.3.** 18π. **3.4.** $\frac{625}{2}$. **3.5.** $\frac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right)$. **3.6.** $\frac{13}{12}$. **3.7.** $2\pi^2\sqrt{2}$. **3.8.** $4\sqrt{6}+10.5\sqrt{29}+16.5\sqrt{3}$.

3.2. Криволинейный интеграл второго рода

Напомним определение. Пусть задана кривая l и векторная функция $\boldsymbol{f}(P)$. На кривой l выберем одно из двух возможных направлений, другими словами, выберем одну из двух точек A и B, являющихся концами l, а именно точку A, в качестве начала l, а другую (точку B) – в качестве конца l. Кривую l с выбранным на ней направлением будем называть ориентированной кривой и обозначим l_+, а ту же кривую с противоположным направлением обозначим l_-. Введем такое разбиение $\{P_i\}$ ориентированной кривой l_+, что $P_0 = A$, $P_n = B$ и $P_i^* \in l_{i-1}$ для $i = 1, 2, ..., n-1$, где l_{i-1} – часть кривой l с началом в точке P_{i-1} и концом в точке P_i. Такое разбиение будем называть согласованным с направлением на l_+. Рангом разбиения $\{P_i\}$ назовем число $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} \|\overrightarrow{\Delta l_i}\|$. Рассмотрим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\boldsymbol{f}\,(P_i^*), \overrightarrow{\Delta l_i} \right), \tag{3.5}$$

где $\overrightarrow{\Delta l_i}$ – вектор $\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$. Сумму (3.5) будем называть интегральной суммой для криволинейного интеграла второго рода.

Определение 3.2. *Число I называется криволинейным интегралом функции $\boldsymbol{f}(P)$ по кривой l_+, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого согласованного с направлением на l_+ разбиения $\{P_i\}$, для которого $\lambda < \delta$, и любого выбора точек P_i^* выполнено неравенство*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \left(\boldsymbol{f}\,(P_i^*), \overrightarrow{\Delta l_i} \right) - I \right| < \varepsilon.$$

Если криволинейный интеграл второго рода существует, то функция $\boldsymbol{f}(P)$ называется интегрируемой по l_+, а для интеграла используется обозначение $\int\limits_{l_+} (\boldsymbol{f}\,(P), \boldsymbol{dl}\,)$, где $\boldsymbol{dl} = dx\,\boldsymbol{i} + dy\,\boldsymbol{j}$ в пространстве $\mathbb{R}^2$ (или $\boldsymbol{dl} = dx\,\boldsymbol{i} + dy\,\boldsymbol{j} + dz\,\boldsymbol{k}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$).

Замечание 3.2. С физической точки зрения такое определение криволинейного интеграла второго рода соответствует задаче вычисления работы силы $\boldsymbol{f}\,(P)$ при перемещении по кривой l_+. $\otimes$

Ясно, что для кривой l_- согласованным с ее направлением разбиением будет разбиение $\{P'_i\}$, где $P'_i = P_{n-i}$, $i = 0, 1, ..., n$. Для разбиений $\{P_i\}$ кривой l_+ и $\{P'_i\}$ кривой l_- соответствующие векторы
$overrightarrow \Delta l_i$ различаются только знаком, поэтому

$$\int\limits_{l_-} (\boldsymbol{f}\,(P), \boldsymbol{dl}\,) = -\int\limits_{l_+} (\boldsymbol{f}\,(P), \boldsymbol{dl}\,), \tag{3.6}$$

если, конечно, $\boldsymbol{f}\,(P)$ интегрируема по l_+.

Для криволинейного интеграла второго рода справедливы теоремы, аналогичные теоремам для интеграла первого рода. В частности, криволинейный интеграл второго рода обладает свойствами аддитивности и линейности.

Перейдем к вопросу о вычислении криволинейного интеграла второго рода. Задача вычисления интеграла второго рода является, в общем случае, более сложной, чем задача вычисления интеграла первого рода. Для решения этой задачи необходимо, во-первых, ввести в $\mathbb{R}^2$ какую-либо систему координат и, во-вторых, в каждой точке выбрать некоторый базис. Целесообразно в качестве базиса взять базис из координатных ортов, соответствующих введенной системе координат. В простейшем случае декартовых координат такой базис не зависит от точки – это обстоятельство существенно упрощает вычисление криволинейного интеграла второго рода.

Итак, пусть в $\mathbb{R}^2$ введены система декартовых координат Oxy и соответствующий ей базис $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$. Пусть уравнение гладкой кривой l имеет вид

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j}, \quad t \in \left[t^{(1)}, t^{(2)}\right]. \tag{3.7}$$

Разложим $\boldsymbol{f}\,(P)$ по выбранному базису $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$:

$$\boldsymbol{f}\,(P) = f_x(x,y)\boldsymbol{i} + f_y(x,y)\boldsymbol{j}.$$

Теорема 3.6. *Если* (x, y) *– декартовы координаты и* l *– гладкая кривая, соответствующая уравнению* (3.7), то для интегрируемой по l функции $\boldsymbol{f}(P)$ справедливо равенство

$$\int\limits_{l_+} (\boldsymbol{f}(P), \boldsymbol{dl}\,) = \int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} [f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)]\,dt, \tag{3.8}$$

где f_x и f_y – проекции вектора $\boldsymbol{f}$ на оси Ox и Oy соответственно.

Полное доказательство этой теоремы приведено, например, в учебнике [2].

Как и в случае криволинейного интеграла первого рода, равенство (3.8) может быть принято в качестве определения интеграла второго рода. В этом случае, однако, необходимо доказать, что при геометрическом задании кривой l_+ интеграл

$$\int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} \left[f_x\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + f_y\big(x(t), y(t)\big)y'(t)\right] dt \tag{3.9}$$

не зависит от способа параметризации (согласованного с l_+) кривой l_+ доказательство см. в пособии [1] и учебнике [2].

Приведем формулы вычислении криволинейного интеграла второго рода в пространстве $\mathbb{R}^3$. Пусть введены система декартовых координат $Oxyz$ и соответствующий ей базис $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$. Пусть уравнение гладкой кривой l имеет вид

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k} \quad t \in \left[t^{(1)}, t^{(2)}\right]. \tag{3.10}$$

Разложим $\boldsymbol{f}\,(P)$ по выбранному базису $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$:

$$\boldsymbol{f}\,(P) = f_x(x, y.z)\boldsymbol{i} + f_y(x, y, z)\boldsymbol{j} + f_z(x, y, z)\boldsymbol{k}.$$

Теорема 3.7. *Если* (x, y, z) *– декартовы координаты и* l *– гладкая кривая, соответствующая уравнению* (3.10), то для интегрируемой по l функции $\boldsymbol{f}\,(P)$ справедливо равенство

$$\int\limits_{l_+} (\boldsymbol{f}(P), \boldsymbol{dl}\,) =$$

$$= \int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} [f_x(x(t), y(t), z(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + f_z(x(t), y(t), z(t))z'(t)]\,dt,$$

где f_x, f_y и f_z – проекции вектора $\boldsymbol{f}$ на оси Ox, Oy и Oz соответственно.

Пример 3.5. Вычислить интеграл $\int\limits_{l_+} \left(\begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}, \boldsymbol{dl} \right)$, где l – ломаная с вершинами $(1;1)$, $(2;3)$, $(4;5)$.

Воспользуемся свойством аддитивности и будем вычислять интеграл сперва по одному отрезку, затем по другому. На отрезке с концами $(1;1)$, $(2;3)$ можно ввести параметры: $\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 1 + 2t, \end{cases}$ где t изменяется от 0 до 1. Тогда

$$\int\limits_{[(1;1),(2;3)]} \left(\begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}, \boldsymbol{dl} \right) = \int\limits_0^1 [((1+t)+(1+2t)) \cdot 1 + ((1+t)-(1+2t)) \cdot 2]dt =$$

$$= \int\limits_0^1 ((2+3t) + 2(-t))dt = \int\limits_0^1 (t+2)dt = \left(\frac{t^2}{2} + 2t \right)\Bigg|_0^1 = 2.5.$$

На отрезке с концами $(2;3)$, $(4;5)$ введем параметры: $\begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 3 + t, \end{cases}$

где t изменяется от 0 до 2. Тогда

$$\int\limits_{[(2;3);(4;5)]} \left(\begin{bmatrix} x + y \\ x - y \end{bmatrix}, \boldsymbol{dl} \right) = \int\limits_0^2 [((2+t)+(3+t)) \cdot 1 + ((2+t)-(3+t)) \cdot 1]dt =$$

$$= \int\limits_0^2 (5 + 2t - 1)dt = \int\limits_0^2 (2t+4)dt = (t^2 + 4t)\Big|_0^2 = 12.$$

Окончательно $\int\limits_{l_+} \left(\begin{bmatrix} x + y \\ x - y \end{bmatrix}, \boldsymbol{dl} \right) = 2.5 + 12 = 14.5.$

Пример 3.6. Вычислить интеграл $\int\limits_{l_+} \left(\begin{bmatrix} xy^2 \\ yx^2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{dl} \right)$, где l – верхняя полуокружность $x^2 + y^2 = 4$, проходимая против часовой стрелки.

Введем параметры: $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases}$ где t изменяется от 0 до π. Тогда

$$\int\limits_{l_+} \left(\begin{bmatrix} xy^2 \\ yx^2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{dl} \right) = \int\limits_0^\pi (8\cos t \sin^2 t \cdot (-2\sin t) + 8\cos^2 t \sin t \cdot 2\cos t)dt =$$

$$= 16 \int\limits_0^\pi (-\cos t \sin^3 t + \sin t \cos^3 t)dt = 16 \int\limits_0^\pi \sin t \cos t (\cos^2 t - \sin^2 t)dt =$$

$$= 8 \int\limits_0^\pi \sin 2t \cos 2t \, dt = 4 \int\limits_0^\pi \sin 4t \, dt = -\cos 4t \Big|_0^\pi = 0.$$

Пример 3.7. Вычислить интеграл $\int\limits_{l_+} \left(\begin{bmatrix} 2xy \\ 3x + y \end{bmatrix}, \boldsymbol{dl} \right)$, где l_+ – дуга параболы $y = x^2$ от точки $(1;1)$ до точки $(3;9)$.

Введем параметры: $\begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \end{cases}$ где t изменяется от 1 до 3. Имеем:

$$\int\limits_{l_+} \left(\begin{bmatrix} 2xy \\ 3x + y \end{bmatrix}, \boldsymbol{dl} \right) = \int\limits_1^3 (2t^3 \cdot 1 + (3t + t^2) \cdot 2t) dt =$$

$$= \int\limits_1^3 (4t^3 + 6t^2) dt = (t^4 + 2t^3) \Big|_1^3 = 132.$$

Пример 3.8. Вычислить интеграл $\int\limits_{l_+} \left(\begin{bmatrix} 3x^2 \\ xy \\ yz \end{bmatrix}, \boldsymbol{dl} \right)$, где l_+ – отрезок из точки $(1; 1; 1)$ в точку $(2; 4; 5)$.

При вычислении криволинейного интеграла второго рода в пространстве $\mathbb{R}^3$ воспользуемся формулой из теоремы 3.7 . Введем следующие параметры: $\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 1 + 3t, \\ z = 1 + 4t, \end{cases}$ где t изменяется от 0 до 1. Тогда

$$\int\limits_{l_+} \left(\begin{bmatrix} 3x^2 \\ xy \\ yz \end{bmatrix}, \boldsymbol{dl} \right) = \int\limits_0^1 [3(1 + t)^2 \cdot 1 + (1+t)(1+3t) \cdot 3 + (1+3t)(1+4t) \cdot 4] dt =$$

$$= \int\limits_0^1 (60t^2 + 46t + 10) dt = (20t^3 + 23t^2 + 10t) \Big|_0^1 = 53.$$

Упражнения.

3.9. Вычислить интеграл $\int\limits_{l_+} \left(\begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}, \boldsymbol{dl} \right)$, где кривая l_+ задана параметрически $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ при $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

3.10. Вычислить интеграл $\int\limits_{l_+} \left(\begin{bmatrix} xy \\ x + y \end{bmatrix}, \boldsymbol{dl} \right)$, где l_+ – прямоугольник с вершинами $(0; 0)$, $(3; 0)$, $(3; 5)$, $(0; 5)$ (в порядке обхода).

3.11. Вычислить интеграл $\int\limits_{l_+} \left(\begin{bmatrix} x^2 + y \\ x + y^2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{dl} \right)$, где l_+ – верхняя полуокружность $x^2 + y^2 = 9$, проходимая против часовой стрелки.

3.12. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{l_+} \left(\begin{bmatrix} x+y^2 \\ x^2+y \end{bmatrix}, \boldsymbol{dl} \right)$, где l_+ – верхняя полуокружность $x^2+y^2=9$, проходимая против часовой стрелки.

3.13. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{l_+} \left(\begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{dl} \right)$, где l_+ – окружность $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, проходимая против часовой стрелки.

3.14. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{l_+} \left(\begin{bmatrix} y^3 \\ x^3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{dl} \right)$, где l_+ – окружность $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, проходимая против часовой стрелки.

3.15. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{l_+} \left(\begin{bmatrix} z \\ y \\ x \end{bmatrix}, \boldsymbol{dl} \right)$, где l_+ – ломаная с вершинами $(0;0;0)$, $(1;2;3)$, $(3;4;9)$.

3.16. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{l_+} \left(\begin{bmatrix} -yz \\ xz \\ xy \end{bmatrix}, \boldsymbol{dl}\,\boldsymbol{dl} \right)$, где l_+ – винтовая линия $\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t, \qquad \text{при } t\in[0;4\pi]. \\ z=t \end{cases}$

Ответы: **3.9.** $-\dfrac{3\pi}{16}$. **3.10.** $-\dfrac{15}{2}$. **3.11.** -18. **3.12.** -36. **3.13.** 0. **3.14.** 0. **3.15.** 35. **3.16.** $8\pi^2$.

3.3. Теорема Грина

Кривая l в определении криволинейных интегралов может быть замкнутой. В этом случае точки A и B (концы l) совпадают и в качестве точки A можно взять вообще любую точку l. Криволинейный интеграл второго рода по замкнутой кривой l_+ принято обозначать символом

$$\oint\limits_{l_+} (\boldsymbol{f}(P), \boldsymbol{dl}\,).$$

Замкнутая кривая l разбивает плоскость $\mathbb{R}^2$ на две части: ограниченную часть D и неограниченную – $\mathbb{R}^2 \setminus D$. Будем далее считать, что направление на l_+ согласовано с D так, что при движении по l в выбранном направлении часть D плоскости остается слева.

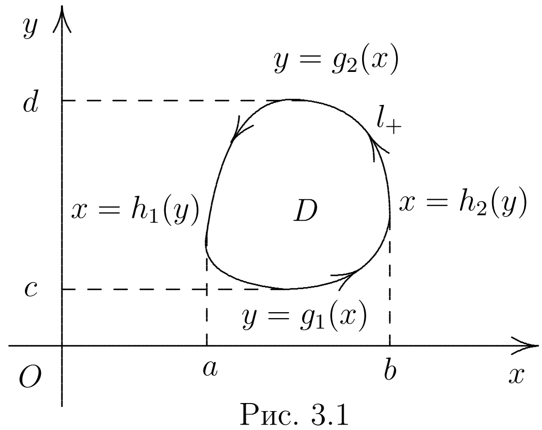

Рис. 3.1

Криволинейный интеграл второго рода (в $\mathbb{R}^2$) по замкнутой кривой l тесно связан с двойным интегралом.

Докажем здесь вариант теоремы Грина с дополнительными условиями.

Теорема 3.8. *Пусть D – ограниченная замкнутая область правильная относительно осей Ox и Oy в $\mathbb{R}^2$ (рис. 3.1) с кусочно-гладкой границей l и на l выбрано направление, согласованное с D. Пусть функция $\boldsymbol{f}(P)$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ непрерывно дифференцируема на области D. Тогда справедливо равенство*

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right) dS = \oint\limits_{\partial D} (\boldsymbol{f}(P), \boldsymbol{dl}\,), \qquad (3.11)$$

где $\boldsymbol{f} = f_x(x,y)\boldsymbol{i} + f_y(x,y)\boldsymbol{j}$; (x,y) – декартовы координаты в $\mathbb{R}^2$, $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\}$ – соответствующий этим координатам базис, а символом ∂D обозначена ориентированная граница l_+ области D.

Доказательство. Двойной интеграл в (3.11) разобьем на два интеграла

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right) dS = \iint\limits_D \frac{\partial f_y}{\partial x}\, dS - \iint\limits_D \frac{\partial f_x}{\partial y}\, dS.$$

Первый интеграл преобразуем в повторный по формуле (1.4), а второй по формуле (1.3)

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right) dS = \int\limits_c^d dy \int\limits_{h_1(y)}^{h_2(y)} \frac{\partial f_y}{\partial x}\, dx - \int\limits_a^b dx \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial f_x}{\partial y}\, dy =$$

$$= \int\limits_c^d \left(f_y(h_2(y),y) - f_y(h_1(y),y)\right)\right) dy - \int\limits_a^b \left(f_x(x,g_2(x)) - f_x(x,g_1(x))\right)\right) dx =$$

$$= \int\limits_{(c,h_2,d)} f_y(x,y)\,dy + \int\limits_{(d,h_2,c)} f_y(x,y)\,dy - \int\limits_{(a,g_2,b)} f_y(x,y)\,dx - \int\limits_{(b,g_2,a)} f_y(x,y)\,dx =$$

$$= \int\limits_{l_+} f_y(x,y)\,dy - \int\limits_{l_-} f_x(x,y)\,dx = \int\limits_{l_+} f_y(x,y)\,dy + \int\limits_{l_+} f_x(x,y)\,dx = \oint\limits_{\partial D} (\boldsymbol{f}(P), \boldsymbol{dl}\,)\,.$$

В последних равенствах использовались изменение знака в определенном интеграле при изменении порядка интегрирования и свойство (3.6) криволинейного интеграла второго рода. ■

Теорема 3.9 (Грина). *Пусть D – ограниченная замкнутая область в $\mathbb{R}^2$ с кусочно-гладкой границей l и на l выбрано направление, согласованное с D. Пусть функция $\boldsymbol{f}(P)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ непрерывно дифференцируема на области D. Тогда справедливо равенство*

$$\iint\limits_{D} \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) dS = \oint\limits_{\partial D} (\boldsymbol{f}(P), \boldsymbol{dl}\,)\,,$$

где $\boldsymbol{f} = f_x(x,y)\boldsymbol{i} + f_y(x,y)\boldsymbol{j}$; (x,y) – декартовы координаты в $\mathbb{R}^2$, $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\}$ – соответствующий этим координатам базис, а символом ∂D обозначена ориентированная граница l_+ области D.

Подробное доказательство теоремы 3.9 можно найти в учебнике [2].

Приведем несколько примеров, иллюстрирующих эту теорему.

Пример 3.9. Рассмотрим интеграл $\oint\limits_{l_+} \left(\begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}, \boldsymbol{dl} \right)$, l_+ – треугольник с вершинами $(1;1)$, $(2;3)$, $(4;5)$ (в направлении обхода).

Вычислим этот интеграл непосредственно. По свойству аддитивности можно вычислить сумму трех интегралов по сторонам. Два из них вычислены в примере 3.5. Для отрезка $[(4;5),(1;1)]$ введем параметризацию $\begin{cases} x = 1-3t, \\ y = 1-4t \end{cases}$ при $t \in [-1;0]$. Тогда

$$\int\limits_{[(4;5),(1;1)]} \left(\begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}, \boldsymbol{dl} \right) = \int\limits_{-1}^{0} ((2-7t)(-3) + t(-4))dt = \int\limits_{-1}^{0} (17t-6)dt =$$

$$= \left(\frac{17t^2}{2} - 6t \right) \Bigg|_{-1}^{0} = -14,5.$$

Отсюда $\int\limits_{l_+} \left(\begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}, \boldsymbol{dl} \right) = 2,5 + 12 - 14,5 = 0.$

Вычислим теперь этот интеграл используя теорему Грина:

$$\oint\limits_{l_+} \left(\begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}, d\boldsymbol{l} \right) = \iint\limits_{\Delta} \left(\frac{\partial(x-y)}{\partial x} - \frac{\partial(x+y)}{\partial y} \right) dS = \iint\limits_{\Delta} (1-1) dS = 0.$$

Пример 3.10. Рассмотрим интеграл $\oint\limits_{l_+} \left(\begin{bmatrix} xy^2 \\ yx^2 \end{bmatrix}, d\boldsymbol{l} \right)$, где l_+ – граница верхнего полукруга $x^2 + y^2 \leq 4$.

Интеграл по верхней полуокружности найден в примере 3.6. Найдем интеграл по отрезку $[-2; 2]$. Введем параметризацию $\begin{cases} x = t, \\ y = 0 \end{cases}$ при $-2 \leq$ $\leq t \leq 2$. Имеем:

$$\int\limits_{[-2;2]} \left(\begin{bmatrix} xy^2 \\ yx^2 \end{bmatrix}, d\boldsymbol{l} \right) = \int\limits_{-2}^{2} 0\, dt = 0.$$

Таким образом, $\oint\limits_{l_+} \left(\begin{bmatrix} xy^2 \\ yx^2 \end{bmatrix}, d\boldsymbol{l} \right) = 0.$

Используя теорему Грина, имеем

$$\oint\limits_{l_+} \left(\begin{bmatrix} xy^2 \\ yx^2 \end{bmatrix}, d\boldsymbol{l} \right) = \iint\limits_{\text{полукруг}} (2xy - 2xy) dS = 0.$$

Пример 3.11. Рассмотрим интеграл $\oint\limits_{l_+} \left(\begin{bmatrix} -x^2y \\ xy^2 \end{bmatrix}, d\boldsymbol{l} \right)$ по окружности $x^2 + y^2 = 9$, проходимой против часовой стрелки.

Рассмотрим параметризацию $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 3\sin t \end{cases}$ при $0 \leq t \leq 2\pi$. Имеем:

$$\oint\limits_{l_+} \left(\begin{bmatrix} -x^2y \\ xy^2 \end{bmatrix}, d\boldsymbol{l} \right) =$$

$$= \int\limits_{0}^{2\pi} ((-27\cos^2 t \sin t)(-3\sin t) + (27\cos t \sin^2 t)(3\cos t))dt =$$

$$= 81 \int\limits_{0}^{2\pi} 2\sin^2 t \cos^2 t\, dt = \frac{81}{2} \int\limits_{0}^{2\pi} \sin^2(2t) dt = \frac{81}{2} \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{1-\cos 4t}{2}\, dt =$$

$$= \frac{81}{4}\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{81\pi}{2}.$$

Вычислим интеграл используя теорему Грина:

$$\oint\limits_{l_+}\left(\begin{bmatrix}-x^2y\\ xy^2\end{bmatrix}, d\boldsymbol{l}\right) = \iint\limits_D (y^2 + x^2)dS,$$

где D – круг $x^2 + y^2 \leq 9$. Имеем:

$$\iint\limits_D (x^2 + y^2)dS = \iint\limits_D \rho^2\rho\, d\rho\, d\varphi = \int\limits_0^3 d\rho \int\limits_0^{2\pi} \rho^3\, d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^3 2\pi\rho^3\, d\rho = \frac{2\pi\rho^4}{4}\Bigg|_0^3 = \frac{81\pi}{2}.$$

Упражнения.

3.17. Вычислить интеграл $\oint\limits_{l_+}\left(\begin{bmatrix}xy\\ x+y\end{bmatrix}, d\boldsymbol{l}\right)$, где l_+ – прямоугольник с вершинами $(0;0)$, $(3;0)$, $(3;5)$, $(0;5)$, используя теорему Грина.

3.18. Вычислить интеграл $\oint\limits_{l_+}\left(\begin{bmatrix}y\\ -x\end{bmatrix}, d\boldsymbol{l}\right)$, где кривая l_+ задана параметрически $\begin{cases}x = \cos^3 t,\\ y = \sin^3 t\end{cases}$ при $0 \leq t \leq 2\pi$. Вычислить непосредственно и применяя теорему Грина.

3.19. Вычислить интеграл $\oint\limits_{l_+}\left(\begin{bmatrix}x^2+y\\ x+y^2\end{bmatrix}, d\boldsymbol{l}\right)$ по границе верхнего полукруга $x^2+y^2 \leq 9$, проходимой против часовой стрелки. Вычислить непосредственно и применяя теорему Грина.

3.20. Вычислить интеграл $\oint\limits_{l_+}\left(\begin{bmatrix}x+y^2\\ x^2+y\end{bmatrix}, d\boldsymbol{l}\right)$, где l_+ – граница верхнего полукруга $x^2 + y^2 \leq 9$, проходимая против часовой стрелки. Вычислить непосредственно и применяя теорему Грина.

3.21. Вычислить интеграл $\oint\limits_{l_+}\left(\begin{bmatrix}x^2\\ y^2\end{bmatrix}, d\boldsymbol{l}\right)$ по окружности $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$, проходимой против часовой стрелки, используя теорему Грина.

3.22. Вычислить интеграл $\oint\limits_{l_+}\left(\begin{bmatrix} y^3 \\ x^3 \end{bmatrix}, d\boldsymbol{l}\right)$ по окружности $(x-1)^2+$ $+(y-1)^2 = 1$, проходимой против часовой стрелки, используя теорему Грина.

Ответы: **3.17.** $-\dfrac{15}{2}$. **3.18.** $-\dfrac{3}{4}\pi$. **3.19.** 0. **3.20.** −36. **3.21.** 0. **3.22.** 0.

4. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

4.1. Поверхностный интеграл первого рода

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ задана некоторая гладкая поверхность Σ. Напомним, что под гладкой поверхностью Σ понимается множество тех точек p в R^3, радиусы-векторы $\boldsymbol{r}$ которых удовлетворяют соотношению

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) = [g_x(u,v), g_y(u,v), g_z(u,v)]^T, \quad (u,v) \in D, \tag{4.1}$$

где D – ограниченная замкнутая область в $\mathbb{R}^2$; (u,v) – координаты точек в D, а g_x, g_y, g_z – непрерывно дифференцируемые функции. Дополнительно предполагается, что для всех точек из D

$$\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v \neq \boldsymbol{0},$$

где $\boldsymbol{r}'_u = \left[\dfrac{\partial g_x}{\partial u}, \dfrac{\partial g_y}{\partial u}, \dfrac{\partial g_z}{\partial u}\right]^T$; $\boldsymbol{r}'_v = \left[\dfrac{\partial g_x}{\partial v}, \dfrac{\partial g_y}{\partial v}, \dfrac{\partial g_z}{\partial v}\right]^T$ – частные производные функции $\boldsymbol{r}(u,v)$ по u и v соответственно.

Для гладкой поверхности Σ в [1] было определено понятие площади, которую будем обозначать $|\Sigma|$. Там же была получена формула

$$|\Sigma| = \iint\limits_D \|\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v\| ds. \tag{4.2}$$

Отметим случай, когда векторы $\boldsymbol{r}'_u$и $\boldsymbol{r}'_v$ ортогональны, т. е. $(\boldsymbol{r}'_u, \boldsymbol{r}'_v) = 0$. В этом случае (4.2) имеет вид

$$|\Sigma| = \iint\limits_D \|\boldsymbol{r}'_u\|\,\|\boldsymbol{r}'_v\| ds.$$

Пример 4.1. Найти площадь поверхности геликоида:

$$\boldsymbol{r}(u,v) = [u\cos v, u\sin v, 4v]^T, \quad 0 \le u \le 3, \quad 0 \le v \le \pi.$$

В данном случае $\boldsymbol{r}'_u = [\cos v, \sin v, 0]^T$, $\boldsymbol{r}'_v = [-u\sin v, u\cos v, 4]$,

$(\boldsymbol{r}\,'_u, \boldsymbol{r}\,'_v) = 0$, $\|\boldsymbol{r}\,'_u\|^2 = 1$, $\|\boldsymbol{r}\,'_v\|^2 = 16 + u^2$. Поэтому

$$|\Sigma| = \iint\limits_D 1\sqrt{16+u^2}\,du\,dv = \int\limits_0^{\pi} dv \int\limits_0^3 \sqrt{16+u^2}\,du = \pi \int\limits_0^3 \sqrt{16+u^2}\,du =$$

$$= \pi \left[\frac{u}{2}\sqrt{16+u^2} + 8\ln\left(u + \sqrt{16+u^2}\right)\right]\Big|_0^3 = \frac{\pi}{2}(15 + 16\ln 2).$$

Остановимся подробнее на важном частном случае, когда поверхность Σ является частью графика дифференцируемой функции $g(x, y)$ декартовых координат x, y. В этом случае в качестве параметрического задания Σ можно принять

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x, y) = [x, y, g(x, y)]^T, \quad (x, y) \in D.$$

Тогда

$$\boldsymbol{r}\,'_u = \boldsymbol{r}\,'_x = \left[1, 0, \frac{\partial g}{\partial x}\right]^T; \quad \boldsymbol{r}\,'_v = \boldsymbol{r}\,'_y = \left[0, 1, \frac{\partial g}{\partial y}\right]^T;$$

$$\boldsymbol{r}\,'_u \times \boldsymbol{r}\,'_v = \left[-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1\right]^T; \quad \|\boldsymbol{r}\,'_u \times \boldsymbol{r}\,'_v\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}.$$

Отсюда

$$|\Sigma| = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy.$$

Пример 4.2. Найти площадь части поверхности параболоида $y^2 + z^2 = 2ax$, заключенной между цилиндром $y^2 = ax$ и плоскостью $x = a$ $(a > 0)$.

Верхняя половина заданного параболоида описывается уравнением $z = g(x, y) = \sqrt{2ax - y^2}$. Имеем:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{a}{\sqrt{2ax - y^2}}; \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{2ax - y^2}},$$

$$1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 = 1 + \frac{a^2 + y^2}{2ax - y^2} = \frac{2ax + a^2}{2ax - y^2}.$$

Так как рассматриваемая поверхность симметрична относительно плоскости Oyz, то искомая площадь вычисляется как учетверенная площадь части этой поверхности, лежащей в первом октанте:

$$|\Sigma| = 4\iint\limits_D \sqrt{\frac{2ax + a^2}{2ax - y^2}}\,dx\,dy = 4\int\limits_0^a \sqrt{2ax + a^2}\,dx \int\limits_0^{\sqrt{ax}} \frac{dy}{\sqrt{2ax - y^2}} =$$

$$= 4\int\limits_0^a \sqrt{2ax+a^2}\left(\arcsin\frac{y}{\sqrt{2ax}}\bigg|_0^{\sqrt{ax}}\right)dx =$$

$$= 4\int\limits_0^a \sqrt{2ax+a^2}\,\frac{\pi}{4}\,dx = \frac{\pi}{3a}(2ax+a^2)^{3/2}\Big|_0^a =$$

$$= \frac{\pi}{3a}(3\sqrt{3}a^3 - a^3) = \frac{\pi a^2}{3}(3\sqrt{3}-1).$$

Пример 4.3. Вычислить площадь поверхности сферы радиуса R.

Запишем уравнение сферы в параметрическом виде:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\varphi,\theta) = [R\cos\varphi\sin\theta, R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\theta]^T,$$

$$(\varphi,\theta)\in D = \{(\varphi,\theta):\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\theta\le\pi\}.$$

Тогда

$$\boldsymbol{r}\,'_\varphi = [-R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\varphi\sin\theta, 0]^T;$$

$$\boldsymbol{r}\,'_\theta = [R\cos\varphi\cos\theta, R\sin\varphi\cos\theta, -R\sin\theta]^T;$$

$$\boldsymbol{r}\,'_\varphi\times\boldsymbol{r}\,'_\theta = [-R^2\cos\varphi\sin^2\theta, -R^2\sin\varphi\sin^2\theta, -R\sin\theta\cos\theta]^T;$$

$$\|\boldsymbol{r}\,'_\varphi\times\boldsymbol{r}\,'_\theta\| = R^2\sin\theta;$$

$$|\Sigma| = \iint\limits_D \|\boldsymbol{r}\,'_\varphi\times\boldsymbol{r}\,'_\theta\| d\varphi\, d\theta = \iint\limits_D R^2\sin\theta\, d\varphi\, d\theta = R^2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta = 4\pi R^2.$$

Сформулируем теорему 4.1 из [1].

Теорема 4.1. *Если* Σ *– гладкая поверхность, задаваемая соотношениями* (4.1), *а функция* $f(P)$ *непрерывна в замкнутой области* Ω, *содержащей* Σ, *то*

$$\iint\limits_\Sigma f(P)d\sigma = \iint\limits_D f(g_x(u,v), g_y(u,v), g_z(u,v))\|\boldsymbol{r}\,'_u\times\boldsymbol{r}\,'_v\|ds,$$

где $\iint\limits_\Sigma f(P)d\sigma$ *называется поверхностным интегралом первого рода.*

Физический смысл поверхностного интеграла первого рода зависит от физического характера данного скалярного поля: он может определять массу, распределенную по данной поверхности, электрический заряд и т. д.

Пример 4.4. Определить статический момент относительно плоскости $0xy$ и положение центра масс однородной полусферы Σ:

$$x^2+y^2+z^2 = R^2 \quad (z\ge 0).$$

Имеем:

$$M_{xy} = \iint\limits_{\Sigma} z\,d\sigma = \iint\limits_{D} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx\,dy,$$

где D – круг $x^2 + y^2 \leq R^2$, $z = g(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Находим:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}; \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}};$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} = \\ = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

следовательно,

$$M_{xy} = \iint\limits_{\Sigma} z\,d\sigma = \iint\limits_{D} R\,dx\,dy = R\iint\limits_{D} dx\,dy = R\pi R^2 = \pi R^3.$$

Определим координаты центра масс полусферы. В силу симметрии $x_0 = y_0 = 0$. Так как площадь $|\Sigma|$ поверхности полусферы Σ равна $2\pi R^2$, то $z_0 = \dfrac{M_{xy}}{|\Sigma|} = \dfrac{R}{2}$.

Пример 4.5. На всей поверхности конуса с высотой h и радиусом основания a распределены электрические заряды. В каждой точке поверхности плотность заряда пропорциональна аппликате этой точки ($e = kz$). Вершина конуса – в начале координат, его ось направлена по оси $0z$. Определить суммарный заряд всей поверхности конуса.

Суммарный заряд основания конуса равен произведению его площади πa^2 на плотность точечного заряда, т. е. kh. Таким образом, $E_{\text{осн}} = k\pi a^2 h$. Заряд боковой поверхности Σ определяется интегралом

$$E_{\text{бок.пов}} = \iint\limits_{\Sigma} kz\,d\sigma.$$

Уравнение поверхности конуса $z = g(x, y) = \dfrac{h}{a}\sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq h$. Находим:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{h}{a}\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{h}{a}\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2}\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{h^2}{a^2}\frac{y^2}{x^2 + y^2}} = \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{a},$$

поэтому

$$E_{\text{бок.пов}} = k \iint\limits_{\Sigma} z\, d\sigma = \frac{kh}{a} \iint\limits_{D} \sqrt{x^2+y^2}\, \frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}\, dx\, dy \left| \begin{matrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{kh\sqrt{a^2+h^2}}{a^2} \iint\limits_{D'} \rho\rho\, d\rho\, d\varphi = \frac{kh\sqrt{a^2+h^2}}{a^2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{a} \rho^2 d\rho = \frac{2}{3} k\pi ah\sqrt{a^2+h^2}.$$

Находим весь заряд:

$$E = E_{\text{осн}} + E_{\text{бок.пов}} = k\pi a^2 h + \frac{2}{3}\, k\pi ah\sqrt{a^2+h^2} = \frac{k\pi ah}{3}\left(3a + 2\sqrt{a^2+h^2}\,\right).$$

Упражнения.

4.1. Вычислить $\iint\limits_{\Sigma} (x^2+y^2)d\sigma$, где Σ – сфера $x^2+y^2+z^2=a^2$.

4.2. Найти массу части сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$, находящейся в первом октанте ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$), если плотность распределения масс на сфере равна $\sqrt{x^2+y^2}$.

4.3. Вычислить $\iint\limits_{\Sigma} z\, d\sigma$, где Σ – часть поверхности геликоида:

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = v \quad (0 \leq u \leq a, \quad 0 \leq v \leq 2\pi).$$

4.4. Определить массу, распределенную на части поверхности гиперболического параболоида $2az = x^2 - y^2$, вырезаемой цилиндром $x^2+y^2=a^2$, если плотность в каждой точке поверхности равна $k|z|$.

4.5. Определить момент инерции однородной боковой поверхности конуса $z = \sqrt{x^2+y^2}$ $(0 \leq z \leq a)$ относительно оси $0Z$.

4.6. Определить суммарный электрический заряд, распределенный на части поверхности двуполостного гиперболоида $z^2 = x^2+y^2+a^2$ $(a \leq z \leq$ $\leq a\sqrt{2})$, если плотность заряда в каждой точке пропорциональна аппликате этой точки $(e = kz)$.

4.7. Определить массу, распределенную по поверхности куба $x = \pm a$, $y = \pm a$, $z = \pm a$, если поверхностная плотность в точке $P(x, y, z)$ равна $k\sqrt[3]{|xyz|}$ $(k = \text{const})$.

4.8. Определить суммарный электрический заряд, распределенный на части поверхности параболоида $2az = x^2+y^2$, вырезаемой из него цилиндром $x^2+y^2=a^2$, если плотность заряда в каждой точке равна $k\sqrt{z}$ $(k = \text{const})$.

Ответы: **4.1.** $\dfrac{8}{3}\pi a^4$. **4.2.** $m=\dfrac{1}{8}\pi^2a^3$.
4.3. $\pi^2\left[a\sqrt{1+a^2}+\ln(a+\sqrt{1+a^2}\,)\right]$. **4.4.** $\dfrac{8ka^3}{15}(\sqrt{2}+1)$. **4.5.** $\dfrac{\pi a^4\sqrt{2}}{2}$.
4.6. $k\pi a^3\left(\dfrac{5\sqrt{5}}{3}-\sqrt{3}\right)$ **4.7.** $\dfrac{27}{2}ka^3$. **4.8.** $\dfrac{\pi k}{4\sqrt{2}}a^2\sqrt{a}\left(3\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2}\,)\right)$.

4.2. Поверхностный интеграл второго рода

В пособии [1] были определены двухсторонние и односторонние поверхности. Пусть заданы двухсторонняя поверхность Σ и на ней векторная функция $\boldsymbol{f}(P)$. Для поверхности Σ выберем одну из двух функций, $\boldsymbol{n}_+(P)$ или $\boldsymbol{n}_-(P)$, задающих нормаль к Σ в каждой точке $P\in\Sigma$. Поверхность Σ с заданной на ней функцией $\boldsymbol{n}(P)$ будем называть ориентированной поверхностью и обозначать Σ_+ (в случае $\boldsymbol{n}(P)=\boldsymbol{n}_+(P)$) или Σ_- (при $\boldsymbol{n}(P)=\boldsymbol{n}_-(P)$).

Определение 4.1 [1]. *Поверхностным интегралом второго рода от функции $\boldsymbol{f}(P)$ по ориентированной поверхности Σ_+ называется число*

$$I=\iint\limits_{\Sigma_+}(\boldsymbol{f}(P),\boldsymbol{n}_+(P))\,d\sigma;$$

этот интеграл обозначается обычно так:

$$I=\iint\limits_{\Sigma_+}(\boldsymbol{f}\,(P),\boldsymbol{ds}\,)\,.$$

Из определения ясно, что $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma_+}(\boldsymbol{f}(P),\boldsymbol{ds}\,)=-\iint\limits_{\Sigma_-}(\boldsymbol{f}(P),\boldsymbol{ds}\,)$, так как $\boldsymbol{n}_+(P)=-\boldsymbol{n}_-(P)$.

Поверхностный интеграл второго рода называют также потоком векторного поля $\boldsymbol{f}(P)$ через поверхность Σ. Его можно интерпретировать как количество жидкости или газа, протекающее за единицу времени в заданном направлении через поверхность Σ. Переход к другой стороне поверхности меняет направление нормали к поверхности, а потому и знак поверхностного интеграла второго рода.

Вычисление поверхностного интеграла второго рода сводится к вычислению поверхностного интеграла первого рода:

$$\iint\limits_{\Sigma_+}(\boldsymbol{f}(P),\boldsymbol{ds}\,)=\iint\limits_{\Sigma_+}(\boldsymbol{f},\boldsymbol{n}\,)\,d\sigma=\iint\limits_{\Sigma_+}(f_x\cos\alpha+f_y\cos\beta+f_z\cos\gamma)\,d\sigma,$$

где $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – единичная нормаль к поверхности, или к вычислению суммы трех двойных интегралов:

$$\iint\limits_{\Sigma_+} (\boldsymbol{f}(P), \boldsymbol{ds}) = \iint\limits_{D_{yz}} f_x(p(y,z), y, z)dy\,dz + \iint\limits_{D_{xz}} f_y(x, h(x,z), z)dx\,dz +$$

$$+ \iint\limits_{D_{xy}} f_z(x, y, g(x,y))dx\,dy.$$

Здесь D_{yz}, D_{xz}, D_{xy} – проекции поверхности Σ_+ соответственно на плоскости $0yz$, $0xz$ и $0xy$, а функции $p(y,z)$, $h(x,z)$ и $g(x,y)$ получены из уравнения поверхности Σ_+ разрешением относительно соответствующих координат.

Пример 4.6. Найти поток вектора $\boldsymbol{f}(x,y,z) = [x,y,z]^T$ через часть поверхности эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, лежащую в первом октанте, в направлении внешней нормали.

Поток заданного вектора равен:

$$\iint\limits_{\Sigma_+} (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{n})d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_+} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)d\sigma.$$

Так как в первом октанте внешняя нормаль эллипсоида со всеми осями координат образует острые углы, то все 3 направляющих косинуса неотрицательны. Поэтому $x = p\,(y,z) = \sqrt{1 - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2}}$, $y = h\,(x,z) = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2}}$, $z = g\,(x,y) = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}$ и

$$\iint\limits_{\Sigma_+} (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{n})d\sigma = \iint\limits_{D_{yz}} a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}\,dy\,dz + \iint\limits_{D_{xz}} b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}}\,dx\,dz +$$

$$+ \iint\limits_{D_{xy}} c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy = 3 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3}\pi abc = \frac{\pi abc}{2}$$

(каждый из интервалов определяет объем одной восьмой части эллипсоида).

Пример 4.7. Найти поток вектора $\boldsymbol{f}(x,y,z) = [x^2, -y^2, z^2]^T$ через всю поверхность тела $x^2 + y^2 + z^2 \le 3R^2$, $0 \le z \le \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}$ в направлении внешней нормали. Поток заданного вектора равен:

$$\iint\limits_{\Sigma_+} (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{n})d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_+} (x^2\cos\alpha - y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{\Sigma_+} x^2 \cos\alpha\, d\sigma - \iint\limits_{\Sigma_+} y^2 \cos\beta\, d\sigma + \iint\limits_{\Sigma_+} z^2 \cos\gamma\, d\sigma.$$

Заданная поверхность ограничена сверху сегментом сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 3R^2$, с боков – частью поверхности гиперболоида $x^2+y^2-z^2 = R^2$, снизу – кругом $x^2 + y^2 \le R^2$, $z = 0$. На плоскости Oyz и Oxz поверхность Σ_+ проецируется дважды с разных сторон, поэтому, в силу симметрии поверхности относительно этих плоскостей, первые 2 интеграла в записи потока равны нулю:

$$\iint\limits_{\Sigma_+} x^2 \cos\alpha\, d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_+} y^2 \cos\beta\, d\sigma = 0.$$

На плоскость Oxy сферический сегмент проецируется в круг D_1: $x^2+y^2 \le R^2$, часть поверхности гиперболоида – в кольцо D_2: $R^2 \le x^2 + y^2 \le 3R^2$, а нижним основанием служит лежащий в этой плоскости круг D_3: $x^2 + y^2 \le R^2$. Однако для сегмента сферы $\cos\gamma > 0$, для гиперболоида $\cos\gamma < 0$, а на нижнем основании $z = 0$, поэтому

$$\iint\limits_{\Sigma_+} (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{n}) d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_+} z^2 \cos\gamma\, d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{D_1} (3R^2 - x^2 - y^2) dx\, dy - \iint\limits_{D_2} (x^2 + y^2 - R^2) dx\, dy = \left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} (3R^2 - \rho^2)\rho\, d\rho - \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_R^{R\sqrt{3}} (\rho^2 - R^2)\rho\, d\rho = \frac{5}{2}\pi R^4 - 2\pi R^4 = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Если поверхность Σ задана в параметрическом виде, то для вычисления интеграла второго рода удобно использовать следующую формулу:

$$\iint\limits_{\Sigma_+} (\boldsymbol{f}(P), \boldsymbol{n}) d\sigma = \iint\limits_{D} (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}(u,v)), \boldsymbol{r}\,'_u \times \boldsymbol{r}\,'_v)\, du\, dv,$$

где направление вектора $\boldsymbol{r}\,'_u \times \boldsymbol{r}\,'_v$ согласовано с направлением вектора нормали $\boldsymbol{n}$.

Пример 4.8. Найти поток вектора $\boldsymbol{f}(x,y,z) = [0,0,z]^T$ через внешнюю поверхность эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Зададим поверхность эллипсоида в параметрическом виде $\boldsymbol{r}(u,v) = [a\cos u\cos v, b\cos u\sin v, c\sin u]^T$, $D = \left\{(u,v) \,\middle|\, -\dfrac{\pi}{2} \le u \le \dfrac{\pi}{2}, 0 \le v \le 2\pi\right\}$.

Найдем:

$$\boldsymbol{r}\,'_u = [-a\sin u\cos v, -b\sin u\sin v, c\cos u]^T,$$
$$\boldsymbol{r}\,'_v = [-a\cos u\sin v, b\cos u\cos v, 0]^T, \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}(u,v)) = [0, 0, c\sin u].$$

Внешняя нормаль к эллипсоиду определяется равенством

$$\boldsymbol{n} = -\frac{\boldsymbol{r}\,'_u \times \boldsymbol{r}\,'_v}{\|\boldsymbol{r}\,'_u \times \boldsymbol{r}\,'_v\|} = \frac{\boldsymbol{r}\,'_v \times \boldsymbol{r}\,'_u}{\|\boldsymbol{r}\,'_u \times \boldsymbol{r}\,'_v\|},$$

поэтому

$$\iint\limits_{\Sigma_+} (\boldsymbol{f}(P), \boldsymbol{ds}) = \iint\limits_{D} (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}(u,v)), \boldsymbol{r}\,'_v \times \boldsymbol{r}\,'_u)\, du\, dv = abc \iint\limits_{D} \sin^2 u \cos u\, du\, dv =$$

$$= 2\pi abc \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u \cos u\, du = 4\pi abc \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u d(\sin u) = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Ответы: **4.9.** $\dfrac{\pi R^2 H}{3}$. **4.10.** $\dfrac{\pi R^2 H}{4}$. **4.11.** $\dfrac{\pi R^2 H^2}{3}$. **4.12.** $\dfrac{\pi R^4}{8}$. **4.13.** 0. **4.14.** $\dfrac{8\pi R^3}{3}$. **4.15.** 0. **4.16.** 1.**4.17.** $\dfrac{11}{24}$.**4.18.** $a^4\left(\dfrac{\pi}{48} + \dfrac{4}{15}\right)$. **4.19.** $-\dfrac{21\sqrt{2}\pi}{4}$.

4.3. Теорема Гаусса–Остроградского

Если поверхность Σ замкнута, то соответствующий поверхностный интеграл второго рода обычно обозначается так [1]:

$$\oiint\limits_{\Sigma_+} (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{ds}).$$

Замкнутой поверхностью является, например, граница выпуклой области в $\mathbb{R}^3$. Отметим, что замкнутая поверхность является двухсторонней. Поверхностный интеграл второго рода по замкнутой поверхности может быть сведен к тройному интегралу (аналогично тому, как криволинейный интеграл второго рода по замкнутой кривой сводится к двойному интегралу в соответствии с теоремой Грина). Для формулировки соответствующего утверждения необходимо следующее определение.

Определение 4.2 [1]. *Пусть (x, y, z) – декартовы координаты в R^3 и $\boldsymbol{f}(x,y,z) = f_x(x,y,z)\boldsymbol{i} + f_y(x,y,z)\boldsymbol{j} + f_z(x,y,z)\boldsymbol{k}$ – непрерывно дифференцируемая в точке $P(x,y,z)$ векторная функция. Дивергенцией функции $\boldsymbol{f}$ в точке P называется выражение*

$$\operatorname{div} \boldsymbol{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z},$$

где все частные производные вычислены в P.

Теорема 4.2 [1] (теорема Гаусса–Остроградского). *Пусть Ω – замкнутая область в $\mathbb{R}^3$, ограниченная гладкой замкнутой поверхностью Σ, а Σ_+ – поверхность Σ, ориентированная так, что в каждой ее точке выбрана нормаль $\boldsymbol{n}$, являющаяся внешней по отношению к области Ω. Пусть также функция $\boldsymbol{f}(P)$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ непрерывно дифференцируема на области Ω. Тогда*

$$\iint\limits_{\Sigma_+}\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\;\;\bigcirc\;\, (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{ds}) = \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{f}\, dV.$$

Теорема Гаусса – Остроградского означает, что поток векторного поля $\boldsymbol{f}(P)$ через замкнутую поверхность Σ, лежащую в этом поле, в направлении ее внешней нормали равен тройному интегралу по области Ω, ограниченной этой поверхностью, от дивергенции этого векторного поля.

Пример 4.9. Используя теорему Гаусса – Остроградского найти поток вектора $\boldsymbol{f} = x^3\boldsymbol{i} + y^3\boldsymbol{j} + R^2 z\boldsymbol{k}$ через всю поверхность тела $\dfrac{H}{R^2}(x^2 + y^2) \leq \leq z \leq H$ в направлении внешней нормали.

Так как $\operatorname{div} \boldsymbol{f} = 3(x^2 + y^2) + R^2$, то

$$\oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma_+} (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{ds}) = \iiint\limits_{\Omega} (3(x^2 + y^2) + R^2) dV = \left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} (3\rho^2 + R^2)\rho\, d\rho \int\limits_{\frac{H\rho^2}{R^2}}^{H} dz = 2\pi \int\limits_0^{R} (3\rho^2 + R^2)\left(H - \frac{H\rho^2}{R^2}\right)\rho\, d\rho =$$

$$= \frac{2\pi H}{R^2} \int\limits_0^{R} (R^4 + 2R^2\rho^2 - 3\rho^4)\rho\, d\rho = \pi H R^4.$$

Пример 4.10. Используя теорему Гаусса–Остроградского найти поток вектора $\boldsymbol{f} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ через всю поверхность пирамиды, ограниченной плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

Так как $\operatorname{div} \boldsymbol{f} = 3$, то

$$\iint\limits_{\Sigma_+} (\boldsymbol{f},\, \boldsymbol{ds}) = \iiint\limits_{\Omega} 3dx\, dy\, dz = 3\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} dz =$$

$$= 3\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (1 - x - y)dy = 3\int\limits_0^1 dx \left(\left.\frac{-(1 - x - y)^2}{2}\right|_0^{1-x} \right) =$$

$$= 3\int\limits_0^1 \frac{(1-x)^2}{2}dx = -3\frac{(1-x)^3}{6}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Пример 4.11. Используя теорему Гаусса–Остроградского найти поток вектора $\boldsymbol{f} = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$ через замкнутую поверхность Σ в направлении ее внешней нормали.

Так как $\operatorname{div} f = 0$, то

$$\iint\limits_{\Sigma_+} (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{ds} = \iiint\limits_{\Omega} 0dV = 0.$$

Упражнения. Используя теорему Гаусса – Остроградского решить задачи:

4.20. Найти поток вектора $\boldsymbol{f} = xy\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}$ через полную поверхность восьмой части шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, лежащую в первом октанте, в направлении внешней нормали.

4.21. Найти поток вектора $\boldsymbol{f} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ через лежащую в первом октанте замкнутую поверхность, ограниченную координатными плоскостями и параболоидом $x^2 + y^2 + 2az = a^2$, в направлении внешней нормали.

4.22. Найти поток вектора $\boldsymbol{f} = x^2y^3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ через полусферу $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ в направлении внешней нормали.

4.23. Найти поток вектора $\boldsymbol{f} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ через всю поверхность тела $\dfrac{H}{R}\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq H$ в направлении внешней нормали.

4.24. Найти поток вектора $\boldsymbol{f} = 2x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j}$ через часть поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $0 \leq z \leq H$, в направлении внешней нормали.

4.25. Найти поток вектора $\boldsymbol{f} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ через часть поверхности параболоида $\dfrac{H}{R^2}(x^2 + y^2) = z$, $z \leq H$, в направлении внутренней нормали.

4.26. Найти поток вектора $\boldsymbol{f} = x^2\boldsymbol{i} - y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ через часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, в направлении внешней номрали.

4.27. Найти поток вектора $\boldsymbol{f} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - 2z\boldsymbol{k}$ через всю поверхность куба $x = \pm a$, $y = \pm a$, $z = \pm a$, в направлении внешней нормали.

4.28. Найти поток вектора $\boldsymbol{f} = 2x^2\boldsymbol{i} + 3y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ через всю поверхность тела $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{2R^2 - x^2 - y^2}$ в направлении внешней нормали.

4.29. Найти поток вектора $\boldsymbol{f} = x^3\boldsymbol{i} + y^3\boldsymbol{j} - z^3\boldsymbol{k}$ через всю поверхность куба $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$ в направлении внешней нормали.

4.30. Доказать, что поток радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ через любую гладкую замкнутую поверхность в направлении внешней нормали равен утроенному объему тела, ограниченного этой поверхностью.

4.31. Найти поток вектора $\boldsymbol{f} = \dfrac{\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|}$ через всю поверхность сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ в направлении внешней нормали.

4.32. Найти поток вектора $\boldsymbol{f} = \dfrac{\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|^3}$ через произвольную гладкую замкнутую поверхность Σ, окружающую начало координат.

Ответы: **4.20.** $\dfrac{5}{8}$.**4.21.** $a^4\left(\dfrac{4}{15} + \dfrac{\pi}{24}\right)$.**4.22.** $\dfrac{2}{3}\pi R^3$. **4.23.** $\dfrac{\pi R^2 H}{3}$. **4.24.** $\dfrac{\pi R^2 H}{4}$. **4.25.** $\dfrac{\pi R^2 H^2}{3}$. **4.26.** $\dfrac{\pi R^4}{8}$. **4.27.** 0. **4.28.** $\dfrac{8\pi R^3}{3}$. **4.29.** a^5. **4.31.** $4\pi R^2$. **4.32.** 4π.

4.4. Теорема Стокса

Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ гладкую ориентированную поверхность Σ_+, целиком лежащую в ограниченной области Ω. Обозначим через l замкнутую кривую в $\mathbb{R}^3$, являющуюся краем поверхности Σ_+, и будем считать l гладкой кривой. Зададим на l направление, согласованное с ориентацией Σ_+: в качестве направления на l возьмем то из двух возможных направлений, при движении в котором по l поверхность Σ остается „слева“, а вектор $\boldsymbol{n}_+$ нормали на Σ_+ направлен „вверх“. Так ориентированную кривую l обозначим l_+.

Пусть в области Ω задана непрерывно дифференцируемая функция $\boldsymbol{f}(P)$. Криволинейный интеграл второго рода $\oint\limits_{l_+}(\boldsymbol{f}, d\boldsymbol{l})$ оказывается связанным с некоторым поверхностным интегралом по Σ_+. Для формулировки соответствующего утверждения необходимо следующее определение.

Определение 4.3 [1]. *Пусть (x, y, z) – декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$ и $\boldsymbol{f}(x, y, z) = f_x(x, y, z)\boldsymbol{i} + f_y(x, y, z)\boldsymbol{j} + f_z(x, y, z)\boldsymbol{k}$ – непрерывно дифференцируемая в точке $P(x, y, z)$ векторная функция. Ротором функции $\boldsymbol{f}$ в точке P называется вектор*

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{f} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k},$$

где все частные производные вычислены в точке P.

Теорема 4.3 [1] (теорема Стокса). *Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^3$, внутри которой лежит гладкая ориентированная поверхность Σ_+ с кусочно-гладким краем l_+ и направление на l_+ согласовано с* *ориентацией Σ_+. Пусть также функция $\boldsymbol{f}(P)$ непрерывно дифференцируема в Ω. Тогда*

$$\oint\limits_{l_+}(\boldsymbol{f}, d\boldsymbol{l}) = \iint\limits_{\Sigma_+}(\operatorname{rot}\boldsymbol{f}, \boldsymbol{ds}).$$

Теорема Стокса означает, что циркуляция дифференцируемого векторного поля $\boldsymbol{f}$ по произвольной кусочно-гладкой замкнутой кривой l_+ равна потоку вектора $\operatorname{rot}\boldsymbol{f}$ через поверхность Σ_+, ограниченную этой кривой l_+.

Отметим, что теорема Грина [1] является частным случаем теоремы Стокса и соответствует тому случаю, когда Σ является частью плоскости Oxy, $\boldsymbol{n}_+ = \boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{f} = f_x\boldsymbol{i} + f_y\boldsymbol{j}$. При этом $\operatorname{rot}\boldsymbol{f} = \left(\dfrac{\partial f_y}{\partial x} - \dfrac{\partial f_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$.

Пример 4.12. Вычислить циркуляцию вектора $\boldsymbol{f} = z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$, по окружности $x^2+y^2+z^2 = R^2$, $x+y+z = R$, в положительном направлении (обход против часовой стрелки).

Так как $\boldsymbol{f} = z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$, то $\operatorname{rot}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$. За поверхность Σ, ограниченную данной окружностью, примем сам круг, образованный сечением шара $x^2 + y^2 + z^2 = R^z$ плоскостью $x + y + z = R$. Центр этого круга $0'\left(\dfrac{R}{3};\dfrac{R}{3};\dfrac{R}{3}\right)$, его радиус $R_1 = R\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Единичный вектор нормали $\boldsymbol{n} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$. Так как $(\operatorname{rot}\boldsymbol{f}, \boldsymbol{n}) = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, то находим

$$\oint\limits_{l_+}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{dl}) = \iint\limits_{\Sigma_+}(\operatorname{rot}\boldsymbol{f}, \boldsymbol{ds}) = \iint\limits_{\Sigma_+}(\operatorname{rot}\boldsymbol{f}, \boldsymbol{n})d\sigma = \sqrt{3}\iint\limits_{\Sigma_+}d\sigma = \sqrt{3}\pi R_1^2 = \frac{2\pi R^2}{\sqrt{3}}.$$

Пример 4.13. Найти циркуляцию вектора $\boldsymbol{f} = y\boldsymbol{i} - 2z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$ вдоль эллипса, образованного сечением гиперболоида $2x^2 - y^2 + z^2 = R^2$ плоскостью $y = x$, в положительном направлении.

Так как $\boldsymbol{f} = y\boldsymbol{i} - 2z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$, то $\operatorname{rot}\boldsymbol{f} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$. За поверхность Σ, ограниченную кривой l, примем часть секущей плоскости, лежащей внутри эллипса. Единичный вектор нормали, направленный в нужную сторону, имеет вид $\boldsymbol{n} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j})$. Поэтому $(\operatorname{rot}\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$. Значит,

$$\oint\limits_{l_+}(\boldsymbol{f}, d\boldsymbol{l}) = \iint\limits_{\Sigma_+}(\operatorname{rot}\boldsymbol{f}, \boldsymbol{ds}) = \iint\limits_{\Sigma_+}(\operatorname{rot}\boldsymbol{f}, \boldsymbol{n})d\sigma = \frac{3}{\sqrt{2}}\iint\limits_{\Sigma_+}d\sigma =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}}\pi R\sqrt{2}R = 3\pi R^2,$$

так как эллипс имеет полуоси $R\sqrt{2}$ и R и его площадь, как известно, равна произведению полуосей на число π.

Упражнения. Используя формулу Стокса решить задачи:

4.33. Найти циркуляцию вектора $\boldsymbol{f} = z^2\boldsymbol{i}+x^2\boldsymbol{j}+y^2\boldsymbol{k}$ по сечению сферы $x^2+y^2+z^2 = R^2$ плоскостью $x+y+z = R$ в положительном направлении.

4.34. Найти циркуляцию вектора $\boldsymbol{f} = z^3\boldsymbol{i} + x^3\boldsymbol{j} + y^3\boldsymbol{k}$ по сечению гиперболоида $2x^2 - y^2 + z^2 = R^2$ плоскостью $x + y = 0$ в положительном направлении.

4.35. Найти циркуляцию вектора $\boldsymbol{f} = y^2\boldsymbol{i}+xy\boldsymbol{j}+(x^2+y^2)\boldsymbol{k}$ по кривой, вырезаемой в первом октанте из параболоида $x^2 + y^2 = Rz$ плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = R$, в положительном направлении.

4.36. Найти поток вихря поля $(\operatorname{rot}\boldsymbol{f})$ вектора $\boldsymbol{f} = y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$ через часть поверхности $z = 2(1 - x^2 - y^2)$, лежащей над плоскостью $0xy$, в направлении внешней нормали.

4.37. Найти циркуляцию вектора $\boldsymbol{f} = (y + z)\boldsymbol{i} + (z + x)\boldsymbol{j} + (x + y)\boldsymbol{k}$ вдоль эллипса $l = \{x = a\sin^2 t;\ y = 2a\sin t\cos t;\ z = a\cos^2 t,\ 0 \le t \le \pi\}$, движущегося в направлении возрастания t.

4.38. Найти циркуляцию вектора $\boldsymbol{f} = (y+z)\boldsymbol{i}+(x+z)\boldsymbol{j}+(x+y)\boldsymbol{k}$ вдоль окружности, являющейся сечением сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ плоскостью $x + y + z = 0$, в положительном направлении.

Ответы: **4.33.** $\dfrac{4}{3\sqrt{3}}\pi R^3$. **4.34.** $3\sqrt{2}\pi R^4$. **4.35.** $\dfrac{R^3}{3}$. **4.36.** $-\pi$. **4.37.** 0. **4.38.** 0.

5. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

5.1. Оператор Гамильтона и его применение

Все операции векторного анализа можно выразить при помощи оператора Гамильтона – символического вектора ∇, определяемого равенством

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Применяя известные операции умножения вектора на скаляр, скалярного и векторного произведений двух векторов, находим:

$$\operatorname{grad}\varphi = \boldsymbol{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \boldsymbol{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \boldsymbol{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \nabla\varphi;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{e}} = (\boldsymbol{e}, \nabla\varphi) = (\boldsymbol{e}, \nabla)\varphi;$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} = (\nabla, \boldsymbol{f});$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{f} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} =$$

$$= \det\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = \nabla \times \boldsymbol{f} = [\nabla, \boldsymbol{f}].$$

По аналогии с производной по направлению от скалярной функции $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{e}}$ вводится понятие производной по направлению единичного вектора $\boldsymbol{e}$ от векторной функции $\boldsymbol{f}(x, y, z)$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{e}} = (\boldsymbol{e}, \nabla)\boldsymbol{f} = \boldsymbol{i}(\boldsymbol{e}, \operatorname{grad} f_x) + \boldsymbol{j}(\boldsymbol{e}, \operatorname{grad} f_y) + \boldsymbol{k}(\boldsymbol{e}, \operatorname{grad} f_z) =$$

$$= \frac{\partial f_x}{\partial \boldsymbol{e}}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f_y}{\partial \boldsymbol{e}}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f_z}{\partial \boldsymbol{e}}\boldsymbol{k}.$$

С помощью оператора Гамильтона удобно выполнять дифференциальные операции векторного анализа над сложными выражениями.

Пример 5.1. Найти градиент произведения двух скалярных функций.

Имеем:

$$\operatorname{grad}(\varphi g) = \nabla(\varphi g) = \nabla(\overset{*}{\varphi}\, g) + \nabla(\varphi\, \overset{*}{g})$$

($*$ указывает функцию, на которую „действует“ оператор). Но

$$\nabla(\overset{*}{\varphi}\, g) = g\nabla\varphi = g \operatorname{grad} u, \quad \nabla(\varphi\, \overset{*}{g}) = \varphi\nabla g = \varphi \operatorname{grad} g.$$

Таким образом, $\operatorname{grad}(\varphi g) = g \operatorname{grad} \varphi + \varphi \operatorname{grad} g$.

Пример 5.2. Найти $\operatorname{rot}[\boldsymbol{f}, \boldsymbol{c}\,]$, где $\boldsymbol{c}$ – постоянный вектор.

По известной формуле векторной алгебры $[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\,]] = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}\,)\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\,)\boldsymbol{c}$, учитывая соотношение $\Big[\nabla, [\boldsymbol{f}, \overset{*}{\boldsymbol{c}}\,]\Big] = \boldsymbol{0}$, имеем $\operatorname{rot}[\boldsymbol{f}, \boldsymbol{c}\,] = [\nabla, [\boldsymbol{f}, \boldsymbol{c}\,]] = $ $= \Big[\nabla, [\overset{*}{\boldsymbol{f}}, \boldsymbol{c}\,]\Big] + \Big[\nabla, [\boldsymbol{f}, \overset{*}{\boldsymbol{c}}\,]\Big] = (\nabla, \boldsymbol{c}\,)\overset{*}{\boldsymbol{f}}\,) - (\nabla, \overset{*}{\boldsymbol{f}}\,)\boldsymbol{c}$. Но $(\nabla, \boldsymbol{c}\,)\overset{*}{\boldsymbol{f}} = (\boldsymbol{c}, \nabla)\overset{*}{\boldsymbol{f}}$. Далее, $(\nabla, \boldsymbol{f})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}(\nabla, \boldsymbol{f}) = \boldsymbol{c} \operatorname{div} \boldsymbol{f}$. Таким образом, $\operatorname{rot}[\boldsymbol{f}, \boldsymbol{c}\,] = (\boldsymbol{c}, \nabla)\boldsymbol{f} - $ $- \boldsymbol{c} \operatorname{div} \boldsymbol{f}$.

Можно образовать 5 дифференциальных операций второго порядка: 1) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = (\nabla, \nabla)\varphi = \nabla^2\varphi = \Delta\varphi$ (лапласиан функции φ); 2) $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = [\nabla, \nabla]\varphi$; 3) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{f} = \nabla(\nabla, \boldsymbol{f}\,)$; 4) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{f} = (\nabla, [\nabla, \boldsymbol{f}\,])$; 5) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{f} = [\nabla, [\nabla, \boldsymbol{f}\,]]$.

Кроме того, операцию ∇^2 можно применять и к векторным полям, т. е. рассматривать операцию $\nabla^2\boldsymbol{f}$. Вторая и четвертая операции приводят к нулевому вектору и нулю соответственно:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = [\nabla, \nabla]\varphi \equiv \boldsymbol{0}, \quad \operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{f} = (\nabla, [\nabla\boldsymbol{f}\,]) \equiv 0.$$

Это следует из векторного смысла оператора ∇: в первом случае формально имеем векторное произведение двух коллинеарных векторов, а во втором – смешанное произведение компланарных векторов.

Упражнения. Доказать справедливость следующих формул:

5.1. $\operatorname{div}(\varphi \boldsymbol{f}) = \varphi \operatorname{div} \boldsymbol{f} + \boldsymbol{f} \operatorname{grad} \varphi$. **5.2.** $\operatorname{div}[\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}] = \boldsymbol{g} \operatorname{rot} \boldsymbol{f} - \boldsymbol{f} \operatorname{rot} \boldsymbol{g}$. **5.3.** $\operatorname{rot}(\varphi \boldsymbol{f}) = \varphi \operatorname{rot} \boldsymbol{f} + [\operatorname{grad} \varphi, \boldsymbol{f}]$. **5.4.** $\operatorname{grad}([\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}]) = (\boldsymbol{f}, \nabla)\boldsymbol{g} + (\boldsymbol{g}, \nabla)\boldsymbol{f} + [\boldsymbol{f}, \operatorname{rot} \boldsymbol{g}] + [\boldsymbol{g}, \operatorname{rot} \boldsymbol{f}]$. **5.5.** $\operatorname{rot}[\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}] = (\boldsymbol{f}, \nabla)\boldsymbol{g} + (\boldsymbol{g}, \nabla)\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f} \operatorname{div} \boldsymbol{g} - \boldsymbol{g} \operatorname{div} \boldsymbol{f}$. **5.6.** $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{f} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{f} - \Delta \boldsymbol{f}$.

5.2. Потенциальное поле

В физике принято называть функции, заданные в $\mathbb{R}^3$, термином „поле“. Будем также использовать эту терминологию: если рассматривается функция $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, будем говорить о скалярном поле, если функция $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ – о векторном поле.

Определение 5.1 [1]. *Векторное поле $\boldsymbol{f} = f_x\boldsymbol{i} + f_y\boldsymbol{j} + f_z\boldsymbol{k}$ называется потенциальным (в области Ω), если существует такая непрерывно дифференцируемая на Ω скалярная функция φ: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, что в каждой точке Ω выполнено равенство*

$$\boldsymbol{f} = \operatorname{grad} \varphi. \tag{5.1}$$

Скалярное поле φ называется при этом потенциалом поля $\boldsymbol{f}$.

Теорема 5.1 [1]. *Если поле $\boldsymbol{f}$ потенциально в области Ω и потенциал φ является дважды непрерывно дифференцируемой в Ω функцией, то*

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}. \tag{5.2}$$

Теорема 5.1 означает, что равенство (5.2) является необходимым условием потенциальности гладкого поля. Это же условие оказывается и достаточным для того, чтобы непрерывно дифференцируемое поле $\boldsymbol{f}$ имело потенциал.

Теорема 5.2 [1]. *Если векторное поле $\boldsymbol{f}$ непрерывно дифференцируемо в односвязной области Ω и выполнено условие* (5.2), *то $\boldsymbol{f}$ является потенциальным полем, т. е. существует потенциал φ, удовлетворяющий равенству* (5.1). *Если P_0 – некоторая фиксированная точка области Ω, потенциал φ определяется единственным образом и может быть вычислен по формуле*

$$\varphi(P) = \varphi(P_0) + \int_{P_0}^{P} (\boldsymbol{f}, d\boldsymbol{l}). \tag{5.3}$$

В физических задачах чаще всего вектор $\boldsymbol{f}$ является силой, при этом говорят о силовом поле. В этом случае интеграл $\int\limits_{l_+(P_1,P_2)} (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{dl})$ называется работой A силового поля $\boldsymbol{f}$ вдоль пути $l_+(P_1,P_2)$ с началом в точке P_1 и концом в точке P_2. Для потенциального поля работа поля зависит от точек P_1 и P_2 и не зависит от пути, соединяющего эти точки, т. е. в этом случае $A = A(P_1,P_2)$. Из равенства (5.3) следует, что для потенциального поля $A(P,P_0) = \varphi(P) - \varphi(P_0)$ и, значит (из-за аддитивности криволинейного интеграла), $A(P_1,P_2) = \varphi(P_2) - \varphi(P_1)$ для любых точек P_1 и P_2, лежащих в области Ω. Это известный физический закон: работа поля равна разности потенциалов конечной и начальной точек.

Пример 5.3. Найти потенциал поля $\boldsymbol{f} = 2xy\boldsymbol{i} + (x^2 - 2yz)\boldsymbol{j} - y^2\boldsymbol{k}$.

Убедимся сначала, что поле потенциально:

$$\frac{\partial f_z}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial z} = -2y, \quad \frac{\partial f_x}{\partial z} = \frac{\partial f_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f_y}{\partial x} = \frac{\partial f_x}{\partial y} = 2x.$$

Следовательно, $\operatorname{rot}\boldsymbol{f} \equiv \boldsymbol{0}$. За путь интегрирования примем ломаную $0ABP$, где $0(0,0,0)$, $A(X,0,0)$, $B(X,Y,0)$, $P(X,Y,Z)$. Находим:

$$\varphi(X,Y,Z) = \int\limits_{0ABP} (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{dl}) + c = \int\limits_0^A (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{dl}) + \int\limits_A^B (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{dl}) + \int\limits_B^P (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{dl}) + C,$$

$$(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{dl}) = 2xy\,dx + (x^2 - 2yz)dy - y^2dz.$$

Так как на $0A$ имеем $y = z = 0$, $dy = dz = 0$, следовательно, $\int\limits_0^A (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{dl}) = 0$.

Аналогично на AB имеем $x = X$, $dx = 0$, $z = 0$, $dz = 0$, поэтому

$$\int\limits_A^B (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{dl}) = \int\limits_0^Y X^2dy = X^2Y.$$

На BP имеем $x = X$, $y = Y$, $dx = dy = 0$, значит,

$$\int\limits_B^P (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{dl}) = -\int\limits_0^Z Y^2dz = -Y^2Z.$$

Таким образом, $\varphi(X,Y,Z) = X^2Y - Y^2Z + C$.

Упражнения. Найти потенциалы следующих плоских и трехмерных полей:

5.7. $\boldsymbol{f} = (3x^2y - y^3)\boldsymbol{i} + (x^3 - 3xy^3)\boldsymbol{j}$.

5.8. $\boldsymbol{f} = \dfrac{\sin(2x)\cos(2y)\boldsymbol{i} + \cos(2x)\sin(2y)\boldsymbol{j}}{\sqrt{\cos^2 x \sin^2 y + \sin^2 x \cos^2 y}}$.

5.9. $\boldsymbol{f} = (yz - xy)\boldsymbol{i} + \left(xz - \dfrac{x^2}{2} + yz^2\right)\boldsymbol{j} + (xy + y^2 z)\boldsymbol{k}$.

5.10. $\boldsymbol{f} = \left(\dfrac{1}{z} - \dfrac{y}{x^2}\right)\boldsymbol{i} + \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{z}{y^2}\right)\boldsymbol{j} + \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{z^2}\right)\boldsymbol{k}$.

5.11. $\boldsymbol{f} = \left(\dfrac{z}{y^2} - \dfrac{y}{z^2} - \dfrac{2yz}{x^3}\right)\boldsymbol{i} + \left(\dfrac{z}{x^2} - \dfrac{x}{z^2} - \dfrac{2xz}{y^3}\right)\boldsymbol{j} + \left(\dfrac{y}{x^2} + \dfrac{x}{y^2} + \dfrac{2xy}{z^3}\right)\boldsymbol{k}$.

5.12. Найти потенциал гравитационного поля $\boldsymbol{f} = -\dfrac{m}{\|r\|^3}\boldsymbol{r}$, создаваемого массой m, помещенной в начале координат.

Ответы:

5.7. $\varphi(x, y) = x^3 y - xy^3 + c$.

5.8. $\varphi(x, y) = 2\sqrt{\cos^2 x \sin^2 y + \sin^2 x \cos^2 y} + c$.

5.9. $\varphi(x, y, z) = xyz - \dfrac{x^2 y}{2} + \dfrac{y^2 z^2}{2} + c$.

5.10. $\varphi(x, y, z) = \dfrac{y}{x} + \dfrac{z}{y} + \dfrac{x}{z} + c$.

5.11. $\varphi(x, y, z) = \dfrac{yz}{x^2} + \dfrac{xz}{y^2} - \dfrac{xy}{z^2} + c$.

5.12. $\varphi(x, y, z) = \dfrac{m}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

5.3. Соленоидальное поле

Определение 5.2 [1]. *Непрерывно дифференцируемое векторное поле* $\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}$ *называется соленоидальным в области* Ω, *если*

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \tag{5.4}$$

в каждой точке Ω.

Определение 5.3 [1]. *Если для поля* $\boldsymbol{v}$ *существует такая непрерывно дифференцируемая функция* $\boldsymbol{A}$, *что*

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{v} \tag{5.5}$$

в области Ω, *то* $\boldsymbol{A}$ *называется векторным потенциалом поля* $\boldsymbol{v}$.

Важным является следующее утверждение.

Теорема 5.3 [1]. *Если поле* $\boldsymbol{v}$ *имеет в области* Ω *дважды непрерывно дифференцируемый векторный потенциал* $\boldsymbol{A}$, *то* $\boldsymbol{v}$ *соленоидально в* Ω.

Аналогично случаю потенциального поля не только из равенства (5.5) следует соотношение (5.4), но и наоборот, из условия (5.4) следует существование вектора $\boldsymbol{A}$, удовлетворяющего (5.5). Это означает, что любое соленоидальное поле имеет векторный потенциал.

Пример 5.4. Доказать, что для любого дважды дифференцируемого трехмерного векторного поля $\boldsymbol{f}$ поле вихрей соленоидально.

Имеем:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{f} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}.$$

Учитывая равенство смешанных производных второго порядка, получаем

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{f} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right) \equiv 0.$$

Упражнения. Проверить соленоидальность следующих полей:

5.13. $\boldsymbol{f} = (x^2y+y^3)\boldsymbol{i} + (x^3-xy^2)\boldsymbol{j}$. **5.14.** $\boldsymbol{f} = xy^2\boldsymbol{i} + x^2y\boldsymbol{j} - (x^2+y^2)z\boldsymbol{k}$.

5.15. $\boldsymbol{f} = \dfrac{x}{yz}\,\boldsymbol{i} + \dfrac{y}{xz}\,\boldsymbol{j} - \dfrac{(x+y)\ln z}{xy}\,\boldsymbol{k}$. **5.16.** $\boldsymbol{f} = \dfrac{x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j}}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{(x^2-y^2)z\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.

5.4. Применение криволинейных координат в векторном анализе

Напомним, что для дифференцируемого скалярного поля $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ в том случае, когда положение точки в $\mathbb{R}^3$ описывается декартовыми координатами, вектор $\operatorname{grad} f$ определяется равенством

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\boldsymbol{k}.$$

Пусть теперь в $\mathbb{R}^3$ заданы криволинейные ортогональные координаты (ξ, η, ζ). Как показано в [1], в этом случае в каждой точке P определен координатный ортогональный базис $\{\boldsymbol{e}_\xi, \boldsymbol{e}_\eta, \boldsymbol{e}_\zeta\}$, где $\boldsymbol{e}_\xi = \dfrac{1}{H_\xi}\left[\dfrac{\partial x}{\partial \xi}, \dfrac{\partial y}{\partial \xi}, \dfrac{\partial z}{\partial \xi}\right]^T$; $\boldsymbol{e}_\eta = \dfrac{1}{H_\eta}\left[\dfrac{\partial x}{\partial \eta}, \dfrac{\partial y}{\partial \eta}, \dfrac{\partial z}{\partial \eta}\right]^T$; $\boldsymbol{e}_\zeta = \dfrac{1}{H_\zeta}\left[\dfrac{\partial x}{\partial \zeta}, \dfrac{\partial y}{\partial \zeta}, \dfrac{\partial z}{\partial \zeta}\right]^T$ – представления базисных векторов в исходном базисе $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$, а H_ξ, H_η, H_ζ – коэффициенты Ламе, определенные в [1]. В [1] было получено представление градиента в криволинейных ортогональных координатах:

$$\operatorname{grad} f = \frac{1}{H_\xi}\frac{\partial f}{\partial \xi}\,\boldsymbol{e}_\xi + \frac{1}{H_\eta}\frac{\partial f}{\partial \eta}\,\boldsymbol{e}_\eta + \frac{1}{H_\zeta}\frac{\partial f}{\partial \zeta}\,\boldsymbol{e}_\zeta.$$

В частности, в цилиндрической системе координат

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\,\boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\,\boldsymbol{e}_z,$$

а для сферической системы координат

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\,\boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\boldsymbol{e}_\theta.$$

В [1] было получено представление дивергенции в криволинейных ортогональных координатах:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{f} = \frac{1}{H_\xi H_\eta H_\zeta}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}(H_\eta H_\zeta f_\xi) + \frac{\partial}{\partial \eta}(H_\xi H_\zeta f_\eta) + \frac{\partial}{\partial \zeta}(H_\xi H_\eta f_\zeta)\right].$$

В частности, для цилиндрической системы координат

$$\operatorname{div}\boldsymbol{f} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho f_\rho) + \frac{\partial f_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho f_z)\right] = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho f_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial f_z}{\partial z},$$

а для сферической системы координат

$$\operatorname{div}\boldsymbol{f} = \frac{1}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2\sin\theta f_\rho) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho f_\varphi) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho\sin\theta f_\theta)\right] =$$

$$= \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 f_\rho) + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial f_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta f_\theta),$$

так как $H_\rho = 1$, $H_\varphi = \rho\sin\theta$, $H_\theta = \rho$.

В [1] было получено представление $\operatorname{rot}\boldsymbol{f}$ в цилиндрических и сферических координатах соответственно:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{f} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial f_z}{\partial \varphi} - \rho\frac{\partial f_\varphi}{\partial z}\right]\boldsymbol{e}_\rho + \left[\frac{\partial f_\rho}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial \rho}\right]\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho f_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial f_\rho}{\partial \varphi}\right]\boldsymbol{e}_z,$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{f} = \frac{1}{\rho\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta f_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial f_\theta}{\partial \varphi}\right]\boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho f_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial f_\rho}{\partial \theta}\right]\boldsymbol{e}_\varphi +$$

$$+\frac{1}{\rho\sin\theta}\left[\frac{\partial f_\rho}{\partial \varphi} - \sin\theta\frac{\partial(\rho f_\varphi)}{\partial \rho}\right]\boldsymbol{e}_\theta.$$

Пример 5.5. Перейти к цилиндрическим координатам в выражении векторного поля $\boldsymbol{f} = \dfrac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ и найти $\operatorname{div}\boldsymbol{f}$ и $\operatorname{rot}\boldsymbol{f}$.

Так как в данном случае $x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = \boldsymbol{r}$, то

$$\boldsymbol{f} = \frac{\rho\boldsymbol{e}_\rho - z\boldsymbol{e}_z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}.$$

По полученным формулам находим:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{f} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho f_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial f_\varphi}{\partial \varphi} + \rho\frac{\partial f_z}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{1}{\rho}\left(\frac{2\rho(\rho^2+z^2)-\rho^3}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} - \rho\frac{(\rho^2+z^2)-z^2}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\right) = \frac{2z^2}{(\rho^2+z^2)^{3/2}};$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{f} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial f_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial f_\varphi}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_\rho + \left(\frac{\partial f_\rho}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial \rho}\right)\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho f_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial f_\rho}{\partial \varphi}\right)\boldsymbol{e}_z =$$

$$= -\frac{2\rho z}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\,\boldsymbol{e}_\varphi.$$

Упражнения.

5.17. Перейти к цилиндрическим координатам

$$\boldsymbol{f} = xz\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} - z\sqrt{x^2+y^2}\boldsymbol{k}$$

и найти $\operatorname{div} \boldsymbol{f}$ и $\operatorname{rot} \boldsymbol{f}$.

5.18. Дано скалярное поле в цилиндрических координатах

$$f(\rho,\varphi,z) = \rho^2\varphi + z^2\varphi^3 - r\varphi z + 3.$$

Найти $\operatorname{grad} f$.

5.19. Дано векторное поле в цилиндрических координатах

$$\boldsymbol{f}(\rho,\varphi,z) = (z^2+\rho)\boldsymbol{e}_\rho + z\rho\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + (z^2+\rho\varphi)\boldsymbol{e}_z.$$

Найти $\operatorname{div} \boldsymbol{f}$ и $\operatorname{rot} \boldsymbol{f}$.

5.20. Дано скалярное поле в сферических координатах

$$f(\rho,\varphi,\theta) = \rho^2\varphi\theta + \rho^3\varphi^2 + \varphi + \theta^2 + 1.$$

Найти $\operatorname{grad} f$.

5.21. Дано векторное поле в сферических координатах

$$\boldsymbol{f}(\rho,\varphi,\theta) = \rho^2\varphi\boldsymbol{e}_\rho + (\rho\varphi^2\theta + \rho^3)\boldsymbol{e}_\varphi + (\rho^4+1)\boldsymbol{e}_\theta.$$

Найти $\operatorname{div} \boldsymbol{f}$ и $\operatorname{rot} \boldsymbol{f}$.

Ответы:

5.17. $\boldsymbol{f} = \rho z(\boldsymbol{e}_\rho - \boldsymbol{e}_z)$, $\operatorname{div} \boldsymbol{f} = 2z - \rho$, $\operatorname{rot} \boldsymbol{f} = (\rho + z)\boldsymbol{e}_\varphi$.

5.18. $\operatorname{grad} f = (2\rho\varphi - \varphi z)\boldsymbol{e}_\rho + \left(\rho + \dfrac{3z^2\varphi^2 - \rho z}{\rho}\right)\boldsymbol{e}_\varphi + (2z\varphi^3 - \rho\varphi)\boldsymbol{e}_z$.

5.19. $\operatorname{div} \boldsymbol{f} = \dfrac{z^2}{\rho} + 3z + 2$, $\operatorname{rot} \boldsymbol{f} = (1-\rho\varphi)\boldsymbol{e}_\rho + (2z - \varphi)\boldsymbol{e}_\varphi + 2z\varphi\boldsymbol{e}_z$.

5.20. $\operatorname{grad} f = (2\rho\varphi\theta + 3\rho^2\varphi^2)\boldsymbol{e}_\rho + \dfrac{1}{\rho\sin\theta}(\rho^2\theta + 2\rho^3\varphi + 1)\boldsymbol{e}_\varphi + \dfrac{1}{\rho}(\rho^2\varphi + 2\theta)\boldsymbol{e}_\theta$.

5.21. $\operatorname{div} \boldsymbol{f} = \rho^2\varphi + \dfrac{2\varphi\theta}{\sin\theta} + \dfrac{(\rho^4+1)}{\rho\operatorname{tg}\theta}$, $\operatorname{rot} \boldsymbol{f} = \left[\dfrac{(\varphi^2\theta+\rho^2)}{\operatorname{tg}\theta} + \varphi^2\right]\boldsymbol{e}_\rho +$
$+\dfrac{5\rho^4+1}{\rho}\,\boldsymbol{e}_\varphi + \left[\dfrac{\rho}{\cos\theta} - 2\varphi^2\theta - 4\rho^2\right]\boldsymbol{e}_\theta.$

6. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Контрольная работа состоит из четырех заданий.
Первые два задания на изменение порядка интегрирования в двойном интеграле.
Третье задание вычислить двойной интеграл.
Четвертое задание найти объем тела.

При выполнении данной КР студентам необходимо сделать эскизы областей интегрирования S_1, S_2 и S_3 на плоскости Oxy и тела V в пространстве (или его проекцию S_4 на одну из координатных плоскостей).

Оценка контрольной работы.

1. Первая и вторая задачи оцениваются в 2 балла – все верно; 1 балл – верно определена область интегрирования; 0 баллов – все неверно.

2. Третья и четвертая задачи оцениваются в 3 балла – если все верно; 2 балла – правильно написаны двойной и повторный интегралы, ошибка при вычислении повторного интеграла; 1 – балл правильно написан двойной интеграл неправильно повторный интеграл; 0 баллов – все неверно.

Максимальная оценка – 10 баллов. Зачет ставится, если набрано не менее 6 баллов.

6.1. Вариант контрольной работы. Решение

Пример варианта контрольной работы.

КР Вар. 0. Поменять порядок интегрирования:

1. $I_1 = \displaystyle\iint\limits_{(S_1)} f(x,y)dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x,y)dy + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy.$

2. $I_2 = \displaystyle\iint\limits_{(S_2)} f(x,y)dx\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{4y-y^2}} f(x,y)dx.$

3. Вычислить интеграл: $I_3 = \displaystyle\iint\limits_{(S_3)} y^2 \sin\left(\frac{xy}{2}\right) dx\,dy,$

$S_3 : x = 0,\ y = \sqrt{\pi},\ y = x/2.$

4. Найти объем тела V: $x^2 + y^2 = 50$, $x = \sqrt{5y}$, $y = 0$, $z = 6y/11$, $z = 0$.

Пример выполнения контрольной работы.

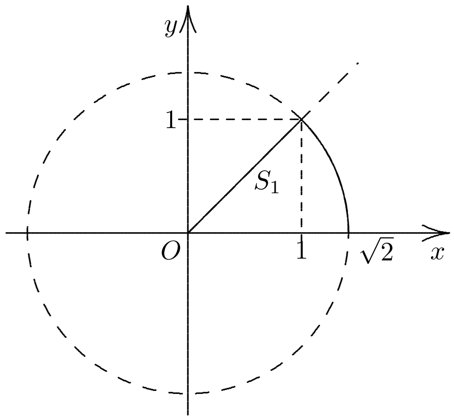

Рис. 3.1

1. Область S_1 есть круговой сектор круга $x^2 + y^2 \le 2$ радиуса $\sqrt{2}$ с центром в начале координат и углом $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ (рис. 3.1)

$$I_1 = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y)dx.$$

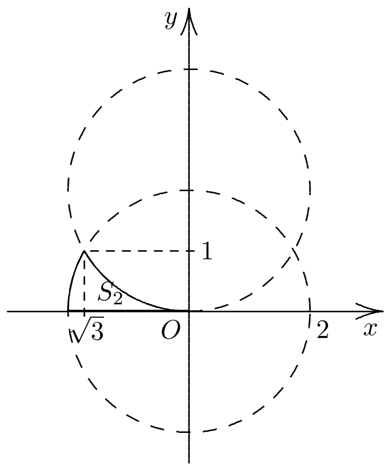

Рис. 3.2

2. Область S_2 ограничена частью окружности $x^2 + (y-2)^2 = 4$ радиуса 2 с центром в точке $(0, 2)$ и частью окружности $x^2 + y^2 = 4$ радиуса 2 с центром в точке $(0, 0)$, при этом $y \ge 0$ $x \le 0$ (рис. 3.2)

$$I_2 = \int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y)dy +$$

$$+ \int_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x, y)dy.$$

3. Область S_3 ограничена прямыми: $x = 0$, $y = \sqrt{\pi}$, $y = x/2$ (рис. 3.3).

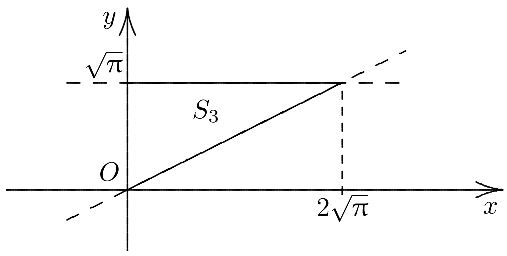

Рис. 3.3

$$I_3 = \int\limits_0^{\sqrt{\pi}} dy \int\limits_0^{2\,y} y^2 \sin\left(\frac{x\,y}{2}\right) dx = \int\limits_0^{\sqrt{\pi}} \left(-2\cos\left(y^2\right) y + 2\,y\right) dy = \pi.$$

4. Тело V ограничено цилиндрами с направляющими $x^2 + y^2 = 50$, $x = \sqrt{5y}$ и образующими параллельными оси , а также плоскостями $y = 0$, $z = 6y/11$ и $z = 0$. Нарисуем проекцию тела V на плоскость Oxy (см. рис. 3.4)

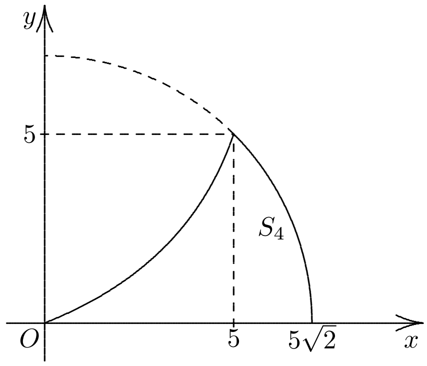

Рис. 3.4

$$V = \iint\limits_{S_4} \frac{6\,y}{11}\,dydx = \int\limits_0^5 dy \int\limits_{\sqrt{5y}}^{\sqrt{50-y^2}} \frac{6\,y}{11}\,dx =$$

$$= \frac{6}{11}\int\limits_0^5 y\left(\sqrt{50-y^2} - \sqrt{5y}\right) dy = \frac{500\sqrt{2}}{11} - 50.$$

Ответы:

1. $I_1 = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx.$

2. $I_2 = \int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy.$

3. $I_3 = \pi$. **4.** $V = \dfrac{500\sqrt{2}}{11} - 50.$

6.2. Примеры вариантов. Ответы

Вариант 1

Поменять порядок интегрирования:

1) $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} f(x,y)dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x}^{0} f(x,y)dy.$

2) $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}} f(x,y)dy.$

3) Вычислить интеграл: $\iint\limits_{(S)} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dxdy,$

$S: \ (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), \ x \geq 0.$

4) Найти объем тела: $y = x^2$, $y = 1$, $z = x^2 + y^2$, $z = 0$.

Вариант 2

Поменять порядок интегрирования:

1) $\int\limits_0^{\pi/4} dy \int\limits_0^{\sin y} f(x,y)dx + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} dy \int\limits_0^{\cos y} f(x,y)dx.$

2) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x,y)dy.$

3) Вычислить интеграл: $\iint\limits_{(S)} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) dydx,$

$S: x^2 + y^2 \geq 1, \ y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}, \ x^2 + y^2 \leq 9, \ y \leq x\sqrt{3}.$

4) Найти объем тела: $x^2 + y^2 = 2$, $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 15x$.

Вариант 3

Поменять порядок интегрирования:

1) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y^2} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x,y)dx.$

2) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^{2/3}} f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x,y)dy.$

3) Вычислить интеграл: $\iint\limits_{(S)} \ln(1 + x^2 + y^2)dxdy,$

$S: x^2 + y^2 = R^2, \ x \geq 0, \ y \geq 0.$

4) Найти объем тела: $x = 17\sqrt{2y}$, $x = 2\sqrt{2y}$, $z = 0$, $z + y = 1/2$.

Ответы.

1. 1) $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{y} f(x,y)dx$; 2) $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} f(x,y)dx$;

3) $\frac{a^3}{9}\left(8\sqrt{2} - 10\right)$; 4) $\frac{88}{105}$.

2. 1) $\int\limits_0^{1/\sqrt{2}} dx \int\limits_{\arcsin x}^{\arccos x} f(x,y)dy$; 2) $\int\limits_1^2 dy \int\limits_1^y f(x,y)dx + \int\limits_2^4 dy \int\limits_{y/2}^2 f(x,y)dx$;

3) $\dfrac{\pi^2}{6}$; 4) $10\sqrt(2) - 11$.

3. 1) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{2-x} f(x,y)dy$; 2) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^{3/2}}^{2-\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx$;

3) $\dfrac{\pi}{4}\big((1+R^2)\ln(1+R^2) - R^2\big)$; 4) 1.

7. ТИПОВОЙ РАСЧЕТ

Оценка типового расчета.

Студенту требуется решить каждый пример двумя способами: первый пример по определению и с помощью теоремы Гаусса–Остроградского; второй пример по определению и с помощью теоремы Стокса.

Каждый способ решения оцениваются в 3 балла – все верно; 2 балла – допущена арифметическая ошибка; 1 балл – верно определена область интегрирования; 0 баллов – все неверно.

Максимальная оценка – 12 баллов. Зачет ставится, если набрано не менее 7 баллов.

7.1. Вариант типового расчета. Решение

Студенту выдается задание.

ТР 2.12 . Вар. 0. 1. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{F} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} - z^2\boldsymbol{k}$ через поверхность тетраэдра, образованного пересечением полупространств $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c} \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, при $a = 7$, $b = 3$, $c = 1$.

2. Найти циркуляцию векторного поля $\boldsymbol{F} = az\boldsymbol{i} + by\boldsymbol{k}$ по контуру эллипса — плоской части поверхности тела, полученного в результате пересечения кругового цилиндра $x^2+y^2 \le c^2$ с полупространством $x+2z \le 3$, при $a = -4$, $b = 7$, $c = 7$.

Решение.

Первый пример.

I способ. Найдем поток векторного поля по определению:

$$\Pi = \iint\limits_{\Sigma} (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{n})\, d\sigma,$$

где Σ есть поверхность тетраэдра $OABC$, (рис. 7.1) $O(0;0;0)$, $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$. По свойству аддитивности мы можем написать

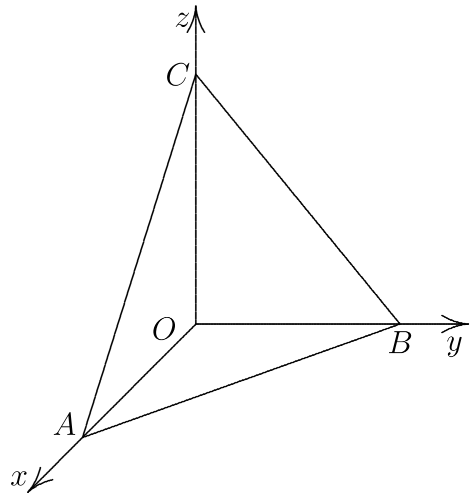

Рис. 7.1

$$\Pi = \iint\limits_{ABC} (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{n})\, d\sigma + \iint\limits_{OAB} z^2 dx\, dy - \iint\limits_{OBC} x^2 dy\, dz - \iint\limits_{OCA} y^2 dx\, dz.$$

Все интегралы в этой сумме, кроме первого, равны нулю. Вычислим первый интеграл:

$$\Pi = \iint\limits_{ABC} (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{n})\, d\sigma = \iint\limits_{0AB} \left(\begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \\ -z^2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{n}_{ABC} \right) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx\, dy =$$

$$= c \int\limits_0^b \int\limits_0^{a(1-y/b)} \left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - c\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 \right) dx\, dy =$$

$$= \int\limits_0^b \left(\frac{a^2 - ac}{3} \left(1 - \frac{y}{b}\right)^3 + \frac{a}{b} y^2 \left(1 - \frac{y}{b}\right) \right) dy = \frac{1}{12} abc(a + b - c) = \frac{63}{4} = 15{,}75.$$

II способ. Применим формулу Гаусса-Остроградского: Тогда

$$\Pi = \iint\limits_{\Sigma} (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{n})\, d\sigma = \iiint\limits_{OABC} \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dV =$$

$$= \int\limits_0^b dy \int\limits_0^{a(1-y/b)} dx \int\limits_0^{c(1-x/a-y/b)} (2x + 2y - 2z) dz =$$

$$= \int\limits_0^b dy \int\limits_0^{a(1-y/b)} \left(2c(x+y)\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) - c^2 \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 \right) dx =$$

$$= \frac{1}{12} abc(a+b-c) = 15,75.$$

Второй пример.

I способ. Найдем циркуляцию по определению. Параметризуем контур l следующим образом:

$$\begin{cases} x(t) &= c\cos t \\ y(t) &= c\sin t \\ z(t) &= \dfrac{3-c\cos t}{2} \end{cases}, \qquad t \in [0; 2\pi].$$

Тогда

$$\text{Ц} = \oint\limits_l (\boldsymbol{F}; \boldsymbol{dl}) = \int\limits_0^{2\pi} \big(F_x x'(t) + F_y y'(t) + F_z z'(t)\big) dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(a \left(\frac{3 - c\cos t}{2} \right) (-c\sin t) + 0 + bc\sin t \cdot \frac{c\sin t}{2} \right) dt = \frac{\pi bc^2}{2} =$$

$$= \frac{343\pi}{2} \approx 538,783.$$

II способ. Применим формулу Стокса. Контур l является границей эллипса Σ, лежащего в плоскости $x + 2z - 3 = 0$. Вычислим

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ az & 0 & by \end{bmatrix} = b\boldsymbol{i} + a\boldsymbol{j}.$$

Тогда

$$\text{Ц} = \oint\limits_l (\boldsymbol{F}; \boldsymbol{dl}) = \iint\limits_\Sigma (\operatorname{rot} \boldsymbol{F}, \boldsymbol{n}_+)\, d\sigma = \iint\limits_\Sigma \left(\begin{bmatrix} b \\ a \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 0 \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \right) d\sigma =$$

$$= \frac{b}{\sqrt{5}} \iint\limits_\Sigma d\sigma = \frac{b}{\sqrt{5}} \cdot S(\Sigma).$$

Нетрудно видеть, что эллипс Σ имеет полуоси равные c и $\dfrac{c\sqrt{5}}{2}$, поэтому $S(\Sigma) = \pi \cdot c \cdot \dfrac{c\sqrt{5}}{2}$. Следовательно

$$\text{Ц} = \frac{\pi bc^2}{2} \approx 538,783.$$

7.2. Примеры вариантов. Ответы

ТР 2.12 . Вар. 1. **1.** Найти поток векторного поля $\boldsymbol{F} = bxy\boldsymbol{i} + cyz\boldsymbol{j} + bxz\boldsymbol{k}$ через поверхность тела, являющегося частью шара $x^2+y^2+z^2 \leq a^2$, содержащейся в октанте $0 \leq x,\ 0 \leq y,\ 0 \leq z$, при $a = 5,\ b = -2,\ c = 5$.

2. Найти циркуляцию векторного поля $\boldsymbol{F} = bz\boldsymbol{i} + cy\boldsymbol{k}$ по контуру эллипса — плоской части поверхности тела, полученного в результате пересечения кругового цилиндра $x^2+y^2 \leq a^2$ с полупространством $x+az \leq 5$, при $a = 7,\ b = -3,\ c = 6$.

ТР 2.12 . Вар. 2. **1.** Найти поток векторного поля $\boldsymbol{F} = bx^2\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + cxz\boldsymbol{k}$ через поверхность тела, вырезаемого из параболоида вращения $x^2 + z^2 \leq y$ двугранным $a = 6,\ b = 3,\ c = 6$.

2. Найти циркуляцию векторного поля $\boldsymbol{F} = z\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{k}$ по контуру эллипса — плоской части поверхности тела, полученного в результате пересечения кругового цилиндра $x^2 + y^2 \leq a^2$ с полупространством $\dfrac{x}{b} + \dfrac{z}{c} \leq 1$, при $a = 3,\ b = 1,\ c = 1$.

ТР 2.12 . Вар. 3. **1.** Найти поток векторного поля $\boldsymbol{F} = bxy\boldsymbol{i} + cx\boldsymbol{j} - y\boldsymbol{k}$ через поверхность тела в пересечении кругового конуса $y^2 \leq x^2 + z^2$ и слоя $0 \leq y \leq a$, при $a = 1,\ b = 1,\ c = -5$.

2. Найти циркуляцию векторного поля $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} + (x+y)\boldsymbol{k}$ по контуру эллипса — плоской части поверхности тела, полученного в результате пересечения параболоида вращения $x^2 + (y+a)^2 \leq z$ с полупространством $0 \leq by - z + c$, при $a = 1,\ b = 3,\ c = 7$.

Преподаватель получает распечатку ответов

ТР 2.12 . Вар. 1. $\Pi = \dfrac{\pi}{16}(2b+c)a^4 = 122.718$,
$Ц = \pi ac = 131.947$

ТР 2.12 . Вар. 2. $\Pi = \dfrac{4}{15}(2b+c)a^5 = 24883.200$,
$Ц = -\pi a^2 \dfrac{c}{b} = -28.274$

ТР 2.12 . Вар. 3. $\Pi = \dfrac{\pi}{4}a^4 b = 0.785$,
$Ц = \pi(b-2)(c - ab + \dfrac{1}{4}b^2) = 19.635$

Список литературы

1. Боревич Е. З.,Каврайская К. В.,Колоницкий С. Б., Нежинская И. В., Челкак С. И. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы: Учеб. эл. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, 2012.

2. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. Т. 3. М.: Физматлит, 2001.

3. Будак Б. М., Фомин С. В. Кратные интегралы и ряды. М.: Наука, 1965.

4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Том 3. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М.: Дрофа, 2004.

5. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Часть 2. Под ред. Ефимова А.В., Поспелова А.С Учеб. пособие для втузов. - 4-е изд., перераб. и доп. - М.: Из-во Физ-мат лит, 2001.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ 3
1. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ 3
1.1. Определение и свойства 3
1.2. Вычисление двойного интеграла сведением к повторному в декартовых координатах 5
1.3. Замена переменных в двойном интеграле 13
1.4. Применение двойного интеграла для вычисления площади и объема 17
1.5. Использование двойного интеграла для вычисления площади поверхности 19
2. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ 23
2.1. Определение и свойства тройного интеграла 23
2.2. Вычисление тройного интеграла 24
2.3. Замена переменной в тройном интеграле 29
3. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ 36
3.1. Криволинейный интеграл первого рода 36
3.2. Криволинейный интеграл второго рода 43
3.3. Теорема Грина 48
4. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ 53
4.1. Поверхностный интеграл первого рода 53
4.2. Поверхностный интеграл второго рода 58
4.3. Теорема Гаусса–Остроградского 61
4.4. Теорема Стокса 64
5. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ 66
5.1. Оператор Гамильтона и его применение 66
5.2. Потенциальное поле 68
5.3. Соленоидальное поле 70
5.4. Применение криволинейных координат в векторном анализе . . 71
6. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 74
6.1. Вариант контрольной работы. Решение 74
6.2. Примеры вариантов. Ответы 76
7. ТИПОВОЙ РАСЧЕТ 78
7.1. Вариант типового расчета. Решение 78
7.2. Примеры вариантов. Ответы 81
Список литературы 82

Редактор Э. К. Долгатов

Подписано в печать Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Гарнитура „Times“. Печ. л. 5,25.
Тираж 274 экз. Заказ

Издательство СПбГЭТУ „ЛЭТИ“
197376, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5