МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет “ЛЭТИ”

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО И РЯДОВ ФУРЬЕ

Санкт-Петербург
2011

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет “ЛЭТИ”

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО И РЯДОВ ФУРЬЕ

Методические указания

Санкт-Петербург
Издательство СПбГЭТУ “ЛЭТИ”
2011

УДК 517.518.45

Основы теории функций комплексного переменного и рядов Фурье: Методические указания / Сост.: Е. З. Боревич, Е. Е. Жукова, Л. М. Товкач, А. П. Щеглова. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ "ЛЭТИ", 2011. 64 с.

Содержат разделы теории функций комплексного переменного и рядов Фурье, входящие в программу курса высшей математики для технических вузов.

Предназначены для студентов технических факультетов, обучающихся по всем направлениям и специальностям дневной, вечерней и заочной форм обучения.

Утверждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве методических указаний

Настоящее издание предназначено для студентов, изучающих разделы теории функций комплексного переменного и рядов Фурье, обычно включаемые в курс высшей математики для технических вузов.

В основу изложения материала положены пособия [1] и [3]. Для углубленного изучения рассмотренных разделов рекомендуется учебник [2].

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1.1. Понятие функции комплексного переменного

Пусть D и E – некоторые подмножества множества $\mathbb{C}$. Если каждой точке $z \in D$ сопоставлена по некоторому правилу точка $w \in E$, то говорят, что на множестве D задана функция $f : D \to E$; $f(z) = w$. Множество D называется областью определения функции f.

Запишем комплексные числа z и w в алгебраической форме: $z = x+iy$, $w = u + iv$, $x, y, u, v \in \mathbb{R}$. Тогда функцию комплексного переменного можно рассматривать как функцию двух вещественных переменных, а именно $f(z) = w \iff f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, где функции u, v: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – вещественнозначные функции двух вещественных переменных. Функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ называются соответственно вещественной и мнимой частями функции $f(z)$ и обозначаются $u = \operatorname{Re} f(z)$, $v = \operatorname{Im} f(z)$.

Пример 1.1. $f(z) = 2z - iz$. Найдем вещественную и мнимую части функции $f(z)$. Пусть $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Тогда

$$f(z) = 2(x + iy) - i(x - iy) = (2x - y) + i(2y - x).$$

Поскольку функции $u(x, y) = 2x - y$ и $v(x, y) = 2y - x$ – вещественнозначные, то они являются вещественной и мнимой частями функции $f(z)$ соответственно. Окончательно: $\operatorname{Re} f(z) = 2x - y$; $\operatorname{Im} f(z) = 2y - x$.

Пример 1.2. $f(z) = 2z(z + 3 - 2i) - (z + i)^2$.

Пусть $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Тогда

$$f(z) = 2(x + iy)(x + iy + 3 - 2i) - (x + iy + i)^2 =$$
$$= ((2x^2 - 2y^2 + 6x + 4y) + i(4xy - 4x + 6y)) - (x^2 + 2ix(y + 1) - (y + 1)^2) =$$
$$= (x^2 - y^2 + 6x + 6y - 1) + i(2xy - 6x + 6y),$$

т. е. $\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 + 6x + 6y - 1$; $\operatorname{Im} f(z) = 2xy - 6x + 6y$.

Пример 1.3. $f(z) = \dfrac{1}{z - i}$. Заметим, что $D(f) = \mathbb{C} \setminus \{i\}$. Пусть $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, $z \neq i$. Тогда

$$f(z) = \frac{1}{x + i(y - 1)} = \frac{x - i(y - 1)}{(x + i(y - 1)(x - i(y - 1))} =$$

$$= \frac{x - i(y-1)}{x^2 + (y-1)^2} = \frac{x}{x^2 + (y-1)^2} - i\frac{y-1}{x^2 + (y-1)^2},$$

т. е. $\operatorname{Re} f(z) = \dfrac{x}{x^2 + (y-1)^2}$; $\operatorname{Im} f(z) = -\dfrac{y-1}{x^2 + (y-1)^2}$.

Пример 1.4. $f(z) = (z + i)(\overline{z} - i)$.

Пусть $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Тогда

$$f(z) = (x + i(y+1))(x - i(y+1)) = x^2 + (y-1)^2.$$

Функция $f(z)$ принимает только вещественные значения, т. е. $\operatorname{Im} f(z) \equiv 0$, $\operatorname{Re} f(z) = x^2 + (y-1)^2$.

Упражнения.

1.1. $f(z) = 2z - 3\overline{z} + 2i$. Найдите $f(3 - 4i)$ и $f\left(\sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi i}{4}}\right)$.

Найдите $\operatorname{Re} f(z)$, $\operatorname{Im} f(z)$:

1.2. $f(z) = z^2 - 2(z + 3i)$; 1.3. $f(z) = i(z + 2 - i)(\overline{z} + 2 + i)$;

1.4. $f(z) = \dfrac{3 + 2i}{\overline{z} - 2}$; 1.5. $f(z) = \dfrac{z + i}{z - i}$.

Найдите $D(f)$ (область определения функции):

1.6. $f(z) = \dfrac{2z - 3i}{z + 2 - 5i}$; 1.7. $f(z) = \dfrac{1}{z + \overline{z}}$; 1.8. $f(z) = \dfrac{4 - z}{z^2 - 5iz - 6}$.

Ответы: 1.1. $(-3 - 18i)$; $(1 + 7i)$. *Указание:* $\sqrt{2}e^{\frac{3\pi i}{4}} = -1 + i$;
1.2. $\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 - 2x$, $\operatorname{Im} f(z) = 2xy - 2y - 6$;
1.3. $\operatorname{Re} f(z) \equiv 0$, $\operatorname{Im} f(z) = (x+2)^2 + (y-1)^2$; 1.4. $\operatorname{Re} f(z) = \dfrac{3x - 2y - 6}{(x-2)^2 + y^2}$, $\operatorname{Im} f(z) = \dfrac{2x + 3y - 4}{(x-2)^2 + y^2}$; 1.5. $\operatorname{Re} f(z) = \dfrac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y-1)^2}$, $\operatorname{Im} f(z) = \dfrac{2x}{x^2 + (y-1)^2}$;
1.6. $z \neq -2 + 5i$ или $D(f) = \mathbb{C} \setminus \{-2 + 5i\}$; 1.7. $z = x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$;
1.8. $z \neq 2i$, $z \neq 3i$ или $D(f) = \mathbb{C} \setminus \{2i; 3i\}$. *Указание:* решите квадратное уравнение $z^2 - 5iz - 6 = 0$ и разложите квадратный трехчлен $z^2 - 5iz - 6$ на множители.

Функция комплексного переменного часто оказывается многозначной. Например для всех $z \neq 0$ функция $f(z) = \sqrt[n]{z}$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geq 2)$ принимает ровно n различных комплексных значений. Если $z = re^{i\varphi}$, $r > 0$, $\varphi \in [-\pi, \pi)$, то

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}}, \tag{1.1}$$

где $k = 0, 1, 2, ..., n-1$. Если зафиксировать некоторое значение k, то получится однозначная функция.

Пример 1.5. Найдем вещественную и мнимую части функции $f(z) = \sqrt{z}$. Пусть $z = x + iy$, $\sqrt{z} = u + iv$, $x, y, u, v \in \mathbb{R}$. Тогда по определению корня $(u+iv)^2 = x+iy$, т. е. $(u^2-v^2)+i2uv = x+iy \Longleftrightarrow \begin{cases} u^2-v^2=x, \\ 2uv=y. \end{cases}$

Из второго уравнения системы $v = \dfrac{y}{2u}$ и, подставляя в первое уравнение, получаем $u^2 - \left(\dfrac{y}{2u}\right)^2 = x$; $u^2 - \dfrac{y^2}{4u^2} = x$; $4u^4 - 4u^2x - y^2 = 0$. Это квадратное уравнение относительно переменной u^2. Решая его, получаем $\left[\begin{array}{l} u^2 = \dfrac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}, \\ u^2 = \dfrac{x-\sqrt{x^2+y^2}}{2} \end{array}\right.$. Второе выражение всегда неположительно, и, поскольку $u \in \mathbb{R}$, соответствующее уравнение решений не имеет. Из первого уравнения $u = \pm\sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}$, поэтому $v = \dfrac{y}{2u} = \pm\dfrac{y}{2\sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}} =$

$$= \pm\frac{y\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}}{2\sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}\,\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}\,\frac{y}{|y|}.$$

Таким образом, для всех $z \neq 0$ функция $f(z)$ принимает два значения

$$f(z) = \pm\left(\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}} + \frac{iy}{|y|}\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}\right). \qquad (1.2)$$

Упражнения. Вычислите $\sqrt{z}$, где $z = 4-3i$ по формуле:
1.9. (1.1); 1.10. (1.2).

Ответы: 1.9. $\sqrt{z} = 5e^{i\frac{2\pi k - \operatorname{arctg} 3/4}{2}}$, где $k=0$ или $k=1$, т. е. $\sqrt{z} = 5e^{-\frac{i \operatorname{arctg} 3/4}{2}}$ или $\sqrt{z} = 5e^{i\left(\frac{\pi - \operatorname{arctg} 3/4}{2}\right)}$; 1.10. $\sqrt{z} = \pm\left(\sqrt{\dfrac{9}{2}} - i\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right) = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(3-i)$.

1.2. Некоторые элементарные функции комплексного переменного

Определим некоторые функции комплексного переменного, которые часто будем использовать в дальнейшем. Пусть $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

1. $e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$ – комплексная экспонента. Для функции e^z выполнены следующие свойства:

   1) $|e^z| = e^x$;

   2) $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$; $e^{z_1} : e^{z_2} = e^{z_1-z_2}$;

   3) $e^{z+2\pi ki} = e^z$ для любого $k \in \mathbb{Z}$.

2. $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$ – комплексный косинус (см. упр.).

3. $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$ – комплексный синус (см. упр.).

4. Если $\cos z \neq 0$, то можно определить $\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$ – комплексный тангенс.

5. Если $z \neq 0$, то можно определить $\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i(\arg z + 2\pi k)$, где $k \in \mathbb{Z}$, – комплексный логарифм. Функция Ln является многозначной, но если зафиксировать некоторое $k \in \mathbb{Z}$, то получится однозначная функция.

   Положим $k = 0$. Тогда функция $\ln z = \ln |z| + i \arg z$ определена для всех $z \neq 0$, $\arg z \in [-\pi; \pi)$, и является однозначной функцией. Эта функция называется *главным значением* комплексного логарифма.

6. $z^a = e^{a \ln z}$, где $a \in \mathbb{R}$, $a \notin \mathbb{Z}$, – степенная функция. Она определена для всех $z \neq 0$, $\arg z \in [-\pi; \pi)$.

Упражнения.

Вычислите: 1.11. $\cos(2i)$; 1.12. $\sin(\pi/2 + 3i)$; 1.13. $\sin(iy)$, $y \in \mathbb{R}$; 1.14. $\ln(3 - 4i)$; 1.15. $\ln(-5)$.

Решите уравнения: 1.16. $e^z = 1$; 1.17. $\cos z = 0$; 1.18. $\sin z = 0$.

1.19. Докажите, что $e^{\operatorname{Ln} z} = z$ для любого $z \neq 0$.

Докажите формулы: 1.20. $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$; 1.21. $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$; 1.22. $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$; 1.23. $\cos z = \sin(\pi/2 - z)$.

Ответы: 1.11. $\operatorname{ch}(2)$; 1.12. $\operatorname{ch}(3)$; 1.13. $i\operatorname{sh}(y)$; 1.14. $\ln 5 - i \operatorname{arctg} 4/3$; 1.15. $\ln 5 - \pi i$; 1.16. $z = 2\pi ki$, $k \in \mathbb{Z}$; 1.17. $z = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 1.18. $z = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

1.3. Предел и непрерывность функции комплексного переменного

Определение 1.1. *Пусть* $f : X \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ *– предельная точка множества* X*. Тогда комплексное число* c *называется пределом функции* f *в точке* z_0*, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta > 0$*, что* $f(z) \in K_\varepsilon(c)$ *для всех* $z \in \overset{\circ}{K}_\delta(z_0) \cap X$*, или иначе* $|f(z) - c| < \varepsilon$ *для всех* $z \in X$, $0 < |z - z_0| < \delta$*. Для обозначения предела используется запись* $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = c$*.*

Утверждение 1.1. *Пусть* $f : X \to \mathbb{C}$ *и* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$*, где* $z = x + iy$*, и* $z_0 = x_0 + iy_0$ *– предельная точка множества* X, $c = a + bi$*. Тогда*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = c \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) = a, \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y) = b. \end{cases}$$

Определение 1.2. *Пусть* $f : X \to \mathbb{C}$*. Функция* f *называется непрерывной в точке* $z_0 \in X$*, если* $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$*. Если* f *непрерывна в каждой точке множества* X*, то* f *называется непрерывной на* X*.*

Для непрерывной функции комплексного переменного справедливы теоремы об арифметических действиях и суперпозиции непрерывных функций, аналогичные соответствующим теоремам для непрерывных функций вещественной переменной.

Пример 1.6. Докажите, что функция $f(z) = |2z + 3 - 5i|$ непрерывна на $\mathbb{C}$.

Необходимо доказать, что для любого $z_0 \in \mathbb{C}$ $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$. Обозначим $z = z_0 + \Delta z$, тогда $z \to z_0$ равносильно $\Delta z \to 0$. Теперь

$$|f(z) - f(z_0)| = |f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)| = \Big||2(z_0 + \Delta z) + 3 - 5i| - |2z_0 + 3 - 5i|\Big| \le$$

$$\le \Big|(2(z_0 + \Delta z) + 3 - 5i) - (2z_0 + 3 - 5i)\Big| = 2|\Delta z|.$$

Другими словами, для любого $\varepsilon > 0$ если $0 < |\Delta z| = |z - z_0| < \varepsilon/2$, то $|f(z) - f(z_0)| \le\le 2|\Delta z| < 2 \cdot \varepsilon/2 = \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Пример 1.7. Докажите, что функция $f(z) = e^z$ непрерывна на $\mathbb{C}$.

Поскольку $f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$, а функции $e^x \cos y$ и $e^x \sin y$ непрерывны на $\mathbb{R}^2$, из утверждения 1.1 следует, что $f(z)$ непрерывна на $\mathbb{C}$.

Упражнения.

Докажите, что функция $f(z)$ непрерывна на $\mathbb{C}$:

1.24. $f(z) = 2z + 3\bar{z}$;
1.25. $f(z) = 2z^2 + 3z - \bar{z}$;
1.26. $f(z) = z^5(2z + 3 - 4i)$;
1.27. $f(z) = |(3 + 2i)z - (5 + 7i)|$;
1.28. $f(z) = \bar{z} \cdot e^{iz}$.

Укажите множество, на котором непрерывна функция $f(z)$:

1.29. $f(z) = \dfrac{2 + 3iz}{z - 2i}$; 1.30. $f(z) = \dfrac{e^{\bar{z}}}{z^2 + 4}$; 1.31. $f(z) = \operatorname{tg} z$.

Ответы: 1.29. $\mathbb{C} \setminus \{2i\}$; 1.30. $\mathbb{C} \setminus \{\pm 2i\}$; 1.31. $\mathbb{C} \setminus \{\pi/2 + \pi k\}$, $k \in \mathbb{Z}$, см. упражнение 1.17.

1.4. Дифференцируемость функции комплексного переменного. Условия Коши–Римана

Рассмотрим функцию $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ – область. Пусть $z_0 \in D$, тогда по определению области точка z_0 является внутренней и, следовательно, предельной точкой области D.

Определение 1.3. *Функция комплексной переменной f называется дифференцируемой в точке $z_0 \in D$, если существует такое число $c \in \mathbb{C}$, что*

$$f(z) = f(z_0) + c(z - z_0) + o(|z - z_0|).$$

Определение 1.4. *Если существует $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$, то этот предел называется производной функции f в точке z_0 и обозначается $f'(z_0)$ или $\dfrac{df}{dz}(z_0)$.*

Теорема 1.1. *Функция f дифференцируема в точке z_0 тогда и только тогда, когда существует $f'(z_0)$. При этом справедлива формула Тейлора первого порядка, а именно*

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|).$$

Пусть $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Запишем функцию f в виде $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где u и v — функции двух вещественных переменных (см. утверждение 1.1).

Теорема 1.2. *Функция $f(z)$ дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ тогда и только тогда, когда функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы* *в точке (x_0, y_0) и выполнены условия Коши–Римана:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) &= \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) &= -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{cases}$$

Кроме того, если f дифференцируема в точке z_0, то $f'(z_0) = a + bi$, где

$$a = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0); \qquad b = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Для функций комплексной переменной справедливы правила дифференцирования суммы, произведения, частного, суперпозиции и обратной функции, аналогичные правилам для функций вещественной переменной.

Определение 1.5. *Если функция комплексного переменного f дифференцируема в каждой точке области D, то она называется аналитической в области D.*

Определение 1.6. *Если функция f аналитична в некоторой окрестности точки $z_0 \in D$, то говорят, что функция f аналитична в точке z_0.*

Пусть функция $f = u + iv$ аналитична в области D. Тогда ее вещественная и мнимая части являются *гармоническими* функциями, т.е. удовлетворяют уравнению Лапласа в области D. А именно,

$$\Delta u = 0; \qquad \Delta v = 0,$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа. Однако функция $f = u + iv$, где u и v – произвольные гармонические функции на D, не всегда является аналитической. Она будет аналитической функцией только, если функции u и v удовлетворяют условиям Коши–Римана.

Теорема 1.3. *Пусть D – односвязная область, функция $u(x, y)$ – гармоническая в D. Тогда существует единственная (с точностью до произвольной постоянной) функция $v(x, y)$, такая, что функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитическая в D. При этом функцию v можно найти по формуле*

$$v(x, y) = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right), \tag{1.3}$$

где интеграл берется вдоль любой кусочно-гладкой кривой, целиком лежащей в D и соединяющей точки $(x_0, y_0) \in D$ и $(x, y) \in D$.

Другими словами, аналитическая функция однозначно (с точностью до произвольной постоянной) восстанавливается по своей вещественной части. Аналогичная теорема справедлива и для мнимой части, причем

$$u(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \left(\frac{\partial v}{\partial y} dx - \frac{\partial v}{\partial x} dy \right).$$

Пример 1.8. Функция $f(z) = e^z$ аналитична на $\mathbb{C}$.

Проверим, что для функции $e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$ выполнены условия Коши–Римана:

$$\frac{\partial(e^x \cos y)}{\partial x} = \frac{\partial(e^x \sin y)}{\partial y} = e^x \cos y; \qquad \frac{\partial(e^x \cos y)}{\partial y} = -\frac{\partial(e^x \sin y)}{\partial x} = -e^x \sin y$$

для любой точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Кроме того, $(e^z)' = \dfrac{\partial(e^x \cos y)}{\partial x} + i\dfrac{\partial(e^x \sin y)}{\partial x} =$ $= e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z$.

Пример 1.9. Функция $f(z) = \ln z$ аналитична в области $\mathrm{D} = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0, \arg z \neq -\pi\}$.

Функция $\ln z$ является обратной к функции e^z (см. упр. 1.19). Поскольку функция e^z аналитическая на $\mathbb{C}$, по теореме о дифференцировании обратной функции функция $\ln z$ дифференцируема в каждой предельной точке своей области определения и

$$(\ln z)' = \frac{1}{(e^w)\big|_{w=\ln z}} = \frac{1}{e^{\ln z}} = \frac{1}{z}.$$

Пример 1.10. Функция $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, аналитична на $\mathbb{C}$.

Достаточно доказать аналитичность функции z, так как при $n \geq 2$ функция z^n является произведением конечного числа аналитических функций.

Для функции $f(z) = z$ проверим условия Коши–Римана: $z = x + iy$, поэтому $\dfrac{\partial x}{\partial x} = \dfrac{\partial y}{\partial y} = 1$ и $\dfrac{\partial y}{\partial x} = -\dfrac{\partial x}{\partial y} = 0$. Таким образом, функция z аналитична на $\mathbb{C}$ и $z' = 1$. По индукции можно доказать, что $(z^n)' = nz^{n-1}$.

Пример 1.11. Функция $f(z) = \bar{z}$ не является аналитической ни в одной точке.

Действительно, $\bar{z} = x - iy$ и $1 = \dfrac{\partial x}{\partial x} \neq \dfrac{\partial(-y)}{\partial y} = -1$ для любых (x, y), т.е. условия Коши–Римана не выполнены. Следовательно, функция $\bar{z}$ не аналитическая.

Пример 1.12. Восстановите аналитическую на $\mathbb{C}$ функцию по ее вещественной части $u(x,y)=x^2-y^2$.

Прежде всего проверим, что $\Delta u = 0$ в $\mathbb{C}$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2-2=0.$$

Возьмем $(x_0;y_0)=(0;0)$, тогда по формуле (1.3)

$$v(x,y)=\int\limits_{(0;0)}^{(x,y)}(2y\ dx+2x\ dy)=\int\limits_0^x(2\cdot 0+2x\cdot 0)dx+\int\limits_0^y(2y\cdot 0+2x\cdot 1)dy=$$

$$=\int\limits_0^y 2x\ dy=2xy+C.$$

Следовательно, $f(z)=(x^2-y^2)+i(2xy+C)=z^2+iC$ является искомой аналитической на $\mathbb{C}$ функцией.

Упражнения. Докажите, что функция $f(z)$ аналитична на области D. Найдите $f'(z)$:

1.32. $f(z)=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$ (функция Жуковского); $D=\{z\in\mathbb{C} : |z|<1,$ $z\neq 0\}$;

1.33. $f(z)=z^{-n}$, $n\in\mathbb{N}$; $D=\mathbb{C}\setminus\{0\}$;

1.34. $f(z)=\cos z$; $D=\mathbb{C}$;

1.35. $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$, $a,b,c,d\in\mathbb{C}$, $ad-bc\neq 0$ (дробно-линейная функция); $D=\{z\in\mathbb{C}\ :\ cz+d\neq 0\}$;

1.36. $f(z)=z^a$, $a\in\mathbb{R}$, $a\notin\mathbb{Z}$; $D=\{z\in\mathbb{C}\ :\ z\neq 0, \arg z\neq -\pi\}$.

Выясните, является ли функция $f(z)$ аналитической в точке z_0:

1.37. $f(z)=|z|$, $z_0=0$;

1.38. $f(z)=|z|$, $z_0\neq 0$;

1.39. $f(z)=\ln z$, $z_0=-3$;

1.40. $f(z)=\ln(2z+i)$, $z_0=1$.

Восстановите аналитическую на $\mathbb{C}$ функцию по ее вещественной части $u(x,y)$:

1.41. $u(x,y)=x^2-y^2+2x$;

1.42. $u(x,y)=x^2-y^2-xy$.

Восстановите аналитическую на $\mathbb{C}$ функцию по ее мнимой части $v(x,y)$:

1.43. $v(x,y)=x$;

1.44. $v(x,y)=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

Ответы: 1.32. $f'(z) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{z^2}\right)$; 1.33. $f'(z) = -nz^{-n-1}$; 1.34. $f'(z) = -\sin z$; 1.35. $f'(z) = \dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2}$; 1.36. $f'(z) = az^{a-1}$; 1.37. нет; 1.38. нет; 1.39. нет; 1.40. да; 1.41. z^2+2z+C; 1.42. $(1+i/2)z^2+C$; 1.43. $iz+C$; 1.44. $1/z+C$.

1.5. Интеграл от функции комплексного переменного

Пусть на комплексной плоскости задана гладкая или кусочно-гладкая кривая γ и функция комплексного переменного $f:\gamma\to\mathbb{C}$, $f(z)=u(x,y)+$ $+iv(x,y)$. Рассмотрим интеграл от функции комплексного переменного:

$$\int\limits_\gamma f(z)dz = \int\limits_\gamma \big(u(x,y)+iv(x,y)\big)d(x+iy) = \int\limits_\gamma \big(u(x,y)+iv(x,y)\big)(dx+idy) =$$

$$= \int\limits_\gamma \big(u(x,y)dx - v(x,y)dy\big) + i\int\limits_\gamma \big(v(x,y)dx + u(x,y)dy\big).$$

Таким образом, если существуют криволинейные интегралы $\int\limits_\gamma u\,dx - v\,dy$ и $\int\limits_\gamma v\,dx + u\,dy$, то существует интеграл функции f по кривой γ, который вычисляется по формуле

$$\int\limits_\gamma f(z)dz = \int\limits_\gamma \big(u(x,y)dx - v(x,y)dy\big) + i\int\limits_\gamma \big(v(x,y)dx + u(x,y)dy\big).$$

Заметим, что из этой формулы следуют основные свойства интеграла от функции комплексного переменного:

1) если функция $f(z)$ непрерывна на γ и γ – кусочно-гладкая кривая, то интеграл $\int\limits_\gamma f(z)dz$ существует;

2) при смене направления обхода кривой интеграл меняет знак;

3) справедлива формула замены переменной, аналогичная случаю функции вещественной переменной;

4) для любых $a,b\in\mathbb{C}$ и интегрируемых по γ функций $f(z)$ и $g(z)$

$$\int\limits_\gamma (af(z)+bg(z))dz = a\int\limits_\gamma f(z)dz + b\int\limits_\gamma g(z)dz;$$

5) если кривая γ разбивается на две кривые γ_1 и γ_2 без общих внутренних точек и функция $f(z)$ интегрируема по γ, то функция $f(z)$ интегрируема по γ_1 и γ_2 и

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)dz + \int\limits_{\gamma_2} f(z)dz;$$

6) если гладкая кривая γ задана параметрически $z = z(t)$, $t \in [t_1; t_2]$, то

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(z(t))z'(t)dt.$$

Пример 1.13. Вычислить интеграл $\int\limits_{\gamma}(2\bar{z}-3z+5i)dz$, где γ – отрезок, соединяющий точки $a = i$ и $b = 2 - i$.

Зададим этот отрезок в параметрической форме: $z(t) = t + i(1 - t)$, $t \in [0; 2]$. Тогда, пользуясь свойством 6, имеем $z'(t) = 1 - i$ и

$$\int\limits_{\gamma}(2\bar{z} - 3z + 5i)dz = \int\limits_{0}^{2}\big(2(t - i(1 - t)) - 3(t + i(1 - t)) + 5i\big)(1 - i)dt =$$

$$= (-1 + 5i)(1 - i)\int\limits_{0}^{2} t\,dt = 8 + 12i.$$

Пример 1.14. Вычислить интеграл $\int\limits_{\gamma}\frac{dz}{z - z_0}$, где γ – окружность $|z - z_0| = r$.

Параметрическое уравнение окружности $|z - z_0| = r$ можно записать в виде $z = z_0 + re^{it}$, $t \in [0; 2\pi]$. Тогда $z'(t) = ire^{it}$ и

$$\int\limits_{\gamma}\frac{dz}{z - z_0} = \int\limits_{0}^{2\pi}\frac{ire^{it}dt}{re^{it}} = i\int\limits_{0}^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Пример 1.15. Вычислить интеграл $\int\limits_{\gamma}\ln z\,dz$, где γ – дуга окружности $|z| = 1$, лежащая в первой четверти, обход контура против часовой стрелки.

Параметрическое уравнение кривой γ можно записать в виде $z = e^{it}$, $t \in [0; \pi/2]$, при этом $\arg z = t$. Тогда $\ln z = \ln|z| + i\arg z = it$ и

$$\int\limits_{\gamma} \ln z\, dz = \int\limits_{0}^{\pi/2} it \cdot ie^{it} dt = -\int\limits_{0}^{\pi/2} te^{it} dt = 1 - \pi/2 - i.$$

Упражнения. Вычислите интегралы:

1.45. $\int\limits_{\gamma}(2z^2 - \bar{z} + 3i - 1)dz$, где γ – отрезок, соединяющий точки $a = 1$ и $b = i$;

1.46. $\int\limits_{\gamma} \frac{2\bar{z} + i}{z} dz$, где γ – отрезок, соединяющий точки $a = 1 + i$ и $b = 2 + 2i$;

1.47. $\int\limits_{\gamma} \left(z + \frac{1}{z}\right) dz$, где γ – окружность $|z| = 3$;

1.48. $\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{2z - 1 - i}$, где γ – треугольник с вершинами в точках $a = 0$, $b = i$ и $c = 1$ (обход контура против часовой стрелки);

1.49. $\int\limits_{\gamma}(z - z_0)^m dz$, где γ – окружность $|z - z_0| = r$; $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq -1$.

Ответы: 1.45. $-\frac{8}{3} - \frac{17}{3}i$; 1.46. $2 + i(\ln 2 - 2)$; 1.47. $2\pi i$; 1.48. πi; 1.49. 0.

1.6. Теоремы Коши. Интегральная формула Коши

Теорема 1.4 (теорема Коши для односвязной области). *Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной ограниченной области D и имеет непрерывную производную $f'(z)$, то для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой γ, целиком лежащей в D, справедливо равенство*

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Если функция f удовлетворяет условиям теоремы и, кроме того, непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$ и граница области ∂D – кусочно-гладкая кривая, то теорема Коши справедлива для $\gamma = \partial D$, т.е.

$$\oint\limits_{\partial D} f(z)dz = 0.$$

Также из теоремы Коши получаем

Следствие 1.1. *Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной ограниченной области D, то для любых точек $a, b \in D$ интеграл $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 0$ не зависит от кусочно-гладкой кривой γ, соединяющей точки a и b и целиком лежащей в D.*

Теорема 1.5 (теорема Коши для многосвязной области). *Пусть D – $(m+1)$-связная ограниченная область, граница ∂D которой представляет собой совокупность попарно непересекающихся кусочно-гладких замкнутых кривых γ_0, $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$, где $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ лежат внутри области, ограниченной кривой γ_0. Если функция f аналитична в области D и непрерывна в $\overline{D}$, то*

$$\int\limits_{\partial D} f(z)dz = \oint\limits_{\gamma_0^+} f(z)dz + \sum_{k=1}^{m} \oint\limits_{\gamma_k^-} f(z)dz = \oint\limits_{\gamma_0^+} f(z)dz - \sum_{k=1}^{m} \oint\limits_{\gamma_k^+} f(z)dz = 0.$$

Здесь γ^+ означает, что кривая γ обходится так, что ограниченная ею область остается справа по направлению обхода, а γ^- – слева.

Пример 1.16. Вычислить интеграл $\int\limits_{\gamma} e^z dz$, где γ – произвольная кусочно-гладкая замкнутая кривая.

Известно (см. пример 1.8), что функция e^z аналитична на всей комплексной плоскости, поэтому по теореме Коши $\int\limits_{\gamma} e^z dz = 0$.

Пример 1.17. Вычислить интеграл $\int\limits_{\gamma} \dfrac{dz}{z-1-i}$, где γ – произвольная кусочно-гладкая кривая, соединяющая точки $a = 1$ и $b = 1+2i$ и не проходящая через точку $1+i$.

Функция $\dfrac{1}{z-1-i}$ аналитична на $\mathbb{C} \setminus \{1+i\}$. Значит, по следствию из теоремы Коши значение интеграла не зависит от выбора кривой γ. Возьмем в качестве γ дугу окружности $|z-1-i| = 1$, или в параметрической форме

$z(t) = 1 + i + e^{it}$. Заметим, что $z(-\pi/2) = a$ и $z(\pi/2) = b$. Тогда

$$\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z - 1 - i} = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{ie^{it}dt}{e^{it}} = i \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} dt = \pi i.$$

Теорема 1.6 (интегральная формула Коши). *Если функция f аналитична в односвязной области D с границей ∂D и непрерывна в $\overline{D}$, то для любого $z_0 \in D$*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial D^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Теорема 1.7. *Функция f, аналитичная в области D, имеет в любой точке области производные любого порядка. При этом для любого $z_0 \in D$*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \tag{1.4}$$

где γ – любая замкнутая кусочно-гладкая кривая, целиком лежащая в D и охватывающая точку z_0.

Пример 1.18. Вычислить $\displaystyle\int\limits_{|z|=1/2} \frac{\cos z\, dz}{z - i}$.

Функция $\dfrac{\cos z}{z - i}$ аналитическая в круге $|z| < 1/2$, поскольку это отношение двух аналитических функций и знаменатель не обращается в нуль в области. Поэтому по теореме 1.4 Коши $\displaystyle\int\limits_{|z|=1/2} \frac{\cos z\, dz}{z - i} = 0$.

Пример 1.19. Вычислить $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{\cos z\, dz}{z - i}$.

Функция $\cos z$ аналитическая в круге $|z| < 2$, точка $z_0 = i$ находится внутри области. Тогда по интегральной формуле Коши (теорема 1.6) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{\cos z\, dz}{z - i} = 2\pi i \cos(i) = 2\pi i \operatorname{ch}(1)$.

Пример 1.20. Вычислить $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=2/3} \frac{e^z dz}{z^2 + 1}$.

Функция $f(z)=\dfrac{e^z}{z+i}$ аналитическая в круге $|z-i|<2/3$, поскольку это отношение двух аналитических функций и знаменатель не обращается в нуль в области. Тогда по интегральной формуле Коши (теорема 1.6)

$$\int\limits_{|z-i|=2/3}\frac{e^z dz}{z^2+1}=\int\limits_{|z-i|=2/3}\frac{e^z dz}{(z+i)(z-i)}=$$

$$=\int\limits_{|z-i|=2/3}\frac{f(z)dz}{z-i}=2\pi i f(i)=\pi e^i=\pi\cos 1+i\pi\sin 1.$$

Пример 1.21. Вычислить $\displaystyle\int\limits_{|z-2|=3}\frac{e^z dz}{z^2(z+5i)}$.

Функция $f(z)=\dfrac{e^z}{z+5i}$ аналитическая в круге $|z-2|<3$, поскольку это отношение двух аналитических функций и знаменатель не обращается в нуль в области. Тогда по формуле (1.4)

$$\int\limits_{|z-2|=3}\frac{e^z dz}{z^2(z+5i)}=\int\limits_{|z-2|=3}\frac{f(z)dz}{z^2}=\frac{2\pi i}{1!}f'(0)=$$

$$=2\pi i\cdot\left.\frac{e^z(z-1+5i)}{(z+5i)^2}\right|_{z=0}=\frac{-10\pi-2\pi i}{25}=-\frac{2\pi}{5}-\frac{2\pi}{25}i.$$

Упражнения. Вычислить:

1.50. $\displaystyle\int\limits_{|z|=3}\frac{\cos z}{(z^2+16)(z^2-25)}dz;$

1.51. $\displaystyle\int\limits_{|z+2-4i|=3}\frac{\cos z}{(z^2+16)(z^2-25)}dz;$

1.52. $\displaystyle\int\limits_{|z-3|=3}\frac{\cos z}{(z^2+16)(z^2-25)}dz;$

1.53. $\displaystyle\int\limits_{|z-2-2i|=1}\frac{\ln z}{z^2-4z+8}dz;$ 1.54. $\displaystyle\int\limits_{|z+2-3i|=3}\frac{z^2+1}{z^3+4z}dz;$

1.55. $\displaystyle\int\limits_{|z+2|=2}\frac{z-1}{(z+1)^3}dz$ 1.56. $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=1}\frac{\sin\pi z}{(z+1)^2}dz;$

1.57. $\displaystyle\int\limits_{|z+i|=2}\frac{e^{2z+3}}{z^5}dz;$ 1.58. $\displaystyle\int\limits_{|z-3i|=2}\frac{\ln z}{z(z-2i)^2}dz;$

1.59. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3(z-1)}dz.$

Ответы: 1.50. 0; 1.51. $-\dfrac{\pi \operatorname{ch}(4)}{164}$; 1.52. $\dfrac{\pi i \cos 5}{205}$; 1.53. $\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{3}{2}\ln 2+\dfrac{\pi i}{4}\right)$; 1.54. $-\dfrac{3\pi i}{4}$; 1.55. 0; 1.56. 0; 1.57. $\dfrac{4\pi i e^3}{3}$; 1.58. $\dfrac{\pi i(\ln 2-1+\pi i/2)}{2}$; 1.59. $-\dfrac{\pi i}{2e}$.

Указание: построить непересекающиеся контуры γ_1 и γ_2, включающие в себя точки $z=-1$ и $z=1$ соответственно и лежащие внутри окружности $|z|=2$. Тогда $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)dz + \int\limits_{\gamma_2} f(z)dz.$

1.7. Степенные комплексные ряды. Ряд Тейлора

Определение 1.7. *Пусть* $\{c_n\}$, $c_n \in \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$. *Функциональный ряд вида* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, *где* $z \in \mathbb{C}$, *называется степенным рядом по степеням* $z-z_0$.

Обозначим $M = \{\rho \ : \ \rho = |z-z_0|, \text{ в точке } z_0 \text{ ряд сходится}\}$. Если M – ограниченное множество, то обозначим через R его точную верхнюю границу ($R = \sup M$). Если $R > 0$, то наибольшей областью сходимости данного ряда является круг $|z-z_0| < R$ (круг сходимости). Всюду вне этого круга ряд расходится.

Степенной ряд внутри круга сходимости можно почленно интегрировать и дифференцировать любое число раз, причем радиус сходимости полученных рядов равен радиусу сходимости исходного ряда.

Теорема 1.8 (Коши–Адамар). *Если существует предел последовательности* $\{\sqrt[n]{|c_n|}\}$ *и* $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$, *то радиус сходимости степенного ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ *равен* $R = \dfrac{1}{l}$.

Определение 1.8. *Если сходится степенной ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, $z_0 \in D$, *и для любого* $z \in D$ *выполнено равенство* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, *то говорят, что функция* f *в области* D *раскладывается в степенной ряд по степеням* $(z-z_0)$.

Для любой аналитической в точке z_0 функции f можно рассмотреть степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$, который называется *рядом Тейлора* функции f по степеням $(z - z_0)$.

Теорема 1.9. *Если функция f аналитична в области D, то для любого $z_0 \in D$ существует окрестность, в которой f представима степенным рядом $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$. При этом для коэффициентов ряда справедливо равенство $c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.*

Ряды Тейлора для основных функций комплексной переменной:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad R = +\infty;$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad R = +\infty; \tag{1.5}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad R = +\infty; \tag{1.6}$$

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \qquad R = 1. \tag{1.7}$$

Пример 1.22. Разложить в ряд Тейлора функцию $\cos^2 z$ по степеням z.

Известно (см. упр. 1.21), что $\cos^2 z = \dfrac{1 + \cos 2z}{2}$, поэтому по формуле (1.5)

$$\cos^2 z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2z)^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

Упражнения.

Найти круг сходимости следующих рядов:

1.60. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(z - 2 + 3i)^{2n+1}}{n!}$; 1.61. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n + i)(z - i)^n$;

1.62. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{in}(z - 1 + i)^n$; 1.63. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z - 2i)^{2n}}{(3 + 4i)^{n-1}}$.

Разложите функцию $f(z)$ в ряд Тейлора по степеням $(z - z_0)$. Найдите радиус сходимости:

1.64. $f(z) = e^{2z+\pi i}$, $z_0 = 0$; 1.65. $f(z) = e^z$, $z_0 = i$;

1.66. $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z+1}$, $z_0=0$; 1.67. $f(z)=\dfrac{2z+3}{z-i}$, $z_0=2i$;

1.68. $f(z)=\dfrac{1}{(1+z)^2}$, $z_0=0$; 1.69. $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z-2)}$, $z_0=0$;

1.70. $f(z)=\dfrac{1}{z^2+2iz+2}$, $z_0=-i$.

Ответы: 1.60. $z\in\mathbb{C}$; 1.61. $|z-i|<1$; 1.62. $|z-1+i|<1$;
1.63. $|z-2i|<\sqrt{5}$. 1.64. $e^{2z+\pi i}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n\cdot z^n}{n!}$, $R=+\infty$;

1.65. $e^z=(\cos 1+i\sin 1)\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-i)^n}{n!}$, $R=+\infty$;

1.66. $\dfrac{z^2+1}{z+1}=z-1+\dfrac{2}{z+1}=z-1+2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$, $R=1$;

1.67. $2+(2-3i)\sum\limits_{n=0}^{\infty}i^n(z-2i)^n$, $R=1$. *Указание:* $\dfrac{2z+3}{z-i}=2+\dfrac{3+2i}{z-i}=$
$=2+\dfrac{3+2i}{(z-2i)+i}=2+(2-3i)\cdot\dfrac{1}{\left(\dfrac{z-2i}{i}\right)+1}$;

1.68. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^n$, $R=1$. *Указание:* продифференцируйте ряд Тейлора функции $\dfrac{1}{z+1}$;

1.69. $\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left((-1)^{n+1}-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)z^n$, $R=1$. *Указание:* разложите функцию f в сумму простейших дробей;

1.70. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z+i)^{2n}$, $R=\sqrt{3}$. *Указание:* $\dfrac{1}{z^2+2iz+2}=\dfrac{1}{(z+i)^2+3}=$
$=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{\left(\dfrac{z+i}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$.

1.8. Ряд Лорана

Рассмотрим функциональный ряд $\sum\limits_{n=-1}^{-\infty}c_n(z-z_0)^n$, каждый член которого определен при $z\neq z_0$. Делая замену $z-z_0=\dfrac{1}{\zeta}$, получим степенной ряд по степеням ζ, который сходится при $|\zeta|=\dfrac{1}{|z-z_0|}<r^*$, т.е. при $|z-z_0|>\dfrac{1}{r^*}=r$.

Рассмотрим функциональный ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n. \qquad (1.8)$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=-1}^{-\infty} c_n(z-z_0)^n = s_1(z)$ сходится при $|z-z_0| > r$ и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = s_2(z)$ сходится при $|z-z_0| < R$, то ряд (1.8) сходится в кольце $K = \{z \ : \ r < |z-z_0| < R\}$ и его сумма $s(z) = s_1(z) + s_2(z)$ есть аналитическая функция в кольце K. При этом возможно, что $r = 0$ или $R = \infty$.

Теорема 1.10 (Лорана). *Функция $f(z)$, аналитическая в кольце $K = \{z : r < |z-z_0| < R\}$, в каждой точке $z \in K$ представляется в виде суммы ряда*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \qquad (1.9)$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma^+} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{Z}, \qquad (1.10)$$

причем кусочно-гладкая кривая $\gamma \in K$ замкнута и круг $\{z \ : \ |z-z_0| \le r\}$ расположен внутри кривой γ.

Определение 1.9. *Ряд* (1.9), *где коэффициенты c_n вычисляются по формуле* (1.10), *называется рядом Лорана аналитической в кольце K функции f. Ряд $\sum\limits_{n=-1}^{-\infty} c_n(z-z_0)^n$ называется главной частью, а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ – регулярной (или правильной) частью ряда Лорана.*

Пример 1.23. Разложить в ряд Лорана в кольце $K = \{z \ : \ |z| > 0\}$ функцию $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^3}$.

Функция f аналитична в K, поэтому ряд Лорана существует. Центром кольца K является точка $z_0 = 0$, поэтому необходимо найти разложение вида (1.9) по степеням z. Коэффициенты c_n можно найти по формуле (1.10), но можно действовать иначе, используя формулу (1.6). Разложим функцию $\sin z$ в ряд Тейлора по степеням z. Тогда

$$\frac{\sin z}{z^3} = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}}{z^3} =$$

$$= \frac{z + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}}{z^3} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n-2}}{(2n+1)!} = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} z^{2k}}{(2k+3)!}.$$

Пример 1.24. Разложить в ряд Лорана в кольце $K = \{z : 1 < |z| < 2\}$ функцию $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$.

Функция f аналитична в K, поэтому ряд Лорана существует. Центром кольца K является точка $z_0 = 0$, поэтому необходимо найти разложение вида (1.9) по степеням z. Поскольку $f(z) = \dfrac{1}{z-2} - \dfrac{1}{z-1}$, достаточно найти ряд Лорана для каждой из этих функций. Используя разложение (1.7), имеем

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n;$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^{n+1},$$

поэтому

$$f(z) = -\sum_{k=-1}^{-\infty} z^k - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2^k}.$$

Упражнения. Разложите функцию $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$ в ряд Лорана в кольце:

1.71. $0 < |z| < 2$; 1.72. $2 < |z| < 3$; 1.73. $|z| > 3$; 1.74. $\sqrt{5} < |z - i| < \sqrt{10}$. 1.75. Разложите функцию $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^5}$ в ряд Лорана в кольце $|z| > 0$. 1.76. Разложите функцию $f(z) = z^3 e^{1/z}$ в ряд Лорана в кольце $|z| > 0$. 1.77. Разложите функцию $f(z) = \dfrac{1}{(z^2-1)^2}$ в ряд Лорана в кольце $0 < |z| < 2$.

Ответы: 1.71. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2^{n+1}} - \dfrac{1}{3^{n+1}}\right) z^n$; 1.72. $-\sum\limits_{n=1}^{-\infty} \dfrac{2^{n-1}}{z^n} - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{3^{n+1}}$;
1.73. $\sum\limits_{n=1}^{-\infty} \dfrac{3^{n-1} - 2^{n-1}}{z^n}$; 1.74. $-\dfrac{2+i}{5} \sum\limits_{n=1}^{-\infty} \dfrac{(2-i)^{n-1}}{(z-i)^n} - \dfrac{3+i}{10} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z-i)^n}{(3-i)^n}$;
1.75. $f(z) = \dfrac{1}{z^5} - \dfrac{1}{2z^3} + \dfrac{1}{24z} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{2^{n+3} z^{2n+1}}{(n+3)!}$;
1.76. $f(z) = z^3 + z^2 + \dfrac{z}{2} + \dfrac{1}{6} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^{-n}}{(n+3)!}$;

1.77. $f(z)=\sum\limits_{n=-2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n+3}{2^{n+4}}(z-1)^n$. *Указание:* $f(z)=\dfrac{1}{4(z-1)^2}-\dfrac{1}{4(z-1)}+$ $+\dfrac{1}{4(z+1)}+\dfrac{1}{4(z+1)^2}$. Для разложения последней дроби воспользуйтесь методом из упражнения 1.68.

1.9. Изолированные особые точки аналитической функции

Определение 1.10. *Если функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности точки z_0, за исключением самой точки z_0, в которой она может быть не определена, то точка z_0 называется изолированной особой точкой функции f.*

Определение 1.11 (классификация особых точек). *Изолированная особая точка z_0 функции f называется:*

1) устранимой особой точкой функции f, если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$;

2) полюсом функции f, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$;

3) существенно особой точкой функции f, если не существует $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

Если точка z_0 – изолированная особая точка, то по теореме Лорана функция f раскладывается в ряд Лорана в некоторой проколотой окрестности точки z_0. Тогда классификацию особых точек можно провести и в терминах лорановского разложения.

Теорема 1.11. *Для того чтобы точка z_0 была устранимой особой точкой функции f, необходимо и достаточно, чтобы в ряду Лорана* (1.9) *отсутствовала главная часть разложения.*

Следствие 1.2. *Если функция f ограничена в окрестности изолированной особой точки z_0, то z_0 – устранимая особая точка функции f.*

Теорема 1.12. *Для того чтобы точка z_0 была полюсом функции f, необходимо и достаточно, чтобы в ряду Лорана (1.9) главная часть разложения была конечна, т.е.*

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{(z-z_0)}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n.$$

Число m называется порядком полюса. Если $m=1$, то полюс называется простым.

Следствие 1.3. *Для того чтобы точка z_0 была полюсом порядка m функции f, необходимо и достаточно, чтобы эта функция представлялась в виде $f(z) = (z - z_0)^{-m}h(z)$, $h(z_0) \neq 0$, где $h(z)$ – аналитическая в окрестности точки z_0.*

Следствие 1.4. *Пусть z_0 – нуль порядка m аналитической в окрестности точки z_0 функции $h(z)$. Тогда точка z_0 – полюс порядка m функции $f(z) = \dfrac{1}{h(z)}$.*

Теорема 1.13. *Для того чтобы точка z_0 была существенно особой точкой функции f, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана* (1.9) *функции f содержала бесконечное число членов.*

Пример 1.25. Определить характер особой точки $z = i$ для функции $f(z) = \dfrac{\ln z}{z^2 + 1}$.

Заметим, что $f(z) = \dfrac{1}{z - i} \cdot \dfrac{\ln z}{z + i}$. Функция $h(z) = \dfrac{\ln z}{z + i}$ удовлетворяет условию $h(i) = \dfrac{\pi}{4} \neq 0$, значит, по следствию 1.3 точка $z_0 = i$ – простой полюс функции f.

Упражнения. Определить характер особой точки z_0 для функции $f(z)$:

1.78. $f(z) = \dfrac{e^z}{z(z+1)^3}$, $z_0 = -1$; 1.79. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$; $z_0 = 0$;

1.80. $f(z) = z^5 e^{\frac{1}{z^2}}$; $z_0 = 0$; 1.81. $f(z) = \dfrac{1}{\sin z}$, $z_0 = 0$; 1.82. $f(z) = \dfrac{\cos z - 1}{z^2}$, $z_0 = 0$.

Найти все особые точки и определить их характер у функций:

1.83. $\dfrac{z}{(z - 2i)^3 \sin z}$; 1.84. $\cos \dfrac{1}{z}$; 1.85. $z \sin \dfrac{1}{z}$; 1.86. $\dfrac{2z}{z^2 + 4z + 5}$;

1.87. $\dfrac{z^2 + 3iz - 6 + 2i}{z^2 + 4z + 5}$.

Ответы: 1.78. Полюс порядка 3; 1.79. Устранимая особая точка; 1.80. Существенно особая точка; 1.81. Простой полюс. *Указание:* $\dfrac{1}{\sin z} = \dfrac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}} = \dfrac{1}{z} \cdot \dfrac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n}}{(2n+1)!}}$, функция $h(z) = \dfrac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n}}{(2n+1)!}}$ – аналитическая и $h(0) \neq 0$;

1.82. Устранимая особая точка. *Указание:* воспользуйтесь разложением в ряд Тейлора функции $\cos z$;

1.83. $z = 2i$, полюс порядка 3; $z = 0$, устранимая особая точка;
1.84. $z = 0$, существенно особая точка;
1.85. $z = 0$, существенно особая точка;
1.86. $z = -2 + i$, простой полюс; $z = -2 - i$, простой полюс;
1.87. $z = -2 + i$, простой полюс; $z = -2 - i$, устранимая особая точка.

1.10. Вычеты аналитической функции

Пусть z_0 – изолированная особая точка функции f, при этом функция $f(z)$ аналитична в некоторой проколотой окрестности точки z_0. Рассмотрим замкнутую кусочно-гладкую кривую γ, охватывающую точку z_0 и целиком лежащую в этой окрестности. По следствию 1.1 значение интеграла $\oint\limits_{\gamma^+} f(z)dz$ не зависит от γ.

Определение 1.12. *Число* $\mathrm{Res}(f, z_0) = \oint\limits_{\gamma^+} f(z)dz$ *называется вычетом функции f в точке z_0.*

Теорема 1.14. *Пусть z_0 – изолированная особая точка функции f. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. $\mathrm{Res}(f, z_0) = c_{-1}$*, где c_{-1} – коэффициент при $(z - z_0)^{-1}$ в ряде Лорана* (1.9) функции f.

2. Если z_0 – устранимая особая точка, то $\mathrm{Res}(f, z_0) = 0$.

3. Если z_0 – полюс порядка m, то

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \big((z - z_0)^m f(z)\big)^{(m-1)}. \tag{1.11}$$

В частности, если z_0 – простой полюс, то

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \big((z - z_0) f(z)\big).$$

4. Если аналитические в окрестности точки z_0 функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, такие, что $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$ и $\psi'(z_0) \neq 0$, то z_0 – простой полюс функции $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ и $\mathrm{Res}(f, z_0) = \dfrac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$.

Теорема 1.15 (основная теорема о вычетах). *Пусть функция f аналитична в области D и непрерывна в $\overline{D}$, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_k \in D$, $k = 1, 2, \ldots, n$, а граница ∂D является замкнутой кусочно-гладкой кривой или объединением конечного числа замкнутых кусочно-гладких кривых. Тогда*

$$\int\limits_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_k). \tag{1.12}$$

Пример 1.26. Найти вычеты функции $f(z) = \dfrac{e^z}{z(z+1)^3}$ в точках $z_1 = 0$ и $z_2 = -1$.

Вычет в точке z_1 можно найти, например, по определению. А именно, возьмем кривую $|z| = 1/2$, которая охватывает точку z_1 и целиком лежит в области аналитичности функции $f(z)$. Тогда по интегральной формуле Коши $\operatorname{Res}(f, 0) = \oint\limits_{|z|=1/2} \dfrac{e^z}{z(z+1)^3} dz = 2\pi i \left.\dfrac{e^z}{(z+1)^3}\right|_{z=0} = 2\pi i.$

Вычет в точке z_2 можно найти аналогично, а можно воспользоваться формулой (1.11). Очевидно, что z_2 – полюс порядка 3, поэтому $\operatorname{Res}(f, -1) = = \dfrac{1}{2!} \lim\limits_{z\to -1} \big((z+1)^3 f(z)\big)'' = \dfrac{1}{2} \left.\left(\dfrac{e^z}{z}\right)''\right|_{z=-1} = -\dfrac{5}{2e}.$

Пример 1.27. Вычислить интеграл $\int\limits_{|z|=5} \dfrac{e^z - 1}{z(z+2)^2} dz.$

В области $|z| < 5$ функция $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z(z+2)^2}$ аналитическая всюду, кроме точек $z = 0$ и $z = -2$. Найдем вычеты в этих точках. Точка $z = 0$ – устранимая особая точка, поэтому $\operatorname{Res}(f, 0) = 0$. В точке $z = -2$ функция $f(z)$ имеет полюс порядка 2, поэтому $\operatorname{Res}(f, -2) = \dfrac{1}{1!} \lim\limits_{z\to -2} \big((z+2)^2 f(z)\big)' = = \left.\left(\dfrac{e^z - 1}{z}\right)'\right|_{z=-2} = \dfrac{1 - 3e^{-2}}{4}$. Согласно (1.12) получаем

$$\int\limits_{|z|=5} \frac{e^z - 1}{z(z+2)^2} dz = 2\pi i \big(\operatorname{Res}(f, 0) + \operatorname{Res}(f, -2)\big) = \frac{\pi i (1 - 3e^{-2})}{2}.$$

Упражнения. Найдите вычеты функции $f(z)$ в ее особых точках:

1.88. $f(z) = \dfrac{\sin z}{(z+1)^3 (z-i)}$; 1.89. $f(z) = \dfrac{\ln z}{z^3 - 1}$;

1.90. $f(z) = \dfrac{\sin z^2}{z^2 (z - \pi/4)}$; 1.91. $f(z) = z^2 e^{1/z}$;

1.92. $f(z) = \dfrac{2z + 3 - i}{(z^2 + 2z + 5)(z+1)^2}$.

Вычислите интеграл:

1.93. $\int\limits_{\gamma} \dfrac{z\,dz}{(1-z)^3 (z-3)}$, $\gamma : \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$;

1.94. $\int\limits_{|z-4|=3/2} \dfrac{z\,dz}{(1-z)^3 (z-3)}$; 1.95. $\int\limits_{|z|=5} \dfrac{e^{iz}\,dz}{(z-\pi)^3}$;

1.96. $\displaystyle\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z^4+1}, \quad \gamma : x^2+y^2=2x;$

1.97. $\displaystyle\int\limits_{\gamma} \frac{z+1}{z^3+2z^2-3z}, \quad \gamma : \frac{x^2}{4}+y^2=1.$

Ответы: 1.88. $\operatorname{Res}(f,-1) = -\dfrac{1}{2}\sin 1 + \dfrac{i}{2}\cos 1$, $\operatorname{Res}(f,i) = \dfrac{(1-i)\text{sh}1}{4}$;
1.89. $\operatorname{Res}(f,0)=0$, $\operatorname{Res}(f,-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{i\sqrt{3}}{2}) = \dfrac{-4\pi i}{9(i\sqrt{3}\pm 1)}$;
1.90. $\operatorname{Res}(f,0)=0$, $\operatorname{Res}(f,\pi/4) = \dfrac{16}{\pi^2}\sin\dfrac{\pi^2}{16}$; 1.91. $\operatorname{Res}(f,0)=\dfrac{1}{6}$;
1.92. $\operatorname{Res}(f,-1+2i) = -\dfrac{3}{16}+\dfrac{i}{16}$, $\operatorname{Res}(f,-1-2i) = -\dfrac{5}{16}-\dfrac{i}{16}$, $\operatorname{Res}(f,-1)=\dfrac{1}{2}$;
1.93. $-\dfrac{3\pi i}{4}$; 1.94. $-\dfrac{3\pi i}{4}$; 1.95. πi; 1.96. $-\dfrac{\pi i\sqrt{2}}{2}$; 1.97. $\dfrac{\pi i}{3}$.

1.11. Вычисление определенных интегралов с помощью теории вычетов

С помощью теоремы 1.15 можно легко вычислять некоторые виды определенных интегралов. Рассмотрим здесь три типа таких интегралов.

Теорема 1.16. *Пусть функция $f(z)$ не имеет особых точек на вещественной оси и аналитична в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Пусть также существуют такие постоянные $R_0, M, \delta > 0$, что для любого $z \in \{z \ : \ \operatorname{Im}\, z > 0, |z| > R_0\}$ справедлива оценка*

$$|f(z)| \le \frac{M}{|z|^{1+\delta}}.$$

Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f(z), z_k).$$

Теорема 1.17. *Пусть функция $f(z)$ не имеет особых точек на вещественной оси и аналитична в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Пусть также*

$$\lim_{R\to+\infty}\left(\sup_{C_R}|f(z)|\right) = 0,$$

где $C_R = \{z \ : \ |z| = R, \mathrm{Im}\ z > 0\}$. *Тогда*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f(z)e^{iaz}, z_k), \qquad a > 0.$$

Следствие 1.5. *Если функция* f *удовлетворяет условиям теоремы* 1.17 *, то*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(ax)dx = -2\pi \mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f(z)e^{iaz}, z_k)\right); \qquad (1.13)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(ax)dx = 2\pi \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f(z)e^{iaz}, z_k)\right).$$

Пример 1.28. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$.

Рассмотрим функцию комплексного переменного $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$. Она удовлетворяет условиям теоремы 1.15 с $\delta = 1$ и некоторыми R_0 и M. Функция $f(z)$ имеет в верхней полуплоскости одну изолированную особую точку $z = i$, которая является полюсом порядка 2. Тогда $\mathrm{Res}(f(z), i) = \dfrac{1}{4i}$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{x^2}{(x^2+1)^2}dx = 2\pi i \cdot \dfrac{1}{4i} = \dfrac{\pi}{2}$.

Пример 1.29. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{(x+1)\cos x}{x^2+1}dx$.

Функция $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2+1}$ удовлетворяет условиям теоремы 1.17 . Функция $f(z)$ имеет в верхней полуплоскости простой полюс в точке i и $\mathrm{Res}(f(z)e^{iz}, i) = \dfrac{1-i}{2e}$. Согласно (1.13)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\cos x}{x^2+1}dx = -2\pi \mathrm{Im}\left(\mathrm{Res}(f(z)e^{iz}, i)\right) = \frac{\pi}{e}.$$

Также при помощи вычетов легко считаются интегралы вида

$$\int_0^{2\pi} f(\cos x, \sin x) dx,$$

где функция $f(\cos x, \sin x)$ есть рациональная дробь своих аргументов. Делая замену $z = e^{ix}$, получаем $dx = \dfrac{dz}{iz}$ и $\sin x = \dfrac{1}{2i}\left(z - \dfrac{1}{z}\right)$, $\cos x = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ (формулы Эйлера). При изменении x от 0 до 2π новая переменная z пробегает окружность $|z| = 1$ против часовой стрелки.

Пример 1.30. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{2+\cos x}{3+\sin x} dx$.

Сделаем замену $z = e^{ix}$. Тогда

$$\int_0^{2\pi} \frac{2+\cos x}{3+\sin x} dx = \oint_{|z|=1} \frac{2+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}{3+\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)} \cdot \frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} \frac{z^2+4z+1}{z(z^2+6iz-1)} dz.$$

Функция $f(z) = \dfrac{z^2+4z+1}{z(z^2+6iz-1)}$ имеет простые полюсы $z_1 = 0$, $z_2 = (2\sqrt{2}-3)i$ и $z_3 = (-2\sqrt{2}-3)i$. Из них внутрь кривой $|z| = 1$ попадают только точки z_1 и z_2. Тогда по формуле (1.12)

$$\int_0^{2\pi} \frac{2+\cos x}{3+\sin x} dx = \oint_{|z|=1} \frac{z^2+4z+1}{z(z^2+6iz-1)} dz =$$

$$= 2\pi i\Big(\mathrm{Res}(f(z), 0) + \mathrm{Res}(f(z), (2\sqrt{2}-3)i)\Big) =$$

$$= 2\pi i\left(-1 + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)\right) = \pi\sqrt{2}.$$

Упражнения. Вычислить интегралы:

1.98. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\ dx}{(x^2+2x+5)(x^2+1)}$;   1.99. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$, $a, b > 0$;

1.100. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+x^2+1}$;   1.101. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$;

1.102. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$, $n = 1, 2, \ldots$; 1.103. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{2ix}dx}{x^2+2x+5}$;

1.104. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos x \; dx}{(x^2+1)^2}$; 1.105. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)\sin x \; dx}{(x^2+4x+5)(x^2+6x+13)}$;

1.106. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{1}{5+\sin x}dx$; 1.107. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{1-\sin x}{(2+\sin x)^2}dx$;

1.108. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{2-\sin x}dx$; 1.109. $\int\limits_{0}^{2\pi} \left(\frac{2}{4+\sin x} + \frac{1}{(4-\cos x)^2}\right) dx$.

Ответы: 1.98. $-\frac{\pi}{20}$; 1.99. $\frac{\pi}{ab(a+b)}$; 1.100. $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$; 1.101. $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$;
1.102. $\frac{\pi(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2}$; 1.103. $(-1/2+i)e^{-4-2i}\pi$;
1.104. $\frac{\pi}{2e}$; 1.105. $\frac{\pi}{2}\left(\frac{\cos 2+\sin 2}{e} - \frac{\cos 3}{e^2}\right)$; 1.106. $\frac{\pi\sqrt{6}}{6}$; 1.107. $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$;
1.108. $(4-2\sqrt{3})\pi$; 1.109. $\frac{68\pi\sqrt{15}}{225}$.

1.12. Типовой расчет "Вычисление интегралов с помощью вычетов"

В типовой расчет входит вычисление трех интегралов вида:

1) $\int\limits_{0}^{2\pi} \left(\frac{1}{A+B\sin x} + \frac{1}{(C+D\cos x)^2}\right) dx$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(Ax+b)\cos\left(\frac{\pi x}{M}\right) + (Cx+D)\sin\left(\frac{\pi x}{M}\right)}{x^2+px+q} \, dx$;

3) $\int\limits_{\infty}^{+\infty} \frac{Ax^2+Bx+C}{(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)} \, dx$.

Приведем пример выполнения данного типового расчета.

1) $\int\limits_{0}^{2\pi} \left(\frac{1}{4+3\sin x} + \frac{1}{(7+4\cos x)^2}\right) dx$.

Рассмотрим первый интеграл $I_1 = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{4+3\sin x}$ и сделаем замену $z = e^{ix}$. Тогда

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{4+3\sin x} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{\left(4+\frac{3}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)iz} = \int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{\frac{3}{2}z^2+4iz-\frac{3}{2}}.$$

Функция $f(z) = \frac{1}{\frac{3}{2}z^2+4iz-\frac{3}{2}}$ имеет полюсы $z_1 = -0.451i$, $z_2 = -2.215i$. Из них внутрь окружности $|z| = 1$ попадает только точка z_1. Тогда по формуле (1.12) имеем

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{4+3\sin x} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{\frac{3}{2}z^2+4iz-\frac{3}{2}} = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_1).$$

Так как z_1 – простой полюс, то

$$\operatorname{Res}(f(z), z_1) = \lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{1}{\frac{3}{2}(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{2}{3(z_1-z_2)} = -0.378i,$$

поэтому $I_1 = 2\pi i(-0.378i) = 2.375$.

Рассмотрим второй интеграл $I_2 = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(7+4\cos x)^2}$. Та же самая замена $z = e^{ix}$ приводит к виду

$$I_2 = \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{\left(7+2\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)^2 iz} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{-iz}{(2z^2+7z+2)^2}\,dz.$$

Функция $f(z) = \frac{-iz}{(2z^2+7z+2)^2}$ имеет полюсы второго порядка $z_1 = -0.314$, $z_2 = -3.186$. Их них внутрь окружности $|z| = 1$ попадает только точка z_1. Тогда по формуле (1.12)

$$I_2 = \int\limits_{|z|=1} \frac{-iz}{(2z^2+7z+2)^2}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_1).$$

Так как z_1 – полюс второго порядка, то

$$\operatorname{Res}(f(z), z_1) = \lim_{z\to z_1} \frac{1}{1!}\left((z-z_1)^2 \frac{(-iz)}{4(z-z_1)^2(z-z_2)^2}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to z_1}\left(\frac{-i}{\left(2z+\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{33}\right)^2} + 4i\frac{z}{\left(2z+\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{33}\right)^3}\right) = -0.037i,$$

поэтому $I_2 = 2\pi i(-0.037i) = 0.232$.

Окончательно получаем, что

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4+3\sin x} + \frac{1}{(7+4\cos x)^2}\right)dx = 2.375 + 0.232 = 2.607.$$

Перейдем ко второй задаче

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2x\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + (-3x-5)\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x^2+9}\,dx.$

Рассмотрим первый интеграл $I_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2x\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x^2+9}\,dx$. Функция $f(z) = \dfrac{2z}{z^2+9}$ удовлетворяет условиям теоремы 1.17. Функция $f(z)$ имеет в верхней полуплоскости простой полюс в точке $3i$ и $\operatorname{Res}\left(f(z)e^{\frac{i\pi z}{2}}, 3i\right) = e^{-\frac{3}{2}\pi}$. Согласно (1.13)

$$I_1 = \operatorname{Re}\left(2\pi i \operatorname{Res}\left(f(z)e^{\frac{i\pi z}{2}}, 3i\right)\right) = \operatorname{Re}\left(2\pi i e^{-\frac{3}{2}\pi}\right) = 0.$$

Теперь рассмотрим второй интеграл $I_2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(3x+5)\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\,dx}{x^2+9}$.

Функция $f(z) = \dfrac{3z+5}{z^2+9}$ удовлетворяет условиям теоремы 1.17 и имеет в верхней полуплоскости простой плюс в точке $3i$ и $\operatorname{Res}\left(f(z)e^{\frac{i\pi z}{2}}, 3i\right) = \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{6}i\right)e^{-\frac{3\pi}{2}}$. Согласно (1.13)

$$I_2 = \mathrm{Im}\left(2\pi i \,\mathrm{Res}\left(f(z)e^{\frac{i\pi z}{2}}, 3i\right)\right) = \mathrm{Im}\left(2\pi i \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{6}\,i\right) e^{\frac{-3\pi}{2}}\right) =$$
$$= 3\pi e^{\frac{-3\pi}{2}} = 0.085.$$

Окончательно получаем, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + (-3x-5)\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x^2+9}\,dx = I_1 - I_2 = 0 - 0.085 = -0.085.$$

Перейдем к третьей задаче

3) $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{7x^2+4x-2}{(x^2-2x+2)(x^2+4)}\,dx.$

Рассмотрим функцию $f(z) = \dfrac{7z^2+4z-2}{(z^2-2z+2)(z^2+4)}$. Она удовлетворяет условиям теоремы 1.15 и имеет в верхней полуплоскости две изолированные особые точки $z_1 = 1+i$ и $z_2 = 2i$, которые являются полюсами первого порядка. Следовательно,

$$I = 2\pi i(\mathrm{Res}(f(z), 1+i) + \mathrm{Res}(f(z), 2i)).$$

Вычислим эти вычеты: $\mathrm{Res}(f(z), 1+i) = \lim\limits_{z\to z_1} f(z)(z-z_1) = 1.7 - 1.1i$; $\mathrm{Res}(f(z), 2i) = \lim\limits_{z\to z_2} f(z)(z-z_2) = -1.7 - 0.35i$. Окончательно получаем

$$I = 2\pi i(1.7 - 1.1i - 1.7 - 0.35i) = 9.111.$$

2. РЯДЫ ФУРЬЕ

2.1. Основные сведения из теории рядов Фурье

Пусть в $L_2[a,b]$ задана последовательность функций $\{\varphi_k(x)\}$, $k = 1, 2, \ldots$. Будем считать, что $\|\varphi_k\| \neq 0$ и $(\varphi_k, \varphi_m) = 0$ при $k \neq m$; систему функций $\{\varphi_k\}$ в этом случае называем ортогональной. Если $f \in$ $\in L_2[a,b]$, то определены числа

$$f_k = \frac{(f, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2},$$

называемые коэффициентами Фурье функции $f(x)$ относительно системы $\{\varphi_k(x)\}$.

Коэффициенты Фурье являются решением следующей экстремальной задачи о наилучшем среднеквадратичном приближении функций $f(x)$ линейными комбинациями функций $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$: при заданном n найти параметры α_1, ..., α_n так, чтобы величина $\Big\| f - \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \Big\|$ была минимальна. Эта задача имеет единственное решение $\alpha_k = f_k$, $k = 1, ..., n$, и при этом

$$\min_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \Big\| f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \Big\|^2 = \Big\| f - \sum_{k=1}^{n} f_k \varphi_k \Big\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |f_k|^2 \, \|\varphi_k\|^2. \quad (2.1)$$

Из (2.1) следует, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство Бесселя:

$$\sum_{k=1}^{n} |f_k|^2 \, \|\varphi_k\|^2 \le \|f\|^2,$$

из которого вытекает сходимость числового ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_k|^2 \, \|\varphi_k\|^2$.

Определение 2.1. *Ортогональная система функций* $\{\varphi_k(x)\}$ *называется полной в пространстве* $L_2[a, b]$ (*или ортогональным базисом*), *если для любой* $f(x) \in L_2[a, b]$ *справедливо равенство* (*равенство Парсеваля*)

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2 \, \|\varphi_k\|^2 = \|f\|^2.$$

В литературе чаще встречается другое определение полноты системы функций, однако при этом речь идет о функциях не только из пространства L_2. Полные в смысле определения 2.1 системы в этом случае называют замкнутыми. Для пространства L_2 полнота и замкнутость эквивалентны. Точные определения полноты и замкнутости в общем случае и свойства полных и замкнутых систем функций приведены, например, в [2].

Если система $\{\varphi_k(x)\}$ полна, то из равенства Парсеваля следует, что для любой $f(x) \in L_2[a, b]$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k(x), \quad (2.2)$$

называемый рядом Фурье функции $f(x)$, сходится в пространстве $L_2[a, b]$ к $f(x)$, где $S_n = S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k \varphi_k(x)$ – последовательность частичных сумм ряда (2.2). При этом (в соответствии с (2.1))

$$\|S_n - f\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |f_k|^2 \, \|\varphi_k\|^2.$$

Как и в случае произвольной последовательности функций, из сходимости ряда Фурье (2.2) в $L_2[a,b]$ не следует его поточечная сходимость (см. 1.1), т. е. его сходимость при каждом $x \in [a,b]$, которая определяется не только полнотой системы $\{\varphi_k(x)\}$, но и другими, более специфическими свойствами функций $\varphi_k(x)$ и $f(x)$.

2.2. Тригонометрический ряд Фурье

Тригонометрическими рядами Фурье будем называть ряды Фурье на промежутке $[a,b]$, связанные с системой функций

$$\left\{1,\ \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right),\ \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right),\ ...,\ \cos\left(\frac{2\pi kx}{l}\right),\ \sin\left(\frac{2\pi kx}{l}\right),\ ...\right\},\quad l = b - a, \tag{2.3}$$

которая ортогональна и полна в $L_2[a,b]$. Нормы всех этих функций, кроме первой, равны (проверьте!) $\sqrt{l/2}$, а $\|1\| = \sqrt{l}$. Ряд Фурье функции $f(x)$, соответствующий системе функций (2.3), принято записывать в виде

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi kx}{l}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kx}{l}\right)\right], \tag{2.4}$$

где

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{l}\int_a^b f(x)\cos\left(\frac{2\pi kx}{l}\right)\,dx,\ k = 0,1,2,...,\\ b_k &= \frac{2}{l}\int_a^b f(x)\sin\left(\frac{2\pi kx}{l}\right)\,dx,\ k = 1,2,\ldots\ . \end{aligned} \tag{2.5}$$

Как любой ряд Фурье, ряд (2.4) сходится к $f(x)$ в $L_2[a,b]$. Справедливо также следующее утверждение о поточечной сходимости (теорема Дирихле): если $f(x)$ ограничена и кусочно-непрерывна $[a,b]$ и промежуток $[a,b]$ может быть разбит на конечное число промежутков, на каждом из которых $f(x)$ монотонна, то для любого $x_0 \in [a,b]$ ряд Фурье функции $f(x)$ сходится и

$$S(x_0) \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi kx_0}{l}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kx_0}{l}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0)), \tag{2.6}$$

где $f(x_0 \pm 0) = \lim\limits_{x \to x_0 \pm 0} f(x)$; при $x_0 = a$ и $x_0 = b$ ряд сходится к значению

$$\frac{1}{2}\left(f(a+0)+f(b-0)\right).$$

Отметим, что приведенные условия теоремы Дирихле являются глобальными, т. е. относятся к свойствам функции $f(x)$ на всем промежутке $[a, b]$. При этом и равенство (2.6) также выполнено $\forall x_0 \in [a, b]$. Однако для справедливости (2.6) при каком-либо фиксированном $x_0 \in [a, b]$ на самом деле достаточно, чтобы функция $f(x)$ удовлетворяла определенным условиям лишь в некоторой окрестности x_0 (а не всюду на $[a, b]$). Например, равенство (2.6) будет выполнено при заданном $x_0 \in [a, b]$, если существуют конечные числа $f(x_0 \pm 0)$ и функция $f(x)$ удовлетворяет в x_0 еще некоторому дополнительному условию (условию Дини). В частности, если $f(x)$ непрерывна в x_0 и удовлетворяет условию Дини, то ее ряд Фурье в этой точке сходится к $f(x_0)$. Точные формулировки теорем типа теоремы Дирихле имеются в [2].

Покажем как разложить функцию в тригонометрический ряд Фурье.

Пример 2.1. Разложить функцию $f(x) = x$ в тригонометрический ряд Фурье на промежутке $[-\pi, \pi]$.

Здесь $l = 2\pi$. Найдем коэффициенты по формулам (2.5):

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\cos(kx)\,dx = 0,$$

так как интегрируется нечетная функция по симметричному промежутку;

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} x\sin(kx)\,dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\,x\,\frac{\cos(kx)}{k}\bigg|_0^\pi + \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{\cos(kx)}{k}\,dx = -\frac{2}{k}\,\cos(\pi k) + \frac{2}{\pi}\frac{\sin(kx)}{k^2}\bigg|_0^\pi =$$

$$= -\frac{2}{k}\cos(\pi k) = (-1)^{k+1}\frac{2}{k}.$$

Таким образом, получаем ряд Фурье

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{2}{k}\sin(kx).$$

Заметим, что в соответствии с теоремой Дирихле график ряда Фурье $S(x)$ имеет вид, изображенный на рис. 2.1.

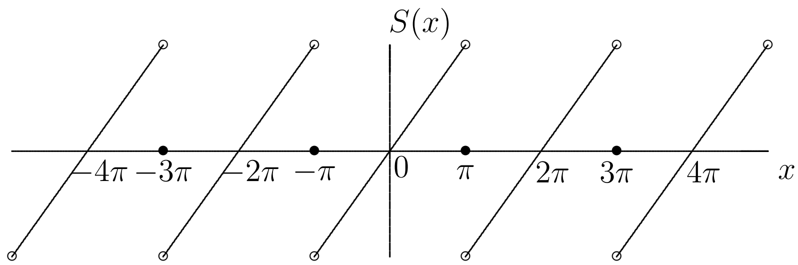

Рис. 2.1

Пример 2.2. Разложить функцию $f(x) = x$ в тригонометрический ряд Фурье на промежутке $[0; 1]$.

Здесь $l = 1$. Как и в примере 2.1, найдем коэффициенты по формулам (2.5):

$$a_k = 2\int\limits_0^1 x\cos(2\pi kx)\,dx = 2x\frac{\sin(2\pi kx)}{2\pi k}\bigg|_0^1 - 2\int\limits_0^1 \frac{\sin(2\pi kx)}{2\pi k}\,dx =$$

$$= 2\frac{\cos(2\pi kx)}{(2\pi k)^2}\bigg|_0^1 = \frac{1}{2\pi^2 k^2}(\cos(2\pi k) - 1) = 0;$$

$$a_0 = 2\int\limits_0^1 x\,dx = 2\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 = 1;$$

$$b_k = 2\int\limits_0^1 x\sin(2\pi kx)\,dx = -2x\frac{\cos(2\pi kx)}{2\pi k}\bigg|_0^1 + 2\int\limits_0^1 \frac{\cos(2\pi kx)}{2\pi k}\,dx =$$

$$= -\frac{\cos(2\pi k)}{2\pi k} + 2\frac{\sin(2\pi kx)}{(2\pi k)^2}\bigg|_0^1 = -\frac{1}{2\pi k}.$$

Таким образом, получаем ряд Фурье для функции $f(x) = x$ на промежутке $[0; 1]$

$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-1}{2\pi k}\sin(2\pi kx).$$

График ряда Фурье $S(x)$ имеет вид, изображенный на рис. 2.2.

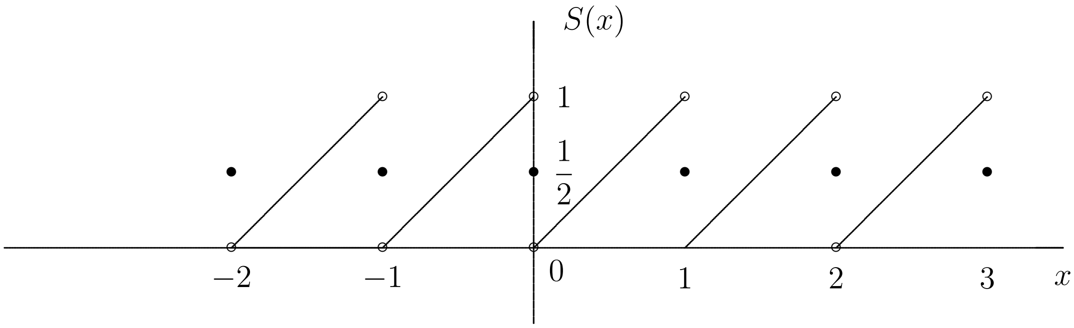

Рис. 2.2

Пример 2.3. Разложить функцию $f(x) = \sin x$ в тригонометрический ряд Фурье на промежутке $[-\pi; \pi]$.

Очевидно, $b_1 = 1$, $b_k = 0$, $k \geq 2$, $a_k = 0$, $k \geq 0$, т. е. ряд в данном случае будет сведен к одному слагаемому $S(x) = \sin x$.

Пример 2.4. Разложить функцию $f(x) = \sin \dfrac{3x}{2}$ в тригонометрический ряд Фурье на промежутке $[0; 2\pi]$.

Найдем коэффициенты ряда Фурье a_k и b_k:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \sin \frac{3x}{2} \cos(kx)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(\sin\left(\left(k + \frac{3}{2} \right) x \right) + \sin\left(\left(\frac{3}{2} - k \right) x \right) \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(- \frac{\cos\left(\left(k + \frac{3}{2} \right) x \right)}{k + \frac{3}{2}} \Bigg|_0^{2\pi} - \frac{\cos\left(\left(\frac{3}{2} - k \right) x \right)}{\frac{3}{2} - k} \Bigg|_0^{2\pi} \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{-\cos(2\pi k + 3\pi) + 1}{k + \frac{3}{2}} + \frac{-\cos(3\pi - 2\pi k) + 1}{\frac{3}{2} - k} \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2}{k + \frac{3}{2}} + \frac{2}{\frac{3}{2} - k} \right) = \frac{3}{\pi \left(\frac{9}{4} - k^2 \right)};$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \sin \frac{3x}{2} \sin(kx)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} \left(\cos\left(\left(k - \frac{3}{2} \right) x \right) - \cos\left(\left(k + \frac{3}{2} \right) x \right) \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\left. \frac{\sin\left(\left(k - \frac{3}{2} \right) x \right)}{\left(k - \frac{3}{2} \right)} \right|_{0}^{2\pi} - \left. \frac{\sin\left(\left(k + \frac{3}{2} \right) x \right)}{k + \frac{3}{2}} \right|_{0}^{2\pi} \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin(2\pi k - 3\pi)}{k - \frac{3}{2}} - \frac{\sin(2\pi k + 3\pi)}{k + \frac{3}{2}} \right) = 0.$$

Таким образом, получаем ряд Фурье

$$S(x) = \frac{2}{3\pi} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3}{\pi\left(\frac{9}{4} - k^2\right)} \cos(kx),$$

имеющий график, изображенный на рис. 2.3.

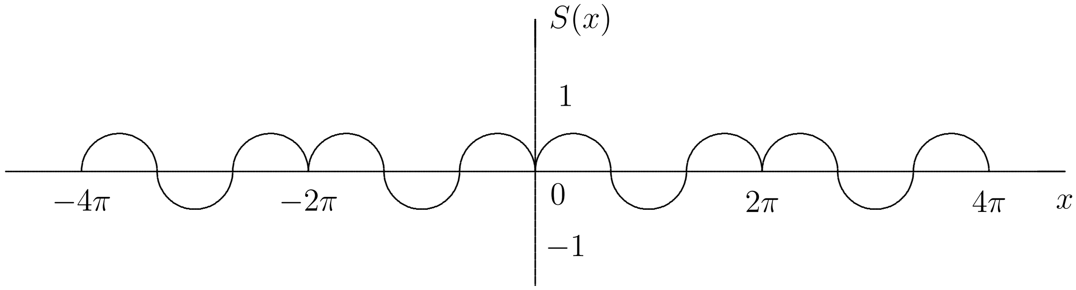

Рис. 2.3

Упражнения.

Разложить в ряд Фурье функцию:

2.1. $f(x) = x^2$ на промежутке $[0; 2\pi]$;

2.2. $f(x) = e^x$ на промежутке $[-1; 1]$;

2.3. $f(x) = \cos x$ на промежутке $[-\pi; \pi]$;

2.4. $f(x) = \sin 3x$ на промежутке $[0; 4\pi]$;

2.5. $f(x) = \sin 3x$ на промежутке $[0; \pi]$.

Ответы:

2.1. $S(x) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{k^2} \cos(kx) - \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{4\pi}{k} \sin(kx)$;

2.2. $S(x) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k (l^2 - 1)}{l(\pi^2 k^2 + 1)} \cos(\pi k x) + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k (1 - l^2)\pi k}{l(\pi^2 k^2 + 1)} \sin(\pi k x)$;

2.3. $S(x) = \cos x$;
2.4. $S(x) = \sin 3x$;
2.5. $S(x) = \dfrac{1}{3} + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{4k}{4k^2 - 9} \cos(2kx)$.

В теории и в приложениях рядов Фурье весьма важным является вопрос о скорости убывания коэффициентов Фурье при $k \to \infty$. Для системы функций (2.3) равенство Парсеваля имеет вид

$$\frac{l}{2}\left[\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|^2 + |b_k|^2)\right] = \|f\|^2,$$

поэтому $|a_k|^2 + |b_k|^2 \to 0$ при $k \to \infty$ (как общий член сходящегося ряда) и $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = 0$ для любой $f \in L_2[a, b]$. Более точная характеристика последовательностей $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ связана с гладкостью функции $f(x)$. Именно: а) если $f(x)$ кусочно-непрерывна на $[a, b]$, то $|a_k| + |b_k| \leq \dfrac{C}{k}$, $k \in \mathbb{N}$; б) если существует непрерывная на $[a, b]$ производная $f^{(k)}(x)$, $f^{(l)}(a + 0) = f^{(l)}(b - 0)$, а $f^{(l+1)}(x)$ – кусочно-непрерывна на $[a, b]$, то $|a_k| + |b_k| \leq \dfrac{C}{k^{l+2}}$, $k \in \mathbb{N}$.

Пример 2.5. Запишем равенство Парсеваля для функции из примера 2.1:

$$\pi\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4}{k^2}\right) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^3}{3}.$$

Получим равенство $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Пример 2.6. Запишем равенство Парсеваля для функции из примера 2.2:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{4\pi^2k^2}\right) = \int\limits_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3},$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\pi^2k^2} = \frac{1}{6}.$$

Пример 2.7. Запишем равенство Парсеваля для функции из приме-

ра 2.4:
$$\pi\left(\frac{2}{9\pi^2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{9}{\pi^2\left(\frac{9}{4}-k^2\right)^2}\right)=\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\frac{3x}{2}\,dx=\pi.$$
Отсюда получаем $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\left(\frac{9}{4}-k^2\right)^2}=\frac{\pi^2}{9}-\frac{2}{81}$.

Упражнения. Написать равенство Парсеваля для функций из упражнений 2.1–2.5.

Ответы:

2.1. $\displaystyle\frac{32\pi^5}{5}=\pi\left(\frac{8\pi^4}{9}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{16}{k^4}+\frac{16\pi^2}{k^2}\right)\right)$;

2.2. $\displaystyle\frac{e^4-1}{2e^2}=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(l^2-1)^2}{l^2(\pi^2k^2+1)}$;

2.3. $\pi=\pi\cdot 1$;

2.4. $2\pi=2\pi\cdot 1$;

2.5. $\displaystyle\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{18}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{16k^2}{(4k^2-9)^2}\right)$.

К тригонометрическим рядам Фурье относятся также и ряды Фурье на промежутке $[a,b]$, связанные со следующими двумя системами функций:
$$\left\{l,\cos\left(\frac{\pi(x-a)}{l}\right),...,\cos\left(\frac{\pi k(x-a)}{l}\right),...\right\},\ l=b-a, \tag{2.7}$$
$$\left\{\sin\left(\frac{\pi(x-a)}{l}\right),...,\sin\left(\frac{\pi k(x-a)}{l}\right),...\right\},\ l=b-a. \tag{2.8}$$

Эти системы, как и система функций (2.3), ортогональны и полны в $L_2[a,b]$. Отметим, что ни одна из систем (2.7) и (2.8) не является подсистемой системы (2.3). Соответствующие ряды Фурье имеют вид:
$$\frac{\widetilde{a}_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{a}_k\cos\left(\frac{\pi k(x-a)}{l}\right) \tag{2.9}$$
– для системы (2.7) и
$$\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{b}_k\sin\left(\frac{\pi k(x-a)}{l}\right) \tag{2.10}$$

– для системы (2.8). Здесь коэффициенты Фурье $\widetilde{a}_k$ и $\widetilde{b}_k$ вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \widetilde{a}_k &= \frac{2}{l}\int\limits_a^b f(x)\cos\left(\frac{\pi k(x-a)}{l}\right)dx, \quad k=0,1,..., \\ \widetilde{b}_k &= \frac{2}{l}\int\limits_a^b f(x)\sin\left(\frac{\pi k(x-a)}{l}\right)dx, \quad k=1,2,\dots\ . \end{aligned} \tag{2.11}$$

Ряды Фурье (2.9) и (2.10) иногда называют “неполными рядами Фурье”. Этот термин имеет историческое происхождение. Ни в коем случае не следует думать, что он отражает какую-либо “неполноту” систем (2.7) и (2.8).

Пример 2.8. Разложить функцию $f(x)=x$ в “неполный ряд Фурье” на промежутке $[0;\pi]$.

В соответствии с формулами (2.11) найдем коэффициенты ряда Фурье ($l=\pi-0$):

$$\widetilde{a}_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi x\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\,x\frac{\sin(kx)}{k}\bigg|_0^\pi + \frac{2}{\pi}\,\frac{\cos(kx)}{k^2}\bigg|_0^\pi =$$

$$= \frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^k-1}{k^2}, \quad k\geq 1;$$

$$\widetilde{b}_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi x\sin(kx)\,dx = -\frac{2}{\pi}\,x\,\frac{\cos(kx)}{k}\bigg|_0^\pi + \frac{2}{\pi}\,\frac{\sin(kx)}{k^2}\bigg|_0^\pi =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\,\frac{\pi(-1)^k}{k} = \frac{2}{k}(-1)^{k+1}.$$

Таким образом, “неполные ряды Фурье” имеют вид:

$$S_{\text{неч}}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2}{k}(-1)^{k+1}\sin(kx),$$

$$S_{\text{чет}}(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^k-1}{k^2}\cos(kx).$$

Пример 2.9. Разложить функцию $f(x)=x$ в “неполный ряд Фурье” на промежутке $[-1;1]$.

Найдем коэффициенты ряда Фурье:

$$\widetilde{a_k} = \int\limits_{-1}^{1} x\cos\frac{\pi k(x+1)}{2}\,dx = x\,\left.\frac{\sin\dfrac{\pi k(x+1)}{2}}{\dfrac{\pi k}{2}}\right|_{-1}^{1} + \left.\frac{\cos\dfrac{\pi k(x+1)}{2}}{\left(\dfrac{\pi k}{2}\right)^2}\right|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{2}{\pi k}\sin(\pi k) + \frac{2}{\pi k}\sin 0 + \frac{4}{\pi^2k^2}\cos(\pi k) - \frac{4}{\pi^2k^2}\cos 0 =$$

$$= \frac{4}{\pi^2k^2}\left((-1)^k - 1\right), \quad k \geq 1,$$

$$\widetilde{a_0} = \int\limits_{-1}^{1} x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{1} = 0;$$

$$\widetilde{b_k} = \int\limits_{-1}^{1} x\sin\frac{\pi k(x+1)}{2}\,dx = -x\,\left.\frac{\cos\dfrac{\pi k(x+1)}{2}}{\dfrac{\pi k}{2}}\right|_{-1}^{1} + \left.\frac{\sin\dfrac{\pi k(x+1)}{2}}{\left(\dfrac{\pi k}{2}\right)^2}\right|_{-1}^{1} =$$

$$= -\frac{2}{\pi k}\cos(\pi k) - \frac{2}{\pi k}\cos 0 + \frac{4}{\pi^2k^2}\sin(\pi k) - \frac{4}{\pi^2k^2}\sin 0 = -\frac{2}{\pi k}\left((-1)^k + 1\right).$$

Таким образом, “неполные ряды Фурье” имеют вид:

$$S_{\text{неч}}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{-2}{\pi k}\left((-1)^k + 1\right)\sin\frac{\pi k(x+1)}{2},$$

$$S_{\text{чет}}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4}{\pi^2k^2}\left((-1)^k - 1\right)\cos\frac{\pi k(x+1)}{2}.$$

Пример 2.10. Разложить функцию $f(x) = \sin x$ в “неполный ряд Фурье” на промежутке $[0;\pi]$.

Найдем коэффициенты ряда Фурье:

$$\widetilde{a_k} = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin x\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}(\sin((k+1)x) + \sin((1-k)x))\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left.\left(\frac{\cos((k+1)x)}{k+1} + \frac{\cos((1-k)x)}{1-k}\right)\right|_{0}^{\pi} =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos((k+1)\pi)}{k+1} + \frac{\cos((1-k)\pi)}{1-k} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{1-k}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1} + \frac{1}{\pi}\,\frac{1-(-1)^{1-k}}{1-k} = \frac{1}{\pi}\,\frac{1+(-1)^k}{k+1} - \frac{1}{\pi}\,\frac{1+(-1)^k}{k-1} =$$

$$= \frac{1+(-1)^k}{\pi}\,\frac{-2}{k^2-1}, \quad k \neq 1,$$

$$\widetilde{a_1} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin 2x\,dx = 0.$$

Очевидно, $\widetilde{b_1} = 1$, $\widetilde{b_k} = 0$, $k \geq 2$. Таким образом, “неполные ряды Фурье” имеют вид

$$S_{\text{неч}}(x) = \sin x,$$

$$S_{\text{чет}} = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{-2(1+(-1)^k)}{\pi(k^2-1)}\cos(kx).$$

Пример 2.11. Разложить функцию $f(x) = 1$ в “неполный ряд Фурье” на промежутке $[2;4]$.

Очевидно, что $\widetilde{a_0} = 2$, $\widetilde{a_k} = 0$, $k \geq 1$;

$$\widetilde{b_k} = \int\limits_2^4 1 \sin\frac{\pi k(x-2)}{2}\,dx = -\frac{2}{\pi k}\cos\frac{\pi k(x-2)}{2}\Bigg|_2^4 =$$

$$= -\frac{2}{\pi k}(-1)^k + \frac{2}{\pi k} = \frac{2}{\pi k}(1-(-1)^k),$$

следовательно, “неполные ряды Фурье” имеют вид:

$$S_{\text{неч}}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2(1-(-1)^k)}{\pi k}\sin(kx),$$

$$S_{\text{чет}}(x) = 1.$$

Упражнения.

Разложить функцию в “неполный ряд Фурье”:

2.6. $f(x) = x^2$ на промежутке $[0;\pi]$;

2.7. $f(x) = e^x$ на промежутке $[-1;1]$;

2.8. $f(x) = \cos x$ на промежутке $[0;\pi]$.

Ответы:

2.6. $S_{\text{неч}}(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^{k+1}\pi^2}{k} + \frac{2((-1)^k-1)}{k^3}\right)\sin(kx),$

$$S_{\text{чет}}(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k-4}{k^2}\cos(kx);$$

2.7. $S_{\text{неч}}(x)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{2e(1-(-1)^k)}{1+\frac{4}{\pi^2k^2}}\sin\left(\dfrac{\pi k(x+1)}{2}\right)$,

$S_{\text{чет}}(x)=\dfrac{e^2-1}{2e}+\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{e((-1)^k-1)}{1+\frac{4}{\pi^2k^2}}\cos(\dfrac{\pi k(x+1)}{2})$;

2.8. $S_{\text{неч}}(x)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{2k(1-(-1)^k)}{\pi(k^2-1)}\sin(kx)$,

$S_{\text{чет}}(x)=\cos x$.

2.3. Разложение четной и нечетной функций в ряд Фурье

Напомним некоторые определения.

Определение 2.2. *Пусть функция $f(x)$ задана на всей оси $0X$ или же на некотором отрезке, симметричном относительно начала координат, например $[-T;T]$. Функция $f(x)$ называется четной, если для каждого x*

$$f(-x)=f(x).$$

Из этого определения следует, что график всякой четной функции симметричен относительно оси $0Y$. Если $f(x)$ – четная функция, то $\int\limits_{-T}^{T}f(x)\,dx=$ $=2\int\limits_{0}^{T}f(x)\,dx$ при любом T (нужно только, чтобы $f(x)$ была определена и интегрируема на отрезке $[-T;T]$).

Определение 2.3. *Функция $f(x)$, заданная на всей оси $0X$ или же на симметричном относительно начала координат отрезке, например $[-T;T]$, называется нечетной, если для каждого x*

$$f(-x)=-f(x).$$

Для нечетной функции $f(-0)=-f(0)$ и, следовательно, $f(0)=0$. График всякой нечетной функции симметричен относительно начала координат. Для нечетных функций $\int\limits_{-T}^{T}f(x)\,dx=0$, если $f(x)$ определена и интегрируема на отрезке $[-T;T]$.

Из определения четных и нечетных функций вытекает:

1) произведение двух четных или нечетных функций есть четная функция;

2) произведение четной и нечетной функций если нечетная функция.

Замечание. Четность функций изменяется при их дифференцировании и интегрировании (можно доказать!).

Итак, пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[-T;T]$, удовлетворяет условиям Дирихле и является четной. Тогда произведение $f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{T}$ при любом $n = 1, 2, ...$ должно быть нечетной функцией по свойству 2 и $\displaystyle\int\limits_{-T}^{T} f(x)\sin\frac{n\pi x}{T}\,dx = 0$. Следовательно, в разложении четной функции в ряд Фурье коэффициенты

$$b_n = \frac{1}{T}\int\limits_{-T}^{T} f(x)\sin\frac{n\pi x}{T}\,dx = 0, \quad n = 1, 2, \ldots\ . \tag{2.12}$$

В то же время произведение $f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{T}$ является четной функцией, и

$$a_n = \frac{1}{T}\int\limits_{-T}^{T} f(x)\cos\frac{n\pi x}{T}\,dx = \frac{2}{T}\int\limits_{0}^{T} f(x)\cos\frac{n\pi x}{T}\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\ . \tag{2.13}$$

Следовательно, для четной функции ряд Фурье содержит лишь косинусы, т. е. $S(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{T}$, где a_n, a_0 вычисляются по формуле (2.13).

Пусть теперь $f(x)$ является нечетной функцией, заданной на отрезке $[-T;T]$ и удовлетворяющей условиям Дирихле. Тогда произведение $f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{T}$ есть нечетная функция по свойству 2, и $f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{T}$ является четной функцией по свойству 1 при любом $n = 1, 2, \ldots$. Тогда для коэффициентов Фурье нечетной функции $f(x)$ получаем:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{T}\int\limits_{-T}^{T} f(x)\cos\frac{n\pi x}{T}\,dx = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,, \\ b_n &= \frac{1}{T}\int\limits_{-T}^{T} f(x)\sin\frac{n\pi x}{T}\,dx = \frac{2}{T}\int\limits_{0}^{T} f(x)\sin\frac{n\pi x}{T}\,dx \quad (n = 1, 2, \ldots)\,. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Таким образом, ряд Фурье нечетной функции содержит лишь синусы, т. е.

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{T},$$

где b_n вычисляются по формулам (2.14).

Пример 2.12. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=x$, заданную на $[-3;3]$.

Эта функция задана на симметричном промежутке, $f(x)$ – нечетная функция, поэтому коэффициенты $a_0=a_n=0$;

$$b_n=\frac{1}{T}\int\limits_{-T}^{T} f(x)\sin\frac{n\pi x}{T}\,dx=\frac{2}{T}\int\limits_{0}^{T} f(x)\sin\frac{\pi\pi x}{T}\quad (n=1,2,...).$$

Для $f(x)=x$ находим коэффициенты b_n по формуле

$$b_n=\frac{2}{3}\int\limits_{0}^{3} x\sin\frac{n\pi x}{T}\,dx=$$

(вычисляем данный интеграл интегрированием по частям)

$$=\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{n\pi}\,x\cos\frac{n\pi x}{3}\bigg|_0^3+\frac{3}{n\pi}\int\limits_0^3\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{n\pi}\,3\cos n\pi\right)+\frac{2}{3}\,\frac{3}{n\pi}\frac{3}{n\pi}\,\sin\frac{n\pi x}{3}\bigg|_0^3=$$

$$=-\frac{6}{n\pi}\cos n\pi+\frac{6}{(n\pi)^2}\,(\sin n\pi-\sin 0)=-\frac{6}{n\pi}\,\cos n\pi.$$

Заметим, что $\cos n\pi$ принимает те же значения, что и $(-1)^n$ для $n\in N$, поэтому можем записать $b_n=\dfrac{6}{n\pi}\,(-1)^{n+1}$. Разложение функции $f(x)=x$ в ряд Фурье на интервале $[-3;3]$ будет иметь вид (рис. 2.4):

$$x=\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,\sin\frac{n\pi x}{3}.$$

При $x=\pm3$ согласно теореме Дирихле ряд Фурье равен нулю.

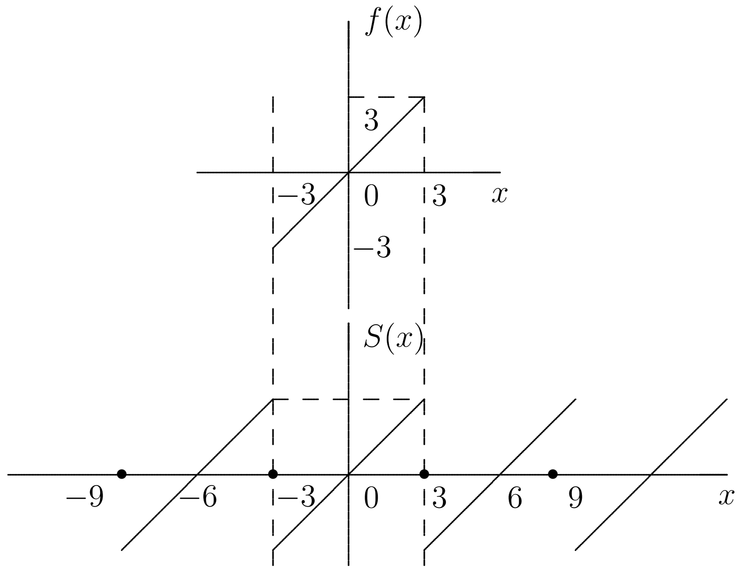

Рис. 2.4

Пример 2.13. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = |x| - 5$, заданную на $[-2; 2]$.

Функция $f(x)$ является четной, поэтому в разложении в ряд Фурье все коэффициенты $b_n = 0$, коэффициенты a_n вычисляем по формулам:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int\limits_0^T f(x)\,dx,$$

$$a_0 = \frac{2}{2}\int\limits_0^2 (|x| - 5)\,dx = \int\limits_0^2 (x-5)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - 5x\right)\Bigg|_0^2 = 2 - 10 = -8;$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int\limits_0^T f(x)\cos\frac{n\pi x}{T}\,dx,$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int\limits_0^2 (|x| - 5)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \int\limits_0^2 (x-5)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{2}{n\pi}(x-5)\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^2 - \frac{2}{n\pi}\int\limits_0^2 \sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^2 =$$

(заметим, что внеинтегральный член равен 0)

$$= \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 (\cos n\pi - 1) = \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \left((-1)^n - 1\right).$$

Легко видеть, что $a_{2m} = 0$, $a_{2m+1} = \dfrac{-8}{\pi^2(2m+1)^2}$. Разложение в ряд Фурье заданной функции $f(x)$ будет иметь вид

$$|x| - 5 = -4 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos \dfrac{(2m+1)\pi x}{2}}{(2m+1)^2}.$$

Пример 2.14. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, заданную на $[-3; 3]$ графически (рис. 2.5).

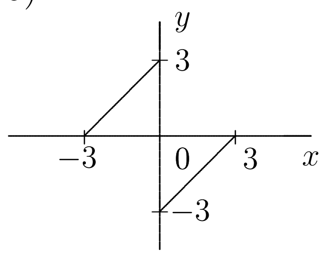

Рис. 2.5

Если записать функцию $f(x) = \begin{cases} x+3, & -3 \le x < 0, \\ x-3, & 0 \le x \le 3, \end{cases}$ то видно, что функция $f(x)$ на $[-3; 3]$ является нечетной, так как $f(-x) = -x + 3 = -(x-3) = -f(x)$ $(x > 0)$, следовательно, разложение в ряд Фурье функции $f(x)$ на $[-3; 3]$ будет иметь вид:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{T},$$

где $T = 3$,

$$b_n = \frac{2}{T} \int\limits_0^T f(x) \sin \frac{n\pi x}{3}\, dx;$$

$$b_n = \frac{2}{3} \int\limits_0^3 (x-3) \sin \frac{n\pi x}{3}\, dx =$$

$$= \frac{2}{3} \left(-\frac{3}{n\pi} \right) (x-3) \cos \frac{n\pi x}{3} \Bigg|_0^3 + \frac{2}{3}\,\frac{3}{n\pi} \int\limits_0^3 \cos \frac{n\pi x}{3}\, dx =$$

$$= -\frac{2}{n\pi}(0 \cdot \cos n\pi - (-3)) + \frac{2}{3} \left(\frac{3}{n\pi} \right)^2 \sin \frac{n\pi x}{3} \Bigg|_0^3 = -\frac{6}{n\pi}.$$

Разложение данной функции в ряд Фурье на $[-3;0)\cup(0;3]$ будет иметь вид
$$f(x)=-\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,\sin\frac{n\pi x}{3}.$$
При $x=0$ ряд Фурье согласно теореме Дирихле равен нулю.

Упражнения.

2.9. Построить график и разложить в ряд Фурье четную периодическую (с периодом 2π) функцию, определенную на отрезке $[0;\pi]$ равенством
$$f(x)=\begin{cases}x,\ 0\le x\le\dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi.\end{cases}$$

2.10. Построить график и разложить в ряд Фурье четную периодическую (с периодом 2π) функцию, определенную на отрезке $[0,\pi]$ равенством
$$f(x)=\frac{\pi}{2}-x,\ 0\le x\le\pi.$$

2.11. Построить график и разложить в ряд Фурье функцию
$$f(x)=\begin{cases}|x|,\ -1\le x\le 1,\\ 1,\ -2\le x\le -1;\ 1\le x\le 2\end{cases}$$
по соответствующей ортогональной системе функций.

2.12. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\sin(ax)$, заданную на интервале $(-\pi;\pi)$ (a – не целое).

Ответы: 2.9. $f(x)=\dfrac{3\pi}{8}+\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1\right)\cos(nx);$

2.10. $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2};$

2.11. $f(x)=\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}-1}{n^2}\ \cos\frac{n\pi x}{2};$

2.12. $f(x)=\dfrac{2\sin(\pi a)}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n\sin nx}{n^2-a^2}\ (-\pi<x<\pi).$

2.4. Комплексная форма ряда Фурье

Пусть a_k и b_k – коэффициенты Фурье функции $f(x)$. На основании формул Эйлера
$$a_k\cos\left(\frac{2\pi kx}{l}\right)+b_k\sin\left(\frac{2\pi kx}{l}\right)=a_k\frac{e^{i\frac{2\pi kx}{l}}+e^{-i\frac{2\pi kx}{l}}}{2}+b_k\frac{e^{i\frac{2\pi kx}{l}}-e^{-i\frac{2\pi kx}{l}}}{2i}=$$

$$= c_k e^{i\frac{2\pi kx}{l}} + c_{-k} e^{-i\frac{2\pi kx}{l}},$$

где (будем считать $b_0 = 0$)

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots\ .$$

Отсюда $c_k = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int\limits_a^b f(x) e^{i\frac{2\pi kx}{l}}\, dx$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Важно заметить, что если $f(x)$ – вещественная функция, то a_k и b_k – вещественные, а числа c_k и c_{-k} – комплексные, но взаимно сопряжены: $c_{-k} = \overline{c_k}$.

Очевидно, что n-я сумма ряда Фурье функции f может быть записана в виде

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\left(\frac{2\pi kx}{l}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kx}{l}\right) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i\frac{2\pi kx}{l}},$$

а сам ряд Фурье функции f – в виде ряда

$$S(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i\frac{2\pi kx}{l}}, \tag{2.15}$$

который называют комплексной формой ряда Фурье.

Ряд (2.15) имеет все свойства тригонометрического ряда Фурье: он сходится в $L_2[a, b]$, и для него справедлива теорема Дирихле. При этом при выполнении условий теоремы Дирихле наблюдается поточечная сходимость последовательности $\{S_n\}$ симметричных частичных сумм ряда (2.15)

$$S_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i\frac{2\pi kx}{l}}.$$

Для несимметричных частичных сумм теорема Дирихле может быть неверной.

Заметим, что комплексные функции $\left\{e^{i\frac{2\pi kx}{l}}\right\}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$, образуют ортогональную систему на отрезке $[a, b]$, так как при $k \neq m$

$$\left(e^{i\frac{2\pi kx}{l}}, e^{i\frac{2\pi mx}{l}}\right) = \int\limits_a^b e^{i\frac{2\pi kx}{l}} \overline{e^{i\frac{2\pi mx}{l}}}\, dx = \int\limits_0^l e^{i\frac{2\pi(k-m)x}{l}}\, dx = \frac{l}{2\pi i} \frac{e^{i\frac{2\pi(k-m)x}{l}}}{k-m}\Bigg|_0^l = 0.$$

Далее

$$\left(e^{i\frac{2\pi kx}{l}}, e^{i\frac{2\pi kx}{l}}\right) = \int\limits_0^l e^{i\frac{2\pi kx}{l}} e^{-i\frac{2\pi kx}{l}}\, dx = l,$$

поэтому нормы всех этих функций равны $\sqrt{l}$.

Пример 2.15. Представить рядом Фурье в комплексной форме периодическую функцию $f(x)$ (с периодом 2π), определяемую при $0 \le x < 2\pi$ равенством $f(x) = e^x$.

Так как $l = 2\pi$, то система функций имеет вид $\{e^{inx}\}$, следовательно, $f(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$, $x \ne 2k\pi$. Коэффициенты c_n находятся по формуле

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^x e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{1-in}(e^{2\pi(1-in)}-1) =$$

$$= \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\,\frac{1+in}{1+n^2}, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \dots\ .$$

Окончательно получаем

$$e^x = \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1+in}{1+n^2}\,e^{inx}, \quad 0 < x < 2\pi.$$

Воспользовавшись полученным рядом Фурье в комплексной форме, запишем в действительной форме ряд Фурье этой функции. Действительно,

$$a_n = 2\,\mathrm{Re}\,c_n = \frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\,\frac{1}{1+n^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots\ ,$$

$$b_n = -2\,\mathrm{Im}\,c_n = -\frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\,\frac{n}{1+n^2}, \quad n = 1, 2, \dots\ .$$

Следовательно,

$$f(x) = \frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{1+n^2} - \frac{\sin nx}{1+n^2}\right)\right], \quad x \ne 2\pi k,\ k \in Z.$$

Упражнения.

2.13. Используя комплексную форму ряда Фурье, разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ (с периодом 2π), определяемую следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ e^{-x}, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

2.14. Записать ряд Фурье в комплексной и в действительной формах для периодической функции $f(x)$ (с периодом 2π), определяемой на интервале $[-\pi; \pi]$ равенством $f(x) = \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

2.15. Используя комплексную форму ряда Фурье, разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \operatorname{ch} x$ на интервале $[-\pi; \pi]$.

2.16. Используя комплексную форму ряда Фурье, разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \operatorname{sh}\, x$ на интервале $(-\pi; \pi)$.

Ответы:

2.13. $f(x) = \dfrac{1-e^{-\pi}}{2\pi} + \dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}e^{-\pi}+1}{1+n^2}\,(\cos(nx) + n\sin(nx))$, $x \neq \pi k$, $k \in Z$;

2.14. 1) $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\,e^{inx}$;

2) $f(x) = \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\,\cos(nx)$;

2.15. $\operatorname{ch}\, x = \dfrac{2\operatorname{sh}\,\pi}{\pi}\left[\dfrac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cos(nx)}{1+n^2}\right]$, $-\pi \leq x \leq \pi$;

2.16 $\operatorname{sh}\, x = \dfrac{2\operatorname{sh}\,\pi}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}n\sin(nx)}{1+n^2}$, $-\pi < x < \pi$.

2.5. Типовой расчет “Разложение функции в тригонометрический ряд Фурье”

Приведем пример выполнения типового расчета.

1. Кусочно-линейную на промежутке $[0; 10]$ функцию $f(x)$, проходящую через точки $(0; 4)$, $(4; 4)$, $(10; 9)$, разложить на промежутке $[0; 10]$ в тригонометрический ряд Фурье по системе функций

$$\left\{\frac{1}{2}; \cos\left(\frac{2\pi kx}{10}\right); \sin\left(\frac{2\pi kx}{10}\right)\right\}.$$

2. Продолжить $f(x)$ через начало координат четным и нечетным образом и разложить на промежутке $[-10; 10]$ продолженную функцию в ряд Фурье по соответствующей системе функций.

3. Построить графики трех рядов Фурье.

4. Для каждого ряда найти значения коэффициентов Фурье a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4. Вычислить квадрат нормы разности в $L_2([0; 10])$ между $f(x)$ и четвертой частичной суммой ряда Фурье и квадрат нормы разности в $L_2([-10; 10])$ между продолженными четным и нечетным образом функциями и четвертыми частичными суммами соответствующих рядов Фурье.

График данной функции представлен на рис. 2.6.

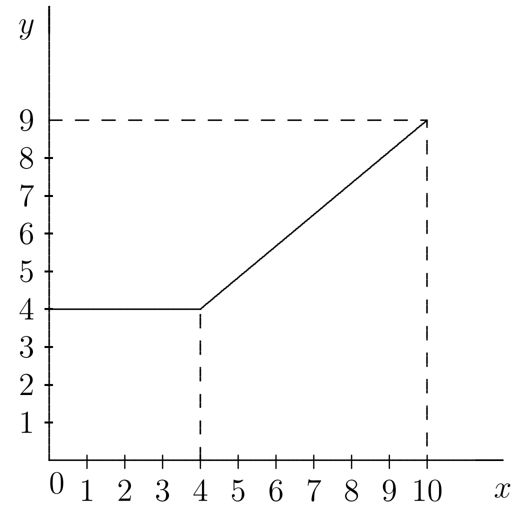

Рис. 2.6

Аналитически эта функция задается следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 4, \ x \in [0;4], \\ \dfrac{5}{6}x + \dfrac{2}{3}, \ x \in [4;10]. \end{cases}$$

1. Разложение в ряд Фурье данной функции, заданной на $[0;10]$, по ортогональной системе функций $\left\{\dfrac{1}{2};\ \cos\left(\dfrac{2\pi kx}{10}\right);\ \sin\left(\dfrac{2\pi kx}{10}\right)\right\}, k = 1, 2, ...,$ имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\left(\frac{2\pi kx}{10}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kx}{10}\right)\right),$$

где коэффициенты Фурье вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{2}{10}\int\limits_0^{10} f(x)\,dx,$$

$$a_k = \frac{2}{10}\int\limits_0^{10} f(x)\cos\left(\frac{2\pi kx}{10}\right)\,dx,$$

$$b_k = \frac{2}{10}\int\limits_0^{10} f(x)\sin\left(\frac{2\pi kx}{10}\right)\,dx.$$

В данном примере

$$a_0 = \frac{2}{10}\left(\int\limits_0^4 4\,dx + \int\limits_4^{10}\left(\frac{5}{6}x + \frac{2}{3}\right)\,dx\right) = \frac{2}{10}\left(16 + \frac{420}{12} + \frac{12}{3}\right) = 11,$$

$$a_k = \frac{2}{10}\left(\int\limits_0^4 4\cos\left(\frac{2\pi kx}{10}\right)\,dx + \int\limits_4^{10}\left(\frac{5}{6}x+\frac{2}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi kx}{10}\right)\,dx\right).$$

Рассмотрим каждое слагаемое:

$$\int\limits_0^4 4\cos\left(\frac{2\pi kx}{10}\right)\,dx = 4\,\frac{10}{2\pi k}\sin\left(\frac{2\pi kx}{10}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{20}{\pi k}\sin\left(\frac{4\pi k}{5}\right).$$

Интеграл $\int\limits_4^{10}\left(\frac{5}{6}x+\frac{2}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi kx}{10}\right)\,dx$ будем вычислять, интегрируя по частям. Напомним формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)\,dx = (u(x)v(x))\Big|_a^b - \int\limits_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

В исходном интеграле $u(x) = \frac{5}{6}x+\frac{2}{3}$, $v'(x) = \cos\left(\frac{2\pi kx}{10}\right)$. В результате вычислений получим

$$\int\limits_4^{10}\left(\frac{5}{6}x+\frac{2}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi kx}{10}\right)\,dx = -\frac{20}{\pi k}\sin\left(\frac{4\pi k}{5}\right)+\frac{125}{6\pi^2k^2}\left(1-\cos\left(\frac{4\pi k}{5}\right)\right).$$

Значит,

$$a_k = \frac{20}{\pi k}\sin\left(\frac{4\pi k}{5}\right) - \frac{20}{\pi k}\sin\left(\frac{4\pi k}{5}\right) + \frac{125}{6\pi^2k^2}\left(1-\cos\left(\frac{4\pi k}{5}\right)\right) =$$
$$= \frac{125}{6\pi^2k^2}\left(1-\cos\left(\frac{4\pi k}{5}\right)\right).$$

Найдем первые пять коэффициентов: $a_0 = 11$; $a_1 = 0,764$; $a_2 = 0,073$; $a_3 = 0,032$; $a_4 = 0,048$.

Вычислим коэффициенты b_k:

$$b_k = \frac{2}{10}\left(\int\limits_0^4 4\sin\left(\frac{2\pi kx}{10}\right)\,dx + \int\limits_4^{10}\left(\frac{5}{6}x+\frac{2}{3}\right)\sin\left(\frac{2\pi kx}{10}\right)\right)\,dx.$$

Применяя аналогичные приемы, как при вычислении коэффициентов a_k, получим формулы для коэффициентов b_k:

$$b_k = \frac{2}{10}\left(\left(-\frac{20}{\pi k}\cos\left(\frac{4\pi k}{5}\right)+\frac{20}{\pi k}\right)+\right.$$

$$+\left(-\frac{45}{\pi k}+\frac{20}{\pi k}\cos\left(\frac{4\pi k}{5}\right)-\frac{125}{6\pi^2k^2}\sin\left(\frac{4\pi k}{5}\right)\right)\Bigg)\Bigg)=$$
$$=-\frac{5}{\pi k}-\frac{25}{6\pi^2k^2}\sin\left(\frac{4\pi k}{5}\right).$$

Вычислим первые четыре коэффициента: $b_1 = 1,840$; $b_2 = -0,695$; $b_3 = -0,575$; $b_4 = -0,382$.

Ряд Фурье будет записан следующим образом:

$$S(x)=\frac{11}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{125}{6\pi^2k^2}\left(1-\cos\left(\frac{4\pi k}{5}\right)\right)\cos\left(\frac{2\pi kx}{10}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(-\frac{5}{\pi k}-\frac{25}{6\pi^2k^2}\sin\left(\frac{4\pi k}{5}\right)\right)\sin\left(\frac{2\pi kx}{10}\right)\right).$$

Если $f(x)$ продолжить периодически на всю вещественную ось, то значения ряда Фурье $S(x)$ будут совпадать со значениями $f(x)$ в точках непрерывности функции f, а в точках разрыва согласно теореме Дирихле $S(x_0)=\dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$ (см. рис. 2.6).

2. Продолжим функцию $f(x)$ четным образом на $[-10;0]$. График продолженной таким образом функции изображен на рис. 2.7.

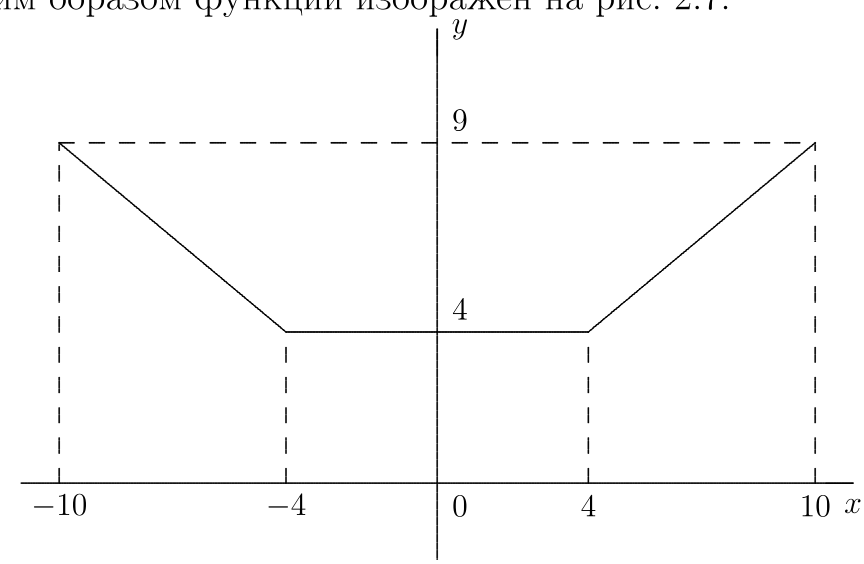

Рис. 2.7

Задание функции имеет вид

$$f_1(x)=\begin{cases}-\dfrac{5}{6}x+\dfrac{2}{3},\ x\in[-10;-4],\\ 4,\ x\in[-4;4],\\ \dfrac{5}{6}x+\dfrac{2}{3},\ x\in[4;10].\end{cases}$$

Разложим эту четную функцию, заданную на $[-10;10]$, в ряд Фурье по ортогональной системе функций $\left\{\frac{1}{2};\ \cos\frac{k\pi x}{10};\ \sin\frac{k\pi x}{10}\right\}$, $k=1,2,\dots$. Так как функция четная, то все ее коэффициенты Фурье $b_k=0$, $k=1,2,\dots$.

Вычислим $a_0=\frac{1}{10}\int\limits_{-10}^{10} f_1(x)\,dx=\frac{1}{5}\int\limits_{0}^{10} f(x)\,dx=11$ (см. п. 1),

$$a_k=\frac{1}{10}\int\limits_{-10}^{10} f_1(x)\cos\left(\frac{\pi kx}{10}\right)\,dx=$$

$$=\frac{2}{10}\left(\int\limits_{0}^{4} 4\cos\left(\frac{\pi kx}{10}\right)\,dx+\int\limits_{4}^{10}\left(\frac{5}{6}x+\frac{2}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi kx}{10}\right)\,dx\right)=$$

$$=\frac{2}{10}\left(\frac{40}{\pi k}\sin\left(\frac{4\pi k}{10}\right)+\left(-\frac{12\cdot 10}{3\pi k}\sin\left(\frac{2\pi k}{5}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\ \frac{50}{6\pi k}\left(-\frac{10}{\pi k}\cos(\pi k)+\frac{10}{\pi k}\cos\left(\frac{2\pi k}{5}\right)\right)\right)\right)=$$

(заметим, что $\cos(\pi k)$ и $(-1)^k$ принимают одинаковые значения при $k\in N$)

$$=\frac{50(-1)^k}{3\pi^2k^2}-\frac{50}{3\pi^2k^2}\cos\left(\frac{2\pi k}{5}\right).$$

При вычислении интегралов, как и в п. 1, пользуемся формулой интегрирования по частям в определенном интеграле.

На промежутке $[-10;10]$ ряд Фурье будет иметь вид

$$S_1(x)=\frac{11}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{50}{3\pi^2k^2}\left((-1)^k-\cos\left(\frac{2\pi k}{5}\right)\right)\cos\left(\frac{\pi kx}{10}\right)$$

и $a_0=11$, $a_1=-2,211$, $a_2=0,764$, $a_3=-0,036$, $a_4=0,073$.

Значения ряда Фурье $S_1(x)$ совпадают со значениями периодически продолженной на всю вещественную прямую функции $f_1(x)$ (см. рис. 2.7).

Продолжим $f(x)$ на промежуток $[-10;0]$ нечетным образом. График этой функции изображен на рис. 2.8.

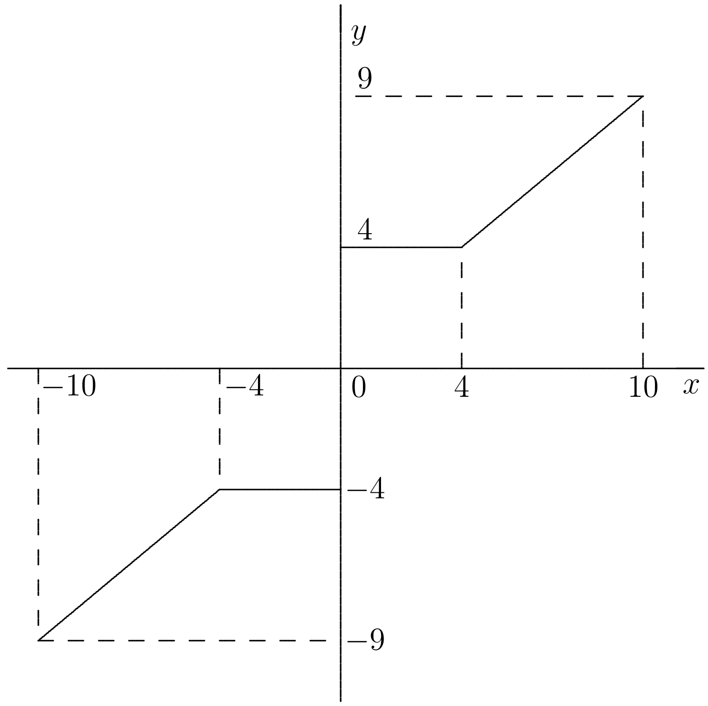

Рис. 2.8

Задание этой функции имеет вид

$$f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{6}\,x - \dfrac{2}{3}, \ x \in [-10; -4], \\ -4, \ x \in [-4; 0], \\ 4, \ x \in [0; 4], \\ \dfrac{5}{6}\,x + \dfrac{2}{3}, \ x \in [4; 10]. \end{cases}$$

Функцию $f_2(x)$ разложим в ряд Фурье по ортогональной системе функций $\left\{\dfrac{1}{2};\ \cos\dfrac{k\pi x}{10};\ \sin\dfrac{k\pi x}{10}\right\}$, $k = 1, 2, \dots$. Так как $f_2(x)$ нечетная функция, то ее коэффициенты Фурье $a_0 = 0$, $a_k = 0$, $k = 1, 2, \dots$.

Коэффициенты Фурье $b_k = \dfrac{1}{10}\displaystyle\int\limits_{-10}^{10} f(x)\sin\left(\dfrac{k\pi x}{10}\right)\,dx =$

$$= \frac{2}{10}\left(\int\limits_0^4 4\sin\left(\frac{k\pi x}{10}\right)\,dx + \int\limits_4^{10}\left(\frac{5}{6}\,x + \frac{2}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi k x}{10}\right)\,dx\right).$$

Вычислим эти интегралы, применяя, как и в п. 1, интегрирование по частям для вычисления второго интеграла. Получим

$$b_k = -\frac{18}{\pi k}\,(-1)^k + \frac{8}{\pi k} - \frac{50}{3\pi^2 k^2}\sin\left(\frac{2\pi k}{5}\right).$$

На промежутке $[-10;10]$ ряд Фурье для функции $f_2(x)$ будет иметь вид

$$S_2(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-18(-1)^k+8}{\pi k}-\frac{50}{3\pi^2k^2}\sin\left(\frac{2\pi k}{5}\right)\right)\sin\left(\frac{\pi kx}{10}\right), x\neq 0,$$

$S_2(0)=0$ и $b_1=6,670$; $b_2=-1,840$; $b_3=2,869$; $b_4=-0,695$.

Ряд Фурье $S_2(x)$ имеет те же значения, что и $f(x)$, периодически продолженная на всю вещественную ось в точках непрерывности, а в точках разрыва имеет соответствующие значения согласно теореме Дирихле (см. рис. 2.8).

3. Построим графики трех рядов Фурье. Они изображены на рис. 2.9 – 2.11.

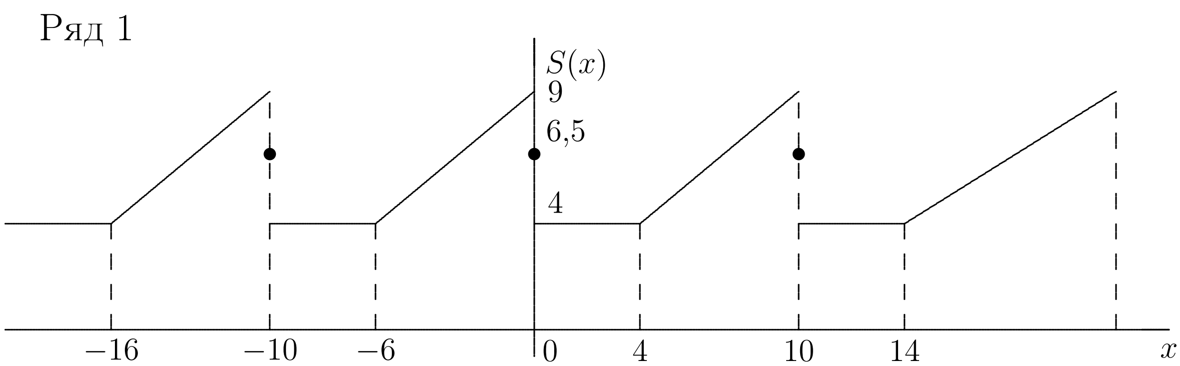

Рис. 2.9

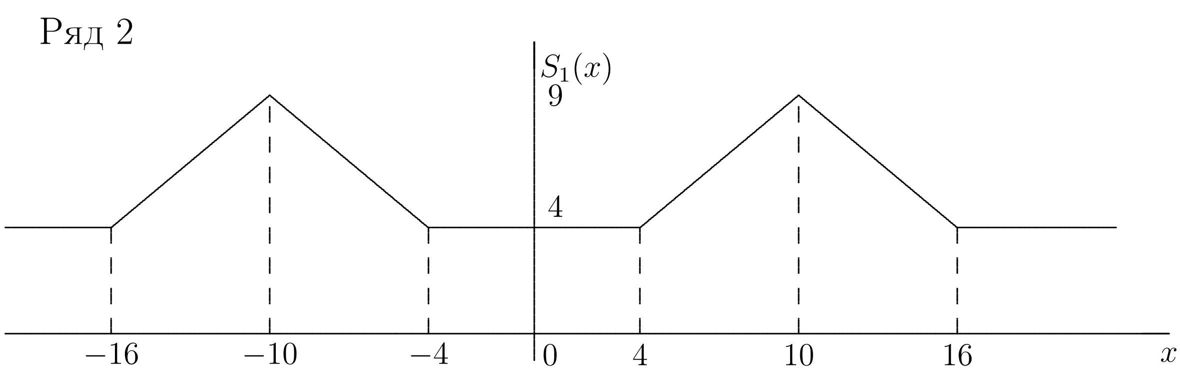

Рис. 2.10

Ряд 3

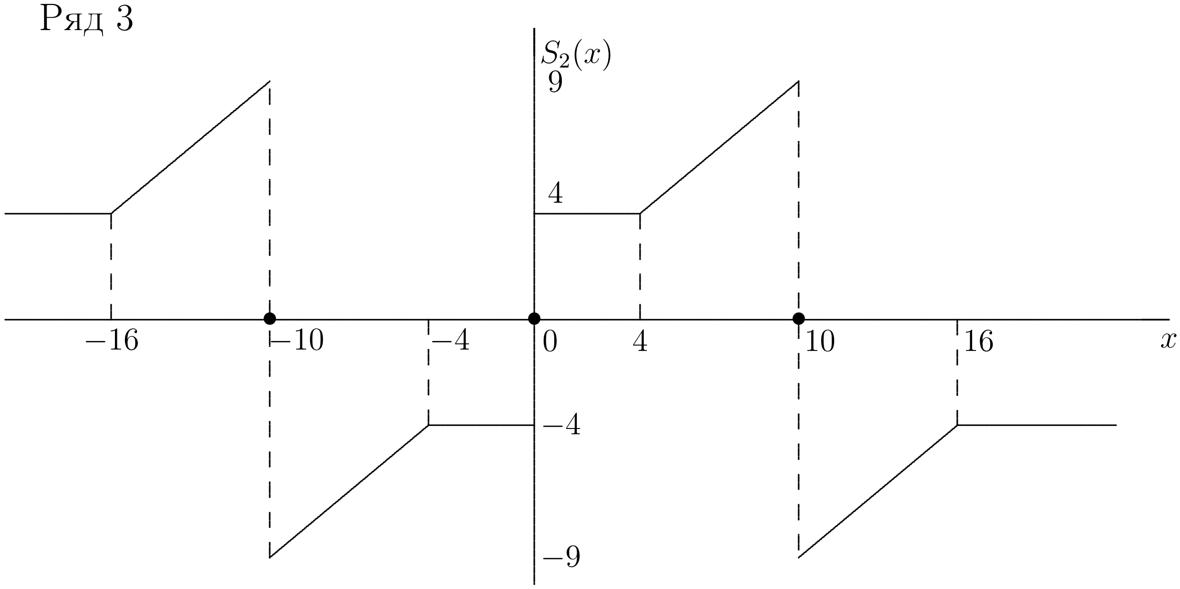

Рис. 2.11

4. Для того чтобы оценить точность приближения функции $f(x)$ рядом Фурье, вычислим квадрат нормы разности функции $f(x)$ и ее n-й частичной суммы ряда Фурье. Согласно равенству Парсеваля квадрат нормы в L_2 разности функции $f(x)$ и ее n-й частичной суммы ряда Фурье равен разности квадрата нормы функции $f(x)$ и квадрата нормы n-й частичной суммы ряда Фурье:

$$\|f - S_n\|^2 = \|f\|^2 - \|S_n\|^2.$$

В данном типовом расчете вычисляется квадрат нормы функции $f(x)$ и ее четвертой частичной суммы ряда Фурье, используя равенство Парсеваля.Вычислим квадрат нормы в L_2 функций $f(x)$, $f_1(x)$ и $f_2(x)$ и нормы $S_4(x)$ в каждом случае.

Для 1-го ряда вычислим квадрат нормы функции $f(x)$ в $L_2([0;10])$:

$$\|f\|^2 = \int\limits_0^{10} f^2(x)\,dx = \int\limits_0^4 4^2\,dx + \int\limits_4^{10} \left(\frac{5}{6}x + \frac{2}{3}\right)^2 dx =$$

$$= 16x\Big|_0^4 + \frac{2}{5}\left(\frac{5}{6}x + \frac{2}{3}\right)^3\Big|_4^{10} =$$

$$= 64 + \frac{2}{5}\left(\frac{50}{6} + \frac{2}{3}\right)^3 - \frac{2}{5}\left(\frac{20}{6} + \frac{2}{3}\right)^3 = 64 + \frac{2}{5}\left(\frac{27}{3}\right)^3 - \frac{2}{5}(4)^3 =$$

$$= 64 + 291,6 - 25,6 = 330.$$

Вычислим квадрат нормы 4-й частичной суммы ряда Фурье:

$$\|S_4\|^2 = \frac{10}{2}\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{4}(a_k^2 + b_k^2)\right) =$$

$$= \frac{10}{2}(\frac{11^2}{2} + 0,764^2 + (-1,840)^2 + 0,073^2 + .$$

$$+(-0,695)^2 + 0,032^2 + (-0,575)^2 + 0,048^2 + (-0,382)^2) = 327,188.$$

Приближение ряда Фурье к функции $f(x)$ оценим с помощью

$$\|f - S_4\|^2 = 330 - 327,188 = 2,812.$$

Для 2-го ряда вычислим квадрат нормы функции $f_1(x)$ в $L_2[-10;10]$:

$$\|f_1\|^2 = \int\limits_{-10}^{10} f^2(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{-10}^{-4} \left(-\frac{5}{6}x + \frac{2}{3}\right)^2 dx + \int\limits_{-4}^{4} 4^2\,dx + \int\limits_{4}^{10} \left(\frac{5}{6}x + \frac{2}{3}\right)^2 dx =$$

$$= -\frac{2}{5}\left(-\frac{5}{6}x + \frac{2}{3}\right)^3 \Bigg|_{-10}^{-4} + 16x\Bigg|_{-4}^{4} + \frac{2}{5}\left(\frac{5}{6}x + \frac{2}{3}\right)\Bigg|_{4}^{10} = 266 + 128 + 266 = 660$$

Вычислим квадрат нормы 4-й частичной суммы ряда Фурье:

$$\|S_4\|^2 = 2\,\frac{10}{2}\left[\frac{11^2}{2} + \sum_{k=1}^{4} a_k^2\right] =$$

$$= 10\left(\frac{11^2}{2} + 2,211^2 + 0,764^2 + 0,036^2 + 0,073^2\right) = 659,788.$$

Приближение ряда Фурье к функции $f_1(x)$ оценим с помощью

$$\|f_1 - S_4\|^2 = 660 - 659,788 = 0,212.$$

Для 3-го ряда вычислим квадрат нормы функции $f_2(x)$ в $L_2([-10;10])$:

$$\|f_2\|^2 = \int\limits_{-10}^{10} f^2(x)\,dx = \int\limits_{-10}^{-4} \left(\frac{5}{6}x - \frac{2}{3}\right)^2 dx + \int\limits_{-4}^{4} 16\,dx + \int\limits_{4}^{10} \left(\frac{5}{6}x + \frac{2}{3}\right)^2 dx = 660$$

Вычислим квадрат нормы 4-й частичной суммы ряда Фурье:

$$\|S_4\|^2 = 10\sum_{k=1}^{4} b_k^2 = 10(6,670^2 + 1,840^2 + 2,869^2 + 0,695^2) = 565,887$$

Приближение ряда Фурье к функции $f_2(x)$ оценим с помощью

$$\|f_2 - S_4\|^2 = 660 - 565,887 = 94,113$$

В данном типовом расчете было рассмотрено приближение функции четвертыми частичными суммами ряда Фурье и получено, что для 1-го ряда $\|f - S_4\| = 2,812$, для 2-го ряда $\|f_1 - S_4\| = 0,212$, для 3-го ряда $\|f_2 - S_4\| = 94,113$.

Такая разница в результатах объясняется свойствами функций, полученных в результате четного и нечетного продолжения исходной функции на вещественную прямую. В случае продолжения функции $f(x)$ четным образом получим наименьшее значение квадрата нормы $\|f_1 - S_4\|^2$, что естественно, так как продолженная функция, непрерывная на всей оси, обладает "наилучшими" свойствами. Функция $f_2(x)$ имеет больше всех точек разрыва 1-го рода, и поэтому квадрат нормы $\|f_2 - S_4\|^2$ максимален.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белопольский А. Л., Доценко М. Л., Трегуб В. Л. Элементы теории функций комплексного переменного: Учеб.пособие. СПб.:Изд-во СПбГЭТУ "ЛЭТИ", 2001.

2. Бугров Я. С., Никольский С. М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М.: Наука, 1985.

3. Боревич Е. З., Фролова Е. В., Челкак С. И. Ряды Фурье: Учеб.пособие. СПб.:Изд-во СПбГЭТУ "ЛЭТИ", 2010.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Редактор Э. К. Долгатов

Подписано в печать Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Гарнитура "Times". Печ. л. 4,0.
Тираж 144 экз. Заказ

Издательство СПбГЭТУ "ЛЭТИ"
197376, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5