

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Санкт-Петербургский государственный электротехнический
университет „ЛЭТИ“

А. Л. БЕЛОПОЛЬСКИЙ М. Л. ДОЦЕНКО В. Л. ТРЕГУБ

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО
ПЕРЕМЕННОГО

Учебное пособие

Под редакцией С. И. Челкака

Санкт-Петербург
Издательство СПбГЭТУ „ЛЭТИ“
2013

УДК 517.53/.55(07)

ББК В 161.55я7

Б 43

Б 43

Белопольский А. Л., Доценко М. Л., Трегуб В. Л. Теория функций комплексного переменного: Учебное пособие / Под ред. С. И. Челкака. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, 2013. 77 с.

ISBN ?

Излагаются элементы теории функций комплексного переменного и являющейся основой курса „Теория функций комплексного переменного“ технических университетов.

Предназначено для студентов факультета электроники, обучающихся по всем направлениям и специальностям.

Издание позволяет студентам самостоятельно изучать разделы курса кратко изложенные на лекциях. Наличие, подробно решенных примеров, должно помочь студентам в самостоятельной работе, при выполнении текущих домашних заданий.

УДК 517.53/.55(07)

ББК В14я7

Рецензенты: кафедра высшей математики СПбГПУ;
д-р физ.-мат. наук Н. В. Смородина (СПбГУ).

Утверждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве электронного учебного пособия

ISBN ?

© СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, 2013

Введение

Данное издание является исправленным и дополненным вариантом пособия [1]. В нем излагаются основы теории функций комплексного переменного соответствующие новой рабочей программе дисциплины „Теория функций комплексного переменного“ (ФГОС–3).

Первый раздел посвящен краткому описанию множества комплексных чисел, при этом предполагается знакомство читателя с пособием [2], к которому и отсылаем за подробностями. Отметим, что в пособии опускаются те доказательства, которые в основном повторяют доказательства в случае вещественной переменной. Подробности можно найти в пособиях [3] и [4].

В пособии не рассматриваются выходящие за рамки программы вопросы теории римановых поверхностей [5] „многозначных функций“, конформных отображений и аналитического продолжения, подробное изложение данных вопросов можно найти в учебниках [6], [7]. Обратим внимание на определение области, приведенное во втором разделе, которое не является наиболее общим.

Основная часть пособия (3–12) посвящена дифференциальному и интегральному исчислению функций комплексного переменного, теоремам Коши, рядам Тейлора и Лорана и теории вычетов.

Заканчивается пособие (13) примерами применения теории вычетов к вычислению определенных интегралов и (14) геометрическим принципам.

Читателей, интересующихся полным изложением теории функций комплексного переменного и многочисленными ее приложениями, адресуем к учебнику [7] и пособию [8].

Отметим некоторые стандартные обозначения, принятые в пособии. Множество натуральных чисел обозначается символом $\mathbb{N}$; множество целых чисел — $\mathbb{Z}$; множество вещественных чисел — $\mathbb{R}$; множество комплексных чисел — $\mathbb{C}$. Знак ■ отмечает конец доказательства; знак $\otimes$ — конец замечания, а знак • — конец примера.

1. Множество комплексных чисел

Определения и свойства комплексных чисел подробно описаны в пособии [2, гл. 2]. Здесь ограничимся кратким изложением основных фактов.

Комплексными числами $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ называются упорядоченные пары вещественных чисел, где $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Равенство $z_1 = z_2$, где $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$, равносильно выполнению системы равенств

$$\begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2. \end{cases}$$
 Для комплексных чисел определены 2 операции: сложение

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad (1.1)$$

и умножение

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1), \quad (1.2)$$

обладающие всеми свойствами этих же операций для вещественных чисел.

Комплексное число $z = (0, 1)$ называется мнимой единицей и обозначается $i = (0, 1)$. Согласно определению умножения (1.2), очевидно, $i^2 = -1$. Представление комплексного числа $z = (x, y)$ в виде $z = x + yi$ называется его алгебраической формой. При этом сложение (1.1) и умножение (1.2) комплексных чисел можно производить с помощью формальных алгебраических преобразований, учитывая, что $i^2 = -1$. Приведем формулу деления комплексных чисел в алгебраической форме ($z_2 = x_2 + y_2 i \neq 0$):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

Если $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, то x называется вещественной частью комплексного числа z , а y — мнимой частью комплексного числа z и используются обозначения $x = \Re z$, $y = \Im z$. Если $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, то число $(x, -y) = x - yi$ называется комплексно-сопряженным и обозначается $\bar{z}$.

Так как комплексное число есть упорядоченная пара вещественных чисел, то множество $\mathbb{C}$ полезно отождествлять с вещественной плоскостью $\mathbb{R}^2$. Введем на плоскости $\mathbb{R}^2$ декартову (прямоугольную) систему координат и каждому комплексному числу $z = x + yi$ поставим в соответствие (взаимно-однозначное) точку плоскости с координатами (x, y) , которую будем обозначать через z , так же как и соответствующее ей число. Вещественным числам (т. е. комплексным числам вида $z = x + 0i$) соответствуют при этом точки оси абсцисс, и поэтому ось абсцисс назовем вещественной осью. Точкам оси ординат соответствуют комплексные числа вида $z = 0 + yi = yi$; эту ось назовем мнимой осью. Началу координат, очевидно, соответствует число $0 + 0i$ (или просто 0). Плоскость с фиксированной декартовой системой координат, на которой изображаются описанным способом комплексные числа, назовем комплексной плоскостью (или плоскостью $\mathbb{C}$).

На комплексной плоскости $\mathbb{C}$ наряду с декартовой системой координат введем полярную систему координат (рис. 1.1). Полярный радиус r точки

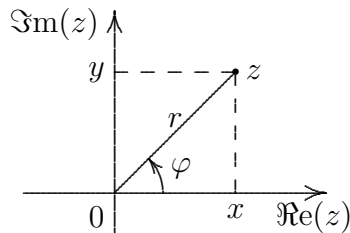


Рис. 1.1

z называется *модулем комплексного числа* z и обозначается $|z|$. Ясно, что модуль комплексного числа определен однозначно, при этом:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$$

и $r = |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$. Полярный угол φ точки z называется *аргументом комплексного числа* z и обозначается

$\varphi = \text{Arg}(z)$. Главное значение полярного угла $\varphi_0 = \arg(z) \in (-\pi, \pi]$ называют главным значением аргумента. Очевидно, для комплексного числа $z = 0$ аргумент не определен. Если $z \neq 0$, то $\text{Arg}(z) = \arg(z) + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Если заданы модуль r и аргумент φ комплексного числа $z = x + yi$, то

$$\begin{cases} x = r \cos(\varphi), \\ y = r \sin(\varphi) \end{cases}$$

и поэтому

$$z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = |z|(\cos(\text{Arg}(z)) + i \sin(\text{Arg}(z))). \quad (1.3)$$

Представление комплексного числа z в виде (1.3) называют *тригонометрической формой записи*.

Если для $\varphi \in \mathbb{R}$ ввести, по определению,

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi), \quad (1.4)$$

то в соответствии с (1.3) и (1.4) получим для любого ненулевого комплексного числа z представление

$$z = re^{i\varphi},$$

называемое *показательной формой записи комплексного числа*.

Введем на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ понятие окрестности точки.

Определение 1.1. Пусть $c \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Множество

$$K_\varepsilon(c) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| < \varepsilon\}$$

называется ε -окрестностью точки c . Множество

$$\overset{\circ}{K}_\varepsilon(c) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - c| < \varepsilon\} = K_\varepsilon(c) \setminus \{c\}$$

называется *проколотой ε -окрестностью точки c* .

Данное определение очень похоже на определение окрестности точки на множестве вещественных чисел (см. определение 2.1 в [3]).

Определение 1.2. Множество $X \subset \mathbb{C}$ называется *ограниченным*, если существует такое $M > 0$, что $|z| \leq M$ для любого $z \in X$.

Пусть $\{z_n\}$ – последовательность комплексных чисел $z_n = x_n + iy_n$.

Определение 1.3. Число $c \in \mathbb{C}$ называется *пределом последовательности $\{z_n\}$* , если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, что при любом $n > N$, z_n принадлежит ε -окрестности $K_\varepsilon(c)$ точки c , т. е. выполнено неравенство $|z_n - c| < \varepsilon$ для всех $n > N$. Обозначение: $\lim z_n = c$ или $z_n \rightarrow c$.

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, а в противном случае – *расходящейся*.

Утверждение 1.1. Для существования $\lim z_n = c$ необходимо и достаточно, чтобы вещественная последовательность $r_n = |z_n - c|$ имела предел 0 ($\lim |z_n - c| = 0$).

Доказательство сразу следует из определения 1.3.

Запишем комплексные числа z_n и c в алгебраической форме: $z_n = x_n + iy_n$ и $c = a + ib$. Справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1.2. Для существования $\lim z_n = c$ необходимо и достаточно, чтобы существовали 2 предела вещественных последовательностей

$$\begin{cases} x_n \rightarrow a, \\ y_n \rightarrow b. \end{cases}$$

Доказательство. $\Rightarrow$ Если $z_n \rightarrow c$, то из утверждения 1.1 следует, что $|z_n - c| \rightarrow 0$. Так как выполнены неравенства

$$0 \leq |x_n - a| \leq \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} = |z_n - c|,$$

то согласно теореме о пределе сжатой последовательности (см. [3, теорема 2.8])

$$|x_n - a| \rightarrow 0 \implies x_n \rightarrow a.$$

Аналогично, $y_n \rightarrow b$.

$\Leftarrow$ Пусть $x_n \rightarrow a$ и $y_n \rightarrow b$. Тогда

$$0 \leq |z_n - c| = |(x_n - a) + i(y_n - b)| = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} \rightarrow 0.$$

По теореме о пределе сжатой последовательности $|z_n - c| \rightarrow 0$ и по утверждению 1.1 $z_n \rightarrow c$. ■

Определение 1.4. Комплексная последовательность $\{z_n\}$ в $\mathbb{C}$ называется фундаментальной или последовательностью Коши, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N , что неравенство $|z_k - z_n| < \varepsilon$ справедливо для любых $n > N$ и $k > N$.

Аналогично случаю вещественной последовательности [3, 2.9] для последовательности комплексных чисел остаются справедливыми факты:

- 1) единственность предела последовательности;
- 2) ограниченность сходящейся последовательности;
- 3) критерий Коши: последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна;
- 4) теоремы о пределе суммы, произведения и частного;
- 5) теорема Больцано–Вейерштрасса: ограниченная в $\mathbb{C}$ последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность [9, 3.6].

Утверждение 1.3. Если существует $\lim z_n = c$, то существуют пределы $\lim \bar{z}_n = \bar{c}$ и $\lim |z_n| = |c|$.

Доказательство. Согласно утверждению 1.2

$$\lim z_n = c \implies \begin{cases} x_n \rightarrow a, \\ y_n \rightarrow b. \end{cases} \quad (1.5)$$

Из (1.5) $\lim(-y_n) = -b$ и согласно теореме о пределе суммы

$$\lim \bar{z}_n = \lim(x_n - iy_n) = \lim(x_n + i(-y_n)) = a - ib = \bar{c}.$$

Используя свойства вещественных последовательностей и (1.5):

$$\lim |z_n| = \lim \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |c|. \blacksquare$$

Можно доказать следующее.

Утверждение 1.4. Если существует $\lim z_n = c$ и $c \neq 0$, $\arg(c) \neq \pi$, то существует предел $\lim \arg(z_n) = \arg(c)$.

Замечание 1.1. Если $\arg(c) = \pi$, то для последовательности $\{z_n^{(1)}\}$, $\Im(z_n^{(1)}) > 0$, имеющей предел $\lim z_n^{(1)} = c$, очевидно получим

$$\lim \arg(z_n^{(1)}) = \pi,$$

а для последовательности $\{z_n^{(2)}\}$, $\Im(z_n^{(2)}) < 0$, имеющей тот же предел $\lim z_n^{(2)} = c$, выполнено $\lim \arg(z_n^{(2)}) = -\pi$. Если же построить последова-

тельность $z_k = \begin{cases} z_n^{(1)} & \text{при } k = 2n - 1, \\ z_n^{(2)} & \text{при } k = 2n, \end{cases}$ то $\lim z_n = c$, но последова-

тельность $\{\arg(z_n)\}$ расходится. $\otimes$

Понятие „бесконечности“ на множестве $\mathbb{C}$ вводится с помощью следующего определения.

Определение 1.5. Последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ называется сходящейся к бесконечности: $\lim z_n = \infty$, если

$$\lim |z_n| = +\infty. \quad (1.6)$$

В этом случае последовательность $\{z_n\}$ называется бесконечно большой.

Соотношение (1.6) означает, что для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, что неравенство

$$|z_n| > \varepsilon \quad (1.7)$$

выполняется для всех $n > N$.

Для бесконечно больших последовательностей комплексных чисел верны следующие утверждения.

1. Если $z_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, то $\lim z_n = \infty$ тогда и только тогда, когда $\lim \frac{1}{z_n} = 0$.

2. Если $\lim z_n = \infty$ и $|\zeta_n| < C < +\infty$, то $\lim(z_n + \zeta_n) = \infty$ и $\lim \frac{\zeta_n}{z_n} = 0$.

3. Если $\lim z_n = \infty$ и $\lim \zeta_n = c \neq 0$, то $\lim(z_n \zeta_n) = \infty$ и $\lim \frac{z_n}{\zeta_n} = \infty$.

Рассмотрим геометрический смысл соотношения (1.6). Неравенство (1.7) означает, что точка z_n лежит вне круга радиуса ε с центром в точке 0 (рис. 1.2). Множество

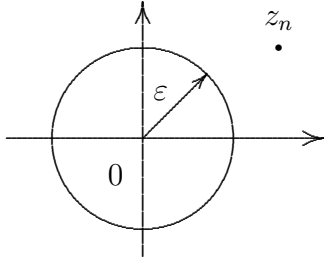


Рис. 1.2

$$K_\varepsilon(\infty) = \{z \mid |z| > \varepsilon\}$$

называется *окрестностью бесконечности*. Следовательно, ∞ является пределом последовательности $\{z_n\}$, если в любой окрестности $K_\varepsilon(\infty)$ содержатся все члены этой последовательности, за исключением их конечного числа. Таким

образом, символу $z = \infty$ ставится в соответствие бесконечно удаленная точка. Комплексная плоскость, дополненная бесконечно удаленной точкой, называется *расширенной комплексной плоскостью* ($\overline{\mathbb{C}}$).

Приведем геометрическую интерпретацию расширенной комплексной плоскости. Рассмотрим сферу S , касающуюся комплексной плоскости Π в

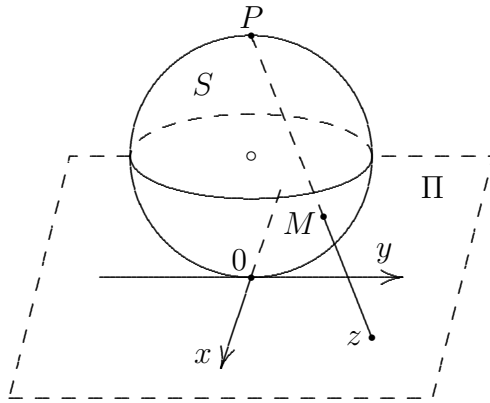


Рис. 1.3

точке 0 (рис. 1.3). Обозначим через P точку сферы S , диаметрально противоположную точке 0 (северный полюс сферы). Каждой точке z комплексной плоскости Π поставим в соответствие точку M , которая является точкой пересечения сферы S с отрезком, соединяющим точки z и P . Ясно, что при этом последовательности $\{z_n\}$, сходящейся к бес-

конечности, соответствует последовательность точек сферы S , сходящихся к точке P . Поэтому точке $z = \infty$ поставим в соответствие точку P . Такое соответствие между точками расширенной комплексной плоскости

и точками сферы S является взаимно-однозначным. Оно называется *стереографической проекцией*, а сфера S называется *сферой Римана*.

Комплексные числа (включая $z = \infty$) можно изображать точками на сфере Римана. При этом сходящиеся последовательности комплексных чисел изображаются на сфере Римана сходящимися последовательностями точек.

При стереографической проекции окружности переходят в окружности, угол между пересекающимися кривыми на плоскости равен углу между образами этих кривых на сфере Римана [10].

Определение 1.6. Дана последовательность $\{z_n\}$, $z_n \in \mathbb{C}$. Образует новую последовательность $\{S_n\}$ по правилу $S_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n$. Пара последовательностей $\{z_n\}$ и $\{S_n\}$ называется *числовым рядом* в $\mathbb{C}$. Если существует $\lim S_n = S \in \mathbb{C}$, то говорят, что ряд сходится, S называется *суммой ряда*, и пишут $S = \sum_{n=1}^{+\infty} z_n$. В противном случае ряд расходится.

В дальнейшем будем использовать упрощенную терминологию: рядом будем называть символ $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$, а не пару последовательностей. Конечно, в доказательствах надо строить последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ и доказывать существование ее предела.

Пусть $z_n = x_n + iy_n$.

Утверждение 1.5. Ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ сходится тогда и только тогда, когда одновременно сходятся вещественные ряды $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$.

Доказательство. Преобразуем частичные суммы

$$S_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) + i(y_1 + y_2 + \dots + y_n) = S'_n + iS''_n,$$

где S'_n и S''_n – частичные суммы вещественных рядов $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$. Согласно утверждению 1.2

$$S_n \rightarrow S = S' + iS'' \iff \begin{cases} S'_n \rightarrow S', \\ S''_n \rightarrow S''. \blacksquare \end{cases}$$

Определение 1.7. Говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ абсолютно сходится, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|$.

Утверждение 1.6. Ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ сходится абсолютно тогда и только тогда, когда абсолютно сходятся ряды $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$.

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть сходится ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|$. Из очевидных неравенств $|z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \geq |x_n|$ и $|z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \geq |y_n|$ по признаку сравнения положительных рядов следует сходимость рядов $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} |y_n|$. Значит, ряды $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ сходятся абсолютно.

$\Leftarrow$ Пусть ряды $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} |y_n|$ сходятся, тогда сходится и ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} (|x_n| + |y_n|)$. Так как

$$|z_n| = |x_n + iy_n| \leq |x_n| + |i||y_n| = |x_n| + |y_n|,$$

то по признаку сравнения положительных рядов ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|$ сходится, зна-

чит, ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ сходится абсолютно. ■

Утверждение 1.7. Если ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ абсолютно сходится, то он сходится.

Доказательство. Если ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|$ сходится, то согласно утвержде-

нию 1.6 ряды $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} |y_n|$ сходятся. Следовательно, согласно теореме об абсолютной сходимости вещественного ряда (см. теорему 9.8 из [3]), ряды $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ сходятся. Тогда по утверждению 1.5 ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ также сходится. ■

2. Функции комплексного переменного. Предел. Непрерывность

Множество, на котором определена функция комплексного переменного, может быть произвольным множеством элементов $\mathbb{C}$. Однако для дальнейшего такая общность не нужна, и под областью определения функции обычно понимают множество специального вида, называемое областью.

Определение 2.1. Множество $D \subset \mathbb{C}$ называется областью D , если:

- 1) вместе с любой точкой z этого множества ему принадлежит ε -окрестность $K_\varepsilon(z)$ с достаточно малым ε ;
- 2) любые 2 точки этого множества можно соединить непрерывной линией, целиком принадлежащей этому множеству.

Используя язык теории множеств можно сказать, что область – открытое связное множество.

Определение 2.2. Если D – область и точка $z \notin D$, но для любого $\varepsilon > 0$ есть хотя бы одна такая точка $z_0 \in K_\varepsilon(z)$, что $z_0 \in D$, то точка z называется граничной точкой области D . Множество всех граничных точек D называется границей области D и обозначается через ∂D . Множество точек, принадлежащее области D и ее границе ∂D , назовем замкнутой областью и обозначим $\bar{D} = D \cup \partial D$.

Определение 2.3. Граничная точка z называется изолированной точкой границы области, если существует окрестность точки $K_\varepsilon(z)$, такая, что точка z является единственной не принадлежащей области D точкой $K_\varepsilon(z)$.

Условимся, какие границы будем рассматривать в дальнейшем. Для этого дадим следующее определение¹.

¹При этом ограничимся не самым общим случаем, но достаточным для большинства приложений.

Определение 2.4. Кривая (или дуга) называется гладкой, если она непрерывна, не имеет самопересечений (может быть замкнутой) и в каждой ее точке можно провести касательную, причем направление касательной изменяется непрерывно при движении точки по кривой.

Непрерывная кривая, не имеющая самопересечений, которая состоит из конечного числа гладких дуг, примыкающих друг к другу концами, называется кусочно-гладкой.

Отметим, что кусочно-гладкая кривая может иметь конечное число точек, в которых касательная не существует.

Предположим, что граница ∂D области D состоит из конечного числа замкнутых кривых Γ_i , незамкнутых кривых (разрезов) γ_k и изолированных точек c_m , при этом считается, что замкнутые кривые и разрезы кусочно-гладкие.

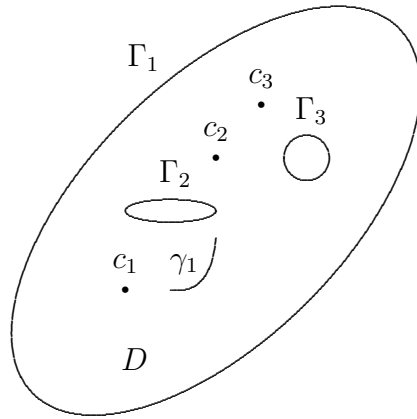


Рис. 2.1

Если число попарно не пересекающихся, замкнутых кривых, разрезов и точек, из которых состоит граница равно n , то область называется n -связной. В случае $n = 1$ область называется односвязной. Граница области D , изображенной на рис. 2.1 состоит из трех замкнутых кривых (Γ_1 , Γ_2 , Γ_3), одного разреза (γ_1) и трех точек (c_1 , c_2 , c_3) и, таким образом, область является семисвязной.

Гладкая кривая задается двумя уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где $t_1 \leq t \leq t_2$, причем различным значениям параметра t из (t_1, t_2) соответствуют различные точки кривой Γ . Функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывно дифференцируемы при $t \in [t_1, t_2]$ и производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ одновременно не обращаются в ноль. Уравнение кривой можно заменить одним уравнением $z = z(t)$, где

$$z = z(t) = x(t) + iy(t) = \varphi(t) + i\psi(t). \quad (2.1)$$

Уравнение (2.1) называется *уравнением кривой в комплексной форме* и ему соответствует кривая на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Очевидно, гладкая кривая спрямляема, т. е. имеет конечную длину.

Если гладкая кривая $z = z(t)$ является замкнутой, то должны быть выполнены еще условия:

$$z(t_1) = z(t_2), \quad \frac{dz}{dt}(t_1) = \frac{dz}{dt}(t_2), \quad \left(\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + i \frac{dy}{dt} \right).$$

Проиллюстрируем параметризацию на простых примерах.

Пример 2.1. Найти комплексное уравнение части параболы $y = x^2$ между точками $(0, 0)$ и $(1, 1)$. В качестве параметра можно взять $t = x$, $t \in [0, 1]$. Поэтому искомое уравнение будет $z = t + it^2$, $t \in [0, 1]$. •

Пример 2.2. Найти комплексное уравнение окружности радиуса r с центром в точке a (рис. 2.2). Запишем число $z - a$ в показательной форме $z - a = \rho e^{i\varphi}$. Для точек данной окружности $\rho = |z - a| = r$. Поэтому искомое уравнение будет $z = a + re^{it}$, где параметр t равен $\varphi = \arg(z - a)$. Так как различным точкам из интервала (t_1, t_2) должны соответствовать различные точки кривой, а значениям параметра t_1 и t_2 — одна точка кривой, то $|t_1 - t_2| = 2\pi$. Будем считать, что $t \in [-\pi, \pi]$. •

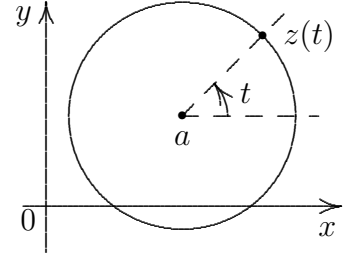


Рис. 2.2

Определение 2.5. Если каждому элементу $z \in X \subset \mathbb{C}$ по некоторому правилу f поставлен в соответствие единственный элемент $w \in Y \subset \mathbb{C}$, то говорят, что на множестве комплексных чисел X определена (задана) функция f комплексного переменного z , принимающая значения из подмножества Y множества комплексных чисел.

При этом используется обозначение $f : X \rightarrow Y$, а значение функции f в точке z обозначается $f(z)$.

В дальнейшем будем предполагать, что множества X и Y из определения 2.5 являются областями.

Подобно тому, как задание комплексного числа z равносильно заданию двух вещественных чисел x и y : $z = (x, y) \in X \subset \mathbb{R}^2$, то положив $u(x, y) = \Re f(z)$, $v(x, y) = \Im f(z)$, получим $u, v : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ и $f = u + iv$. Следовательно, функции u и v есть функции двух вещественных переменных.

Если между точками множеств X и Y существует взаимно-однозначное соответствие, устанавливаемое с помощью функции $w = f(z)$, то существует и обратное соответствие между множествами Y и X . Поэтому z можно также рассматривать как функцию w . Такая функция $z = f^{-1}(w)$ называется обратной по отношению к функции $f : X \rightarrow Y$; она отображает множество Y на множество X ($f^{-1} : Y \rightarrow X$).

Определение 2.6. Взаимно-однозначная функция комплексного переменного называется однолистной.

Заметим, что график функции комплексного переменного является подмножеством множества $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ (имеющего размерность четыре) и не может быть наглядно изображен. Довольно часто используются схемы с

изображением двух экземпляров комплексной плоскости (z) и (w) , на которых изображаются точки c_i , линии γ и области D на плоскости (z) и их образы $c'_i = f(c_i)$, $\gamma' = f(\gamma)$ и $D' = f(D')$ на плоскости (w) (рис. 2.3).

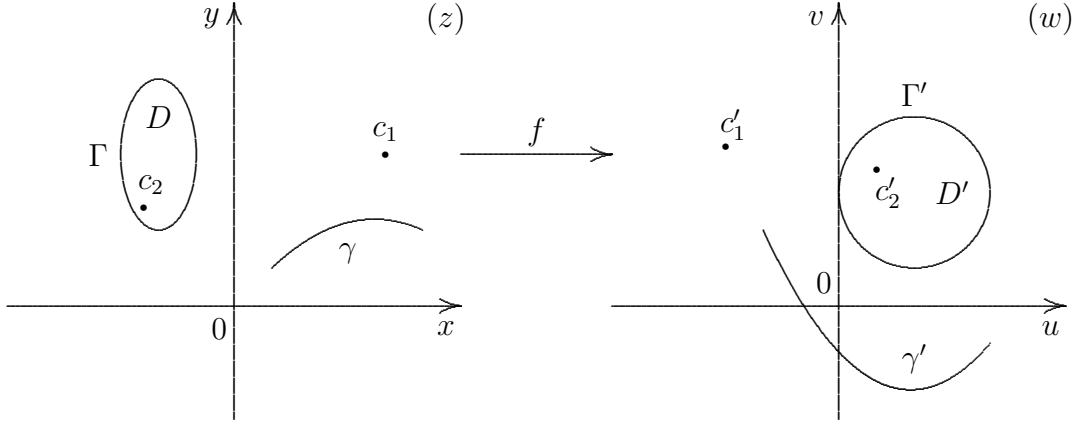


Рис. 2.3

Напомним, что точка $c \in \mathbb{C}$ называется *предельной точкой* множества $X \subset \mathbb{C}$, если в любой проколотой окрестности $\overset{\circ}{K}_\delta(c)$ содержатся точки, принадлежащие множеству X .

Определение 2.7. Пусть $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$ – предельная точка множества X , $C \in \mathbb{C}$. Тогда:

1) (предел по Коши) число C называется *пределом функции f в точке c* , если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что выполнено $f(z) \in K_\varepsilon(C)$ для всех $z \in \overset{\circ}{K}_\delta(c) \cap X$ (иначе: для всех $z \in X$, таких что $0 < |z - c| < \delta$, выполнено неравенство $|f(z) - C| < \varepsilon$);

2) (предел по Гейне) число C называется *пределом функции f в точке c* , если для любой последовательности $\{z_n\}$, такой что $z_n \in X$ и $z_n \neq c$, сходящейся к c ($z_n \rightarrow c$), последовательность $\{f(z_n)\}$ сходится к C , т. е. $f(z_n) \rightarrow C$.

Определения предела по Коши и Гейне эквивалентны. Используются обозначения: $\lim_{z \rightarrow c} f(z) = C$ и $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow c} C$.

Утверждение 2.1. Если $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, $f = u + iv$, $c = a + ib$ – предельная точка X и $C = A + iB$, то для существования предела $\lim_{z \rightarrow c} f(z) = C$ необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} u(x,y) = A$ и $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} v(x,y) = B$.

Утверждение 2.2. Если $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, c – предельная точка X , $C = A + iB$ и существует $\lim_{z \rightarrow c} f(z) = C$, то существуют пределы $\lim_{z \rightarrow c} \overline{f(z)} = \overline{C} = A - iB$ и $\lim_{z \rightarrow c} |f(z)| = |C| = \sqrt{A^2 + B^2}$.

Доказательства утверждений 2.1 и 2.2 легко провести используя определение предела функции по Гейне и утверждения 1.2 и 1.3 соответственно.

Аналогично случаю функции одной вещественной переменной остаются справедливыми свойства предела функции: единственность; ограниченность функции, имеющей предел; арифметические операции с пределами; теорема о пределе суперпозиции; критерий Коши существования предела, сравнение предельного поведения функций $(o, O, \sim)$, при этом сохраняется терминология (см. [3, 2.2 – 2.6, 3.1]).

Приведем определения бесконечного предела и предела на бесконечности.

Определение 2.8. *Говорят:*

- 1) $\lim_{z \rightarrow c} f(z) = \infty$, если $\lim_{z \rightarrow c} |f(z)| = +\infty$;
- 2) $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = C$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что из $|z| > \delta$, $z \in X$ следует $|f(z) - C| < \varepsilon$, т. е. $f(z) \in K_\varepsilon(C)$.

Введем определение непрерывной функции.

Определение 2.9. Пусть $X \subset \mathbb{C}$, тогда функция $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ называется непрерывной в точке $c \in X$, если $\lim_{z \rightarrow c} f(z) = f(c)$.

Если функция f непрерывна в каждой точке множества X , то говорят, что f непрерывна на множестве X .

Как и в случае непрерывных функций вещественного переменного, для непрерывных функций комплексного переменного остаются справедливыми теоремы об арифметических операциях и суперпозиции непрерывных функций (см. [3, теоремы 3.2 и 3.1]).

Определение 2.10. Функция $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ называется равномерно непрерывной на X , если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что для любых $z_1, z_2 \in X$, таких, что $|z_1 - z_2| < \delta$ выполнено $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$.

Если функция f непрерывна на ограниченном замкнутом множестве X , то она ограничена, достигает наибольшего и наименьшего по модулю значений и равномерно непрерывна на X .

Если точка c такова, что $c \in X$ и функция f не является непрерывной в точке c , или точка c – предельная точка X , но $c \notin X$, то точка c называется точкой разрыва функции f .

3. Дифференцируемость функций комплексного переменного

Рассмотрим область $D \subset \mathbb{C}$, пусть $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$. Так как по определению области (см. определение 2.1) все точки области внутренние, то точка z_0 является предельной точкой области D . Пусть задана функция $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, которую запишем в виде $f = u(x, y) + iv(x, y)$, где функции u и v – функции двух вещественных переменных x и y .

Определение 3.1. Функция комплексного переменного f называется дифференцируемой в точке z_0 , если существует такое число $C \in \mathbb{C}$, что

$$f(z) = f(z_0) + C(z - z_0) + o(|z - z_0|).$$

Отметим, что $o(|z - z_0|)$ – комплекснозначная функция.

Определение 3.2. Если существует

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

то этот предел называется производной функции f в точке z_0 и обозначается $f'(z_0)$ или $\frac{df}{dz}(z_0)$.

Теорема 3.1. Функция f дифференцируема в точке z_0 тогда и только тогда, когда существует $f'(z_0)$ и при этом справедлива формула

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|). \quad (3.1)$$

Формула (3.1) называется формулой Тейлора первого порядка для функции f в точке z_0 .

Доказательство в точности повторяет доказательство аналогичной теоремы для функции одного вещественного переменного (см. предложения 4.1 и 4.2 из [3]).

Теорема 3.2. Функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_0 тогда и только тогда, когда функции u и v дифференцируемы в точке (x_0, y_0) и выполнены равенства

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{cases} \quad (3.2)$$

Условия (3.2) называются условиями Коши – Римана.

Доказательство. Обозначим через

$$\rho = |z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

расстояние между точками (x_0, y_0) и (x, y) .

$\Rightarrow$ Пусть функция f дифференцируема в точке z_0 . По определению 3.1 существует такое $C = A + iB$, что $f(z) = f(z_0) + C(z - z_0) + o(\rho)$ или

$$\begin{aligned} u(x, y) + iv(x, y) &= u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) + \\ &+ (A + iB)((x - x_0) + i(y - y_0)) + \Re(o(\rho)) + i\Im(o(\rho)). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u(x_0, y_0) + A(x - x_0) - B(y - y_0) + \Re(o(\rho)), \\ v(x, y) &= v(x_0, y_0) + B(x - x_0) + A(y - y_0) + \Im(o(\rho)), \end{aligned}$$

значит, функции двух вещественных переменных u и v дифференцируемы в точке (x_0, y_0) и

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \\ B &= -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ Пусть функции u и v дифференцируемы в точке (x_0, y_0) и выполнены условия (3.2). Положим

$$A = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad B = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \quad (3.3)$$

Из определения дифференцируемости функций двух вещественных переменных u и v в точке (x_0, y_0) следует (с учетом (3.2) и (3.3)):

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u(x_0, y_0) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\rho) = \\ &= u(x_0, y_0) + A(x - x_0) - B(y - y_0) + o(\rho), \\ v(x, y) &= v(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\rho) = \\ &= v(x_0, y_0) + B(x - x_0) + A(y - y_0) + o(\rho). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
u(x, y) + iv(x, y) &= u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) + (A + iB)(x - x_0) + \\
&+ (-B + iA)(y - y_0) + \left(o(\rho) + io(\rho)\right) = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) + \\
&+ (A + iB)(x - x_0) + i(A + iB)(y - y_0) + o(\rho) = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) + \\
&+ (A + iB)\left((x - x_0) + i(y - y_0)\right) + o(\rho);
\end{aligned}$$

значит, $f(z) = f(z_0) + (A + iB)(z - z_0) + o(|z - z_0|) = f(z_0) + C(z - z_0) + o(|z - z_0|)$, т. е. по определению 3.1 функция f дифференцируема в точке z_0 . ■

Замечание 3.1. В теореме 3.1 попутно доказано, что $f'(z_0) = A + iB$, где

$$A = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad B = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Это означает, что производная может быть вычислена по одной из формул

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \quad \otimes \quad (3.4)
\end{aligned}$$

Замечание 3.2. Остаются справедливы правила дифференцирования суммы, произведения, частного, суперпозиции и обратной функции. Формулировки и доказательства повторяют соответствующие правила для функций одного вещественного переменного (см. 4.2 и 4.3 из [3]) и здесь не приводятся. $\otimes$

Определение 3.3. Если функция f комплексного переменного дифференцируема в каждой точке области D , то она называется аналитической (иногда используются термины голоморфная и регулярная) в области D .

Замечание 3.3. Говорят „функция f аналитична в точке z_0 “, если f аналитична в некоторой окрестности точки z_0 . $\otimes$

Дадим теперь геометрическую интерпретацию производной функции комплексного переменного. Пусть функция $w = f(z)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки z_0 и пусть $f'(z_0) \neq 0$. Рассмотрим гладкую кривую $\gamma: z = \sigma(t)$, $a \leq t \leq b$, проходящую через точку $z_0 = \sigma(t_0)$, $t_0 \in (a, b)$.

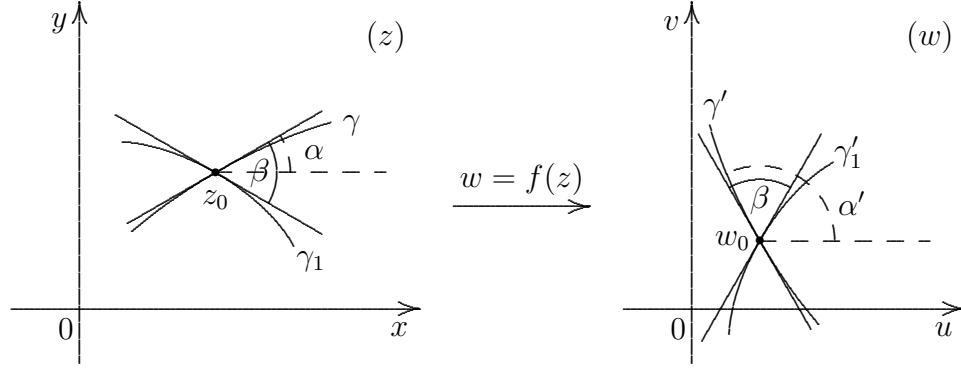


Рис. 3.1

Обозначим через α угол, образуемый касательной к кривой γ в точке z_0 и положительным направлением вещественной оси (рис. 3.1). Можно показать, что $\alpha = \arg \left(\frac{d\sigma}{dt}(t_0) \right)$.

Пусть γ' – образ кривой γ при отображении $w = f(z)$, т.е. γ' : $w = w(t) = f(\sigma(t))$, $a \leq t \leq b$, а точка w_0 – образ точки z_0 ($w_0 = w(t_0) = f(\sigma(t_0)) = f(z_0)$). По правилу дифференцирования суперпозиции

$$w'(t_0) = f'(z_0)\sigma'(t_0). \quad (3.5)$$

Так как $\sigma'(t_0) \neq 0$ и по условию $f'(z_0) \neq 0$, то $w'(t_0) \neq 0$, т.е. кривая γ' имеет касательную в точке w_0 . Пусть $\text{Arg}(w'(t_0)) = \alpha'$. Тогда из (3.5) находим $\alpha' = \arg(f'(z_0)) + \arg(\sigma'(t_0))$, т.е.

$$\alpha' = \alpha + \arg(f'(z_0)). \quad (3.6)$$

Величина $\tau = \alpha' - \alpha$ называется *углом поворота кривой γ в точке z_0 при отображении $w = f(z)$* . Из формулы (3.6) следует, что если $f'(z_0) \neq 0$, то угол поворота в точке z_0 *не зависит от кривой* и равен $\tau = \arg(f'(z_0))$, т.е. все кривые, проходящие через точку z_0 , поворачиваются при отображении $w = f(z)$ ($f'(z_0) \neq 0$) *на один и тот же угол, равный аргументу производной в точке z_0* .

Таким образом, отображение $w = f(z)$, где $f(z)$ – дифференцируемая в окрестности точки z_0 функция и $f'(z_0) \neq 0$, *сохраняет углы между кривыми, проходящими через точку z_0* , не только по величине, но и по направлению отсчета (см. рис. 3.1).

Рассмотрим произвольную точку z на кривой γ , расположенную достаточно близко к точке z_0 . Обозначим $\Delta z = z - z_0$ и $\Delta w = f(z) - f(z_0) = w - w_0$. Согласно определению 3.2 и утверждению 2.2 $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = |f'(z_0)|$ и поэтому

$$|\Delta w| = |f'(z_0)| |\Delta z| + o(|\Delta z|). \quad (3.7)$$

Пусть $|\Delta z| = \rho$, где ρ достаточно мало, тогда с помощью формулы (3.7) находим, что окружность $|z - z_0| = \rho$ переходит при отображении $w = f(z)$ в кривую, которая мало отличается от окружности

$$|w - w_0| = \rho |f'(z_0)|.$$

Таким образом, отображение $w = f(z)$ с точностью до малых более высокого порядка, чем Δz , растягивает круг $|\Delta z| < \rho$ в $|f'(z_0)|$ раз.

Величина $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = k$ называется *линейным растяжением* кривой

γ в точке z_0 при отображении $w = f(z)$. Линейное растяжение в точке z_0 не зависит от вида и направления кривой и равно $k = |f'(z_0)|$.

Пусть функция $f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z_0 .

Определение 3.4. Отображение $w = f(z)$ называется *конформным* в точке z_0 , если оно сохраняет углы между кривыми и обладает свойством постоянства растяжений в точке z_0 .

Очевидно следующее утверждение.

Утверждение 3.1. Если функция $f(z)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки z_0 и $f'(z_0) \neq 0$, то отображение $w = f(z)$ является конформным в точке z_0 .

Определение 3.5. Отображение f называется *конформным* в области D , если функция $f(z)$ дифференцируема и однолистна в области D и отображение $w = f(z)$ является конформным в каждой точке области D .

Из определений 3.4 и 3.5 вытекает следующее утверждение.

Утверждение 3.2. Если функция $f(z)$ дифференцируема в области D , однолистна в области D и $f'(z) \neq 0$ во всех точках $z \in D$, то отображение $w = f(z)$ является конформным.

Замечание 3.4. Отображение $w = f(z) = u + iv$ эквивалентно отображению

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y). \end{cases} \quad (3.8)$$

Якобиан J отображения (3.8) равен

$$J = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Используя условия Коши – Римана (3.2), получим

$$J = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2.$$

Так как согласно (3.4) $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$, то условие $f'(z_0) \neq 0$ означает, что якобиан отображения (3.8) в точке z_0 отличен от нуля.

4. Некоторые элементарные функции комплексного переменного

Дадим определения некоторых элементарных функций комплексного переменного и докажем их основные свойства.

Определение 4.1. Пусть $z = (x, y) = x + iy$. Функция из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$, заданная по правилу

$$e^z = \exp(z) = e^x(\cos y + i \sin y),$$

называется комплексной экспонентой.

Если $x = (x, 0) = x + i0$ – вещественное число, то

$$e^{x+i0} = e^x(\cos 0 + i \sin 0) = e^x$$

и введенная в определении 4.1 комплексная экспонента совпадает с вещественной экспонентой.

Утверждение 4.1. Комплексная экспонента обладает следующими свойствами:

$$1) \quad |e^z| = e^x, \quad y \in \{\operatorname{Arg} e^z\}; \quad (4.1)$$

$$2) \quad e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}; \quad (4.2)$$

$$3) \quad \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}; \quad (4.3)$$

4) корнями уравнения $e^z = 1$ являются комплексные числа $z = 2\pi ki$, где $k \in \mathbb{Z}$;

5) e^z является периодической функцией с мнимым основным периодом $2\pi i$:

$$e^{z+2\pi i} = e^z \quad \text{для любых } z \in \mathbb{C}. \quad (4.4)$$

Доказательство. Докажем формулы (4.1). По определению модуля комплексного числа:

$$|e^z| = \sqrt{(e^x \cos y)^2 + (e^x \sin y)^2} = \sqrt{e^{2x}(\cos^2 y + \sin^2 y)} = \sqrt{e^{2x}} = e^x.$$

Так как $e^z = |e^z|(\cos y + i \sin y)$ – тригонометрическая форма записи e^z , то $y = \operatorname{Arg} e^z$.

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, тогда элементарные преобразования дают:

$$\begin{aligned} e^{z_1} e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1) e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) = \\ &= e^{x_1+x_2} \left(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i(\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2) \right) = \\ &= e^{x_1+x_2} \left(\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2) \right) = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2} \end{aligned}$$

и формула (4.2) доказана.

Согласно (4.2) $e^{z_1-z_2} e^{z_2} = e^{z_1-z_2+z_2} = e^{z_1}$, следовательно, по определению частного, $e^{z_1}/e^{z_2} = e^{z_1-z_2}$ и формула (4.3) доказана.

Равенство $e^z = 1$ равносильно системе равенств $\begin{cases} e^x \cos y = 1, \\ e^x \sin y = 0. \end{cases}$ Так

как $e^x \neq 0$, то $\begin{cases} \sin y = 0, \\ e^x \cos y = 1 \end{cases}$ и, поскольку $e^x > 0$, очевидна следующая последовательность утверждений:

$$\begin{cases} \sin y = 0, \\ \cos y > 0, \\ e^x \cos y = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 2\pi k, \\ e^x = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 2\pi k, \\ x = 0 \end{cases} \implies z = 2\pi ki, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Если последовательно воспользоваться (4.2) и тем фактом, что $2\pi i$ является корнем уравнения $e^z = 1$, то

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z \cdot 1 = e^z$$

для любого $z \in \mathbb{C}$.

С другой стороны, пусть $e^{z+T} = e^z$; умножая обе части на e^{-z} , получаем $e^T = 1$, т. е. $T = 2n\pi i$ и $2\pi i$ действительно является основным периодом. Следовательно, свойство периодичности (4.4) доказано. ■

Замечание 4.1. Если $z = (0, \varphi) = 0 + i\varphi$ – чисто мнимое число, то из опред. 4.1 следует, что $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, т. е. формула Эйлера. ⊗

Из формулы Эйлера следует, что

$$e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi) = \cos \varphi - i \sin \varphi.$$

Складывая и вычитая эти равенства, получаем

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Утверждение 4.2. Для любого $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ все корни уравнения $e^z = a$ могут быть найдены по формуле

$$z = \ln |a| + i(\arg(a) + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Представим число a в показательной форме

$$a = |a|e^{i \arg(a)} = e^{\ln |a|} e^{i \arg(a)} = e^{\ln |a| + i \arg(a)},$$

значит, уравнение $e^z = a$ можно переписать в виде

$$e^z = e^{\ln |a| + i \arg(a)}$$

и, разделив обе части уравнения на $e^{\ln |a| + i \arg(a)}$, учитывая свойство (4.3), получим

$$e^z / e^{\ln |a| + i \arg(a)} = e^{z - \ln |a| - i \arg(a)} = 1.$$

Согласно утверждению 4.1

$$z - \ln |a| - i \arg(a) = 2\pi ki, \quad k \in \mathbb{Z},$$

значит, $z = \ln |a| + i(\arg(a) + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$. ■

Уравнение $e^z = 0$ решений не имеет, так как $|e^z| = e^x > 0$.

Замечание 4.2. Множество всех решений уравнения $e^z = a$ для любого $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ обозначается $\text{Ln}(a)$. Согласно утверждению 4.2

$$\text{Ln}(a) = \ln |a| + i(\arg(a) + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}. \otimes$$

Пусть область $D = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \Im(z) < \pi\}$ – полоса на комплексной плоскости (z) (рис. 4.1), а $D' = \{w \in \mathbb{C} \mid w \neq 0 \wedge \arg(w) \neq \pi\}$

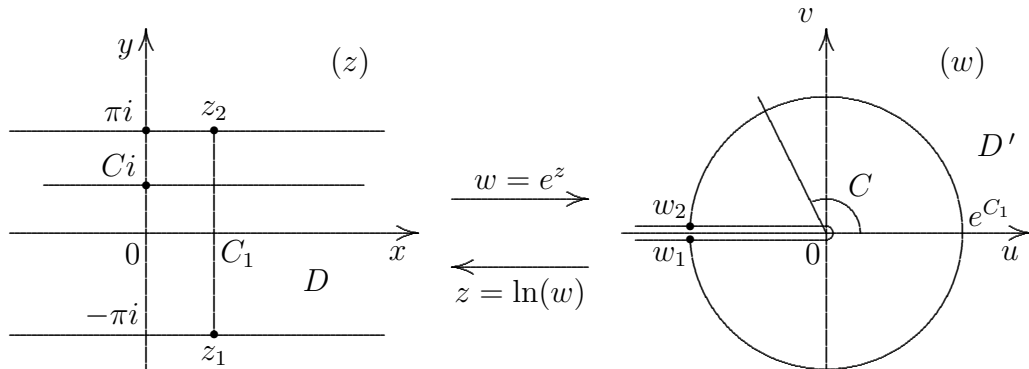


Рис. 4.1

– комплексная плоскость (w) с разрезом, совпадающим с отрицательной частью вещественной оси. При отображении $w = e^z$ прямая $z = x + iC$ (C – фиксировано, $-\pi < C < \pi$; $-\infty < x < +\infty$), параллельная вещественной оси и лежащая в полосе D , переходит в линию $w = e^{x+iC} = e^x e^{iC}$, т. е.

в луч $\arg(w) = C$. При этом прямые $z = x - i\pi$, $-\infty < x < +\infty$ и $z = x + i\pi$, $-\infty < x < +\infty$, образующие границу полосы D , отображаются на лучи $\arg(w) = -\pi$ и $\arg(w) = \pi$ соответственно. Заметим, что отрезок $z = C_1 + iy$ (C_1 – фиксировано, $-\pi < y < \pi$), лежащий в полосе D и параллельный мнимой оси, переходит в “незамкнутую” окружность $w = e^{C_1+iy} = e^{C_1}e^{iy}$ ($-\pi < y < \pi$) радиуса e^{C_1} (точке $z_1 = C_1 - i\pi$ соответствует точка $w_1 = e^{C_1}e^{-i\pi}$ нижнего берега разреза, а точке $z_2 = C_1 + i\pi$ – точка $w_2 = e^{C_1}e^{i\pi}$ верхнего берега разреза.)

Таким образом, функция $w = e^z$ отображает эту полосу на плоскость с разрезом по лучу $(-\infty, 0]$ так, что нижний край полосы переходит в нижний берег разреза, а верхний край полосы переходит в верхний берег разреза.

Утверждение 4.3. Функция $f : D \rightarrow D'$ $f(z) = e^z = w$ имеет обратную $f^{-1} : D' \rightarrow D$, причем $f^{-1}(w) = \ln |w| + i \arg(w)$.

Доказательство. Покажем, что f взаимно-однозначна. Пусть числа $z_1, z_2 \in D$, $z_1 \neq z_2$. Допустим, что $e^{z_1} = e^{z_2}$, тогда $e^{z_1-z_2} = 1$ и согласно утверждению 4.1 $z_1 - z_2 = 2\pi ki$, $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно, если $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, то

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ y_1 - y_2 = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

и так как $-\pi < y_1 < \pi$, $-\pi < y_2 < \pi$, то $y_1 = y_2$. Значит, $z_1 = z_2$, т. е. пришли к противоречию.

Из утверждения 4.2 следует, что уравнение $e^z = w$ имеет решение для любого $w \in D'$ и, значит, функция f отображает D на D' и взаимно-однозначна. Следовательно, как известно (см. определения 1.6 и 1.7 из [3]), существует $f^{-1} : D' \rightarrow D$, а также, поскольку $f^{-1}(w) \in D$, то по предложению 4.2 $z = f^{-1}(w) = \ln |w| + i \arg(w)$. ■

Замечание 4.3. Функция $e^z : D \rightarrow D'$ является согласно утверждению 4.3 и определению 2.6 однолистной. $\otimes$

Определение 4.2. Функция $\ln(z) : D' = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0 \wedge \arg(z) \neq -\pi\} \rightarrow D = \{w \in \mathbb{C} \mid -\pi < \Im(w) \leq \pi\}$, где $\ln z = \ln |z| + i \arg(z)$, называется логарифмической.

Функция $\ln z$ является обратной к функции e^z , т. е. $\ln(e^z) \equiv z$ при $z \in D$. Если же $w \in D'$, то $e^{\ln w} \equiv w$.

Замечание 4.4. В большинстве учебников по теории функций комплексного переменного вводится „многозначная“ функция

$$\text{Ln } z : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, \text{ Ln } z = \ln |z| + i \text{Arg}(z) = \ln |z| + i \arg(z) + 2\pi ki, k \in \mathbb{Z}.$$

Изучение „многозначных“ функций выходит за рамки данного пособия. Точные определения и свойства „многозначных“ функций можно найти, например, в учебнике [7, гл. IV]. $\otimes$

Утверждение 4.4. *Функция e^z является аналитической на $\mathbb{C}$, и $(e^z)' = e^z$.*

Доказательство. По определению экспоненты $e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$ и $u(x, y) = e^x \cos(y)$, $v(x, y) = e^x \sin(y)$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos(y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin(y), \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin(y), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos(y).$$

Эти частные производные непрерывны на всей плоскости и, следовательно, u и v дифференцируемы в любой точке и, очевидно, в каждой точке выполнены условия Коши – Римана. Следовательно, по теореме 3.2 функция e^z дифференцируема в любой точке комплексной плоскости и по первой из формул (3.4)

$$(e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos(y) + i e^x \sin(y) = e^x (\cos(y) + i \sin(y)) = e^z. \blacksquare$$

Утверждение 4.5. *Отображение $w = e^z : D \rightarrow D'$ является конформным.*

Доказательство. Если $f(z) = e^z$, то $f'(z) = e^z$ и $f'(z) \neq 0$, так как $|e^z| = e^x > 0$. Кроме того, согласно замечанию 4.3 функция $f(z)$ является однолистной. $\blacksquare$

Утверждение 4.6. *Функция $\ln(z)$ является аналитической на D' , и $(\ln(z))' = \frac{1}{z}$.*

Доказательство. Согласно замечанию 3.2 функция $\ln(z)$ дифференцируема в каждой точке D' как обратная к экспоненте, и по правилу дифференцирования обратной функции

$$(\ln(z))' = \frac{1}{(e^w)' \Big|_{w=\ln(z)}} = \frac{1}{e^{\ln(z)}} = \frac{1}{z}. \blacksquare$$

Утверждение 4.7. *Функция z^n , $n \in \mathbb{N}$, является аналитической на $\mathbb{C}$, и $(z^n)' = n z^{n-1}$.*

Доказательство. Рассмотрим степенную функцию z^n при $n \in \mathbb{N}$. Эта функция однозначна и, очевидно, непрерывна на комплексной плоскости. Поскольку целые степени определяются рекуррентно с помощью правила $z^n = z z^{n-1}$, то учитывая, что произведение дифференцируемо и $z' = 1$ (аналогично вещественному случаю), получим, что z^n , $n \in \mathbb{N}$, дифференцируема и справедлива формула $(z^n)' = n z^{n-1}$. $\blacksquare$

Утверждение 4.8. Функция z^{-n} , $n \in \mathbb{N}$, является аналитической на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, и $(z^{-n})' = -nz^{-n-1}$.

Доказательство. Для случая отрицательных степеней z^{-n} , $n \in \mathbb{N}$, степенная функция определена на множестве $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ как частное $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$. Поэтому дифференцируемость функции z^{-n} следует из формулы дифференцирования частного, если знаменатель отличен от нуля, и утверждения 4.7. ■

Для вещественных показателей a , $a \notin \mathbb{Z}$, функцию z^a можно определить формулой $z^a = e^{a \ln z}$. Обозначим через D' множество $D' = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0 \wedge \arg(z) \neq \pi\}$.

Утверждение 4.9. Функция z^a является аналитической на D' , и $(z^a)' = az^{a-1}$.

Доказательство. Поскольку функция $z^a = e^{a \ln z}$ является суперпозицией аналитической на $\mathbb{C}$ функции $\exp(z)$ и аналитической на D' функции $\ln(z)$, то согласно замечанию 3.2 она дифференцируема на D' и

$$(z^a)' = e^{a \ln(z)} (a \ln(z))' = e^{a \ln(z)} \frac{a}{z} = z^a \frac{a}{z} = az^{a-1}. \blacksquare$$

Определим некоторые тригонометрические функции комплексного переменного.

Определение 4.3. Функции из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$, определенные по правилам

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

называются синусом и косинусом комплексного переменного, соответственно.

Очевидно, по замечанию 4.1 при вещественном z синус и косинус совпадают с вещественными синусом и косинусом.

Утверждение 4.10. Для функций $\sin(z)$, $\cos(z)$, где $z \in \mathbb{C}$, выполнено основное тригонометрическое тождество:

$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1. \quad (4.5)$$

Для косинуса и синуса суммы справедливы формулы:

$$\begin{aligned} \cos(z_1 + z_2) &= \cos(z_1) \cos(z_2) - \sin(z_1) \sin(z_2), \\ \sin(z_1 + z_2) &= \sin(z_1) \cos(z_2) + \cos(z_1) \sin(z_2). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Косинус – четная функция, а синус – нечетная функция:

$$\cos(-z) = \cos(z), \quad \sin(-z) = -\sin(z). \quad (4.7)$$

Уравнение $\cos(z) = 0$ имеет бесконечное множество корней: $z = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, а уравнение $\sin z = 0$ имеет корни $z = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Функции $\cos(z)$ и $\sin(z)$ 2π -периодичны, т. е.

$$\cos(z + 2\pi) = \cos(z), \quad \sin(z + 2\pi) = \sin(z) \quad (4.8)$$

для любого $z \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Для доказательства тождества (4.5) достаточно воспользоваться определением 4.3 и проделать элементарные преобразования:

$$\begin{aligned} \cos^2(z) + \sin^2(z) &= \frac{1}{4} (e^{iz} + e^{-iz})^2 - \frac{1}{4} (e^{iz} - e^{-iz})^2 = \\ &= \frac{1}{4} (e^{2iz} + 2 + e^{-2iz} - e^{2iz} + 2 - e^{-2iz}) = 1. \end{aligned}$$

Остальные свойства докажем только для косинусов. Доказательство для синусов аналогично.

Преобразуем правую часть первой из формул (4.6), используя определение 4.3:

$$\begin{aligned} \cos(z_1) \cos(z_2) - \sin(z_1) \sin(z_2) &= \\ &= \frac{1}{2} (e^{iz_1} + e^{-iz_1}) \frac{1}{2} (e^{iz_2} + e^{-iz_2}) - \frac{1}{2i} (e^{iz_1} - e^{-iz_1}) \frac{1}{2i} (e^{iz_2} - e^{-iz_2}) = \\ &= \frac{1}{4} (e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1-z_2)} + e^{i(z_1-z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1-z_2)} - \\ &\quad - e^{i(z_1-z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}) = \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}}{2} = \cos(z_1 + z_2). \end{aligned}$$

Первая из формул (4.7) получается сразу из определения 4.3:

$$\cos(-z) = \frac{e^{i(-z)} + e^{-i(-z)}}{2} = \frac{e^{-iz} + e^{iz}}{2} = \cos(z).$$

Уравнение $\cos(z) = 0$ равносильно уравнению $e^{iz} + e^{-iz} = 0$ (см. определение 4.3), которое, очевидно, равносильно уравнению $e^{2iz} = -1$. Воспользовавшись утверждением 4.2, получим

$$\begin{aligned} 2iz &= \text{Ln}(-1) = \ln|-1| + i(\arg(-1) + 2\pi k) = \\ &= \ln(1) + i(\pi + 2\pi k) = i\pi(2k + 1), \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

и окончательно корни уравнения $\cos(z) = 0$ равны $z = \frac{\pi(2k + 1)}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Для доказательства периодичности косинуса (первая из формул (4.8)) воспользуемся первой из формул (4.6) и учтем, что $\sin(2\pi) = 0$ и $\cos(2\pi) = 1$, так как для вещественных аргументов введенные косинус и синус совпадают с вещественными косинусом и синусом соответственно:

$$\cos(z + 2\pi) = \cos(z) \cos(2\pi) - \sin(z) \sin(2\pi) = \cos(z)$$

для любого $z \in \mathbb{C}$. ■

Замечание 4.5. Для тех z , при которых это определено, полагают $\operatorname{tg}(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$, $\operatorname{ctg}(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$. ⊗

Утверждение 4.11. Функции $\sin(z)$ и $\cos(z)$ являются аналитическими на $\mathbb{C}$, и $(\sin(z))' = \cos(z)$, $(\cos(z))' = -\sin(z)$.

Доказательство. Докажем утверждение для синуса (для косинуса аналогично). Функция $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ дифференцируема в любой точке $\mathbb{C}$ согласно замечанию 3.2 и по нему же

$$(\sin(z))' = \frac{1}{2i} ((e^{iz})' - (e^{-iz})') = \frac{1}{2i} (ie^{iz} + ie^{-iz}) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos(z). \blacksquare$$

5. Интеграл от функции комплексного переменного

Пусть на комплексной плоскости дана гладкая или кусочно-гладкая кривая (дуга) Γ (см. определение 2.4). Обозначим граничные точки кривой через A и B ; если кривая замкнута, то $A = B$. Одну из этих точек, например A , будем считать начальной, а другую (B) – конечной; тем самым устанавливается направление на кривой Γ (от A к B). Разобьем кривую (рис. 5.1) произвольным способом на n частей точками

$$z_0 = A, z_1, \dots, z_k, z_{k+1}, \dots, z_{n-1}, z_n = B,$$

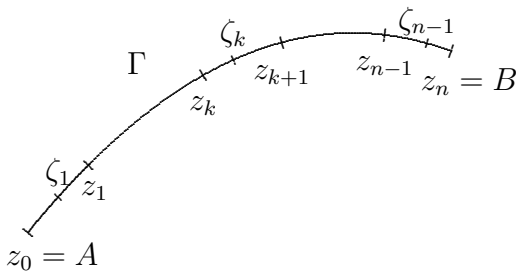


Рис. 5.1

при этом говорят, что задано разбиение кривой на дуги $[z_k, z_{k+1}]$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Разбиение обычно обозначается буквой Π . Выберем точки $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k \in [z_k, z_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Получим разбиение с отмеченными точками Π_ζ . Обозначим $z_k = x_k + iy_k$, $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$ и Δl_k – длину дуги

$[z_k, z_{k+1}]$. Число $d(\Pi) = \max_{k=0,1,\dots,n-1} \Delta l_k$ называется рангом разбиения Π .

Пусть D – произвольная область, содержащая Γ и $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ – ограниченная функция. Число

$$S_{\Pi_\zeta}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k) \Delta z_k$$

называется интегральной суммой функции f (по кривой Γ), соответствующей разбиению с отмеченными точками Π_ζ .

Определение 5.1. Число J называется интегралом от функции комплексного переменного f по кривой Γ , если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого разбиения Π с $d(\Pi) < \delta$ и любого выбора точек ζ_k справедливо неравенство $|S_{\Pi_\zeta}(f) - J| < \varepsilon$.

Интеграл по кривой Γ обозначается $J = \int_{\Gamma} f(z) dz$. Если надо подчеркнуть выбранное направление кривой (от A к B , рис. 5.1), то будем использовать обозначение: $J = \int_{\Gamma(AB)} f(z) dz$.

Замечание 5.1. Пусть дана область D , ограниченная конечным числом замкнутых (несамопересекающихся) ориентированных кривых Γ_i , $i = 1, 2, \dots, k$. Говорят, что Γ_i ориентирована относительно области D в положительном направлении, если область D остается слева при движении по Γ_i в направлении ориентации Γ_i . $\otimes$

Поясним замечание 5.1 на примере. Граница ∂D области D , изображенной на рис. 5.2, состоит из двух замкнутых кривых Γ_1 и Γ_2 ($\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$). На Γ_1 положительным направлением следует считать движение по кривой против хода часовой стрелки, а на Γ_2 положительное направление – движение по ходу часовой стрелки. На рисунке направления указаны стрелками.

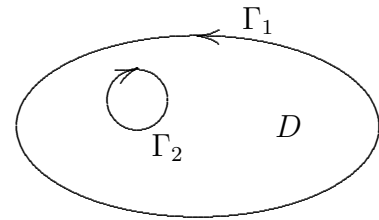


Рис. 5.2

Договоримся об обозначениях, которые будем использовать дальше.

Интеграл по замкнутой кривой Γ обозначим $\oint_{\Gamma} f(z) dz$; если при этом важно направление обхода, то интеграл по Γ при движении по ходу часовой стрелки обозначается $\oint_{\Gamma^-} f(z) dz$, а против хода часовой стрелки – $\oint_{\Gamma^+} f(z) dz$.

Теорема 5.1. Пусть задана функция комплексного переменного $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$, $f = u + iv$. Интеграл $\int_{\Gamma} f(z) dz$ существует тогда и только тогда, когда существуют криволинейные интегралы второго рода $\int_{\Gamma} u dx - v dy$, $\int_{\Gamma} u dy + v dx$ и при этом справедливо равенство

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} u dx - v dy + i \int_{\Gamma} u dy + v dx. \quad (5.1)$$

Доказательство. Преобразуем интегральные суммы

$$\begin{aligned} S_{\Pi_{\zeta}}(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k) \Delta z_k = \sum_{k=0}^{n-1} (u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k)) (\Delta x_k + i \Delta y_k) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (u(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k) + i \sum_{k=0}^{n-1} (u(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k + v(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k) = \\ &= S_{1\Pi_{\zeta}} + i S_{2\Pi_{\zeta}}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Пусть существует $\int_{\Gamma} f(z) dz = J = J_1 + i J_2$, тогда

$$\begin{aligned} |S_{\Pi_{\zeta}}(f) - J| &= |S_{1\Pi_{\zeta}} + i S_{2\Pi_{\zeta}} - J_1 - i J_2| = \\ &= |(S_{1\Pi_{\zeta}} - J_1) + i(S_{2\Pi_{\zeta}} - J_2)| = \sqrt{(S_{1\Pi_{\zeta}} - J_1)^2 + (S_{2\Pi_{\zeta}} - J_2)^2}. \end{aligned}$$

Значит, $|S_{\Pi_{\zeta}}(f) - J| \geq |S_{1\Pi_{\zeta}} - J_1|$ и $|S_{\Pi_{\zeta}}(f) - J| \geq |S_{2\Pi_{\zeta}} - J_2|$. Согласно определению 5.1 для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого разбиения Π с $d(\Pi) < \delta$ и любого выбора точек ζ_k выполнено неравенство $|S_{\Pi_{\zeta}}(f) - J| < \varepsilon$. Следовательно, $|S_{1\Pi_{\zeta}} - J_1| < \varepsilon$ и $|S_{2\Pi_{\zeta}} - J_2| < \varepsilon$ и по определению криволинейного интеграла второго рода (см., например, [11, определение 3.2]) существуют интегралы $\int_{\Gamma} u dx - v dy = J_1$ и $\int_{\Gamma} u dy + v dx = J_2$. Одновременно получена формула (5.1)

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} u dx - v dy + i \int_{\Gamma} u dy + v dx.$$

⊐ Пусть существуют криволинейные интегралы второго рода

$$\int_{\Gamma} u dx - v dy = J_1 \quad \text{и} \quad \int_{\Gamma} u dy + v dx = J_2.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta_1 > 0$, что для любого разбиения Π с $d(\Pi) < \delta_1$ и любых точек ζ_k выполнено неравенство $|S_{1\Pi_\zeta} - J_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ и существует такое $\delta_2 > 0$, что для любого разбиения Π с $d(\Pi) < \delta_2$ и любых точек ζ_k справедливо неравенство $|S_{2\Pi_\zeta} - J_2| < \frac{\varepsilon}{2}$. Положим $J = J_1 + iJ_2$. Возьмем $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, тогда для разбиения Π с $d(\Pi) < \delta$ получим

$$\begin{aligned} |S_{\Pi_\zeta}(f) - J| &= |(S_{1\Pi_\zeta} - J_1) + i(S_{2\Pi_\zeta} - J_2)| \leq |S_{1\Pi_\zeta} - J_1| + \\ &+ |i| |S_{2\Pi_\zeta} - J_2| = |S_{1\Pi_\zeta} - J_1| + |S_{2\Pi_\zeta} - J_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon; \end{aligned}$$

значит, по определению 5.1, существует $\int_{\Gamma} f(z)dz = J = J_1 + iJ_2$. ■

Из свойств криволинейных интегралов второго рода (см. 3.3 из [11]) и формулы (5.1), очевидно, вытекают свойства интеграла от функции комплексного переменного.

1. Если функция $f(z)$ непрерывна на Γ и Γ – кусочно-гладкая кривая, то интеграл $\int_{\Gamma} f(z)dz$ существует.

2. Для любой кусочно-гладкой кривой Γ и интегрируемой по Γ функции $f(z)$ справедливо равенство

$$\int_{\Gamma(AB)} f(z)dz = - \int_{\Gamma(BA)} f(z)dz. \quad (5.2)$$

3. Для любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и интегрируемых по Γ функций $f(z)$ и $g(z)$

$$\int_{\Gamma} (\alpha f(z) + \beta g(z))dz = \alpha \int_{\Gamma} f(z)dz + \beta \int_{\Gamma} g(z)dz$$

(линейность интеграла).

4. Если кусочно-гладкая кривая Γ разбивается на 2 кривые Γ_1 и Γ_2 без общих внутренних точек ($\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$) и $f(z)$ – интегрируемая по Γ функция, то $f(z)$ интегрируема по Γ_1 и Γ_2 и

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz \quad (5.3)$$

(аддитивность интеграла). Справедливо и обратное: если $f(z)$ интегрируема по Γ_1 и Γ_2 , то $f(z)$ интегрируема по Γ и справедливо равенство (5.3).

5. Пусть функция $f(z)$ непрерывна на кусочно-гладкой кривой Γ , а функция $w : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma$ аналитична в области D_1 , $\Gamma_1 \subset D_1$, причем $w(\alpha) = A$ и $w(\beta) = B$ ($w(\alpha) = B$ и $w(\beta) = A$). Тогда

$$\int_{\Gamma(AB)} f(z)dz = \int_{\Gamma_1(\alpha\beta)} f(w(\zeta))w'(\zeta)d\zeta, \quad \left(\int_{\Gamma(AB)} f(z)dz = \int_{\Gamma_1(\beta\alpha)} f(w(\zeta))w'(\zeta)d\zeta \right).$$

Если кривая Γ задана параметрически, то можно воспользоваться последним свойством для вычисления интеграла от функции комплексного переменного. Действительно, пусть Γ_1 – отрезок вещественной оси $[t_1, t_2]$, а функция $z = z(t)$ ($[t_1, t_2] \rightarrow \Gamma$) непрерывно дифференцируема для $t \in [t_1, t_2]$, причем $z(t_1) = A$ и $z(t_2) = B$ ($z(t_1) = B$ и $z(t_2) = A$). Тогда

$$\int_{\Gamma(AB)} f(z)dz = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t))z'(t)dt, \quad \left(\int_{\Gamma(AB)} f(z)dz = \int_{t_2}^{t_1} f(z(t))z'(t)dt \right).$$

Пример 5.1. Вычислить интеграл $\int_{\Gamma} (1 + i - 2\bar{z})dz$, где Γ – часть параболы $y = x^2$, соединяющая точки $A = 0$ и $B = 1 + i$. Воспользуемся примером 2.1, имеем $z = t + it^2$, $t \in [0, 1]$, $dz = (1 + 2ti)dt$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (1 + i - 2\bar{z})dz &= \int_0^1 (1 - 2t - (1 + 2t^2)2t)dt + \\ &+ i \int_0^1 (1 + 2t^2 + (1 - 2t)2t)dt = -2 + \frac{4}{3}i. \end{aligned}$$

Воспользуемся параметрическим уравнением окружности (см. пример 2.2) для доказательства леммы, которая потребуется в дальнейшем.

Лемма 5.1. Пусть кривая Γ есть окружность радиуса r с центром в точке z_0 : $\Gamma = \{z \mid |z - z_0| = r\}$, тогда имеет место равенство

$$\oint_{\Gamma^+} (z - z_0)^m dz = \begin{cases} 0, & \text{если } m \in \mathbb{Z}, m \neq -1, \\ 2\pi i, & \text{если } m = -1. \end{cases} \quad (5.4)$$

Доказательство. Согласно примеру 2.2 параметрическое уравнение окружности можно взять в виде $z - z_0 = re^{it}$, $t \in [-\pi, \pi]$. Тогда $dz = ire^{it}dt$ и

$$\oint_{\Gamma^+} (z - z_0)^m dz = \int_{-\pi}^{\pi} r^m e^{imt} ire^{it} dt = ir^{m+1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m+1)t} dt.$$

Если $m \neq -1$, то учитывая $2\pi i$ -периодичность функции e^z ,

$$\oint_{\Gamma^+} (z - z_0)^m dz = ir^{m+1} \left. \frac{e^{i(m+1)t}}{i(m+1)} \right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{r^{m+1}}{m+1} (e^{\pi(m+1)i} - e^{-\pi(m+1)i}) = 0.$$

Если $m = -1$, то

$$\oint_{\Gamma^+} (z - z_0)^{-1} dz = \oint_{\Gamma^+} \frac{dz}{z - z_0} = i \int_{-\pi}^{\pi} dt = 2\pi i. \blacksquare$$

Утверждение 5.1. Если функция $f(z)$ интегрируема по Γ и существует криволинейный интеграл первого рода $\int_{\Gamma} |f(z)|dl$, то справедливо неравенство

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\Gamma} |f(z)| dl.$$

Доказательство. Пусть $J = \int_{\Gamma} f(z) dz$ и $J_1 = \int_{\Gamma} |f(z)| dl$. Очевидно, для любого разбиения Π и любого выбора точек ζ_k

$$|S_{\Pi_{\zeta}}(f)| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k) \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(\zeta_k)| |\Delta z_k| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(\zeta_k)| \Delta l_k = S_1; \quad (5.5)$$

так как $|\Delta z_k|$ – расстояние между точками z_k и z_{k+1} , а Δl_k – длина дуги $[z_k, z_{k+1}]$, то очевидно, $|\Delta z_k| \leq \Delta l_k$. Кроме того, выполнено второе неравенство треугольника:

$$|S_{\Pi_{\zeta}}(f) - J| \geq \left| |S_{\Pi_{\zeta}}(f)| - |J| \right|. \quad (5.6)$$

Допустим, что $|J| > J_1$. Положим $\varepsilon = \frac{|J| - J_1}{2} > 0$. Существует такое $\delta_1 > 0$, что для любого разбиения Π с $d(\Pi) < \delta_1$ и любых ζ_k выполнено неравенство $|S_{\Pi_{\zeta}}(f) - J| < \varepsilon$. Из (5.6) следует, что $\left| |S_{\Pi_{\zeta}}(f)| - |J| \right| < \varepsilon$ и,

значит, $|S_{\Pi_\zeta}(f)| - |J| > -\varepsilon$. Поэтому

$$|S_{\Pi_\zeta}(f)| > |J| - \varepsilon = |J| - \frac{|J| - J_1}{2} = \frac{|J| + J_1}{2}.$$

Кроме того, существует такое $\delta_2 > 0$, что для любого разбиения Π с $d(\Pi) < \delta_2$ и любых ζ_k справедливо неравенство $|S_1 - J_1| < \varepsilon$, а потому и неравенство $S_1 - J_1 < \varepsilon$. Следовательно, получим

$$S_1 < J_1 + \varepsilon = J_1 + \frac{|J| - J_1}{2} = \frac{|J| + J_1}{2}.$$

Возьмем $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, тогда для любого разбиения Π с $d(\Pi) < \delta$ и любых ζ_k верно неравенство $S_1 < \frac{|J| + J_1}{2} < |S_{\Pi_\zeta}(f)|$, что противоречит (5.5). Итак, $|J| \leq J_1$. ■

6. Теоремы Коши

Теорема 6.1 (Коши для односвязной области). *Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной ограниченной области D и имеет непрерывную производную $f'(z)$, то для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой Γ , целиком лежащей в D , справедливо равенство*

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0. \quad (6.1)$$

Доказательство. Область, ограниченную кривой Γ (рис. 6.1), обоз-

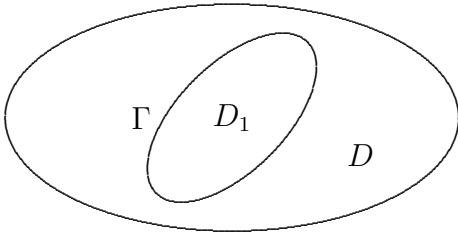


Рис. 6.1

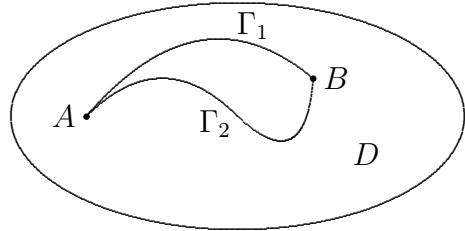


Рис. 6.2

начим D_1 ($\Gamma = \partial D_1$). Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Согласно (5.1)

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \oint_{\Gamma} u dx - v dy + i \oint_{\Gamma} u dy + v dx. \quad (6.2)$$

Так как $f'(z)$ непрерывна в $\overline{D}_1$, то частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ непрерывны в $\overline{D}_1$ и к полученным криволинейным интегралам можно применить теорему Грина (см. [11, т. 3.11]). Учитывая условия Коши – Римана,

которым удовлетворяют функции u и v (в силу аналитичности f), получим

$$\oint_{\Gamma} u dx - v dy = \iint_{D_1} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy = \iint_{D_1} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy = 0,$$

$$\oint_{\Gamma} u dy + v dx = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0;$$

значит, согласно (6.2) $\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0$. ■

Условие непрерывности $f'(z)$ в теореме 6.1 является дополнительным и от него можно отказаться. Доказательство для этого случая можно найти, например, в [6, с. 137–143, 154–162].

Следствие 6.1. Если функция f аналитична в односвязной ограниченной области D , то для любых точек A и B , лежащих в области D , интеграл $\int_{\Gamma(AB)} f(z)dz$ не зависит от кусочно-гладкой кривой Γ , связывающей точки A и B и целиком лежащей в D .

Доказательство. Соединим точки A и B (рис. 6.2) двумя различными кривыми Γ_1 и Γ_2 , лежащими в области D . Обозначим $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Ясно, что замкнутая кривая Γ^+ удовлетворяет условиям теоремы 6.1. Последовательно применяя формулы (5.2), (5.3) и (6.1) получим

$$\int_{\Gamma_2(AB)} f(z)dz - \int_{\Gamma_1(AB)} f(z)dz = \int_{\Gamma_2(AB)} f(z)dz + \int_{\Gamma_1(BA)} f(z)dz = \oint_{\Gamma} f(z)dz = 0.$$

Следовательно, $\int_{\Gamma_2(AB)} f(z)dz = \int_{\Gamma_1(AB)} f(z)dz$. ■

Замечание 6.1. Если f аналитична в односвязной области D , то в силу следствия 6.1 интеграл $\int_{\Gamma(AB)} f(z)dz$ зависит только от точек A и B ,

а не от кривой Γ , и его принято обозначать $\int_A^B f(z)dz$, т. е.

$$\int_A^B f(z)dz = \int_{\Gamma(AB)} f(z)dz,$$

где в качестве Γ может быть выбрана любая кусочно-гладкая кривая, целиком лежащая в области D . $\otimes$

Таким образом, если f аналитична в односвязной области D и точка $z_0 \in D$, то однозначно определена функция

$$F : D \rightarrow \mathbb{C}, \quad F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta.$$

Утверждение 6.1. *Функция F аналитична в односвязной области D , и $F'(z) = f(z)$ для любого $z \in D$.*

Доказательство. По определению производной и свойствам интеграла (5.3) и (5.2) имеем:

$$\begin{aligned} F'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_{z_0}^{z+h} f(\zeta) d\zeta - \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (6.3)$$

В силу непрерывности $f(\zeta)$ в точке z можно написать: $f(\zeta) = f(z) + \eta(\zeta)$, где $\eta(\zeta) \rightarrow 0$ при $\zeta \rightarrow z$; подставляя в (6.3) получим:

$$F'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(z) d\zeta + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_z^{z+h} \eta(\zeta) d\zeta. \quad (6.4)$$

Так как $f(z)$ постоянна при интегрировании по ζ , то

$$\int_z^{z+h} f(z) d\zeta = f(z) \int_z^{z+h} d\zeta = f(z)h,$$

ибо из определения интеграла $\int_z^{z+h} d\zeta = h$. Используя утверждение 5.1, получим:

$$\left| \int_z^{z+h} \eta(\zeta) d\zeta \right| \leq \max |\eta(\zeta)| |h|.$$

Таким образом, в (6.4) первый предел равен $f(z)$, а второй – нулю, т. е. $F'(z) = f(z)$. ■

Определение 6.1. Пусть f – аналитическая функция в односвязной области D . Функция $\Phi: D \rightarrow \mathbb{C}$, аналитическая в D , такая, что $\Phi'(z) = f(z)$ для любого $z \in D$, называется первообразной функции f в области D .

Утверждение 6.2. Разность двух первообразных одной функции f равна постоянной.

Доказательство. Пусть $F_1(z)$ и $F_2(z)$ – 2 первообразные функции f . Если ввести обозначения

$$\Phi(z) = F_1(z) - F_2(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

то достаточно показать, что функция $\Phi(z)$ постоянна.

Согласно формуле (3.4) для производной имеем:

$$\Phi'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0,$$

так как по условию $\Phi'(z) = F_1'(z) - F_2'(z) = f(z) - f(z) \equiv 0$. Отсюда следует, что $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0$, $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$, следовательно, функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ постоянны. ■

Утверждение 6.3. Пусть f – аналитическая функция в односвязной области D и пусть Φ – первообразная f в D . Тогда для любых $A, B \in D$ справедлива формула Ньютона – Лейбница

$$\int_A^B f(z) dz = \Phi(B) - \Phi(A).$$

Доказательство повторяет доказательство для функции вещественной переменной (см. [3, т. 6.12]).

Следствие 6.2. Если f и g – аналитические функции в односвязной области D , то для любых $A, B \in D$ справедлива формула интегрирования по частям

$$\int_A^B f(z) g'(z) dz = f(B)g(B) - f(A)g(A) - \int_A^B g(z) f'(z) dz.$$

Доказательство такое же, как для функции одного вещественного переменного (см. [3, следствие 6.3]).

Теорема 6.2. Пусть функция f аналитична в односвязной ограниченной области D и непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$, и пусть ∂D – кусочно-гладкая граница области D . Тогда

$$\oint_{\partial D} f(z)dz = 0.$$

Доказательство теоремы можно найти, например, в [8, с. 49–51].

Теорема 6.3 (Коши для многосвязной области). Пусть D – $(m+1)$ -связная ограниченная область, граница ∂D которой представляет собой совокупность попарно непересекающихся кусочно-гладких замкнутых кривых $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_m$, где $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$ лежат внутри области, ограниченной кривой Γ_0 . Если функция f аналитична в области D и непрерывна в $\bar{D}$, то

$$\int_{\partial D} f(z)dz = \oint_{\Gamma_0^+} f(z)dz + \sum_{k=1}^m \oint_{\Gamma_k^-} f(z)dz = \oint_{\Gamma_0^+} f(z)dz - \sum_{k=1}^m \oint_{\Gamma_k^+} f(z)dz = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим, например, трехсвязную область D , изображенную на рис. 6.3. Разрежем область D по кривым γ_1 и γ_2 (рис. 6.4). Полученная область D_1 является односвязной, следовательно, по теореме 6.2, $\oint_{\partial D_1} f(z)dz = 0$. Отметим, что точки b и c разбивают Γ_0 на две

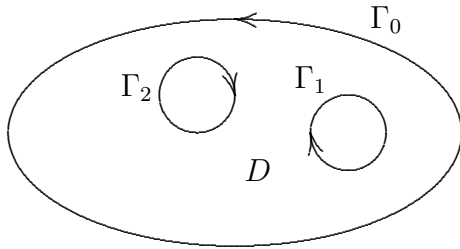


Рис. 6.3

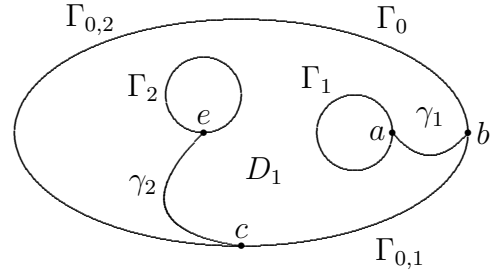


Рис. 6.4

кривые $\Gamma_{0,1}$ и $\Gamma_{0,2}$ ($\Gamma_0 = \Gamma_{0,1} \cup \Gamma_{0,2}$). Следовательно, используя (5.3),

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D_1} f(z)dz &= \int_{\Gamma_{0,1}(cb)} f(z)dz + \int_{\gamma_1(ba)} f(z)dz + \oint_{\Gamma_1^-} f(z)dz + \int_{\gamma_1(ab)} f(z)dz + \\ &+ \int_{\Gamma_{0,2}(bc)} f(z)dz + \int_{\gamma_2(ce)} f(z)dz + \oint_{\Gamma_2^-} f(z)dz + \int_{\gamma_2(ec)} f(z)dz = 0; \end{aligned}$$

значит, используя (5.2) и переставляя слагаемые

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_{0,1}(cb)} f(z)dz + \int_{\Gamma_{0,2}(bc)} f(z)dz - \int_{\gamma_1(ab)} f(z)dz + \int_{\gamma_1(ab)} f(z)dz + \\ & + \int_{\gamma_2(ce)} f(z)dz - \int_{\gamma_2(ce)} f(z)dz - \oint_{\Gamma_1^+} f(z)dz - \oint_{\Gamma_2^+} f(z)dz = 0. \end{aligned}$$

Приводя подобные члены (учитывая, что $\Gamma_0 = \Gamma_{0,1} \cup \Gamma_{0,2}$), получим:

$$\oint_{\Gamma_0^+} f(z)dz - \oint_{\Gamma_1^+} f(z)dz - \oint_{\Gamma_2^+} f(z)dz = \int_{\partial D} f(z)dz = 0.$$

Изменения в доказательстве для $(m+1)$ -связной области очевидны. ■

Замечание 6.2. Отметим, что из условий теоремы 6.3 функция f аналитична в области D и непрерывна в $\overline{D}$ и потому f не может иметь изолированных особых точек внутри области. Разрезы допустимы, но их можно рассматривать как частный случай замкнутого контура, и доказательство теоремы практически не изменяется. $\otimes$

7. Интегральная формула Коши

Теорема 7.1 (интегральная формула Коши). Если функция f аналитична в односвязной области D с границей $\Gamma = \partial D$ и непрерывна в $\overline{D}$, то для любого $z_0 \in D$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (7.1)$$

Доказательство. Построим окружность Γ_1 с центром в точке z_0 радиуса $\varepsilon > 0$, целиком лежащую в области D . Рассмотрим двухсвязную область

$$D_1 = D \setminus \{z \mid |z - z_0| \leq \varepsilon\}$$

(рис. 7.1). Функция $\frac{f(z)}{z - z_0}$ аналитична в D_1 и непрерывна в $\overline{D}_1$. Следовательно, по теореме Коши (см. теорему 6.3):

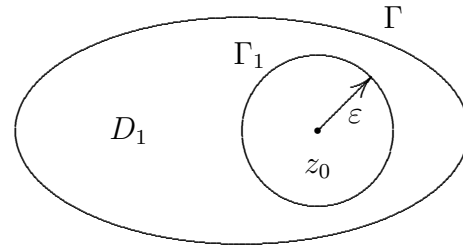


Рис. 7.1

$$\oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{\Gamma_1^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Преобразуем последний интеграл, учитывая (5.4)

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_1^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \oint_{\Gamma_1^+} \frac{f(z) - f(z_0) + f(z_0)}{z - z_0} dz = \oint_{\Gamma_1^+} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz + \\ &+ f(z_0) \oint_{\Gamma_1^+} \frac{dz}{z - z_0} = \oint_{\Gamma_1^+} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz + 2\pi i f(z_0). \end{aligned}$$

Так как функция $f(z)$ аналитична в области D , то существует

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0),$$

поэтому функция $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ ограничена в некоторой окрестности точки z_0 . Возьмем $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы окружность $|z - z_0| = \varepsilon$ попала в эту окрестность. Тогда существует такое $M > 0$, что для любого

$$z \in \{z \mid |z - z_0| = \varepsilon\}$$

выполнено неравенство

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| \leq M.$$

Следовательно, учитывая утверждение 5.1 ,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right| = \left| \oint_{\Gamma_1^+} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq \\ &\leq \int_{|z - z_0| = \varepsilon} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| dl \leq M \int_{|z - z_0| = \varepsilon} dl = M 2\pi \varepsilon. \end{aligned}$$

По теореме о сжатой функции при $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right) = 0,$$

и так как функция не зависит от ε , то

$$\oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) = 0;$$

значит, $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$. ■

Теорема 7.2. Функция f , аналитичная в области D , имеет в любой точке области производные любого порядка. При этом для любого $z_0 \in D$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad (7.2)$$

где Γ – любая замкнутая кривая, целиком лежащая в D и охватывающая точку z_0 .

Доказательство. Поскольку функция f аналитична, то существует $f'(z_0)$. Докажем формулу (7.2) при $n = 1$. Согласно интегральной формуле Коши (7.1) для любой точки z_0 в области D_1 с границей $\partial D_1 = \Gamma$ выполнено:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta.$$

Пусть $|h| < \delta$ и δ выбрано так, что $z = z_0 + h \in D_1$ (рис. 7.2), т. е. точка z находится внутри контура Γ . Тогда опять по интегральной формуле Коши (7.1) справедливо:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{h} &= \frac{1}{2\pi i h} \oint_{\Gamma^+} f(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0} \right) d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i h} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(\zeta)h}{(\zeta - z_0)(\zeta - z)} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)(\zeta - z)} d\zeta. \end{aligned}$$

Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta &= \frac{f(z) - f(z_0)}{h} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0} \right) d\zeta = \frac{h}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^2 (\zeta - z)}. \end{aligned}$$

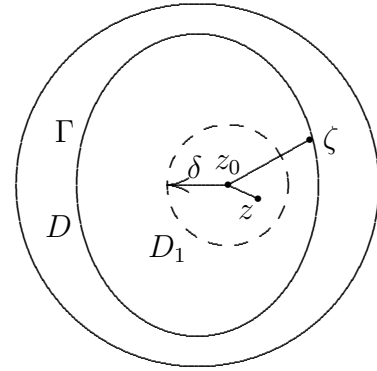


Рис. 7.2

Обозначим через $d > 0$ расстояние от точки z_0 до границы Γ : $d = \min_{\zeta \in \Gamma} |\zeta - z_0| > 0$. По неравенству треугольника (см. рис. 7.2)

$$d \leq |\zeta - z_0| = |h + \zeta - z_0 - h| \leq |h| + |\zeta - z_0 - h| = |h| + |\zeta - z|.$$

Возьмем $\delta > 0$ так, что $d - \delta > 0$, тогда $|\zeta - z| \geq d - |h| > d - \delta > 0$. Так как по условию теоремы f аналитична на Γ , а следовательно, непрерывна и ограничена, то существует такое число $M > 0$, что $|f(\zeta)| \leq M$ для любого $\zeta \in \Gamma$. Значит, с учетом утверждения 5.1

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta \right| = \left| \frac{h}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2(\zeta - z)} d\zeta \right| \leq \\ &\leq \frac{|h|}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_0|^2 |\zeta - z|} dl \leq \frac{|h|}{2\pi} \frac{M}{d^2(d - \delta)} \int_{\Gamma} dl = \frac{M|l|}{2\pi d^2(d - \delta)} |h|, \end{aligned}$$

где $|l|$ — длина кривой Γ .

По теореме о пределе сжатой функции при $h \rightarrow 0$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta \right) = 0$$

и $f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta$. Таким образом доказано

(7.2) для $n = 1$.

Заметим, что попутно доказано существование первой производной функции f по определению 3.2. Конечно, для первой производной это не нужно, т. к. ее существование гарантировано аналитичностью функции f .

Существование следующих производных и формулы (7.2) для $n > 1$ доказываются аналогично. ■

Следствие 7.1 (теорема Лиувилля). *Ограниченная, аналитическая на всей комплексной плоскости функция f постоянна ($f(z) \equiv \text{const}$).*

Доказательство. По условию существует такое число $M > 0$, что $|f(z)| \leq M$ для любого $z \in \mathbb{C}$. Зафиксируем точку $z_0 \in \mathbb{C}$ и в качестве Γ возьмем окружность $|z - z_0| = R$. Тогда согласно теореме 7.2

$$|f'(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z - z_0| = R} \frac{|f(z)|}{|z - z_0|^2} dl \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z-z_0|=R} \frac{M}{R^2} dl = \frac{M}{2\pi R^2} \int_{|z-z_0|=R} dl = \frac{M}{2\pi R^2} 2\pi R = \frac{M}{R}$$

следовательно, $0 \leq |f'(z_0)| \leq \frac{M}{R}$.

По теореме о пределе сжатой функции при $R \rightarrow +\infty$ получаем

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} f'(z_0) = 0$$

и, так как функция не зависит от R , $f'(z_0) = 0$ для любого $z_0 \in \mathbb{C}$. Значит, f постоянна на $\mathbb{C}$. ■

С помощью теоремы Лиувилля можно легко доказать *основную теорему алгебры*.

Теорема 7.3 (Гаусс). *Всякий многочлен $P_n(z) = c_n z^n + \dots + c_1 z + c_0$ ($c_n \neq 0$, $n \geq 1$) имеет по крайней мере один нуль.*

Доказательство. Пусть многочлен $P_n(z)$ не имеет нулей. Тогда функция $g(z) = 1/P_n(z)$ аналитична и так как $g(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$ ($P_n(z) \sim c_n z^n$, $z \rightarrow \infty$), то эта функция ограничена на всей комплексной плоскости. Поэтому, в силу следствия 7.1, получим $g(z) \equiv \text{const}$, что противоречит определению функции $g(z)$. Итак, многочлен $P_n(z)$ имеет по крайней мере один нуль. ■

8. Функциональные и степенные комплексные ряды

Рассмотрим функциональные последовательности и функциональные ряды, членами которых являются функции комплексного переменного.

Определение 8.1. *Функциональная последовательность $\{f_n(z)\}$ по-точечно сходится к функции $f(z)$ на множестве $X \subset \mathbb{C}$, если существует $\lim f_n(z) = f(z)$ для любой точки $z \in X$.*

Определение 8.2. *Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ сходится к сумме $S(z)$ на множестве $X \subset \mathbb{C}$, если сходится числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ и*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) = S(z) \text{ для любой точки } z \in X.$$

В теории последовательностей и рядов функций комплексной переменной, так же как и в случае вещественной переменной, особую роль играет

понятие равномерной сходимости. Из курса теории функций вещественной переменной известно (см., например, [4, с. 337]), что сходящаяся последовательность (или ряд) непрерывных функций далеко не всегда сходится к непрерывной функции. Данные факты подчеркивают важность введения понятия равномерной сходимости.

Определение 8.3. *Функциональная последовательность $\{f_n(z)\}$ равномерно сходится к функции $f(z)$ на множестве $X \subset \mathbb{C}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon)$, такое, что для любого $n > N(\varepsilon)$ и для любого $z \in X$ выполнено неравенство $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$. Равномерную сходимость иногда обозначают: $f_n \xrightarrow{\rightarrow} f$.*

Определение 8.4. *Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ равномерно сходится к $S(z)$ на X , если $S_n \xrightarrow{\rightarrow} S$ на X , где $S_n(z) = \sum_{k=1}^n u_k(z)$ – частичная сумма ряда.*

Для равномерно сходящихся комплексных функциональных рядов остаются справедливы критерий Коши, необходимый признак сходимости, признак Вейерштрасса. Доказательства можно найти в [12, гл. 2, §1].

Теорема 8.1 (Вейерштрасса). *Пусть D – область с кусочно-гладкой границей ∂D , $u_k(z)$ – аналитические в области D функции, непрерывные в $\overline{D}$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ сходится равномерно на ∂D . Тогда:*

- 1) *ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(m)}(z)$, $m \in \mathbb{N}$, сходится равномерно в $\overline{D}$;*
- 2) *сумма ряда $S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ является аналитической в области D функцией;*
- 3) *ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(m)}(z)$, $m \in \mathbb{N}$, сходится равномерно в любой замкнутой подобласти D' области D , такой, что $\overline{D'} \subset D$;*
- 4) *$S^{(m)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(m)}(z)$, $z \in \overline{D'}$ (ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(m)}(z)$ можно почленно дифференцировать).*

Теорема приводится без доказательства; его можно найти, например, в [13, с. 50]. Из данной теоремы легко получить следствие.

Следствие 8.1. Если выполнены условия теоремы 8.1, то функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ можно почленно интегрировать, т. е. справедливо соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{\gamma} u_k(z) dz \right) = \int_{\gamma} \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) \right) dz = \int_{\gamma} S(z) dz,$$

где $\gamma \subset \overline{D}$.

Определение 8.5. Пусть $\{c_n\}$, $c_n \in \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$. Функциональный ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$, где $z \in \mathbb{C}$, называется степенным рядом по степеням $z - z_0$.

Все дальнейшие доказательства опускаются, так как они в точности повторяют доказательства для функций вещественного переменного (см., например, [4, гл. 13, §4]). Доказательство в случае функций комплексного переменного можно найти, например, в [12, гл. 2 §2].

Теорема 8.2 (Абеля). Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ сходится в некоторой точке $z_1 \neq z_0$, то он абсолютно сходится и в любой точке z , удовлетворяющей условию $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$; причем в круге $|z - z_0| \leq \rho$, где ρ меньше $|z_1 - z_0|$, ряд сходится равномерно.

Из теоремы Абеля можно вывести важные следствия.

Следствие 8.2. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ расходится в некоторой точке z_1 , то он расходится и во всех точках z , удовлетворяющих неравенству $|z - z_1| > |z_1 - z_0|$.

Пусть z – точки, в которых сходится степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$, обозначим через $M = \{\rho \mid \rho = |z - z_0|\}$ – множество расстояний от точки z_0 до точек z . Если M – ограниченное множество, то обозначим через R его точную верхнюю границу ($R = \sup M$). Во всех точках z' , удовлетворяющих условию $|z' - z_0| > R$, данный степенной ряд расходится. Пусть $R > 0$, тогда наибольшей областью сходимости данного ряда является круг $|z - z_0| < R$. Всюду вне этого круга ряд расходится, в точках окружности $|z - z_0| = R$ он может как сходиться, так и расходиться. Если множество

неограниченно, то полагают $R = +\infty$. В этом случае ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ сходится на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Определение 8.6. Область $|z - z_0| < R$ ($R \geq 0$) называется кругом сходимости степенного ряда, а число R – его радиусом сходимости.

Следствие 8.3. Внутри круга сходимости степенной ряд сходится к аналитической функции.

Следствие 8.4. Степенной ряд внутри круга сходимости можно почленно интегрировать и дифференцировать любое число раз, причем радиус сходимости полученных рядов равен радиусу сходимости исходного ряда.

При доказательстве этих следствий необходимо воспользоваться теоремой Вейерштрасса и следствием 8.1.

Следствие 8.5. Коэффициенты степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ выражаются через значения суммы ряда $S(z)$ и ее производных в центре круга сходимости по формулам:

$$c_n = \frac{1}{n!} S^{(n)}(z_0). \quad (8.1)$$

Следствие 8.6 (Коши – Адамара). Если существует предел последовательности $\{\sqrt[n]{|c_n|}\}$ и $l = \lim \sqrt[n]{|c_n|}$, то радиус сходимости R степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ определяется формулой $R = \frac{1}{l}$.

9. Ряд Тейлора

Определение 9.1. Если сходится степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$, $z_0 \in D$, и для любого $z \in D$ выполнено равенство $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$, то говорят, что функция f в области $D \subset \mathbb{C}$ представляется¹ степенным рядом (по степеням $z - z_0$).

¹ Иногда говорят функция f разлагается в степенной ряд.

Для любой аналитической в z_0 функции можно рассматривать степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$.

Определение 9.2. *Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$ называется рядом Тейлора для функции f по степеням $z - z_0$.*

Если для степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ радиус сходимости отличен от нуля, то внутри своего круга сходимости этот ряд определяет аналитическую функцию $S(z)$, являющуюся его суммой (см. следствие 8.3). Следствие 8.5 означает, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ является рядом Тейлора своей суммы $S(z)$. Кроме того, из следствия 8.5 вытекает, что если $f(z)$ разлагается в степенной ряд, то такое разложение единственно (так как коэффициенты ряда однозначно определяются равенствами (8.1)) и является разложением $f(z)$ в ряд Тейлора.

Приведенные факты следуют, по существу, только из теории степенных рядов и справедливы и в вещественном случае. Однако для вещественных функций $f(x)$ возможна и ситуация, когда $f(x)$ бесконечно дифференцируема в x_0 и имеет ряд Тейлора по степеням $x - x_0$, но не является суммой своего ряда Тейлора. Например, для $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ при всех $n \geq 0$ справедливы равенства $f^{(n)}(0) = 0$, но $f(x) \not\equiv 0$. Для указанной функции $f(x)$ суммой ее ряда Тейлора будет функция $S(x) \equiv 0$. Это приводит к тому, что в вещественном случае разные функции могут иметь один и тот же ряд Тейлора. Следующая теорема показывает, что в комплексном случае подобное положение исключено.

Теорема 9.1. *Если функция f аналитична в области D , то для любого $z_0 \in D$ существует окрестность, в которой f представима степенным рядом, т. е. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$. При этом для коэффициентов ряда справедливо равенство $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.*

Доказательство. Поскольку D – область, то существует такое $\varepsilon > 0$

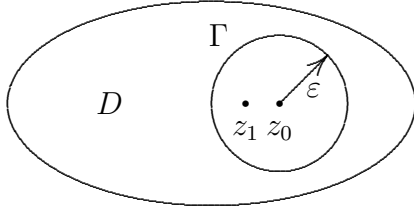


Рис. 9.1

что окрестность $K_\varepsilon(z_0)$ содержится в области D . Пусть $\Gamma = \{z \mid |z - z_0| = \varepsilon\}$ является границей $K_\varepsilon(z_0)$ (рис. 9.1). Возьмем произвольную точку $z_1 \in K_\varepsilon(z_0)$. По условию функция f аналитична в $\overline{K_\varepsilon(z_0)}$, следовательно, согласно теореме 7.1

$$\begin{aligned} f(z_1) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_1} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{(z - z_0) - (z_1 - z_0)} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z_1 - z_0}{z - z_0}} dz. \end{aligned} \quad (9.1)$$

Так как для любого $z \in \Gamma$

$$\left| \frac{z_1 - z_0}{z - z_0} \right| = \frac{|z_1 - z_0|}{|z - z_0|} = \frac{|z_1 - z_0|}{\varepsilon} < 1,$$

то функция $\frac{1}{1 - \frac{z_1 - z_0}{z - z_0}}$ является суммой геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1 - \frac{z_1 - z_0}{z - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_1 - z_0}{z - z_0} \right)^n. \quad (9.2)$$

Геометрическая прогрессия $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z)}{z - z_0} \left(\frac{z_1 - z_0}{z - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$ является функциональным рядом, который в силу неравенства $\left| \frac{z_1 - z_0}{z - z_0} \right| < 1$ и аналитичности функции $\frac{f(z)}{z - z_0}$ сходится равномерно. Согласно следствию 8.1 функциональный ряд можно почленно интегрировать, и, учитывая (9.1) и (9.2), получим:

$$\begin{aligned} f(z_1) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_1 - z_0}{z - z_0} \right)^n dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z)}{z - z_0} \left(\frac{z_1 - z_0}{z - z_0} \right)^n dz = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0} \left(\frac{z_1 - z_0}{z - z_0} \right)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} (z_1 - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz. \end{aligned}$$

Обозначим $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$, тогда $f(z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z_1 - z_0)^n$.

Так как z_1 произвольно, то разложение $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ выполнено для любого $z \in K_\varepsilon(z_0)$.

Согласно следствию 8.5

$$n!c_n = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = f^{(n)}(z_0),$$

следовательно, $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. ■

Утверждение 9.1. Для любого $z \in \mathbb{C}$ $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Доказательство. Возьмем $z_0 = 0$, тогда, учитывая, что $(e^z)^{(n)} = e^z$ и $e^0 = 1$, получим

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Так как e^z аналитична на $\mathbb{C}$, то из доказательства теоремы 9.1 следует, что в качестве окрестности точки z_0 , где справедливо полученное разложение, можно взять любой круг $|z| < R$, а так как при достаточно большом R такой круг захватывает любую точку z , то, значит, разложение справедливо для любого $z \in \mathbb{C}$. ■

Определение 9.3. Нулем функции f называется точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$, в которой эта функция равна нулю, т. е. корень уравнения $f(z) = 0$.

Теорема 9.2. Пусть функция f аналитична в окрестности $K_\delta(a)$ своего нуля a и не равна тождественно нулю. Тогда существует единственное число $m \in \mathbb{N}$, такое, что

$$f(z) = (z - a)^m g(z), \quad (9.3)$$

где функция $g(z)$ аналитична в некоторой окрестности точки a и не обращается там в нуль.

Доказательство. Согласно теореме 9.1 в некоторой окрестности точки a : $K_\varepsilon(a)$ функция $f(z)$ представима степенным рядом. Свободный член этого ряда равен нулю, так как $f(a) = 0$, но все его коэффициенты не могут

быть равными нулю, ибо тогда суммой $S(z)$ степенного ряда будет тождественный нуль и, значит, $S(z) = f(z) \equiv 0$ в некоторой окрестности точки a . Пусть c_m – первый отличный от нуля коэффициент. Тогда разложение имеет вид

$$f(z) = c_m(z-a)^m + c_{m+1}(z-a)^{m+1} + \dots, \quad c_m \neq 0. \quad (9.4)$$

Рассмотрим ряд $c_m + c_{m+1}(z-a) + \dots$, который (как всякий степенной ряд) сходится в точке $z = a$. При $z \neq a$ этот ряд лишь множителем $(z-a)^m$ отличается от сходящегося (к $f(z)$) ряда $c_m(z-a)^m + c_{m+1}(z-a)^{m+1} + \dots$ и, следовательно, сходится там же, где сходится и последний ряд. Значит, рассматриваемый ряд сходится в окрестности $K_\delta(a)$ точки a , где справедливо разложение (9.4). Обозначим через $g(z)$ сумму этого ряда, т. е.

$$g(z) = c_m + c_{m+1}(z-a) + \dots$$

Функция $g(z)$ – аналитическая в окрестности $K_\delta(a)$ как сумма сходящегося степенного ряда и представление (9.3) доказано.

Единственность числа m следует из того, что если

$$f(z) = (z-a)^m g_1(z) = (z-a)^n g_2(z),$$

где $g_1(z) \neq 0$, $g_2(z) \neq 0$ и, например, $m > n$, то $(z-a)^{m-n} g_1(z) = g_2(z)$, но тогда $g_2(z) = 0$. ■

Таким образом, теорема 9.2 утверждает, что у аналитической функции нули непременно изолированы. В теории функций вещественной переменной нули дифференцируемых функций могут иметь предельные точки, в которых функция остается дифференцируемой, например точка $x = 0$ для функции $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$.

Из теоремы 9.2 вытекает теорема единственности теории аналитических функций.

Теорема 9.3 (Римана). *Если функции $f_1(z)$, $f_2(z)$ аналитичны в области D и их значения совпадают на некоторой последовательности точек a_n , сходящейся к внутренней точке a области D , то всюду в D $f_1(z) \equiv f_2(z)$.*

Доказательство данной теоремы можно найти в [8, с. 73].

Легко, однако, привести пример, когда бесконечная последовательность нулей функции сходится к граничной точке ее области аналитичности, например, функция $f(z) = \sin \frac{1}{z}$ обращается в нуль на последовательности точек $z_n = \frac{1}{n\pi}$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$), сходящейся к точке $z = 0$ (в которой функция не определена).

Определение 9.4. Пусть функция f – аналитична в точке $a \in \mathbb{C}$. Порядком (кратностью) нуля $a \in \mathbb{C}$ функции f называется номер младшей отличной от нуля производной $f^{(k)}(a)$. Иными словами, точка a называется нулем порядка m , если в этой точке

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(m-1)}(a), \quad f^{(m)}(a) \neq 0.$$

При $m = 1$ нуль a называется простым.

Теорема единственности показывает, что аналитические функции, не равные тождественно нулю, не могут иметь нулей бесконечного порядка.

Порядок нуля аналитической функции можно определить при помощи делимости, аналогично тому, как это делается для многочленов.

Утверждение 9.2. Если f – аналитическая в области D функция, то порядок m нуля $a \in D$ функции f совпадает с порядком наивысшей степени $(z - a)^k$, на которую f „делится“, в том смысле, что частное $\frac{f(z)}{(z - a)^k}$ (после продолжения частного по непрерывности в точку a) оказывается аналитической функцией в окрестности точки a .

Доказательство. Обозначим через n наивысший порядок степени бинома $(z - a)$, на которую делится f . Из формулы (9.3) видно, что f делится на любую степень $k \leq m$:

$$\frac{f(z)}{(z - a)^k} = (z - a)^{m-k} g(z),$$

поэтому $n \geq m$. Так как f делится на $(z - a)^n$, то частное $\frac{f(z)}{(z - a)^n} = g_1(z)$ представляет собой функцию, аналитическую в окрестности точки a . Представляя g_1 рядом по степеням $(z - a)$, найдем, что тейлоровское разложение f с центром в точке a начинается со степени не ниже n . Поэтому $m \geq n$, и сравнивая это с полученным выше неравенством, найдем, что $m = n$. ■

10. Ряд Лорана

Рассмотрим функциональный ряд

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (10.1)$$

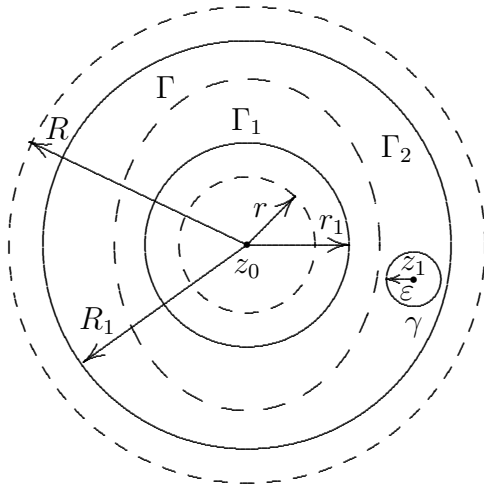


Рис. 10.1

каждый член которого определен при $z \neq z_0$. Сделаем замену $z - z_0 = \frac{1}{\zeta}$, тогда ряд (10.1) запишется в виде степенного ряда

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n \zeta^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} \zeta^n. \quad (10.2)$$

Пусть круг сходимости ряда (10.2) есть $|\zeta| < r^*$ и его сумма $S^*(\zeta)$. Следовательно, ряд (10.1) сходится при $\left| \frac{1}{z - z_0} \right| = \frac{1}{|z - z_0|} < r^*$ или при $|z - z_0| > 1/r^* = r$ (рис. 10.1). При этом сумма

ряда (10.1) $S_1(z) = S^*\left(\frac{1}{z - z_0}\right)$. Поскольку $S^*(\zeta)$ аналитична в круге $|\zeta| < r^*$, то очевидно, $S_1(z)$ аналитична вне круга $|z - z_0| > r$. Ряд (10.1) называется степенным рядом по отрицательным степеням $(z - z_0)$.

Рассмотрим степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, сходящийся в круге $|z - z_0| < R$ к сумме $S_2(z)$, которая аналитична в этом круге. Пусть $r < R$. Рассмотрим функциональный ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n. \quad (10.3)$$

Так как ряд $\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z - z_0)^n = S_1(z)$ при $|z - z_0| > r$, и $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n = S_2(z)$ при $|z - z_0| < R$, то ряд (10.3) сходится в области (кольце) $K = \{z \mid r < |z - z_0| < R\}$ (рисунок), и его сумма $S(z) = S_1(z) + S_2(z)$ есть аналитическая функция в кольце K .

Замечание 10.1. Может быть $r = 0$ или $R = +\infty$. $\otimes$

Теорема 10.1 (Лорана). *Функция $f(z)$, аналитическая в кольце $K = \{z \mid r < |z - z_0| < R\}$, в каждой точке $z \in K$ представляется в виде суммы ряда*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (10.4)$$

причем кривая $\Gamma \subset K$ замкнута и круг $\{z \mid |z - z_0| \leq r\}$ расположен внутри кривой Γ .

Доказательство. Рассмотрим кольцо $K_1 = \{z \mid r < r_1 < |z - z_0| < R_1 < R\} \subset K$. Пусть $z_1 \in K_1$ (см. рис. 10.1). Выберем ε настолько малым, что круг $\{z \mid |z - z_1| \leq \varepsilon\} \subset K_1$. Введем следующие обозначения: $\Gamma_1 = \{z \mid |z - z_0| = r_1\}$, $\Gamma_2 = \{z \mid |z - z_0| = R_1\}$, $\gamma = \{z \mid |z - z_1| = \varepsilon\}$. Применяя интегральную формулу Коши (7.1) для круга $|z - z_1| < \varepsilon$, границей которого является γ , и теорему Коши 6.3 для трехсвязной области, границей которой является $\gamma \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, после элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned} f(z_1) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_1} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2^+} \frac{f(z)}{z - z_1} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1^+} \frac{f(z)}{z - z_1} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2^+} \frac{f(z)}{(z - z_0) - (z_1 - z_0)} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1^+} \frac{f(z)}{(z_1 - z_0) - (z - z_0)} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2^+} \frac{f(z)}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z_1 - z_0}{z - z_0}} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1^+} \frac{f(z)}{z_1 - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}} dz. \end{aligned}$$

Так как $r_1 < |z_1 - z_0| < R_1$, то для любого $z \in \Gamma_1$ справедливо соотношение $\left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right| = \frac{r_1}{|z_1 - z_0|} < 1$. Поэтому геометрическая прогрессия со знаменателем $\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$ сходится и

$$\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right)^n$$

при $z \in \Gamma_1$. Аналогично $\left| \frac{z_1 - z_0}{z - z_0} \right| = \frac{|z_1 - z_0|}{R_1} < 1$ для любого $z \in \Gamma_2$ и справедливо равенство

$$\frac{1}{1 - \frac{z_1 - z_0}{z - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_1 - z_0}{z - z_0} \right)^n, \quad z \in \Gamma_2.$$

Следовательно,

$$f(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2^+} \frac{f(z)}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_1 - z_0}{z - z_0} \right)^n dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1^+} \frac{f(z)}{z_1 - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right)^n dz.$$

Интегрируя почленно функциональные ряды, сходящиеся равномерно на Γ_2 и Γ_1 соответственно, получим

$$\begin{aligned} f(z_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} (z_1 - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} (z_1 - z_0)^{-n-1} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n}} dz. \end{aligned}$$

Сделаем замену в первой сумме $n = k$ и во второй сумме $n = -k - 1$, тогда

$$\begin{aligned} f(z_1) &= \sum_{k=0}^{\infty} (z_1 - z_0)^k \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz + \\ &+ \sum_{k=-1}^{-\infty} (z_1 - z_0)^k \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z_1 - z_0)^k, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \\ c_k &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz, \quad k = -1, -2, \dots \end{aligned}$$

Так как z_1 — произвольная точка в области K то, получим $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$.

Возьмем кривую Γ , заданную в условии теоремы. Так как функция $\frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}$ — аналитическая в кольце K при любом $k \in \mathbb{Z}$, то согласно теореме 6.3

$$\oint_{\Gamma_2^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

и

$$\oint_{\Gamma_1^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Следовательно, $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$ для любого $n \in \mathbb{Z}$. ■

Определение 10.1. *Ряд $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n$, где коэффициенты c_n вычислены по формулам (10.4), называется рядом Лорана (или лорановским разложением) аналитической в кольце K функции f . При этом ряд*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n$$

называется регулярной (или правильной) частью лорановского разложения, а ряд

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(z - z_0)^n$$

называется главной частью лорановского разложения.

Замечание 10.2. Ряд Тейлора есть частный случай ряда Лорана, когда $f(z)$ аналитична в круге $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$. Действительно, в этом случае $f(z)$ аналитична в кольце $K = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$, при $r < R$ и раскладывается в K в ряд Лорана.

При этом $c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} f(z)(z - z_0)^{n-1} dz = 0$, если $n \geq 1$, так как

функция $f(z)(z - z_0)^{n-1}$ аналитична в B . Значит, ряд Лорана для $f(z)$ в K является рядом Тейлора для $f(z)$ в B . ⊗

11. Изолированные особые точки аналитической функции

Напомним, что рассматриваются только однозначные аналитические функции.

Определение 11.1. *Если функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности $|z - z_0| < \delta$ точки z_0 за исключением самой точки z_0 , в которой она может быть и не задана, то точка z_0 называется изолированной особой точкой функции f .*

Определение 11.2 (классификация особых точек). *Изолированная особая точка z_0 функции f , аналитичной в некоторой проколотой окрестности $0 < |z - z_0| < \delta$ точки z_0 , называется*

1) *устранимой особой точкой функции f , если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ существует и конечен;*

2) *полюсом функции f , если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$;*

3) *существенно особой точкой функции f , если не существует $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$.*

Пусть z_0 — изолированная особая точка. По теореме 10.1 функция f в кольце $0 < |z - z_0| < \delta$ раскладывается в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n. \quad (11.1)$$

Теорема 11.1. *Для того чтобы точка z_0 была устранимой особой точкой функции f , необходимо и достаточно, чтобы в разложении Лорана (11.1) отсутствовала главная часть лорановского разложения ($c_n = 0$ для $n = -1, -2, \dots$), т. е. чтобы лорановское разложение функции $f(z)$ имело вид*

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots, \quad 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть существует конечный $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, тогда функция f ограничена в некоторой окрестности точки z_0 , т. е. $|f(z)| \leq M$ в некоторой окрестности $K_\varepsilon(z_0)$, содержащейся в круге $|z - z_0| < \delta$. Обозначим $\Gamma = \{z \mid |z - z_0| = \varepsilon\}$. Для коэффициентов лорановского разложения (11.1) справедливы равенства (см. (10.4)) $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |c_n| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z - z_0| = \varepsilon} \frac{|f(z)|}{|z - z_0|^{n+1}} dl \leq \\ &\leq \frac{M}{2\pi \varepsilon^{n+1}} \int_{|z - z_0| = \varepsilon} dl = \frac{M}{2\pi \varepsilon^{n+1}} 2\pi \varepsilon = M \varepsilon^{-n}. \end{aligned}$$

Пусть $n = -1, -2, \dots$, тогда $0 \leq |c_n| \leq M \varepsilon^{-n}$ и $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M \varepsilon^{-n} = 0$. По теореме о пределе сжатой функции $c_n = 0$, $n = -1, -2, \dots$. Следовательно, лорановское разложение функции $f(z)$ в кольце $0 < |z - z_0| < \delta$ имеет вид

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots$$

$\Leftarrow$ Пусть лорановское разложение функции $f(z)$ имеет вид

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots, \quad 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Переходя почленно к пределу, получаем, что существует $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c_0$. По определению z_0 — устранимая особая точка. ■

Из доказательства теоремы 11.1 вытекает, что условие существования предела $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ можно заменить условием $|f(z)| \leq M$ в некоторой окрестности $K_\varepsilon(z_0)$, т. е. справедлива следующая теорема.

Теорема 11.2. *Если функция $f(z)$ ограничена в окрестности изолированной особой точки z_0 , то z_0 — устранимая особая точка $f(z)$.*

Замечание 11.1. Если точка z_0 является устранимой особой точкой функции f , то новая функция: $\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z \neq z_0, \\ c_0, & z = z_0 \end{cases}$ аналитична и в точке z_0 . Действительно, функция $\tilde{f}(z)$ всюду в круге $|z - z_0| < \delta$ совпадает с суммой сходящегося степенного ряда и, согласно следствию 8.3, является аналитической функцией. Этим объясняется название „устранимая особая точка“. $\otimes$

Теорема 11.3. *Для того чтобы точка z_0 была полюсом функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция представлялась в виде*

$$f(z) = (z - z_0)^{-m} h(z), \quad h(z_0) \neq 0, \quad (11.2)$$

где $h(z)$ — аналитическая в окрестности точки z_0 и $m \in \mathbb{N}$. Представление (11.2) единственно.

Число m называется порядком полюса z_0 функции f . Если $m = 1$, то полюс называется простым.

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть z_0 — полюс функции f . Тогда функция $f(z)$ аналитична в кольце $0 < |z - z_0| < \delta$ и $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, откуда следует, что

$$|f(z)| > 1 \quad (11.3)$$

в некотором кольце $K = \{z \mid 0 < |z - z_0| < \rho\}$ ($\rho \leq \delta$) и функция f аналитична в K . Рассмотрим функцию $g(z) = 1/f(z)$. Функция $g(z)$ аналитична в K , так как функция f аналитична в K и не обращается в нуль в этом кольце в силу неравенства (11.3). Следовательно, z_0 — изолированная особая точка функции $g(z)$. Из (11.3) следует, что $|g(z)| < 1$ в K , и по теореме 11.2 получаем, что z_0 — устранимая особая точка функции $g(z)$.

Полагая $g(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$ получаем, что $g(z)$ аналитична в круге $|z - z_0| < \rho$ и точка z_0 является ее нулем.

Пусть m – порядок нуля функции $g(z)$. По теореме 9.2 (формула (9.3)) имеем $g(z) = (z - z_0)^m \psi(z)$, где функция $\psi(z)$ аналитична в окрестности точки z_0 и $\psi(z_0) \neq 0$. Отсюда получаем

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = (z - z_0)^{-m} h(z),$$

где $h(z) = \frac{1}{\psi(z)}$ – аналитичная в окрестности точки z_0 функция, $h(z_0) = 1/\psi(z_0) \neq 0$. Единственность представления (11.2) следует из единственности представления функции $g(z)$.

$\Leftarrow$ Из равенства (11.2) следует, что функция аналитична в некотором кольце $0 < |z - z_0| < \delta_1$ и что $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, т. е. z_0 – полюс функции $f(z)$. ■

Теорема 11.4. *Для того чтобы точка z_0 была полюсом порядка m функции f , необходимо и достаточно, чтобы для коэффициентов лорановского разложения (11.1) функции f были выполнены равенства $c_n = 0$ при $n = -m - 1, -m - 2, \dots$ и $c_{-m} \neq 0$. Ясно, что в этом случае главная часть лорановского разложения конечна.*

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть z_0 – полюс порядка m , тогда согласно теореме 11.3 имеет место формула (11.2). Раскладывая функцию $h(z)$ в окрестности точки z_0 в ряд Тейлора $h(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \dots$, $b_0 = h(z_0) \neq 0$, получаем ряд Лорана для функции $f(z)$ в проколотой окрестности точки z_0 :

$$f(z) = (z - z_0)^{-m} h(z) = \frac{b_0}{(z - z_0)^m} + \frac{b_1}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots, \quad b_0 \neq 0.$$

Ясно, что $b_0 = c_{-m} \neq 0$ и $c_n = 0$, при $n = -m - 1, -m - 2, \dots$.

$\Leftarrow$ Пусть лорановское разложение имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots, \quad c_{-m} \neq 0. \quad (11.4)$$

Тогда для функции $g(z) = (z - z_0)^m f(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + \dots$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = c_{-m} \neq 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} = \infty$$

и точка z_0 является по определению 11.2 полюсом. Из (11.4) следует

$$f(z) = (z - z_0)^{-m}(c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + \dots) = (z - z_0)^{-m}g(z),$$

где $c_{-m} \neq 0$. Так как $g(z)$ – сумма сходящегося степенного ряда, то она аналитична в окрестности точки z_0 и $g(z_0) = c_{-m} \neq 0$. Согласно (11.2), z_0 – полюс порядка m функции f . ■

Утверждение 11.1. Пусть z_0 – нуль порядка m аналитической в окрестности z_0 функции $\psi(z)$, тогда точка z_0 – полюс порядка m функции $f(z) = \frac{1}{\psi(z)}$.

Доказательство. Согласно теореме 9.2 $\psi(z) = (z - z_0)^m h(z)$, где функция $h(z)$ аналитична в некоторой окрестности z_0 и не обращается там в нуль. Следовательно, $f(z) = (z - z_0)^{-m}g(z)$, где $g(z) = 1/h(z)$ аналитична в окрестности z_0 , поскольку $h(z)$ аналитична в окрестности z_0 и не обращается там в нуль. Поэтому утверждение следует из теоремы 11.3. ■

Непосредственно из теорем 11.1 и 11.4 вытекает следующая теорема.

Теорема 11.5. Точка z_0 – существенно особая точка функции f тогда и только тогда, когда имеется бесконечное число коэффициентов c_n с отрицательными номерами, отличными от нуля, т. е. главная часть лорановского разложения (11.1) бесконечна.

Определение 11.3. Функция $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ называется целой, если она не имеет особых точек, и называется мероморфной, если она имеет только изолированные особые точки, которые являются полюсами.

Пусть функция $f(z)$ – аналитическая в кольце $R < |z| < +\infty$, и пусть ее лорановское разложение имеет вид $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$. Сделаем замену

$\zeta = \frac{1}{z}$, тогда кольцо $R < |z| < +\infty$ переходит в кольцо $0 < |\zeta| < \frac{1}{R}$, а

функция $f(z)$ – в функцию $g(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \zeta^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{-n} \zeta^n$.

Определение 11.4. Говорят, что точка $z = \infty$ является изолированной особой точкой функции $f(z)$, если точка $\zeta = 0$ – изолированная особая точка функции $g(\zeta)$. Тип точки $z = \infty$ для функции $f(z)$ совпадает с типом точки $\zeta = 0$ для функции $g(\zeta)$.

Теорема 11.6 (Сохотского). Пусть точка z_0 – существенно особая точка функции $f(z)$. Тогда для любого $A \in \overline{\mathbb{C}}$ существует такая последовательность $\{z_n\}$, $z_n \rightarrow z_0$, что $\lim f(z_n) = A$.

Доказательство. Если $A = \infty$, то теорема справедлива, так как $f(z)$ не ограничена по модулю в любой окрестности существенно особой точки.

Пусть $A \neq \infty$; докажем теорему от противного. Если в произвольной окрестности точки z_0 нельзя найти точек, в которых значения функции сколь угодно близки к A , то существует кольцо $0 < |z - z_0| < \delta$ и число $\alpha > 0$, для которых $|f(z) - A| > \alpha$ при $0 < |z - z_0| < \delta$. Построим новую функцию $\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - A}$; она является аналитической в кольце $0 < |z - z_0| < \delta$ и удовлетворяет в нем неравенству

$$|\varphi(z)| = \frac{1}{|f(z) - A|} < \frac{1}{\alpha}.$$

Следовательно, согласно теореме 11.2, для функции $\varphi(z)$ точка z_0 является устранимой особой точкой и ее значение в этой точке должно равняться пределу $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z) - A}$. Но $f(z)$ не ограничена ни в какой окрестности точки z_0 . Поэтому указанный предел может быть только нулем, т. е. $\varphi(z_0) = 0$.

Следовательно, функция $\frac{1}{f(z) - A}$ имеет нуль в точке z_0 , откуда вытекает, что функция $f(z) - A$, а значит, и функция $f(z)$ имеют полюс в этой точке. Получено противоречие с условием теоремы. ■

Справедлива более сильная теорема, которую приводим без доказательства.

Теорема 11.7 (Пикара). Пусть точка z_0 – существенно особая точка функции $f(z)$. Тогда в любой окрестности точки z_0 функция $f(z)$ принимает, и притом бесконечное число раз, любое значение $A \in \mathbb{C}$, кроме, быть может, одного.

Проиллюстрируем теорему Пикара на примерах.

Пример 11.1. Точка $z = \infty$ является существенно особой для функции $f(z) = e^z$. Рассмотрим уравнение $e^z = A$, $A \neq 0$. Это уравнение имеет следующие решения (см. утверждение 4.2):

$$z_k = \ln |A| + i(\arg(A) + 2k\pi), \quad (11.5)$$

где $\arg(A)$ – фиксированное значение аргумента числа A , $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Из (11.5) следует, что в любой окрестности точки $z = \infty$ имеется бесчисленное множество точек z_k , в которых функция e^z принимает значение A ($A \neq 0$). Значение $A = 0$ функция e^z не принимает (такое значение называется *исключительным* для e^z). •

Для функции $f(z) = \sin(z)$ точка $z = \infty$ является существенно особой. Можно показать, что для каждого A уравнение $\sin(z) = A$ имеет бесчисленное множество решений. Следовательно, функция $\sin(z)$ не имеет исключительных значений.

12. Вычеты аналитической функции

Пусть z_0 – изолированная особая точка ($z_0 \neq \infty$) функции $f(z)$, при этом f – аналитическая в некотором кольце $0 < |z - z_0| < \delta$. Рассмотрим замкнутую кривую Γ , охватывающую точку z_0 и целиком лежащую в этом кольце. По теореме 6.3 значение интеграла $\oint_{\Gamma^+} f(z)dz$ одинаковое для всех кривых Γ .

Определение 12.1. Число $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} f(z)dz$ называется *вычетом функции f в точке z_0* .

Замечание 12.1. Можно определить вычет и в неособой точке, но по теореме 6.1 он равен нулю, и поэтому такое понятие не вводится. $\otimes$

Разложим функцию $f(z)$ в кольце $0 < |z - z_0| < \delta$ в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n. \quad (12.1)$$

Теорема 12.1. Пусть z_0 – изолированная особая точка ($z_0 \neq \infty$) аналитической в некотором кольце $0 < |z - z_0| < \delta$ функции $f(z)$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}$, где c_{-1} – коэффициент при $\frac{1}{z - z_0}$ в лорановском разложении (12.1).
2. Если z_0 – устранимая особая точка, то $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = 0$.
3. Если z_0 – полюс порядка m , то

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} ((z - z_0)^m f(z))^{(m-1)}. \quad (12.2)$$

В частности, если z_0 – простой полюс ($m = 1$), то

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} ((z - z_0) f(z)). \quad (12.3)$$

4. Если $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$, то z_0 – простой полюс функции $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ и $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$.

Доказательство. 1. Согласно определению 12.1 в качестве Γ можно взять окружность $\Gamma = \{z \mid |z - z_0| = r\}$, где $r < \delta$. Проинтегрируем ряд

(12.1) почленно и используем лемму 5.1, тогда

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} f(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} (z - z_0)^n dz = \frac{c_{-1}}{2\pi i} 2\pi i = c_{-1}.$$

2. Следует из только что доказанного: $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1} = 0$, так как в случае устранимой особой точки $c_{-1} = 0$.

3. Пусть z_0 – полюс порядка m , тогда разложение (12.1) имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots$$

Домножив это равенство на $(z - z_0)^m$, получим

$$\begin{aligned} (z - z_0)^m f(z) &= c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + \dots \\ &\dots + c_{-1}(z - z_0)^{m-1} + c_0(z - z_0)^m + c_1(z - z_0)^{m+1} + \dots \end{aligned}$$

Почленно дифференцируя, найдем

$$\begin{aligned} ((z - z_0)^m f(z))^{(m-1)} &= c_{-1}(m-1)! + c_0 m(m-1) \dots 2(z - z_0) + \\ &+ c_1(m+1)m \dots 3(z - z_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

Переходя почленно к пределу, получим

$$\lim_{z \rightarrow z_0} ((z - z_0)^m f(z))^{(m-1)} = (m-1)! c_{-1}.$$

Следовательно, согласно п. 1

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} ((z - z_0)^m f(z))^{(m-1)}.$$

4. Так как z_0 – простой нуль функции $\psi(z)$ и не является нулем $\varphi(z)$, то z_0 – простой полюс $f(z)$. Воспользуемся п. 3 для простого полюса

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left((z - z_0) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \right) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0}} = \\ &= \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \end{aligned}$$

При вычислении предела использовано определение производной. ■

Теорема 12.2 (основная теорема о вычетах). Пусть аналитическая в области D и непрерывная в $\bar{D}$ функция $f(z)$, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_k \in D$, $k = 1, 2, \dots, n$, а ∂D (граница D) является замкнутой кривой или объединением конечного числа замкнутых кривых. Тогда

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Доказательство. Рассмотрим не пересекающиеся круги $K_\varepsilon(z_k)$ такого достаточно малого радиуса ε , чтобы в этих кругах содержалось только по одной особой точке (рисунок, для случая $n = 3$). Это можно сделать, так как особые точки изолированы. Пусть $\Gamma_k = \{z \mid |z - z_k| = \varepsilon\}$ – соответствующие окружности. Тогда согласно определению 12.1

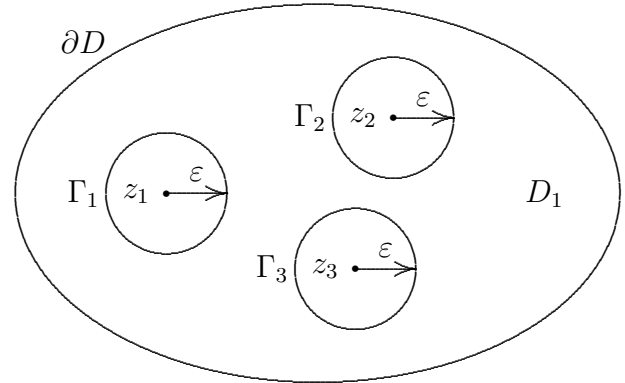


Рис. 12.1

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_k^+} f(z)dz = \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z). \quad (12.4)$$

Вырезав теперь эти круги из области D , получим область D_1 . Согласно теореме 6.3 $\int_{\partial D_1} f(z)dz = 0$, следовательно,

$$\int_{\partial D} f(z)dz = \sum_{k=1}^n \oint_{\Gamma_k^+} f(z)dz.$$

Используя формулу (12.4), получим

$$\int_{\partial D} f(z)dz = \sum_{k=1}^n 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z). \blacksquare$$

Пусть теперь $z = \infty$ – изолированная особая точка f , т.е. в некотором кольце $K : R < |z| < +\infty$ функция f аналитична, и справедливо лорановское разложение

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n. \quad (12.5)$$

Пусть Γ – замкнутая кривая, охватывающая круг $|z| \leq R$ и целиком лежащая в K . Интеграл $\oint_{\Gamma^-} f(z)dz$, где Γ^- означает, что Γ обходится по часовой стрелке (точка 0 остается справа), согласно теореме 6.3 не зависит от Γ .

Определение 12.2. Число $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^-} f(z)dz$ называется вычетом функции f в точке $z = \infty$.

Утверждение 12.1. $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}$, где c_{-1} – коэффициент при $\frac{1}{z}$ в лорановском разложении (12.5).

Доказательство. Возьмем в качестве Γ окружность $|z| = r$, где $r > R$. Проинтегрировав (12.5) почленно, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^-} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \oint_{\Gamma^-} z^n dz = \\ &= - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} z^n dz = -c_{-1} \frac{1}{2\pi i} 2\pi i = -c_{-1}. \end{aligned}$$

Здесь при вычислении интеграла использована лемма 5.1. ■

Теорема 12.3. Если функция $f(z)$ аналитична всюду в $\mathbb{C}$, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$, $z_n = \infty$, то $\sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) = 0$.

Доказательство. Поскольку конечных особых точек конечное число, то существует такое число $R > 0$, что функция f аналитична в кольце $R < |z| < +\infty$. Возьмем замкнутую кривую Γ , охватывающую круг $|z| \leq R$ и целиком лежащую в этом кольце, тогда согласно теореме 12.2

$$\oint_{\Gamma^+} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z).$$

С другой стороны, по определению 12.2

$$\oint_{\Gamma^-} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z)$$

или

$$-\oint_{\Gamma^+} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z).$$

Складывая полученные равенства, найдем

$$0 = 2\pi i \left(\sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) \right).$$

Следовательно, $\sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) = 0$. ■

13. Приложение теории вычетов к вычислению определенных интегралов

Рассмотрим задачи вычисления только трех видов определенных интегралов, которые можно вычислять с использованием основной теоремы о вычетах (теорема 12.2). С вычислением интегралов другого вида можно познакомиться в учебнике [7, §29].

I. Интегралы вида $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

Лемма 13.1 (первая лемма Жордана). Пусть функция $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости $\Im m z > 0$, за исключением конечного числа изолированных особых точек, и существуют такие постоянные $R_0, M, \delta > 0$, что для любого $z \in \{z \mid \Im m z > 0, |z| > R_0\}$ справедлива оценка

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^{1+\delta}}. \quad (13.1)$$

Тогда

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0, \quad (13.2)$$

где $C_R = \{z \mid |z| = R, \Im m z > 0\}$ – полуокружность.

Доказательство. Выберем $R > R_0$ бóльшим максимального расстояния от 0 до особых точек. Используя оценку (13.1) имеем

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \int_{C_R} |f(z)| dl \leq \int_{C_R} \frac{M}{|z|^{1+\delta}} dl = \\ &= \int_{C_R} \frac{M}{R^{1+\delta}} dl = \frac{M}{R^{1+\delta}} \int_{C_R} dl = \frac{M}{R^{1+\delta}} \pi R = \frac{\pi M}{R^\delta}. \end{aligned}$$

Так как $\delta > 0$, то $\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\pi M}{R^\delta} = 0$, следовательно, по теореме о пределе сжатой функции выполнено (13.2). ■

Теорема 13.1. Пусть функция $f(z)$ удовлетворяет условиям леммы 13.1 и не имеет особых точек на вещественной оси. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z), \quad (13.3)$$

где z_k ($k = 1, 2, \dots, n$) – особые точки функции f , расположенные в верхней полуплоскости ($\Im z_k > 0$).

Доказательство. Рассмотрим расположенную в верхней полуплоскости область $D = \{z \mid |z| < R \wedge \Im z > 0\}$, которая содержит все особые

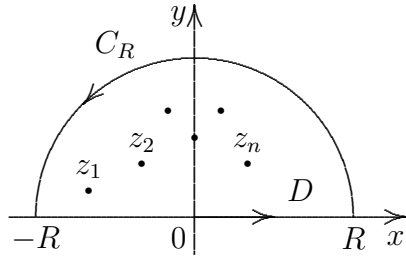


Рис. 13.1

точки $z_1, z_2, \dots, z_n$ (рис. 13.1), где $x = \Re z$ и $y = \Im z$. Ее граница ∂D состоит из полуокружности C_R и отрезка вещественной оси $[-R, R]$ и не содержит особых точек. Согласно теореме 12.2 и учитывая, что на вещественной оси $z = x + i0 = x$, получим

$$\oint_{\partial D^+} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z).$$

Правая часть от R не зависит, следовательно, переходя к пределу при $R \rightarrow +\infty$ и используя (13.2), получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z). \quad \blacksquare$$

Пример 13.1. Вычислить $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 2)}$.

Функция $f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 1)(z^2 - 2z + 2)}$ удовлетворяет условиям леммы 13.1 с $\delta = 1 > 0$. Знаменатель функции $f(z)$ имеет нули кратности 1 в точках $\pm i$, $1 \pm i$. Следовательно, функция $f(z)$ имеет простые полюсы в верхней полуплоскости в точках i и $1 + i$. Вычислим вычеты в этих точках, используя (12.3):

$$\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2(z - i)}{(z^2 + 1)(z^2 - 2z + 2)} = \frac{-2 + i}{10}$$

и

$$\operatorname{Res}_{z=1+i} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1+i} \frac{z^2(z - 1 - i)}{(z^2 + 1)(z^2 - 2z + 2)} = \frac{1 - 2i}{5}.$$

Согласно (13.3)

$$I = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=i} f(z) + \operatorname{Res}_{z=1+i} f(z) \right) = 2\pi i \left(\frac{-2 + i}{10} + \frac{1 - 2i}{5} \right) = \frac{3\pi}{5}. \bullet$$

II. Интегралы вида $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax} dx$, $a > 0$

Лемма 13.2 (вторая лемма Жордана). Пусть функция $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости $\Im z > 0$, за исключением конечного числа изолированных особых точек. Если

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\sup_{C_R} |f(z)| \right) = 0, \quad (13.4)$$

где $C_R = \{z \mid |z| = R, \Im z > 0\}$ – полуокружность, и $a > 0$, то

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} f(z)e^{iaz} dz = 0. \quad (13.5)$$

Доказательство. Докажем сначала вспомогательное неравенство. На отрезке $[0, \pi/2]$ рассмотрим функцию $\sin \varphi$. Так как

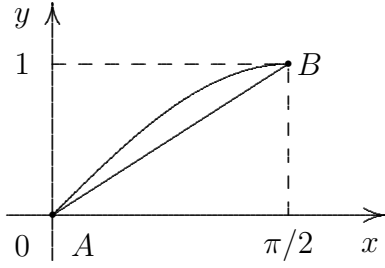


Рис. 13.2

$$(\sin \varphi)'' = -\sin \varphi \leq 0$$

при $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, то функция $\sin \varphi$ выпукла вверх на промежутке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и график функции $\sin \varphi$ расположен выше (рис. 13.2) хорды AB (прямой $y = \frac{2}{\pi} \varphi$). Следовательно, для любых значений $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ выполнено неравенство

$$\sin \varphi \geq \frac{2}{\pi} \varphi, \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (13.6)$$

Обозначим $J(R) = \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz$ и $M(R) = \sup_{C_R} |f(z)|$. Если $z = x + iy$, то

$$|e^{iaz}| = |e^{ia(x+iy)}| = e^{-ay}. \quad (13.7)$$

Оценим модуль интеграла $J(R)$, учитывая равенство (13.7):

$$|J(R)| \leq \int_{C_R} |e^{iaz}| |f(z)| dl \leq \int_{C_R} e^{-ay} M(R) dl = M(R) \int_{C_R} e^{-ay} dl. \quad (13.8)$$

Запишем криволинейный интеграл $\int_{C_R} e^{-ay} dl$, задавая полуокружность в

параметрическом виде $\begin{cases} x(\varphi) = R \cos \varphi, \\ y(\varphi) = R \sin \varphi, \end{cases}$, где $\varphi \in [0, \pi]$. Тогда

$$\int_{C_R} e^{-ay} dl = \int_0^\pi e^{-aR \sin \varphi} R d\varphi = R \int_0^\pi e^{-aR \sin \varphi} d\varphi.$$

Разобьем последний интеграл на два и, сделав во втором интеграле замену $\varphi = \pi - \psi$, получим

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^{-aR \sin \varphi} d\varphi &= \int_0^{\pi/2} e^{-aR \sin \varphi} d\varphi + \int_{\pi/2}^\pi e^{-aR \sin \varphi} d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi/2} e^{-aR \sin \varphi} d\varphi + \int_0^{\pi/2} e^{-aR \sin \psi} d\psi = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-aR \sin \varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

Итак,

$$\int_{C_R} e^{-ay} dl = 2R \int_0^{\pi/2} e^{-aR \sin \varphi} d\varphi. \quad (13.9)$$

Учитывая неравенство (13.6), получим для интеграла (13.9) оценку

$$\int_{C_R} e^{-ay} dl \leq 2R \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2aR}{\pi} \varphi} d\varphi = -\frac{2R}{\frac{2aR}{\pi}} e^{-\frac{2aR}{\pi} \varphi} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{a} (1 - e^{-aR}).$$

Подставляя полученное неравенство в оценку (13.8) и учитывая, что согласно условию (13.4) $M(R) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$, получим

$$0 \leq |J(R)| \leq M(R) \frac{\pi}{a} (1 - e^{-aR}) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

По теореме о пределе сжатой функции при $R \rightarrow +\infty$ получим, что $\lim_{R \rightarrow +\infty} J(R) = 0$, т. е. утверждение (13.5) доказано. ■

Теорема 13.2. Пусть функция f удовлетворяет условиям леммы 13.2 и не имеет особых точек на вещественной оси. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iax} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} (f(z) e^{iaz}), \quad a > 0, \quad (13.10)$$

где z_k ($k = 1, 2, \dots, n$) – особые точки функции $f(z)$, находящиеся в верхней полуплоскости.

Доказательство. Как и в теореме 13.1, рассмотрим полукруг на комплексной плоскости $D = \{z \mid |z| < R, \Im z > 0\}$, содержащий все особые точки $z_1, z_2, \dots, z_n$ функции f в верхней полуплоскости (см. рис. 13.1), $\partial D = C_R \cup \{z \mid x \in [-R, R], y = 0\}$. Согласно (5.3) и теореме 12.2

$$\oint_{\partial D^+} f(z) e^{iaz} dz = \int_{-R}^R e^{iax} f(x) dx + \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} (f(z) e^{iaz}).$$

Правая часть данного равенства от R не зависит. Переходя к пределу при $R \rightarrow +\infty$ и используя (13.5), получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iax} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} (f(z) e^{iaz}),$$

т. е. утверждение (13.10) доказано. ■

Замечание 13.1. Если функция f вещественна при вещественных x и $a > 0$, то, используя формулу Эйлера $e^{iax} = \cos(ax) + i \sin(ax)$ и разделяя в формуле (13.10) вещественную и мнимую части, получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(ax) f(x) dx &= -2\pi \Im \left[\sum_{\Im z_k > 0} \operatorname{Res} (f(z) e^{iaz}) \right], \quad a > 0, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(ax) f(x) dx &= 2\pi \Re \left[\sum_{\Im z_k > 0} \operatorname{Res} (f(z) e^{iaz}) \right], \quad a > 0. \end{aligned} \quad (13.11)$$

Отметим, что нет необходимости запоминать формулы (13.11). Гораздо важнее усвоить приемы, с помощью которых они получаются. ⊗

Пример 13.2. Вычислить $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)e^{ix} dx}{x^2+1}$.

Функция $f(z) = \frac{z+1}{z^2+1}$ удовлетворяет условиям леммы 13.2. Знаменатель функции $f(z)$ имеет нули кратности 1 в точках $\pm i$. Следовательно, функция $f(z)$ имеет простой полюс в верхней полуплоскости в точке i . Вычислим вычет функции $f(z)e^{iz}$ в этой точке:

$$\operatorname{Res}_{z=i} f(z) e^{iz} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z+1)(z-i)e^{iz}}{z^2+1} = \frac{1-i}{2e}.$$

Согласно (13.10)

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)e^{ix} dx}{x^2+1} = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=i} f(z) e^{iz} \right) = 2\pi i \frac{1-i}{2e} = \frac{\pi(1+i)}{e}.$$

Отсюда, даже без использования формул (13.11), легко получить

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1) \cos(x) dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{e}, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1) \sin(x) dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{e},$$

следовательно, $I_1 = \frac{\pi}{e}$ и $I_2 = \frac{\pi}{e}$. •

III. Интегралы вида $J = \int_0^{2\pi} R(\sin \varphi, \cos \varphi) d\varphi$

Считаем, что подынтегральная функция $R(\sin \varphi, \cos \varphi)$ есть рациональная функция своих аргументов, не имеющая особых точек на $[0, 2\pi]$.

Сделаем замену $z = e^{i\varphi}$, тогда $dz = ie^{i\varphi}d\varphi$, $d\varphi = \frac{dz}{iz}$, и используем формулы Эйлера

$$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right), \quad \cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

При изменении φ от 0 до 2π новый аргумент z пробегает окружность $|z| = 1$, которую обозначим Γ . Следовательно,

$$J = \frac{1}{i} \oint_{\Gamma^+} R \left(\frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right) \frac{1}{z} dz = \frac{1}{i} \oint_{\Gamma^+} f(z) dz,$$

где введено обозначение

$$f(z) = \frac{1}{z} R \left(\frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right). \quad (13.12)$$

Согласно теореме 12.2 имеем

$$J = \int_0^{2\pi} R(\sin \varphi, \cos \varphi) d\varphi = \frac{1}{i} \oint_{\Gamma^+} f(z) dz = 2\pi \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z), \quad (13.13)$$

где z_k ($k = 1, 2, \dots, n$) – особые точки функции $f(z)$, лежащие внутри круга $|z| < 1$.

Пример 13.3. Вычислить $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(5 + 3 \cos \varphi)^2}$. Сделав подстановку

$e^{i\varphi} = z$ получим (см. (13.12)) $f(z) = \frac{4z}{(3z^2 + 10z + 3)^2}$ и согласно (13.13)

имеем $I = 2\pi \sum_{\substack{z=z_k \\ |z_k|=1}} \operatorname{Res} f(z)$. Так как многочлен $3z^2 + 10z + 3$ имеет корни -3 и $-1/3$, то внутри единичного круга находится только один полюс второго порядка $z_1 = -1/3$. Вычет функции $f(z)$ относительно этого полюса можно найти с помощью формулы (12.2)

$$\operatorname{Res}_{z=-1/3} f(z) = \lim_{z \rightarrow -1/3} \frac{d}{dz} \left(\frac{4z(z + 1/3)^2}{(3z^2 + 10z + 3)^2} \right) = \frac{5}{64}.$$

Итак, $I = \frac{5\pi}{32}$. •

14. Число нулей и полюсов аналитической функции

Определение 14.1. Логарифмической производной от функции $f(z)$ называется функция:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d}{dz} \operatorname{Ln} f(z).$$

Теорема 14.1. Пусть функция f аналитична в замкнутой области $\overline{D}$ за исключением, может быть, полюсов, лежащих в ограниченной односвязной области D .

Если $f(z)$ не имеет на $\Gamma = \partial D$ — границе области D ни нулей, ни полюсов, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P, \quad (14.1)$$

где N — число нулей функции f с учетом порядка, а P — число полюсов функции f с учетом порядка.

Другими словами сумма вычетов от логарифмической производной от функции $f(z)$ (сумма логарифмических вычетов) равен $N - P$.

Доказательство. Отметим, что функция $f(z)$ может иметь в области D лишь конечное число полюсов, так как, в противном случае, существовала бы в области D предельная точка полюсов (не изолированная особая точка). Число нулей функции $f(z)$ в области D также конечно. Действительно, если число нулей бесконечно, то существует предельная точка нулей функции $f(z)$, лежащих в области D и, следовательно по теореме 9.3, $f(z) \equiv 0$ в D .

Особыми точками функции $f'(z)/f(z)$ являются лишь нули и полюсы $f(z)$. По теореме 12.2 интеграл $\int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ равен сумме вычетов в изолированных особых точках функции $\frac{f'}{f}$, которыми являются в данном случае нули и полюсы функции f .

Пусть $z = \alpha$ — нуль функции f порядка m . Согласно утверждению 9.1 в окрестности точки $z = \alpha$ $f(z) = (z - \alpha)^m g(z)$, $g(\alpha) \neq 0$ и g — аналитическая функция. Тогда

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m(z - \alpha)^{m-1}g(z) + (z - \alpha)^m g'(z)}{(z - \alpha)^m g(z)} = \frac{m}{z - \alpha} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Так как $g(\alpha) \neq 0$, то функция $\frac{g'}{g}$ аналитическая в окрестности точки $z = \alpha$ и, следовательно, по теореме 9.1

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = c_0 + c_1(z - \alpha) + c_2(z - \alpha)^2 + \dots$$

Значит, лорановское разложение в кольце $0 < |z - \alpha| < \varepsilon$ имеет вид

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - \alpha} + c_0 + c_1(z - \alpha) + \dots$$

Следовательно, по теореме 12.1 $\operatorname{Res}_{z=\alpha} \frac{f'(z)}{f(z)} = m$ – порядку нуля $z = \alpha$ или числу нулей $z = \alpha$.

Пусть теперь $z = \beta$ – полюс порядка l функции f . По определению 11.2 в некотором кольце $0 < |z - \beta| < \delta$

$$f(z) = \frac{c_{-l}}{(z - \beta)^l} + \frac{c_{-l+1}}{(z - \beta)^{l-1}} + \dots$$

и $c_{-l} \neq 0$.

Почленно дифференцируя, получаем

$$f'(z) = -\frac{lc_{-l}}{(z - \beta)^{l+1}} - \frac{(l-1)c_{-l+1}}{(z - \beta)^l} - \dots$$

Тогда в $0 < |z - \beta| < \delta$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-\frac{1}{(z - \beta)^{l+1}}(lc_{-l} + (l-1)c_{-l+1}(z - \beta) + \dots)}{\frac{1}{(z - \beta)^l}(c_{-l} + c_{-l+1}(z - \beta) + \dots)} = -\frac{1}{z - \beta}g(z),$$

где

$$g(z) = \frac{lc_{-l} + (l-1)c_{-l+1}(z - \beta) + \dots}{c_{-l} + c_{-l+1}(z - \beta) + \dots}$$

$g(z)$ – аналитическая функция в окрестности точки $z = \beta$, как частное аналитической функции, знаменатель не обращается в нуль, так как $c_{-l} \neq 0$. При этом $g(\beta) = l$. Следовательно, по теореме 9.1 $g(z) = l + b_1(z - \beta) + b_2(z - \beta)^2 + \dots$, значит, лорановское разложение функции $\frac{f'}{f}$ в некотором кольце $0 < |z - \beta| < \varepsilon$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{l}{z - \beta} - b_1 - b_2(z - \beta) - \dots$$

Значит, по теореме 12.1 $\operatorname{Res}_{z=\beta} \frac{f'(z)}{f(z)} = -l$ с минусом порядка полюса $z = \beta$ или с минусом, равным числу полюсов $z = \beta$.

Значит, окончательно

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P,$$

где N и P – соответственно число нулей и полюсов функции $f(z)$ в области D , причем каждый нуль и полюс берется столько раз, каковы их порядки.

■

Следствие 14.1 (принцип аргумента). Если функция f удовлетворяет условиям теоремы 14.1, то формулу 14.1 можно записать так:

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \arg f(z) = N - P, \quad (14.2)$$

где $\Delta_{\Gamma} \arg f(z)$ – приращение аргумента функции f при обходе границы Γ в положительном направлении.

Доказательство. В некоторой полосе, содержащей границу Γ функции $\frac{f'}{f}$ по условию аналитичности, если полосу разрезать, то получится односвязная область, в которой у функции $\frac{f'(z)}{f(z)}$ есть первообразная $\ln f(z)$.

Следовательно, по теореме 14.1

$$\begin{aligned} N - P &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} (\ln f(z)) \Big|_{\Gamma} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} (\ln |f(z)| + i \arg f(z)) \Big|_{\Gamma} = \frac{1}{2\pi} \arg f(z) \Big|_{\Gamma} = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \arg f(z), \end{aligned}$$

так как $|f(z)|$ при обходе по замкнутому контуру возвращается к первоначальному значению. Откуда из (14.1) вытекает формула (14.2) ■

Замечание 14.1. Если функция $f(z)$ не имеет особых точек, то по теореме 14.1 и следовательно по формуле (14.1) можно сосчитать число нулей аналитической функции, если же $f(z)$ не имеет нулей, то можно сосчитать число полюсов.

В частности если функция $f(z)$ не имеет полюсов в области D , то формула (14.2) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \arg f(z) = N. \quad (14.3)$$

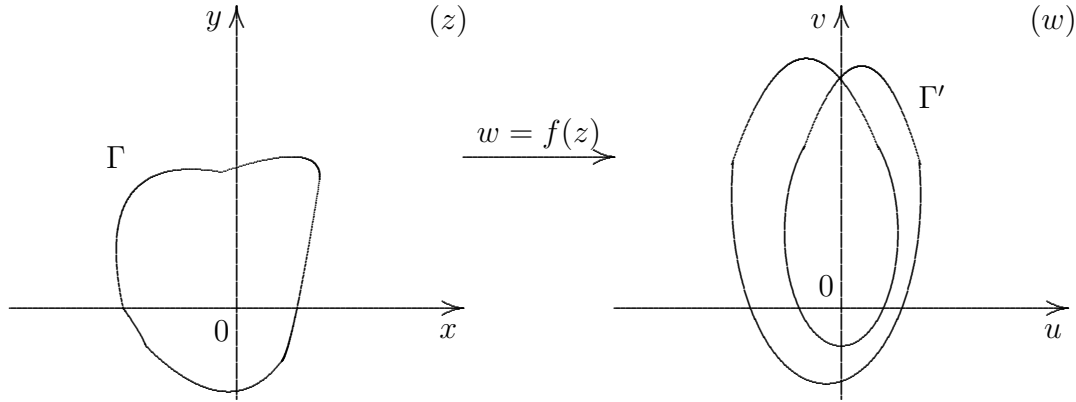


Рис. 14.1

Поясним геометрический смысл $\Delta_{\Gamma} \arg f(z)$. Пусть Γ' – образ кривой Γ при отображении $w = f(z)$ (рис. 14.1). при полном обходе замкнутого контура Γ точкой z соответствующая точка описывает на плоскости w замкнутый контур Γ' . Изменение аргумента функции $f(z)$ на контуре Γ определяется числом полных оборотов, которые совершает вектор w при движении точки w по замкнутому контуру Γ' .

В нашем случае, если функция $f(z)$ не имеет полюсов в области D , то формула (14.3) показывает, что $f(z)$ имеет в области D (см. рис. 14.1) два нуля. Если вектор w не делает ни одного полного оборота вокруг точки $w = 0$, то $\Delta_{\Gamma} \arg f(z) = 0$. $\otimes$

Теорема 14.2 (Руше). Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитические в замкнутой области $\bar{D}$, причем для любого $z \in \Gamma = \partial D$ (границе D) $|f(z)| > |g(z)|$. Тогда число нулей в D функции $F(z) = f(z) + g(z)$ совпадает с числом нулей функции $f(z)$.

Доказательство. Функция f не обращается в нуль на Γ , так как $|f(z)| > |g(z)| \geq 0$, также на Γ $|F(z)| = |f(z) + g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0$ и F не обращается на Γ в нуль.

По условию у f и F нет полюсов. Следовательно, по следствию 14.1 число нулей

$$N_F = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \arg F(z) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \arg(f(z) + g(z))$$

и

$$N_f = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \arg f(z).$$

Тогда

$$\begin{aligned} N_F - N_f &= \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \arg(f(z) + g(z)) - \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \arg f(z) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} (\arg(f(z) + g(z)) - \arg f(z)) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \arg \frac{f(z) + g(z)}{f(z)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \arg \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right).$$

Пусть $w = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$. При обходе точкой z границы Γ соответствующая точка w описывает замкнутую кривую Γ' , и так как

$$|w - 1| = \frac{|g(z)|}{|f(z)|} < 1,$$

то кривая Γ' лежит в круге $|w - 1| < 1$. Значит, точка $w = 0$ лежит вне кривой Γ' , и в силу замечания 14.1, $\Delta_{\Gamma} \arg w = 0$. Значит $N_F = N_f$. ■

Пример 14.1. Найти число корней уравнения

$$z^9 - 6z^4 + 3z - 1 = 0$$

внутри круга $|z| = 1$.

Обозначим $f(z) = -6z^4$, $g(z) = z^9 + 3z - 1$. Если $z \in \Gamma$, где $\Gamma : |z| = 1$, то

$$|f(z)| = 6, \quad |g(z)| \leq |z|^9 + 3|z| + 1 = 5,$$

откуда $|f(z)| > |g(z)|$ при $z \in \Gamma$. По теореме Руше число корней исходного уравнения в круге $|z| < 1$ совпадает с числом корней уравнения $f(z) = -6z^4 = 0$ в этом круге, т. е. равно 4. •

Пример 14.2. Доказать, что уравнение

$$z + \lambda - e^z = 0, \quad \lambda > 1 \tag{14.4}$$

имеет в левой полуплоскости единственный (и при том действительный) корень.

Рассмотрим замкнутый контур, составленный из дуги полуокружности $C_R : |z| = R$, $\Re z \leq 0$ и отрезка $l : [-iR, iR]$. Положим $f(z) = z + \lambda$, $g(z) = -e^z$. На отрезке l имеем $|f(z)| = |\lambda + iy| \geq \lambda > 1$, $|g(z)| = |e^{iy}| = 1$. На полуокружности C_R при $R > \lambda + 1$ имеем

$$|f(z)| \geq |z| - \lambda = R - \lambda > 1, \quad |g(z)| = |e^{x+iy}| = e^x \leq 1,$$

так как $x \leq 0$. В силу теоремы Руше число корней уравнения (14.4) в области $|z| < R$, $\Re z < 0$ при любом $R > \lambda + 1$ равно числу корней уравнения $z + \lambda = 0$, т. е. равно 1. отсюда следует, что и во всей левой полуплоскости уравнение (14.4) имеет ровно один корень. Этот корень является действительным, так как левая часть уравнения (14.4) положительна (равна $\lambda - 1$) при $z = x = 0$ и стремится к $-\infty$ при $x \rightarrow -\infty$. •

Следствие 14.2 (обобщение основной теоремы алгебры). *Многочлен n -ой степени имеет на комплексной плоскости ровно n нулей (с учетом порядка).*

Доказательство. Имеем

$$F(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 = f(z) + g(z),$$

где $f(z) = a_n z^n$, $a_n \neq 0$, $g(z) = a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$,

$$\frac{g(z)}{f(z)} = \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{z} + \dots + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{z^n}.$$

Очевидно существует r_0 такое, что для любого $R > R_0$

$$\rho < \left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| \Big|_{|z|=R} = \frac{|g(z)|}{|f(z)|} \Big|_{|z|=R} < 1.$$

Следовательно, на окружности $|z| = R$ $|f(z)| > |g(z)|$.

По теореме 14.2 число нулей функции $F(z)$ в круге $|z| < R$ равно числу нулей в этом круге функции $f(z) = a_n z^n$, но функция f имеет единственный нуль $z = 0$ порядка n . Следовательно, поскольку $R > R_0$ произвольно, то $F(z)$ имеет n нулей. ■

Список литературы

1. Белополюский А. Л., Доценко М. Л., Трегуб В. Л. Элементы теории функций комплексного переменного: Учеб. пособие / Под ред. С. И. Челкака. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, 2001.
2. Белополюский А. Л., Бодунов Н. А., Челкак С. И., Чистяков В. М. Комплексные числа, многочлены и рациональные дроби: Эл. учеб. пособие / СПб.: Изд-во СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, 2013.
3. Белополюский А. Л., Бондарев А. С., Доценко М. Л., Фролова, Е. В., Щеглова А. П. Математический анализ (функции одной вещественной переменной): Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, 2013.
4. Райков Д. А. Одномерный математический анализ.–М.: Высш. шк., 1982.
5. Спрингер Дж. Введение в теорию римановых поверхностей.–М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
6. Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций.–М.: Наука, 1978.
7. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного.–М.: Наука, 1989.
8. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного.–М.: Наука, 1987.
9. Рудин У. Основы математического анализа.–СПб. : Лань, 2002.
10. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного.–М.: Наука, 1967.
11. Борович Е. З., Каврайская К. В., Колоницкий С. Б., Нежинская И. В., Челкак С. И. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы / Учеб. эл. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, 2012.
12. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной.–М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
13. Смирнов В. И. Курс высшей математики: В 5 т. Т. 3. Ч. 2.–М.: Наука, 1974.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
1. Множество комплексных чисел	3
2. Функции комплексного переменного. Предел. Непрерывность ...	11
3. Дифференцируемость функций комплексного переменного	16
4. Некоторые элементарные функции комплексного переменного ...	21
5. Интеграл от функции комплексного переменного	28
6. Теоремы Коши	34
7. Интегральная формула Коши	39
8. Функциональные и степенные комплексные ряды	43
9. Ряд Тейлора	46
10. Ряд Лорана	51
11. Изолированные особые точки аналитической функции	55
12. Вычеты аналитической функции	61
13. Приложение теории вычетов к вычислению определенных интегралов	65
14. Число нулей и полюсов аналитической функции	72
Список литературы	78

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Подписано в печать Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Гарнитура „Times New Roman“. Печ. л. 6,25.
Тираж 10 экз. Заказ

Издательство СПбГЭТУ „ЛЭТИ“
197376, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5