В. В. НИКОЛЬСКИЙ, Т. И. НИКОЛЬСКАЯ

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

*Допущено Государственным комитетом СССР
по народному образованию
в качестве учебного пособия для студентов
радиотехнических специальностей вузов*

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1989

ББК 22.336
Н64
УДК 537.87(075.8)

Никольский В. В., Никольская Т. И. Электродинамика и распространение радиоволн: Учеб. пособие для вузов.— 3-е изд., перераб. и доп.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.— 544 с.— ISBN 5-02-014033-3

Излагается теория электромагнетизма с акцентом на радиотехническую электродинамику и анализ волновых процессов. Рассматриваются отражение и преломление волн, излучение, дифракция, процессы в полых и диэлектрических волноводах, резонаторах, периодических, квазиоптических и иных структурах, в интегральных схемах СВЧ и пр. Обсуждаются методы математического моделирования в электродинамике, опирающиеся на применение ЭВМ. Отличительной особенностью книги является большое число картин электромагнитных полей, рассчитанных и построенных на ЭВМ (2-е изд. в 1978 г.).

Для студентов радиотехнических специальностей, а также инженеров-радиотехников и радиофизиков.

Табл. 10. Ил. 288. Библиогр. 80 назв.

Рецензенты:
кафедра антенных устройств и распространения радиоволн МЭИ, заведующий кафедрой доктор технических наук *Е. Н. Васильев*;
доктор технических наук *Б. М. Петров*

Н $\frac{1604050000-085}{053(02)-89}$ 99-89

ISBN 5-02-014033-3

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1989

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к третьему изданию 6
Введение 7

ЧАСТЬ 1
ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Глава 1. Исходные понятия и уравнения теории электромагнетизма 11
§ 1.0. Используемые математические понятия и символы . . . 11
§ 1.1. Заряды, токи и векторы поля 22
§ 1.2. Уравнения Максвелла 27
§ 1.3. Свойства материальных сред 35
§ 1.4. Поля на границах раздела сред 42
§ 1.5. Локализация и движение энергии поля 49
§ 1.6. Система уравнений и задачи электродинамики 58
Упражнения 61

Глава 2. Статические, стационарные и квазистационарные поля . . 62
§ 2.0. Используемые математические понятия и символы . . . 62
§ 2.1. Стационарное поле, электростатика и магнитостатика . . . 67
§ 2.2. Электростатические поля 72
§ 2.3. Стационарные магнитные поля 88
§ 2.4. Энергия стационарных полей и их общие свойства . . . 99
§ 2.5. Квазистационарные поля 109
Упражнения 111

Глава 3. Основные положения электродинамики 113
§ 3.0. Используемые математические понятия и символы . . . 113
§ 3.1. Уравнения электродинамики 116
§ 3.2. Гармонические колебания. Уравнения электродинамики в комплексной форме 119
§ 3.3. Баланс энергии при гармонических колебаниях 123
§ 3.4. Общие свойства решений системы уравнений электродинамики в комплексной форме 128
Упражнения 134

ЧАСТЬ 2
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ И КОЛЕБАНИЯ

Глава 4. Простейшие электромагнитные волны 135
§ 4.0. Общие сведения о волновых процессах 135
§ 4.1. Плоские однородные электромагнитные волны 140
§ 4.2. Поляризация и сложение волн 146
§ 4.3. Дисперсия, разные оценки скорости 149
Упражнения 153

Глава 5. Электродинамика и оптика 153
§ 5.0. Вспомогательные сведения. Вращение декартовой системы координат 153

§ 5.1. Отражение и преломление . . . 155
§ 5.2. Поля при падении волны на границу раздела сред . . . 162
§ 5.3. Полное отражение и направляемые волны . . . 172
§ 5.4. Действие проводящих границ . . . 185
§ 5.5. Локально плоские волны и геометрическая оптика . . . 185
Упражнения . . . 197

Глава 6. **Электромагнитные волны в структурах** . . . 198
§ 6.0. Используемые математические понятия и символы . . . 198
§ 6.1. Электромагнитные волны в продольно-однородных структурах 201
§ 6.2. Конкретизация полей и постановка краевых задач для классов волн . . . 206
§ 6.3. Периодические структуры . . . 212
§ 6.4. Передача и потери энергии в структурах . . . 216
Упражнения . . . 222

Глава 7. **Направляющие структуры** . . . 223
§ 7.0. Решение двумерного уравнения Гельмгольца методом разделения переменных . . . 223
§ 7.1. Прямоугольный волновод . . . 231
§ 7.2. Другие полые волноводы . . . 243
§ 7.3. Многосвязные направляющие структуры . . . 257
§ 7.4. Диэлектрические волноводы и родственные структуры . . 263
§ 7.5. Полосковые, щелевые и другие планарные структуры . . 276
§ 7.6. Некоторые виды периодических структур . . . 281
Упражнения . . . 288

Глава 8. **Резонаторы** . . . 289
§ 8.0. Трехмерное уравнение Гельмгольца и соответствующие краевые задачи . . . 289
§ 8.1. Общая теория электромагнитных резонаторов . . . 294
§ 8.2. Полые резонаторы . . . 303
§ 8.3. Другие электромагнитные резонаторы . . . 314
Упражнения . . . 317

ЧАСТЬ 3

ИЗЛУЧЕНИЕ И ДИФРАКЦИЯ

Глава 9. **Излучение в свободном пространстве** . . . 318
§ 9.0. Предварительные математические сведения . . . 318
§ 9.1. Излучение заданных источников . . . 321
§ 9.2. Элементарный электрический излучатель, диполь Герца . . 324
§ 9.3. Элементарный магнитный излучатель . . . 332
§ 9.4. Обобщенная задача об излучении. Принцип Гюйгенса . . 336
Упражнения . . . 343

Глава 10. **Дифракция в свободном пространстве** . . . 343
§ 10.1. Электродинамические задачи дифракции . . . 343
§ 10.2. Отверстие в экране. Дифракция Фраунгофера . . . 347
§ 10.3. Отверстие в экране. Дифракция Френеля . . . 353
§ 10.4. Взаимно дополнительные экраны. Ограниченные тела . . 363
§ 10.5. Дифракция на цилиндре . . . 368
§ 10.6. Дифракционная теория направляющих структур и резонаторов с линзами и зеркалами . . . 373
Упражнения . . . 376

Глава 11. **Излучение и дифракция в изолированных структурах** . 377
§ 11.0. Ортогональные системы функций и ряды Фурье . . . 377
§ 11.1. Вынужденные колебания. Излучение в полости . . . 384

§ 11.2. Вынужденные волны. Излучение в волноводе . . . 396
§ 11.3. Волноводная дифракция . . . 403
Упражнения . . . 410

ЧАСТЬ 4

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Глава 12. **Общий подход. Проекционные методы** . . . 411
§ 12.1. Постановка задач, представление полей, алгоритмизация . 411
§ 12.2. Проекционные методы. Процесс Бубнова — Галеркина . . 416
§ 12.3. Проекционное наложение граничных условий. Сведение задачи к рассмотрению границы . . . 427

Глава 13. **Дискретизация и декомпозиция** . . . 436
§ 13.1. Дискретизационные методы . . . 436
§ 13.2. Декомпозиционный принцип. Математическое моделирование сложных структур . . . 441
Упражнения . . . 453

ЧАСТЬ 5

ОСОБЕННОСТИ ПОЛЕЙ В РАЗЛИЧНЫХ СРЕДАХ. РАДИОВОЛНЫ В ПРИРОДНЫХ УСЛОВИЯХ

Глава 14. **Поля и заряженные частицы. Модели сред** . . . 455
§ 14.1. Стационарные поля . . . 455
§ 14.2. Гармонические колебания . . . 463
Упражнения . . . 466

Глава 15. **Распространение радиоволн** . . . 467
§ 15.1. Общие представления . . . 467
§ 15.2. Геометрическая оптика и теория дифракции при анализе распространения радиоволн . . . 472
§ 15.3. Земные радиоволны . . . 478
§ 15.4. Влияние тропосферы . . . 485
§ 15.5. Радиоволны в ионосфере . . . 490
§ 15.6. Диапазонные особенности распространения радиоволн и работа радиолиний . . . 497
Упражнения . . . 506

Глава 16. **Поля в анизотропных, активных и нелинейных средах** . 506
§ 16.1. Анизотропия и гиротропия . . . 506
§ 16.2. Поля и волны в гиротропных средах . . . 513
§ 16.3. Активные среды . . . 525
§ 16.4. Нелинейные среды . . . 528
Упражнения . . . 537

Приложение. О графических изображениях, полученных при помощи ЭВМ . . . 538

Список литературы . . . 540

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Книга предназначена служить учебным пособием по курсу «Электродинамика и распространение радиоволн» и является отражением курса лекций, который читает один из авторов в Московском институте радиотехники, электроники и автоматики (МИРЭА). В настоящем издании курс излагается в значительной мере по-новому.

Разумеется, традиционное содержание курса электродинамики для радиотехнических и радиофизических специальностей подлежит постоянному обновлению по мере развития новых технических приложений. Но, пожалуй, наиболее важной тенденцией является все возрастающее значение вычислительных методов, опирающихся на использование ЭВМ. Становятся все более мощными машинные средства исследования сложных электродинамических структур, которые образуют «мост» от теории к техническим расчетам. Авторы считали своей задачей отразить данную тенденцию двояким образом. С одной стороны, книга содержит специальные разделы (часть 4), посвященные вычислительным методам для радиотехнических задач электродинамики с ориентацией на ЭВМ (вплоть до автоматизированного проектирования). С другой стороны, во всей книге демонстрируется применение ЭВМ при изучении строения полей и волновых процессов. Авторы составили специальные программы интегрирования дифференциальных уравнений силовых линий; они многократно применяются при изложении учебного материала (см. Приложение, с. 538). Использованы средства машинной графики. На наш взгляд, это должно заметно облегчить восприятие материала при увеличении информативности изложения.

По мнению авторов должно способствовать изучению курса введение двух градаций материала. Символом А, поставленным после названия соответствующего раздела, обозначен минимально необходимый материал курса, а символом Б – более сложный материал, относительно громоздкие выводы, а также дополнительные комментарии. В начале большинства глав в краткой форме приведены необходимые математические сведения. И, наконец, в тексте специально выделены выводы формул и примеры, заканчивающиеся знаком ■. В конце каждой главы приведены упражнения. Все это должно облегчить самостоятельную работу студентов и, кроме того, помочь преподавателям по-разному формировать лекционный курс.

ВВЕДЕНИЕ

В основе теории электромагнетизма лежит представление об *электромагнитном поле*. В простейшем случае термин «поле» употребляется, когда надо сопоставить каждой точке пространства некоторую физическую характеристику. В этом смысле говорят о «поле температур» материальной среды или, например, о «поле скоростей» частиц жидкости, газа. В сущности, при этом просто определяются какие-то функции координат и, быть может, времени: температура, скорость и т. п. Подобно этому об электрическом поле формально можно говорить как о «поле сил»; каждый раз имеется в виду сила, которая будет действовать на единичный положительный точечный заряд, если его поместить в пространство, где действует поле. Понятие поля в этих примерах имеет всего лишь некоторое описательное значение.

Электромагнитное поле характеризуется некоторыми векторными функциями координат и времени; они будут рассматриваться в § 1.1. Какое же физическое содержание отвечает этому описательному аппарату? Рассмотрим, например, такой реализуемый в принципе эксперимент. В вакууме расположены две антенны: передающая и приемная (рис. В.1). Передача электромагнитной энергии производится в течение короткого интервала времени τ, а остальное время передатчик бездействует. Пусть время Δt, в течение которого энергия достигает приемной антенны, больше τ (пусть даже $\Delta t \gg \tau$). В таком случае легко указать время, когда энергия уже излучена передающей антенной, но еще не поступила в приемную, а следовательно, локализована в вакууме. Ее носитель, таким образом,— это не привычная нам материальная среда, а иная физическая реальность. Именно она и есть электромагнитное поле; слово «поле» мы употребили для обозначения некоторой объективной реальности. В философском смысле электромагнитное поле следует рассматривать как одну из форм существования материи.

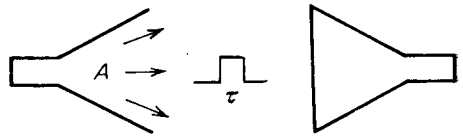


Рис. В.1

Хотя проявления электромагнитных сил в природе люди наблюдали с давних времен, научные понятия в этой области сложились сравнительно недавно; к ним, разумеется, нельзя относить

первые представления древних. В 1784—1789 гг. были опубликованы работы Шарля Кулона об электрических и магнитных взаимодействиях. Известный закон Кулона, который изучается в наше время уже в средней школе, поразительно похож на открытый в предшествующем веке Ньютоном закон тяготения. Найденный позднее закон Ампера о взаимодействии токов и другие закономерности этого рода идейно близки закону Кулона: действие одного объекта на другой, как полагали исследователи, происходит без всякого участия промежуточной среды, мгновенно. Это так называемый *принцип дальнодействия*, т. е. действия на расстоянии, вошедший в науку вместе с механикой Ньютона.

С именем Майкла Фарадея (1791—1867 гг.) связано зарождение иной концепции в теории электромагнетизма, *принципа близкодействия*, согласно которому взаимодействие осуществляется через посредство среды (в частности, вакуума), являющейся «вместилищем» электромагнитного процесса; при этом возникает вопрос о времени передачи взаимодействия. Исключительный вклад в науку было суждено внести Джемсу Клерку Максвеллу (1831—1879 гг.). В современной физике *уравнения Максвелла* являются фундаментальными законами теории электромагнетизма. Максвеллу принадлежит теоретический вывод о существовании *электромагнитных волн* — вместе с гипотезой об электромагнитной природе света. Этот вывод явился результатом анализа, отправной точкой которого были физические идеи Фарадея. Возбуждение электромагнитных волн в лаборатории и их экспериментальное исследование было осуществлено позднее Генрихом Герцем (1857—1894 гг.), который внес также значительный вклад в теорию электромагнетизма. Герц предвосхитил многое из того, что мы относим теперь к радиотехнической электродинамике. В частности, в своих опытах он использовал параболические зеркала, в которых можно видеть прообраз современных зеркальных антенн. Тем не менее, он не ставил вопрос о техническом применении электромагнитных волн. Историческая заслуга изобретения беспроводной связи — *радио* — принадлежит нашему соотечественнику А. С. Попову (1859—1906 гг.). Отметим еще, что для подтверждения электромагнитной природы света решающими оказались опыты другого русского ученого П. Н. Лебедева (1866—1911 гг.), измерившего световое давление.

Можно без преувеличения сказать, что радиотехника явилась широчайшей опытной базой теории электромагнетизма, основывающейся на уравнениях Максвелла, а также стимулятором ее дальнейшего развития. Вместе с радиотехникой появилось понятие *радиоволн*, т. е. электромагнитных волн в радиотехнических системах. Важным научным направлением стало исследование распространения радиоволн в природных условиях — над Землей и в космосе. Проблема излучения и приема электромагнитной энергии, переносимой радиоволнами, привела к теории антенн.

В первых опытах длина радиоволн измерялась метрами. В начале века, когда радиосвязь приобрела уже практическое значение, использовались главным образом длинные волны (длиной порядка километра). Но, начиная с двадцатых годов, в радиотехнической практике осваиваются волны все более короткие. Возникшая в военное время радиолокация дала этому процессу мощный толчок — в технику вошли волны дециметровые, сантиметровые, а затем и миллиметровые, которые теперь имеют многочисленные применения в разных областях. Эта практика изменила многое как в самой радиотехнике, так и в ее теоретических основах. Дело в том, что ранее размеры элементов радиоаппаратуры оставались намного меньше длины волны. Благодаря этому основные представления электротехники и используемая ею теория цепей были пригодны как аппарат расчетов, а радиотехническая аппаратура во многом напоминала электротехническую. Но такое положение не могло сохраниться, когда понадобилось создавать радиотехнические элементы, сравнимые по размерам с длиной волны.

Это требует пояснения. Предположим, что электромагнитная энергия распространяется вдоль проводника, который мы хотим считать участком цепи (рис. В.2), причем через два находящихся на расстоянии L сечения проходят токи $I_1(t)$ и $I_2(t)$ соответственно. В теории цепей считают, что эти токи одинаковы, т. е. $I_1(t)=I_2(t)$, но так ли это? Пусть $I_1(t)=I_m\cos\omega t$. Поскольку для распространения электромагнитного процесса на расстояние L нужно время $\Delta t=L/v$, где v — скорость, то фазу ωt ток I_2 будет иметь только по истечении времени Δt, а в данный момент его фаза есть $\omega(t-\Delta t)$. Токи I_1 и I_2, как мы видим, не равны, поскольку имеется фазовое различие $\Delta\varphi=\omega\Delta t$ (может, например, оказаться, что $I_2=0$, когда $I_1=I_m$). Учитывая известную связь скорости, длины волны и частоты ($v=f\lambda$, $f=\omega/2\pi$), имеем $\Delta\varphi=2\pi L/\lambda$. Таким образом, фазовое запаздывание пренебрежимо мало, когда

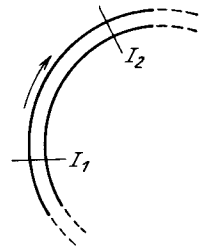


Рис. В.2

$$L\ll\lambda, \tag{В.1}$$

где L надо понимать как максимальный размер объекта. При этом ток во всех сечениях цепи можно считать неизменным. Неравенство (В.1) называют условием квазистационарности. Теория цепей переменного тока, вообще говоря, пригодна, если оно выполняется.

В дальнейшем будет показано (гл. 9), что по мере ослабления условия квазистационарности все большая часть энергии, связанной с проводником, по которому проходит ток, излучается в пространство.

В теории антенн существенно отклонение от условия (В.1), а многие современные антенны, обладающие высокой направлен-

ностью, многократно превышают длину волны по своим размерам. Что касается элементов радиоаппаратуры на сантиметровых и миллиметровых волнах, то принципы их построения далеки от старых электротехнических образцов. Примечательно, например, использование различных волноводов в виде полых металлических труб, диэлектрических стержней и т. п., а также аналогично построенных резонаторов вместо так называемых колебательных контуров, включающих емкостные и индуктивные элементы. Для понимания принципов действия, сознательного применения и конструирования подобных устройств необходимо знание теории электромагнетизма, базирующейся на уравнениях Максвелла.

Благодаря широкому применению оптических квантовых генераторов — лазеров — в радиотехническую практику вошли чрезвычайно короткие волны; размеры соответствующей аппаратуры всегда очень велики в сравнении с длиной волны. В этой области электродинамическая теория смыкается с оптикой.

Задачи теории электромагнетизма, порождаемые радиотехнической практикой, нередко настолько сложны, что только появление современных ЭВМ делает эту теорию средством проектирования аппаратуры, уже автоматизированного.

Главным предметом книги являются электромагнитные волновые процессы, существенно важные для радиотехники.

Изложение начинается — после краткого напоминания необходимых математических сведений — уравнениями Максвелла, о значении которых в теории электромагнетизма уже говорилось выше.

ЧАСТЬ 1

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Глава 1

ИСХОДНЫЕ ПОНЯТИЯ И УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА

§ 1.0. Используемые математические понятия и символы

1.0.1. Роль математического аппарата (А). В теории электромагнитного поля применяется некоторый традиционный математический аппарат, который, можно сказать, формирует язык предмета. Без него было бы невозможно построить ясное и обозримое изложение. Надо также иметь в виду, что только математика способна сделать физическую теорию орудием расчета в технике. В наше время, отмеченное широким распространением ЭВМ, возможности расчетов резко возросли и, соответственно, повысилась роль теории. Едва ли не в первую очередь это относится к теории электромагнитного поля и ее значению для радиоэлектроники.

К числу математических средств, которые понадобятся с самого начала курса, относятся представления векторной алгебры и векторного анализа. Эти разделы математики знакомы читателю, поэтому будет дана лишь краткая сводка необходимых средств с комментарием. Попутно вводится используемая в книге система символов.

1.0.2. Векторы и действия над ними (А). Понятие *вектора* как величины, характеризуемой — в отличие от *скаляра* — не только числом, но и направлением в пространстве, соответствует многим явлениям физической реальности. Как известно, в физике в качестве векторов рассматриваются сила, скорость и т. д. Применение векторов позволяет отображать физические закономерности в экономной и универсальной форме, которая при необходимости конкретизируется в разных системах координат. Составление математических выражений, содержащих векторы, оказывается возможным потому, что подобно системе арифметических действий над числами существует исчисление векторов.

Векторы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ можно представить как $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 A$ и $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 B$, где $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{B}_0$ — единичные векторы (называемые также *ортами*), а числа A, B — абсолютные значения векторов $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$.

Орты, соответствующие направлениям осей x, y, z декартовой системы координат, будут обозначаться $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{y}_0$, $\mathbf{z}_0$. Любой вектор $\mathbf{A}$

можно представить в виде разложения

$$\mathbf{A} = \mathbf{x}_0 A_x + \mathbf{y}_0 A_y + \mathbf{z}_0 A_z, \tag{1.1}$$

где A_x, A_y, A_z являются его *проекциями* на оси декартовой системы координат; они называются также *компонентами* (составляющими) вектора **A**. Иногда будут использоваться векторные составляющие $\mathbf{A}_x = \mathbf{x}_0 A_x$ и т. д.

Сложение векторов сводится к сложению их компонент:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{x}_0 (A_x + B_x) + \mathbf{y}_0 (A_y + B_y) + \mathbf{z}_0 (A_z + B_z). \tag{1.2}$$

Скалярное произведение векторов **A** и **B** определено как

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \equiv \mathbf{AB} = AB \cos\alpha = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \tag{1.3}$$

Здесь и далее знаком тождества объединяются два эквивалентных обозначения; α — угол между направлениями векторов. Величина (**A**, **B**) есть скаляр (число). Как видно, (**A**, **B**) может составлять нуль и при не равных нулю **A** и **B**. Тогда эти векторы называются *ортогональными*: они направлены под прямым углом.

Векторное произведение векторов **A** и **B** есть

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \equiv \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{v}_0 AB \sin\alpha = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \tag{1.4}$$

Здесь $\mathbf{v}_0$ — орт, направленный по нормали к плоскости векторов **A** и **B**, причем так, что кратчайшее угловое расстояние между их направлениями, обозначенное α, соответствует движению от **A** к **B** по часовой стрелке, если смотреть вдоль $\mathbf{v}_0$. Раскрывая определитель, находим, например, что $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]_x = A_y B_z - A_z B_y$ и т. д. Изменение порядка сомножителей приводит к изменению знака векторного произведения: $[\mathbf{B}, \mathbf{A}] = -[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$.

Для трех векторов **A**, **B**, **C** определено произведение

$$\mathbf{A}\,[\mathbf{B}, \mathbf{C}] = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\,\mathbf{C} = [\mathbf{C}, \mathbf{A}]\,\mathbf{B},$$

называемое *векторно-скалярным*, или *смешанным*: один из векторов составляет скалярное произведение с векторным произведением двух оставшихся. Очевидно, что

$$\mathbf{A}\,[\mathbf{B}, \mathbf{C}] = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}. \tag{1.5}$$

При составлении смешанного произведения должен быть сохранен циклический порядок следования векторов: **A**, **B**, **C**, **A**, **B**, ...

Нам придется использовать и *двойное векторное произведение* трех векторов **A**, **B**, **C**. Оно раскрывается по формуле

$$[\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]] = \mathbf{B}(\mathbf{A}, \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}, \mathbf{B}), \tag{1.6}$$

где скалярные произведения, обозначенные посредством круглых скобок, входят как числа.

1.0.3. Линейное преобразование (A). Под умножением вектора **A** на скаляр (число) m понимается получение такого вектора **B**, абсолютное значение которого есть $B = mA$, а орт не меняется. Запишем

$$\mathbf{B} = m\mathbf{A}, \tag{1.7}$$

что равносильно трем скалярным равенствам

$$B_x = mA_x, \quad B_y = mA_y, \quad B_z = mA_z. \tag{1.7а}$$

Если m — положительное число, то векторы **A** и **B** направлены одинаково, а при отрицательном m — противоположно (параллельно и антипараллельно); говорят, что **A** и **B** *коллинеарны*. Мы имеем здесь дело с частным видом линейного преобразования набора компонент A_x, A_y, A_z в аналогичный набор B_x, B_y, B_z. Сами эти наборы мы также можем называть векторами, отождествляя их с векторами-столбцами линейной алгебры.

В общем случае под *однородным линейным преобразованием* рассматриваемых векторов понимают сопоставление вектору **A** такого вектора **B**, компоненты которого определяются по формулам

$$\begin{aligned} B_x &= m_{xx} A_x + m_{xy} A_y + m_{xz} A_z, \\ B_y &= m_{yx} A_x + m_{yy} A_y + m_{yz} A_z, \\ B_z &= m_{zx} A_x + m_{zy} A_y + m_{zz} A_z, \end{aligned} \tag{1.8}$$

где m_{xx}, m_{xy}, ..., m_{zy}, m_{zz} — некоторые числа (*однородность* есть свойство, в силу которого $\mathbf{B} = 0$, если $\mathbf{A} = 0$). Векторы **A** и **B**, компоненты которых связаны соотношениями (1.8), уже не коллинеарны; следовательно, записанное преобразование определяет не только изменение абсолютного значения вектора («растяжение» или «сжатие»), но и его поворот.

С точки зрения линейной алгебры таблица чисел

$$\|m\| = \begin{Vmatrix} m_{xx} & m_{xy} & m_{xz} \\ m_{yx} & m_{yy} & m_{yz} \\ m_{zx} & m_{zy} & m_{zz} \end{Vmatrix} \tag{1.9}$$

образует *матрицу*, а равенства (1.8) определяют операцию умножения матрицы $\|m\|$ на вектор-столбец (A_x, A_y, A_z), приводящую к получению вектора-столбца (B_x, B_y, B_z) (запись в строку использована для экономии места). В частном случае (1.7) отличны от нуля только диагональные компоненты матрицы $\|m\|$, причем $m_{xx} = m_{yy} = m_{zz} = m$. Введя единичную матрицу

$$I = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \tag{1.10}$$

мы определим матрицу $\|m\|$ в варианте (1.7а) как mI. Вместо символа матрицы $\|m\|$ будем использовать $\tilde{m}$ и запишем систему равенств (1.8) в сокращенной форме:

$$\mathbf{B} = \tilde{m}\mathbf{A}. \tag{1.11}$$

1.0.4. Поля и операции векторного анализа (А). Выше во Введении при обсуждении понятия *пóля* уже отмечалось, что формально поля́ определяются заданием в каждой точке рассматриваемой области пространства некоторой скалярной или векторной величины: скалярные и векторные поля. В векторном анализе производятся специальные операции дифференцирования и интегрирования по отношению к соответствующим функциям пространственных координат.

Скалярное поле, характеризуемое функцией $\psi(x, y, z)$, можно наглядно отобразить при помощи семейства поверхностей уровня $\psi(x, y, z) = C_i$, где C_i — константы; на рис. 1.1*а* показан пример

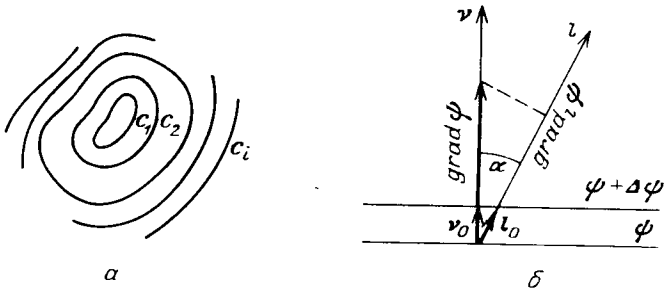


Рис. 1.1

сечения такого семейства плоскостью чертежа. Введем вектор $\mathrm{grad}\,\psi$, называемый *градиентом* ψ, который направлен в сторону максимального возрастания ψ и равен скорости изменения ψ в этом направлении. Очевидно, что

$$\mathrm{grad}\,\psi = \mathbf{\nu}_0 \frac{\partial\psi}{\partial\nu}, \tag{1.12}$$

где ν — линия, ортогональная к поверхностям уровня, а $\mathbf{\nu}_0$ есть касательный к ней орт. Смысл формулы (1.12) легко понять, рассматривая участок двух близких поверхностей уровня (рис. 1.1*б*). Проекция вектора $\mathrm{grad}\,\psi$ на некоторое направление l есть $\mathbf{l}_0\,\mathrm{grad}\,\psi = \mathbf{l}_0\mathbf{\nu}_0\partial\psi/\partial\nu = \cos\alpha\,\partial\psi/\partial\nu$; эта величина становится максимальной, когда $\mathbf{l}_0$ совпадает с $\mathbf{\nu}_0$ ($\cos\alpha = 1$). Обозначая рассматриваемую проекцию $\mathrm{grad}_l\,\psi$, имеем также

$$\mathrm{grad}_l\,\psi = \frac{\partial\psi}{\partial l}. \tag{1.13}$$

Определяя по этой формуле проекции градиента ψ в декартовой системе координат ($\mathrm{grad}_x\,\psi$, $\mathrm{grad}_y\,\psi$ и $\mathrm{grad}_z\,\psi$), получаем

$$\mathrm{grad}\,\psi \equiv \nabla\psi = \mathbf{x}_0\frac{\partial\psi}{\partial x} + \mathbf{y}_0\frac{\partial\psi}{\partial y} + \mathbf{z}_0\frac{\partial\psi}{\partial z}. \tag{1.14}$$

Здесь употреблено также другое обозначение градиента, использующее символ ∇ («набла») (см. (1.30)).

Мы видим, что скалярное поле ψ порождает векторное поле $\mathbf{F} = \mathrm{grad}\,\psi$. Такое векторное поле называется *потенциальным*, а скалярная функция ψ — *потенциалом*. Поверхности уровня, на которых $\psi = \mathrm{const}$, являются, как говорят, *эквипотенциальными поверхностями*.

Для наглядного отображения векторных полей обычно строят картины так называемых *векторных*, или *силовых*, *линий*. Это линии, касательные к которым в каждой точке указывают направление вектора. Густота силовых линий может соответствовать интенсивности поля. При этом количество векторных линий, проходящих через ортогональную площадку (если она мала, то может считаться плоской), должно быть пропорционально абсолютному значению вектора, практически постоянному в пределах площадки.

Введем понятие векторного дифференциала длины вдоль некоторой линии l. Это вектор, направленный по касательной и по

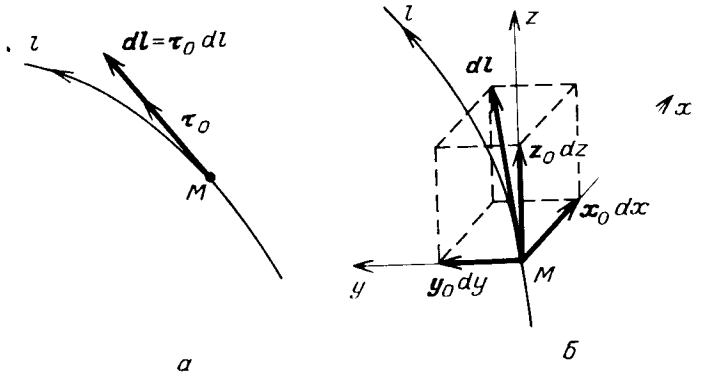


Рис. 1.2

абсолютному значению равный скалярному дифференциалу dl (рис. 1.2*а*); он может быть представлен в декартовых координатах (рис. 1.2*б*):

$$d\mathbf{l} = \tau_0 dl = \mathbf{x}_0 dx + \mathbf{y}_0 dy + \mathbf{z}_0 dz. \tag{1.15}$$

Пусть задано векторное поле $\mathbf{v}(x, y, z)$, которое надо описать посредством векторных линий. Выразим $\mathbf{v}$ в декартовых координатах

$$\mathbf{v} = \mathbf{x}_0 v_x + \mathbf{y}_0 v_y + \mathbf{z}_0 v_z$$

и потребуем, чтобы выполнялось условие пропорциональности

$$\mathbf{dl} = k\mathbf{v}$$

(k — любая константа). Приравнивая компоненты векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{dl}$, получаем

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}. \tag{1.16}$$

Это, в сущности, система двух дифференциальных уравнений, интегрирование которых приводит к уравнениям векторных линий.

На рис. 1.3 показано несколько характерных типов картин силовых линий, которые могут встретиться при исследовании векторного поля $\mathbf{F}$ в области V с граничной поверхностью S. Область V

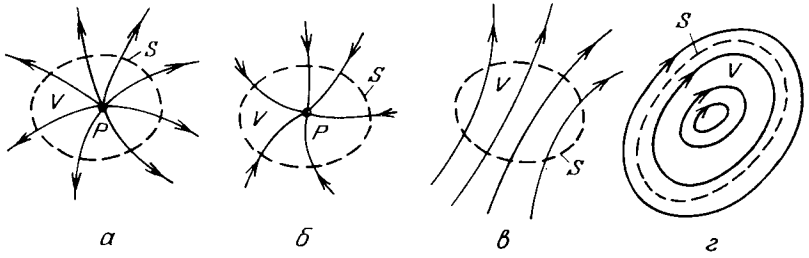


Рис. 1.3

может содержать точку, из которой расходятся (*исток*) (*а*) или в которую сходятся (*сток*) (*б*) все силовые линии. Последние могут также проходить область насквозь (*в*) или совсем не пересекать ее поверхность S (*г*). В векторном анализе существует простая операция, позволяющая устанавливать, имеет ли заданное поле источники и стоки, показанные на рис. 1.3*а*, *б*.

Введем сначала представление о *потоке вектора* $\mathbf{F}$ через поверхность S (не обязательно замкнутую). Это интеграл

$$\Phi = \int_S \mathbf{F}\,\mathbf{ds}, \tag{1.17}$$

где векторный дифференциал $\mathbf{ds}$ понимается как произведение обычного (скалярного) дифференциала поверхности ds на орт нормали $\mathbf{v}_0$, т. е. $\mathbf{ds} = \mathbf{v}_0 ds$. Поэтому $\mathbf{F}\,\mathbf{ds} = F_v ds$ (рис. 1.4*а*). Если поверхность S — замкнутая, как на рис. 1.3, то символ интеграла дополняется кружком: $\oint$. Тогда $\mathbf{v}_0$ — орт внешней нормали; для незамкнутой поверхности $\mathbf{v}_0$ выбирается произвольно.

Поток вектора $\mathbf{F}$ положителен, если силовые линии выходят из поверхности S наружу, и отрицателен, если они входят внутрь (потому что угол между $\mathbf{F}$ и $\mathbf{v}_0$ в первом случае острый, а во втором — тупой). Вообще поток вектора измеряется числом его линий, выходящих из поверхности, если густота линий соответствует интенсивности поля (см. выше). Действительно (рис. 1.4*б*), элементарный поток $\Delta\Phi$, проходящий через ΔS, равен $F\Delta S_\perp$. При этом $F = k\Delta N/\Delta S_\perp$, где ΔN — число силовых линий, проходящих через ортогональную площадку $\Delta S_\perp$, а k — заданный коэффициент пропорциональности. В то же время ΔN — это число силовых линий, проходящих через рассматриваемый элемент поверхности ΔS.

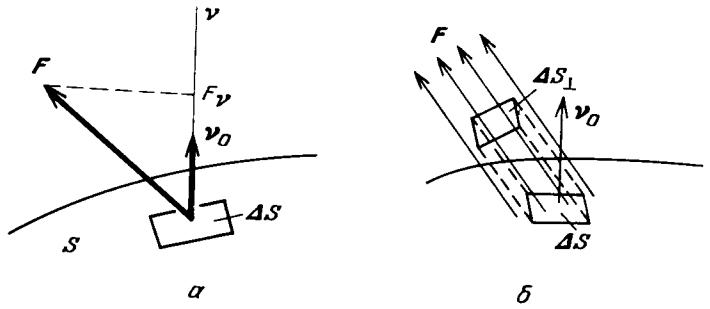


Рис. 1.4

Таким образом, оказывается, что $\Delta\Phi = k\Delta N$. Поэтому и для полного потока Φ через поверхность S имеем $\Phi = kN$, где N — число выходящих через S силовых линий. Разумеется, выходящие наружу силовые линии рассматриваются как «положительные», а входящие внутрь — как «отрицательные». Следует также иметь в виду, что реальные картины силовых линий не могут претендовать на точное описание векторных полей, и равенство $\Phi = kN$ в действительности приближенное. Обращаясь в качестве примера к рис. 1.3, видим, что там $\Phi > 0$ (*а*), $\Phi < 0$ (*б*), $\Phi = 0$ (*в*) и $\Phi = 0$ (*г*). В третьем из этих примеров число силовых линий, выходящих из замкнутой поверхности S, равно числу входящих внутрь.

Дивергенцией (а также *расхождением*, *расходимостью*) вектора $\mathbf{F}$ называется величина, определенная следующим предельным соотношением:

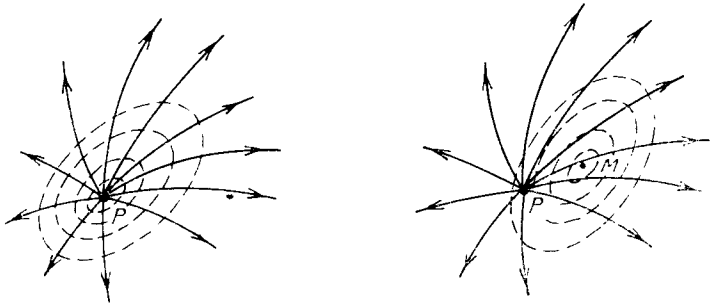
$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S \mathbf{F}\,\mathbf{ds}. \tag{1.18}$$

Дивергенция $\operatorname{div}\mathbf{F}$ есть скалярная функция координат; по формуле (1.18) определяется ее значение в точке, окрестностью которой является объем ΔV; S — его граничная поверхность. Обозначая в (1.18) поток вектора $\mathbf{F}$ через поверхность S как $\Delta\Phi$, мы можем написать:

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \lim_{\Delta V \to 0} \Delta\Phi/\Delta V = d\Phi/dV.$$

Если в некоторой точке $\operatorname{div}\mathbf{F} > 0$, то эта точка является источником силовых линий; если $\operatorname{div}\mathbf{F} < 0$, то точка является стоком;

в случае $\operatorname{div}\mathbf{F}=0$ линии не начинаются и не кончаются в рассматриваемой точке. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим внимательнее картину силовых линий типа изображенных на рис. 1.3*а*. На рис. 1.5*а* для такого поля показано несколько последовательных положений замкнутой поверхности S, сжимающейся к точке P. Поскольку через каждую такую поверхность выходит одно и то же число силовых линий, поток вектора все время



а *б*

Рис. 1.5

постоянен и положителен; положительна и дивергенция, вычисляемая по формуле (1.18) (является ли эта величина ограниченной в данном примере, для нас сейчас не имеет значения). Пусть теперь поверхность S, уменьшаясь, сжимается к другой точке M (рис. 1.5*б*). Видно, что с некоторого момента число силовых линий, выходящих из S, станет равным числу входящих линий, т. е. поток вектора обратится в нуль. Поэтому величина $\operatorname{div}\mathbf{F}$, вычисляемая по формуле (1.18), для всех точек за исключением P окажется равной нулю.

На основании формулы (1.18) можно убедиться, что в декартовых координатах

$$\operatorname{div}\mathbf{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}. \tag{1.19}$$

Дивергенция есть некоторая дифференциальная операция над компонентами вектора, приводящая к получению скалярной величины.

Ротацией (а также *ротором*, *вихрем*) вектора $\mathbf{F}$ называется векторная величина, обозначаемая символом $\operatorname{rot}\mathbf{F}$. По определению проекция $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ на некоторое направление ν (в некоторой точке, окрестностью которой является площадка ΔS) есть

$$\operatorname{rot}_\nu F=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{1}{\Delta S}\oint_L \mathbf{F}\,d\mathbf{l}. \tag{1.20}$$

Здесь ν — направление нормали к площадке ΔS (орт ν_0), а L — граничный контур ΔS, согласованный с ν правовинтовой системой

(если смотреть вдоль ν_0, то положительное направление обхода контура L — по часовой стрелке). Фигурирующий в (1.20) интеграл называется *циркуляцией* вектора $\mathbf{F}$ по замкнутому контуру L (смысл подынтегрального выражения ясен, если привлечь (1.15)).

Пользуясь формулой (1.20), нетрудно найти проекции вектора $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ в декартовой системе координат (т. е. $\operatorname{rot}_x\mathbf{F}$, $\operatorname{rot}_y\mathbf{F}$ и $\operatorname{rot}_z\mathbf{F}$). Тогда

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}. \tag{1.21}$$

Ротор, как мы видим, есть некоторая дифференциальная операция над компонентами вектора $\mathbf{F}$, приводящая к получению новой векторной величины $\operatorname{rot}\mathbf{F}$.

Для всякого потенциального поля $\mathbf{F}=\operatorname{grad}\psi$ имеем $\operatorname{rot}\mathbf{F}=0$, т. е. всегда

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\psi\equiv 0 \tag{1.22}$$

(это легко проверить при помощи формул (1.14) и (1.21)). Поэтому потенциальные поля называют также *безвихревыми*.

Поля, для которых $\operatorname{div}\mathbf{F}=0$, называют *соленоидальными*. При помощи формул (1.19) и (1.21) легко убедиться, что всегда

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{V}\equiv 0, \tag{1.23}$$

т. е. соленоидальны поля $\mathbf{F}=\operatorname{rot}\mathbf{V}$.

Если в некоторой области поле не является соленоидальным, причем в каждой точке $\operatorname{div}\mathbf{F}\neq 0$, то все точки области — это источники или стоки; силовые линии такого поля приходится строить, начиная (заканчивая) их во внутренних точках. Если же линий не обрывать, то невозможно согласовать их густоту с интенсивностью поля.

Потенциальные поля $\mathbf{F}$ (для которых $\operatorname{rot}\mathbf{F}=0$) могут быть одновременно и соленоидальными ($\operatorname{div}\mathbf{F}=0$), тогда они называются *гармоническими*.

Приведем еще несколько тождеств векторного анализа, которые используются в математическом аппарате теории электромагнитного поля. Следующие четыре тождества имеют смысл правил дифференцирования произведения функций:

$$\operatorname{grad}\varphi\psi=\varphi\operatorname{grad}\psi+\psi\operatorname{grad}\varphi, \tag{1.24}$$

$$\operatorname{div}\psi\mathbf{F}=\psi\operatorname{div}\mathbf{F}+\mathbf{F}\operatorname{grad}\psi, \tag{1.25}$$

$$\operatorname{div}[\mathbf{F},\mathbf{V}]=\mathbf{V}\operatorname{rot}\mathbf{F}-\mathbf{F}\operatorname{rot}\mathbf{V}, \tag{1.26}$$

$$\operatorname{rot}\psi\mathbf{F}=\psi\operatorname{rot}\mathbf{F}+[\operatorname{grad}\psi,\ \mathbf{F}]. \tag{1.27}$$

Мы будем также неоднократно пользоваться формулой

$$\operatorname{grad}f(\xi)=f'(\xi)\operatorname{grad}\xi \tag{1.28}$$

(дифференцирование сложной функции) и формулой

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{F} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{F} - \nabla^2\mathbf{F} \tag{1.29}$$

(ротор от ротора).

Поясним употребление символа ∇, уже использовавшегося выше в (1.14) и вновь появившегося в (1.29). Так называемый оператор Гамильтона ∇ (набла) определяется как

$$\nabla = \mathbf{x}_0\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{y}_0\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{z}_0\frac{\partial}{\partial z}. \tag{1.30}$$

Величина $\nabla\psi$ есть $\operatorname{grad}\psi$ согласно (1.14). Действие ∇ на вектор приводит к дивергенции, если «умножать» ∇ и $\mathbf{F}$ по правилу составления скалярного произведения (1.3): $\nabla\mathbf{F} \equiv \operatorname{div}\mathbf{F}$. Если же воспользоваться правилом составления векторного произведения, то получаем $\nabla\times\mathbf{F} \equiv \operatorname{rot}\mathbf{F}$. Это сразу видно из сопоставления (1.4) и (1.21).

Пользуясь формулами (1.14) и (1.19), легко составить величину $\operatorname{div}\operatorname{grad}\psi$, которая истолковывается как $\nabla^2\psi$:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\psi \equiv \nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}. \tag{1.31}$$

В декартовых координатах

$$\nabla^2\mathbf{F} = \mathbf{x}_0\nabla^2F_x + \mathbf{y}_0\nabla^2F_y + \mathbf{z}_0\nabla^2F_z. \tag{1.32}$$

Символом ∇^2, наравне с которым используется также символ Δ, обозначается *оператор Лапласа.*

1.0.5. Интегральные формулы векторного анализа (А). Приведем без вывода наиболее важные для теории электромагнитного поля интегральные соотношения векторного анализа.

Теорема Остроградского — Гаусса:

$$\int_V \operatorname{div}\mathbf{F}\,dv = \oint_S \mathbf{F}\,d\mathbf{s}. \tag{1.33}$$

Теорема Стокса:

$$\int_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\,ds = \oint_L \mathbf{F}\,d\mathbf{l}. \tag{1.34}$$

Теорема Грина:

$$\int_V (\nabla\psi\,\nabla\varphi + \psi\nabla^2\varphi)\,dv = \oint_S \psi\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\,ds \tag{1.35}$$

(первая формула),

$$\int_V (\psi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\psi)\,dv = \oint_S \left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right) ds \tag{1.36}$$

(вторая формула).

Аналог теоремы Остроградского — Гаусса для ротора:

$$\int_V \operatorname{rot}\mathbf{F}\,dv = \oint_S [d\mathbf{s}, \mathbf{F}]. \tag{1.37}$$

Все выписанные соотношения имеют характер формул интегрирования по частям. При этом объемный или поверхностный интеграл (по V или S) сводится к интегралу по замкнутой границе исходной области в виде поверхности S или, соответственно, контура L.

1.0.6. Дельта-функция Дирака (Б). В теории электромагнитного поля оказывается полезным особый математический объект, происхождение которого можно связывать с обобщением представления об импульсе. Задавая площадь прямоугольного импульса равной единице (рис. 1.6*а*) и устремляя его ширину к нулю, получаем

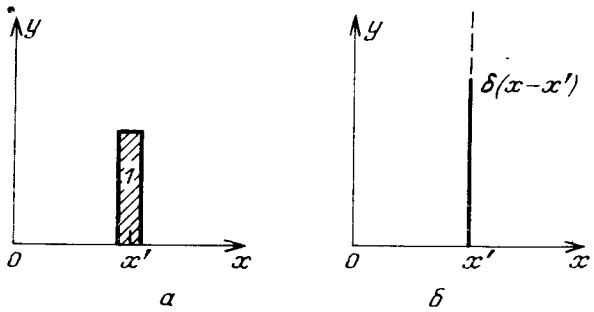


Рис. 1.6

«функцию», значение которой неограниченно в этой точке x' (рис. 1.6*б*), а во всех остальных точках равно нулю. Это *дельта-функция Дирака*, которая обозначается $\delta(x-x')$. С точки зрения обычного математического подхода, дельта-функция везде равна нулю за исключением одной точки, в которой она теряет смысл. Но можно утверждать, что для всякой обычной функции $f(x)$ будет справедливо равенство:

$$\int_L f(x)\,\delta(x-x')\,dx = \begin{cases} 0, & x' \overline{\in} L, \\ f(x'), & x' \in L. \end{cases} \tag{1.38}$$

Равенство (1.38) является определением дельта-функции посредством функционала. В частности, при $f(x) = 1$ имеем

$$\int_L \delta(x-x')\,dx = \begin{cases} 0, & x' \overline{\in} L, \\ 1, & x' \in L. \end{cases} \tag{1.39}$$

Определение (1.38) следующим образом обобщается на трехмерные области:

$$\int_V f(r)\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,dv = \begin{cases} 0, & M(\mathbf{r}') \overline{\in} V, \\ f(\mathbf{r}'), & M(\mathbf{r}') \in V. \end{cases} \tag{1.40}$$

В этой записи точка в области V задается при помощи радиус-вектора $\mathbf{r}$. Как и ранее, можно в качестве частного случая взять $f(\mathbf{r})=1$ и получить аналог формулы (1.39).

§ 1.1. Заряды, токи и векторы поля

1.1.1. Заряды и токи (А). Понятие *электрического заряда* будем считать не подлежащим определению. В знакомом читателю курсе общей физики дается представление о фактах, на основании которых формируется понятие заряда. Заряд как физическая величина обозначается символом q и измеряется в *кулонах* [Кл].

Положительные и отрицательные заряды присущи элементам микромира. Строение материи таково, что они в высокой степени уравновешены. Заряд дискретен. Наименьший по абсолютной величине отрицательный заряд $|e| = 1{,}6021892\ (46)\cdot 10^{-19}$ Кл, ассоциируемый с представлением об элементарной частице, принадлежит электрону. Мы не затрагиваем теории строения материи, которая, как известно, относится к компетенции квантовой физики. Относящиеся сюда проблемы электромагнетизма составляют предмет *микроскопической* электродинамики. В ряде важных случаев представление об элементарных частицах как о весьма малых телах, перемещающихся в пространстве (подобно непосредственно наблюдаемым объектам), сохраняет смысл. Говорят, что движение зарядов, т. е. частиц, несущих заряды, образует *электрический ток* (*ток проводимости*). Эта физическая величина обозначается символом I. Единица измерения тока — *ампер* [А]; при токе в один ампер за секунду переносится один кулон заряда.

Теория электромагнетизма, изложение которой начинается в этой главе, является *макроскопической*. Это значит, что в рассматриваемых процессах проявляется действие огромных — «практически бесконечных» — количеств элементарных частиц. Структура материи при этом обычно игнорируется. Среда представляется сплошной, а заряды и токи — непрерывно распределенными в объеме (иногда — на поверхности).

Под *плотностью заряда* ρ понимается величина

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}, \tag{1.41}$$

где Δq — заряд, содержащийся в элементарном объеме ΔV. Если не забывать о дискретности материи, то содержащийся в (1.41) предельный переход следует понимать как условный. Как бы ни

уменьшался объем ΔV, он все же должен содержать достаточно большое число элементарных частиц. Но при переходе к идеализированной сплошной заряженной среде из (1.41) можно сделать вывод, что $\rho = dq/dV$.

Введем также представление о *плотности тока* проводимости $\mathbf{j}$. Это вектор

$$\mathbf{j} = \lim_{\Delta S \to 0} \mathbf{i}_0 \frac{\Delta I}{\Delta S}, \tag{1.42}$$

где ΔS — элементарная площадка, ориентированная перпендикулярно движению зарядов, а $\mathbf{i}_0$ — орт нормали, указывающий направление движения; ΔI — ток, проходящий через ΔS (смысл предельного перехода тот же, что и в (1.41)).

В современной физике остается незыблемым *закон сохранения заряда*: заряд не уничтожается и не создается из ничего. Пусть в некотором объеме V, ограниченном поверхностью S, содержится заряд q. Если он не остается постоянным (т. е. уменьшается или увеличивается), то объяснить это следует тем, что границу пересекают носители заряда. Иными словами, через поверхность S проходит ток, и его величина должна быть связана с зарядом соотношением

$$I = -dq/dt \tag{1.43}$$

(ток, выходящий через S наружу, считается положительным, а входящий внутрь — отрицательным). Из (1.43) получается также *дифференциальная формулировка закона сохранения заряда*:

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = -\partial\rho/\partial t. \tag{1.44}$$

ВЫВОД. По смыслу определений (1.41) и (1.42)

$$q = \int_V \rho\,dv, \qquad I = \oint_S \mathbf{j}\,d\mathbf{s},$$

т. е. полный заряд внутри V есть объемный интеграл от плотности заряда ρ, а полный ток проводимости, проходящий через S, выражается потоком вектора (1.17) плотности тока I. Подставим записанные выражения для заряда и тока в (1.43). Операцию дифференцирования d/dt перенесем под знак интеграла (при этом появляется производная $\partial\rho/\partial t$ — частная производная, потому что ρ также функция координат). Поток вектора $\mathbf{j}$ согласно теореме Остроградского — Гаусса (1.33) заменим объемным интегралом от $\mathbf{j}$. Объединив оба объемных интеграла в левой части равенства, получаем

$$\int_V \left(\operatorname{div}\mathbf{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t}\right) dv = 0.$$

Поскольку этот результат справедлив для произвольного объема V,

из него следует, что подынтегральное выражение равно нулю. Это прямо приводит к формуле (1.44). ■

Дифференциальную формулировку закона сохранения заряда (1.44) легко интерпретировать, пользуясь представлением о векторных линиях. Если где-либо в рассматриваемой области плотность заряда ρ убывает ($\partial\rho/\partial t < 0$), то при этом $\operatorname{div}\mathbf{j} > 0$, а следовательно (см. п. 1.0.4), там начинаются линии вектора $\mathbf{j}$ (лежат источники). Аналогично в случае возрастания плотности заряда ($\partial\rho/\partial t > 0$) мы обнаруживаем стоки, поскольку в соответствующих точках $\operatorname{div}\mathbf{j} < 0$. Если же первоначальное распределение заряда в рассматриваемой области сохраняется (ρ не зависит от времени), то согласно (1.43) $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$, а это значит, что либо векторные линии плотности тока $\mathbf{j}$ пронизывают V насквозь (ср. рис. 1.3*в*), либо $\mathbf{j} = 0$.

1.1.2. Электромагнетизм и электромагнитное поле (А). Явления электромагнетизма весьма многообразны, однако понятие *электромагнитного поля*, уже обсуждавшееся во Введении, открывает их единую основу. С некоторой точки зрения, сущность всех этих явлений состоит в превращениях энергии, носителем которой является поле, выступающее как особая форма материи.

Электромагнитное поле описывают при помощи следующих векторных функций координат и времени:

$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ — *напряженность электрического поля*,
$\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ — *напряженность магнитного поля*,
$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ — *электрическая индукция*,
$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ — *магнитная индукция*

(символ радиус-вектора $\mathbf{r}$ означает зависимость от пространственных координат, t — от времени).

В электромагнитном поле на заряды и токи действуют силы. Если такого рода сила совершает работу, то у поля отбирается некоторая энергия. В тех случаях, когда мы имеем возможность заметить этот процесс, мы наблюдаем электромагнитное явление, которое обнаруживает существование поля в данной области пространства. В качестве «пробного тела», при помощи которого можно не только обнаружить, но и, в принципе, измерить поле, обычно рассматривают точечный заряд, т. е. некоторое заряженное тело, считающееся достаточно малым в условиях эксперимента (ниже это будет уточнено). На точечный заряд в электромагнитном поле действует сила

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}]), \qquad (1.45)$$

где q — величина данного заряда, а $\mathbf{v}$ — скорость его движения. В случае неподвижного заряда ($\mathbf{v} = 0$) сила зависит только от напряженности электрического поля: $\mathbf{F}' = q\mathbf{E}$. Это равенство рассматривают в качестве определения вектора $\mathbf{E}$. На движущийся точечный заряд, как видно из (1.45), кроме того, действует сила

$\mathbf{F}'' = q[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$, называемая *лоренцевой силой*. С появлением этой силы связывают определение вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$.

Итак, известны механические проявления поля, на основе которых строятся определения векторов поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ (называемых иногда *силовыми*). При этом используется представление о пробном заряде. Размеры тела, принимаемого за точечный заряд, должны быть весьма малы, во-первых, по сравнению с расстоянием до точки наблюдения и, во-вторых, по отношению к пространственным вариациям наблюдаемого поля. Кроме того, исчезающе малым должен быть отбор энергии поля для его индикации.

Таблица 1.1

Единицы измерения электромагнитных величин в СИ [1])

Название величины	Обозначение	Единица измерения	
Заряд	q	*Кулон*,	[Кл]
Ток	I	*Ампер*,	[А]
Плотность заряда	ρ	*Кулон на кубический метр*,	[Кл/м^3]
Плотность тока	$\mathbf{j}$	*Ампер на квадратный метр*,	[А/м^2]
Напряженность электрического поля	$\mathbf{E}$	*Вольт на метр*,	[В/м]
Напряженность магнитного поля	$\mathbf{H}$	*Ампер на метр*,	[А/м]
Электрическая индукция	$\mathbf{D}$	*Кулон на квадратный метр*,	[Кл/м^2]
Магнитная индукция	$\mathbf{B}$	*Тесла*,	[Т]
Электрическая постоянная	ε_0	*Фарад на метр*,	[Ф/м]
Магнитная постоянная	μ_0	*Генри на метр*,	[Г/м]

[1]) $\varepsilon_0 = 10^7/4\pi c^2 \approx 8{,}854\cdot10^{-12} \approx (1/36\pi)\cdot10^{-9}$, $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7} \approx 1{,}257\cdot10^{-6}$; здесь c — скорость света в вакууме ($c = 2{,}99792458(1{,}2)\cdot10^8$ м/с).

Для полноты картины необходимо подчеркнуть, что современная экспериментальная техника располагает разнообразными средствами измерения электромагнитных полей, и практическое применение для этой цели пробных зарядов обычно нецелесообразно. Наше рассмотрение имеет только принципиальное значение.

Векторы $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ в вакууме связаны с $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ соотношениями

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}, \qquad (1.46)$$

где ε_0 и μ_0 — константы, зависящие только от выбора единиц измерения; первая называется *электрической постоянной*, а вторая — *магнитной*. Связь напряженностей поля и индукций для полей, существующих в различных средах, будет предметом отдельного обсуждения.

В табл. 1.1 приведены единицы измерения всех физических величин, уже встретившихся при изучении предмета, в используемой нами системе СИ.

Теория электромагнитного поля сложилась в результате накопления и обобщения экспериментальных фактов, а также развития математического аппарата, который — при современном изложении — опирается в первую очередь на векторный анализ. В основных уравнениях теории векторы поля **E**, **D**, **H** и **B**, а также ρ и **j** связаны операциями ротора и дивергенции. Широко используется отображение электромагнитных полей при помощи картин векторных линий. Линии векторов **E** и **B** называются соответственно *электрическими* и *магнитными силовыми линиями*.

1.1.3. Идеальный точечный заряд (Б). Еще о пробных элементах. Наряду с трактовкой точечного заряда как малого физического тела существует и другая. Объектом теории может быть также идеальный точечный заряд, «заряженная точка». Плотность ρ (1.41) такого заряда, разумеется, бесконечна в точке его локализации $M(\mathbf{r}')$, а во всех остальных точках пространства равна нулю. Нетрудно догадаться, что величину ρ идеального точечного заряда можно выразить при помощи дельта-функции Дирака $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$. Точнее говоря, при наличии точечного заряда, локализованного в $M(\mathbf{r}')$, распределение заряда в пространстве описывается плотностью

$$\rho = q\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \qquad (1.47)$$

Действительно, согласно (1.40), интеграл от ρ (1.47) по любому объему, содержащему заряд, будет равен q.

Отметим, далее, что роль пробного тела при исследовании поля может играть не только точечный заряд. В частности, вместо движущегося заряда для индикации магнитного поля может использоваться неподвижный контур (замкнутый виток) тока. На плоский замкнутый контур L с током I в магнитном поле действует момент силы **K**, определяемый следующим образом:

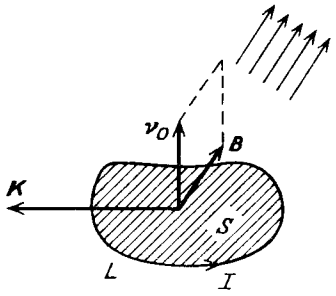


Рис. 1.7

$$\mathbf{K} = IS[\mathbf{v}_0, \mathbf{B}]. \qquad (1.48)$$

Здесь S — площадь, ограниченная контуром L, $\mathbf{v}_0$ — орт нормали к плоскости контура, согласованный правовинтовой системой с направлением тока (рис. 1.7). Происхождение момента **K** объясняется действием лоренцевой силы на перемещающиеся в контуре заряды. Вывод формулы (1.48) легко произвести в варианте прямоугольного контура (см. упражнение 1).

§ 1.2. Уравнения Максвелла

1.2.1. Уравнения Максвелла в дифференциальной и интегральной формах (А). В компактной форме операций векторного анализа запишем уравнения, которые заключают в себе основания теории электромагнетизма и являются постулатами теории:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, \qquad (1.49)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad (1.50)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho, \qquad (1.51)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0. \qquad (1.52)$$

С формальной точки зрения, это дифференциальные уравнения в частных производных относительно компонент векторов поля **E**, **H**, **D**, **B**, а также **j** и ρ. Каждое из первых двух уравнений является, в сущности, сокращенной записью трех скалярных уравнений: они получаются при проецировании левых и правых векторных частей (1.49), (1.50) на оси выбранной системы координат.

Формулы (1.49)—(1.52) выражают *уравнения Максвелла в дифференциальной форме*. Если рассматриваются электромагнитные процессы в пустоте, то из (1.49)—(1.52) при помощи соотношений (1.46) можно исключить индукции **D**, **B** или напряженности **E**, **H**. Любые электромагнитные поля в пустоте описываются решениями такой системы уравнений. При рассмотрении полей в различных средах уравнения Максвелла (1.49)—(1.52) дополняются некоторыми более сложными, чем (1.46), соотношениями между напряженностями и индукциями; о них будет говориться в § 1.3.

Значение уравнений Максвелла как оснований теории электромагнетизма исключительно велико. К сожалению, невозможно в нескольких словах рассказать, как исторически появились эти уравнения в ходе развития физических идей. Становление электродинамики с разных точек зрения обсуждается в литературе [3.1—4], которая рекомендуется читателю. Для инженера в первую очередь важно, что уравнения Максвелла, в принципе, дают возможность исследовать любые электромагнитные процессы. Надо лишь уметь правильно ставить соответствующие математические задачи и решать их, привлекая ЭВМ.

При первом знакомстве с уравнениями Максвелла кажется невероятным, чтобы эти несколько строчек содержали в себе все многообразие явлений электромагнетизма. Чтобы вполне осмыслить огромную физическую содержательность этих уравнений, надо изучить многие электромагнитные процессы. Впрочем, для уяснения основных черт физического содержания уравнений Максвелла будут достаточны простые рассуждения.

С этой целью перейдем от записи (1.49)—(1.52) к *уравнениям Максвелла в интегральной форме*:

$$\oint_L \mathbf{H}\,\mathbf{dl} = \frac{d}{dt}\int_S \mathbf{D}\,\mathbf{ds} + I, \tag{1.53}$$

$$\oint_L \mathbf{E}\,\mathbf{dl} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\,\mathbf{ds}, \tag{1.54}$$

$$\oint_S \mathbf{D}\,\mathbf{ds} = q, \tag{1.55}$$

$$\oint_S \mathbf{B}\,\mathbf{ds} = 0. \tag{1.56}$$

ВЫВОД. Чтобы из (1.49), (1.50) получить (1.53), (1.54), рассмотрим некоторую поверхность S (рис. 1.8*а*), «натянутую» на

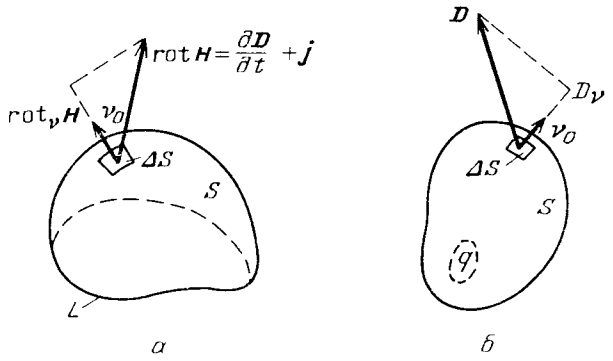


Рис. 1.8

контур L. Взяв для определенности уравнение (1.49), проинтегрируем его левую и правую части по S, образовав поток вектора $\mathrm{rot}\,\mathbf{H}$ (1.17) и равный ему поток вектора $\partial\mathbf{D}/\partial t + \mathbf{j}$. При этом имеем

$$\int_S \mathrm{rot}\,\mathbf{H}\,\mathbf{ds} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\,\mathbf{ds} + \int_S \mathbf{j}\,\mathbf{ds}.$$

Достаточно теперь к левой части применить теорему Стокса (1.34), заменив поток $\mathrm{rot}\,\mathbf{H}$ через S циркуляцией $\mathbf{H}$ по L, вынести операцию дифференцирования $\partial/\partial t$ за знак первого интеграла справа и учесть, что второй интеграл справа согласно определению (1.42) есть ток I, проходящий через поверхность S, чтобы получить (1.53). При этом производится замена символов $\partial/\partial t \to d/dt$, так как интеграл уже не является функцией координат.

Совершенно так же (1.54) получается из (1.50).

Чтобы вывести (1.55) из (1.51), левую и правую части (1.51) проинтегрируем по некоторому объему V, ограниченному поверхностью S:

$$\int_V \mathrm{div}\,\mathbf{D}\,dv = \int_V \rho\,dv.$$

По смыслу определения (1.41) объемный интеграл от ρ дает полный заряд q, содержащийся в V. Что касается левого объемного интеграла, то он на основании теоремы Остроградского — Гаусса (1.33) преобразуется в поток $\mathbf{D}$ через замкнутую поверхность S (рис. 1.8*б*). Уравнение (1.55) получено.

Уравнение (1.56) получается тем же путем из (1.52). ■

1.2.2. Первое уравнение Максвелла: полный ток и магнитное поле (А). Обсудим первое из уравнений Максвелла, привлекая и дифференциальную форму (1.49), и соответствующий интегральный аналог (1.53).

Поскольку ротор составляется из пространственных производных компонент вектора, то, как видно из (1.49), изменение в пространстве магнитного поля (вектор $\mathbf{H}$ слева) связано с изменением электрического поля во времени (вектор $\mathbf{D}$ справа).

Пусть сначала изменений во времени нет: процесс *стационарен*. Тогда первое уравнение Максвелла принимает вид

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{j}, \qquad \oint_L \mathbf{H}\,\mathbf{dl} = I \tag{1.57}$$

и описывает связь магнитного поля с постоянным током. Нельзя себе представить ток без магнитного поля, поскольку при $\mathbf{j} \neq 0$ ($I \neq 0$) обязательно $\mathrm{rot}\,\mathbf{H} \neq 0$ (или отлична от нуля циркуляция $\mathbf{H}$), а следовательно, $\mathbf{H} \neq 0$.

Пример 1. Рассмотрим бесконечный прямолинейный постоянный ток, магнитное поле которого, как известно из курса общей физики, в каждой поперечной плоскости описывается при помощи концентрических круговых векторных линий. На рис. 1.9 показана одна из таких линий в виде окружности радиуса r. Возьмем циркуляцию вектора $\mathbf{H}$ вдоль этой линии:

$$\oint_L \mathbf{H}\,\mathbf{dl} = \oint_L H\,dl = H\oint_L dl = 2\pi r H$$

(в силу симметрии системы H имеет одно и то же значение на расстоянии r от оси тока во всех направлениях). Согласно (1.57) вычисленная циркуляция равна I, отсюда $H = I/2\pi r$, что мы запишем в векторной форме:

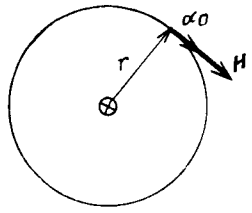


Рис. 1.9

$$\mathbf{H} = \boldsymbol{\alpha}_0 I/2\pi r, \tag{1.58}$$

где $\boldsymbol{\alpha}_0$ — орт касательной к окружности, указывающий направление вектора $\mathbf{H}$. Мы получили формулу, выражающую напряженность магнитного поля постоянного нитевидного тока как функцию пространственной координаты r. ■

Продолжим обсуждение первого уравнения Максвелла. Рассмотрим случай, когда ток проводимости отсутствует ($I=0$), но процесс уже не стационарен (происходят изменения во времени). Из (1.53) видно, что циркуляция $\mathbf{H}$, которая в случае постоянного тока была равна I, теперь оказывается равной величине

$$I^{\text{см}} = \frac{d}{dt}\int_S \mathbf{D}\,d\mathbf{s} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\,d\mathbf{s}, \qquad (1.59)$$

которая называется *током смещения*. Соответственно этому функция $\partial\mathbf{D}/\partial t$ рассматривается как плотность тока смещения.

Ток смещения — одно из важных понятий теории электромагнетизма. Во-первых, существенно, что по отношению к магнитному полю ток смещения как бы копирует роль обычного тока проводимости. Это видно из первого уравнения Максвелла, в котором ток проводимости и ток смещения (или их плотности) выступают равноправно. Во-вторых, следует учитывать, что физическая сущность тока смещения в вакууме никак не связана с движением зарядов.

Будем говорить, что вся правая часть первого уравнения Максвелла в интегральной форме (1.53) представляет собой *обобщенный ток* $I^{\text{см}}+I$, а величина $\partial\mathbf{D}/\partial t+\mathbf{j}$ в (1.49) — *плотность обобщенного тока*. В отсутствие магнитного поля ($\mathbf{H}=0$) равен нулю и обобщенный ток. Если обобщенный ток существует, то обязательно присутствует магнитное поле.

Привлечем для дальнейшего анализа тождество (1.23). Составляя дивергенцию от левой и правой частей уравнения (1.49), получаем

$$\operatorname{div}\left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{j}\right)=0. \qquad (1.60)$$

Отсюда следует, что вектор плотности обобщенного тока $\partial\mathbf{D}/\partial t+\mathbf{j}$ не имеет источников (стоков). Его векторные линии, следовательно, замкнуты или уходят из бесконечности в бесконечность (ср. рис. 13*в*, *г*). Применяя к (1.60) теорему Остроградского — Гаусса (1.33), т. е. интегрируя по некоторому объему V и переходя к его границе S, записываем интегральный аналог этого равенства:

$$\oint_S \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{j}\right)d\mathbf{s} \equiv I^{\text{см}}+I=0. \qquad (1.61)$$

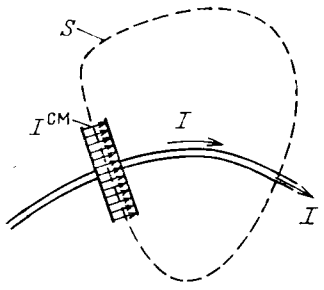


Рис. 1.10

Как видно, обобщенный ток через любую замкнутую поверхность S равен нулю.

Пример 2. На рис. 1.10 схематически представлен конденсатор в цепи переменного тока. Полагая, что вся система находится в пустоте, построим замкнутую поверхность так, чтобы она проходила между пластинами конденсатора. Применяя равенство (1.61), видим, что ток проводимости I через S (проходящий только по проводу) замыкается током смещения $I^{\text{см}}$, локализованным внутри конденсатора. ■

Обратимся к рис. 1.11, на котором схематически в виде векторных линий (*а*) показано типичное структурное соотношение между обобщенным током и магнитным полем. Можно сказать, что некоторый пространственный максимум, «сгусток» тока охватывает семейство замкнутых магнитных силовых линий. Пусть $\mathbf{j}=0$, тогда

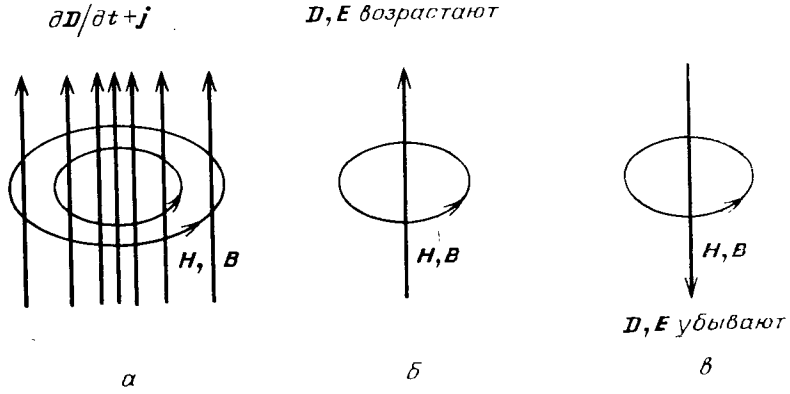


Рис. 1.11

при возрастании $\mathbf{D}$ ($\partial\mathbf{D}/\partial t>0$) этот вектор и магнитное поле связаны правовинтовой системой (*б*), а при убывании $\mathbf{D}$ ($\partial\mathbf{D}/\partial t<0$) — левовинтовой (*в*).

Наконец, покажем, что первое уравнение Максвелла согласовано с законом сохранения заряда. Действительно, переписывая (1.60) в виде $\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\mathbf{D})+\operatorname{div}\mathbf{j}=0$ (операции div и $\partial/\partial t$ мы имеем право поменять местами), а затем заменяя $\operatorname{div}\mathbf{D}$ через ρ при помощи (1.51), получаем уже известное равенство (1.44).

1.2.3. Второе уравнение Максвелла: обобщенный закон электромагнитной индукции (А). Обращаясь ко второму уравнению Максвелла в форме (1.50), замечаем, что оно связывает пространственные изменения электрического поля ($\mathbf{E}$) с изменениями во времени магнитного поля ($\mathbf{B}$). Если в качестве примера взять случай, когда электрическое поле отсутствует ($\mathbf{E}=0$), то равна нулю вся левая часть (1.50), откуда $\partial\mathbf{B}/\partial t=0$, а следовательно, магнитное поле, существующее без электрического, может быть только неизменным во времени, стационарным. При этом всякое изменение магнитного поля ($\partial\mathbf{B}/\partial t\neq 0$) обязательно вызовет появление поля электрического ($\operatorname{rot}\mathbf{E}\neq 0$ только при $\mathbf{E}\neq 0$).

Рассматривая второе уравнение Максвелла в интегральной форме (1.54), отметим, что поверхность S, опирающаяся на контур L,

для данного фиксированного L может быть произвольной ($S = S_1$, S_2, S_3, ... на рис. 1.12*а*).

Если для потока вектора **B** через S, называемого *магнитным потоком*, установить обозначение Ф, а для циркуляции E по L использовать символ Э, то уравнение (1.54) примет вид

$$\text{Э} = -\frac{d\Phi}{dt}, \tag{1.62}$$

где

$$\text{Э} = \oint_L \mathbf{E}\,d\mathbf{l}, \qquad \Phi = \oint_S \mathbf{B}\,d\mathbf{s}. \tag{1.63}$$

В этой форме второе уравнение Максвелла совпадает с *законом электромагнитной индукции Фарадея*. Циркуляция Э предстает как

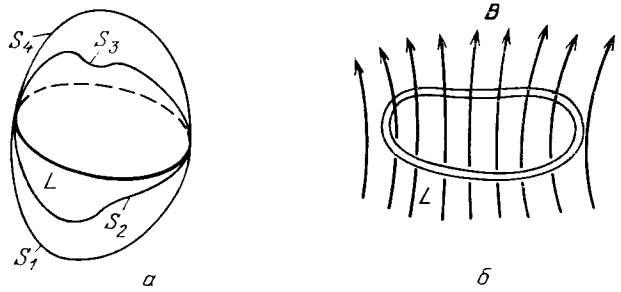


Рис. 1.12

электродвижущая сила, наводимая в контуре L изменением магнитного потока Ф. Заметим, что Э измеряется в *вольтах* [В], а Ф — в *веберах* [Вб].

Напомним, что закон Фарадея был установлен для проводящих (например, проволочных) контуров в магнитных полях (рис. 1.12*б*). Закон электромагнетизма, выражаемый вторым уравнением Максвелла в интегральной форме, значительно шире указанного закона Фарадея, поскольку контур L в (1.54) — это любой мысленно очерченный в пространстве контур. Не имеет значения, какие именно материальные объекты оказались в области построения: это не нарушает справедливости второго уравнения Максвелла. Столь общая постановка вопроса далеко выходит за пределы опытных фактов, на основе которых был сформулирован закон Фарадея. Второе уравнение Максвелла, однако, сохраняет идейную основу этого закона, и может рассматриваться как *обобщенный закон электромагнитной индукции*.

На рис. 1.13 показано типичное структурное соотношение между магнитным потоком (величина **B** может рассматриваться как плотность магнитного потока Ф) и электрическим полем (*а*). Пространственный максимум магнитного потока охватывается семейством замкнутых электрических силовых линий. Если **B** возрастает

($\partial\mathbf{B}/\partial t > 0$), то этот вектор и электрическое поле связаны левовинтовой системой (*б*); если же **B** убывает ($\partial\mathbf{B}/\partial t < 0$), то система правовинтовая (*в*).

1.2.4. Третье уравнение Максвелла: электрическое поле и заряды (А). Смысл третьего уравнения Максвелла (1.51), (1.55) прост, поскольку он вполне исчерпывается содержанием понятий дивергенции и потока вектора (см. § 1.0). Линии вектора **D** начинаются

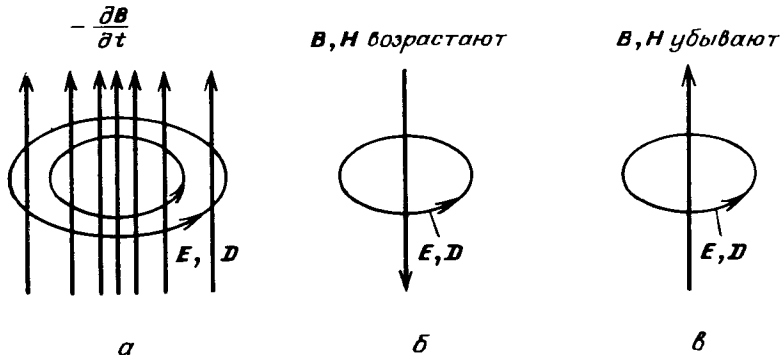


Рис. 1.13

на положительных и кончаются на отрицательных зарядах (**знаки** $\operatorname{div}\mathbf{D}$ и ρ совпадают). В случае точечных зарядов поля в их окрестностях характеризуются картинами силовых линий типа рис. 1.3*а, б*. Если в некоторой области $\rho = 0$, но электрическое поле существует, то о его характере дают представление картины силовых линий на рис. 1.3*в, г*.

Третье уравнение Максвелла в интегральной форме (1.55) известно также под названием *теоремы Гаусса*. В качестве частного момента отметим, что согласно (1.55) поток вектора **D** через некоторую замкнутую поверхность S обращается в нуль не только при отсутствии зарядов внутри S, но и при их нейтрализации, когда полный положительный заряд уравновешивается отрицательным.

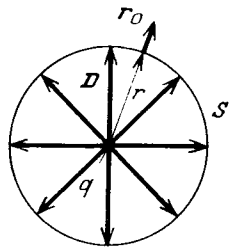


Рис. 1.14

Пример 3. Покажем, каким образом можно использовать теорему Гаусса (1.55) для нахождения поля точечного заряда. Векторные линии D представляют собой радиальные прямые, которые следует проводить равномерно (через одинаковые угловые интервалы), поскольку все направления физически равноправны (рис. 1.14). Опишем вокруг заряда сферу радиуса r и ее поверхность примем за S в (1.55). Тогда

$$\oint_S \mathbf{D}\,d\mathbf{s} = \oint_S D\,ds = D\oint_S ds = 4\pi r^2 D = q$$

(D и ds — радиальные векторы; D имеет одно и то же значение во всех точ-

ках сферы). Таким образом, $D = q/4\pi r^2$, что лучше выразить в векторной форме:

$$\mathbf{D} = \mathbf{r}_0 \frac{q}{4\pi r^2}. \tag{1.64}$$

Здесь $\mathbf{r}_0$ — радиальный орт. Мы получили формулу, выражающую электрическую индукцию $\mathbf{D}$ поля точечного заряда как функцию радиальной координаты r, т. е. расстояния от него. ■

1.2.5. Четвертое уравнение Максвелла: непрерывность линий вектора B (А). Четвертое уравнение Максвелла (1.52), (1.56) по форме отличается от третьего нулевой правой частью. Это указывает на отсутствие фактора, который можно было бы назвать «магнитным зарядом». Если все же формально ввести магнитный заряд $q^{\text{м}}$ с плотностью $\rho^{\text{м}}$, то согласно (1.52), (1.56)

$$\rho^{\text{м}} = 0, \quad q^{\text{м}} = 0. \tag{1.65}$$

В силу четвертого уравнения Максвелла магнитные силовые линии (линии вектора $\mathbf{B}$) обязательно непрерывны, т. е. либо замкнуты, либо идут из бесконечности в бесконечность. Общий характер картин магнитных силовых линий мы видим, таким образом, на рис. 1.3*в, г*.

1.2.6. Заключительные замечания об уравнениях Максвелла (Б). Во введении уже говорилось, что Максвелл воплотил в математической форме физические идеи Фарадея, предвосхищавшие представление об электромагнитном поле. Фарадей рассматривал силовые линии, как некоторую физическую реальность. Однако Максвелл не только, употребляя современное выражение, формализовал взгляды Фарадея, но и внес в них существенно новое. Именно Максвелл ввел ток смещения. Выше уже было показано, что следствием первого и третьего уравнений Максвелла является закон сохранения заряда. Если из (1.49) удалить плотность тока смещения, то вместо закона сохранения заряда (1.44) мы получили бы равенство $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$, которое в действительности верно только для постоянного тока. В дальнейшем мы неоднократно будем убеждаться в особой важности представления о токе смещения. Что же касается самих уравнений Максвелла, то в их окончательное формирование внесли решающий вклад Герц и Хевисайд.

Третье и четвертое уравнения Максвелла определенным образом зависят от первых двух, в чем нетрудно убедиться. С этой целью возьмем дивергенцию от левой и правой частей (1.50). В силу (1.23) левая часть обращается в нуль; меняя местами в правой части операции div и $\partial/\partial t$, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div}\mathbf{B} = 0,$$

т. е. $\operatorname{div}\mathbf{B} = \text{const}$. Эту константу остается выбрать равной нулю, так как, несомненно, в некоторый момент поле отсутствовало, т. е. было $\mathbf{B} = 0$ и $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$. Следовательно, четвертое уравнение Максвелла (1.52) получается из второго (1.50). При помощи аналогичных рассуждений можно прийти к третьему уравнению Максвелла (1.51). Для этого надо применить операцию div к первому уравнению Максвелла (1.49) и привлечь закон сохранения заряда (1.44). Однако уравнения Максвелла с дивергенциями (1.51), (1.52) нельзя рассматривать как простые следствия первых двух уравнений (1.49), (1.50). Можно сказать, что они формализуют ту дополнительную информацию, которая используется в процессе вывода этих уравнений.

Наконец, о соленоидальности поля $\mathbf{B}$. Уравнение (1.51), выражающее это свойство, и эквивалентное утверждение об отсутствии магнитных зарядов (1.65) в макроскопической электродинамике твердо обоснованы. Однако принципиальное отсутствие магнитного заряда в природе подвергается сомнению физиками; время от времени проводятся эксперименты с целью обнаружить объекты микромира, обладающие магнитным зарядом.

§ 1.3. Свойства материальных сред

1.3.1. Материальные уравнения (А). В макроскопической электродинамике установлено, что векторы поля $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ (электрическая и магнитная индукции), а также плотность тока проводимости $\mathbf{j}$ связаны с напряженностями поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ соотношениями, зависящими от свойств среды. Обычно существуют связи

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}), \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{E}). \tag{1.66}$$

Простейшая интерпретация этой записи состоит в том, что, например, индукция $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ вполне определяется напряженностью $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ в той же точке пространства $M(\mathbf{r})$ и в тот же момент времени t (аналогично рассматриваются $\mathbf{B}$ и $\mathbf{j}$). Иными словами, процессы в среде считаются *локальными* и *безынерционными*: в каждой точке состояние не зависит от окружающей среды и в каждый момент времени — от «предыстории». Хотя такая трактовка является упрощенной, она применима во многих случаях. При этом вместо (1.66) пишут:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}, \tag{1.67}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0\mu\mathbf{H}, \tag{1.68}$$

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}. \tag{1.69}$$

Напомним, что входящие в первые два равенства ε_0 и μ_0 — это коэффициенты из формул (1.46). Величины ε и μ называются соответственно *относительной диэлектрической проницаемостью* и *относительной магнитной проницаемостью* (полные коэффициенты $\varepsilon_0\varepsilon = \varepsilon_a$ и $\mu_0\mu = \mu_a$ — *абсолютные проницаемости*), а σ — *удельной проводимостью*.

Будем называть соотношения (1.66) и все их возможные формы, включая (1.67)—(1.69), *материальными уравнениями*.

1.3.2. Поляризация и намагничивание (А). Обычно вещество само по себе не создает макроскопически наблюдаемого поля (одно из хорошо известных исключений — постоянные магниты). Это объясняется уравновешенностью внутренних процессов в веществе на микроскопическом уровне. В частности, нейтрализованы положительные и отрицательные заряды. Однако под действием внешнего (постороннего) поля на эти заряды взаимная компенсация их полей в той или иной степени нарушается. Можно утверждать, что во внешнем электрическом поле происходит некоторая деформация, а также переориентация атомов и молекул, заряды которых продолжают оставаться связанными в прежней структуре вещества. В результате отклонений зарядов, однако, появляется нескомпенсированное внутреннее поле, которое, налагаясь на внешнее, заметно изменяет его. Это называется *поляризацией* среды. Аналогичный процесс, связанный с магнитным полем, называется *намагничиванием*.

Пусть некоторое электромагнитное поле в вакууме характеризуется напряженностями $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$. При этом согласно (1.46) $\mathbf{D}_{\text{вак}} = \varepsilon_0\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}_{\text{вак}} = \mu_0\mathbf{H}$ (мы добавили нижние индексы, чтобы подчеркнуть, что имеются в виду индукции в вакууме). Если то же поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ существует в некоторой среде, то индукции будут иными [1]):

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_{\text{вак}} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_{\text{вак}} + \mathbf{M}. \tag{1.70}$$

Приращения $\mathbf{P}$ и $\mathbf{M}$ будем называть *поляризованностью* (*электрической поляризацией*) и, соответственно, *намагниченностью* (*магнитной поляризацией*). Процессы поляризации и намагничивания среды выступают как независимые, т. е. первый связан только с электрическим полем, а второй с магнитным:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E}), \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{H}). \tag{1.71}$$

В большинстве случаев этим соотношениям можно придать простую форму:

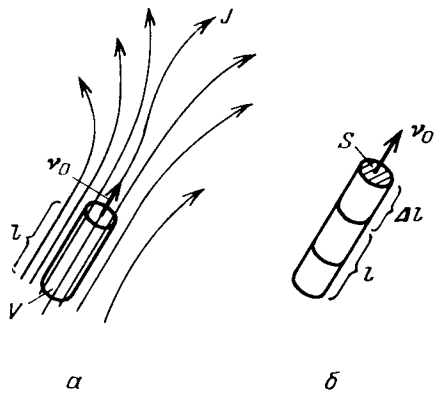
$$\mathbf{P} = \varepsilon_0\chi^{\text{э}}\mathbf{E}, \quad \mathbf{M} = \mu_0\chi^{\text{м}}\mathbf{H}, \tag{1.72}$$

где безразмерные коэффициенты $\chi^{\text{э}}$ и $\chi^{\text{м}}$ — это так называемые *электрическая восприимчивость* и *магнитная восприимчивость* среды. Они выражают «меру отклика» среды на прилагаемое внешнее поле. Восприимчивости связаны простыми соотношениями с относительными проницаемостями. Действительно, внося (1.67), (1.68) и (1.72) в (1.70), получаем

$$\varepsilon = 1 + \chi^{\text{э}}, \quad \mu = 1 + \chi^{\text{м}}. \tag{1.73}$$

[1]) По традиции $\mathbf{M}$ имеет размерность $\mathbf{H}$. Мы отказываемся от этого ради единообразия соотношений (1.70).

1.3.3. Электропроводность (А). Обратимся к третьему материальному уравнению (1.69), устанавливающему связь плотности тока проводимости и напряженности электрического поля в некоторой среде. На рис. 1.15*а* представлена одна из возможных картин линий вектора $\mathbf{j}$ и выделена такая достаточно малая цилиндрическая область V, что вектор $\mathbf{j}$ внутри нее можно считать не зависящим от пространственных координат и направленным по оси цилиндра (орт $\mathbf{v}_0$). Поэтому, интегрируя левую и правую части (1.69) по выделенному объему $V = Sl$, имеем



а *б*

Рис. 1.15

$$jSl = \sigma El S$$

(попутно мы спроецировали векторы $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$ на $\mathbf{v}_0$, перейдя к их абсолютным значениям).

Величина jS есть не что иное, как ток проводимости I, проходящий по нормали через S, а $El = U$ можно назвать падением напряжения на участке l (электротехнический термин). Таким образом, получаем

$$I\mathcal{R} = U, \tag{1.74}$$

где $\mathcal{R} = l/\sigma S$. Именно так формулируется *закон Ома* для участка цепи, а полученная константа $\mathcal{R}$ есть *электрическое сопротивление* выделенного цилиндрического объема среды (совершенно так же вычисляется сопротивление отрезка проволоки). Итак, материальное уравнение (1.69) при $\sigma = \text{const}$ воспроизводит физическое содержание известного закона Ома. В отличие от обычной формулировки этого закона оно является локальным, т. е. выражает связь физических величин в точке. Поскольку сопротивление $\mathcal{R}$ измеряется в *омах* [Ом], удельная проводимость σ имеет размерность [1/(Ом · м)]. Она измеряется в *сименсах на метр* [См/м].

Подчеркнем, что перемещающиеся заряды, которые создают ток, могут быть любого знака: положительные заряды образуют ток в направлении своего движения, отрицательные — в противоположном. Можно легко представить себе ток при нейтрализованном заряде, когда в каждом макроскопическом элементе объема положительный заряд уравновешен отрицательным.

Рассмотрим некоторое распределение положительного заряда, носители которого перемещаются со скоростью $\mathbf{v}$. При этом существует ток с плотностью $\mathbf{j}$, направленной, как $\mathbf{v}$ (то же было бы, если бы отрицательные заряды перемещались со скоростью $-\mathbf{v}$). Если плотность заряда ρ, то

$$\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}. \tag{1.75}$$

ВЫВОД. Обратимся к рис. 1.15*б*, где показано, как смещается элементарный цилиндрический объем $V = Sl$, содержащий заряд $q = \rho V$. За время Δt через поперечное сечение цилиндра S пройдет заряд $\Delta q = I\Delta t = jS\Delta t$. В то же время $\Delta q = \rho\Delta V = \rho S\Delta l$, где Δl — смещение заполненного зарядом элементарного объема V за время Δt (ΔV — смещенная часть V). Приравнивая оба выражения Δq, имеем $j\Delta t = \rho\Delta l$. Перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$ и, учитывая, что при этом $\Delta l/\Delta t = v$, имеем $j = \rho v$. Этот вывод (1.75) как раз и выражает $\mathbf{j}$ в векторной форме. ■

1.3.4. Проводники и диэлектрики (А). В зависимости от степени электропроводности вещества, как известно, делят на проводники и диэлектрики (изоляторы). В теории удобно пользоваться представлениями об *идеальном проводнике* как среде с неограниченной проводимостью ($\sigma \to \infty$) и об *идеальном диэлектрике* — среде, лишенной проводимости ($\sigma = 0$). В чем различие этих гипотетических сред с точки зрения электродинамики?

Взяв выражение плотности обобщенного тока (см. с. 30), преобразуем его с привлечением материальных уравнений (1.67), (1.69) для некоторой среды с параметрами ε и σ:

$$\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \sigma\mathbf{E} + \varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \qquad (1.76)$$

Как видно, в случае идеального диэлектрика здесь исчезает первый член $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$, а при переходе к идеальному проводнику второй член оказывается бесконечно малым в сравнении с первым (при всякой реальной скорости процесса). Это значит, что в идеальном диэлектрике может существовать лишь ток смещения, а в идеальном проводнике — только ток проводимости.

Теперь нетрудно найти критерий, по которому реальная среда должна в электродинамике оцениваться как диэлектрик, проводник либо нечто промежуточное. Естественно сравнивать плотности токов проводимости и смещения. Если первый резко преобладает, то среда проявляет себя как проводник, а в противном случае — как диэлектрик. Наконец, когда оба члена в (1.76) одного порядка, среду нельзя отнести ни к проводникам, ни к диэлектрикам.

Пусть для определенности рассматриваются гармонически колеблющиеся поля, т. е. временна́я зависимость описывается функцией $\cos\omega t$ (напомним, что круговая частота ω связана соотношением $\omega = 2\pi f$ с частотой f, измеряемой в *герцах* [Гц]). Произведя дифференцирование по времени, мы получаем следующее отношение амплитуд j и $\partial D/\partial t$:

$$\frac{j_m}{(\partial D/\partial t)_m} = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0\varepsilon}. \qquad (1.77)$$

Проводником будем считать среду в случае, когда это отношение значительно превышает единицу, а диэлектриком, если оно значительно меньше единицы:

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0\varepsilon}\begin{cases}\gg 1 — \text{проводник},\\ \ll 1 — \text{диэлектрик}.\end{cases} \qquad (1.78)$$

Полученные оценки показывают, что отнесение какой-то определенной среды к классу проводников или диэлектриков не имеет абсолютного характера, а зависит от частоты процесса. Может оказаться, что среда, проявляющая себя как диэлектрик при достаточно высоких частотах, на низких выступает как проводник. В том огромном диапазоне частот, которым располагает современная радиоэлектроника, свойства среды изменяются весьма значительно. Однако вплоть до очень высоких частот, пока еще колебания частиц материи далеки от своих резонансов, параметры ε и σ часто могут рассматриваться как частотно-независимые, т. е. как константы в оценках (1.78).

На рис. 1.16 показано, как изменяется величина $\sigma/\omega\varepsilon_0\varepsilon$ (1.77) для некоторых распространенных сред. Видно, что среды, расположенные на поверхности земного шара, в различных вполне реальных обстоятельствах могут выступать и как диэлектрики, и как проводники.

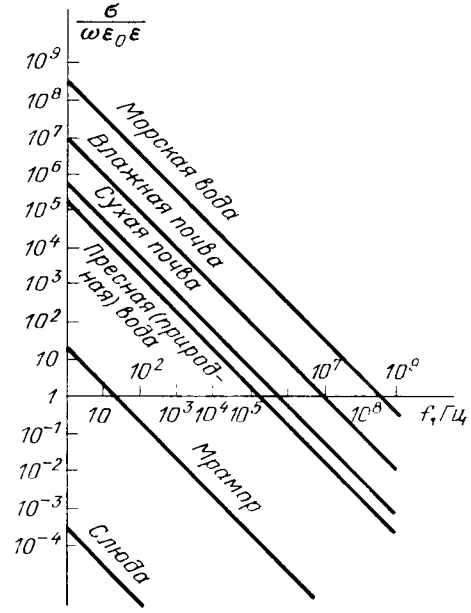


Рис. 1.16

1.3.5. Типы сред в электродинамике (А). Вернемся к материальным уравнениям (1.67) — (1.69), содержащим величины ε, μ и σ. Последние выступают как *параметры сред*.

В большинстве случаев ε, μ и σ могут рассматриваться как скалярные коэффициенты векторов. Это значит, что векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{j}$ коллинеарны (см. с. 13), а свойства среды не зависят от направления поля. Среды, характеризуемые скалярными ε, μ и σ, называются *изотропными*.

Однако вообще материальные уравнения рассматриваются как линейные однородные преобразования вида (1.8), (1.11). Таким образом, параметры ε, μ и σ выступают как матрицы вида (1.9). В тех случаях, когда это надо подчеркнуть, будем писать $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\mu}$ и $\tilde{\sigma}$ (ср. (1.11)). Употребляют названия: тензор диэлектрической проницаемости, тензор магнитной проницаемости, тензор удельной проводимости. Среды, характеризуемые тензорными параметрами, на-

зывают *анизотропными*. При анизотропии свойства среды зависят от направления векторов поля. Векторы **E** и **D**, **H** и **B**, **E** и **j** уже не образуют (в общем случае) коллинеарные пары.

Конечно, если ε и μ тензорные, то тензорами будут и соответствующие восприимчивости $\chi^э$ или $\chi^м$. При этом в формулах (1.73) вместо единиц следует написать единичные матрицы (тензоры) I (1.10).

Говорят, что среда *однородна* в области V, если параметры ε, μ и σ (скаляры или тензоры) постоянны в V. Если же их следует рассматривать как функции координат, то среда *неоднородна*. Кусочно-однородными называют среды, параметры которых принимают различные постоянные значения в разных областях.

Наконец, параметры ε, μ и σ в большинстве случаев можно считать не зависящими от векторов поля. Материальные уравнения (1.67)—(1.69) при этом линейны. *Линейными* называют и соответствующие среды. Нелинейность большинства сред проявляется только в очень сильных полях.

1.3.6. Замечания о материальных уравнениях (Б). Материальные уравнения (1.67)—(1.69) содержат связи между векторными функциями, недостающие в системе уравнений (1.49)—(1.52). При рассмотрении гармонических во времени процессов (гл. 3) мы сможем расширить понятия проницаемостей ε и μ. При этой оговорке можно утверждать, что материальные уравнения (1.67)—(1.69) в большинстве практических случаев достаточны.

Примечательно, что очень простые материальные уравнения оказываются удовлетворительными в макроскопической электродинамике при огромной сложности микроскопических процессов в веществе, особенно в твердых телах. Хотя теория этих процессов основательно разработана, она, вообще говоря, не в состоянии дать средства для вычисления ε, μ и σ реальных веществ. Но выход из положения очень прост: параметры ε, μ и σ в каждом конкретном случае могут быть измерены. Благодаря этому макроскопическая теория обходит трудности микроскопической.

В нашем курсе вопросы микроскопической электродинамики будут время от времени затрагиваться, но только в тех случаях, когда удовлетворительная трактовка оказывается возможной без привлечения понятий квантовой физики.

Заметим, что записанные нами материальные уравнения (1.67)—(1.69) однородны: если $\mathbf{E}=0$, $\mathbf{H}=0$, то и $\mathbf{D}=0$, $\mathbf{B}=0$, $\mathbf{j}=0$. Ниже в § 1.5 мы встретимся с неоднородным уравнением типа (1.69). Уравнениям (1.67) и (1.68) отвечают следующие неоднородные:

$$\mathbf{D}=\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}+\mathbf{P}_0, \quad \mathbf{B}=\mu_0\mu\mathbf{H}+\mathbf{M}_0. \tag{1.79}$$

В частности, второе из этих уравнений описывает поля в постоянных магнитах, которые отличаются существованием самопроизвольной намагниченности $\mathbf{M}_0$. В качестве сред, обладающих самопроизвольной поляризованностью $\mathbf{P}_0$, можно указать электреты.

Наконец, поставим вопрос о том, каков может быть более общий вид материальных уравнений. Описывая, например, электрическое поле в некоторой изотропной среде, надо учитывать, что поляризация в данной точке $M(\mathbf{r})$ зависит от поля в ее окрестности, а также происходит запаздывание **P** по сравнению с **E**. С учетом нелокальности и инерционности процесса поляризации

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)=\varepsilon_0\int_V\int_{-\infty}^{t} Q(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|, t-t')\,\mathbf{E}(\mathbf{r}', t')\,dt'\,dv'. \tag{1.80}$$

В этом обобщении материального уравнения (1.67) ядро преобразования, функция Q, определяется свойствами среды. Теперь связь между **D** и **E** зависит не только от характера среды, но также от геометрических параметров тела и вида процесса в предшествующие моменты времени. К счастью, окрестность заметного влияния очень мала. Поэтому все внутренние точки находятся в одинаковых условиях и обычно геометрические параметры тела не имеют значения — за исключением случаев очень резкого изменения поля в пространстве. Что касается инерционности поляризации (и намагничивания), то в случае гармонических во времени процессов (гл. 3) она может быть просто учтена, так что вид материальных уравнений сохраняется.

1.3.7. Примеры сред (Б). Приведем некоторые справочные данные о параметрах ε, μ и σ распространенных веществ. Сразу подчеркнем, что для большинства сред с высокой точностью $\mu=1$. Строго говоря, для *диамагнетиков* $\mu<1$, а для *парамагнетиков* $\mu>1$. В частности, медь — диамагнетик ($\mu=0{,}99999044$), алюминий — парамагнетик ($\mu=1{,}0000222$). *Ферромагнетики*, к которым в первую очередь относится железо, могут обладать весьма высокой магнитной проницаемостью. Но при частотах выше 10^8 Гц μ уменьшается до единицы. Ферромагнетики относятся к нелинейным средам. Природа ферромагнетизма имеет существенно квантовый характер, его теория сложна и обширна. Тем не менее в гл. 16 мы обсудим некоторые свойства ферромагнетиков.

Параметры ε и σ распространенных сред приведены в табл. 1.2. К первой группе отнесены вещества с низкой проводимостью, которые обычно проявляют себя как диэлектрики. Среды второй группы выступают в зависимости от частоты и как диэлектрики, и как проводники. К третьей группе отнесены металлы. Их проводимость настолько высока, что они — согласно оценке (1.78) — выступают как проводники вплоть до границ применимости данного критерия. К этому вопросу мы вернемся в гл. 14.

Свойства сред — предмет серьезных физических исследований, как теоретических, так и экспериментальных. Успехи физики твердого тела обычно имеют важное значение для радиоэлектроники. Достаточно указать на теорию полупроводников. Эта проблематика, однако, далеко выходит за пределы нашего курса.

Таблица 1.2

Параметры ε и σ распространенных веществ

Вещество	ε	f, Гц	σ, См/м
Воздух	1,000536	$0—3\cdot10^{10}$	
Парафин обычн.	2,1	10^3	10^{-14}
Стекло натровое	7,5	$10^3—10^5$	$2\cdot10^{-10}$
Стеатит	6	$10^6—10^9$	$10^{-12}—10^{-13}$
Бумага из хлопка	2,6	10^3	10^{-10}
Полистирол	2,55	$10^6—10^8$	10^{-15}
Слюда	7	$10^3—10^6$	$10^{-11}—10^{-15}$
Титанат бария	1200	—	—
Кварц плавлен.	3,8	$10^3—10^8$	10^{-16}
Вода	81,1	0	—
Вода	80	$10^6—10^9$	—
Вода	78	$3\cdot10^9$	—
Вода	64	10^{10}	—
Вода	35	$2{,}4\cdot10^{10}$	—
Вода пресная (природная)	80	—	$10^{-3}—2{,}4\cdot10^{-2}$
Вода морская	80	$\langle 3\cdot10^8\rangle$	1—4,3
Земля сухая	3—6	—	$1{,}1\cdot10^{-5}—2\cdot10^{-3}$
Земля влажная	10—30	—	$3\cdot10^{-3}—3\cdot10^{-2}$
Серебро	—	—	$6{,}139\cdot10^7$
Медь отожженная	—	—	$5{,}8005\cdot10^7$
Алюминий промышленный	—	—	$3{,}54\cdot10^7$
Латунь	—	—	$1{,}45\cdot10^7$
Железо	—	—	$1{,}0\cdot10^7$
Олово	—	—	$0{,}869\cdot10^7$
Свинец	—	—	$0{,}48\cdot10^7$
Ртуть	—	—	$0{,}1044\cdot10^7$

§ 1.4. Поля на границах раздела сред

1.4.1. Поля, заряды и токи на границах (А). При рассмотрении любого реального объекта электродинамики мы встретимся с границами разнородных сред; такой границей является поверхность всякого физического тела. С точки зрения макроскопической электродинамики, граница раздела сред — это такая поверхность, на которой параметры ε, μ, σ (хотя бы один из них) терпят разрыв как функции нормали. Конечно, можно было бы полагать эти функции непрерывными, допустив, что граница не является резкой, т. е. имеется тонкий переходный слой, внутри которого свойства среды продолжают изменяться плавно. Но это не дает преимуществ по

сравнению с использованием разрывных функций; к тому же было бы непоследовательно рассматривать слишком тонкие слои в рамках макроскопической электродинамики.

Пусть поверхность S (рис. 1.17*а*) разделяет среды *1* и *2*. Выберем на S точку M и выделим столь малую ее окрестность ΔS, что этот элемент поверхности можно считать плоским. В точке M построим орт нормали $\boldsymbol{\nu}_0$ (направление — из среды *2* в *1*). Можно

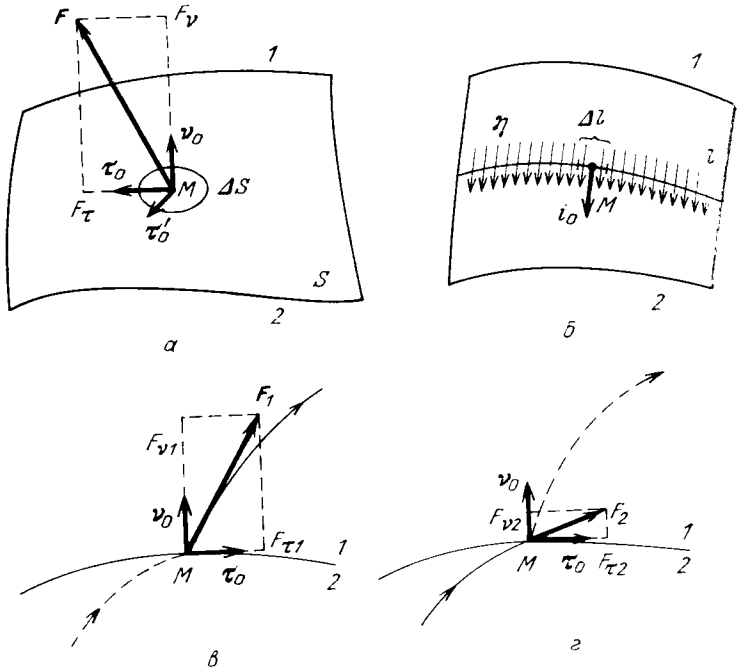


Рис. 1.17

также построить на ΔS сколько угодно касательных ортов; выберем из них два ортогональных: $\boldsymbol{\tau}_0$ и $\boldsymbol{\tau}_0'$. При этом получена тройка ортогональных векторов $\boldsymbol{\nu}_0$, $\boldsymbol{\tau}_0$ и $\boldsymbol{\tau}_0'$, по которым можно разложить любой из векторов поля **E**, **H**, **B** и **D** в точке M. Если орт $\boldsymbol{\tau}_0$ выбран так, что он совпадает по направлению с проекцией некоторого вектора поля **F** на ΔS, то имеем разложение $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nu}_0 F_\nu + \boldsymbol{\tau}_0 F_\tau$. Говорят, что вектор поля **F** разложен на *нормальную* и *тангенциальную* (касательную) компоненты.

В ряде случаев на границе раздела сред могут располагаться микроскопические носители заряда, как неподвижные, так и образующие ток проводимости. В макроскопической электродинамике принимается, что такого рода заряд не занимает объема, а является *поверхностным*. *Плотностью поверхностного заряда* называют

величину

$$\xi = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} \tag{1.81}$$

(ср. определение плотности ρ (1.41)). Поэтому допускается также существование *поверхностного тока*. Пусть такой ток проходит по поверхности S (рис. 1.17*б*) и ортогонально пересекает линию l, причем в некоторой точке M на линии l его направление указывает орт $\mathbf{i}_0$. *Плотностью поверхностного тока* в M называется величина

$$\eta = \lim_{\Delta l \to 0} \mathbf{i}_0 \frac{\Delta I}{\Delta l}. \tag{1.82}$$

Нашей ближайшей целью является выяснение того, как ведут себя нормальные и тангенциальные компоненты векторов поля на различных границах раздела разнородных сред. Попутно войдут в рассмотрение также поверхностные заряды и токи.

Поскольку ε, μ и σ разрывны, надо ожидать, что компоненты векторов поля при переходе границ раздела сред тоже будут испытывать разрывы, т. е. либо обе компоненты некоторого вектора поля $\mathbf{F}$, либо одна из них — нормальная или тангенциальная — изменяются скачкообразно. Тогда векторная линия должна претерпевать *излом*, как это показано на рис. 1.17*в*, *г*; мы предполагаем, что это некоторая плоская кривая. На границе переход от $\mathbf{F}_1$ (*в*) к $\mathbf{F}_2$ (*г*) происходит в общем случае с изменением как абсолютной величины, так и направления вектора.

Понятно, что в точках разрыва векторов поля мы лишены возможности применять уравнения Максвелла в дифференциальной форме (1.49)—(1.52). Мы обратимся к интегральной форме этих уравнений (1.53)—(1.56) и получим важные соотношения, которые называют *граничными условиями*.

1.4.2. Граничные условия для векторов электрического поля (А). Покажем, что вектор электрической индукции $\mathbf{D}$ подчиняется следующему граничному условию:

$$(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2)\mathbf{v}_0 = \xi, \tag{1.83}$$

т. е. в граничных точках разность нормальных компонент вектора $\mathbf{D}$ в обеих средах $\mathbf{D}_1\mathbf{v}_0 = D_{v1}$ и $\mathbf{D}_2\mathbf{v}_0 = D_{v2}$ равна плотности поверхностного заряда ξ. Если граница не несет заряда ($\xi = 0$), то нормальная компонента $\mathbf{D}_v$ вектора $\mathbf{D}$ при переходе границы остается непрерывной.

ВЫВОД. В основу анализа положим третье уравнение Максвелла в интегральной форме (1.55), теорему Гаусса. Построим пересекающий границу малый цилиндр высотой Δh (рис. 1.18*а*). Основания его параллельны оказавшемуся внутри участку границы ΔS, который рассматривается как элемент плоскости.

Пусть S в (1.55) есть поверхность рассматриваемого цилиндра, состоящая из его оснований и боковой поверхности. Ввиду малости

цилиндра поле на его основаниях можно считать однородным: $\mathbf{D} = \text{const}$. Внешняя нормаль к верхнему основанию направлена по $\mathbf{v}_0$, а к нижнему — противоположно. Поэтому, раскрывая интеграл в (1.55), получаем

$$\mathbf{D}_1\mathbf{v}_0\Delta S - \mathbf{D}_2\mathbf{v}_0\Delta S + \Phi^{\text{э}}_{\text{бок}} = \Delta q,$$

где первые два члена получены при вычислении потока вектора $\mathbf{D}$ через основания цилиндра, а символом $\Phi^{\text{э}}_{\text{бок}}$ обозначен поток $\mathbf{D}$

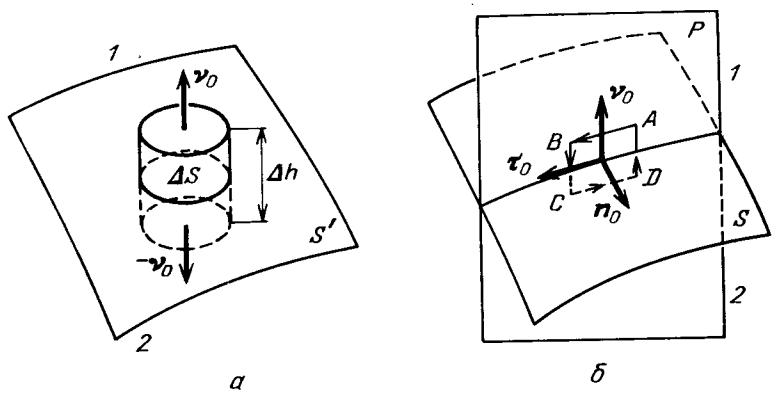


Рис. 1.18

через его боковую поверхность; в правой части — полный заряд Δq внутри цилиндра.

Теперь будем неограниченно уменьшать высоту цилиндра Δh, но так, чтобы его основания оставались в разных средах и в пределе при $\Delta h \to 0$ совпали с элементом граничной поверхности ΔS. При этом исчезает боковая поверхность цилиндра, а с ней $\Phi^{\text{э}}_{\text{бок}}$. Так как становится равным нулю его объем, то исчезает и та часть заряда, которая могла быть распределена в объеме (если была отлична от нуля плотность заряда ρ (1.41)), т. е. в рассмотрение входит лишь заряд $\Delta q = \xi\Delta S$, сосредоточенный на самой границе. Итак, достаточно разделить все члены равенства на ΔS, чтобы получить граничное условие (1.83). ■

Следующее граничное условие имеет вид

$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)\tau_0 = 0. \tag{1.84}$$

Оно означает, что тангенциальная компонента $\mathbf{E}\tau_0 = E_\tau$ вектора $\mathbf{E}$ при переходе границы раздела сред всегда остается непрерывной. Вместо (1.84) часто употребляется эквивалентное равенство

$$[\mathbf{v}_0, \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2] = 0, \tag{1.85}$$

более удобное в том смысле, что $\mathbf{v}_0$ выбирается однозначно.

ВЫВОД. Пересечем граничную поверхность S плоскостью P, проходящей через нормаль к S (рис. 1.18*б*), и построим на ней малый прямоугольный контур $ABCD$, лежащий в обеих средах. Его стороны AB и CD параллельны пересеченному участку границы, который можно считать плоским. Обозначим $AB = CD = \Delta l$, $BC = AD = \Delta h$. На рис. 1.18*б* кроме орта нормали $\mathbf{v}_0$ к S показан также орт касательной $\boldsymbol{\tau}_0$. Построен также орт нормали $\mathbf{n}_0$ к P, направленный касательно к S: $\boldsymbol{\tau}_0 = [\mathbf{n}_0, \mathbf{v}_0]$.

Вывод основывается на применении второго уравнения Максвелла в интегральной форме (1.54), причем в качестве L берется контур $ABCD$. Ввиду его малости поле на сторонах AB и CD можно считать однородным: $\mathbf{E} = \text{const}$. Направление обхода контура на AB будем производить по $\boldsymbol{\tau}_0$; тогда на CD оно окажется противоположным $\boldsymbol{\tau}_0$. Поэтому из уравнения (1.54) следует

$$\mathbf{E}_1\boldsymbol{\tau}_0\Delta l - \mathbf{E}_2\boldsymbol{\tau}_0\Delta l + C^{э}_{бок} = -\frac{d}{dt}\int\limits_{\Delta P}\mathbf{B}\,d\mathbf{s}.$$

Здесь первые два члена получены при вычислении циркуляции вектора $\mathbf{E}$ на участках AB и CD контура L, а оставшаяся часть циркуляции обозначена $C^{э}_{бок}$ (это вклад боковых участков BC и DA). Вычисление магнитного потока в правой части (1.54) производится через площадку ΔP, ограниченную контуром L.

В пределе при $\Delta h \to 0$ стороны AB и CD совпадают на границе S; при этом также $\Delta P \to 0$. В результате $C^{э}_{бок}$ и правая часть равенства исчезают. Отбрасывая общий множитель Δl, формально приходим к граничному условию (1.84).

Остается только понять, что $\boldsymbol{\tau}_0$ в (1.84) мы имеем право рассматривать как орт совпадающих по направлению проекций $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ на S. В процессе вывода ориентация плоскости P, а следовательно, и вектора $\boldsymbol{\tau}_0$ была произвольной. Поэтому равенство (1.84) справедливо для любого направления $\boldsymbol{\tau}_0$ на S. Направив $\boldsymbol{\tau}_0$ сначала вдоль проекции $\mathbf{E}_1$, а затем ортогонально к ней, из (1.84) видим, что во втором варианте проекция $\mathbf{E}_2$ равна нулю. Это и доказывает совпадение проекций $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ на S по направлению.

Чтобы получить граничное условие в форме (1.85), заменим $\boldsymbol{\tau}_0$ в (1.84) через $[\mathbf{n}_0, \mathbf{v}_0]$, а затем учтем свойство (1.5) смешанного произведения векторов: $(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)[\mathbf{n}_0, \mathbf{v}_0] = [\mathbf{v}_0, \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2]\mathbf{n}_0 = 0$. Отсюда непосредственно следует (1.85), поскольку орт $\mathbf{n}_0$, задающий ориентацию плоскости P, является неопределенным. ■

1.4.3. Граничные условия для векторов магнитного поля (А). Нормальная компонента вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$ всегда непрерывна:

$$(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2)\mathbf{v}_0 = 0. \tag{1.86}$$

ВЫВОД. Взяв за основу уравнение Максвелла в интегральной форме (1.56), повторим все рассуждения, использовавшиеся при выводе граничного условия (1.83). При этом получается промежуточное равенство

$$\mathbf{B}_1\mathbf{v}_0\Delta S - \mathbf{B}_2\mathbf{v}_0\Delta S + \Phi^{м}_{бок} = 0,$$

где $\Phi^{м}_{бок}$ — поток вектора $\mathbf{B}$ через боковую поверхность цилиндра, исчезающий в пределе при $\Delta h \to 0$ (см. рис. 1.18*а*). Отсюда следует (1.86). ■

Тангенциальная компонента вектора $\mathbf{H}$ непрерывна только при отсутствии на границе поверхностного тока, а в общем случае справедливо граничное условие (см. рис. 1.18*б*)

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)\boldsymbol{\tau}_0 = \boldsymbol{\eta}\mathbf{n}_0. \tag{1.87}$$

Чаще применяется эквивалентное граничное условие

$$[\mathbf{v}_0, \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2] = \boldsymbol{\eta}. \tag{1.88}$$

ВЫВОД. Исходя из первого уравнения Максвелла в интегральной форме (1.53), выполним те же операции, что и при выводе (1.84). Рассмотрим промежуточный результат

$$\mathbf{H}_1\boldsymbol{\tau}_0\Delta l - \mathbf{H}_2\boldsymbol{\tau}_0\Delta l + C^{м}_{бок} = \frac{d}{dt}\int\limits_{\Delta P}\mathbf{D}\,d\mathbf{s} + \int\limits_{\Delta P}\mathbf{j}\,d\mathbf{s},$$

где $C^{м}_{бок}$ — вклад боковых участков контура BC и DA в циркуляцию $\mathbf{H}$, который исчезает при $\Delta h \to 0$. Одновременно исчезает первый из интегралов в правой части равенства. Второй же интеграл, выражающий полный ток проводимости, проходящий через ΔP, при $\boldsymbol{\eta} \neq 0$ не уничтожится. Когда при $\Delta h \to 0$ площадка ΔP вырождается в отрезок Δl,

$$I = \lim_{\Delta h \to 0}\int\limits_{\Delta P}\mathbf{j}\,d\mathbf{s} = \lim_{\Delta h \to 0}\mathbf{n}_0\Delta l\int\limits_{-\Delta h/2}^{\Delta h/2}\mathbf{j}(\nu)\,d\nu,$$

где ν — нормальная координата. По своему смыслу последний интеграл в пределе есть не что иное, как плотность поверхностного тока $\boldsymbol{\eta}$. Таким образом, $I = \boldsymbol{\eta}\mathbf{n}_0\Delta l$, и при $\Delta h \to 0$ мы получаем граничное условие (1.87).

Чтобы перейти к эквивалентному условию (1.88), заменим в (1.87) $\boldsymbol{\tau}_0$ через $[\mathbf{n}_0, \mathbf{v}_0]$ и перенесем $\boldsymbol{\eta}\mathbf{n}_0$ в левую часть. Таким образом: $(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)[\mathbf{n}_0, \mathbf{v}_0] - \boldsymbol{\eta}\mathbf{n}_0 = \{[\mathbf{v}_0, \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2] - \boldsymbol{\eta}\}\mathbf{n}_0 = 0$. Отсюда ввиду неопределенности $\mathbf{n}_0$ следует (1.88). ■

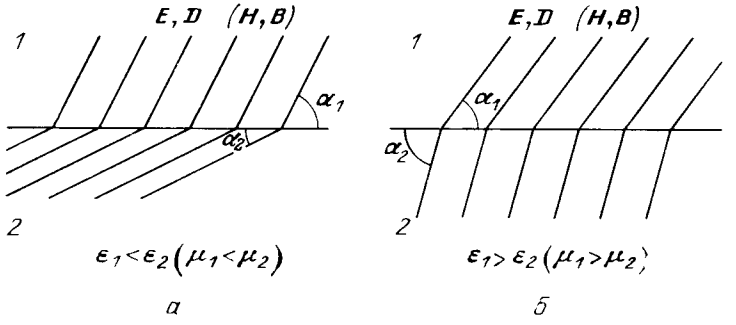
1.4.4. Некоторые следствия граничных условий (А). Рассмотрим несколько примеров применения граничных условий.

Пример 4. Пусть на границе раздела двух изотропных сред поверхностные заряды и токи отсутствуют. Поведение полей — электрического или магнитного — можно охарактеризовать при помощи картин преломления силовых линий, показанных на рис. 1.19. В одном случае (*а*) проницаемость $\varepsilon(\mu)$ второй среды выше, чем первой, а в другом (*б*) — ниже. Из полученных выше

граничных условий с привлечением материальных уравнений (1.67) и (1.68) следует, что $E_{\tau 1} = E_{\tau 2}$ ($H_{\tau 1} = H_{\tau 2}$) при $\varepsilon_1 E_{\nu 1} = \varepsilon_2 E_{\nu 2}$ ($\mu_1 H_{\nu 1} = \mu_2 H_{\nu 2}$). Поэтому

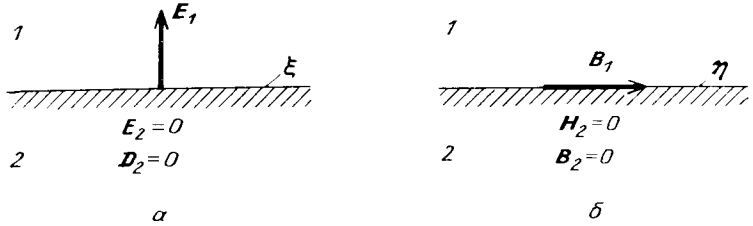
$$\operatorname{tg}\alpha_1/\operatorname{tg}\alpha_2 = \varepsilon_2/\varepsilon_1 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\alpha_1/\operatorname{tg}\alpha_2 = \mu_2/\mu_1. \blacksquare \tag{1.89}$$

Пример 5. Если граница раздела сред обладает свойством экранирования, так что поле в среде *1* может существовать, не проникая в среду *2* ($\mathbf{E}_2 = 0$ и $\mathbf{B}_2 = 0$), то из (1.84) следует, что $E_{\tau 1} = 0$, т. е. $\mathbf{E}_1$ подходит к границе



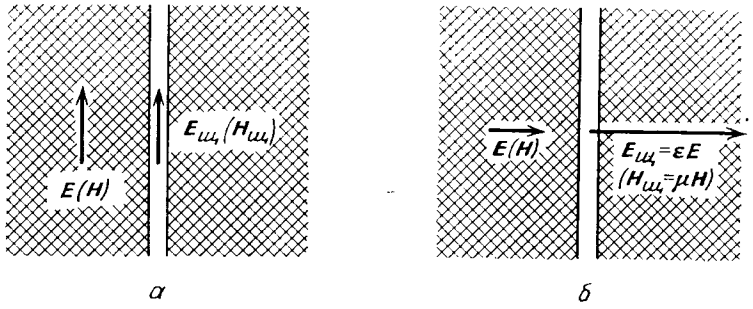
а *б*

Рис. 1.19



а *б*

Рис. 1.20



а *б*

Рис. 1.21

по нормали (рис. 1.20*а*), а из (1.86) получается, что $B_{\nu 1} = 0$ и потому вектор $\mathbf{B}_1$ направлен на границе касательно (рис. 1.20 *б*). Применяя, далее, граничные условия (1.83) и (1.88) с учетом того, что $\mathbf{D}_2 = 0$ и $\mathbf{H}_2 = 0$, получаем

$$D_{\nu 1} = \xi, \quad [\mathbf{v}_0, \mathbf{H}_1] = \eta. \tag{1.90}$$

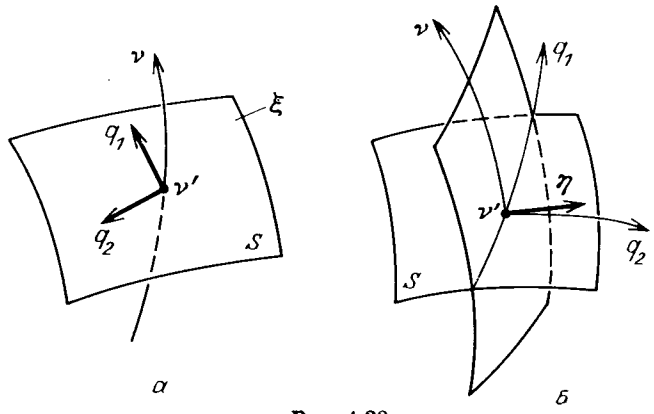
Мы видим, что существование поля в среде *1* при его отсутствии в среде *2* обусловлено поверхностными зарядами и токами. ■

Пример 6. Пусть в среде с высокой диэлектрической (магнитной) проницаемостью имеется узкая щель. Если в среде вектор E(H) параллелен щели, то согласно (1.84) и (1.87) при $\eta = 0$ следует, что напряженность поля в щели — та же, что и в среде (рис. 1.21*а*). Если же вектор E(H) перпендикулярен щели, то из (1.83) при $\xi = 0$ и из (1.86) с учетом материальных уравнений находим, что напряженность поля в щели (при изотропии среды) в $\varepsilon(\mu)$ раз больше (рис. 1.21*б*). ■

1.4.5. Применение дельта-функции Дирака (Б). Поверхностный заряд можно условно представить как объемный, который распределен с плотностью

$$\rho(\mathbf{r}) = \xi(q_1, q_2)\delta(\nu - \nu'), \tag{1.91}$$

где ξ — плотность поверхностного заряда на поверхности S, функция



а *б*

Рис. 1.22

координат q_1, q_2, заданных на этой поверхности; ν — нормальная координата, принимающая значение ν' при пересечении S (рис. 1.22*а*).

Аналогично можно рассматривать поверхностный ток, введя плотность (рис. 1.22*б*)

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \eta(q_1, q_2)\delta(\nu - \nu'). \tag{1.92}$$

§ 1.5. Локализация и движение энергии поля

1.5.1. Закон Джоуля — Ленца и превращения энергии (А). Поскольку электромагнитное поле физически реально, оно обладает энергией. После ряда рассуждений и операций над уравнениями Максвелла мы выясним, каким образом векторы поля E, H, D и B определяют его энергию W. Можно подойти к этому, начав с вопроса о превращениях энергии поля.

Известно, что при наличии электрического тока в реальной среде выделяется тепло. Зная плотность тока j и напряженность

поля **E**, нетрудно, как мы увидим, найти энергию, теряемую электромагнитным процессом за единицу времени, т. е. мощность тепловых потерь P. Оказывается, в объеме V расходуется мощность

$$P = \int_V \mathbf{j}\mathbf{E}\, dv. \tag{1.93}$$

Чтобы убедиться в справедливости записанного выражения, обратимся к простому варианту, который показан на рис. 1.15*а*. В этом случае применение формулы (1.93) дает:

$$P = \mathbf{j}\mathbf{E}V = jSlE = IU$$

(поле и ток внутри малого цилиндрического объема $V = Sl$ однородны, а величины I и U определяются также, как в п. 1.3.3). Как видно, полученное равенство эквивалентно закону Джоуля — Ленца, известному из курса общей физики. Таким образом, применение формулы (1.93) означает обращение к закону Джоуля — Ленца. По смыслу равенства (1.93) подынтегральное выражение

$$p = \mathbf{j}\mathbf{E} \tag{1.94}$$

есть не что иное, как *плотность мощности*, т. е. мощность, отнесенная к единице объема:

$$p = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta V}. \tag{1.95}$$

Полученные выражения мощности и ее плотности (1.93), (1.94) имеют универсальный характер. Они верны не только при расчете джоулевых потерь, но и сохраняют смысл во всех случаях, когда рассматриваются токи.

Пример 7. Согласно (1.45) на некоторый точечный заряд в электромагнитном поле действует сила $\mathbf{F} = q\{\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}]\}$. Выделив малый элемент ΔV заряженного объема, положим $q = \rho\Delta V$. При перемещении заряда совершается работа, которая для векторного дифференциала пути $\mathbf{dl}$ равна

$$dA = q\mathbf{E}\mathbf{dl} = \rho\mathbf{dl}E\Delta V$$

(лоренцева сила $q[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$, будучи поперечной, работы не производит). Связанная с ΔV мощность ΔP может быть определена как работа, произведенная за единицу времени:

$$\Delta P = dA/dt = \rho(dl/dt)E\Delta V = \rho vE\Delta V,$$

причем в силу (1.75) $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$. Определяя отсюда плотность мощности $p = \Delta P/\Delta V$, получаем: $p = \mathbf{j}\mathbf{E}$, что совпадает с (1.94). ■

Отметим, что в зависимости от направления движения зарядов величина p может быть как положительной, так и отрицательной. Заряды могут ускоряться полем. При этом $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$ параллельны, $p > 0$, и энергия у поля отбирается. Очевидно, что $p < 0$, если $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$ антипараллельны. Это будет, например, в том случае, когда движение зарядов против поля создается каким-то неэлектромагнитным, «сторонним» процессом, который отдает свою энергию полю, тормозящему заряды.

Описание неэлектромагнитных факторов, как говорят, *сторонних сил* в большинстве случаев сводится к изменению вида материального уравнения (1.69). Используется одна из следующих формализаций:

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{ст}}), \quad \mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} + \mathbf{j}^{\text{ст}}. \tag{1.96}$$

Введенные здесь функции $\mathbf{E}^{\text{ст}}$ и $\mathbf{j}^{\text{ст}}$ при решении электродинамических задач являются заранее заданными. Величина $\mathbf{E}^{\text{ст}}$ называется *напряженностью сторонних сил* (или просто *сторонней напряженностью*), а $\mathbf{j}^{\text{ст}}$ — *сторонним током*. Теперь мы можем детализировать выражение плотности мощности (1.94). Используя (1.96), имеем

$$p = \sigma^{-1}\mathbf{j}^2 - \mathbf{j}\mathbf{E}^{\text{ст}}, \quad p = \sigma\mathbf{E}^2 + \mathbf{j}^{\text{ст}}\mathbf{E} \tag{1.97}$$

(в одном случае $\mathbf{E}$ в (1.94) выражено при помощи первого равенства из (1.96), а в другом случае — $\mathbf{j}$ получено при помощи второго равенства). Таким образом, можно написать

$$p = p^{\text{п}} + p^{\text{ст}}, \tag{1.98}$$

где

$$p^{\text{п}} = \sigma^{-1}\mathbf{j}^2 = \sigma\mathbf{E}^2, \quad p^{\text{ст}} = -\mathbf{j}\mathbf{E}^{\text{ст}} = \mathbf{j}^{\text{ст}}\mathbf{E}. \tag{1.99}$$

Первый член $p^{\text{п}}$ характеризует поглощение, потери энергии электромагнитного процесса, а второй — $p^{\text{ст}}$ — действие сторонних сил. Сторонние силы обычно локализованы. Если, например, они сосредоточены в некоторой области $V^{\text{э}}$, то согласно первому равенству (1.96) $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}^{\text{ст}}$ в $V^{\text{э}}$ и $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ вне $V^{\text{э}}$. Будем называть $V^{\text{э}}$ *областью источника*.

Позднее мы еще не раз вернемся к обсуждению понятия сторонних сил. Интерпретация их будет несколько расширена.

1.5.2. Баланс энергии поля (А). Дальнейшее обсуждение будет опираться на уравнения Максвелла (1.49), (1.50). Все члены второго из них умножим на $\mathbf{H}$, а все члены первого — на $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\mathbf{H}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\mathbf{E}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{E}\mathbf{j}.$$

Вычтем левую и правую части второй строчки из соответствующих частей первой, тогда слева получим выражение $\mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} - \mathbf{E}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}$, которое мы свернем посредством формулы (1.26). В результате будем иметь

$$\mathrm{div}\,[\mathbf{E}, \mathbf{H}] = -\mathbf{H}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{j}\mathbf{E}. \tag{1.100}$$

Равенству (1.100) нетрудно придать интегральную форму. С этой целью проинтегрируем все его члены по некоторому объему V, ограниченному поверхностью S, а затем левую часть преобразуем на основании теоремы Остроградского — Гаусса (1.33):

$$\oint_S [\mathbf{E}, \mathbf{H}]\mathbf{ds} = -\int_V \left(\mathbf{H}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right) dv - \int_V \mathbf{j}\mathbf{E}\, dv. \tag{1.101}$$

Остается проанализировать полученный результат. После некоторых рассуждений мы увидим, что равенство (1.101) есть *уравнение баланса энергии поля в объеме V*.

Ключевым для нас является последний член справа в (1.101). Согласно (1.93) это мощность P, причем P будет рассматриваться как величина, характеризующая все процессы преобразования энергии в объеме V (ниже в п. 1.5.5 будет сделано уточнение). Разумеется, размерность мощности имеют и все остальные члены в (1.101).

Следующим важным моментом является тот факт, что для всякой энергетически изолированной системы уравнение баланса энергии имеет вид

$$P = -dW/dt, \tag{1.102}$$

где W — запас энергии. В частности, из (1.102) следует, что потери энергии ($P > 0$) могут происходить только в результате уменьшения этого запаса ($dW/dt < 0$).

Если граница S области V является энергетически изолирующей и при наличии поля внутри V оно отсутствует во внешней среде, то поверхностный интеграл в (1.101) равен нулю (это прямо следует из примера 5, с. 48 $E_\tau = 0$ на S). Таким образом, равенство (1.101) принимает вид

$$P = -\int_V \left(\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) dv, \tag{1.103}$$

и мы вправе истолковать его как уравнение баланса энергии для изолированной системы. Сопоставляя (1.103) и (1.102), имеем

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \left(\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) dv. \tag{1.104}$$

В результате определена временна́я производная запаса энергии.

Сохраняя интерпретацию (1.104) и переходя к общему случаю, запишем (1.101) в виде

$$\oint_S [\mathbf{E}, \mathbf{H}]\, \mathbf{ds} + \frac{dW}{dt} + P = 0. \tag{1.105}$$

Очевидно, что равенство (1.101) предстает как уравнение баланса энергии в области V, причем вследствие неизолированности системы появился дополнительный член в виде поверхностного интеграла

$$P^{\Sigma} = \oint_S [\mathbf{E}, \mathbf{H}]\, \mathbf{ds} \equiv \oint_S \mathbf{\Pi} \mathbf{ds}. \tag{1.106}$$

Величина P^{Σ} есть поток вектора

$$\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}] \tag{1.107}$$

через границу S области V. Он называется *вектором Пойнтинга*.

Поток P^{Σ} вектора Пойнтинга $\mathbf{\Pi}$ показывает, насколько внутренние процессы не уравновешены. Если, например, $P^{\Sigma} > 0$, то это означает потери энергии в области V из-за ее перехода во внешнее пространство. Если же $P^{\Sigma} < 0$, то энергия поступает в V извне. В обоих случаях абсолютная величина P^{Σ} есть не что иное, как энергия, проходящая через граничную поверхность S за единицу времени. Поэтому P^{Σ} называют *потоком энергии* через S. Положительный поток энергии равен, таким образом, *мощности излучения во внешнее пространство*, а отрицательный — *мощности поглощаемого внешнего излучения*.

Поскольку вообще поток вектора можно измерять числом векторных линий (см. п. 1.0.4), то, построив различные мыслимые картины линий вектора Пойнтинга $\mathbf{\Pi}$, мы получим наглядные иллюстрации разных вариантов баланса энергии (рис. 1.23). Баланс будем называть *активным*, когда $P^{\Sigma} > 0$, т. е. отдача энергии во внешнее пространство преобладает (*а*, *б*); согласно (1.105) при этом

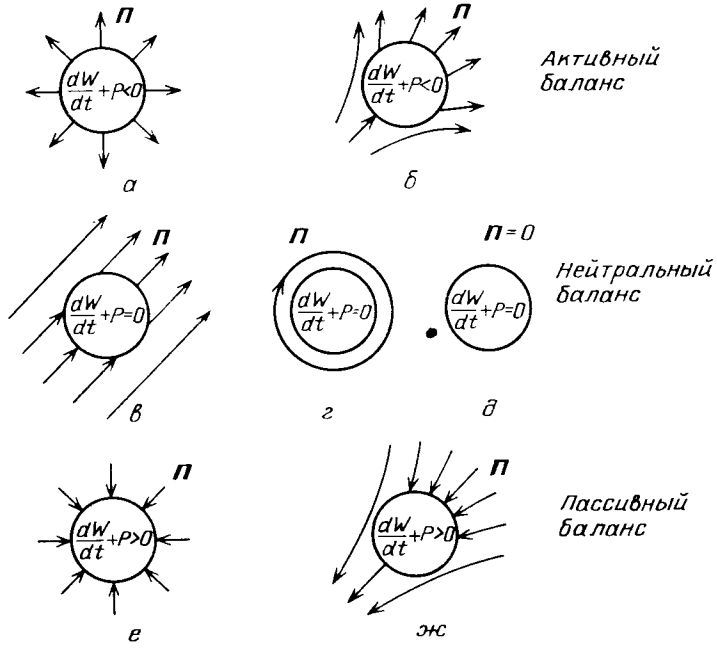


Рис. 1.23

$dW/dt + P < 0$. В случае чистого излучения (*а*) может оказаться, что внутренний запас энергии остается постоянным: $W = \text{const}$, тогда, как видно, $P^{\Sigma} = -P$. Поскольку $P^{\Sigma} > 0$, то $P < 0$: излучение создается сторонними силами в V (согласно (1.98) $P = P^{\text{п}} + P^{\text{ст}}$, и в случае отсутствия потерь $P^{\Sigma} = -P^{\text{ст}}$). Но возможно также, что

$P = 0$ (нет ни сторонних сил, ни внутренних потерь либо они взаимно уравновешены), тогда $P^{\Sigma} = -dW/dt$, а поскольку $P^{\Sigma} > 0$, то $dW/dt < 0$. Это значит, что излучение обусловлено убыванием запаса энергии в V. Варианты (*в*), (*г*) и (*д*) соответствуют условию: $P^{\Sigma} = 0$; это *нейтральный* баланс энергии. Поток энергии в данном случае может проходить насквозь (*в*), так что число входящих линий векторы Пойнтинга равно числу выходящих; он также может не входить в область V (*г*) или вообще отсутствовать (*д*). Наконец, возможен *пассивный* баланс, когда поглощение преобладает над излучением (*е*, *ж*). При чистом поглощении (*е*) и постоянстве внутреннего запаса энергии $P^{\Sigma} = -P$. Если же $P = 0$, то $P^{\Sigma} = -dW/dt$. Поскольку $P^{\Sigma} < 0$, то $dW/dt > 0$: поглощение внешнего излучения приводит к росту запаса энергии.

Пример 8. Рассмотрим поток энергии, проходящий через поверхность бесконечного цилиндрического провода с постоянным током I. В силу аксиальной симметрии системы для определения магнитного поля вплоть до поверхности провода ($r = R$) можно пользоваться формулой (1.58): $\mathbf{H} = \alpha_0 I/(2\pi R)$.

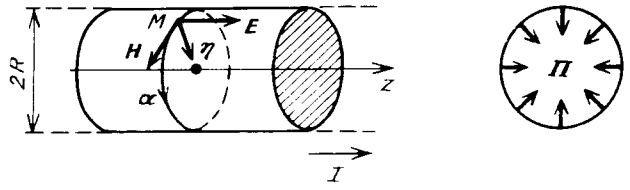


Рис. 1.24

Электрическое поле найдем из плотности тока $\mathbf{j}$ при помощи (1.69): $\mathbf{E} = \mathbf{j}/\sigma = \mathbf{z}_0 I/(\pi R^2 \sigma)$. Поэтому на поверхности провода (рис. 1.24)

$$\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}] = -\mathbf{r}_0 I^2/(2\pi^2 R^3 \sigma). \qquad (1.108)$$

Мы видим, что вектор Пойнтинга направлен внутрь провода. Значит, из внешнего пространства в провод входит поток энергии P^{Σ} (1.106). Вычислим P^{Σ} на участке провода длиной l. Это дает

$$\int_S \mathbf{\Pi} d\mathbf{s} = I^2 \mathcal{R}, \qquad (1.109)$$

где $\mathcal{R} = l/(\pi R^2 \sigma)$ есть электрическое сопротивление данного участка (см. п. 1.3.3). Входящий поток энергии равен мощности, поглощаемой согласно закону Джоуля — Ленца. ■

1.5.3. Энергия электромагнитного поля (А). Исходя из равенства (1.104), можно путем интегрирования определить энергию поля. При некоторых оговорках, которые будут сделаны в п. 1.5.5, справедливы следующие операции:

$$\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}^2}{2}\right),$$

$$\mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mu_0 \mu \mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mu_0 \mu \mathbf{H}^2}{2}\right).$$

Это значит, что операцию дифференцирования по времени можно в (1.104) вынести за знак интеграла. В результате запас энергии в области V выражается следующим образом:

$$W = \frac{1}{2}\int_V (\varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}^2 + \mu_0 \mu \mathbf{H}^2)\, dv = \frac{1}{2}\int_V (\mathbf{ED} + \mathbf{HB})\, dv. \qquad (1.110)$$

Как видно, энергия слагается из двух частей, одна из которых связана с электрическим полем, а другая — с магнитным. Поэтому пишут $W = W^{э} + W^{м}$, различая *магнитную энергию*

$$W^{м} = \frac{\mu_0}{2}\int_V \mu \mathbf{H}^2 dv = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{HB}\, dv \qquad (1.111)$$

и *электрическую энергию*

$$W^{э} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \varepsilon \mathbf{E}^2 dv = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{ED}\, dv. \qquad (1.112)$$

Подынтегральное выражение в (1.110) есть не что иное, как *плотность энергии электромагнитного поля*:

$$w = \lim_{\Delta V \to 0}\frac{\Delta W}{\Delta V} = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 \varepsilon E^2 + \mu_0 \mu H^2) = \frac{1}{2}(\mathbf{ED} + \mathbf{HB}). \qquad (1.113)$$

Слагаемые имеют смысл плотностей электрической и магнитной энергии: $w = w^{э} + w^{м}$ ($w^{м}$ и $w^{э}$ — подынтегральные выражения из (1.111) и (1.112) соответственно).

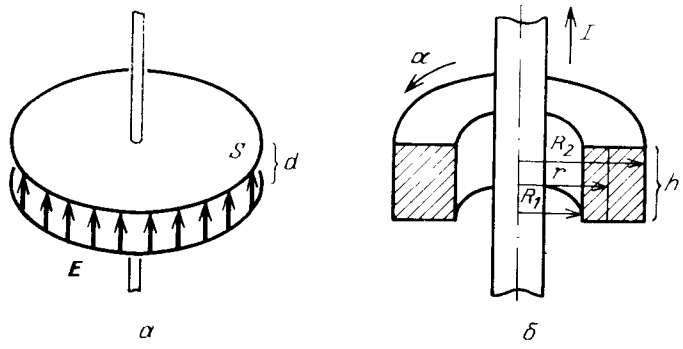


Рис. 1.25

Пример 9. Допустим, что электрическое поле в объеме между пластинами конденсатора (рис. 1.25*а*) однородно ($\mathbf{E} = \text{const}$). В этом приближении

$$W^{э} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \varepsilon \mathbf{E}^2 dv = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2}\mathbf{E}^2 S d = \frac{CU^2}{2}, \qquad (1.114)$$

где $U = Ed$ и $C = \varepsilon_0 \varepsilon S/d$. ■

Пример 10. Найдем магнитную энергию внутри тороидальной системы (рис. 1.25 *б*), совмещенной с бесконечным цилиндрическим проводом, по которому проходит постоянный ток I. Ввиду аксиальной симметрии всей системы магнитное поле внутри кольца находится по формуле (1.58). Вычисляя интеграл (1.111), получаем

$$W^{\text{м}} = \frac{\mu_0}{2}\int\limits_V \mu H^2 dv = \frac{\mu_0\mu}{2} h \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{R_1}^{R_2} \left(\frac{I}{2\pi r}\right)^2 r dr d\alpha = \frac{\mathscr{L} I^2}{2}, \qquad (1.115)$$

где $\mathscr{L} = \frac{\mu_0\mu h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$. ■

1.5.4. Локальный баланс и движение энергии (А). Если допустить, что поток вектора Пойнтинга P^{Σ} через любую, а не только замкнутую поверхность (как в п. 1.5.2) представляет собой поток энергии через эту поверхность, то $\mathbf{\Pi}$ следует истолковать как *плотность потока энергии*:

$$\mathbf{\Pi} = \lim_{\Delta S \to 0} \boldsymbol{\pi}_0 \frac{\Delta P^{\Sigma}}{\Delta S}. \qquad (1.116)$$

В этой формуле $\boldsymbol{\pi}_0$ — единичный вектор, указывающий направление движения энергии, ΔS — ортогонально ориентированная площадка, ΔP^{Σ} — количество энергии, проходящей за единицу времени через ΔS.

Рекомендуется сопоставить формулы (1.116) и (1.42). Повторение структуры неслучайно: существует аналогия между энергетическими величинами, с одной стороны, и зарядами и токами — с другой. Так, в частности, рассматривая движение энергии, мы можем повторить все рассуждения, которые привели к формуле (1.75), и получить следующий ее энергетический аналог:

$$\mathbf{\Pi} = w\mathbf{v}. \qquad (1.117)$$

Здесь $\mathbf{v}$ — *скорость движения энергии*, которая, как видно, всегда может быть найдена, если известно поле и по формулам (1.107), (1.113) найдены $\mathbf{\Pi}$ и w.

Вернемся к равенству (1.100), переписав его в виде

$$\operatorname{div}\mathbf{\Pi} + \frac{\partial w}{\partial t} + p = 0. \qquad (1.118)$$

Если $p = 0$, то (1.118) совпадает по структуре с дифференциальной формулировкой закона сохранения заряда (1.44). Полной аналогии нет, потому что в отличие от заряда q энергия электромагнитного поля не сохраняется: она переходит в другие виды энергии, порождается ими.

Равенство (1.118) есть *уравнение баланса энергии в дифференциальной форме*. Оно характеризует локальный баланс энергии. Если в исчезающе малой окрестности некоторой точки баланс активен, то $\partial w/\partial t + p < 0$ и в силу (1.118) $\operatorname{div}\mathbf{\Pi} > 0$. При пассивном балансе $\partial w/\partial t + p > 0$ и $\operatorname{div}\mathbf{\Pi} < 0$, а при нейтральном $\partial w/\partial t + p = 0$ и $\operatorname{div}\mathbf{\Pi} = 0$. Вспоминая смысл оператора дивергенции (см. п. 1.0.4), мы видим, что при активном балансе рассматриваемая точка является источником линий вектора Пойнтинга, при пассивном балансе — стоком, а при нейтральном — лежит на некоторой линии вектора Пойнтинга.

1.5.5. Заключительные замечания (Б). Начнем с анализа сделанных нами допущений. В п. 1.5.2 мы предположили, что все процессы преобразования энергии характеризуются величиной P, определяемой формулой (1.93). Это, в частности, означает, что если нет токов проводимости ($\mathbf{j} = 0$), то не может быть ни потерь энергии, ни действия сторонних сил. На самом деле потери энергии свойственны также процессам поляризации и намагничивания (хотя часто этими потерями можно пренебрегать). Если отказаться от сделанного допущения, то для изолированной системы из (1.101) и (1.102) уже нельзя получить (1.104).

С этим тесно связан следующий вопрос. Почему не всегда верны действия, выполненные в начале п. 1.5.3? Дело в том, что в этих действиях были вынесены за знак оператора $\partial/\partial t$ проницаемости ε и μ, а это допустимо только в случае безынерционной среды. В дальнейшем — при изучении гармонических колебаний (§ 3.2, 3.3) — мы сможем учесть инерционность процессов поляризации и намагничивания. Соответствующие потери энергии будут рассматриваться.

Следующее замечание затрагивает интерпретацию величин $\mathbf{\Pi}$ и w (см. пп. 1.5.2—1.5.4). Рассмотренная трактовка вектора Пойнтинга $\mathbf{\Pi}$ как плотности потока энергии (1.107) и величины w (1.113) — как плотности энергии отвечает современным физическим воззрениям (базируется на совокупности известных фактов). Но вытекает ли она с необходимостью из уравнений электродинамики? На этот вопрос приходится ответить отрицательно. Построим, например, вектор $\mathbf{\Pi} + \mathbf{F}$, где $\mathbf{F}$ — любая соленоидальная функция ($\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$). Поскольку величина $\mathbf{\Pi} + \mathbf{F}$ может быть подставлена вместо $\mathbf{\Pi}$ в (1.101), (1.105) и будет удовлетворять этим уравнениям, на вопрос о том, какова в действительности плотность потока энергии, нет ответа. Аналогично можно говорить о подстановке в (1.118) $w + \text{const}$ вместо w.

Заметим еще, что действия в п. 1.5.3 были проведены в предположении, что среда изотропна. В случае анизотропии выводы сохраняются, когда тензоры $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\mu}$ симметричны: $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$, $\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy}$ ... .

В заключение отметим, что вся информация об электромагнитном поле получена в результате наблюдения и осмысления превращений его энергии в иные формы (табл. 1.3). Ведь непосредственно мы «не замечаем» полей, если не говорить о световых и тепловых воздействиях, информативность которых незначительна. Начало было

положено наблюдением электромеханических превращений, что в конечном счете привело к представлению о векторных функциях

Таблица 1.3

Энергетические величины в теории электромагнетизма

Название величины	Обозначение	Единица измерения в СИ	
Энергия электромагнитного поля	W	*Джоуль*	[Дж]
Электрическая энергия	$W^э$	*Джоуль*	[Дж]
Магнитная энергия	$W^м$	*Джоуль*	[Дж]
Мощность	P	*Ватт*	[Вт]
Мощность поглощения (мощность потерь)	$P^п$	*Ватт*	[Вт]
		Ватт	[Вт]
Мощность сторонних сил (мощность источника)	$P^{ст}$	*Ватт*	[Вт]
Плотность энергии электромагнитного поля	w	*Джоуль на кубический метр*	[Дж/м³]
Плотность электрической энергии	$w^э$	*Джоуль на кубический метр*	[Дж/м³]
Плотность магнитной энергии	$w^м$	*Джоуль на кубический метр*	[Дж/м³]
Плотность мощности	p	*Ватт на кубический метр*	[Вт/м³]
Плотность мощности сторонних сил	$p^{ст}$	*Ватт на кубический метр*	[Вт/м³]
Плотность мощности поглощения	$p^п$	*Ватт на кубический метр*	[Вт/м³]
Поток энергии	$P^Σ$	*Ватт*	[Вт]
Плотность потока энергии	Π	*Ватт на квадратный метр*	[Вт/м²]

E и B. Выше мы не обсуждали специфические особенности различных превращений энергии, например, электрохимических, фото- и термоэлектрических, и многих других, используемых в технике. Однако были выяснены и проанализированы закономерности, свойственные всем видам превращений энергии.

§ 1.6. Система уравнений и задачи электродинамики (А)

1.6.1. Система уравнений Максвелла. Объединяя уравнения Максвелла (1.49)—(1.52) и материальные уравнения, мы получаем полную систему уравнений электродинамики, или *систему уравнений Максвелла*. Как уже отмечалось в п. 1.3.6, материальные уравнения (1.67)—(1.69) в большинстве случаев достаточны (впрочем, последнее из них лучше писать в более общей форме (1.96), учитывая, когда это требуется, действие сторонних сил). Запишем,

таким образом, систему уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, && \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ &\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho, && \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \\ &\mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}, && \mathbf{B} = \mu_0\mu\mathbf{H}, \\ &\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{ст}) \text{ или } \mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} + \mathbf{j}^{ст}, \end{aligned} \tag{1.119}$$

которую будем рассматривать как основу анализа всевозможных электромагнитных процессов.

Круг этих процессов весьма широк, и он может неограниченно увеличиваться при замене материальных уравнений, входящих в (1.119), более общими, либо иногда уравнениями специального вида, пригодными в отдельных случаях. В частности, уравнения электродинамики могут при этом объединяться с другими уравнениями математической физики. Так, например, можно учесть зависимость параметров ε, μ и σ от температуры. Но тогда в группу материальных уравнений придется включить уравнение теплопроводности, являющееся, в свою очередь, уравнением в частных производных (см., например, [И.1]). Распределение тепловых источников даст функция $p^п$ (1.99), так что уравнение теплопроводности окажется связанным с уравнениями Максвелла.

Если среда линейна, то линейны все уравнения, входящие в систему уравнений Максвелла (1.119). Это значит, что любые линейные комбинации решений системы (1.119) также будут являться ее решениями. Очевидно некоторое решение представляет собой набор величин $\mathbf{E}_i$, $\mathbf{H}_i$, $\mathbf{D}_i$, $\mathbf{B}_i$, $\mathbf{j}_i$, ρ_i, при которых все уравнения удовлетворяются. Пусть имеется несколько решений: $i = 1, 2, \ldots, n$. Их линейная комбинация — это набор сумм: $\mathbf{E} = a_1\mathbf{E}_1 + a_2\mathbf{E}_2 + \ldots + a_n\mathbf{E}_n$, $\mathbf{H} = a_1\mathbf{H}_1 + a_2\mathbf{H}_2 + \ldots + a_n\mathbf{H}_n$ и т. д., где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — произвольные коэффициенты. В силу линейности системы уравнений Максвелла (при линейности среды) мы вновь получили ее решение, использовав, как говорят, *принцип суперпозиции* (*наложения*). Поскольку в линейные комбинации входят и величины, выражающие сторонние силы ($\mathbf{E}^{ст}$ или $\mathbf{j}^{ст}$), то можно утверждать, что поле, создаваемое несколькими источниками, предстает как наложение полей, существующих при раздельном действии источников.

Разумеется, принцип суперпозиции не распространяется на величины, связанные с полем нелинейно, например, на энергетические характеристики. Если электрическое поле есть наложение двух полей, так что $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$, то его энергия есть

$$W^э = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \varepsilon E^2 dv = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \varepsilon E_1^2 dv + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \varepsilon E_2^2 dv + \varepsilon_0\int_V \varepsilon \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 dv.$$

Как видно сумма первых двух членов, представляющих собой энергию первого и второго полей $W_1^э + W_2^э$, еще не является суммар-

ной энергией, которая включает еще *взаимную энергию* $W_{12}^{э}$ (последний член). Закон сохранения энергии, конечно, не нарушается, поскольку в баланс энергии входит работа сторонних сил.

1.6.2. Задачи электродинамики и классы электромагнитных явлений. Электромагнитные поля находятся как решения уравнений (1.119), однако не всякое решение этой системы дает электромагнитное поле. При постановке задач вводятся еще некоторые дополнительные условия, сообщающие им *физическую определенность*. Таковы *начальные* и *граничные условия*, задание сторонних сил. Под начальными условиями понимают задание поля в некоторый момент времени; в дальнейшем мы будем рассматривать, главным образом, такие переменные процессы, которые являются периодическими во времени. В этом случае вопрос о постановке начальных условий отпадает. Под граничными условиями подразумеваются не только изученные выше в § 1.4 соотношения между нормальными и тангенциальными компонентами векторов поля на границах раздела сред, но и задание полей на внешних границах рассматриваемых областей.

Из системы уравнений Максвелла (1.119) можно получить некоторые частные системы уравнений, описывающие классы явлений электромагнетизма. Например, устранив все члены с временны́ми производными, мы будем иметь *систему уравнений стационарного электромагнитного поля* (она будет выписана в начале гл. 2), которая, в свою очередь, при отсутствии токов ($\mathbf{j}=0$) распадается на две независимые системы уравнений: *уравнения электростатики* и *магнитостатики*. Уравнения (1.119) с исключением временно́й зависимости оказывается возможным записать и для *гармонических* во времени процессов, когда поля изменяются по закону $\cos(\omega t+\varphi)$.

Переменные во времени электромагнитные поля, имеющие характер волн, составляют главный предмет этой книги. Они имеют особое значение для радиотехники. Мы рассмотрим излучение электромагнитных волн, различные сложные волновые процессы, такие как, в частности, дифракция. Большое значение будет придаваться общности электродинамических и оптических понятий. Электромагнитные волновые процессы, активно используемые в радиоэлектронике, весьма многообразны — от своеобразных по структуре направляемых волн в волноводных устройствах и интегральных схемах до радиоволн, распространяющихся в природных условиях. Все они будут обсуждаться в этой книге.

Почти весь материал книги относится к *макроскопической* электродинамике. Все же — с классических позиций — будут затронуты и некоторые вопросы *микроскопической* электродинамики, поскольку они важны для радиоэлектроники. Будут обсуждаться модели различных сред, например, ионосферной плазмы и ферритов.

В этой книге не рассматривается электродинамика как физическая теория, связанная с анализом пространства и времени. Электродинамика движущихся объектов в начале XX века привела к созданию *специальной теории относительности А. Эйнштейна*. Ограничимся напоминанием некоторых фактов, известных читателю из курса общей физики. Согласно *принципу относительности* законы природы одинаковы во всех инерциальных системах (относительное движение которых равномерно и прямолинейно). Переход от одной инерциальной системы к другой связан с преобразованием пространственных координат и времени,— *преобразованиями Лоренца*. Законы природы должны описываться уравнениями, инвариантными относительно преобразований Лоренца. Этим свойством не обладают законы Ньютона, но оно присуще уравнениям Максвелла. Сохраняется вид этих уравнений. Что касается электромагнитного поля, то в разных системах координат оно оказывается разным. Положим, что в некоторой инерциальной системе координат отмечено существование магнитного поля ($\mathbf{B}\neq 0$), а электрическое поле отсутствует ($\mathbf{E}=0$). При этом наблюдатель в другой системе, движущейся относительно первой с постоянной скоростью v, обнаружит электрическое поле. Действительно, на неподвижный во второй системе пробный заряд q будет действовать сила $\mathbf{F}$, которая равна $q[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$, но наблюдатель припишет действие силы на заряд электрическому полю (заряд неподвижен); напряженность его будет равна $\mathbf{E}'=\mathbf{F}/q$. Этот простой пример, конечно, еще не дает представления о том, как преобразуются векторы поля при переходе от одной инерциальной системы координат к другой. Но этот вопрос выходит за пределы данного курса.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Вывести формулу (1.48) для случая прямоугольной рамки с током, показанной на рис. 1.26*а*. С этой целью рассмотреть действие лоренцевой силы (рис. 1.26*б*).

2. Проверить размерность соотношений (1.45) и (1.48).

3. Записать уравнения Максвелла (1.49)—(1.52) в координатной форме, спроецировав векторы на оси некоторой системы координат. Рассмотреть случаи декартовой системы координат, цилиндрической и сферической.

4. Пусть вектор $\mathbf{E}$ некоторого гармонически колеблющегося электромагнитного поля везде направлен одинаково (например, по оси z). Показать, что вектор $\mathbf{B}$ ему перпендикулярен.

5. Положим, что электрическое поле внутри конденсатора, представленного на рис. 1.10, однородно ($\mathbf{E}=\text{const}$), а ток I в цепи равен $I_m\cos\omega t$. Показать, что внутри конденсатора

$$\mathbf{E}=(I_m/\omega\varepsilon\varepsilon_0 S)\sin\omega t.$$

6. Следует ли из (1.51), что всегда $\operatorname{div}\mathbf{E}=\rho/\varepsilon_0\varepsilon$?

7. Всегда ли соленоидальна векторная функция $\mathbf{H}$?

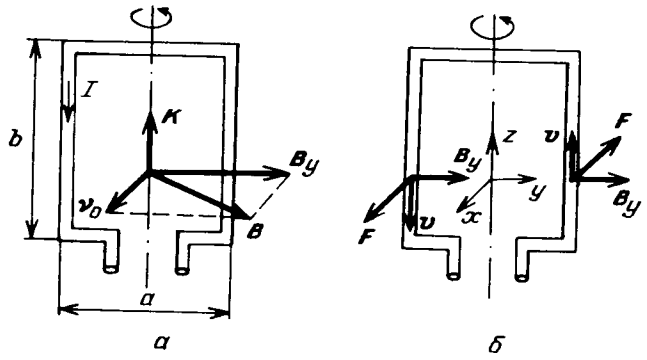
8. Для кристаллического кварца $\varepsilon_{xx}=\varepsilon_{yy}=4{,}55$ и $\varepsilon_{zz}=4{,}49$, а прочие компоненты $\check{\varepsilon}$ равны нулю. При каких направлениях векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ сохраняют (не сохраняют) параллельность?

9. Вывести и проанализировать уравнение $\rho+(\varepsilon_0\varepsilon/\sigma)\partial\rho/\partial t=0$, которому подчинена плотность заряда (1.120). Объяснить его решение.

10. Почему влажная почва (см. табл. 1.2) может проявлять себя и как проводник, и как диэлектрик? Указать соответствующие условия.

11. Для каких процессов вектор плотности тока **j** сохраняет непрерывность нормальной компоненты?

12. Вектор E ортогонален экранирующей границе (см. пример 5, с. 48). Обладает ли этим свойством вектор **D**?



а *б*

Рис. 1.26

13. Сопоставить два типа формализации сторонних сил в (1.96) и, другой стороны, употребление понятий «генератора тока» и «генератора напряжения».

14. Показать, что запас энергии изолированной системы изменяется по закону $W(t) = W(0)e^{-\alpha t}$, если эта величина пропорциональна **мощности потерь**. Что такое α?

15. При $P = 0$ внутри изолированной системы $\mathbf{H} = \mathbf{H}_m \cos \omega t$. Показать, что это возможно при $\mathbf{E} = \pm \mathbf{E}_m \sin \omega t$, где $E_m = H_m \sqrt{\mu_0 \mu / \varepsilon_0 \varepsilon}$.

16. Записать систему уравнений Максвелла относительно напряженностей поля (исключив индукции).

Глава 2

СТАТИЧЕСКИЕ, СТАЦИОНАРНЫЕ И КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ПОЛЯ

§ 2.0. Используемые математические понятия и символы

2.0.1. Градиент длины направленного отрезка (А). В дальнейшем мы не раз будем рассматривать переменное расстояние между двумя точками P и Q (рис. 2.1), характеризуемыми своими радиус-векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$. Последние представим в декартовой системе координат с началом 0: $\mathbf{r} = \mathbf{x}_0 x + \mathbf{y}_0 y + \mathbf{z}_0 z$ и $\mathbf{r}' = \mathbf{x}_0 x' + \mathbf{y}_0 y' + \mathbf{z}_0 z'$. Тогда длина направленного отрезка $\overrightarrow{QP} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ есть $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$, и мы можем определить градиент этого скаляра, пользуясь формулой (1.14),

$$\operatorname{grad} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \mathbf{r}_{0q} \qquad (2.1)$$

(символом $\mathbf{r}_{0q}$ обозначен орт с направлением $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$). Расстояние $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ фигурирует здесь как функция положения точки P при фиксированной точке Q.

Но можно также фиксировать точку P и рассматривать $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ в качестве функции координат x', y', z'. Вычисляя градиент по этим координатам, получаем

$$\operatorname{grad}' |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = -(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = -\mathbf{r}_{0q} \qquad (2.2)$$

(штрих, отмечающий операцию векторного анализа, мы будем использовать в тех случаях, когда дифференцирование производится по штриховым координатам).

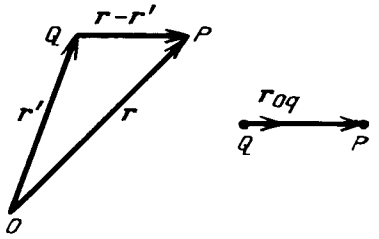


Рис. 2.1

В дальнейшем встретятся такие скалярные функции от $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, как $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ и $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-2}$. Вычисляя для них grad или grad′, следует использовать формулу (1.28) вместе с (2.1) или (2.2).

2.0.2. Операции векторного анализа в криволинейных координатах (А). Криволинейные ортогональные координаты и относящиеся к ним величины будем обозначать в соответствии с табл. 2.1. Напомним, что метрические коэффициенты (коэффициенты Ламэ) участвуют в соотношениях вида $dl_i = h_i dq_i$, где dq_i — дифференциал координаты, а dl_i — дифференциал длины по данной координате. В табл. 2.2 введенные символы конкретизированы для двух наиболее распространенных координатных систем — сферической (рис. 2.2*а*) и цилиндрической (рис. 2.2*б*). Смысл метрических коэффициентов

Таблица 2.1

Криволинейные ортогональные системы координат: обозначения

Номер	1	2	3
Координата	q_1	q_2	q_3
Орт	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
Метрический коэффициент	h_1	h_2	h_3

понятен из рисунка. Отметим, что орты по угловым координатам в этой книге обозначаются так же, как и углы (например, орт ϑ_0 для координаты ϑ); это единичные векторы, направленные по касательной к соответствующим дугам в сторону возрастания углов.

Запишем формулы, выражающие операции векторного анализа в криволинейных ортогональных координатах:

$$\operatorname{grad} \varphi = \mathbf{e}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + \mathbf{e}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} + \mathbf{e}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3}, \qquad (2.3)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{F}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{\frac{\partial(h_2h_3F_1)}{\partial q_1}+\frac{\partial(h_3h_1F_2)}{\partial q_2}+\frac{\partial(h_1h_2F_3)}{\partial q_3}\right\}, \tag{2.4}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}=\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1/h_2h_3 & \mathbf{e}_2/h_3h_1 & \mathbf{e}_3/h_1h_2 \\ \partial/\partial q_1 & \partial/\partial q_2 & \partial/\partial q_3 \\ h_1F_1 & h_2F_2 & h_3F_3 \end{vmatrix}. \tag{2.5}$$

Подставив в (2.4) в качестве F_i компоненты градиента из (2.3),

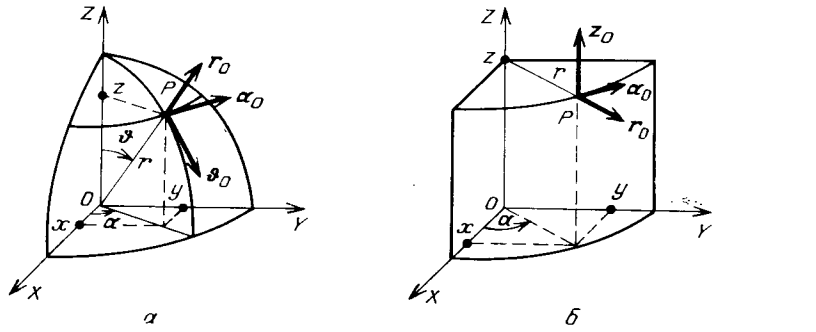


Рис. 2.2

получаем выражение $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi\equiv\nabla^2\varphi$ (см. п. 1.0.4). Таким образом, применение оператора Лапласа к скалярной функции дает

$$\nabla^2\varphi=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\right)\right\}. \tag{2.6}$$

Формулы (2.3)—(2.6) легко конкретизируются в сферических и цилиндрических координатах при помощи табл. 2.2.

Таблица 2.2

Конкретные криволинейные координаты *)

	Сферические координаты			Цилиндрические координаты		
i	1	2	3	1	2	3
q_i	r	ϑ	α	r	α	z
$\mathbf{e}_i$	$\mathbf{r}_0$	ϑ_0	α_0	$\mathbf{r}_0$	α_0	$\mathbf{z}_0$
h_i	1	r	$r\sin\vartheta$	1	r	1

*) На рис. 2.2 обе криволинейные системы координат показаны вместе с декартовой системой (X, Y, Z); последняя указывает начало отсчета углов; как видно (*а*), $h_2=r$ есть радиус дуги ϑ, а $h_3=r\sin\vartheta$ — радиус дуги α, проходящей через точку P; аналогично (*б*) $h_2=r$ есть радиус дуги α.

2.0.3. Уравнение Пуассона (Б). Это название употребляют для уравнения

$$\nabla^2u(\mathbf{r})=f(\mathbf{r}), \tag{2.7}$$

где функция в правой части задана.

При интегрировании уравнения Пуассона используется *функция Грина*

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}')=-\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \tag{2.8}$$

являющаяся решением частного вида уравнения (2.7), когда в правой части в качестве $f(\mathbf{r})$ взята дельта-функция Дирака (см. п. 1.0.6):

$$\nabla^2G(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{2.9}$$

Используя вторую формулу Грина (1.36) и формулу (1.40), а также симметричность функции Грина (2.8) относительно аргументов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$, из (2.7) и (2.9) нетрудно получить следующее важное соотношение:

$$u(\mathbf{r})=\int_V G(\mathbf{r},\mathbf{r}')f(\mathbf{r}')\,dv'+\oint_S\left[u(\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial\nu'}G(\mathbf{r},\mathbf{r}')-G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial\nu'}u(\mathbf{r}')\right]ds' \tag{2.10}$$

(интегрирование производится по штрихованным переменным).

Рассматривая уравнение Пуассона в неограниченной области, выделим класс задач, решения которых при $r\to\infty$ убывают не медленнее, чем $1/r$. Такие решения называются *регулярными в бесконечности*. В этом случае из (2.10) следует

$$u(\mathbf{r})=\int_V G(\mathbf{r},\mathbf{r}')f(\mathbf{r}')\,dv'=-\frac{1}{4\pi}\int_V\frac{f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dv' \tag{2.11}$$

(поверхностный интеграл в (2.10) при удалении S в бесконечность исчезает). Итак, получены решения уравнения Пуассона (2.7).

Для векторного уравнения Пуассона

$$\nabla^2\mathbf{u}(\mathbf{r})=\mathbf{f}(\mathbf{r}) \tag{2.12}$$

при аналогичных ограничениях

$$\mathbf{u}(\mathbf{r})=-\frac{1}{4\pi}\int_V\frac{\mathbf{f}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dv' \tag{2.13}$$

(уравнение (2.12) можно спроецировать на оси декартовой системы координат, в результате чего получаются три скалярных уравнения типа (2.7)).

2.0.4. Уравнение Лапласа и краевые задачи (Б). Однородное уравнение

$$\nabla^2u(\mathbf{r})=0, \tag{2.14}$$

соответствующее уравнению Пуассона при $f(\mathbf{r})=0$, называется *уравнением Лапласа*, а его решения — *гармоническими функциями*.

Обычно ставятся так называемые *краевые* (*граничные*) *задачи* для уравнения Лапласа, в которых требуется найти решение (2.14)

в некоторой области V, удовлетворяющее заданным условиям на ее граничной поверхности S. Различают *внутренние* и *внешние* задачи. В первом случае V — некоторый внутренний объем (рис. 2.3*а*, *б*, *в*). Во втором — область V бесконечна (рис. 2.3*д*, *е*, *г*).

Нередко рассматриваются *задачи Дирихле*

$$\nabla^2 u = 0, \qquad u = f \text{ на } S \tag{2.15}$$

и *задачи Неймана*

$$\nabla^2 u = 0, \qquad \partial u/\partial \nu = f \text{ на } S. \tag{2.16}$$

Для того и другого типа краевых задач можно исследовать проблему единственности решения. Предположим, что внутренняя задача

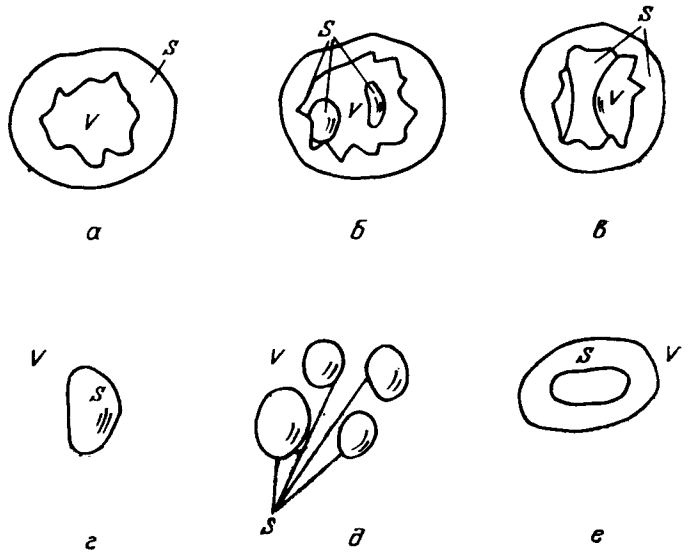


Рис. 2.3

Дирихле имеет два разных решения u_1 и u_2. Составим их разность $u_1 - u_2 = \delta$ и, взяв первую формулу Грина (1.35), положим $\varphi = \psi = \delta$. Поскольку $\nabla^2\delta = 0$, формула Грина принимает вид

$$\int_V (\nabla\delta)^2 dv = \oint_S \delta \frac{\partial\delta}{\partial\nu}\, ds. \tag{2.17}$$

При этом на S согласно (2.15) $u_1 = f$ и $u_2 = f$ (оба решения удовлетворяют одному и тому же граничному условию), так что $\delta = 0$ и поверхностный интеграл исчезает. Поэтому равен нулю и объемный интеграл слева, а с ним $\nabla\delta = 0$ в V. Это значит, что δ может быть только постоянным. Но $\delta = 0$ на поверхности S. Потому $\delta = 0$

в объеме V, т. е. $u_1 = u_2$. Задача не имеет двух решений. Этот вывод распространяется и на внешнюю задачу Дирихле, если оставаться в классе решений, регулярных в бесконечности (см. п. 2.0.3).

По этой же схеме можно исследовать и другие краевые задачи.

§ 2.1. Стационарное поле, электростатика и магнитостатика (А)

2.1.1. Система уравнений стационарного электромагнитного поля. Если электромагнитное поле неизменно во времени, то система уравнений Максвелла (1.119) принимает вид

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, && \operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j},\\ &\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho, && \operatorname{div}\mathbf{B} = 0,\\ &\mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}, && \mathbf{B} = \mu_0\mu\mathbf{H},\\ & && \mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{ст}}). \end{aligned} \tag{2.18}$$

В левом столбце собраны величины, характеризующие электрическое поле, а в правом — магнитное. Связующим звеном является материальное уравнение в нижней строчке. Записанная система уравнений характеризует электромагнитное поле, связанное с постоянным током. Можно было бы также записать интегральные аналоги уравнений, входящих в систему (2.18), которые вытекают из (1.53) — (1.56).

Если ток отсутствует ($\mathbf{j} = 0$), то левый и правый столбцы уравнений в (2.18) — это две независимые системы.

2.1.2. Система уравнений и общие понятия электростатики. Рассматривая неизменное во времени электрическое поле при отсутствии токов ($\mathbf{j} = 0$), мы получаем из (2.18), как уже отмечалось, независимую систему уравнений:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{D} = \rho, \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}. \tag{2.19}$$

Это *система уравнений электростатики*. Электрические поля, удовлетворяющие системе уравнений (2.19), будем называть *электростатическими*. Запишем также интегральные аналоги первых двух уравнений (2.19), получаемые из (1.54), (1.55):

$$\oint_L \mathbf{E}\,\mathbf{dl} = 0, \quad \oint_S \mathbf{D}\,\mathbf{ds} = q. \tag{2.20}$$

Являются ли «настоящие» электростатические поля вполне реальными? Поскольку в природе все среды обладают некоторой электропроводностью ($\sigma \neq 0$), иными словами, нет идеальных диэлектриков, то при существовании электрического поля ($\mathbf{E} \neq 0$) условие $\mathbf{j} = 0$ в строгом смысле невыполнимо в силу материального уравнения (1.69). Так, например, заряженные предметы в воздухе постепенно теряют свой заряд из-за «утечки»; при этом существует ток, а поле изменяется во времени.

Ясно также, что идеальное электростатическое поле вообще не могло бы быть обнаружено. Такое поле лишено всякого энергообмена, поскольку $\mathbf{H} = 0$ и, следовательно, $\mathbf{\Pi} = 0$. В широко известных опытах с заряженными предметами о существовании поля судят по динамическим процессам, чуждым идеальной электростатике. На самом деле притягивающиеся или отталкивающиеся заряженные тела при своем движении создают ток, которому обязательно сопутствует магнитное поле, так что $\mathbf{\Pi} \neq 0$. Только поэтому возможно превращение энергии поля в механическую, что и наблюдается.

Несмотря на то, что идеальные электростатические поля в природе отсутствуют, решения системы уравнений электростатики (2.19) дают очень хорошие приближения для широкого круга явлений, рассматриваемых на практике как электростатические. Дело в том, что при медленных перемещениях заряженных тел или в случае утечки токи оказываются настолько малыми, что энергия сопутствующего магнитного поля может считаться пренебрежимой по сравнению с электрической. Электрическое поле при этом, практически, не отличается от электростатического.

Поскольку в силу (2.18) $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$, электростатическое поле называют *безвихревым*, или *потенциальным* (см. п. 1.0.4). Поэтому можно написать:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi, \tag{2.21}$$

где φ — некоторая скалярная функция, называемая *электростатическим потенциалом* (напоминаем тождество (1.22), согласно которому поля вида (2.21), действительно, безвихревые). Знак минус в (2.21) соответствует принятому определению потенциала.

Каков физический смысл функции φ? Рассмотрим перемещаемый в электростатическом поле точечный заряд q (его движение может быть как угодно медленным) и вычислим работу, совершаемую им при движении на пути l от точки M_1 до точки M_2:

$$A = q\int_{M_1}^{M_2}\mathbf{E}\,d\mathbf{l} = -q\int_{M_1}^{M_2}\operatorname{grad}\varphi\,d\mathbf{l}. \tag{2.22}$$

Раскроем подынтегральное выражение, учитывая формулы (1.3), (1.14) и (1.15):

$$\operatorname{grad}\varphi\,d\mathbf{l} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = d\varphi.$$

Это полный дифференциал функции φ. Таким образом, из (2.22) получаем

$$A = -q\int_{M_1}^{M_2} d\varphi = q(\varphi_1 - \varphi_2). \tag{2.23}$$

Смысл полученного результата состоит в том, что совершенная работа равна разности потенциалов в начальной и конечной точках пути, умноженной на величину заряда. Из (2.22) и (2.23) непосредственно следует

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{M_1}^{M_2}\mathbf{E}\,d\mathbf{l}. \tag{2.24}$$

Это своего рода обращение равенства (2.21).

Как видно, первый из интегралов (2.20) в силу выражения (2.22) означает, что в электростатическом поле при перемещении заряда по замкнутому пути работа не производится. Пусть, например, движение заряда совершается по пути $M_1mM_2nM_1$ (рис. 2.4). Так как полная работа равна нулю, то, следовательно, участки M_1mM_2 и M_2nM_1 дают противоположные вклады. Поэтому работа на пути M_1mM_2 будет такой же, как на пути M_1nM_2. Мы видим, что работа не зависит от пути. О том же говорит и ранее полученный результат (2.23): работа определяется только положением начальной и конечной точек пути.

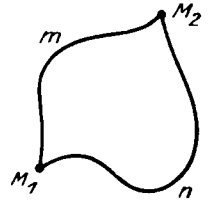


Рис. 2.4

Итак, физический смысл имеет разность потенциалов. Это работа, производимая единичным точечным зарядом ($q = 1$) при перемещении между двумя точками, потенциалы которых рассматриваются. Что касается самого потенциала φ, то это функция, которая определена только с точностью до константы. Действительно, если вместо φ внести в (2.21) $\varphi + \text{const}$, то вычисляемая напряженность поля $\mathbf{E}$ останется прежней. Если нужно устранить эту неопределенность, то задаются условным значением потенциала в некоторой точке пространства (т. е. на всей поверхности $\varphi = \text{const}$, проходящей через эту точку). Если принять равным нулю потенциал бесконечно удаленных точек, то из (2.24) следует

$$\varphi = \int_{M}^{\infty}\mathbf{E}\,d\mathbf{l}. \tag{2.25}$$

При таком определении потенциал φ равен работе, совершаемой в процессе удаления единичного положительного точечного заряда из точки M (для которой он определяется) в бесконечность.

С математической точки зрения, φ есть вспомогательная скалярная функция, вполне определяющая векторное поле. Вместо трех скалярных функций, являющихся компонентами вектора $\mathbf{E}$, достаточно определить одну функцию φ, чтобы, воспользовавшись затем соотношением (2.21), найти напряженность электрического поля $\mathbf{E}$. Поэтому задачи электростатики в большинстве случаев формулируют относительно потенциала φ. Заменив $\mathbf{D}$ во втором уравнении (2.19) через $\mathbf{E}$, используя третье уравнение, а $\mathbf{E}$ представив через φ при помощи формулы (2.21), получаем

$$\varepsilon_0 \operatorname{div}\varepsilon\operatorname{grad}\varphi = -\rho. \tag{2.26}$$

Это уравнение электростатики относительно неизвестного потенциала φ при заданной плотности заряда ρ. Если среда однородна, то $\varepsilon = \text{const}$ выносится за знак оператора дивергенции, что приводит к весьма распространенному *уравнению Пуассона:*

$$\nabla^2\varphi = -\rho/\varepsilon\varepsilon_0. \tag{2.27}$$

Его решение для случая неограниченной среды можно сразу выписать на основании формулы (2.11):

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int\limits_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dv' \tag{2.28}$$

(ниже в п. 2.2.5 мы рассмотрим также элементарный вывод этого результата).

Положив в (2.27) $\rho = 0$, получаем *уравнение Лапласа*

$$\nabla^2\varphi = 0, \tag{2.29}$$

которому удовлетворяет φ в областях, где отсутствует заряд.

Отметим, что из (2.19) можно было бы получить векторные уравнения Пуассона и Лапласа относительно **E**. Они будут вытекать из более общих уравнений, к которым мы придем в п. 3.1.2.

Пример 1. Вычислим потенциал φ в случае точечного заряда, зная его поле. Внося выражение (1.64) для **E** в (2.25), получаем

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int\limits_r^\infty \frac{dl}{l^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}, \tag{2.30}$$

Путь интегрирования выбран для простоты радиальным: от некоторой точки $P(\mathbf{r})$ до бесконечности (под интегралом переобозначено: $r \to l$). Если перенести заряд q из точки $r = 0$ в некоторую точку $Q(\mathbf{r}')$, то расстоянием станет величина $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ (см. рис. 2.1), так что

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \tag{2.31}$$

как следует из (2.30) при замене $r \to |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$. ■

Сколько-нибудь сложные задачи электростатики обычно сводят к нахождению решений уравнений Пуассона или Лапласа в виде потенциала φ. Но в некоторых простых случаях напряженность поля **E** находится непосредственно. Как уже отмечалось (см. 1.64) для точечного заряда:

$$\mathbf{D} = \mathbf{r}_0 q/4\pi r^2. \tag{2.32}$$

Для бесконечной равномерно заряженной нити с погонной плотностью заряда τ:

$$\mathbf{D} = \mathbf{r}_0\tau/2\pi r. \tag{2.32а}$$

Действительно, если для такой нити построить коаксиальную цилиндрическую поверхность радиуса r, то поток вектора **D** через нее

на участке l будет $DS = 2\pi rlD$ (в силу симметрии силовые линии ортогональны S и $D = \text{const}$ на S), а находящийся внутри заряд есть $q = \tau l$. Поэтому (2.32) следует из (1.55).

Формулы (2.32) применяются в случаях, когда рассматриваемый объект обладает того же рода симметрией, что заряженная точка или, соответственно, нить. Поясним, как это делается.

Пример 2. Пусть дан равномерно заряженный диэлектрический шар (рис. 2.5). Из соображений симметрии ясно, что как и в случае точечного заряда, здесь линии вектора **D** — радиальные прямые, причем на сфере любого

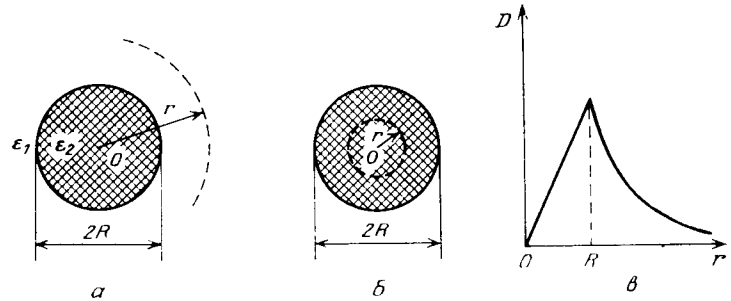


Рис. 2.5

радиуса **D** = const. Поэтому верна формула (2.32), где под q надо понимать заряд, находящийся внутри сферы текущего радиуса. Если определяется поле вне заряженного шара (рис. 2.5*а*), то внутри сферы радиуса r лежит полный заряд шара $q = \rho V = 4\pi R^3\rho/3$. Если же точка наблюдения — внутри шара (рис. 2.5*б*), то в качестве q в ту же формулу подставляем только часть полного заряда $4\pi r^3\rho/3$. В результате получаем

$$\mathbf{D} = \mathbf{r}_0\frac{R^3\rho}{3r^2},\ r \geqslant R, \quad \mathbf{D} = \mathbf{r}_0\frac{r\rho}{3},\ r \leqslant R. \tag{2.33}$$

График **D**($\mathbf{r}$) представлен на рис. 2.5*в*. Как видно, эта величина внутри шара линейно возрастает, а вне его падает, как $1/r^2$. Поскольку диэлектрические проницаемости шара и внешней среды различны ($\varepsilon_2 \neq \varepsilon_1$), напряженность **E** на его поверхности терпит разрыв.

Изменим условие. Пусть теперь только поверхность шара S несет заряд $q = \xi S = 4\pi R^2\xi$ ($\xi = \text{const}$). Симметрия сохраняется, и можно по-прежнему пользоваться первой формулой (2.32). Если $r < R$, то внутри сферы текущего радиуса заряда нет: $q = 0$. Поле отсутствует. Вне шара ($r > R$) поле определяется при подстановке в качестве q полного заряда. Отсюда на поверхности шара $\mathbf{D} = \mathbf{r}_0\xi$. Полученный результат совпадает с первым из равенств (1.90). Он имеет тот же смысл. ■

Применение (2.32а) см. в упражнении 1.

2.1.3. Магнитостатика. При «расщеплении» системы уравнений (2.18) в случае $\mathbf{j} = 0$ получается также система уравнений магнитостатики:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{B} = \mu_0\mu\mathbf{H}. \tag{2.34}$$

Сравнивая системы (2.19) и (2.33), можно утверждать, что при сопоставимых средах класс решений последней более беден. Маг-

нитные заряды отсутствуют, так что линии вектора **B** не могут обрываться.

Магнитостатические поля подобно электростатическим лишены энергообмена: $\mathbf{\Pi} = 0$.

Запишем также интегральные аналоги первых двух уравнений из (2.34), которые получаются из (1.53) и (1.56):

$$\oint_L \mathbf{H}\,d\mathbf{l} = 0, \quad \oint_S \mathbf{B}\,d\mathbf{s} = 0. \tag{2.35}$$

Как и в электростатике, можно ввести (с точностью до аддитивной константы) вспомогательную функцию ψ и писать:

$$\mathbf{H} = -\operatorname{grad}\psi. \tag{2.36}$$

Легко убедиться, что *магнитостатический потенциал* ψ удовлетворяет уравнению, аналогичному (2.26), но однородному:

$$\operatorname{div}\mu \operatorname{grad}\psi = 0, \tag{2.37}$$

которое для однородной среды ($\mu = \text{const}$) переходит в *уравнение Лапласа*

$$\nabla^2\psi = 0. \tag{2.38}$$

К классу магнитостатических надо отнести и поля постоянных магнитов, но в этом случае налицо *самопроизвольная намагниченность* (см. выше п. 1.3.6) и материальное уравнение в третьей строчке (2.34) нужно писать в форме $\mathbf{B} = \mu_0\mu\mathbf{H} + \mathbf{M}_0$ (1.79), где $\mathbf{M}_0$ не зависит от **H**. При такой замене из (2.34) и (2.36) вместо (2.37) получим

$$\mu_0 \operatorname{div}\mu \operatorname{grad}\psi = \operatorname{div}\mathbf{M}_0. \tag{2.39}$$

Если же $\mu = \text{const}$, то (2.39) переходит в *уравнение Пуассона*

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{\mu_0\mu}\operatorname{div}\mathbf{M}_0. \tag{2.40}$$

На основании (2.11)

$$\psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\mu_0\mu}\int_V \frac{\operatorname{div}\mathbf{M}_0(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dv'. \tag{2.41}$$

Следует, однако, иметь в виду, что металлы и керамические материалы, обладающие самопроизвольной намагниченностью, относятся к нелинейным средам, описание которых усложняется еще тем, что требуется учитывать предысторию процесса. Поэтому полученные формулы имеют лишь очень ограниченное применение.

§ 2.2. Электростатические поля

2.2.1. Системы зарядов (А). Если задана система точечных зарядов или параллельных заряженных нитей, то полное поле легко находится сложением полей, описываемых формулами (2.32) и (2.32а). Пусть заряды (нити) локализованы в точках $Q(\mathbf{r}_i)$; в случае нитей имеются в виду их следы в поперечной плоскости. Тогда в (2.32) делается замена: $\mathbf{r} \to |\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|$ и $\mathbf{r}_0 \to \mathbf{r}_{0i} = (\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^{-1}$. Однако чаще удобно сначала определять потенциал системы зарядов, а поле находить потом.

В случае системы точечных зарядов на основании (2.31) имеем

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}. \tag{2.42}$$

Рассмотрим сначала систему двух равных по абсолютной величине, но противоположных по знаку зарядов (рис. 2.6*а*). Пусть $q_1 = -q$ и $q_2 = q$. Тогда

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|} - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}\right). \tag{2.43}$$

Если такая система рассматривается на больших расстояниях (по сравнению с ее размерами), то она называется *диполем*. При этом вводится *электрический момент* диполя

$$\mathbf{p} = q\mathbf{l}, \tag{2.44}$$

где $\mathbf{l} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ — направленный отрезок, соединяющий заряды. Анализируя диполь, удобно размещать начало координат на середине отрезка l (рис 2.6*б*).

Обычно вводят представление об *идеальном диполе*, «дипольной точке». Эта полезная абстракция есть результат перехода к пределу

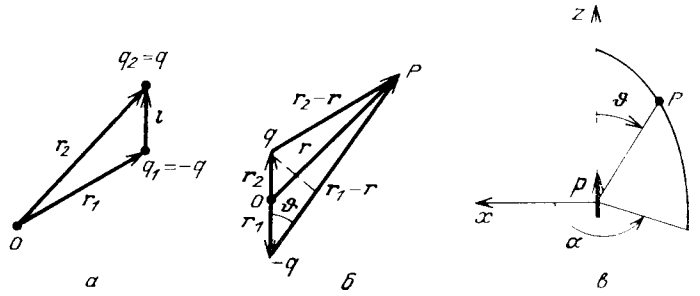


Рис. 2.6

при $l \to 0$ с сохранением величины момента: $\mathbf{p} = \text{const}$. Таким образом, вычисляя φ по формуле (2.43), имеем

$$\varphi(\mathbf{r}) = \lim_{l\to 0}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1| - |\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|}, \qquad ql = \text{const}. \tag{2.45}$$

Из рис. 2.6*б* видно, что при этом $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1| \to r$, $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2| \to r$ и $q(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1| - |\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|) \to ql\cos\vartheta = \mathbf{p}\mathbf{r}_0$. В результате

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{ql\cos\vartheta}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} = \frac{\mathbf{p}\mathbf{r}_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}. \tag{2.46}$$

Используя сферическую систему координат, как показано на рис. 2.6*в*, вычислим напряженность поля $\mathbf{E}$ на основании (2.21). При этом воспользуемся формулой (2.3) и табл. 2.2. Внося (2.46) в (2.21), записываем:

$$\mathbf{E} = -\frac{ql}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\mathbf{r}_0\frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{\vartheta}_0\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)\frac{\cos\vartheta}{r^2}$$

(третий член выпадает, так как φ не зависит от $q_3 = \alpha$). Это дает

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^3}(\mathbf{r}_0 2\cos\vartheta + \boldsymbol{\vartheta}_0\sin\vartheta). \qquad (2.47)$$

На рис. 2.7 [1]) представлены картины силовых линий двух точечных зарядов, равных по абсолютной величине, в двух масштабах. Заряды имеют одинаковые знаки (*а*) и противоположные (*б*). Таким образом, на рис. 2.7*б* (справа) дается представление о поле диполя.

Аналогичные картины силовых линий в случае заряженных нитей даны на рис. 2.8.

Будем, далее, исследовать систему произвольного числа зарядов, поставив условие, чтобы расстояние от любого заряда до точки наблюдения значительно превышало наибольшее расстояние между отдельными зарядами системы. При вычислении потенциала (2.42) разложим в ряд входящие в каждый член суммы функции расстояния:

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\mathbf{r}\mathbf{r}_i + r_i^2}} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}_i}{r^2} + \ldots\right)$$

(члены высшего порядка малости опущены). Поэтому из (2.42) следует

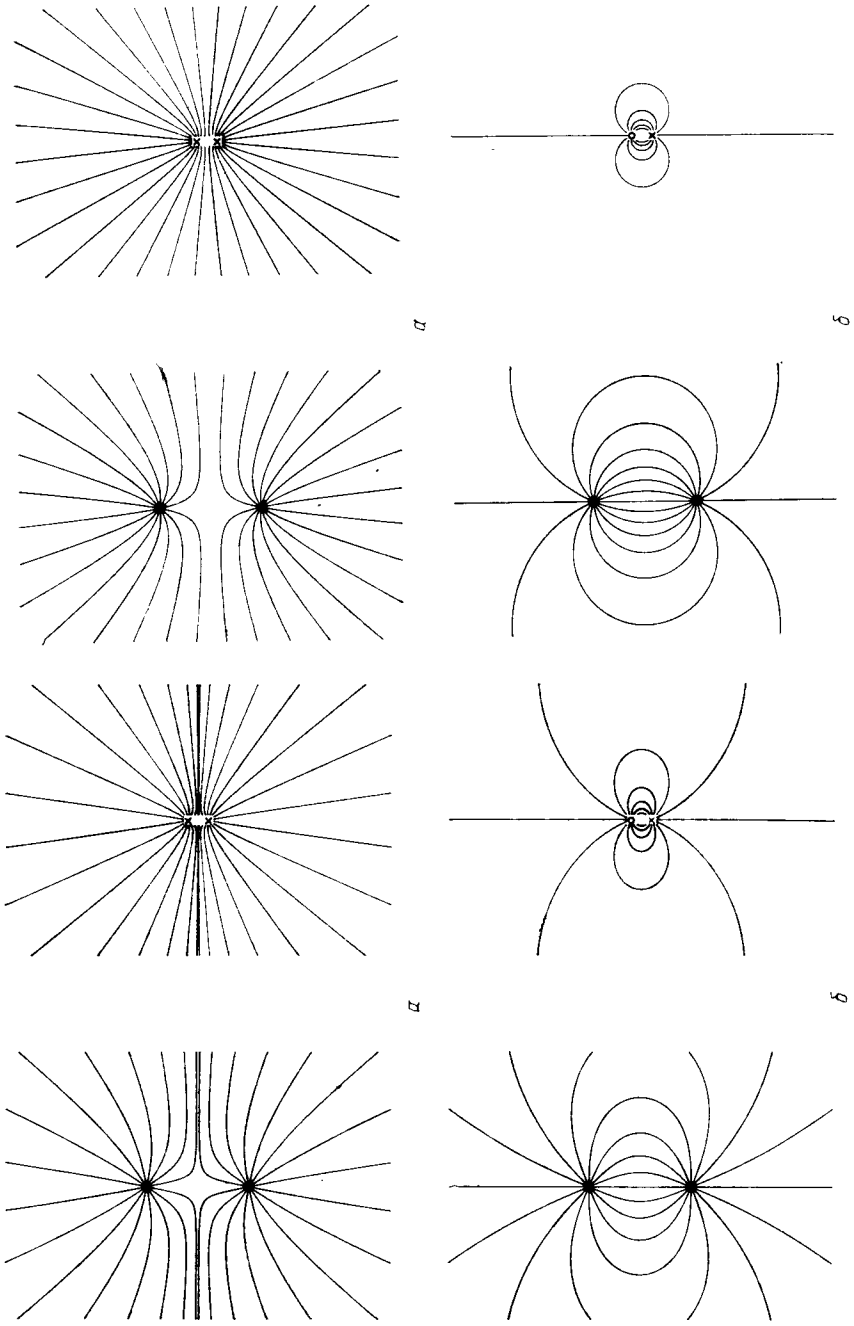
$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r} + \frac{\mathbf{P}\mathbf{r}_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} + \ldots, \qquad (2.48)$$

где

$$Q = \sum_i q_i \quad \text{и} \quad \mathbf{P} = \sum_i q_i\mathbf{r}_i. \qquad (2.49)$$

Смысл полученного результата весьма прозрачен. Первый член справа в (2.48) есть не что иное, как потенциал точечного заряда, величина которого — алгебраическая сумма всех зарядов. Если эта сумма Q (2.49) не равна нулю, то на достаточно больших расстояниях вторым членом в (2.48) можно пренебречь. В этом случае система зарядов из области наблюдения предстает как точечный заряд Q. Если же $Q = 0$, или, как говорят, система зарядов *нейтральна*,

[1]) Символом ЭВМ в тексте будут обозначаться рисунки, выполненные при помощи ЭВМ (см. Приложение, с. 538).



а *б*

Рис. 2.8. (ЭВМ)

а *б*

Рис. 2.7. (ЭВМ)

то потенциал на больших расстояниях определяется вторым членом разложения (2.48). Сопоставляя его с выражением (2.46), видим, что это потенциал диполя с моментом **P** (2.49). Система проявляет себя как диполь.

Заметим, что вторая из формул (2.49) есть общее выражение для электрического момента нейтральной системы. В частном случае двух зарядов отсюда следует выражение (2.44).

Обратимся теперь к рис. 2.9, на котором в двух масштабах представлены картины силовых линий системы трех зарядов. В одном варианте (*а*) величины зарядов (слева направо) соотносятся как +6, −1 и −2. Видно, что с удалением от системы поле становится радиальным. В другом варианте (*б*) система нейтральна при следующем соотношении величин зарядов: +6, −2, −4. В этом случае поле на больших расстояниях явно приобретает дипольный характер.

На рис. 2.10 аналогичные картины силовых линий построены для системы трех заряженных нитей. Соотношения расстояний и зарядов (в данном случае в виде погонных плотностей) прежние.

2.2.2. Проводники в электростатике (А). Электростатические поля не существуют в проводящих средах. Всякому электрическому полю в проводнике сопутствует ток $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$. Поскольку в электростатике ток отсутствует и на поверхностях проводящих тел, оказывается равной нулю тангенциальная компонента вектора **E**. Отсутствие любой из компонент вектора **E** внутри проводящего объема V и на его поверхности S означает, в свою очередь, неизменность электростатического потенциала φ. Можно написать

$$\varphi = \text{const} \qquad (2.50)$$

в объеме V и на поверхности S, проводящие тела *эквипотенциальны*.

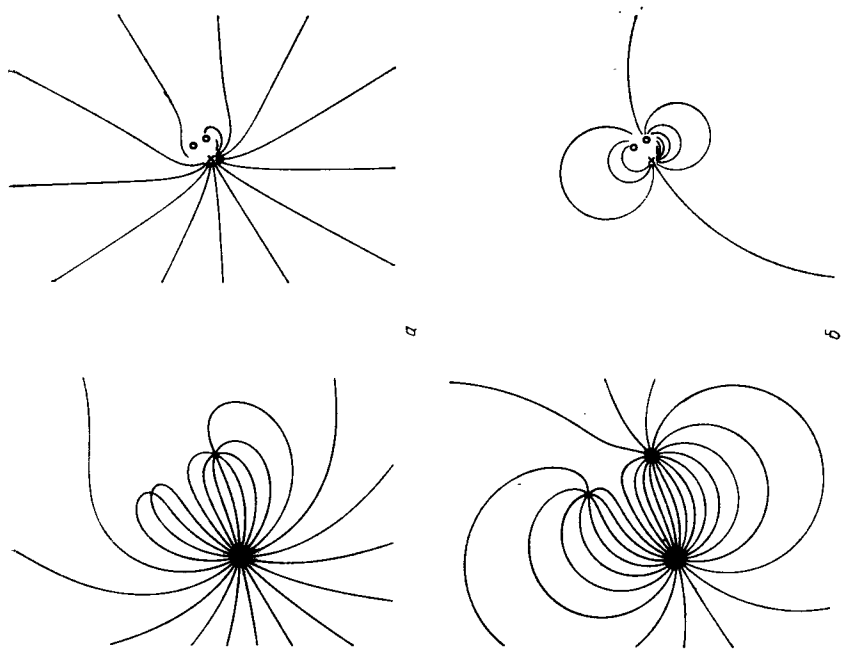
Однажды мы уже рассматривали границу раздела двух сред, внутри одной из которых поле отсутствует (см. пример 5 в гл. 1). Оказалось, что на такой границе

$$E_\tau = 0, \quad D_\nu = \xi, \qquad (2.51)$$

т. е. отсутствует тангенциальная компонента вектора **E**, а вектор **D** имеет одну нормальную компоненту, равную плотности поверхностного заряда. Теперь очевидно, что этот вывод относится к проводникам в электростатике. Именно их поверхности оказываются заряженными.

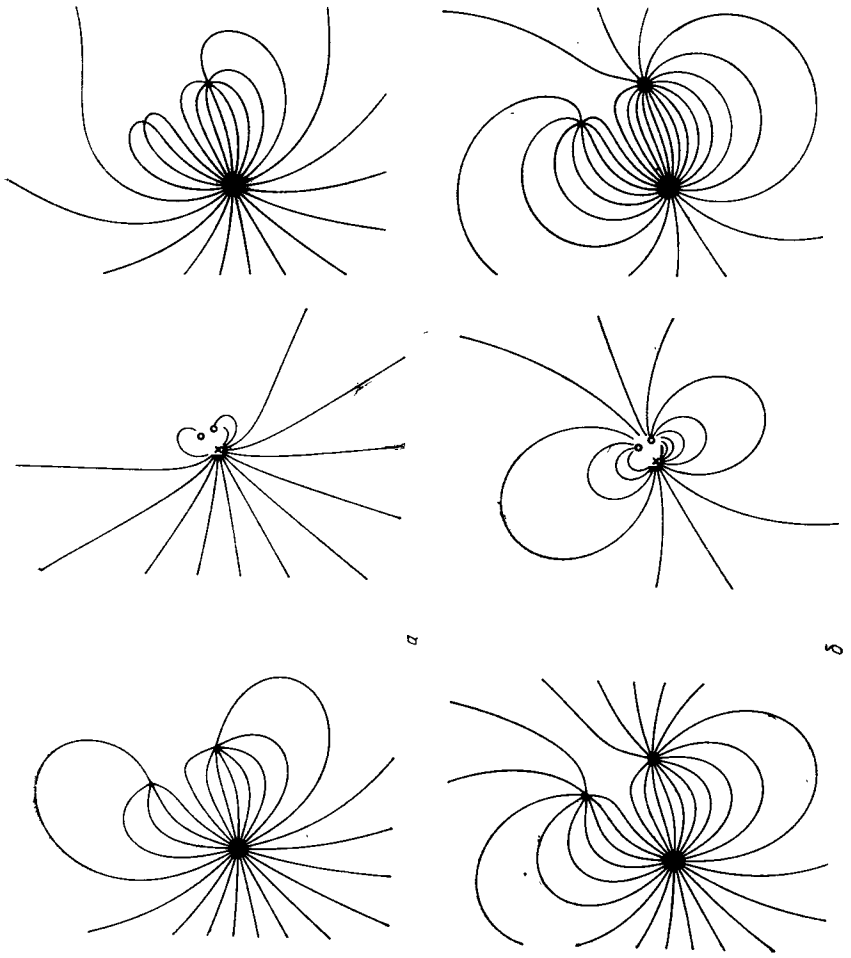
Обсуждавшиеся свойства проводников являются следствием подвижности зарядов. В процессе установления равновесия они «расталкиваются» полем и оказываются на поверхности проводника, занимая в конечном счете такие положения, что внутреннее поле нейтрализуется.

В общем случае распределение заряда на проводнике заранее неизвестно. Но, например, проводящий шар (в отсутствие влияющих предметов) заряжается равномерно: $\xi = \text{const}$, что соответствует симметрии задачи. Заметим, что выше в п. 2.1.2 (конец второго



а *б*

Рис. 2.10. (ЭВМ)



а *б*

Рис. 2.9. (ЭВМ)

примера) был рассмотрен, как это теперь ясно, именно проводящий шар).

Полный заряд проводящего тела в электростатическом поле может, в частности, быть равным нулю, однако отсюда отнюдь не следует, что везде на поверхности проводника $\xi = 0$; последнее означало бы с учетом (2.51), что поля нет. Пусть, например, незаряженный проводящий цилиндр вносится в однородное электростатическое поле. С учетом сохранения заряда полный заряд цилиндра так и останется равным нулю. Но поле должно деформироваться таким образом, чтобы силовые линии оказались ортогональными проводящей поверхности (рис. 2.11). А это и означает, что вообще $\xi \neq 0$. Как видно, величина ξ меняет знак; интегрирование подтверждает, что «наведенный» поверхностный заряд действительно равен нулю в целом. Появление заряда под действием поля называют *электростатической индукцией*.

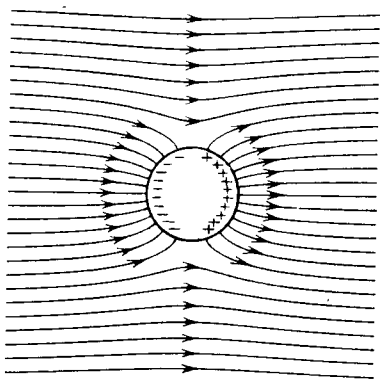


Рис. 2.11

В электродинамике нередко рассматривается задача о совокупности проводящих тел, потенциалы которых известны. Она формулируется как следующая *краевая задача для уравнения Лапласа*:

$$\nabla^2\varphi = 0, \qquad \varphi = \Phi_i \text{ на } S_i \tag{2.52}$$

(S_i — поверхности проводников, Φ_i — заданные на них потенциалы). Эта *задача Дирихле* имеет единственное решение (см. п. 2.0.4). Можно показать, что единственное решение будет иметь и по-другому сформулированная краевая задача, в которой вместо потенциалов Φ_i задаются полные заряды проводников q_i. После того как потенциал φ, а затем и поле найдены, становится известным распределение заряда на каждом проводнике. Оно складывается в результате взаимного влияния — электростатической индукции — всех проводников.

Пример 3. Рассмотрим влияние точечного заряда на проводящую плоскость. Поле при наличии этой плоскости показано на рис. 2.12*а*. Оно оказывается таким, как если бы кроме исходного заряда q действовало также его «изображение» — q. Действительно, поле в верхнем полупространстве удовлетворяет в этом случае условию $E_\tau = 0$, и плоскость — эквипотенциальна. Желая определить плотность наведенного заряда ξ, найдем сначала $\mathbf{E}$ на S (рис. 2.12*б*). При этом складываются поля двух точечных зарядов: действительного и фиктивного, «отраженного». В результате получаем

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v}_0 2\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}\cos\vartheta = -\mathbf{v}_0\frac{qh}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r^3}. \tag{2.53}$$

Отсюда $\xi = \varepsilon_0\varepsilon E$. Вычислим полный заряд q', наведенный на плоскости. Обозначая $R = \sqrt{r^2 - h^2}$, пишем:

$$q' = \int\limits_{S\to\infty} \xi\, ds = -\frac{qh}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{r^3}\,R\,dR\,d\alpha = -\frac{qh}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_h^{\infty}\frac{dr\,d\alpha}{r^2} = -q.$$

Если рассматриваемая плоскость — это одна из двух сторон проводящего слоя, который был первоначально не заряжен, то на другой его стороне появится противоположный поверхностный заряд q. ■

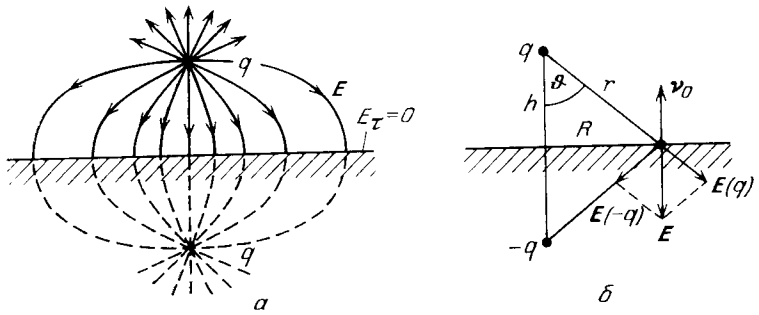


Рис. 2.12

Примененный прием называется *методом зеркальных изображений*. Он позволяет находить поля точечных зарядов и их систем при наличии проводящих плоскостей.

2.2.3. Емкость (А). Обсудим одно из важных представлений электростатики. Рассматривая некоторый уединенный проводник, будем вычислять его потенциал посредством (2.25); тогда это — вполне определенная величина. При линейности среды заряд q и потенциал φ, определенный по формуле (2.25) для конкретного проводника, связаны линейной зависимостью; это следует из линейности уравнений электростатики. Поэтому каждый проводник можно охарактеризовать при помощи своего коэффициента пропорциональности C, связывающего потенциал и заряд:

$$C = q/\varphi. \tag{2.54}$$

Можно сказать, что C есть характеристика проводника как «накопителя» заряда. Параметр C называется *емкостью* уединенного проводника.

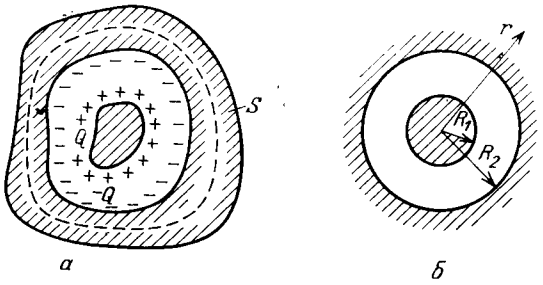
Емкость измеряется в *фарадах* [Ф].

Пример 4. Для нахождения емкости уединенного шара определим его потенциал по формуле (2.30), взяв в качестве r радиус шара R. Дело в том, что поле вне шара оказывается таким же, как и в случае точечного заряда (см. пример 2). Далее, согласно (2.54)

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R. \tag{2.55}$$

При $\varepsilon = 1$ емкостью в 1 Ф обладает шар с $R \approx 9\cdot 10^9$ м.

На рис. 2.13 в двух вариантах показан проводник, находящийся в полости другого проводника. Это так называемый *идеальный конденсатор*. Пусть внутренний проводник несет поверхностный заряд Q. Легко убедиться, что внутренняя поверхность полого проводника при этом имеет заряд $-Q$. Выберем внутри полого проводника некоторую замкнутую поверхность S (рис. 2.13*а*), охватывающую полость. Применяя к S второе равенство (2.20), видим, что левая часть равна нулю, так как в проводнике $\mathbf{D} = 0$. Следовательно равен нулю и полный заряд q, находящийся внутри S. Отсюда видно, что заряд внутреннего проводника Q уравновешивается зарядом $-Q$, который может находиться только на внутренней поверхности полого проводника. *Емкость конденсатора* определяется как



а *б*

Рис. 2.13

$$C = q/\Delta\varphi, \tag{2.56}$$

где $\Delta\varphi$ — разность потенциалов обоих проводников (q и $\Delta\varphi$ — одного знака).

Пример 5. Определим емкость сферического конденсатора (рис. 2.13*б*). В силу сферической симметрии внутреннее поле оказывается таким же, как в случае точечного заряда (пример 4). Поэтому для внутреннего и внешнего проводников имеем соответственно: $\varphi_1 = q/4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1$ и $\varphi_2 = q/4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_2$. Составляя разность этих величин и применяя формулу (2.56), получаем

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon\frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}. \blacksquare \tag{2.57}$$

На идеальный конденсатор внешние электростатические поля не оказывают никакого воздействия. Действительно, внешние поля создают такие распределения зарядов на поверхностях проводящих тел, которые компенсируют внутренние поля. Поле будет отсутствовать и в полости внутри проводника, если, разумеется, она не содержит зарядов. Говорят что объекты, находящиеся в полости, электростатически экранированы: внешние поля на них не действуют. При этом внешнее пространство не экранировано от действия зарядов внутри полости. Действительно, рассматривая полый проводник идеального конденсатора как нейтральный, мы должны прийти к выводу, что появление заряда $-Q$ на его внутренней поверхности вызывает наведение заряда Q на внешней. Этот заряд, однако, на практике можно «отвести» при помощи заземления: он распределится на огромной поверхности и, можно сказать, исчезнет. Внешнее поле практически не возникает.

Реальный конденсатор — это система двух проводников, электростатическое взаимодействие которых значительно превышает воздействие внешних полей. Заряды проводников при этом, строго говоря, уже не одинаковы по абсолютной величине, однако не настолько, чтобы потеряло смысл применение формулы (2.56).

Представление о емкости может быть распространено и на случай системы более чем двух проводников. Пусть имеется N проводящих тел. Поскольку между полным зарядом каждого из проводников и потенциалами всех существует линейная зависимость, можно, например, написать:

$$q_i = C_{i1}(\varphi_i - \varphi_1) + C_{i2}(\varphi_i - \varphi_2) + \ldots + C_{ii}\varphi_i + \ldots$$
$$\ldots + C_{iN}(\varphi_i - \varphi_N), \qquad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{2.58}$$

Коэффициенты C_{ik} называются *частичными емкостями — собственными* ($k = i$) и *взаимными* ($k \neq i$). Можно доказать, что $C_{ik} = C_{ki}$, т. е. *матрица емкостей симметрична*. Знание этой матрицы (т. е. всех частичных емкостей системы проводников) позволяет установить однозначное соответствие между их зарядами и потенциалами. Равенства (2.58) можно переписать в виде системы:

$$q = A\varphi, \tag{2.59}$$

где q и φ — векторы-столбцы, образованные всеми зарядами (q_1, q_2, ..., q_N) и, соответственно, потенциалами (φ_1, φ_2, ..., φ_N). При этом $A = \|A_{ik}\|$ — матрица, элементы которой называются *коэффициентами электростатической индукции*. Связь между ними и частичными емкостями очевидна.

В заключение заметим, что собственная емкость C_{ii} некоторого проводника с номером i отличается от емкости этого же проводника, рассматриваемого как уединенное тело, так как вследствие электростатической индукции в системе меняется распределение его заряда.

2.2.4. Диэлектрики в электростатике (А). Как следует из п. 2.1.2, истинные электростатические поля могли бы существовать только в средах, лишенных электропроводности ($\sigma = 0$), т. е. в идеальных диэлектриках. В таких средах происходят лишь процессы поляризации (см. п. 1.3.2). Картина внутренних процессов в диэлектрике будет обсуждаться в конце книги (п. 14.1.1). Ограничимся пока замечанием, что это процессы переориентации или деформации структурных элементов вещества, проявляющих себя как диполи.

Сопоставим поведение проводников и диэлектриков в электростатическом поле на простом примере.

Пример 6. При помещении проводящего тела в электростатическое поле $\mathbf{E}_e$ его внутреннее поле $\mathbf{E}_i$, как известно, оказывается равным нулю. Пусть поле $\mathbf{E}_e$ однородно (среда — вакуум: $\varepsilon_e = 1$), а проводник имеет вид ортогонально ориентированного слоя (рис. 2.14*а*). Отсутствие поля $\mathbf{E}_i$ объясняется тем, что внутри слоя на первоначальное поле $\mathbf{E}_e$ налагается новое поле $\mathbf{E}' =$

$= -\mathbf{E}_e$, создаваемое в слое наведенным на его поверхностях зарядом, плотность которого на основании (2.51) есть $\xi = \varepsilon_0 \mathbf{E}_e \mathbf{v}_0$ (рис. 2.14*б*).

Пусть теперь вместо проводящего рассматривается диэлектрический слой (рис. 2.14*в*). Внутреннее поле в диэлектрике есть $\mathbf{E}_i = \dfrac{\varepsilon_e}{\varepsilon_i}\mathbf{E}_e = \dfrac{\mathbf{E}_e}{\varepsilon_i}$, так что $E_i < E_e$: внутреннее поле ослаблено. Объясним это появлением в слое (как

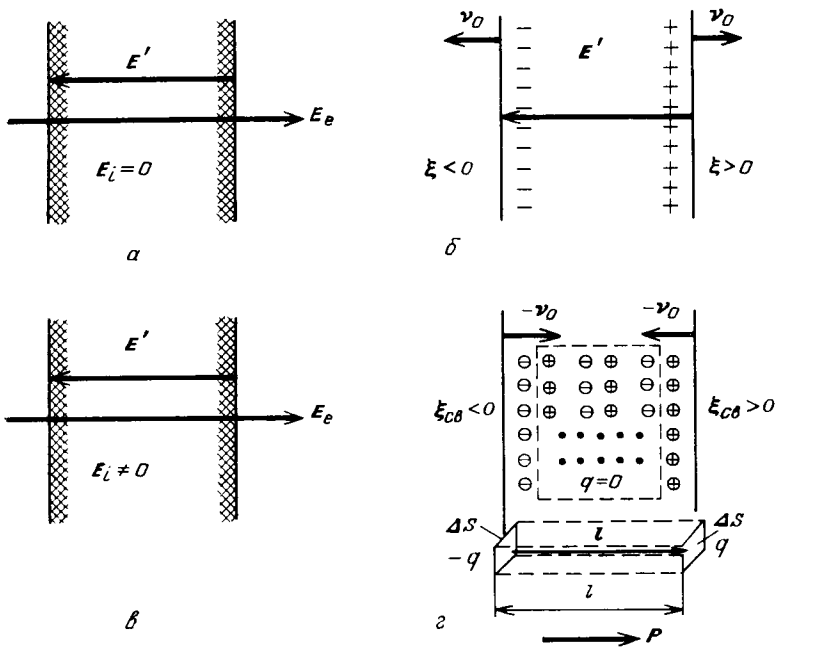


Рис. 2.14

и в случае проводника) некоторого противоположного $\mathbf{E}_e$ поля $\mathbf{E}'$, в результате чего

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}'.$$

Каково происхождение $\mathbf{E}'$? Если диэлектрик — система диполей, то они должны ориентироваться внешним полем, как это схематически показано на рис. 2.14*г*. Внутри диэлектрика связанные заряды уравновешиваются ($q = 0$), но на граничных плоскостях можно отметить появление поверхностного связанного заряда. Плотность последнего $\xi_{св}$ может быть определена, как

$$\xi_{св} = \varepsilon_0 \mathbf{E}'(-\mathbf{v}_0)$$

($\varepsilon = 1$, так как система диполей расположена в пустоте, а поскольку $\mathbf{E}' = 0$ вне слоя, можно применить формулу (2.51), взяв $-\mathbf{v}_0$ в качестве положительной нормали).

Выражая, далее, $\mathbf{E}'$ как $-(\mathbf{E}_e - \mathbf{E}_i)$ (при помощи предшествующей формулы), имеем

$$\xi_{св} = \varepsilon_0(\mathbf{E}_e - \mathbf{E}_i)\mathbf{v}_0.$$

Но $\varepsilon_0 \mathbf{E}_e = \mathbf{D}_e$ и $\mathbf{D}_e = \mathbf{D}_i$, так что

$$\xi_{св} = (\mathbf{D}_i - \varepsilon_0 \mathbf{E}_i)\mathbf{v}_0.$$

Привлекая, наконец, (1.70), заменим разность в скобках через вектор электрической поляризации $\mathbf{P}$:

$$\xi_{св} = \mathbf{P}\mathbf{v}_0 \tag{2.60}$$

($\xi_{св} = P$ справа на рис. 2.14*г* и $\xi_{св} = -P$ слева).

Построенный пример подводит нас к пониманию физического смысла вектора $\mathbf{P}$. Сделаем следующий шаг. Выделив на граничных плоскостях (рис. 2.14*г*) противоположные площадки ΔS, видим, что они несут заряды $-q$ и q, где $q = |\sigma_{св}|\Delta S$. Выделенный элемент объема $\Delta V = \Delta S l$, как видно, обладает электрическим моментом $P_{\Delta V} = ql$ (2.44), причем

$$\mathbf{P}_{\Delta V} = |\xi_{св}|\mathbf{l}_0 l \Delta S.$$

Произведя деление на $l\Delta S$, мы получим электрический момент, отнесенный к единице объема диэлектрика. Учитывая, что ввиду (2.60) $|\xi_{св}|\mathbf{l}_0 = \mathbf{P}$, окончательно получаем

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\Delta V}/\Delta V. \tag{2.61}$$

Итак, вектор $\mathbf{P}$ предстает как *электрический момент единицы объема* данной однородно поляризованной среды. ■

Значение рассмотренного примера в том, что он проясняет смысл поляризации диэлектриков при сопоставлении с электростатической индукцией, свойственной проводникам.

Для решения задач электростатики о диэлектрических телах во внешнем поле нет необходимости переходить к представлению о связанных зарядах. Надо просто находить такие электростатические поля $\mathbf{E}_e$ и $\mathbf{E}_i$ (внешнее и внутреннее), которые удовлетворяли бы на поверхности диэлектрика граничным условиям

$$E_{e\tau} = E_{i\tau}, \quad D_{e\nu} = D_{i\nu}. \tag{2.62}$$

Переходя к потенциалам, ищут такие решения уравнения Лапласа φ_e и φ_i, градиенты которых согласно (2.21) дают $\mathbf{E}_e$ и $\mathbf{E}_i$, удовлетворяющие условиям (2.62). Для этого достаточно, чтобы выполнялись следующие граничные условия относительно потенциалов:

$$\varphi_e = \varphi_i, \quad \varepsilon_e \frac{\partial \varphi_e}{\partial \nu} = \varepsilon_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \nu}. \tag{2.63}$$

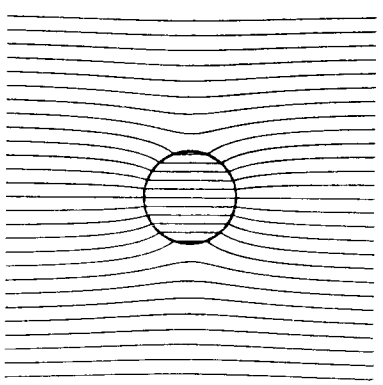


Рис. 2.15. (ЭВМ)

В качестве примера рассмотрим поле диэлектрического цилиндра ($\varepsilon = 5$), помещенного в однородное поле $\mathbf{E}_0$ (рис. 2.15). Внутреннее поле $\mathbf{E}_i$ при этом также оказывается однородным, но вне цилиндра появляется дополнительное поле $\mathbf{E}'$ — такое, что полное внешнее поле $\mathbf{E}_e = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$ и внутреннее однородное поле $\mathbf{E}_i$ удовлетворяют граничным условиям (2.62). Оказывается, поле $\mathbf{E}'$ имеет характер поля дипольных нитей (см. рис. 2.8*б*). Решение задачи о диэлектрическом цилиндре выписано на с. 113 (см. упражнение 25).

2.2.5. Дополнительные замечания (Б). Сделаем несколько замечаний, дополняющих материал по электростатическим полям.

Переход от дискретного распределения зарядов к непрерывному. Отправляясь от формулы (2.42), полученной для системы точечных зарядов $\{q_i\}$, перейдем к случаю непрерывного распределения заряда с плотностью ρ в объеме V. Разобьем V на элементарные объемы ΔV_i; очевидно заряд каждого есть $q_i = \rho_i \Delta V_i$, где ρ_i — некоторое усредненное значение ρ в ΔV_i. Внося эти выражения q_i в (2.42) и переходя к пределу при бесконечном измельчении элементарных объемов, получаем

$$\varphi(\mathbf{r}) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \sum_{i=1}^{N} \frac{\rho_i \Delta V_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dv'.$$

Это — не что иное, как формула (2.28), полученная теперь не на основании (2.11), а элементарным путем.

Электростатическое поле в полости проводника. Как известно, внутри проводников электростатическое поле отсутствует (п. 2.2.2). Нередко говорят, что поэтому оно будет отсутствовать и в полости, которая, как можно представить себе, появилась там, где раньше был сплошной проводник и отсутствовало поле. На самом деле это рассуждение (которое, разумеется, нельзя считать строгим) приводит к правильному выводу в случае простой полости (рис. 2.16*а*), но отказывает уже при некотором усложнении ее формы (рис. 2.16*б*).

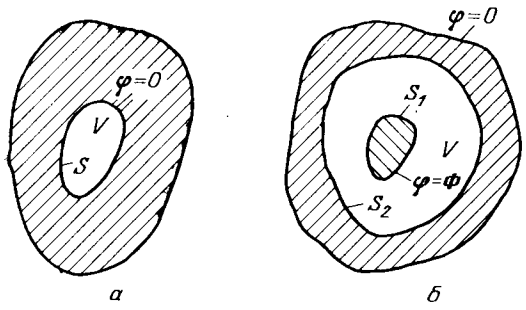


Рис. 2.16

Рассмотрим вопрос более основательно. Взяв первую формулу Грина (1.35), положим $\psi = \varphi$, где φ — электростатический потенциал внутри полости V. Ввиду (2.29) и (2.21) перепишем (1.35) в виде

$$\int_V \mathbf{E}^2\, dv = \oint_S \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\, ds.$$

В случае простой полости (рис. 2.16*а*) положим $\varphi = 0$ на S (потенциал постоянен на поверхности проводника, и мы имеем право выбрать нулевое значение). Поверхностный интеграл справа уничтожится, а следовательно, равен нулю и объемный интеграл от неотрицательной величины E^2. Последнее возможно только при $E = 0$.

Если же полость ограничена несколькими проводящими поверхностями (в случае рис. 2.16*б* S состоит из S_1 и S_2), то в общем случае невозможно считать их потенциалы одинаковыми. Если же потенциалы на S_1 и S_2 различны, то положить равным нулю можно только один из них (сохранив разность потенциалов; пусть при этом для второго проводника $\varphi = \Phi$). В этом случае поверхностный интеграл в последнем равенстве не уничтожится: он распадается на интегралы по S_1 и S_2. Вывод об отсутствии поля в полости, показанной на рис. 2.16*б*, таким образом, вообще неверен. В сущности, это следует уже из обсуждения в п. 2.2.3.

О применении теоремы Гаусса. Вернемся к приему нахождения поля, который был использован во втором примере п. 2.1.2. Он применим в более широком классе задач: рассматриваемая структура может быть как угодно сложной при условии, что она обладает требуемой симметрией. Формула (1.64) остается верной при любом числе сферических слоев (рис. 2.17*а*) с разными диэлектрическими проницаемостями. Пусть последний слой ограничен проводником (рис. 2.17*б*). Емкость такого конденсатора определим по формуле (2.56), а входящую туда разность потенциалов — на основании (2.24) и (1.64):

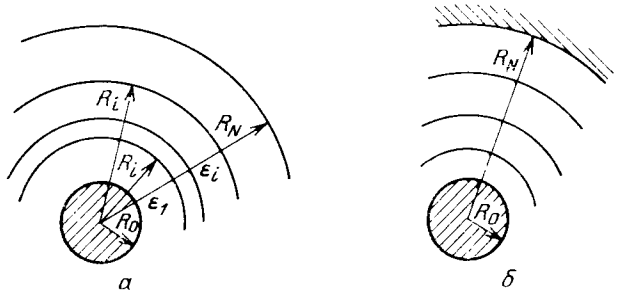


Рис. 2.17

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\varepsilon_i} \int_{R_{i-1}}^{R_i} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\varepsilon_i} \left(\frac{1}{R_{i-1}} - \frac{1}{R_i} \right).$$

Поэтому

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\varepsilon_i} \left(\frac{1}{R_{i-1}} - \frac{1}{R_i} \right) \right]^{-1/2}. \qquad (2.64)$$

Легко убедиться, что, вычисляя поле цилиндрической структуры с поперечным сечением типа рис. 2.17*б* на основании второй формулы (2.32), а затем переходя к нахождению погонной

емкости цилиндрического конденсатора, вместо (2.64) получим

$$C' = 2\pi\varepsilon_0 \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\varepsilon_i} \ln \frac{R_i}{R_{i-1}} \right]^{-1}. \qquad (2.65)$$

2.2.6. Простейшие граничные задачи (Б). Покажем, как находятся некоторые электростатические поля на основе решения уравнения Лапласа с наложением граничных условий.

Однородно заряженный проводящий шар. Представим оператор Лапласа в сферических координатах на основании (2.6) и табл. 2.2. В данном случае это дает

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\varphi}{dr}\right) = 0, \qquad (2.66)$$

так как решение лежит в классе функций, не зависящих от угловых координат ϑ и α. Поскольку начало координат не входит в рассмотрение, множитель $1/r^2$ в (2.66) может быть опущен. Выражение в круглых скобках следует положить равным некоторой константе A. Отсюда

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{A}{r^2}, \quad \varphi = -\frac{A}{r} + B, \quad \mathbf{E} = -\mathbf{r}_0 \frac{A}{r^2}. \qquad (2.67)$$

Остается определить неизвестную константу A. Используя вторую формулу (2.51), находим: $-A/R^2 = \xi$. Это дает результат, уже обсуждавшийся в п. 2.1.2 (см. пример 2).

Проводящий шар в однородном поле. Напряженность первоначального поля зададим в виде $\mathbf{E}_0 = \mathbf{z}_0 E_0$. В него и помещается шар. Очевидно, что $\mathbf{E}_0 = -\nabla\varphi_0$, где

$$\varphi_0 = -E_0 z + A = -E_0 r\cos\vartheta \qquad (2.68)$$

(константа A взята равной нулю и произведен переход к сферическим координатам, рис. 2.18).

Чтобы найти потенциал внешнего поля φ_e, который должен быть постоянным на поверхности шара $r = R$, надо найти такое решение φ' уравнения Лапласа для внешней области $r \geqslant R$, которое уравновесило бы изменение φ_0 при $r = R$. Легко сообразить, что этим свойством обладает потенциал поля диполя (2.46), ориентированного по оси z и локализованного в начале координат. Разумеется, это поле вводится только при $r \geqslant R$. Итак, записываем равенство $\varphi_e = \varphi_0 + \varphi'$ в виде

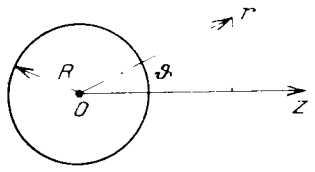


Рис. 2.18

$$\varphi_e = -E_0 r\cos\vartheta + \frac{B}{r^2}\cos\vartheta, \qquad (2.69)$$

где второй член справа построен на основании (2.46). Потребуем, чтобы выполнялось условие $\varphi_e = 0$ при $r = R$ (вместо нуля можно было бы взять любую константу). Отсюда определяется константа B. В результате имеем:

$$\varphi_e = E_0\left(-r + \frac{R^3}{r^2}\right)\cos\vartheta. \qquad (2.70)$$

Теперь находим поле на основании (2.21):

$$\mathbf{E}_e = E_0\left[\mathbf{r}_0\left(1 + 2\frac{R^3}{r^3}\right)\cos\vartheta - \boldsymbol{\vartheta}_0\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)\sin\vartheta\right]. \qquad (2.71)$$

Итак, деформацию однородного поля $\mathbf{E}_0 = \mathbf{z}_0 E_0$ вызывает налагающееся на него поле диполя, которое, разумеется, следует приписать совокупности зарядов, наведенных на поверхности шара.

На основании (2.71) нетрудно найти плотность поверхностного заряда и электрический момент эквивалентного диполя $\mathbf{p}$. Очевидно,

$$\mathbf{p} = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_e R^3 \mathbf{E}_0. \qquad (2.72)$$

Диэлектрический шар в однородном поле. Заменим проводящий шар диэлектрическим (см. п. 2.2.3). Внешний потенциал по-прежнему будем выражать при помощи формулы (2.69), а внутренний — в виде $\varphi_i = -Cr\cos\vartheta$. Это соответствует предположению, что внутреннее поле $\mathbf{E}_i$, как и первоначальное поле $\mathbf{E}_0$, является однородным и направлено по оси z. При $r = R$ наложим граничные условия (2.62). Это дает два уравнения относительно B и C:

$$\begin{aligned} B/R^3 + C &= E_0, \\ -2B/R^3 + (\varepsilon_i/\varepsilon_e)C &= E_0. \end{aligned} \qquad (2.73)$$

Определив отсюда B и C, получаем

$$\begin{aligned} \varphi_e &= E_0\left(-r + \frac{R^3}{r^2}\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_e}\right)\cos\vartheta, \\ \varphi_i &= -\frac{3E_0\varepsilon_e r}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_e}\cos\vartheta. \end{aligned} \qquad (2.74)$$

Наконец, при помощи (2.21) определяем поле:

$$\mathbf{E}_e = E_0\left\{\mathbf{r}_0\left(1 + \frac{2R^3}{r^3}\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_e}\right)\cos\vartheta + \boldsymbol{\vartheta}_0\left(-1 + \frac{R^3}{r^3}\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_e}\right)\sin\vartheta\right\}, \qquad (2.75)$$

$$\mathbf{E}_i = \frac{3\varepsilon_e E_0}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_e}.$$

Поскольку потенциал везде удовлетворяет уравнению Лапласа и граничным условиям на поверхности шара, решение граничной задачи найдено. Полученное поле $\mathbf{E}_e$ представляет собой первоначальное однородное поле $\mathbf{E}_0 = \mathbf{z}_0 E_0$, на которое наложилось поле

диполя с электрическим моментом

$$\mathbf{p} = 4\pi R^3 \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_e} \varepsilon_0 \varepsilon_e \mathbf{E}_0. \qquad (2.76)$$

В заключение заметим, что аналогичным способом нетрудно решить задачи о внесении в однородное поле металлического или диэлектрического цилиндра (см. упражнения 24, 25).

§ 2.3. Стационарные магнитные поля

2.3.1. Основные уравнения и закон Био — Савара (А). Вернемся к системе уравнений стационарного электромагнитного поля (2.18). Хотя при наличии тока ($\mathbf{j} \neq 0$) все уравнения этой системы являются взаимно связанными, существует важный класс задач, в которых плотность тока — заданная величина. В этом случае магнитное поле может быть определено независимо от электрического при решении системы уравнений

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}. \qquad (2.77)$$

Это *система уравнений стационарного магнитного поля*, отличающаяся от системы уравнений магнитостатики (2.34) наличием $\mathbf{j}$ в правой части первой строчки. Выпишем также интегральные аналоги первых двух уравнений (2.77), получаемые из (1.53) и (1.56):

$$\oint_L \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = I, \qquad \oint_S \mathbf{B}\, d\mathbf{s} = 0. \qquad (2.78)$$

Решение системы уравнений (2.77) можно получить разными способами. В случае однородной среды ($\mu = \text{const}$) определение магнитного поля по заданному распределению тока сводится к применению следующей интегральной формулы:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}'), \mathbf{r}_{0q}]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}\, dv' \qquad (2.79)$$

(символ $\mathbf{r}_{0q}$ пояснен выше в п. 2.0.1). Это так называемый *обобщенный закон Био — Савара*. Если ток является *линейным*, т. е. проходит по контуру (системе контуров) L, формула (2.79) принимает вид

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi} \oint_L \frac{[d\mathbf{l}', \mathbf{r}_{0q}]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}. \qquad (2.80)$$

На практике линейным считают ток некоторого нитевидного (проволочного) проводника, если расстояния $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ остаются в процессе интегрирования значительно больше поперечного размера проводника (рис. 2.19). Равенство (2.80) выражает обычный *закон Био — Савара*.

ВЫВОД. Чтобы получить обобщенный закон Био — Савара (2.79), допустим сначала, что распределение тока — достаточно гладкое, а именно, компоненты вектора $\mathbf{j}$ дифференцируемы. Тогда из первого уравнения (2.77) получаем

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{j}. \qquad (2.81)$$

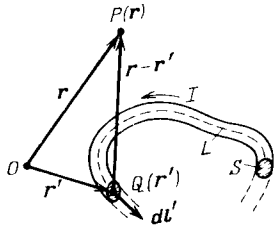


Рис. 2.19

Пусть, далее, среда однородна, а следовательно, из второго уравнения (2.77) вытекает, что $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$. При этом в силу (1.29) равенство (2.81) переходит в векторное уравнение Пуассона типа (2.12):

$$\nabla^2 \mathbf{H} = -\operatorname{rot} \mathbf{j}, \qquad (2.82)$$

и мы записываем его решение на основании формулы (2.13):

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\operatorname{rot}' \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, dv'. \qquad (2.83)$$

Подынтегральное выражение преобразуем при помощи формулы (1.27), положив в ней $\mathbf{F} = \mathbf{j}$ и $\psi = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$. Это дает

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_V \operatorname{rot}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, dv' - \int_V \left[\operatorname{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \mathbf{j}(\mathbf{r}') \right] dv' \right\}. \qquad (2.84)$$

Нетрудно убедиться, что первый интеграл равен нулю. Для этого используем формулу (1.37), согласно которой

$$\int_V \operatorname{rot}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, dv' = -\oint_S \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}'), d\mathbf{s}]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \qquad (2.85)$$

и отметим, что V есть область, содержащая все токи, либо более широкая область (объемные интегралы сохранят свои значения). Что касается поверхностного интеграла, то он явно равен нулю, когда граница S проходит там, где нет тока. Значит, последнее равенство есть тождество $0 \equiv 0$.

Остается вычислить $\operatorname{grad}' |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$, что делается посредством формул (1.28) и (2.2) и дает $\mathbf{r}_{0q} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-2}$. После этого (2.84) переходит в (2.79). ■

Интересно, что в конечном счете снимается требование дифференцируемости $\mathbf{j}$; оно только облегчало вывод.

Переход от общего выражения (2.79) к случаю линейных токов (2.80) очевиден, однако ниже мы еще вернемся к линейным токам для обсуждения их формализации (п. 2.3.5).

Наконец, заметим, что закон Био — Савара нередко записывают в форме дифференциала $d\mathbf{H}(\mathbf{r}) = (I/4\pi)[d\mathbf{l}', \mathbf{r}_{0q}]\, |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-2}$. При этом

$\mathbf{dH}(\mathbf{r})$ есть вклад в $\mathbf{H}(\mathbf{r})$, создаваемый элементом контура $\mathbf{dl}'$ с током I.

2.3.2. Потенциалы в теории стационарного магнитного поля (А). Хотя обобщенный закон Био — Савара (2.79) дает полное решение системы уравнений (2.77) для заданного распределения тока в однородной среде, по традиции используются также вспомогательные функции, потенциалы, которые, как и электростатический потенциал φ, приводят к нахождению поля после дифференциальных операций.

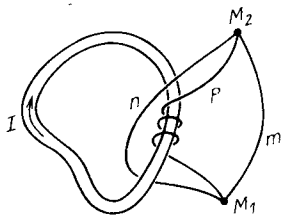


Рис. 2.20

В п. 2.1.3 уже был введен магнитостатический потенциал ψ. В принципе, представление (2.36) может быть использовано и при рассмотрении магнитного поля постоянного тока в тех областях, где $\mathbf{j}=0$. Однако оказывается, что разность потенциалов двух точек M_1 и M_2 — в отличие от электростатики — теперь зависит не только от положения этих точек, но и от вида пути интегрирования в формуле, аналогичной (2.24). В данном случае

$$\psi_1 - \psi_2 = \int_{M_1}^{M_2} \mathbf{H}\,\mathbf{dl}. \tag{2.86}$$

Пусть имеется контур тока I (рис. 2.20). Выбирая пути интегрирования M_1mM_2 и M_1nM_2, мы явно будем получать разные результаты, поскольку согласно первой формуле (2.78)

$$\int_{M_1mM_2} \mathbf{H}\,\mathbf{dl} = \int_{M_1nM_2} \mathbf{H}\,\mathbf{dl} + I. \tag{2.87}$$

Если же при интегрировании производится k-кратный обход тока (путь M_1pM_2), то

$$\int_{M_1mM_2} \mathbf{H}\,\mathbf{dl} = \int_{M_1pM_2} \mathbf{H}\,\mathbf{dl} + kI, \tag{2.88}$$

причем величина k положительна, когда направление обхода замкнутого контура $M_1mM_2pM_1$ и ток I образуют правовинтовую систему.

Таким образом, разность магнитостатических потенциалов, будучи вполне определенной величиной в магнитостатике (п. 2.1.3), в теории стационарного магнитного поля вообще неоднозначна. Но если затянуть контур тока воображаемой пленкой, через которую запрещено проводить пути интегрирования, однозначность восстанавливается. Такая «пленка», т. е. поверхность, опирающаяся на контур тока (причем форма ее произвольна), есть, в сущности, поверхность разрыва ψ на величину I.

Введем новую вспомогательную величину, называемую *векторным потенциалом* и обозначаемую символом $\mathbf{A}$. По определению

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \tag{2.89}$$

откуда следует, что векторный потенциал определен только с точностью до аддитивного градиента. Это значит, что взяв вместо $\mathbf{A}$ величину $\mathbf{A}+\nabla\Psi$ (где Ψ — произвольная скалярная функция), мы получим по формуле (2.89) прежнюю величину магнитной индукции $\mathbf{B}$ в силу (1.22).

Из (2.77) (первая строчка) получаем следующее уравнение, которому удовлетворяет $\mathbf{A}$:

$$\operatorname{rot} \mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}, \tag{2.90}$$

а для однородной среды ($\mu = \text{const}$):

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mu_0 \mu \mathbf{j}. \tag{2.91}$$

Ввиду отмеченной выше неопределенности $\mathbf{A}$ можно наложить дополнительное условие

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0, \tag{2.92}$$

которое иногда называют «кулоновской калибровкой». Тогда (2.91) ввиду тождества (1.29) переходит в следующее векторное уравнение Пуассона:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mu \mathbf{j}. \tag{2.93}$$

Его решение типа (2.13) есть

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dv', \tag{2.94}$$

а в случае линейных токов (2.94) принимает вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi} \oint_L \frac{\mathbf{dl}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{2.95}$$

Как видно, введение векторного потенциала $\mathbf{A}$ позволяет находить магнитное поле заданного тока в два приема: сначала путем интегрирования при помощи формулы (2.94) либо (2.95) определяется $\mathbf{A}$, а затем согласно (2.89) напряженность магнитного поля вычисляется как $(\mu_0\mu)^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A}$ (дифференцирование). В ряде случаев этот путь оказывается менее трудоемким, чем непосредственное применение закона Био — Савара в форме (2.79) или (2.80).

2.3.3. Аксиально-симметричные поля (А). Простейшее аксиально-симметричное магнитное поле рассматривалось еще в гл. 1 (пример 1). Имеется в виду поле прямолинейного постоянного тока. Полученная там формула (1.58) справедлива для целого класса задач, в которых магнитные силовые линии являются концентрическими окружностями. Это будет во всех случаях,

когда проводники обладают осевой симметрией. В данный класс входит, например, провод круглого поперечного сечения, труба, коаксиальный кабель. Применяя формулу (1.58), нужно помнить, что I в числителе — это ток, проходящий внутри контура L, совпадающего с силовой линией радиуса r. Таким образом, вектор $\mathbf{H}$ на расстоянии r от оси системы определяется только тем током, который проходит внутри L. На рис. 2.21 вместе с поперечными

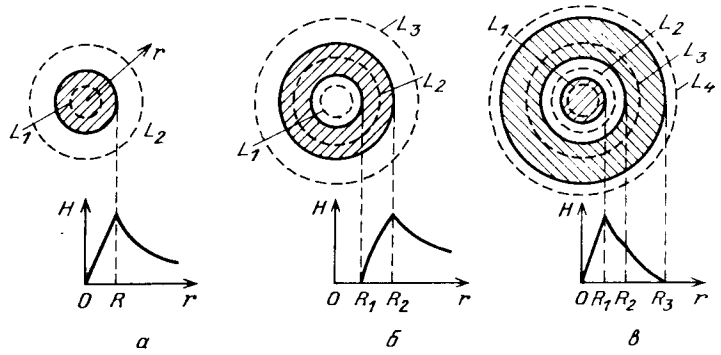


Рис. 2.21

сечениями трех систем даны графики их полей, полученные на основании (1.58); показаны также примеры контуров L, различающихся качественно. Например, L_1 на рис. 2.21*а* охватывает ток, величина которого пропорциональна r^2, а L_2 — весь ток провода. На рис. 2.21*б* контур L_1 вообще не охватывает тока, и поле $\mathbf{H}$ внутри трубы отсутствует. В качестве примера запишем формулы, соответствующие случаю коаксиального кабеля (рис. 2.21*в*):

$$\mathbf{H} = \begin{cases} \alpha_0 \dfrac{Ir}{2\pi R_1^2}, & 0 \leqslant r \leqslant R_1, \\ \alpha_0 \dfrac{I}{2\pi r}, & R_1 \leqslant r \leqslant R_2, \\ \alpha_0 \dfrac{I\left(R_3^2 - r^2\right)}{2\pi\left(R_3^2 - R_2^2\right)r}, & R_2 \leqslant r \leqslant R_3, \\ 0, & r \geqslant R_3. \end{cases} \tag{2.96}$$

Интересно, что магнитное поле внутри кольцевого сердечника с равномерной обмоткой (рис. 2.22) также может быть определено по формуле (1.58), поскольку силовые линии близки к концентрическим окружностям. Если контур интегрирования L лежит внутри сердечника, то он охватывает ток nI, где n — число витков обмотки. Ток, проходящий через всякий внешний контур, равен

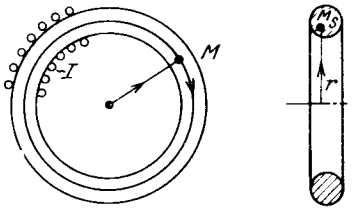


Рис. 2.22

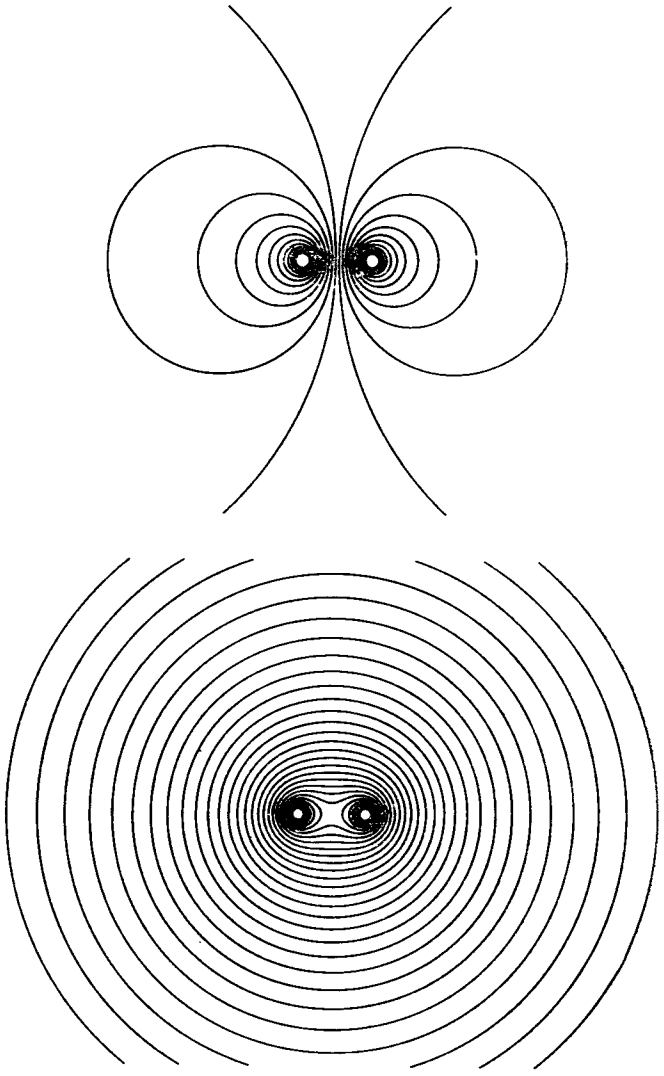


Рис. 2.23. (ЭВМ)

нулю. Поэтому

$$\mathbf{H} = \boldsymbol{\alpha}_0 \frac{nI}{2\pi r}, \quad P(\mathbf{r}) \in S, \quad \mathbf{H} = 0, \quad P(\mathbf{r}) \overline{\in} S. \tag{2.97}$$

Разумеется, запись (2.97) приобретает строгий смысл, если обмотка заменяется сплошным проводником, охватывающим сердечник (тогда силовые линии — настоящие окружности).

На основании (1.58) можно также находить поля, создаваемые несколькими прямолинейными токами, параллельными либо антипараллельными. Надо лишь сложить отдельные поля при соответствующей замене координат в (1.58). В качестве примеров на рис. 2.23 показаны картины магнитных силовых линий двух токов $\mp I$ и I, а на рис. 2.24 — токов $(\mp 1/2)I$ и I.

2.3.4. Виток тока как магнитный диполь (А). В этом разделе будет показано, что замкнутый контур тока на больших расстояниях действует как *магнитный диполь*. Конкретно будет рассматриваться замкнутый круглый контур, виток тока (рис. 2.25*а*). Эквивалентный ему магнитный диполь (рис. 2.25*б*) обладает *магнитным моментом*

$$\mathbf{m} = \mathbf{z}_0 \mu_0 \mu I S. \tag{2.98}$$

Дело в том, что создаваемое витком магнитное поле при $r \gg a$ имеет напряженность

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{m}{4\pi\mu_0 \mu r^3} (\mathbf{r}_0 2\cos\vartheta + \boldsymbol{\vartheta}_0 \sin\vartheta). \tag{2.99}$$

Сопоставляя эту запись с выражением **E** поля диполя в электростатике (2.47), видим, что обе формулы по своей структуре идентичны. При этом роль **p** в (2.47) в выражении (2.99) играет новая величина **m**. Понятие магнитного момента вводится по аналогии с определением электрического момента (2.44). Если ввести условные магнитные заряды, показанные на рис. 2.25*б*, то $\mathbf{m} = q^M \mathbf{l}$.

ВЫВОД. Рассмотрим круглый контур тока I (см. рис. 2.26*а*). Для определения его поля можно было бы применить закон Био – Савара (2.80), но мы будем исходить из формулы (2.95) и сначала найдем векторный потенциал.

Пусть **A** определяется в точке наблюдения $P(\mathbf{r})$, имеющей сферические координаты r, ϑ, $\alpha = 180°$. При этом для текущей точки интегрирования $Q(\mathbf{r}')$ оказываются фиксированными координаты $r' = a$ и $\vartheta' = 90°$; изменяется лишь угловая координата α'. Расстояние $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ в (2.95) есть $(QM^2 + MP^2)^{1/2}$ (рис. 2.26*а*) и, следовательно, $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (r^2 + a^2 + 2ra\sin\vartheta\cos\alpha')^{1/2}$, так как $MP^2 = r^2\cos^2\vartheta$ и $QM^2 = r^2\sin^2\vartheta + a^2 - 2ra\sin\vartheta\cos\beta$. Векторный дифференциал длины $\mathbf{dl}'$ разложим на две компоненты (рис. 2.26*б*):

$$\mathbf{dl}' = \boldsymbol{\alpha}_0 dl'_\alpha + \mathbf{R}_0 dl'_R = (-\boldsymbol{\alpha}_0 \cos\alpha' + \mathbf{R}_0 \sin\alpha')\, a\, d\alpha',$$

где оба орта $\boldsymbol{\alpha}_0$ и $\mathbf{R}_0$ относятся к точке наблюдения. Подчеркнем,

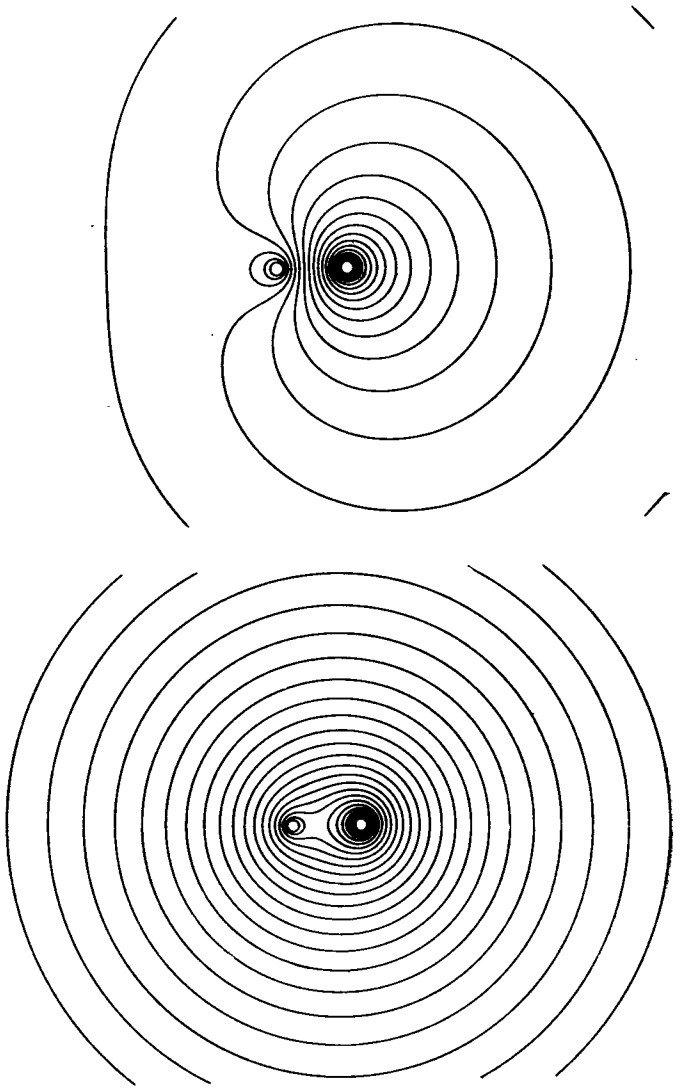


Рис. 2.24. (ЭВМ)

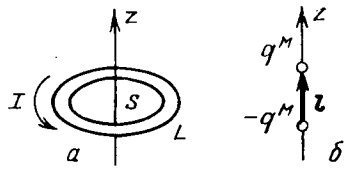


Рис. 2.25

что $\mathbf{R}_0$ лежит в плоскости витка (это не радиальный орт $\mathbf{r}_0$ сферической системы координат). Теперь можно конкретизировать формулу (2.95) для анализируемого витка:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(-\boldsymbol{\alpha}_0\cos\alpha' + \mathbf{R}_0\sin\alpha')\,a\,d\alpha'}{(r^2+a^2+2ra\sin\vartheta\cos\alpha')^{1/2}},$$

а поскольку

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\alpha'\,d\alpha'}{(r^2+a^2+2ra\sin\vartheta\cos\alpha')^{1/2}} = -\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin\alpha'\,d\alpha'}{(r^2+a^2+2ra\sin\vartheta\cos\alpha')^{1/2}}$$

(в этом легко убедиться, сопоставляя $\sin\alpha'$ и $\cos\alpha'$ в каждом квадранте), то окончательно

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\alpha}_0\frac{\mu\mu_0 aI}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\alpha'\,d\alpha'}{(r^2+a^2+2ra\sin\vartheta\cos\alpha')^{1/2}}. \qquad (2.100)$$

Векторный потенциал оказывается направленным азимутально, как и ток. Хотя меридиональная плоскость, в которой лежит точка

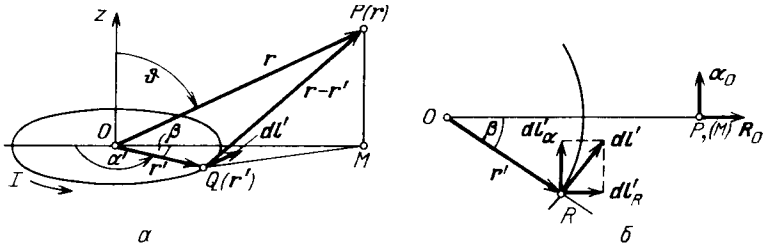


Рис. 2.26

наблюдения $P(\mathbf{r})$, была зафиксирована ($\alpha = 180°$), ясно что результат (2.100) от α не зависит. Поэтому линии вектора $\mathbf{A}$ образуют концентрические окружности в плоскостях $z = \text{const}$.

Интеграл (2.100) в общем случае можно свести к так называемым полным эллиптическим интегралам, которые табулированы в математических справочниках. Что касается интересующего нас случая, когда $r \gg a$, то здесь дальнейшие действия просты. Положив $a^2 I = \text{const}$, рассмотрим предельный случай $a/r \to 0$. Разлагая знаменатель подынтегрального выражения (2.100) в ряд

$$(r^2+a^2+2ra\sin\vartheta\cos\alpha')^{-1/2} = \frac{1}{r}\left[1 - \frac{a}{r}\sin\vartheta\cos\alpha' - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \ldots\right]$$

и переходя в (2.100) к пределу

$$\lim_{\substack{a/r\to 0\\ Ia^2=\text{const}}} \boldsymbol{\alpha}_0\frac{\mu_0\mu I}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{-a}{r}\left[1 - \frac{a}{r}\sin\vartheta\cos\alpha' - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \ldots\right]\cos\alpha'\,d\alpha',$$

получаем

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\alpha}_0\frac{\mu_0\mu Ia^2}{4r^2}\sin\vartheta. \qquad (2.101)$$

Теперь по формуле (2.89) находим напряженность магнитного поля:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu_0\mu}\operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{Ia^2}{4}\left(\frac{\mathbf{r}_0}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \frac{\vartheta_0}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{\sin^2\vartheta}{r}$$

(использовано выражение ротации (2.5) и табл. 2.2). В результате

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{Ia^2}{4r^3}(\mathbf{r}_0 2\cos\vartheta + \vartheta_0\sin\vartheta). \qquad (2.102)$$

Отсюда видно, что виток, действительно, проявляет себя в пределе при $a/r \to 0$ как магнитный диполь с моментом (2.98), где $S = \pi a^2$. ■

В заключение заметим, что плоский круглый контур тока был выбран только для облегчения анализа. Любые распределения постоянного тока, локализованные в ограниченной области, на больших расстояниях оказывают дипольное действие.

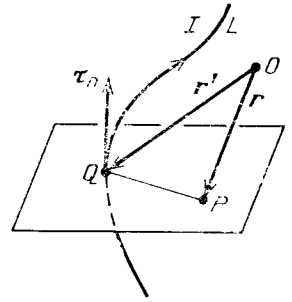


Рис. 2.27

2.3.5. Замечания и примеры (Б). Завершая обсуждение стационарных магнитных полей, сделаем сначала несколько замечаний.

О линейных токах. Переходя от формул (2.79), (2.94) к (2.80) и (2.95) соответственно, достаточно было рассматривать весьма узкий канал тока, проволоку, с поперечным сечением, в котором плотность тока остается постоянной. Идеальный линейный ток получается в пределе при исчезновении поперечного сечения ($I = \text{const}$). Можно, однако, сразу воспользоваться аппаратом дельта-функции Дирака. Выразим линейный ток в виде

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\tau}_0 I\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \qquad (2.103)$$

где (рис. 2.27) имеется в виду двумерная дельта-функция: $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ описывают точки на поверхности S, к которой линия тока ортогональна. Тогда, например, переход от (2.94) к (2.95) имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0\mu I}{4\pi}\int_V \frac{\boldsymbol{\tau}_0\delta(\mathbf{r}''-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|}\,dv'' =$$

$$= \frac{\mu_0\mu I}{4\pi}\oint_L\int_S \frac{\boldsymbol{\tau}_0\delta(\mathbf{r}''-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|}\,ds''\,dl' = \frac{\mu_0\mu I}{4\pi}\oint_L \frac{\mathbf{dl}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.$$

Примеры вычисления полей линейных токов. В качестве простейшего применения закона Био — Савара рассмотрим получение

формулы (1.58). Как видно из рис. 2.28*а*, формула (2.80) в данном случае дает

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi}\int \frac{[\mathbf{dr}, \mathbf{r}_{0q}]}{r^2+z^2} = \boldsymbol{\alpha}_0 \frac{I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\vartheta\, dz}{r^2+z^2} = \boldsymbol{\alpha}_0 \frac{I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{r\, dz}{(r^2+z^2)^{3/2}},$$

а поскольку $\frac{r^2}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{d}{dz}\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}$, то

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\alpha}_0 \frac{I}{4\pi r}\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = \boldsymbol{\alpha}_0 \frac{I}{2\pi r}.$$

Таким образом, для бесконечного прямолинейного тока подтверждена формула (1.58).

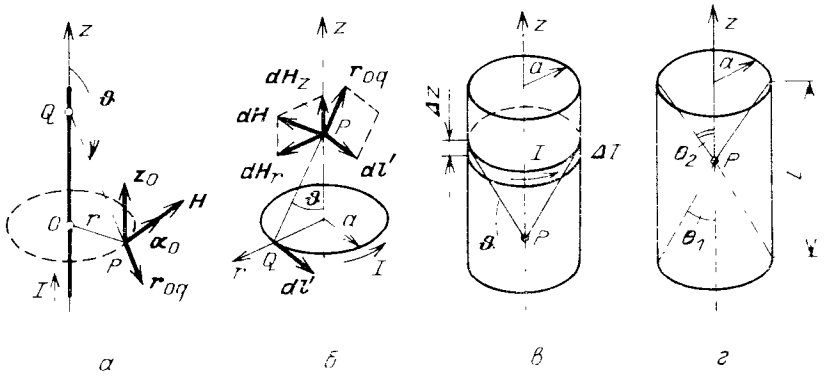


Рис. 2.28

Возвращаясь к случаю круглого витка, будем вычислять поле на оси витка. Согласно (2.80) имеем (рис. 2.28*б*)

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi}\oint_L \frac{[\mathbf{dl}', \mathbf{r}_{0q}]}{a^2+z^2} = \mathbf{z}_0 \frac{Ia}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\vartheta\, d\alpha}{a^2+z^2} = \mathbf{z}_0 \frac{Ia^2}{4\pi(a^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\alpha$$

(учтено, что радиальная компонента подынтегрального выражения при интегрировании уничтожается). Поэтому

$$\mathbf{H} = \mathbf{z}_0 \frac{Ia^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}}. \qquad (2.104)$$

Рассмотрим теперь соленоид (рис. 2.28*в*). Если допустить, что в этом случае ток непрерывно распределен по цилиндрической поверхности, то в элементарном поясе шириной Δz сосредоточен ток $\Delta I = n' I \Delta z$, где n' — число витков, приходящееся на единицу длины соленоида, а I — ток одного витка (рис. 2.28*в*). Полагая $z = 0$ в точке наблюдения P, имеем

$$\mathbf{dH} = \mathbf{z}_0 \frac{n'I}{2}\frac{a^2\, dz}{(a^2+z^2)^{3/2}} = \mathbf{z}_0 \frac{n'I}{2} d\left(\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right) = -\mathbf{z}_0 \frac{n'I}{2} d(\cos\vartheta).$$

Интегрируя от Θ_1 до $\pi - \Theta_2$ (рис. 2.28*г*), получаем выражение напряженности поля соленоида в точке M:

$$\mathbf{H} = \mathbf{z}_0 \frac{n'I}{2}(\cos\Theta_1 + \cos\Theta_2). \qquad (2.105)$$

При $\Theta_1 \to 0$ и $\Theta_2 \to 0$ получаем выражение $\mathbf{H}$ на оси бесконечного соленоида:

$$\mathbf{H} = \mathbf{z}_0 n' I. \qquad (2.106)$$

§ 2.4. Энергия стационарных полей и их общие свойства (А)

2.4.1. Электрическая энергия и заряд. Вычисляя электрическую энергию на основании (1.112), мы должны произвести интегрирование по полной области существования поля, нередко бесконечной. Ввиду первого уравнения (2.18) любое стационарное электрическое поле (как, в частности, поле электростатическое) является потенциальным. Поэтому ввиду (2.21)

$$W^э = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{DE}\, dv = -\frac{1}{2}\int_V \mathbf{D}\operatorname{grad}\varphi\, dv. \qquad (2.107)$$

Учтем, далее, тождество (1.25), а также используем теорему Остроградского — Гаусса (1.33) и третье уравнение Максвелла. Это дает

$$W^э = \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi\, dv - \frac{1}{2}\oint_S \varphi \mathbf{D}\, \mathbf{ds}. \qquad (2.108)$$

Для локального распределения заряда в неограниченном пространстве, как будет показано, выражение (2.108) утрачивает поверхностный интеграл и принимает вид

$$W^э = \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi\, dv. \qquad (2.109)$$

При переходе от (2.107) к (2.109) существенно следующее. Хотя в процессе преобразований область интегрирования формально не изменялась, фактически вместо непосредственного подсчета энергии в бесконечном пространстве путем интегрирования ее плотности в V (2.107) теперь энергия находится при интегрировании только по области существования заряда: вне ее подынтегральное выражение (2.109) обращается в нуль.

ВЫВОД. Чтобы обосновать переход от (2.107) к (2.109) рассмотрим некоторое локальное распределение заряда (рис. 2.29) и,

распространяя интегрирование по V на бесконечное пространство, будем неограниченно увеличивать радиус шаровой области. В пределе $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\to r$ и $\mathbf{r}_{0q}\to\mathbf{r}_0$; при этом все распределение проявляет себя как точечный заряд $q=\int_V \rho\,dv$, расположенный в центре шара. Вычисляя φ и $\mathbf{D}$ по формулам (2.30) и (1.64), констатируем, что $\varphi\mathbf{D}$ на расширяющейся поверхности S убывает, как r^{-3}, тогда как дифференциал поверхности ds возрастает пропорционально r^2. Таким образом, поверхностный интеграл в (2.108) убывает, как r^{-1}, и в пределе должен исчезнуть. Тогда $\overset{\circ}{W}{}^{э}$ выражается только через объемный интеграл согласно (2.109). Формула обоснована.

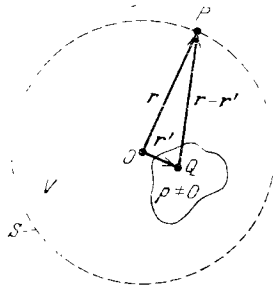


Рис. 2.29

Остается заметить, что объемный интеграл перестает изменять свое значение, как только расширяющаяся поверхность S начинает охватывать все заряды. Значит, поверхностный интеграл в (2.108) равен нулю уже в этом случае. ■

Ясно, что, если распределение заряда распадается на N отдельных областей V_i ($i=1, 2, \ldots, N$), несущих полные заряды q_i, выражение (2.109) может быть переписано в виде

$$W^{э}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int_{V_i}\rho\varphi\,dv. \tag{2.110}$$

В электростатике, если все V_i соответствуют проводящим телам,

$$W^{э}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\varphi_i\int_{V_i}\rho\,dv=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}q_i\varphi_i \tag{2.111}$$

(как известно (2.50), потенциалы проводников постоянны). Итак, энергия системы проводников выражается через их полные заряды и потенциалы. Заметим, что при интегрировании в (2.111) можно было бы в качестве промежуточного этапа перейти к плотности поверхностного заряда проводников, например, при помощи формулы (1.91).

Выражение энергии (2.111) можно еще переписать в виде

$$W^{э}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}q_i\overset{\circ}{\varphi}_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}q_i\widetilde{\varphi}_i=\overset{\circ}{W}{}^{э}+\widetilde{W}^{э}. \tag{2.112}$$

Здесь в первой сумме, обозначенной $\overset{\circ}{W}{}^{э}$, фигурируют потенциалы $\overset{\circ}{\varphi}_i$, которыми обладают уединенные проводники с зарядами q_i. Величина $\overset{\circ}{W}{}^{э}$, не зависящая от расположения и взаимного влияния проводников, называется *собственной энергией* системы. Вторая сумма $\widetilde{W}^{э}$ выражает *взаимную энергию* системы проводников. Из сопоставления (2.112) и (2.111) видно, что $\widetilde{\varphi}_i=\varphi_i-\overset{\circ}{\varphi}_i$.

Поскольку заряды и потенциалы проводников можно связать при помощи соотношений типа (2.58) и (2.59), существуют еще иные формы представления энергии системы проводников. Для одиночного проводника ($N=1$) из (2.112) с привлечением формулы (2.54) получаем

$$W^{э}={}^1\!/_2 q\varphi={}^1\!/_2 C\varphi^2={}^1\!/_2 q/C. \tag{2.113}$$

В случае конденсатора ($N=2$, $q_1=q$, $q_2=-q$), обозначая $\varphi_1-\varphi_2=\Delta\varphi$, с учетом выражения (2.56) находим

$$W^{э}={}^1\!/_2 q\Delta\varphi={}^1\!/_2 C(\Delta\varphi)^2={}^1\!/_2 q/C. \tag{2.114}$$

Что можно сказать об энергии точечных зарядов? При попытке перехода к объектам исчезающе малых размеров, обладающих заданными зарядами (это могут быть, например, проводящие шары), представление о собственной энергии теряет смысл, поскольку собственные потенциалы $\overset{\circ}{\varphi}_i$ ввиду (2.30) расходятся при $r\to 0$. В этом сказывается принципиальное несовершенство физической модели в виде «заряженной точки». Но можно говорить о взаимной энергии системы точечных зарядов.

Рассмотрим также вопрос о взаимодействии точечных зарядов с заданным полем $\mathbf{E}=-\operatorname{grad}\varphi$ при условии $\varphi=0$ в бесконечности. Как известно (п. 2.1.2), работа, совершаемая при удалении точечного заряда q из поля, есть $q\varphi$ — энергия взаимодействия заряда с полем. При наличии нескольких зарядов q_i ($i=1, 2, \ldots, N$) величины $q_i\varphi_i$ складываются и получается энергия взаимодействия системы зарядов с заданным полем. Легко показать, что в случае диполя с электрическим моментом $\mathbf{p}$ энергия взаимодействия с полем $\mathbf{E}$ оказывается равной

$$\widetilde{W}_E=-\mathbf{pE}. \tag{2.115}$$

Действительно, согласно сказанному, $\widetilde{W}_E=q_1\varphi_1+q_2\varphi_2=q(\varphi_2-\varphi_1)=q\frac{\partial\varphi}{\partial l}\,l=\mathbf{p}\operatorname{grad}\varphi$, откуда и следует (2.115) после привлечения (2.21).

2.4.2. Магнитная энергия. Индуктивность. Будем вычислять магнитную энергию некоторого стационарного поля на основании общего выражения (1.111), но учтем, что магнитная индукция согласно (2.89) может быть выражена через векторный потенциал:

$$W^{м}=\frac{1}{2}\int_V\mathbf{BH}\,dv=\frac{1}{2}\int_V\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{A}\,dv. \tag{2.116}$$

Далее привлечем тождество (1.26), теорему Остроградского — Гаусса (1.33) и первое уравнение Максвелла. В результате получаем

$$W^{\text{м}} = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{jA}\,dv + \frac{1}{2}\oint_S [\mathbf{A}, \mathbf{H}]\,\mathbf{ds}. \qquad (2.117)$$

Чтобы определить полную энергию поля, связанного с локальными токами в однородной среде, следует распространить интегрирование на все пространство. При этом оказывается, что поверхностный интеграл исчезает, как только S начинает охватывать все токи, так что

$$W^{\text{м}} = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{jA}\,dv. \qquad (2.118)$$

Как и в случае электрической энергии стационарного поля, вычисляемой по формуле (2.109), здесь магнитная энергия определяется не путем учета ее распределения в пространстве, а через источники поля.

ВЫВОД. Переход от (2.117) к (2.118) производится по уже известной схеме, в которой расширяющаяся область V остается шаровой (рис. 2.29). Подынтегральное выражение второго члена (2.117) [A, H] убывает, как r^{-5}, поскольку магнитное поле токов имеет характер дипольного (согласно (2.101) и (2.102)). Поверхностный интеграл должен в пределе исчезнуть, но поскольку объемный интеграл не изменяется с того момента, как S начинает охватывать все токи, то видно, что при этом поверхностный интеграл уже становится равным нулю. ■

Формула (2.118) является весьма общей. Она может быть применена, если задано некоторое распределение тока $\mathbf{j}$ в объеме V. Векторный потенциал $\mathbf{A}$ согласно (2.94) пропорционален $\mathbf{j}$. Поэтому можно сказать, что магнитная энергия $W^{\text{м}}$ пропорциональна квадрату плотности тока в любой точке объема V, а также квадрату тока, проходящего через любую поверхность s, рассекающую V. В большинстве случаев s выбирается однозначно. Например, ясно, о каком токе может идти речь в случае области, показанной на рис. 2.30*а* (поперечное сечение тока s заштриховано). Итак, магнитную энергию стационарного поля можно выразить в форме

$$W^{\text{м}} = \frac{1}{2}\mathscr{L}I^2, \qquad (2.119)$$

где коэффициент пропорциональности $\mathscr{L}$ называется *индуктивностью*; эта величина измеряется в *генри* [Гн].

Внесем представление векторного потенциала (2.94) в выражение магнитной энергии (2.118). Это дает

$$W^{\text{м}} = \frac{\mu_0\mu}{8\pi}\int_V\int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})\,\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dv\,dv', \qquad (2.120)$$

поэтому

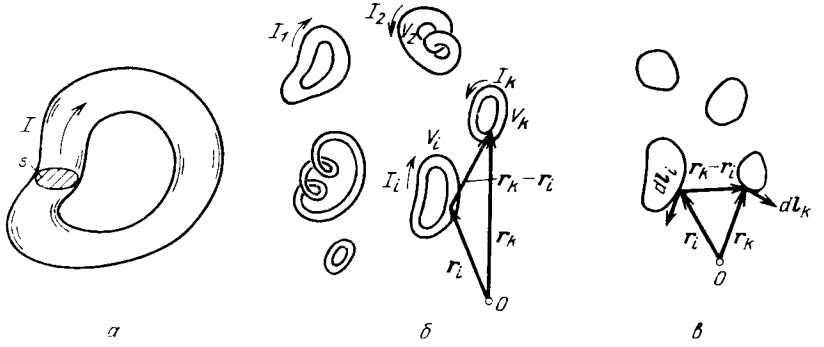
$$\mathscr{L} = \frac{\mu_0\mu}{4\pi I^2}\int_V\int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})\,\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dv\,dv'. \qquad (2.121)$$

Очевидно, что при заданном распределении тока (той или иной функции $\mathbf{j}(\mathbf{r})$) результат интегрирования не будет зависеть от величины тока I.

В случае системы разделенных областей тока V_i выражение энергии (2.118) можно записать в виде

$$W^{\text{м}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int_{V_i}\mathbf{jA}\,dv = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\int_{V_i}\mathbf{jA}_k\,dv, \qquad (2.122)$$

где $\mathbf{A}_k$ — векторный потенциал, обязанный своим происхождением только току области V_k (в любой точке пространства $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \ldots + \mathbf{A}_N$). Таким образом, энергия $W^{\text{м}}$ для N областей тока



а *б* *в*

Рис. 2.30

представляется двойной суммой, слагаемые которой обозначим $W^{\text{м}}_{ik}$. Воспользовавшись формулой (2.94), можно придать этим слагаемым форму сходную с (2.121):

$$W^{\text{м}}_{ik} = \frac{1}{2}\int_{V_i}\mathbf{jA}_k\,dv = \frac{\mu_0\mu}{8\pi}\int_{V_i}\int_{V_k}\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_i)\,\mathbf{j}(\mathbf{r}_k)}{|\mathbf{r}_k-\mathbf{r}_i|}\,dv_i dv_k \qquad (2.123)$$

(рис. 2.30*б*). Подобно (2.119) запишем

$$W^{\text{м}}_i = \frac{1}{2}\mathscr{L}_i I_i^2, \quad W^{\text{м}}_{ik} = \frac{1}{2}\mathscr{M}_{ik} I_i I_k, \qquad (2.124)$$

где (ср. (2.121))

$$\mathscr{L}_i = \frac{\mu_0\mu}{4\pi I_i^2}\int_{V_i}\int_{V_i}\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})\,\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dv\,dv',$$
$$\mathscr{M}_{ik} = \frac{\mu_0\mu}{4\pi I_i I_k}\int_{V_i}\int_{V_k}\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_i)\,\mathbf{j}(\mathbf{r}_k)}{|\mathbf{r}_k-\mathbf{r}_i|}\,dv_i\,dv_k. \qquad (2.125)$$

Введенные коэффициенты $\mathscr{L}_i$ и $\mathscr{M}_{ik}$ называются соответственно *собственными* и *взаимными индуктивностями*. Как видно из (2.125), $\mathscr{M}_{ik} = \mathscr{M}_{ki}$.

Перепишем теперь формулу (2.122) в виде

$$W^{\text{м}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\mathscr{L}_i I_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1\\(i\neq k)}}^{N}\sum_{k=1}^{N}\mathscr{M}_{ik} I_i I_k. \qquad (2.126)$$

Первая сумма выражает *собственную энергию* системы, а вторая — *взаимную*.

Обсудим случай линейных токов. При этом (рис. 2.30*в*) интегрирование в (2.125) по объему сводится к контурному. В частности, для взаимных индуктивностей имеем

$$\mathscr{M}_{ik} = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\oint\limits_{L_i}\oint\limits_{L_k}\frac{\mathbf{dl}_i\,\mathbf{dl}_k}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|}. \qquad (2.127)$$

Аналогичное представление собственных индуктивностей для идеальных линейных токов не имеет смысла: интегралы расходятся (ср. случай идеальных точечных зарядов в п. 2.4.1). При вычислении $\mathscr{L}_i$ для реальных токов, принимаемых за линейные, надо пользоваться формулами (2.125).

Выражая магнитную энергию, в ряде случаев используют понятие магнитного потока Ф (1.63). Магнитный поток через поверхность S с контуром L выражается в виде контурного интеграла от **A**:

$$\int\limits_S \mathbf{B}\,\mathbf{ds} = \oint\limits_L \mathbf{A}\,\mathbf{dl} \qquad (2.128)$$

(достаточно выразить **B** в виде rot **A** и применить теорему Стокса (1.34)). Поэтому, в частности, переходя в соотношении (2.123) к линейным токам, находим

$$\int\limits_{V_i}\mathbf{j}\mathbf{A}_k\,dv = I_i\oint\limits_{L_i}\mathbf{A}_k\,\mathbf{dl} = I_i\int\limits_{S_i}\mathbf{B}_k\,\mathbf{ds},$$

т. е.

$$W^{\text{м}}_{ik} = \frac{1}{2}I_i\Phi_{ik}, \qquad (2.129)$$

а сопоставление (2.129) и (2.124) дает

$$\Phi_{ik} = \mathscr{M}_{ik}I_k. \qquad (2.130)$$

В формулах (2.129) и (2.130) Φ_{ik} есть магнитный поток, создаваемый k-м током, проходящим через i-й контур. На основании соотношения (2.130) во многих случаях удобно вычислять взаимные индуктивности.

Собственную энергию для некоторой области тока также можно выразить при помощи формулы типа (2.129):

$$W^{\text{м}} = {}^1\!/_2 I\Phi, \quad \Phi = \mathscr{L}I. \qquad (2.131)$$

пряженном с данным током I в области V, является непростым. Однако в общем случае представление о магнитном потоке Ф, со-

Пример 7. Определим взаимную индуктивность соленоида и малого витка, расположенного, как показано на рис. 2.31. Взяв в формуле (2.130) $k = 2$ (соленоид) и $i = 1$ (виток), при вычислении Φ_{12} будем считать магнитное поле однородным и воспользуемся формулой (2.105), согласно которой **H** в средней точке соленоида есть

$$\mathbf{H} = \mathbf{z}_0 n I_2 \left(4R_2^2 + l^2\right)^{-1/2} \qquad (2.132)$$

($n = n'l$ — число витков соленоида). Умножая **H** скалярно на $\mathbf{v}_0$ и πR_1^2 (площадь витка), получаем Φ_{12}, а после деления на I_2 определяем

$$\mathscr{M}_{12} = n\pi R_1^2\left(4R_2^2 + l^2\right)^{-1/2}\cos\vartheta. \blacksquare \qquad (2.133)$$

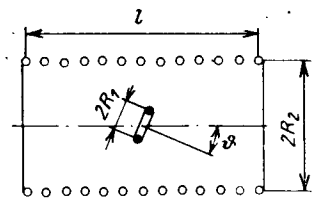


Рис. 2.31

Пример 8. Вернемся к примеру вычисления магнитной энергии внутри тороидальной системы, показанной на рис. 1.25*б*. Было найдено, что

$$W^{\text{м}} = \frac{I^2}{2}\frac{\mu_0\mu h}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}.$$

Легко убедиться, что магнитный поток Ф, проходящий через поперечное (радиальное) сечение тороида, равен $2W^{\text{м}}/I$; роль индуктивности играет величина $2W^{\text{м}}/I^2$. Все это согласуется с формулами (2.131). ■

Пример 9. Вычислим магнитную энергию $W^{\text{м}'}$, сосредоточенную внутри единицы длины цилиндрического провода. Выражая напряженность магнитного поля внутри провода согласно (1.58), как $\mathbf{H} = \alpha_0 Ir/2\pi R^2$ (I — полный ток провода), находим

$$W^{\text{м}'} = \frac{\mu_0\mu I^2}{8\pi^2 R^4}\int_0^R\int_0^{2\pi} r^3\,dr\,d\alpha = \frac{\mu_0\mu I^2}{16\pi}. \qquad (2.134)$$

Согласно (2.131) находим величину

$$\mathscr{L}'_i = \mu_0\mu/8\pi, \qquad (2.135)$$

которую называют *внутренней индуктивностью* провода. Как видно, $\mathscr{L}'_i$ не зависит от его радиуса. ■

2.4.3. Общие свойства стационарного электромагнитного поля. Вернемся к обсуждению системы уравнений (2.18). Из первого уравнения левого столбца следует, что стационарное электрическое поле подобно электростатическому является потенциальным. Этот факт уже был использован выше в п. 2.4.1. Однако нельзя утверждать, что все свойства электростатического поля повторяются. Если в отличие от электростатики в проводниках существуют токи, то там имеется и электрическое поле $\mathbf{E} = \sigma^{-1}\mathbf{j}$. Касательные токи на

поверхностях проводящих тел обусловливают отличную от нуля тангенциальную компоненту вектора $\mathbf{E}$, а так как $E_\tau = -\partial\varphi/\partial\tau$, то поверхности проводников уже не эквипотенциальны. Впрочем, на практике часто тангенциальная компонента вектора $\mathbf{E}$ на поверхности проводника очень мала по сравнению с нормальной; иными словами, несмотря на существование постоянного тока, электрические силовые линии почти ортогональны поверхности проводника.

Пример 10. Пусть расстояние между параллельными медными шинами с постоянным током составляет 1 см при напряжении 10 В и плотности тока 10 А/мм^2. Очевидно $E_\tau = j\sigma^{-1} \approx 0{,}17$ В/м ($\sigma = 5{,}8\cdot 10^7$ См/м, табл. 1.2; $j = 10^7$ А/м^2). Поле между шинами почти однородно, так что $E_\nu \approx 10^3$ В/м. Таким образом, $E_\tau/E_\nu \approx 1{,}7\cdot 10^{-4}$. ■

Рассмотрим далее баланс энергии стационарного электромагнитного поля, полагая, что все токи сосредоточены в некотором объеме V. Уравнение баланса энергии (1.105) в данном случае принимает вид

$$\oint_S [\mathbf{E}, \mathbf{H}]\, d\mathbf{s} + \int_V \mathbf{jE} dv = 0. \qquad (2.136)$$

Если неограниченно увеличивать объем V, сохраняя, как это уже делалось нами в аналогичных случаях, его шаровую форму, станет ясно, что поверхностный интеграл равен нулю. Действительно, в пределе он обязательно должен быть равен нулю, так как $\mathbf{E}$ убывает не медленнее, чем r^{-2} (подобно полю точечного заряда), а $\mathbf{H}$ — как r^{-3} (поле диполя), тогда как дифференциал поверхности возрастает только пропорционально r^2. Но объемный интеграл в этом процессе не изменяется, поскольку с самого начала все токи локализованы внутри V. Таким образом, объемный интеграл тоже равен нулю. Итак, из (2.136) следует

$$\oint_S [\mathbf{E}, \mathbf{H}]\, d\mathbf{s} = 0, \quad \int_V \mathbf{jE} dv = 0, \qquad (2.137)$$

т. е. равны нулю поток энергии через поверхность S, охватывающую все токи в V, и полная мощность P в объеме V.

Во-первых, отсюда можно сделать вывод, что стационарное электромагнитное поле не создает излучения. Впрочем, из самого факта стационарности следует, что энергия поля, связанного с данной системой токов, остается постоянной.

Во-вторых, выразив плотность мощности $p = \mathbf{jE}$ под знаком соответствующего интеграла в (2.137) как $\sigma^{-1}\mathbf{j}^2 - \mathbf{jE}^{ст}$ (1.97), получаем

$$\int_V \sigma^{-1}\mathbf{j}^2 dv = \int_V \mathbf{jE}^{ст} dv. \qquad (2.138)$$

Если сторонние силы отсутствуют ($\mathbf{E}^{ст} = 0$), то очевидно, что $\mathbf{j} = 0$. Действительно, величина $\sigma^{-1}\mathbf{j}^2$ не может быть отрицательной, а следовательно, она равна нулю вместе с интегралом. Вывод заключается в том, что постоянные токи и сопровождающее их стационарное поле не могут существовать без превращения энергии какого-то вида в электромагнитную, т. е. без притока энергии.

Рассмотрим некоторый линейный ток, проходящий по контуру L. По этому же контуру возьмем циркуляцию вектора $\mathbf{E}$. Согласно (2.20) она оказывается равной нулю. Поэтому, представив $\mathbf{E}$ как $\sigma^{-1}\mathbf{j} - \mathbf{E}^{ст}$ (1.96), приходим к следующему равенству:

$$\oint_L \sigma^{-1}\mathbf{j}\, d\mathbf{l} = \oint_L \mathbf{E}^{ст} d\mathbf{l}. \qquad (2.139)$$

Полагая, что речь идет о реальном линейном токе, выразим j в виде I/S, где S — поперечное сечение канала тока I, который не изменяется вдоль контура. Поэтому интеграл слева в (2.139) равен $\sigma^{-1}(I/S)l$ (l — длина контура L). Это не что иное, как произведение тока на сопротивление цепи $\mathcal{R} = l/\sigma S$ (см. п. 1.3.3). Таким образом, обозначая циркуляцию от $\mathbf{E}^{ст}$ через $\mathcal{Э}^{ст}$, имеем:

$$I\mathcal{R} = \mathcal{Э}^{ст}. \qquad (2.140)$$

Полученное равенство имеет смысл *закона Ома для цепи постоянного тока*, причем $\mathcal{Э}^{ст}$ есть действующая в цепи э. д. с.

Переход к линейному току можно было произвести в (2.138), тогда получается $I^2\mathcal{R} = I\mathcal{Э}^{ст}$, откуда опять-таки вытекает закон Ома (2.140). В то же время соотношение (2.138) дает основание для получения более общих выражений сопротивления $\mathcal{R}$ и э. д. с. $\mathcal{Э}^{ст}$:

$$\mathcal{R} = \frac{1}{I^2}\int_V \sigma^{-1}\mathbf{j}^2 dv, \quad \mathcal{Э}^{ст} = \frac{1}{I}\int_V \mathbf{jE}^{ст} dv \qquad (2.141)$$

(о том, что понимается под током I для некоторой области V, уже говорилось в п. 2.4.2).

2.4.4. Аналогия постоянных токов и электростатических полей. Запишем две группы уравнений:

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, && \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0,\\ &\operatorname{div}\mathbf{D} = 0, && \operatorname{div}\mathbf{j} = 0,\\ &\mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}; && \mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}. \end{aligned} \qquad (2.142)$$

В левом столбце — система уравнений электростатики в отсутствие зарядов ($\rho = 0$), а в правом — идентичные по форме уравнения относительно плотности постоянного тока и напряженности электрического поля в проводящей среде. Вторая строчка справа — это частная форма уравнения (1.44). Видно, что $\mathbf{j}$ в правом столбце играет такую же роль, как $\mathbf{D}$ — в левом, а при замене

$$\varepsilon_0\varepsilon \rightleftharpoons \sigma, \quad \mathbf{D} \rightleftharpoons \mathbf{j} \qquad (2.143)$$

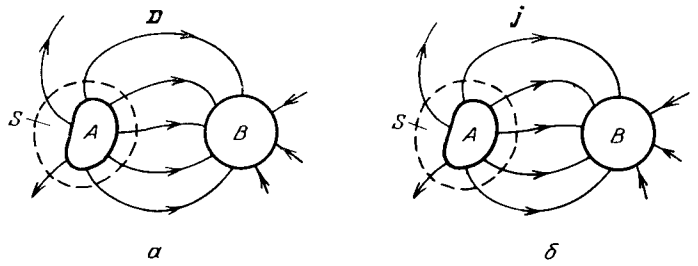
одна группа уравнений переходит в другую.

Добавим, что в обоих случаях тангенциальная компонента вектора $\mathbf{E}$ непрерывна на границе раздела сред, а непрерывности нор-

мальной компоненты вектора **D** в электростатике соответствует непрерывность нормальной компоненты плотности тока **j** (**D** и **j** соленоидальны: ведут себя, как **B**, см. п. 1.4.3).

Хотя отмеченная аналогия имеет чисто формальный характер, она в ряде случаев оказывается полезной на практике.

На рис. 2.32*а* представлено некоторое электростатическое поле в идеальном диэлектрике при наличии двух проводящих тел A и B.



а *б*

Рис. 2.32

Такую же практически структуру имеет поле токов в плохо проводящей среде, в которую помещены те же тела A и B (рис. 2.32*б*) при условии их хорошей проводимости. Чтобы убедиться в этом, надо не только учесть аналогию уравнений (2.142), но и установить, что **D** в первом случае и **j** во втором одинаково ведут себя на границах тел A и B. Как известно, в электростатике линии вектора **E** (а при изотропии и вектора **D**) ортогональны проводящим поверхностям. Что касается вектора **j**, то, как уже отмечалось, его нормальная компонента непрерывна ($j_{v1} = j_{v2}$); в то же время непрерывна тангенциальная компонента вектора **E**, а следовательно, $\sigma_1^{-1} j_{\tau 1} = \sigma_2^{-1} j_{\tau 2}$. Если $\sigma_2 \gg \sigma_1$, то отсюда следует, что $j_{\tau 1}/j_{v1} \ll j_{\tau 2}/j_{v2}$. Это и дает основание считать линии вектора **j** почти ортогональными границам с относительно высокой проводимостью областей.

Из данного рассмотрения, в частности, следует, что вместо расчета электростатического поля при наличии сложной системы проводников можно поместить эти проводники (обычно металлические элементы) в электролит, удельная проводимость которого значительно ниже, и произвести экспериментальное исследование распределения тока при заданных потенциалах. Такое моделирование давно применяется в инженерной практике.

Как известно, в электростатике систему двух проводников с одинаковыми по величине, но разноименными зарядами можно охарактеризовать емкостью C, определяемой по формуле (2.56). Запишем выражение емкости для такой системы (рис. 2.32*а*), выразив заряд q в виде потока вектора **D** через поверхность, охватывающую проводник A; разность потенциалов $\Delta\varphi$ представим при помощи

формулы (2.24):

$$C = \oint_S \mathbf{D}\,d\mathbf{s} \left(\int_A^B \mathbf{E}\,d\mathbf{l} \right)^{-1} = q/\Delta\varphi. \tag{2.144}$$

Сделав здесь замену $\mathbf{D} \to \mathbf{j}$, построим аналогичный параметр для второй задачи (рис. 2.32*б*). При этом получается выражение *проводимости*:

$$G = \oint_S \mathbf{j}\,d\mathbf{s} \left(\int_A^B \mathbf{E}\,d\mathbf{l} \right)^{-1} = I/\Delta\varphi. \tag{2.145}$$

Очевидно, что поток вектора **j** в числителе — это полный ток I, выходящий из поверхности тела A. Его обычно называют *током утечки*.

§ 2.5. Квазистационарные поля (А)

2.5.1. Общие представления. *Квазистационарными* называют поля, которые, будучи переменными, тем не менее сохраняют в своей структуре основные черты стационарных. Предположим, что для заданной системы постоянных токов найдено магнитное поле $\mathbf{H}(\mathbf{r})$. Можно представить себе столь медленное изменение этих токов во времени, что оно не вызовет заметного перераспределения поля в пространстве. Иными словами, при временно́м законе токов $f(t)$ поле $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ имеет вид $f(t)\mathbf{H}(\mathbf{r})$ и, следовательно, в каждый момент t сохраняет структуру стационарного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r})$, изменяясь только по величине. Аналогично описывается и поле электрическое.

Такой приближенный подход исторически появился, когда в электротехнике приобрели практический интерес переменные токи. Представление о цепи переменного тока позднее стало играть важную роль в радиотехнике. Во Введении уже отмечалось, что это представление не безупречно: оно отказывает при достаточно высоких частотах. Об этом будет говориться подробнее ниже в п. 2.5.2.

Особенностью теории квазистационарных процессов является использование уравнений Максвелла в интегральной форме вместе с такими понятиями, как индуктивность и емкость, происходящими из теории стационарных и статических полей.

Возьмем, например, второе уравнение Максвелла в форме (1.62). Если рассматриваются контуры L_k ($k = 1, 2, \ldots, N$) с токами I_k, то согласно (2.130), (2.131) можно следующим образом выразить магнитный поток Φ_i, проходящий через контур L_i:

$$\Phi_i = \sum_{k=1}^{N} \Phi_{ik} = \mathscr{L}_i I_i + \sum_{k=1(k\neq i)}^{N} \mathscr{M}_{ik} I_k.$$

Внося это в (1.62), определяем э. д. с. $\mathcal{E}_i$, наводимую в контуре L_i в результате изменения магнитного потока через этот контур,

создаваемого всеми контурами:

$$\mathcal{Э}_i = -\frac{d\Phi_i}{dt} = -\mathscr{L}_i \frac{dI_i}{dt} - \sum_{\substack{k=1 \\ (k\neq i)}}^{N} \mathscr{M}_{ik} \frac{dI_k}{dt}. \qquad (2.146)$$

Входящие в (2.146) индуктивности определяются на основе тех распределений поля в пространстве, которые свойственны стационарным полям.

Такие понятия, как разность потенциалов (напряжение), емкость, применяются на том основании, что, как и при отсутствии изменений во времени, электрическое поле полагается потенциальным. На самом деле квазистационарное электрическое поле уже не потенциально, поскольку $\operatorname{rot}\mathbf{E} \neq 0$, как, в частности, было при получении равенства (2.146).

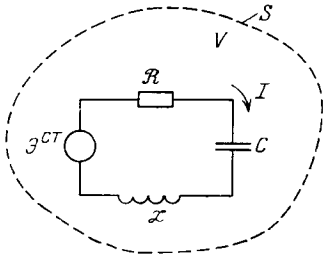


Рис. 2.33

2.5.2. Энергетический баланс и представление о цепи переменного тока. Будем рассматривать какую-либо систему, обычно трактуемую как цепь переменного тока, которая составлена из последовательно соединенных сопротивления $\mathscr{R}$, индуктивности $\mathscr{L}$ и емкости C, а также генератора, источника э. д. с. $\mathcal{Э}^{ст}$ (рис. 2.33). Проследим, каким образом и при каких допущениях из общих представлений электродинамики возникает теория такой цепи.

В основу рассуждений положим уравнение баланса энергии электромагнитного поля (1.105). Пусть рассматриваемая система находится внутри объема V, ограниченного поверхностью S. Пренебрежем излучением, т. е. будем считать, что как и для стационарного поля в данном случае

$$\oint_S [\mathbf{E}, \mathbf{H}]\, d\mathbf{s} = 0. \qquad (2.147)$$

Поскольку распределения электрического и магнитного полей в пространстве близки к стационарным, электрическую и магнитную энергию будем находить по формулам (2.113) и (2.119)

$$W^э = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \varepsilon \mathbf{E}^2 dv = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}, \qquad (2.148)$$

$$W^м = \frac{\mu_0}{2}\int_V \mu \mathbf{H}^2 dv = \frac{1}{2}\mathscr{L} I^2. \qquad (2.149)$$

Здесь важно отметить следующее. Входящие в (2.148) и (2.149) параметры C и $\mathscr{L}$ только в том случае могут принять смысл емкости и индуктивности элементов обсуждаемой цепи, если один из ее

элементов действительно концентрирует в себе практически всю электрическую энергию, а другой — всю магнитную. Тогда интегрирование в (2.148), (2.149) распространяется лишь на соответствующие реактивные элементы цепи.

Далее, ввиду (1.97)

$$P = \int_V \sigma^{-1}\mathbf{j}^2 dv - \int_V \mathbf{j}\mathbf{E}^{ст} dv, \qquad (2.150)$$

и мы подобно предыдущему (п. 2.4.3) представим записанные интегралы в виде $I^2\mathscr{R}$ и $-I\mathcal{Э}^{ст}$ соответственно. Таким образом, $\mathscr{R}$ и $\mathcal{Э}^{ст}$ определяются формулами (2.141).

Остается, учитывая (2.150), внести $W = W^э + W^м$ и $P = I^2\mathscr{R} - I\mathcal{Э}^{ст}$ в уравнение (1.105). Это дает

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathscr{L}I^2}{2} + \frac{q^2}{2C}\right) + I^2\mathscr{R} = I\mathcal{Э}^{ст}. \qquad (2.151)$$

Продифференцируем выражение в круглых скобках по t, учитывая, что $dq/dt = I$, и разделим все члены на I. В результате

$$\mathscr{L}\frac{dI}{dt} + \mathscr{R}I + \frac{q}{C} = \mathcal{Э}^{ст}, \qquad (2.152)$$

а при вторичном дифференцировании

$$\mathscr{L}\frac{d^2I}{dt^2} + \mathscr{R}\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{d\mathcal{Э}^{ст}}{dt}. \qquad (2.153)$$

Это известное уравнение теории цепей переменного тока.

Оно получено в пренебрежении излучением, распределение полей предполагалось близким к стационарному, электрическое и магнитное поля считались сосредоточенными в различных областях. Кроме того на стадии получения равенства (2.151) был использован принцип цепи: идентичность тока $I(t)$ в любой момент t во всех элементах. Все эти допущения оказываются неправомерными для достаточно быстрых процессов. К этому мы еще вернемся в гл. 9 в теории излучения.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти электростатическое поле равномерно заряженного ($\rho = \text{const}$) бесконечного цилиндра.

Как изменится результат, если рассматривается проводящий цилиндр того же диаметра при прежней погонной плотности заряда?

2. Найти емкость, приходящуюся на единицу площади системы параллельных проводящих плоскостей.

3. Усложнить предыдущую задачу, заполнив пространство между проводящими плоскостями несколькими слоями диэлектрика с разными проницаемостями.

4. Как изменится физический смысл потенциала, если изменить знак в формуле (2.21)?

5. Вывести формулу (2.31), исходя из (2.28).

6. Исходя из выражения напряженности поля точечного заряда, получить формулировку закона Кулона.

7. Почему вывод формулы (2.28) нельзя считать строгим?

8. Показать, что уравнение силовых линий диполя имеет вид

$$\sin^2\vartheta/r = \text{const}. \tag{2.154}$$

Указание: решить обыкновенное дифференциальное уравнение, получаемое на основе аналога соотношения (1.16) в сферических координатах.

9. Показать, что для системы двух параллельных нитей с погонными зарядами τ и $-\tau$

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1}, \tag{2.155}$$

где r_1 и r_2 — расстояния рассматриваемой точки от нитей.

10. Найти плотность поверхностного заряда на проводящей плоскости, над которой на расстоянии h расположена бесконечная равномерно заряженная нить.

11. Найти поле диполя, расположенного вертикально (горизонтально) на высоте h над проводящей плоскостью.

12. Найти потенциал в случае равномерно заряженного проводящего цилиндра, решая граничную задачу для уравнения Лапласа.

13. Показать, что из (2.63) следует (2.62).

14. Выписать выражения напряженности магнитного поля для случаев провода (см. рис. 2.21*а*) и полого цилиндра (см. рис. 2.21*б*) с постоянным током.

15. Найти магнитное поле при наличии плоского проводящего слоя, внутри которого равномерно распределен прямолинейный постоянный ток.

Указание: применить формулу (1.53).

16. Показать, что в случае двухпроводной линии в виде параллельных нитей с противоположными постоянными токами

$$\mathbf{A} = \mathbf{z}_0\frac{\mu_0\mu I}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}, \tag{2.156}$$

где r_1 и r_2 — расстояния рассматриваемой точки от нитей.

17. В случае равномерно заряженного проводящего шара получить формулу (2.113) путем подсчета энергии интегрированием ее плотности в пространстве.

18. Вычислить энергию равномерно заряженного диэлектрического шара.

19. Найти собственную и взаимную энергию двух проводящих шаров (радиусы R_1 и R_2), расположенных на расстоянии l, значительно превышающем их размеры.

20. Найти взаимную индуктивность двух круговых соосных контуров тока, лежащих в параллельных плоскостях, при условии, что площадь одного из контуров относительно мала.

Указание: считать поле большего контура однородным в области меньшего.

21. Показать, что погонная индуктивность коаксиального кабеля равна

$$\mathscr{L}' = \frac{\mu_0}{2\pi}\left\{\frac{\mu_1}{(R_3^2-R_2^2)^2}\left[R_3^4\ln\frac{R_3}{R_2} - \frac{R_3^2}{2}\left(R_3^2-R_2^2\right)\right] + \mu_2\ln\frac{R_2}{R_1}\right\}. \tag{2.157}$$

Здесь R_1 — радиус внутреннего проводника, R_2 и R_3 — радиусы внешнего полого проводника; μ_1 и μ_2 относятся к проводнику и внутренней среде соответственно.

22. В результате несовершенства диэлектрической изоляции в коаксиальном кабеле возникает радиальный ток. Показать, что погонная «проводимость утечки» равна

$$G' = 2\pi\sigma/\ln R_2/R_1. \tag{2.158}$$

23. Вывести закон Кирхгофа для разветвления цепи из закона сохранения заряда.

24. Показать, что в случае, если вместо проводящего шара в однородное электростатическое поле вносится цилиндр, то вместо выражения внешнего поля (2.71) получается:

$$\mathbf{E}_e = E_0\left[\mathbf{r}_0\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)\cos\alpha - \boldsymbol{\alpha}_0\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\sin\alpha\right]. \tag{2.159}$$

25. Показать, что при внесении в однородное электростатическое поле диэлектрического цилиндра имеем:

$$\mathbf{E}_e = E_0\left[\mathbf{r}_0\left(1+\frac{R^2}{r^2}\frac{\varepsilon_i-\varepsilon_e}{\varepsilon_i+\varepsilon_e}\right)\cos\alpha - \boldsymbol{\alpha}_0\left(1-\frac{R^2}{r^2}\frac{\varepsilon_i-\varepsilon_e}{\varepsilon_i+\varepsilon_e}\right)\sin\alpha\right], \tag{2.160}$$

$$\mathbf{E}_i = \frac{2\varepsilon_e\mathbf{E}_0}{\varepsilon_i+\varepsilon_e}$$

(ср. решение для шара (2.75)).

Глава 3

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

§ 3.0. Используемые математические понятия и символы (А)

3.0.1. Гармонические колебания и комплексные амплитуды. Если некоторая величина $u(t)$ изменяется во времени по закону

$$u(t) = u_m\cos(\omega t+\varphi), \tag{3.1}$$

то говорят, что происходят *гармонические колебания* этой величины. При этом u_m называется *амплитудой*, ω — *круговой частотой*, а аргумент косинуса $\omega t+\varphi$ — *фазой* (полной фазой); φ — *начальная фаза* колебаний. Гармонические колебания — периодический процесс. *Периодом* T называется наименьший отрезок времени, обладающий тем свойством, что $u(t+T)=u(t)$. Очевидно,

$$T = 2\pi/\omega = 1/f, \tag{3.2}$$

где f — *частота* колебаний, число периодов в секунду.

В теории электромагнетизма встречаются скалярные и векторные функции координат и времени, описывающие гармонические колебания. Такова скалярная функция

$$u(x, y, z, t) \equiv u(\mathbf{r}, t) = u_m(\mathbf{r})\cos[\omega t+\varphi(\mathbf{r})], \tag{3.3}$$

амплитуда и начальная фаза которой — функции координат.

Аналогичная векторная функция $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ в общем случае распадается на три скалярных в выбранной системе координат, например:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{x}_0V_{mx}(\mathbf{r})\cos[\omega t+\varphi_x(\mathbf{r})] + \mathbf{y}_0V_{my}(\mathbf{r})\cos[\omega t+\varphi_y(\mathbf{r})] + \mathbf{z}_0V_{mz}(\mathbf{r})\cos[\omega t+\varphi_z(\mathbf{r})]. \tag{3.4}$$

Если, в частности, компоненты вектора имеют одинаковые начальные фазы, то эта запись принимает вид:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r},\ t) = \mathbf{V}_m(\mathbf{r})\cos[\omega t + \varphi(\mathbf{r})], \tag{3.5}$$

где $\mathbf{V}_m = \mathbf{x}_0 V_{mx} + \mathbf{y}_0 V_{my} + \mathbf{z}_0 V_{mz}$ и $\varphi = \varphi_x = \varphi_y = \varphi_z$.

В теории гармонических колебаний обычно применяется *метод комплексных амплитуд*, суть которого состоит в том, что вместо тригонометрических функций в выражениях типа (3.1), (3.3)—(3.5) употребляются экспоненциальные. При этом получаются комплексные представления физических величин, ниже обозначаемые точками. Например, вместо u (3.1) пишем

$$\dot{u} = u_m e^{i(\omega t+\varphi)} = \dot{u}_m e^{i\omega t}. \tag{3.6}$$

Здесь введено обозначение $\dot{u}_m = u_m e^{i\varphi}$; данная величина, несущая информацию об амплитуде и начальной фазе, называется *комплексной амплитудой*. В силу известной формулы Эйлера физическая величина u есть вещественная часть ее комплексного представления:

$$u = \operatorname{Re}\dot{u} = \operatorname{Re}\dot{u}_m e^{i\omega t}. \tag{3.7}$$

Примечательно следующее. Если, как в (3.3), амплитуда и фаза являются функциями координат, то комплексное представление (3.6) есть произведение функции координат $\dot{u}_m(\mathbf{r})$ и функции времени $\exp(i\omega t)$.

Запишем вытекающее из формулы Эйлера соотношение:

$$u = {}^1/_2(\dot{u} + \dot{u}^*), \tag{3.8}$$

где звездочка означает комплексное сопряжение.

В векторном варианте (3.4)

$$\mathbf{V} = \operatorname{Re}\dot{\mathbf{V}} = \operatorname{Re}\dot{\mathbf{V}}_m e^{i\omega t}, \tag{3.9}$$

где комплексная амплитуда, являющаяся функцией координат, есть

$$\dot{\mathbf{V}}_m = \mathbf{x}_0 V_{mx} e^{i\varphi_x} + \mathbf{y}_0 V_{my} e^{i\varphi_y} + \mathbf{z}_0 V_{mz} e^{i\varphi_z}. \tag{3.10}$$

Разумеется, справедлива также формула типа (3.8).

Метод комплексных амплитуд значительно упрощает технику преобразований при получении решений дифференциальных уравнений в частных производных. Все члены линейного дифференциального уравнения оказываются умноженными на $\exp(i\omega t)$. Опуская этот множитель, получаем уравнение относительно комплексной амплитуды, не зависящей от времени. Если в результате решения уравнения комплексная амплитуда определена, то для получения искомой физической величины надо лишь умножить комплексную амплитуду на $\exp(i\omega t)$ и отделить вещественную часть.

Почему такой подход правомерен? Дело в том, что если существует решение некоторого линейного уравнения (алгебраического, дифференциального или интегрального) в виде комплексного представления $\dot{u}$, то этому уравнению удовлетворяют в отдельности его вещественная и мнимая части, а тем самым решением является рассматриваемая физическая величина u.

3.0.2. Средние значения. Для периодической функции от t средним значением называется деленный на T интеграл от 0 до T. Очевидно, что среднее значение от u (3.1) равно нулю. Далее, среднее от квадрата гармонически колеблющейся величины есть

$$\overline{u^2} = \frac{1}{T}\int_0^T u^2 dt = \frac{u_m^2}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi)\, dt = \frac{1}{2}u_m^2 = \frac{1}{2}\dot{u}_m\dot{u}_m^*. \tag{3.11}$$

Результат усреднения дает половину квадрата амплитуды $u_m^2 = \dot{u}_m\dot{u}_m^*$; таким образом, результат оказалось возможным выразить через комплексные амплитуды. Заметим, что интеграл (3.11) легко взять, преобразовав подынтегральное выражение посредством (3.8).

Наряду с u (3.1) введем функцию $v = v_m\cos(\omega t + \psi)$ и найдем среднее от их произведения:

$$\overline{uv} = \frac{1}{T}\int_0^T uv\,dt = \frac{1}{4T}\int_0^T (\dot{u}_m\dot{v}_m e^{i2\omega t} + \dot{u}_m^*\dot{v}_m^* e^{-i2\omega t} + \dot{u}_m\dot{v}_m^* + \dot{u}_m^*\dot{v}_m)\, dt$$

(использована подстановка (3.8)). Первые два члена, выражающие гармонические колебания с частотами 2ω и -2ω, дают при интегрировании нуль. В результате

$$\overline{uv} = 1/2\operatorname{Re}\dot{u}_m\dot{v}_m^* = 1/2\operatorname{Re}\dot{u}_m^*\dot{v}_m = 1/2 u_m v_m\cos(\varphi - \psi). \tag{3.12}$$

Запишем, наконец, в готовом виде подобные же формулы для векторных величин:

$$\overline{\mathbf{V}^2} = 1/2\,\dot{\mathbf{V}}_m\dot{\mathbf{V}}_m^*, \tag{3.13}$$

$$\overline{\mathbf{V}\mathbf{W}} = 1/2\operatorname{Re}\dot{\mathbf{V}}_m\dot{\mathbf{W}}_m^* = 1/2\operatorname{Re}\dot{\mathbf{V}}_m^*\dot{\mathbf{W}}_m, \tag{3.14}$$

$$\overline{[\mathbf{V},\mathbf{W}]} = 1/2\operatorname{Re}[\dot{\mathbf{V}}_m, \dot{\mathbf{W}}_m^*] = 1/2\operatorname{Re}[\dot{\mathbf{V}}_m^*, \dot{\mathbf{W}}_m]. \tag{3.15}$$

Здесь $\mathbf{W}$ — векторная функция, подобная $\mathbf{V}$ (3.4). Формулы (3.12)—(3.15) легко выводятся прежним способом — с использованием для $\mathbf{V}$ и $\mathbf{W}$ представления (3.8).

3.0.3. Разложение Фурье и комплексные амплитуды. Разлагая некоторую периодическую функцию в ряд Фурье

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin n\omega t, \tag{3.16}$$

представим его в комплексной форме:

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{c}_n e^{in\omega t}, \quad \dot{c}_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)\, e^{-in\omega t} dt, \tag{3.17}$$

где $\dot{c}_{-n} = \dot{c}_n^* = (a_n - ib_n)/2$. Как видно, коэффициенты ряда (3.17) — не что иное, как комплексные амплитуды, а члены — комплексные представления гармонических колебаний с частотами $n\omega$ ($\ldots, -2\omega, -\omega, 0, \omega, 2\omega, \ldots$).

В случае произвольной временной зависимости запишем разложение в интеграл Фурье:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega, \quad \dot{u}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, e^{-i\omega t} dt. \tag{3.18}$$

Спектральная плотность $\dot{u}(\omega)$ также имеет смысл комплексной амплитуды.

§ 3.1. Уравнения электродинамики (А)

3.1.1. Система уравнений Максвелла. Источники поля. В основе электродинамики лежит полная система уравнений Максвелла (1.119), при записи которой мы ограничимся вторым вариантом последней строки:

$$\begin{gathered} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \qquad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \\ \mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \qquad \mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}, \\ \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}^{\text{ст}}. \end{gathered} \tag{3.19}$$

Поскольку в п. 1.6.1 уже обсуждалась общность этой системы уравнений и ее фундаментальное значение (при некоторых оговорках, касающихся материальных уравнений, входящих в (3.19)), на этом не будем останавливаться. Подчеркнем лишь, что вместе с системой граничных условий (см. § 1.4) система уравнений Максвелла (3.19) образует аппарат нахождения электромагнитных полей. Интегральные аналоги уравнений Максвелла (1.53)—(1.56) такого аппарата не представляют.

Действие сторонних сил в системе уравнений (3.19) формализует плотность стороннего тока $\mathbf{j}^{\text{ст}}$. Предположим, что во всем пространстве или в какой-либо энергетически изолированной области $\mathbf{j}^{\text{ст}} = 0$, т. е. не действуют сторонние силы. Если при этом найдено физически осмысленное решение системы уравнений (3.19), то оно выражает *свободное* электромагнитное поле, т. е. поле, не обязанное своим происхождением процессу преобразования какого-то вида энергии в электромагнитную. Свободные поля, «не имеющие причины вне себя», будут рассматриваться в части 2.

При действии сторонних сил происходит *возбуждение* электромагнитного поля источниками. В отличие от свободного такое поле называют *вынужденным*, а также *полем излучения*.

В электродинамике в качестве стороннего тока в большинстве случаев выступает просто некоторый заданный ток. Например, при решении задач об излучении антенн очень часто исходят из заранее известного распределения тока на антенне. Разумеется, этот ток поддерживается питающим антенну генератором, который, в свою очередь, получает энергию от какого-то источника питания: аккумулятора, электроэнергетической сети и т. п. Вся цепь преобразований энергии выходит за рамки электродинамической задачи.

Сторонний ток нередко рассматривается как поверхностный и соответственно, характеризуется плотностью $\boldsymbol{\eta}^{\text{ст}}$ (ср. 1.82)); эта величина задается на границах проводников. Возбуждающим фактором может быть также проходящий через границу области поток энергии.

3.1.2. Уравнения электродинамики второго порядка. Из системы уравнений (3.19) можно исключить все неизвестные величины кроме напряженностей поля, а затем исключить $\mathbf{E}$ или $\mathbf{H}$. В конечном счете получаются дифференциальные уравнения второго порядка относительно одного из этих векторов.

Умножим все члены первого уравнения Максвелла на ε^{-1}, а второго — на μ^{-1} и применим операцию rot. Это дает

$$\operatorname{rot}(\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{H}) = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \operatorname{rot} \varepsilon^{-1} \mathbf{j},$$

$$\operatorname{rot}(\mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{E}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{H}.$$

Теперь входящие в правые части $\operatorname{rot}\mathbf{E}$ и $\operatorname{rot}\mathbf{H}$ заменим выражениями, вытекающими из первых двух уравнений Максвелла. В результате получаем

$$\operatorname{rot}(\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{H}) + \frac{\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \operatorname{rot} \varepsilon^{-1} \mathbf{j}, \tag{3.20}$$

$$\operatorname{rot}(\mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{E}) + \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}, \tag{3.21}$$

где обозначено $\varepsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$. Правые части этих уравнений в общем случае нельзя рассматривать как известные, но при $\sigma = 0$ (идеальный диэлектрик) $\mathbf{j} = \mathbf{j}^{\text{ст}}$. Тогда правые части определяются заданными источниками, однако они имеют смысл, если выполнимо требуемое дифференцирование.

Пусть среда однородна ($\varepsilon = \text{const}$, $\mu = \text{const}$). Вынося обратные проницаемости за знаки операций дифференцирования и применяя слева тождество (1.29), получаем

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\operatorname{rot} \mathbf{j}, \tag{3.22}$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \operatorname{grad} \rho + \mu_0 \mu \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \tag{3.23}$$

(учтено также, что $\operatorname{div}\mathbf{H}=0$ и $\operatorname{div}\mathbf{E}=\rho/\varepsilon_0\varepsilon$). Если $\mathbf{j}=\mathbf{j}^{ст}$, то $\rho=\rho^{ст}$; эти величины связаны законом сохранения заряда (1.44). Уравнения с левыми частями такого вида называют *уравнениями Даламбера* (в данном случае это векторные уравнения Даламбера). Если токи и заряды отсутствуют, уравнения (3.22), (3.23) утрачивают правые части. Такие однородные уравнения называют *волновыми*; смысл названия выяснится в дальнейшем (см. § 4.0).

При отсутствии изменений во времени уравнения Даламбера (3.22) и (3.23) переходят в уравнения Пуассона. Первое есть уравнение (2.82), о втором говорилось в п. 2.1.2. Интересно, что к этим же уравнениям Пуассона приводит пренебрежение токами смещения ($\partial D/\partial t=0$) при сохранении временно́й зависимости векторов поля.

3.1.3. Потенциалы в электродинамике. Как и в теории стационарных полей, в электродинамике традиционно используются различные вспомогательные векторные и скалярные функции. Мы обсудим употребление только уже известных потенциалов $\mathbf{A}$ и φ.

Зададим векторный потенциал $\mathbf{A}$ так, как это делалось в п. 2.3.2:

$$\mathbf{H}=(\mu_0\mu)^{-1}\operatorname{rot}\mathbf{A}. \tag{3.24}$$

Подстановка этого выражения $\mathbf{H}$ во второе уравнение Максвелла приводит к равенству:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{E}+\partial\mathbf{A}/\partial t)=0. \tag{3.25}$$

Мы видим, что векторная функция в скобках является потенциальной (ср. вывод о потенциальности электростатического поля в п. 2.1.2). Приравнивая эту функцию величине $-\operatorname{grad}\varphi$, получаем

$$\mathbf{E}=-\operatorname{grad}\varphi-\partial\mathbf{A}/\partial t. \tag{3.26}$$

Таким образом, напряженности поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ выражены при помощи соотношений (3.24) и (3.26) через потенциалы $\mathbf{A}$ и φ, которые в данном случае будем называть *электродинамическими*. Остается найти уравнения, которым они удовлетворяют.

Внося (3.24) и (3.26) в первое уравнение Максвелла, записываем в случае однородной среды

$$\operatorname{rotrot}\mathbf{A}+\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\operatorname{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\mu_0\mu\mathbf{j}.$$

При помощи (1.29) введем оператор Лапласа, это дает

$$\nabla^2\mathbf{A}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=\operatorname{grad}\left(\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{A}\right)-\mu_0\mu\mathbf{j}. \tag{3.27}$$

Налагая дополнительное условие

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{A}=0, \tag{3.28}$$

которое иногда называют *лоренцевой калибровкой*, получаем из равенства (3.27) следующее векторное уравнение Даламбера:

$$\nabla^2\mathbf{A}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\mu\mathbf{j} \tag{3.29}$$

относительно $\mathbf{A}$. Из (3.26) и (3.28) получается скалярное уравнение Даламбера относительно φ:

$$\nabla^2\varphi-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon} \tag{3.30}$$

(как и ранее, $\mathbf{j}=\mathbf{j}^{ст}$ и $\rho=\rho^{ст}$ при $\sigma=0$).

При отсутствии временно́й зависимости уравнения Даламбера (3.29), (3.30) переходят в известные уравнения Пуассона (2.93), (2.27), а лоренцева калибровка (3.28) — в кулоновскую (2.92).

§ 3.2. Гармонические колебания. Уравнения электродинамики в комплексной форме

3.2.1. Уравнения Максвелла относительно комплексных амплитуд. Комплексные проницаемости (А). Как уже отмечалось в п. 3.0.1, гармонически колеблющиеся электромагнитные поля представляют значительный интерес и, пожалуй, наиболее часто являются предметом анализа в радиоэлектронике (любые временны́е зависимости можно разлагать на гармонические колебания, см. п. 3.0.3).

Используя метод комплексных амплитуд (см. п. 3.0.1), заменим изменяющиеся по закону гармонических колебаний (3.4) векторы $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{j}$ комплексными представлениями $\dot{\mathbf{E}}=\dot{\mathbf{E}}_m\exp(i\omega t)$, $\dot{\mathbf{H}}=\dot{\mathbf{H}}_m\exp(i\omega t)$ и т. д. Внося эти комплексные представления в первые два уравнения Максвелла из (3.19) и устраняя общий множитель $\exp(i\omega t)$, записываем:

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_m=i\omega\dot{\mathbf{D}}_m+\dot{\mathbf{j}}_m,\quad \operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}_m=-i\omega\dot{\mathbf{B}}_m. \tag{3.31}$$

Таким образом, получены уравнения относительно комплексных амплитуд типа (3.10), утратившие временну́ю зависимость.

Легко убедиться, что уравнения Максвелла с дивергенциями являются прямыми следствиями полученной записи. Чтобы прийти к комплексным аналогам второй строки (3.19), достаточно применить операцию div слева и справа в (3.31) и учесть тождество (1.23), а также закон сохранения заряда $\operatorname{div}\dot{\mathbf{j}}_m=-i\omega\dot{\rho}_m$ (1.44).

Теперь мы можем оставить в уравнениях (3.31) только напряженности, исключив индукции и плотность тока при помощи материальных уравнений из (3.19). При этом правая часть первого

уравнения Максвелла принимает следующий вид:

$$i\omega\dot{\mathbf{D}}_m + \dot{\mathbf{j}}_m = i\omega\varepsilon_0\left(\varepsilon - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}\right)\mathbf{E}_m + \dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}_m = i\omega\varepsilon_0\dot{\varepsilon}\,\mathbf{E}_m + \dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}_m, \qquad (3.32)$$

где введено обозначение

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}. \qquad (3.33)$$

Как видно, величина $\dot{\varepsilon}$ по тому месту, которое она занимает в уравнении, может рассматриваться в качестве относительной диэлектрической проницаемости. Это так называемая *комплексная диэлектрическая проницаемость*.

Уравнения (3.31), записанные относительно напряженностей поля, имеют вид

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_m = i\omega\varepsilon_0\dot{\varepsilon}\dot{\mathbf{E}}_m + \dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}_m, \quad \operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}_m = -i\omega\mu_0\mu\dot{\mathbf{H}}_m. \qquad (3.34)$$

Точка над ε опущена; этим обозначением мы будем пользоваться редко.

Дело в том, что в рамках метода комплексных амплитуд любой из параметров уравнений Максвелла мы должны рассматривать уже не в пределах вещественной оси, а на комплексной плоскости, и это приводит к расширению физического содержания некоторых понятий. Таковы, в первую очередь, проницаемости ε и μ, которые будем обозначать в виде

$$\varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon'', \quad \mu = \mu' - i\mu''. \qquad (3.35)$$

Выделение параметра вида (3.33) показало, что диэлектрическая проницаемость, понимаемая как комплексная величина, может характеризовать и процессы поляризации (напомним, что они предполагались безынерционными), и проводимость среды. Но теперь мы можем описать также инерционность поляризации диэлектрика. При гармонических колебаниях для этого достаточно ввести фазовое запаздывание $\mathbf{D}$ по сравнению с $\mathbf{E}$, т. е. писать: $\dot{\mathbf{D}}_m = \varepsilon_0\varepsilon\dot{\mathbf{E}}_m e^{-i\alpha}$. Но это значит, что в данном случае роль диэлектрической проницаемости играет комплексная величина $\varepsilon(\cos\alpha - i\sin\alpha)$. Ясно, что инерционность процессов намагничивания описывается аналогично. Мы видим, что метод комплексных амплитуд позволил снять одно из существенных ограничений при описании сред (см. пп. 1.3.1, 1.3.6).

Комплексность ε и μ, таким образом, может отражать разные особенности процессов в веществе. Однако в п. 3.3.2 мы сможем дать однозначную энергетическую трактовку величин ε'' и μ''.

В дополнение к (3.35) введем еще следующие обозначения:

$$\operatorname{tg}\Delta = \varepsilon''/\varepsilon', \quad \operatorname{tg}\Delta^{\text{м}} = \mu''/\mu', \qquad (3.36)$$

где Δ называется *углом электрических потерь* (или просто углом потерь), а $\Delta^{\text{м}}$ — *углом магнитных потерь* (смысл этих названий выяснится в п. 3.3.2). Ввиду (3.36) выражениям (3.35) можно придать новую форму:

$$\varepsilon = \varepsilon'(1 - i\operatorname{tg}\Delta) = |\varepsilon|e^{-i\Delta}, \quad \mu = \mu'(1 - i\operatorname{tg}\Delta^{\text{м}}) = |\mu|e^{-i\Delta^{\text{м}}}. \qquad (3.37)$$

Заметим, что критерий классификации сред (1.78) можно переписать так:

$$\operatorname*{tg}_{(\alpha=0)}\Delta = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0\varepsilon} \Rightarrow \operatorname{tg}\Delta \begin{cases} \gg 1\text{: проводник,} \\ \ll 1\text{: диэлектрик} \end{cases} \qquad (3.38)$$

(отмечено, что инерционность поляризации не учитывается).

В заключение необходимо подчеркнуть, что полученные выше уравнения (3.34) образуют полную систему уравнений электродинамики для гармонических во времени процессов, которая будет служить основанием при решении всех задач, рассматриваемых в дальнейшем.

3.2.2. Уравнения электродинамики второго порядка в комплексной форме (А). Комплексные аналоги уравнений второго порядка, выведенных в п. 3.1.2, можно было бы получить, исходя из уравнений Максвелла в комплексной форме (3.34). Еще проще учесть, что все сводится к замене: $\partial/\partial t \to i\omega$, $\mathbf{j} \to \mathbf{j}^{\text{ст}}$; при этом $\partial^2/\partial t^2 \to -\omega^2$ и проницаемости надо рассматривать как комплексные величины. Делая указанную замену в уравнениях (3.20), (3.21), получаем:

$$\operatorname{rot}(\varepsilon^{-1}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_m) - (\omega/c)^2\mu\dot{\mathbf{H}}_m = \operatorname{rot}\varepsilon^{-1}\dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}_m, \qquad (3.39)$$

$$\operatorname{rot}(\mu^{-1}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}_m) - (\omega/c)^2\varepsilon\dot{\mathbf{E}}_m = -i\omega\mu_0\dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}_m. \qquad (3.40)$$

Выполняя такие же операции с уравнениями (3.22), (3.23), привлечем также закон сохранения заряда $\operatorname{div}\dot{\mathbf{j}}_m = -i\omega\dot{\rho}_m$ для преобразования правой части второго из этих уравнений. В результате

$$\nabla^2\dot{\mathbf{H}}_m + (\omega/c)^2\varepsilon\mu\dot{\mathbf{H}}_m = -\operatorname{rot}\dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}_m, \qquad (3.41)$$

$$\nabla^2\dot{\mathbf{E}}_m + (\omega/c)^2\varepsilon\mu\dot{\mathbf{E}}_m = \frac{i}{\omega\varepsilon_0\varepsilon}\operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}_m + i\omega\mu_0\mu\dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}_m. \qquad (3.42)$$

Это так называемые *уравнения Гельмгольца* (неоднородные); анализируя свободные электромагнитные поля ниже в части 2, мы во многих случаях будем исходить из однородных уравнений Гельмгольца, отличающихся от (3.41), (3.42) отсутствием правых частей ($\dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}_m = 0$).

Запишем также в комплексной форме уравнения и все соотношения, включающие электродинамические потенциалы (см. п. 3.1.3).

Во-первых, вместо (3.24) имеем

$$\dot{\mathbf{H}}_m = (\mu_0\mu)^{-1}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{A}}_m, \qquad (3.43)$$

а вместо (3.26)

$$\dot{\mathbf{E}}_m = -\operatorname{grad}\dot{\varphi}_m - i\omega\dot{\mathbf{A}}_m. \tag{3.44}$$

Уравнения Даламбера (3.29) и (3.30) переходят в следующие уравнения Гельмгольца:

$$\nabla^2\dot{\mathbf{A}}_m + (\omega/c)^2\varepsilon\mu\dot{\mathbf{A}}_m = -\mu_0\mu\dot{\mathbf{j}}_m^{\text{ст}} \tag{3.45}$$

и

$$\nabla^2\dot{\varphi}_m + (\omega/c)^2\varepsilon\mu\dot{\varphi}_m = -i\,(\omega\varepsilon_0\varepsilon)^{-1}\operatorname{div}\dot{\mathbf{j}}_m^{\text{ст}}. \tag{3.46}$$

Условие калибровки принимает вид:

$$i(\omega\varepsilon\mu/c^2)\dot{\varphi}_m + \operatorname{div}\dot{\mathbf{A}}_m = 0, \tag{3.47}$$

причем теперь посредством (3.47) можно исключить из (3.44) скалярный потенциал, в результате чего

$$\dot{\mathbf{E}}_m = -i(c^2/\omega\varepsilon\mu)[\operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\mathbf{A}}_m + (\omega/c)^2\varepsilon\mu\dot{\mathbf{A}}_m]. \tag{3.48}$$

Таким образом, комплексные амплитуды напряженностей поля выражены при помощи формул (3.43) и (3.48) только через векторный потенциал.

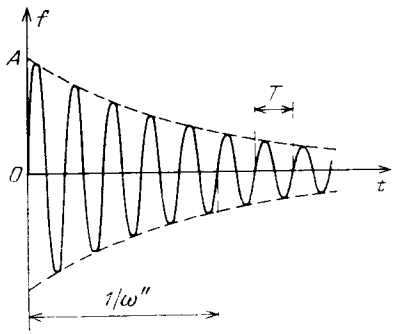


Рис. 3.1

3.2.3. Комплексная частота (Б). Продолжая мысль (п. 3.2.1) о комплексных значениях параметров, входящих в уравнения Максвелла (3.34), остановимся на круговой частоте ω. Зададим ее комплексной

$$\omega = \omega' + i\omega'' = |\omega|\exp\left(i\operatorname{arctg}\frac{\omega''}{\omega'}\right) \tag{3.49}$$

и выясним, какой это имеет физический смысл.

Взяв комплексные представления $\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}_m\exp(i\omega t)$, $\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}}_m\exp(i\omega t)$, выразим, например, напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ при комплексной частоте ω (3.49):

$$\mathbf{E} = \operatorname{Re}\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_m e^{-\omega''t}\cos(\omega' t + \varphi) \tag{3.50}$$

(взято $\dot{\mathbf{E}}_m = \mathbf{E}_m\exp(i\varphi)$).

Как видно, при $\omega'' > 0$ поле испытывает *затухающие колебания* с круговой частотой ω'; при изменении знака ω'' они станут возрастающими. Процесс не является периодическим, но период косинусоиды $T = \omega'/2\pi$ условно называют периодом затухающих колебаний. Величина T точно определяется по нулям кривой $f(t) = Ae^{-\omega''t}\cos(\omega' t + \varphi)$ (рис. 3.1). В течение времени, равного $1/\omega''$, амплитуда колебаний уменьшается в e раз; будем называть параметр $1/\omega''$ *постоянной времени*.

В большинстве случаев могут представлять интерес слабо затухающие колебания, для которых $\omega'' \ll \omega'$; при этом на протяжении нескольких T процесс очень близок к периодическому.

Затухающими, как мы увидим, могут быть свободные поля.

В дальнейшем, если не сделано специальной оговорки, величину ω будем считать вещественной.

§ 3.3. Баланс энергии при гармонических колебаниях

3.3.1. Средние величины: энергия, мощность, поток энергии (А). Поскольку гармонические колебания электромагнитных полей, представляющие интерес для радиоэлектроники, являются весьма быстрыми, обычно имеют дело с их усредненными во времени энергетическими характеристиками. Плотности энергии, мощности и потока энергии относятся к тем величинам, которые усредняются по формулам (3.13)—(3.15). Например, оба члена выражения (1.113) пропорциональны квадратам напряженностей (которые имеют вид (3.9)). Поэтому в силу (3.19)

$$\overline{w} = 1/4\,(\varepsilon_0\varepsilon\dot{\mathbf{E}}_m\dot{\mathbf{E}}_m^* + \mu_0\mu\dot{\mathbf{H}}_m\dot{\mathbf{H}}_m^*). \tag{3.51}$$

Интегрирование этой величины по некоторому объему V дает на основании (1.110) среднюю энергию $\overline{W}$ в V. Надо, однако, помнить, что выражение энергии (1.110) было получено в предположении, что среда безынерционна (см. п. 1.5.5). Поэтому проницаемости ε и μ в (3.51) надо понимать, как в п. 1.3.1.

Среднее значение плотности мощности p (1.94) находится на основании (3.14):

$$\overline{p} = \operatorname{Re}\dot{p}, \quad \dot{p} = 1/2\,\dot{\mathbf{j}}_m^*\dot{\mathbf{E}}_m. \tag{3.52}$$

Величина p называется *плотностью комплексной мощности*, а сама *комплексная мощность* $\dot{P}$ есть интеграл от $\dot{p}$ по V.

Среднее значение $\overline{\mathbf{\Pi}}$ вектора Пойнтинга $\mathbf{\Pi}$ (1.107) выразим, используя равенство (3.15):

$$\overline{\mathbf{\Pi}} = \operatorname{Re}\dot{\mathbf{\Pi}}, \quad \dot{\mathbf{\Pi}} = 1/2\,[\dot{\mathbf{E}}_m, \dot{\mathbf{H}}_m^*]. \tag{3.53}$$

Промежуточная величина $\dot{\mathbf{\Pi}}$ называется *комплексным вектором Пойнтинга*. Поток $\dot{\mathbf{\Pi}}$ через некоторую поверхность S называют *комплексным потоком энергии*.

Как соотносятся мгновенные и средние значения энергетических величин, наглядно показывает следующий анализ плотности мощности.

Пример 1. Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{x}_0 E_m \cos \omega t$ и $\mathbf{j} = \mathbf{x}_0 j_m \cos(\omega t + \varphi)$, так что плотность мощности p (1.94) есть

$$p = j_m E_m \cos(\omega t + \varphi) \cos \omega t = {}^1/_2 j_m E_m \cos \varphi + {}^1/_2 j_m E_m \cos(2\omega t + \varphi).$$

Слагаемое, пропорциональное $\cos\varphi$, равно среднему значению $\bar{p}$ величины p. Другое слагаемое — составляющая p, колеблющаяся с удвоенной частотой. Если $\varphi = 0$ (рис. 3.2*а*), т. е. $\mathbf{E}$ и $\mathbf{j}$ синфазны, то плотность мощности $p(t)$ не

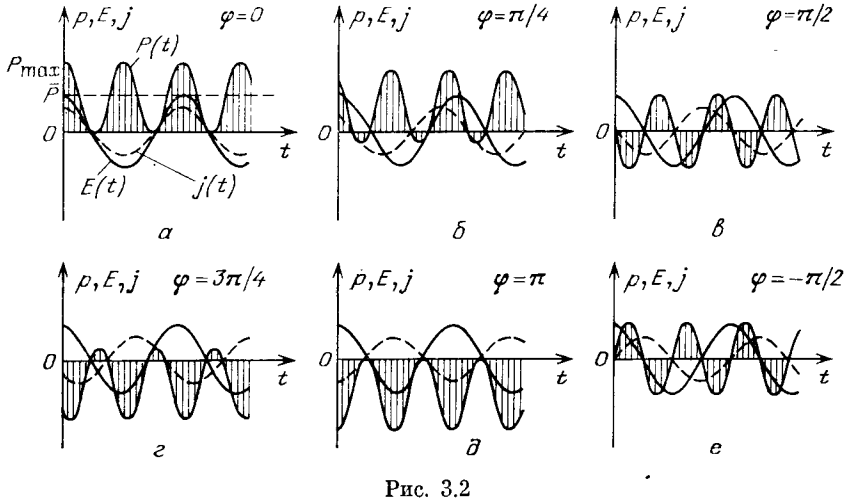


Рис. 3.2

принимает отрицательных значений, а среднее значение $\bar{p}$ равно половине максимального. Пусть, далее, сдвиг фазы между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{j}$ составляет менее $\pi/2$, например, $\varphi = \pi/4$ (рис. 3.2*б*); среднее значение $\bar{p}$ уменьшилось, но осталось положительным. При $\varphi = \pi/2$ (рис. 3.2*в*) оно равно нулю. С дальнейшим ростом φ величина $\bar{p}$ становится отрицательной (на рис. 3.2*г* $\varphi = 3\pi/4$), а при $\varphi = \pi$ она достигает своего максимального абсолютного значения (рис. 3.2*д*). При $\varphi = 3\pi/2$ ($\varphi = -\pi/2$) также имеем $\bar{p} = 0$ (рис. 3.2*е*).

Мы видим, что колеблющаяся составляющая плотности мощности p может как угодно превосходить по амплитуде модуль ее среднего значения $|\bar{p}|$. Но $|\bar{p}|$ может достигать лишь половины этой амплитуды. ■

3.3.2. Средний баланс энергии (А). Представление о среднем балансе энергии электромагнитного поля в некоторой области V можно было бы получить, отправляясь от уравнения (1.105). Рассматривая гармонически колеблющееся электромагнитное поле, мы должны были бы внести в (1.105) векторы поля, изменяющиеся по закону гармонических колебаний, и произвести усреднение энергетических величин за период. Однако при этом были бы упущены возможности более глубокой трактовки, которые дает введение комплексных проницаемостей.

По этой причине основное уравнение будет получено заново. Будем исходить из комплексной формы уравнений Максвелла (3.34),

записывая первое из них комплексно-сопряженным:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_m^* &= -i\omega\varepsilon_0\varepsilon^*\dot{\mathbf{E}}_m^* + (\dot{\mathbf{j}}_m^{\text{ст}})^*, \\ \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_m &= -i\omega\mu_0\mu\dot{\mathbf{H}}_m. \end{aligned} \tag{3.54}$$

Все члены первой строчки умножим на $\dot{\mathbf{E}}_m$, а второй — на $\dot{\mathbf{H}}_m^*$. Произведем вычитание соответственных частей и применим тождество (1.26) подобно тому, как делалось в п. 1.5.2. Отсюда

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{\Pi}} = i\frac{\omega}{2}(\varepsilon_0\varepsilon^*\dot{\mathbf{E}}_m^*\dot{\mathbf{E}}_m - \mu_0\mu\dot{\mathbf{H}}_m\dot{\mathbf{H}}_m^*) - \dot{p}^{\text{ст}}. \tag{3.55}$$

Были использованы обозначения (3.52) и (3.53), причем $\dot{p} = \dot{p}^{\text{ст}}$, так как $\mathbf{j} = \mathbf{j}^{\text{ст}}$. Это комплексный аналог уравнения (1.100).

Внесем в (3.55) представления комплексных проницаемостей (3.35). Разделение вещественной и мнимой частей дает

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{Re} \dot{\mathbf{\Pi}} &= -\frac{\omega}{2}(\varepsilon_0\varepsilon''\dot{\mathbf{E}}_m^*\dot{\mathbf{E}}_m + \mu_0\mu''\dot{\mathbf{H}}_m\dot{\mathbf{H}}_m^*) - \operatorname{Re}\dot{p}^{\text{ст}}, \\ \operatorname{div} \operatorname{Im} \dot{\mathbf{\Pi}} &= \frac{\omega}{2}(\varepsilon_0\varepsilon'\dot{\mathbf{E}}_m^*\dot{\mathbf{E}}_m - \mu_0\mu'\dot{\mathbf{H}}_m\dot{\mathbf{H}}_m^*) - \operatorname{Im}\dot{p}^{\text{ст}} \end{aligned} \tag{3.56}$$

(учтено, что в результате комплексного сопряжения изменился знак при ε''). Полученные равенства можно было бы проанализировать, рассуждая, как в п. 1.5.4. Но удобнее сначала произвести интегрирование по некоторому объему V с границей S и перейти к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \oint_S \dot{\mathbf{\Pi}} d\mathbf{s} &= -\frac{\omega}{2}\int_V (\varepsilon_0\varepsilon''\dot{\mathbf{E}}_m^*\dot{\mathbf{E}}_m + \mu_0\mu''\dot{\mathbf{H}}_m\dot{\mathbf{H}}_m^*)\, dv - \operatorname{Re}\dot{P}^{\text{ст}}, \\ \operatorname{Im} \oint_S \dot{\mathbf{\Pi}} d\mathbf{s} &= \frac{\omega}{2}\int_V (\varepsilon_0\varepsilon'\dot{\mathbf{E}}_m^*\dot{\mathbf{E}}_m - \mu_0\mu'\dot{\mathbf{H}}_m\dot{\mathbf{H}}_m^*)\, dv - \operatorname{Im}\dot{P}^{\text{ст}}, \end{aligned} \tag{3.57}$$

где $\dot{P}^{\text{ст}}$ — интеграл от $\dot{p}^{\text{ст}}$ по V, выражающий комплексную мощность источников.

Обсудим смысл первого из полученных равенств. В левой части — вещественная часть комплексного потока энергии $\dot{P}^{\Sigma}$ (используем обозначение типа (1.106)). Согласно п. 3.3.1 это средний поток энергии через S: $\bar{P}^{\Sigma} = \operatorname{Re}\dot{P}^{\Sigma}$. Последний член справа дает среднюю мощность источников: $\bar{P}^{\text{ст}} = \operatorname{Re}\dot{P}^{\text{ст}}$. Легко убедиться, что рассматриваемое равенство, которому удобно придать вид

$$\bar{P}^{\Sigma} = -\frac{\omega}{2}\int_V (\varepsilon_0\varepsilon''\dot{\mathbf{E}}_m^*\dot{\mathbf{E}}_m + \mu_0\mu''\dot{\mathbf{H}}_m\dot{\mathbf{H}}_m^*)\, dv - \bar{P}^{\text{ст}}, \tag{3.58}$$

есть не что иное, как *уравнение среднего баланса энергии* при гармонических колебаниях.

Пусть источники в среднем отдают энергию полю: $\overline{P}^{\text{ст}} < 0$. Если проницаемости ε и μ вещественны ($\varepsilon'' = 0$, $\mu'' = 0$), то объемный интеграл в (3.58) исчезает. При этом в среднем вся мощность источников идет на излучение: $\overline{P}^{\Sigma} = -\overline{P}^{\text{ст}} = |\overline{P}^{\text{ст}}|$. Если же $\varepsilon'' > 0$, $\mu'' > 0$, то положителен и объемный интеграл, а следовательно, средняя мощность излучения уменьшится на его величину. В случае, когда область V энергетически изолирована, так что $\overline{P}^{\Sigma} = 0$, мощность источников полностью «гасится» объемным интегралом. Из этих рассуждений следует, что объемный интеграл в (3.58), взятый без знака минус, выражает *среднюю мощность потерь* в V:

$$\overline{P}^{\text{п}} = \frac{\omega}{2} \int_V (\varepsilon_0 \varepsilon'' \dot{\mathbf{E}}_m^* \dot{\mathbf{E}}_m + \mu_0 \mu'' \dot{\mathbf{H}}_m^* \dot{\mathbf{H}}_m)\, dv. \tag{3.59}$$

Полученный результат проясняет смысл мнимых частей ε'' и μ'' комплексных проницаемостей ε и μ. При $\varepsilon'' = 0$ и $\mu'' = 0$, т. е. когда ε и μ вещественны, среда является непоглощающей. Потери энергии существуют при $\varepsilon'' > 0$ и (или) $\mu'' > 0$. Эти, как говорят, электрические и магнитные потери происходят в результате преобразования энергии поля в какие-то иные формы. В особых случаях, о которых речь пойдет в § 16.3, фигурируют отрицательные ε'' и μ''.

В простейшем варианте, когда поглощение вызвано только проводимостью среды (при этом согласно (3.33) $\varepsilon'' = \sigma/\omega\varepsilon_0$ и $\mu'' = 0$), из (3.59) следует:

$$\overline{P}^{\text{п}} = \frac{1}{2} \int_V \sigma \dot{\mathbf{E}}_m^* \dot{\mathbf{E}}_m dv. \tag{3.60}$$

Величины $\overline{P}^{\text{ст}} = \operatorname{Re} \dot{P}^{\text{ст}}$ и $\overline{P}^{\Sigma} = \operatorname{Re} \dot{P}^{\Sigma}$, входящие в первую строку (3.57), принято называть активными: активная мощность, активный поток энергии. Мнимые части $\operatorname{Im} \dot{P}^{\text{ст}}$ и $\operatorname{Im} \dot{P}^{\Sigma}$ из второй строки (3.57) называют соответственно реактивной мощностью и реактивным потоком энергии. При вещественных ε и μ получаем

$$\operatorname{Im} \dot{P}^{\Sigma} = 2\omega (\overline{W}^{\text{э}} - \overline{W}^{\text{м}}) - \operatorname{Im} \dot{P}^{\text{ст}} \tag{3.61}$$

(использованы формулы (3.51), (1.111), (1.112)). Реактивные величины связаны здесь с разностью средних значений электрической и магнитной энергии в V.

Возвращаясь к примеру, рассмотренному в конце п.3.3.1, напомним, что плотность мощности p была разложена на две составляющие, одна из которых — среднее значение $\bar{p}$, которое теперь можно назвать плотностью активной мощности. Другая составляющая — плотность колеблющейся мощности — обращается в нуль при усреднении. Вычисляя для того же примера плотность реактивной мощности

$$\operatorname{Im} \dot{p} = \operatorname{Im} 1/2 \dot{\mathbf{j}}_m \dot{\mathbf{E}}_m e^{-i\varphi} = -1/2 \mathbf{j}_m \mathbf{E}_m \sin\varphi,$$

видим, что она не является составляющей p. Наличие реактивной мощности просто указывает на то, что при данных амплитудах $\mathbf{j}_m$ и $\mathbf{E}_m$ активная мощность не достигает своего максимума.

3.3.3. Дополнительные замечания (Б). Проследим, как изменяется электрическая энергия $W^{\text{э}}$ в объеме V, когда сказывается инерционность среды. Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \cos\omega t$ и $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}_m \cos(\omega t - \alpha)$. Согласно (1.104)

$$\frac{dW^{\text{э}}}{dt} = \int_V \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\, dv = -\omega \varepsilon_0 \varepsilon \int_V \mathbf{E}_m^2 \cos\omega t \sin(\omega t - \alpha)\, dv. \tag{3.62}$$

Как происходит изменение энергии в среднем? При интегрировании по времени от 0 до T и делении на T получаем

$$\frac{\overline{dW}^{\text{э}}}{dt} = \frac{1}{2} \omega \varepsilon_0 \varepsilon \sin\alpha \int_V \mathbf{E}_m^2 dv. \tag{3.63}$$

Учитывая, что $\varepsilon \sin\alpha = \varepsilon''$ (п. 3.2.1) и $\mathbf{E}_m^2 = \dot{\mathbf{E}}_m \dot{\mathbf{E}}_m^*$, убеждаемся, что получено выражение мощности электрических потерь (первый член (3.58)).

Следующее замечание о роли комплексной частоты (п. 3.2.3). Рассматривая в (3.34) ω как комплексную величину, вместо (3.55) получаем

$$\operatorname{div} \dot{\Pi} = \frac{i}{2} (\omega^* \varepsilon_0 \varepsilon^* \dot{\mathbf{E}}_m^* \dot{\mathbf{E}}_m - \omega \mu_0 \mu \dot{\mathbf{H}}_m \dot{\mathbf{H}}_m^*) - \dot{p}^{\text{ст}}. \tag{3.64}$$

Пусть среда однородна и изотропна. Взяв энергетически изолированную область V, не содержащую источников, будем иметь

$$\omega^* \varepsilon_0 \varepsilon^* \int_V \mathbf{E}_m^2 dv = \omega \mu_0 \mu \int_V \mathbf{H}_m^2 dv. \tag{3.65}$$

Равенство может быть выполнено только при условии

$$\operatorname{Im} \frac{\omega^* \varepsilon^*}{\omega \mu} = 0 \tag{3.66}$$

(поскольку интегралы вещественны). Ввиду (3.37) и (3.49) отсюда

$$\Delta + \Delta^{\text{м}} - 2\operatorname{arctg} \frac{\omega''}{\omega'} = 0,$$

т. е.

$$\frac{\omega''}{\omega'} = \operatorname{tg} \frac{\Delta + \Delta^{\text{м}}}{2}. \tag{3.67}$$

Смысл полученного вывода в том, что мыслимое поле в изолированном объеме без источников должно быть затухающим, причем величина ω''/ω' вполне определяется углами потерь среды.

§ 3.4. Общие свойства решений системы уравнений электродинамики в комплексной форме (А)

3.4.1. О единственности решений. Решения уравнений Максвелла, как и других уравнений в частных производных, принадлежат весьма широкому классу. Нахождение того или иного решения уравнений (3.34) еще не означает, что получено электромагнитное поле, которому можно приписать определенное физическое содержание.

Поставим целью выяснить, при каких условиях система уравнений (3.34) имеет некоторое единственное решение $\dot{\mathbf{E}}_m$, $\dot{\mathbf{H}}_m$. Очевидно, что такие условия однозначно формализуют причину существования поля: единственное решение обладает физической определенностью.

В качестве первичной причины существования электромагнитного поля естественно видеть превращение неэлектромагнитной энергии в энергию поля. Поэтому будем исследовать решения при заданных источниках, т. е. такие, которые должны представлять вынужденные поля. Пусть требуется найти поле внутри области V, ограниченной поверхностью S (рис. 3.3*а*), внутри которой задан

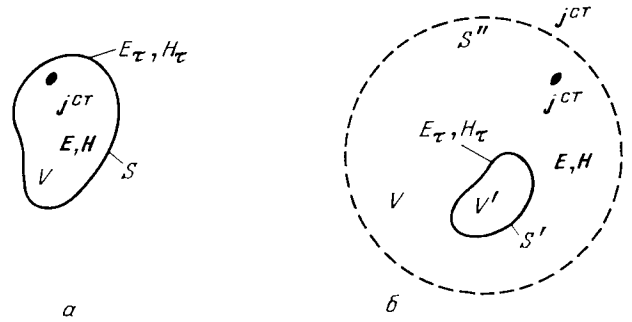


Рис. 3.3

сторонний ток с плотностью $\mathbf{j}^{ст}$. Вместо внутренних источников или наряду с ними может существовать поток энергии через границу S.

Какими предварительными сведениями надо располагать, чтобы с учетом их получаемое решение оказалось единственным?

Пусть получены два решения системы уравнений (3.34): $\mathbf{E}_{m1}$, $\dot{\mathbf{H}}_{m1}$ и $\dot{\mathbf{E}}_{m2}$, $\dot{\mathbf{H}}_{m2}$. Подставим их в (3.34), так что будем иметь два варианта записи уравнений. Произведем вычитание соответственных частей и в результате получим следующую систему уравнений:

$$\operatorname{rot}\mathbf{h} = i\omega\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{e}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{e} = -i\omega\mu_0\mu\mathbf{h} \tag{3.68}$$

относительно разностей $\mathbf{e} = \dot{\mathbf{E}}_{m1} - \dot{\mathbf{E}}_{m2}$ и $\mathbf{h} = \dot{\mathbf{H}}_{m1} - \dot{\mathbf{H}}_{m2}$. Поскольку в обоих вариантах фигурировала одна и та же заданная величина $\mathbf{j}^{ст}_m$, она исчезла в (3.68).

Для системы уравнений (3.68) можно вывести совершенно такие же энергетические соотношения, как и для (3.34). Поэтому (ср. (3.58))

$$\operatorname{Re}\oint_S [\mathbf{e},\ \mathbf{h}^*]\,d\mathbf{s} = -\frac{\omega}{2}\int_V (\varepsilon_0\varepsilon''\mathbf{e}\mathbf{e}^* + \mu_0\mu''\mathbf{h}\mathbf{h}^*)\,dv. \tag{3.69}$$

Если оказывается, что поверхностный интеграл в (3.69) равен нулю, то, значит, исчезает и объемный интеграл справа. Но тогда при положительных ε'' и μ'' обращается в нуль подынтегральное выражение, поэтому равны нулю $|e|^2$ и $|h|^2$. А это как раз и означает, что решение задачи единственно: два гипотетически различных решения совпадают.

При каких же граничных условиях исчезает поверхностный интеграл? По крайней мере, если задано:

$$\begin{aligned} &E_\tau \text{ на } S, \\ \text{или}\quad &H_\tau \text{ на } S, \\ \text{или}\quad &E_\tau \text{ на } S_1 \text{ и } H_\tau \text{ на } S_2 \ \ (S_1 + S_2 = S). \end{aligned} \tag{3.70}$$

Действительно, задание E_τ, например, означает, что для любых решений эта величина — одна и та же; следовательно, $e_\tau = 0$ (нормальная компонента $\mathbf{e}$ не вносит вклада в смешанное произведение векторов под знаком поверхностного интеграла). Аналогично рассматривается задание H_τ.

Итак, решение уравнений (3.34) при нахождении вынужденного электромагнитного поля внутри области V с границей S единственно, если задано одно из граничных условий (3.70), а также $\varepsilon'' > 0$ и $\mu'' > 0$. Впрочем, последнее требование может быть ослаблено. Можно допустить, что $\varepsilon'' = 0$ либо $\mu'' = 0$. Тогда непосредственно доказывается единственность определения $\dot{\mathbf{H}}_m$ либо $\dot{\mathbf{E}}_m$. Остальное устанавливается с привлечением уравнений Максвелла.

Существенно, что величины ε'' и μ'' могут быть как угодно малы. Отметим также, что сформулированные граничные условия (3.70) не исчерпывают все мыслимые условия, обеспечивающие единственность решения задачи.

Исследованная задача о нахождении поля внутри V (см. рис. 3.3*а*) называется *внутренней* задачей электродинамики. Все рассуждения можно повторить и для *внешней* задачи (рис. 3.3*б*), когда вынужденное поле существует в бесконечном пространстве вне некоторой области V'.

По-прежнему исходя из энергетического соотношения (3.69), мы должны теперь распространить интегрирование в правой части на бесконечное пространство вне V'. В качестве границы S в (3.69) возьмем совокупность S' и сферической поверхности S'' бесконечно возрастающего радиуса. Поверхностный интеграл в (3.69) исчезнет, если кроме одного из условий (3.70), теперь задаваемых

на S', в пределе при $r \to \infty$ исчезает вклад сферы S''. Это будет, если $[\mathbf{e}, \mathbf{h}^*]$ убывает быстрее, чем $1/r^2$. Для этого, в свою очередь, достаточно, чтобы напряженности поля в рассматриваемом классе решений убывали быстрее, чем $1/r$.

Единственность решения внешней задачи (а следовательно, и его физическая определенность) установлена при прочих равных условиях только в классе достаточно быстро убывающих полей.

В заключение заметим, что произведенный выше анализ физической определенности решений уравнений электродинамики далеко не полон. Принцип причинности в электродинамике находит отражение в виде так называемого *условия излучения*; в дальнейшем некоторые его формы будут обсуждаться и использоваться (см., например, пп. 5.1.2, 9.0.2).

3.4.2. Принцип взаимности. Для одной и той же среды будем рассматривать два разных решения уравнений (3.34), которые получаются при задании сторонних токов с плотностями $\dot{\mathbf{j}}_1^{\text{ст}}$ и $\dot{\mathbf{j}}_2^{\text{ст}}$. Дважды переписывая уравнения (3.34), получаем при этом

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_{m1} &= i\omega\varepsilon_0\varepsilon\dot{\mathbf{E}}_{m1} + \dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}_{m1}, & \operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_{m2} &= i\omega\varepsilon_0\varepsilon\dot{\mathbf{E}}_{m2} + \dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}_{m2}, \\ \operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}_{m1} &= -i\omega\mu_0\mu\dot{\mathbf{H}}_{m1} & \operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}_{m2} &= -i\omega\mu_0\mu\dot{\mathbf{H}}_{m2}. \end{aligned} \tag{3.71}$$

Объединим уравнения в две пары, как показано стрелками, и произведем уже знакомые действия. При этом в первой строчке левого столбца производится умножение на $\dot{\mathbf{E}}_{m2}$, а во второй строчке правого — на $\dot{\mathbf{H}}_{m1}$, после чего вычитаются соответственные части. Аналогичные действия производятся с оставшейся парой уравнений. В результате имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[\dot{\mathbf{E}}_{m2}, \dot{\mathbf{H}}_{m1}] &= -i\omega\mu_0\mu\dot{\mathbf{H}}_{m2}\dot{\mathbf{H}}_{m1} - i\omega\varepsilon_0\varepsilon\dot{\mathbf{E}}_{m1}\dot{\mathbf{E}}_{m2} - \dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}_{m1}\dot{\mathbf{E}}_{m2}, \\ \operatorname{div}[\dot{\mathbf{E}}_{m1}, \dot{\mathbf{H}}_{m2}] &= -i\omega\mu_0\mu\dot{\mathbf{H}}_{m1}\dot{\mathbf{H}}_{m2} - i\omega\varepsilon_0\varepsilon\dot{\mathbf{E}}_{m2}\dot{\mathbf{E}}_{m1} - \dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}_{m2}\dot{\mathbf{E}}_{m1}. \end{aligned} \tag{3.72}$$

Для изотропных сред нет разницы между выражениями $\mu\dot{\mathbf{H}}_{m2}\dot{\mathbf{H}}_{m1}$ и $\mu\dot{\mathbf{H}}_{m1}\dot{\mathbf{H}}_{m2}$, $\varepsilon\dot{\mathbf{E}}_{m1}\dot{\mathbf{E}}_{m2}$ и $\varepsilon\dot{\mathbf{E}}_{m2}\dot{\mathbf{E}}_{m1}$. В этом случае из (3.72) путем вычитания получаем

$$\operatorname{div}\{[\dot{\mathbf{E}}_{m2}, \dot{\mathbf{H}}_{m1}] - [\dot{\mathbf{E}}_{m1}, \dot{\mathbf{H}}_{m2}]\} = \dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}_{m2}\dot{\mathbf{E}}_{m1} - \dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}_{m1}\dot{\mathbf{E}}_{m2}, \tag{3.73}$$

или при интегрировании по области V с границей S:

$$\oint_S \{[\dot{\mathbf{E}}_{m2}, \dot{\mathbf{H}}_{m1}] - [\dot{\mathbf{E}}_{m1}, \dot{\mathbf{H}}_{m2}]\}\,d\mathbf{s} = \int_V (\dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}_{m2}\dot{\mathbf{E}}_{m1} - \dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}_{m1}\dot{\mathbf{E}}_{m2})\,dv. \tag{3.74}$$

Полученный результат (3.73), (3.74) устанавливает соотношение между полями двух различных источников в одной и той же изотропной среде. Это так называемая *лемма Лоренца*.

Если токи сосредоточены в ограниченной области, то, распространяя интегрирование на бесконечное пространство, можно прийти к выводу об уничтожении поверхностного интеграла. Тогда

$$\int_V (\dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}_{m2}\dot{\mathbf{E}}_{m1} - \dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}_{m1}\dot{\mathbf{E}}_{m2})\,dv = 0 \tag{3.75}$$

(поверхностный интеграл исчезает наверняка, если амплитуды полей убывают быстрее, чем $1/r$; это условие может быть ослаблено, если использовать условие излучения п. 9.0.2).

Если первые токи сосредоточены в области V_1, а вторые — в V_2 (рис. 3.4), то из (3.75) следует:

$$\int_{V_1} \dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}_{m1}\dot{\mathbf{E}}_{m2}\,dv = \int_{V_2} \dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}_{m2}\dot{\mathbf{E}}_{m1}\,dv. \tag{3.76}$$

Полученный результат выражает *принцип взаимности* для двух распределений сторонних токов, двух источников. Примечательна симметрия соотношения (3.76), совершенно не зависящая от характера среды, которая лишь предполагалась изотропной. Для иллюстрации этого на рис. 3.4 показано несколько нарушающих однородность «пассивных» (лишенных источников) подобластей, диэлектрических и металлических.

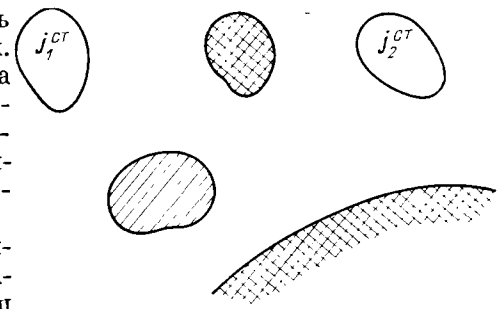


Рис. 3.4

Положим, что вся среда линейна. Это значит, что выражение (3.76) справедливо при одновременном существовании обоих источников (не следует забывать, что рассматриваются два независимых решения уравнений электродинамики).

Можно ввести полные токи первой и второй областей $I_1^{\text{ст}}$ и $I_2^{\text{ст}}$, определенным образом договорившись, через какие сечения вычисляются потоки векторов $\dot{\mathbf{j}}_1^{\text{ст}}$ и $\dot{\mathbf{j}}_2^{\text{ст}}$. Введем величины

$$\dot{U}_{m12} = \frac{1}{\dot{I}^{\text{ст}}_{m1}}\int_{V_1} \dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}_{m1}\,\dot{\mathbf{E}}_{m2}\,dv, \quad \dot{U}_{m21} = \frac{1}{\dot{I}^{\text{ст}}_{m2}}\int_{V_2} \dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}_{m2}\dot{\mathbf{E}}_{m1}\,dv, \tag{3.77}$$

которые можно рассматривать как комплексные амплитуды наводимых э.д.с. (U_{12} наводится в V_1 током, локализованным в V_2; соответственный смысл имеет U_{21}). Тогда (3.76) можно переписать в виде $\dot{I}^{\text{ст}}_{m1}\dot{U}_{m12} = \dot{I}^{\text{ст}}_{m2}\dot{U}_{m21}$. Разделим обе части на $\dot{I}^{\text{ст}}_{m1}\dot{I}^{\text{ст}}_{m2}$, это дает:

$$\dot{U}_{m12}/\dot{I}^{\text{ст}}_{m2} = \dot{U}_{m21}/\dot{I}^{\text{ст}}_{m1}, \tag{3.78}$$

т. е. $Z_{12} = Z_{21}$. В этой трактовке соотношение (3.76) выступает как равенство взаимных сопротивлений Z_{12} и Z_{21} рассматриваемых источников.

3.4.3. Перестановочная двойственность уравнений Максвелла. Магнитные токи. Рассматривая уравнения Максвелла в комплексной форме (3.34) при отсутствии источников ($\dot{\mathbf{j}}_m^{\text{ст}} = 0$), легко заметить, что замена [1])

$$\varepsilon\varepsilon_0 \rightleftarrows \mu\mu_0, \quad \dot{\mathbf{E}}_m \to -\dot{\mathbf{H}}_m, \quad \dot{\mathbf{H}}_m \to \dot{\mathbf{E}}_m \tag{3.79}$$

сохраняет эту систему уравнений, причем первое уравнение переходит во второе, а второе — в первое.

Отмеченный факт имеет следующее значение. Существуют такие электродинамические задачи, в которых векторы $\dot{\mathbf{E}}_m$ и $\dot{\mathbf{H}}_m$ меняются ролями. Положим, что одна из таких «парных» задач решена, так что имеются формулы, выражающие векторы $\dot{\mathbf{E}}_m$ и $\dot{\mathbf{H}}_m$. Тогда для получения решения второй задачи из той же пары достаточно в готовых формулах сделать замену (3.79). Говорят, что решение в этом случае получено путем применения *принципа двойственности.*

Чтобы распространить принцип двойственности на уравнения Максвелла при наличии источников, необходимо в дополнение к уравнениям (3.34) построить некоторые модифицированные. Сопоставим те и другие уравнения:

$$\begin{aligned} &\overset{\text{Э}}{\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_m = i\omega\varepsilon_0\varepsilon\dot{\mathbf{E}}_m + \dot{\mathbf{j}}_m^{\text{ст}}}, \quad &&\overset{\text{М}}{\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_m = i\omega\varepsilon_0\varepsilon\dot{\mathbf{E}}_m}, \\ &\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}_m = -i\omega\mu_0\mu\dot{\mathbf{H}}_m, &&\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}_m = -i\omega\mu_0\mu\dot{\mathbf{H}}_m - \dot{\mathbf{j}}_m^{\text{м}}. \end{aligned} \tag{3.80}$$

В левом столбце (Э) записана известная нам система уравнений электродинамики (3.34), а в правом — (М) модифицированная система, физическое содержание которой мы сейчас обсудим. Но сначала надо отметить, что одна система переходит в другую (Э → М), если

$$\varepsilon\varepsilon_0 \rightleftarrows \mu\mu_0, \quad \dot{\mathbf{j}}_m^{\text{ст}} \to -\dot{\mathbf{j}}_m^{\text{м}}, \quad \dot{\mathbf{E}}_m \to -\dot{\mathbf{H}}_m, \quad \dot{\mathbf{H}}_m \to \dot{\mathbf{E}}_m. \tag{3.81}$$

Что же представляет собой система уравнений М? Это уравнения Максвелла с необычно заданными источниками. Появившаяся в правой части второго уравнения функция $\dot{\mathbf{j}}_m^{\text{м}}$ есть магнитный аналог величины $\mathbf{j}^{\text{т}}$ Это комплексная амплитуда плотности *магнитного тока.*

В природе, как полагают при формулировании основных уравнений теории электромагнетизма, магнитные заряды отсутствуют

[1]) Легко убедиться, что это не единственно возможная замена.

(см. п. 1.2.5, 1.2.6). Не может быть, следовательно, и магнитных токов. Но это не мешает вводить такие объекты формально — с единственной целью облегчить исследование вполне реальных полей.

Итак, посредством замены (3.81) мы переводим уравнения Максвелла с обычными, электрическими источниками в уравнения с условными магнитными источниками (либо действуем в обратном порядке). Существенно, что эта замена может производиться в формулах, выражающих готовые решения задач. Такие операции мы и будем производить.

Остается проанализировать второе уравнение Максвелла в системе М (3.80), поскольку по сравнению с обычным вторым уравнением Максвелла оно выражает нечто новое. Взяв в левой и правой частях уравнения дивергенцию, согласно (1.23) получим:

$$0 = -i\omega \operatorname{div}\mu_0\mu\dot{\mathbf{H}}_m - \operatorname{div}\dot{\mathbf{j}}_m^{\text{м}}.$$

Поскольку в данном случае предполагается существование магнитных зарядов, напишем:

$$\operatorname{div}\mu_0\mu\dot{\mathbf{H}}_m = \dot{\rho}_m^{\text{м}}. \tag{3.82}$$

Следовательно, предыдущее равенство — это выражение закона сохранения магнитного заряда

$$\operatorname{div}\dot{\mathbf{j}}_m^{\text{м}} = -i\omega\dot{\rho}_m^{\text{м}} \tag{3.83}$$

(ср. комплексную форму $\operatorname{div}\dot{\mathbf{j}}_m = -i\omega\dot{\rho}_m$ уравнения (1.44)).

Наконец, следующее. Раз в рассмотрение введены магнитные заряды и токи, оказываются полезными и представления об их поверхностных формах. По аналогии с известными величинами ξ и η введем *плотность поверхностного магнитного заряда* $\xi^{\text{м}}$ и *плотность поверхностного магнитного тока* $\eta^{\text{м}}$. При этом вместо граничных условий (1.86), (1.85) для $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$ возникают условия типа (1.83), (1.88). Запишем их относительно комплексных амплитуд:

$$(\dot{\mathbf{B}}_{m1} - \dot{\mathbf{B}}_{m2})\,\boldsymbol{\nu}_0 = \dot{\xi}_m^{\text{м}}, \tag{3.84}$$

$$[\dot{\mathbf{E}}_{m1} - \dot{\mathbf{E}}_{m2}, \boldsymbol{\nu}_0] = \dot{\eta}_m^{\text{м}}. \tag{3.85}$$

Вывод этих формул легко выполнить, взяв вместо (1.56), (1.54) интегральные формы уравнения (3.82) и второго уравнения Максвелла М (3.80); затем остается только повторить операции из п. 1.4.2, 1.4.3.

Из (3.84) и (3.85) следует, что при $\xi^{\text{м}} \neq 0$ и, соответственно, $\eta^{\text{м}} \neq 0$ компоненты B_ν и E_τ будут иметь разрывы, которые, разумеется, не соответствуют физической реальности. Однако введение такого рода разрывов иногда оказывается полезным в теории.

Пример 2. Некоторое магнитное поле (рис. 3.5*а*) представляет интерес только в полупространстве $y > 0$, причем $\mathbf{B}(0) = \mathrm{y}_0 B(0)$. В этом случае можно

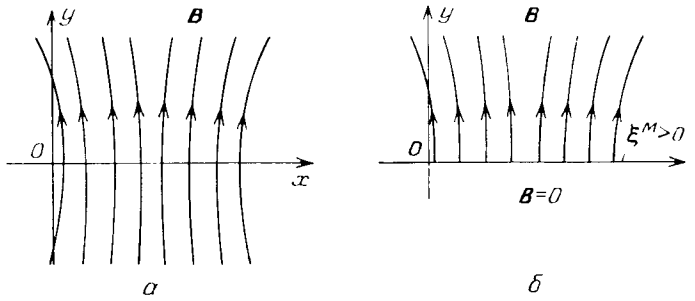


Рис. 3.5

отбросить мысленно поле при $y < 0$, а при $y = 0$ задать распределение магнитного заряда $\xi^{\text{м}} = B(0)$ (рис. 3.5*б*). Это делается на основании условия (3.84) заданием $B_2 = 0$. ■

УПРАЖНЕНИЯ

1. Задано: $\dot{\mathbf{E}}_m = \mathbf{x}_0 A + \mathrm{y}_0 B$, где а) $A = 1$, $B = i$; б) $A = i$, $B = -i$. Найти **E**.
2. Чему равно числовое значение c в (3.20) и далее?
3. Между какими направлениями лежат «углы потерь» Δ и $\Delta^{\text{м}}$?
4. При каком фазовом сдвиге между **E** и **H** будет $\overline{\Pi} = 0$?
5. Вывести выражения (3.51)—(3.53), повторяя п. 3.0.2.
6. За какое время амплитуда свободно колеблющегося поля в изолированном объеме уменьшится в 100 раз ($f = 10$ ГГц, полистирол)?
7. Будет ли иметь единственное решение внутренняя задача электродинамики для системы уравнений (3.34), если задано так называемое *импедансное* граничное условие

$$\dot{\mathbf{E}}_{m\tau} = \mathcal{Z}[\dot{\mathbf{H}}_{m\tau}, \mathbf{v}_0] \qquad (3.86)$$

($\mathbf{v}_0$ — орт внешней нормали). Рассмотреть вещественные, мнимые и комплексные значения *импеданса* $\mathcal{Z}$.
8. Показать, что лемма Лоренца справедлива и в случае анизотропных сред, если тензоры ε и μ симметричны.
9. Вывести лемму Лоренца в варианте магнитных источников, исходя из системы уравнений М (3.80).
10. Записать формулировки замены величин в уравнениях Максвелла, эквивалентные рассмотренным в п. 3.4.3.

ЧАСТЬ 2
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ И КОЛЕБАНИЯ

Глава 4
ПРОСТЕЙШИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ (А)

§ 4.0. Общие сведения о волновых процессах

4.0.1. Исходные представления. Перед изучением электромагнитных волн обсудим содержание понятий *волна*, *волновой процесс*, получивших широкое распространение в физике и технике. Прообразом здесь служат всем известные волны, возникающие на поверхности воды. Существенно то, что при движении, *распространении* всякой волны среда постепенно вовлекается в некоторый физический процесс, в результате чего происходит передача энергии в пространстве.

В основе математического описания волновых процессов лежат простые соображения. Пусть, наблюдая некоторый физический процесс, мы можем охарактеризовать его в точке $M(\mathbf{r}_1)$ функцией $u(\mathbf{r}_1, t) = \varphi(t)$ (рис. 4.1*а*). В другой, достаточно отдаленной, точке

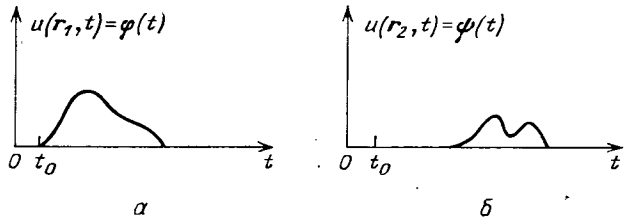


Рис. 4.1

$P(\mathbf{r}_2)$ процесс не будет наблюдаться ($u = 0$) до тех пор, пока он не будет передан средой, и тогда мы отметим там $u(\mathbf{r}_2, t) = \psi(t)$ (рис. 4.1*б*). Быть может, временной закон окажется сильно измененным, искаженным при передаче. Но в простейшем случае в точке $P(\mathbf{r}_2)$ будет обнаружено лишь *запаздывание* того, что происходило в точке $M(\mathbf{r}_1)$. При этом $\psi(t) = \varphi(t - \tau)$, где τ — время, требуемое для прохождения пути $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = l$ со скоростью v.

Положим, что в пространстве какие-либо изменения происходят только в направлении z. Тогда в соответствии со сказанным

процесс характеризуется функцией

$$u(z,\ t)=\varphi(t-z/v). \qquad (4.1)$$

Если при $z=0$ эта функция $u(0,\ t)=\varphi(t)$ имеет вид, показанный на рис. 4.2*а*, то при $z=l$ (рис. 4.2*б*) наблюдается временна́я зависимость $u(l,\ t)=\varphi(t-l/v)$, отличающаяся лишь сдвигом: $u(l,\ t)=u(0,\ t-l/v)$.

Рассмотренный волновой процесс — это *плоская однородная волна* в не деформирующей ее среде. Дело в том, что, говоря о процессе в некоторой точке $z=z_1$, мы, в сущности, можем иметь в

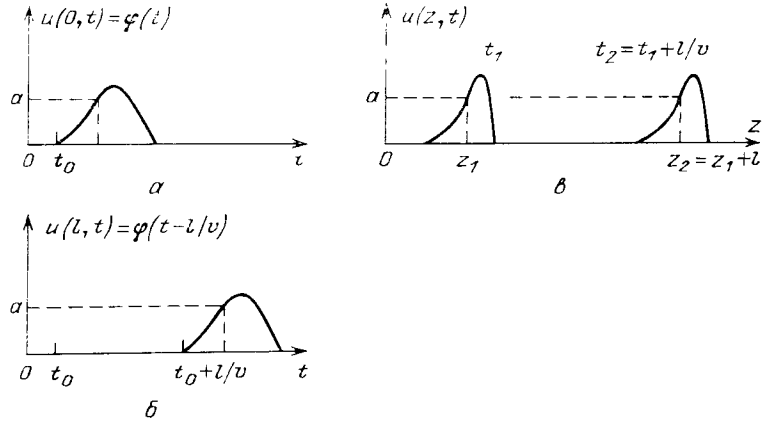


Рис. 4.2

виду любую точку плоскости, соответствующей данному постоянному z: согласно (4.1) изменение x и y в некоторой плоскости $z=$ $=\text{const}$ оставляет значение u в каждый момент времени постоянным. Обратимся теперь к рис. 4.2*в*, на котором для двух моментов времени t_1 и t_2 построена величина $u(z,\ t)$ (4.1), как функция z. Зафиксируем какое-либо мгновенное значение, *фазу* процесса, например, значение $u=a$ (рис. 4.2*а*, *б*, *в*). На основании рис. 4.2*в* можно сказать, что плоскость $z=\text{const}$, для которой $u=a$, за время $\tau=t_2-t_1$ переместилась на расстояние $l=v\tau$. Будем называть плоскость с любой фиксированной фазой *фронтом* рассматриваемой волны. Распространение волны можно обсуждать как движение ее фронта. Заметим, что кривые на рис. 4.2*в*, построенные для моментов t_1 и t_2, называют «мгновенными снимками» процесса.

Как выразить волну, распространяющуюся не в направлении z, а в противоположном? Для этого нужно изменить знак скорости v. Считая величину v положительной, мы должны в (4.1) заменить аргумент $t-z/v$ на $t+z/v$.

4.0.2. Гармонические волны. Конкретизируя выражение (4.1) для закона гармонических колебаний (3.1), приходим к представлению

о *гармонической волне*:

$$u(z,\ t)=u_m\cos[\omega(t-z/v)+\varphi]=u_m\cos(\omega t-kz+\varphi). \qquad (4.2)$$

Введенный параметр $k=\omega/v$ называется *волновым числом*, а v — *фазовой скоростью*. На рис. 4.3*а* (ср. рис. 4.2*в*) построены два мгновенных снимка гармонической волны. При каждом фиксированном

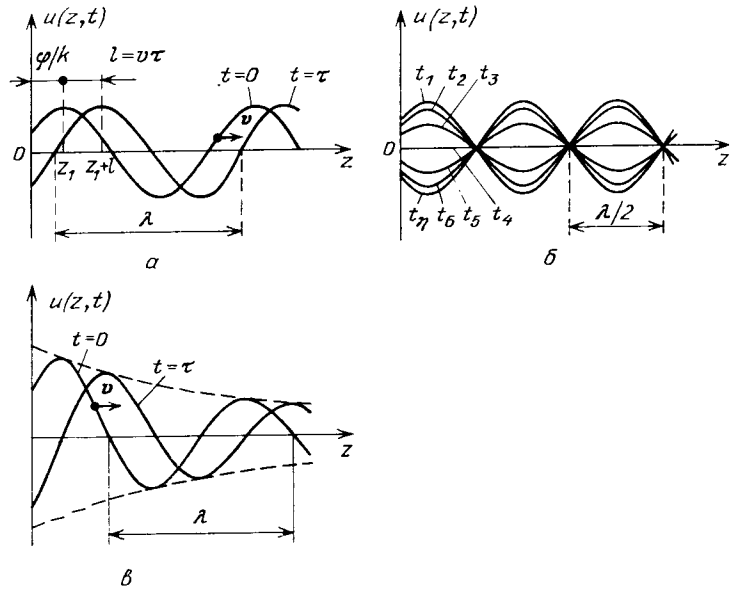


Рис. 4.3

t величина $u(z,\ t)$ (4.2) дает косинусоидальное пространственное распределение. Его период есть такое приращение координаты z, при котором фаза изменяется на 2π. Этот пространственный период называется *длиной волны* и обозначается символом λ, таким образом, $k\lambda=2\pi$. Волновое число имеет, следовательно, два выражения:

$$k=\omega/v=2\pi/\lambda. \qquad (4.3)$$

Учитывая, что $\omega=2\pi f$ (см. п. 3.0.1), имеем также:

$$v=\lambda f. \qquad (4.4)$$

Распространение гармонической волны отображается смещением косинусоиды (рис. 4.3*а*) вдоль оси z со скоростью v.

Пусть навстречу друг другу распространяются две гармонические волны. При этом:

$$u(z,\ t)=u_m^+\cos(\omega t-kz+\varphi)+u_m^-\cos(\omega t+kz+\psi). \qquad (4.5)$$

Если, в частности, $u_m^+=u_m^-$ и $\varphi=\psi$, то

$$u(z,\ t)=2u_m^+\cos kz\cos(\omega t+\varphi). \qquad (4.6)$$

Такой процесс называется *стоячей волной*. Как видно (рис. 4.3*б*), в каждый момент времени мы имеем неподвижную косинусоиду: ее нули не смещаются вдоль оси z, а остаются фиксированными.

Применяя метод комплексных амплитуд (см. п. 3.0.1), запишем для гармонической волны (4.2) комплексное представление:

$$\dot{u}(z,\ t) = u_m e^{i(\omega t - kz + \varphi)} = \dot{u}_m e^{i\omega t}, \tag{4.7}$$

где $\dot{u}_m = u_m \exp(-ikz + i\varphi) = \dot{u}_{m0} \exp(-ikz)$; $\dot{u}_{m0} = \dot{u}_m$ при $z = 0$.

В рамках метода волновые числа могут быть комплексными:

$$k = k' - ik''. \tag{4.8}$$

Внося (4.8) в (4.7) и вычисляя $u = \mathrm{Re}\,\dot{u}$, получаем:

$$u(z,\ t) = u_m e^{-k''z} \cos(\omega t - k'z + \varphi), \tag{4.9}$$

что при $k'' = 0$ совпадает с (4.2). Если $k'' > 0$, это *затухающая волна* (рис. 4.3*в*). Величина k'' называется ***коэффициентом затухания.***

Отношение $u(z)/u(z+l) = \exp(k''l)$ показывает, во сколько раз уменьшилась амплитуда затухающей волны на пути l. Обычно это отношение логарифмируют и получают величину L, называемую затуханием, которая измеряется в *неперах* [Нп] либо *децибелах* [дБ]:

$$L = k''l \text{ Нп} \quad \text{или} \quad L = 20 \lg e^{k''l} \approx 8{,}69\, k''l \text{ дБ}. \tag{4.10}$$

Распространение затухающей волны пояснено на рис. 4.3*в*: как и ранее, показано смещение мгновенного снимка (экспоненциальная огибающая не смещается). Можно записать (ср. (4.3)):

$$k' = \omega/v = 2\pi/\lambda. \tag{4.11}$$

Здесь фазовую скорость можно рассматривать как скорость смещения фронта с нулевой амплитудой; длина волны λ, уже не являющаяся периодом, также определяется по нулям. Величина k' называется *коэффициентом фазы.*

4.0.3. Волны скалярные и векторные, неплоские и неоднородные. Выше рассматривались *скалярные волны:* процесс описывался скалярной величиной u. Если волновой характер имеют компоненты некоторого вектора, то говорят о *векторной волне.*

Рассмотрим величину

$$u(x,\ y,\ z,\ t) = u_m(x,\ y,\ z) \cos[\omega t - \varphi(x,\ y,\ z)]. \tag{4.12}$$

Характерно, что поверхности постоянной фазы

$$\varphi(x,\ y,\ z) = \mathrm{const} \tag{4.13}$$

в общем случае не являются параллельными плоскостями, как это было в пп. 4.0.1—4.0.2. Волна может быть *неплоской.* Если к тому же на этих *поверхностях фронта* (ср. п. 4.0.1) амплитуда $u_m(x,\ y,\ z)$ не принимает постоянного значения, то волна, как говорят, *неоднородна.*

Неплоская и неоднородная волна может быть *локально плоской* (и однородной) в некоторой достаточно малой области пространства. Это значит, что рассматриваемый участок фронта весьма близок к элементу плоскости (и амплитуда на нем, практически, постоянна).

Уравнение поверхности фронта (4.13) может принимать простой вид в той или иной криволинейной системе координат. Пусть, например, $\varphi(x,\ y,\ z) = kr$. Если r — координата цилиндрической или, соответственно, сферической системы (табл. 2.2), то мы имеем *цилиндрическую* или *сферическую* волну. На рис. 4.4 показаны последовательные положения фронта цилиндрической (сферической) волны, распространяющейся от источника Q. Такие волны называют *расходящимися*, поскольку можно представить себе также *сходящуюся* волну, направление распространения которой везде противоположно: поверхности фронта сходятся к точке.

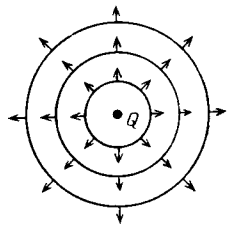


Рис. 4.4

4.0.4. Простейшие решения волновых уравнений. Выражение волновое уравнение появилось в п. 3.1.2. Рассмотрим однородное скалярное *волновое уравнение*

$$\nabla^2 u - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \tag{4.14}$$

Если рассматриваемый процесс зависит только от t и z, уравнение принимает следующую простую форму:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \tag{4.15}$$

Легко путем подстановки убедиться, что рассматривавшаяся в п. 4.0.1 плоская однородная волна, представленная функцией (4.1), дает решение уравнения (4.15). При этом $\varphi(\xi)$ в (4.1) может рассматриваться как любая дважды дифференцируемая функция. Решением будет также обратная волна, получаемая при замене v на $-v$. Общее решение волнового уравнения (4.15) можно представить в виде наложения прямой и обратной волн:

$$u(z,\ t) = u^+(t - z/v) + u^-(t + z/v). \tag{4.16}$$

Здесь $u^+(\xi)$ и $u^-(\xi)$ — произвольные дважды дифференцируемые функции. Как видно, v в (4.15) есть скорость волны.

Переходя к гармоническим колебаниям, введем в действие метод комплексных амплитуд, т. е. будем рассматривать временну́ю зависимость $\exp(i\omega t + \varphi)$. Тогда в (4.14) $\partial^2/\partial t^2 \to -\omega^2$, и это уравнение принимает вид:

$$\nabla^2 \dot{u}_m + k^2 u_m = 0, \tag{4.17}$$

где $k = \omega/v$. Мы получили однородное *уравнение Гельмгольца* (см.

п. 3.2.2). Запишем также уравнение Гельмгольца для одномерного процесса, зависящего от одной координаты z:

$$\frac{d^2\dot{u}_m}{dz^2} + k^2\dot{u}_m = 0. \tag{4.18}$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение отвечает волновому уравнению (4.15). Общее решение уравнения (4.18) запишем в виде:

$$\dot{u}_m(z) = \dot{u}^+_{m0}e^{-ikz} + \dot{u}^-_{m0}e^{ikz}, \tag{4.19}$$

где $\dot{u}^+_{m0}$ и $\dot{u}^-_{m0}$ — произвольные комплексные константы. Пусть $\dot{u}^+_{m0} = u^+_m \exp(i\varphi)$ и $\dot{u}^-_{m0} = u^-_m \exp(i\psi)$. Тогда из (4.19) в результате стандартной операции (п. 3.0.1) $\mathrm{Re}[\dot{u}_m(z)\exp(i\omega t)]$ получаем функцию $u(z, t)$ (4.5), которая является решением уравнения (4.15).

§ 4.1. Плоские однородные электромагнитные волны

4.1.1. Волновой характер электромагнитного поля. Сопоставляя общие сведения о волновых процессах, которые обсуждались выше в § 4.0, и уравнения электродинамики второго порядка из § 3.1, сделаем первый шаг к пониманию волнового характера электромагнитного поля. Ясно, например, что при проецировании векторных членов уравнений Даламбера (3.22), (3.23) и уравнений Гельмгольца (3.41), (3.42) на оси декартовой системы координат в случае $\mathbf{j} = 0$ ($\dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}_m = 0$) получаются скалярные уравнения типа (4.14) и (4.17). Это значит, что компоненты векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ могут иметь вид уже известных нам волн. Более того, сравнивая волновые уравнения из п. 3.1.2 и п. 4.0.4, можно сделать вывод, что параметр v, который имел смысл скорости распространения волны, для электромагнитных процессов равен

$$v = c/\sqrt{\varepsilon\mu} = 1/\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu}. \tag{4.20}$$

Нетрудно догадаться, что такова должна быть скорость плоских однородных электромагнитных волн в идеальном диэлектрике. В случае вакуума ($\varepsilon = 1$, $\mu = 1$)

$$v = c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = 2{,}998\ldots\cdot 10^8 \text{ м/с}. \tag{4.21}$$

Исторически величина c была известна еще до становления современной теории электромагнетизма как скорость света, измеренная в воздухе или космическом пространстве. Совпадение скорости предсказываемых теорией Максвелла электромагнитных волн и уже известной (с определенной точностью) скорости света стало аргументом в пользу гипотезы Максвелла об электромагнитной природе света.

Теперь мы должны подробно рассмотреть наиболее простые электромагнитные волны.

4.1.2. Простейшее решение уравнений электродинамики в комплексной форме. Полагая $\dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}_m = 0$, запишем однородные уравнения Гельмгольца, следующие из (3.41) и (3.42):

$$\nabla^2\dot{\mathbf{E}}_m + k^2\dot{\mathbf{E}}_m = 0, \quad \nabla^2\dot{\mathbf{H}}_m + k^2\dot{\mathbf{H}}_m = 0. \tag{4.22}$$

Здесь введено обозначение:

$$k = (\omega/c)\sqrt{\varepsilon\mu} = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu}. \tag{4.23}$$

Уравнения, которым удовлетворяют комплексные амплитуды $\dot{\mathbf{E}}_m$ и $\dot{\mathbf{H}}_m$ свободных электромагнитных полей, таким образом, одинаковы.

Будем рассматривать простейшие поля, зависящие только от одной декартовой координаты, например, z. При этом уравнения (4.22) принимают вид следующих обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2\dot{\mathbf{E}}_m}{dz^2} + k^2\dot{\mathbf{E}}_m = 0, \quad \frac{d^2\dot{\mathbf{H}}_m}{dz^2} + k^2\dot{\mathbf{H}}_m = 0. \tag{4.24}$$

Каждое эквивалентно трем скалярным уравнениям типа (4.18) относительно декартовых компонент $\dot{\mathbf{E}}_m$ или, соответственно, $\dot{\mathbf{H}}_m$. Решения уравнений (4.24), складывающиеся из своих проекций типа (4.19), запишем в форме:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{E}}_m(z) &= \dot{\mathbf{E}}^+_{m0}e^{-ikz} + \dot{\mathbf{E}}^-_{m0}e^{ikz} = \dot{\mathbf{E}}^+_m + \dot{\mathbf{E}}^-_m,\\ \dot{\mathbf{H}}_m(z) &= \dot{\mathbf{H}}^+_{m0}e^{-ikz} + \dot{\mathbf{H}}^-_{m0}e^{ikz} = \dot{\mathbf{H}}^+_m + \dot{\mathbf{H}}^-_m,\end{aligned} \tag{4.25}$$

где $\dot{\mathbf{E}}^\pm_{m0}$ и $\dot{\mathbf{H}}^\pm_{m0}$ — неопределенные векторные константы.

Далее необходимо учесть, что векторы $\dot{\mathbf{E}}_m$ и $\dot{\mathbf{H}}_m$ связаны уравнениями Максвелла (3.34):

$$\dot{\mathbf{E}}_m = (-i/\omega\varepsilon_0\varepsilon)\,\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{H}}_m, \quad \dot{\mathbf{H}}_m = (i/\omega\mu_0\mu)\,\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{E}}_m. \tag{4.26}$$

Операцию rot выполним в декартовых координатах согласно (1.21), учитывая при этом, что дифференцирование компонент $\dot{\mathbf{E}}^\pm_m$ и $\dot{\mathbf{H}}^\pm_m$ (4.25) по z эквивалентно умножению на $\mp ik$, а от x и y они не зависят. Подставляя в (4.26) отдельно первые и вторые слагаемые решений (4.25), имеем

$$\dot{\mathbf{E}}^\pm_m = \frac{-i}{\omega\varepsilon_0\varepsilon}\begin{vmatrix}\mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0\\ 0 & 0 & \mp ik\\ \dot{H}^\pm_{mx} & \dot{H}^\pm_{my} & \dot{H}^\pm_{mz}\end{vmatrix} = \pm W[\dot{\mathbf{H}}^\pm_m, \mathbf{z}_0], \tag{4.27}$$

$$\dot{\mathbf{H}}^\pm_m = \frac{i}{\omega\mu_0\mu}\begin{vmatrix}\mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0\\ 0 & 0 & \mp ik\\ \dot{E}^\pm_{mx} & \dot{E}^\pm_{my} & \dot{E}^\pm_{mz}\end{vmatrix} = \pm\frac{1}{W}[\mathbf{z}_0, \dot{\mathbf{E}}^\pm_m], \tag{4.28}$$

где введен параметр

$$W = \sqrt{\mu_0\mu/\varepsilon_0\varepsilon} = 120\pi\sqrt{\mu/\varepsilon}, \qquad (4.29)$$

называемый *волновым сопротивлением*, которое измеряется в *омах* [Ом].

Из (4.27), (4.28) следуют выводы:

Векторы $\mathbf{E}^{\pm}$ и $\mathbf{H}^{\pm}$ не имеют продольных компонент:

$$E_z^{\pm} = 0, \quad H_z^{\pm} = 0. \qquad (4.30)$$

Эти векторы ортогональны (взаимно перпендикулярны):

$$\mathbf{E}^{\pm}\mathbf{H}^{\pm} = 0. \qquad (4.31)$$

Отношение скалярных величин $\dot{E}_m^{\pm}$ и $\dot{H}_m^{\pm}$ равно $\pm W$ (4.29).

4.1.3. Волны в непоглощающей среде. Если ε и μ — вещественные величины, то среда, как известно (п. 3.2.2), не поглощает энергии электромагнитного поля. В этом случае вещественными являются волновое число k (4.23) и волновое сопротивление W (4.29).

Будем рассматривать волну, распространяющуюся вдоль оси z: $\dot{\mathbf{E}}_m = \dot{\mathbf{E}}_m^+$, $\dot{\mathbf{H}}_m = \dot{\mathbf{H}}_m^+$. Пусть при этом вектор $\mathbf{E}$ направлен вдоль оси x. Положив в (4.25) $\dot{\mathbf{E}}_{m0}^+ = \mathbf{x}_0\dot{A} = \mathbf{x}_0 A\exp(i\varphi)$ и $\dot{\mathbf{E}}_{m0}^- = 0$, а также используя (4.28), находим:

$$\dot{\mathbf{E}}_m = \mathbf{x}_0\dot{A}e^{-ikz}, \quad \dot{\mathbf{H}}_m = \mathbf{y}_0(\dot{A}/W)e^{-ikz} \qquad (4.32)$$

и, далее, переходя от комплексных амплитуд $\dot{\mathbf{E}}_m$ и $\dot{\mathbf{H}}_m$ к самим напряженностям поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, записываем:

$$\mathbf{E} = \mathbf{x}_0 A\cos(\omega t - kz + \varphi), \quad \mathbf{H} = \mathbf{y}_0(A/W)\cos(\omega t - kz + \varphi). \qquad (4.33)$$

Как видно, векторы поля изменяются по закону плоской однородной гармонической волны, распространяющейся без затухания. Вектор Пойнтинга $\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ направлен по оси z, а следовательно, распространяясь, волна переносит энергию. Правая тройка векторов $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{\Pi}$ показана на рис. 4.5*а*. Говорят, что волна в силу свойства (4.30) является *поперечной*. На рис. 4.5*б* представлен мгновенный снимок распределения поля, соответствующий формулам (4.33).

С какой скоростью происходит перенос энергии? Обратимся к формуле (1.117). Чтобы воспользоваться ею, надо вычислить плотность энергии w волнового поля (4.33) и плотность потока энергии $\mathbf{\Pi}$. На основании (1.113) находим:

$$w = w^{\text{м}} + w^{\text{э}} = \varepsilon_0\varepsilon A^2\cos^2(\omega t - kz + \varphi), \qquad (4.34)$$

причем плотности электрической и магнитной энергии оказываются равными: $w^{\text{м}} = w^{\text{э}} = w/2$. Далее,

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{z}_0(A^2/W)\cos^2(\omega t - kz + \varphi). \qquad (4.35)$$

Таким образом, из (1.117), (4.34) и (4.35) получаем следующее выражение скорости переноса энергии волной:

$$\mathbf{v}_{\text{э}} = \mathbf{\Pi}/w = \mathbf{z}_0 c/\sqrt{\varepsilon\mu}. \qquad (4.36)$$

Результат показывает, что энергия переносится со свойственной данной волне фазовой скоростью

$$v = \omega/k = c/\sqrt{\varepsilon\mu} \qquad (4.37)$$

(см. (4.3)). Эта величина уже была отмечена в п. 4.1.1.

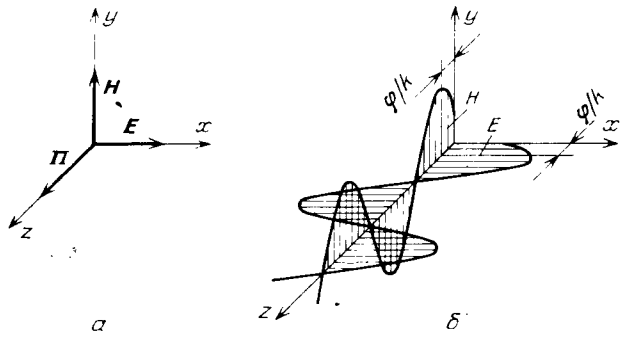


Рис. 4.5

Для волны в вакууме ($\varepsilon = 1$, $\mu = 1$) $v = c$ (4.21) и $W = W_0 = 120\pi$ Ом (4.29).

4.1.4. Волны в поглощающей среде. При комплексных ε и μ оказываются также комплексными k и W. Используя (3.37), запишем:

$$k = k' - ik'' = |k|e^{-i(\Delta+\Delta^{\text{м}})/2} = \mathbf{k}\sqrt{(1 - i\operatorname{tg}\Delta)(1 - i\operatorname{tg}\Delta^{\text{м}})}, \qquad (4.38)$$

где $|k| = (\omega/c)\sqrt{|\varepsilon||\mu|} = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0|\varepsilon||\mu|}$, $\mathbf{k} = (\omega/c)\sqrt{\varepsilon'\mu'}$;

$$W = W' + iW'' = |W|e^{i\varphi_W}, \qquad (4.39)$$

где $|W| = \sqrt{\mu_0|\mu|/\varepsilon_0|\varepsilon|} = 120\pi\sqrt{|\mu|/|\varepsilon|}$, $\varphi_W = (\Delta^{\text{м}} - \Delta)/2$.

При подстановке (4.38), (4.39) в (4.32) мы получим комплексные амплитуды $\dot{\mathbf{E}}_m$ и $\dot{\mathbf{H}}_m$, изменяющиеся при распространении волны и сдвинутые по фазе.

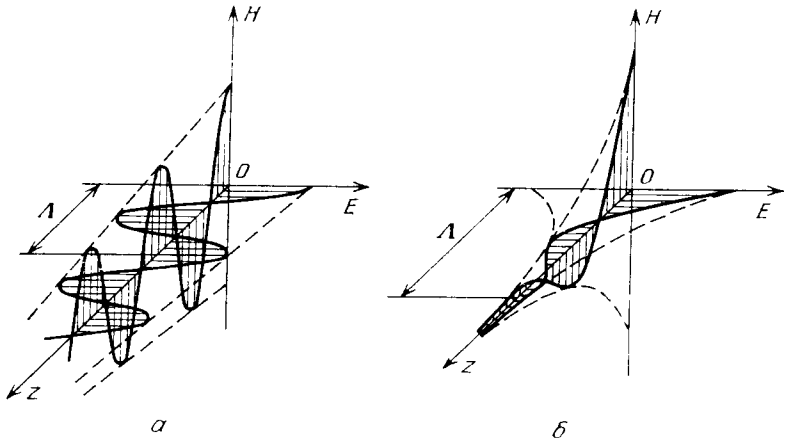
Если ε' и μ' положительны (что справедливо за исключением особых случаев), то при положительности ε'' и μ'', соответствующей потерям энергии (см. п. 3.3.2), углы Δ и $\Delta^{\text{м}}$ лежат в пределах $0 \div 90°$. Поскольку в этих же пределах лежит и их полусумма, то $k' > 0$ и $k'' > 0$. Поэтому, переходя от $\dot{\mathbf{E}}_m$ и $\dot{\mathbf{H}}_m$ (4.32) к $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$,

теперь получаем следующую *затухающую* волну:

$$\mathbf{E} = \mathbf{x}_0 A e^{-k''z}\cos(\omega t - k'z + \varphi),\quad \mathbf{H} = \mathbf{y}_0 \frac{A}{|W|} e^{-k''z}\cos(\omega t - k'z + \varphi - \varphi_W), \tag{4.40}$$

которая распространяется вдоль оси z с фазовой скоростью $v' = \omega/k'$ (4.11). Смысл коэффициента затухания k'' и коэффициента фазы k' уже обсуждался в п. 4.0.2.

Пример 1. На рис. 4.6 в двух вариантах представлен мгновенный снимок затухающей волны. В первом случае (*а*) волна распространяется во влажной почве — взято: $\varepsilon' = 10$, $\sigma = 0{,}03$ См/м, $f = 1$ ГГц. При этом согласно (3.33) $\operatorname{tg}\Delta = 0{,}054$. Получаем: $k' = 66{,}255$ м$^{-1}$ и $k'' = 1{,}788$ м$^{-1}$; $|W| = 119{,}085$ Ом и



а *б*

Рис. 4.6

$\varphi_W = 0{,}054$ рад. Значительно быстрее затухает волна той же частоты в морской воде (*б*). В этом случае $\varepsilon' = 80$, $\sigma = 4{,}3$ См/м, так что $\operatorname{tg}\Delta = 0{,}976$; $k' = 204{,}841$ м$^{-1}$ и $k'' = 82{,}873$ м$^{-1}$; $|W| = 33{,}124$ Ом и $\varphi_W = 0{,}384$ рад. Мгновенные снимки построены при $\varphi = 0$ в (4.40). На рис. 4.6*б* заметен сдвиг нулей распределений векторов поля. ■

Как и в этих примерах, в большинстве практических случаев при рассмотрении электромагнитных волн не приходится учитывать магнитные потери в среде ($\mu'' = 0$). При этом согласно (4.38)

$$k = \mathbf{k}\sqrt{1 - i\operatorname{tg}\Delta}. \tag{4.41}$$

После разделения вещественной и мнимой частей имеем:

$$k' = \mathbf{k}\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\Delta}\right)},\quad k'' = \mathbf{k}\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\Delta}\right)}. \tag{4.42}$$

Если $\operatorname{tg}\Delta \ll 1$, т. е. среда — *несовершенный диэлектрик*, то выражение (4.41) легко разложить в ряд:

$$k = \mathbf{k}\left(1 - i\frac{\operatorname{tg}\Delta}{2} + \frac{\operatorname{tg}^2\Delta}{8} + i\frac{\operatorname{tg}^3\Delta}{16} + \cdots\right). \tag{4.43}$$

Отсюда получаются приближенные формулы:

$$k' \approx \mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon'\mu'},\quad k'' \approx \mathbf{k}\frac{\operatorname{tg}\Delta}{2} = \frac{\omega}{c}\frac{\sqrt{\varepsilon'\mu'}\operatorname{tg}\Delta}{2}. \tag{4.44}$$

Вычисляя волновое сопротивление, в том же приближении находим:

$$W = W_0\sqrt{\frac{\mu'}{\varepsilon'(1 - i\operatorname{tg}\Delta)}} \approx W_0\sqrt{\frac{\mu'}{\varepsilon'}}\left(1 + i\frac{\operatorname{tg}\Delta}{2}\right). \tag{4.45}$$

Пусть теперь $\operatorname{tg}\Delta \gg 1$: среда — *проводник*. Пренебрегая в (4.42) единицей по сравнению с $\operatorname{tg}\Delta$, напишем:

т. е.
$$k \approx \mathbf{k}\sqrt{-i\operatorname{tg}\Delta} = (1 - i)\mathbf{k}\sqrt{(\operatorname{tg}\Delta)/2}, \tag{4.46}$$

$$\left.\begin{matrix} k' \\ k'' \end{matrix}\right\} \approx \mathbf{k}\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\Delta}{2}} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon'\mu'}\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\Delta}{2}} = \sqrt{\frac{\omega\mu_0\mu\sigma}{2}}. \tag{4.47}$$

Далее,

$$W = W_0\sqrt{\frac{\mu'}{\varepsilon'(1 - i\operatorname{tg}\Delta)}} \approx W_0\sqrt{i\frac{\mu'}{\varepsilon'\operatorname{tg}\Delta}} = (1 + i)\sqrt{\frac{\omega\mu_0\mu}{2\sigma}}. \tag{4.48}$$

На рис. 4.7 представлены относительные величины $k'/\mathbf{k}$ и $k''/\mathbf{k}$, вычисленные по точным формулам (4.42). График наглядно демонстрирует области применимости формул (4.44) и (4.47).

Как видно, диэлектрики и проводники резко различаются по характеру распространения электромагнитных волн. Из (4.44) следует, что затухание в случае диэлектрика очень мало, а коэффициент фазы k' близок к волновому числу при отсутствии потерь: потери почти не влияют на фазовую скорость волны $v = \omega/k'$.

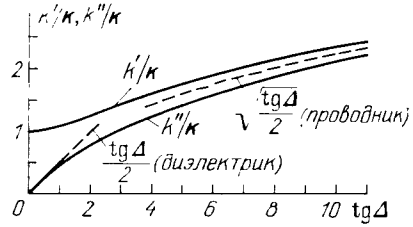


Рис. 4.7

В случае проводника весьма близкие величины k' и k'' (4.47) велики, т. е. велико затухание и мала длина волны $\lambda = 2\pi/k'$ (4.11). При переходе к идеальному проводнику ($\sigma \to \infty$) k' и k'' неограниченно возрастают. В частности, это означает, что полное затухание процесса должно происходить на любом конечном расстоянии. Волновое сопротивление (4.48) и длина волны при $\sigma \to \infty$ стремятся к нулю.

Ввиду (4.47) пространственное распределение поля распространяющейся в проводнике волны оказывается резко апериодическим. Действительно, на расстоянии

$$\Delta^0 = 1/k'' = \sqrt{2/\omega\mu_0\mu\sigma} \tag{4.49}$$

амплитуда колебаний уменьшается в e раз, тогда как длина волны

$\lambda = 2\pi/k'$ равна величине $2\pi\Delta^0$. Таким образом, на расстоянии в одну длину волны амплитуда уменьшается в $\exp(2\pi) \approx 535{,}5$ раз. Введенный параметр Δ^0 будет играть важную роль в теории поверхностного эффекта (п. 5.4.1).

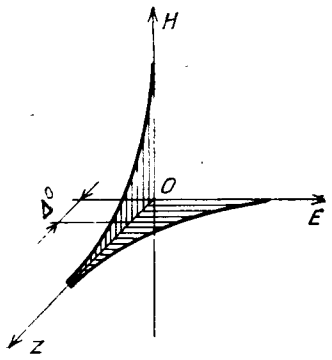


Рис. 4.8

Пример 2. На рис. 4.8 представлен мгновенный снимок волны, распространяющейся в меди ($\sigma = 5{,}8\cdot10^7$ См/м) при $f = 1$ ГГц. При этом $k' = k'' = 4{,}785\cdot10^5$ м$^{-1}$, $|W| = 8{,}25\cdot10^{-3}$ Ом и $\varphi_W = 45°$. В меди $\lambda = 13{,}12$ мкм, тогда как в воздухе при $f = 1$ ГГц $\lambda = 30$ см. ■

В заключение запишем выражение мгновенного вектора Пойнтинга для волны в поглощающей среде, получаемое при подстановке (4.40) в (1.107):

$$\Pi = \mathbf{z}_0 \frac{A^2}{|W|} e^{-2k''z} \cos(\omega t - k'z + \varphi)\cos(\omega t - k'z + \varphi - \varphi_W) =$$
$$= \mathbf{z}_0 \frac{A^2}{2|W|} e^{-2k''z}\{\cos\varphi_W + \cos[2(\omega t - k'z + \varphi) - \varphi_W]\} \quad (4.50)$$

(ср. (4.35)). При усреднении во времени получается:

$$\overline{\Pi} = \mathbf{z}_0 \frac{A^2}{2|W|} e^{-2k''z}\cos\varphi_W, \quad (4.51)$$

что можно вычислить на основании (3.53).

§ 4.2. Поляризация и сложение волн

4.2.1. Понятие поляризации волны. Выше в п. 4.1.3—4.1.4 мы ограничились анализом частного вида волны, распространяющейся вдоль оси z. При этом была зафиксирована ориентация вектора $\mathbf{E}$ в пространстве: $\mathbf{E} = \mathbf{x}_0 E$. Тем самым определилась и ориентация магнитного вектора: $\mathbf{H} = \mathbf{y}_0 H$. Говорят, что такая волна *поляризована* в плоскости $X0Z$. *Поляризация* волны — ориентационная характеристика. *Плоскость поляризации*, по определению, составлена вектором $\mathbf{E}$ и направлением распространения волны.

Положив в (4.25) $\dot{\mathbf{E}}^+_{m0} = \mathbf{x}_0\dot{A} + \mathbf{y}_0\dot{B}$, $\dot{\mathbf{E}}^-_{m0} = 0$, а также определяя $\dot{\mathbf{H}}_m$ путем подстановки $\dot{\mathbf{E}}_m$ в (4.28), находим общее выражение комплексных амплитуд векторов поля при распространении волны вдоль оси z:

$$\dot{\mathbf{E}}^+_m = (\mathbf{x}_0\dot{A} + \mathbf{y}_0\dot{B})\,e^{-ikz},$$
$$\dot{\mathbf{H}}^+_m = \frac{1}{W}(\mathbf{y}_0\dot{A} - \mathbf{x}_0\dot{B})\,e^{-ikz}. \quad (4.52)$$

Если в (4.52) аргументы комплексных чисел $\dot{A}$ и $\dot{B}$ одинаковы ($\dot{A} = A\exp(i\varphi)$ и $\dot{B} = B\exp(i\varphi)$), т. е. равны начальные фазы компонент вектора $\mathbf{E}$, то ориентация $\mathbf{E}$ при распространении волны не меняется. Волна поляризована в плоскости, составляющей угол $\vartheta = \operatorname{arctg}(B/A)$ с плоскостью $X0Z$ (рис. 4.9*а*). Очевидно, что эту волну можно рассматривать как наложение двух волн с амплитудами

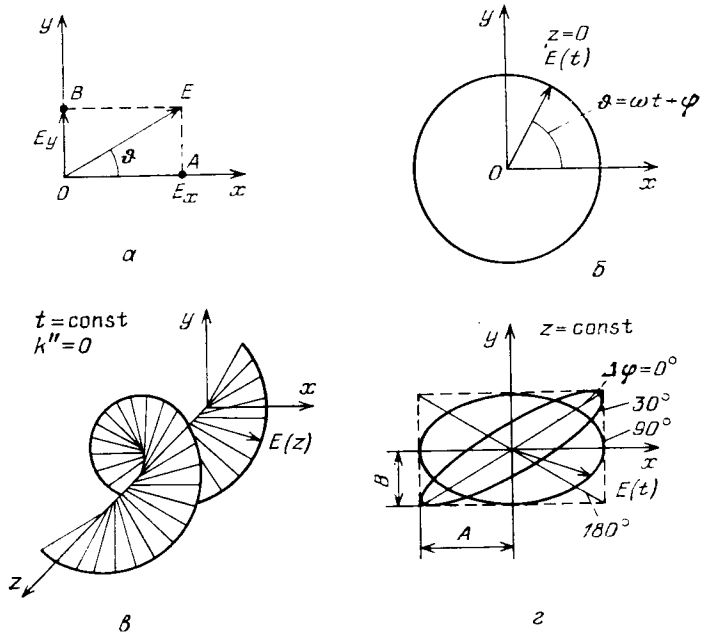


Рис. 4.9

A и B, одна из которых поляризована в плоскости $X0Z$ и другая — в плоскости $Y0Z$.

Итак, при синфазности декартовых компонент вектора $\mathbf{E}$ распространяющейся волны ориентация поля остается неизменной. Это называется *плоской* (линейной) поляризацией. Картина оказывается иной, если компоненты поля не синфазны.

Возьмем важный случай, когда амплитуды компонент E_x и E_y одинаковы ($A = B$), а начальные фазы различаются на 90°. Пусть в (4.52) $\dot{A} = Ae^{i\varphi}$ и $\dot{B} = Ae^{i(\varphi\mp90°)}$. Переходя в первой строчке (4.52) от комплексной амплитуды $\dot{\mathbf{E}}^+_m$ к напряженности $\mathbf{E}^+$, имеем:

$$\mathbf{E}^+ = Ae^{-k''z}[\mathbf{x}_0\cos(\omega t - k'z + \varphi) \pm \mathbf{y}_0\sin(\omega t - k'z + \varphi)] \quad (4.53)$$

(ср. (4.40)). Определяя угол ϑ, указывающий положение плоскости поляризации волны (рис. 4.9*б*), получаем:

$$\operatorname{tg}\vartheta = E_y/E_x = \pm\operatorname{tg}(\omega t - k'z + \varphi). \quad (4.54)$$

Это значит, что плоскость поляризации не остается фиксированной

в пространстве, а *вращается*. В любой плоскости $z = \text{const}$ (например, $z = 0$, рис. 4.9*б*) вектор **E**, а с ним и все электромагнитное поле волны вращается с угловой частотой ω. Такая поляризация называется *круговой*. При выборе фазового сдвига $-90°$ (верхний знак в (4.53)) вращение вектора **E** на рис. 4.9*б* должно происходить против часовой стрелки. Это *левая круговая поляризация*. При фазовом сдвиге $90°$ (нижний знак в (4.53)) вращение происходит в противоположном направлении — *правая круговая поляризация*. Зафиксировав некоторый момент времени ($t = \text{const}$), можно получить мгновенный снимок волны круговой поляризации. Как видно из (4.53), он должен отразить вращательное распределение поля: конец вектора **E** будет скользить по винтовой линии (рис. 4.9*в*).

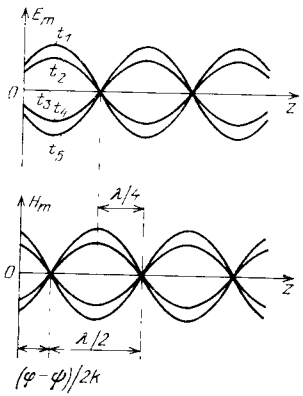


Рис. 4.10

Волна круговой поляризации есть результат наложения двух волн, поляризованных в ортогональных плоскостях, если их амплитуды равны, а фазы сдвинуты на $90°$. В общем случае, когда E_x и E_y могут быть не равны по амплитуде и произвольно сдвинуты по фазе, волна имеет *эллиптическую поляризацию*. При этом вектор **E**, вращаясь в плоскости $z = \text{const}$, изменяет свою длину, так что его конец описывает эллипс. Последний оказывается вписанным в прямоугольник со сторонами $2A$ и $2B$ (рис. 4.9*г*).

4.2.2. Стоячие волны. Как известно (п. 4.0.2), при наложении двух распространяющихся в противоположных направлениях гармонических волн с одинаковыми амплитудами образуется *стоячая волна*.

Рассмотрим наложение волн, одна из которых имеет комплексные амплитуды $\dot{\mathbf{E}}_m = \dot{\mathbf{E}}_m^+$, $\dot{\mathbf{H}}_m = \dot{\mathbf{H}}_m^+$, (4.32), а другая распространяется в противоположном направлении и характеризуется комплексными амплитудами $\dot{\mathbf{E}}_m = \dot{\mathbf{E}}_m^-$, $\dot{\mathbf{H}}_m = \dot{\mathbf{H}}_m^-$, которые получаются, если задать в (4.25) $\dot{\mathbf{E}}_{m0}^+ = 0$ и $\dot{\mathbf{E}}_{m0}^- = \mathbf{x}_0 B \exp(i\psi)$. Мы имеем, таким образом,

$$\dot{\mathbf{E}}_m^+ = \mathbf{x}_0 \dot{A} e^{-ikz}, \quad \dot{\mathbf{H}}_m^+ = \mathbf{y}_0 (\dot{A}/W)\, e^{-ikz},$$
$$\dot{\mathbf{E}}_m^- = \mathbf{x}_0 \dot{B} e^{ikz}, \quad \dot{\mathbf{H}}_m^- = -\mathbf{y}_0 (\dot{B}/W)\, e^{ikz}. \tag{4.55}$$

Пусть амплитуды обеих волн равны ($A = B$). Сложение их дает

$$\dot{\mathbf{E}}_m = \dot{\mathbf{E}}_m^+ + \dot{\mathbf{E}}_m^- = \mathbf{x}_0 2A e^{i(\varphi+\psi)/2} \cos[kz - (\varphi - \psi)/2],$$
$$\dot{\mathbf{H}}_m = \dot{\mathbf{H}}_m^+ + \dot{\mathbf{H}}_m^- = \mathbf{y}_0 (-i2A/W)\, e^{i(\varphi+\psi)/2} \sin[kz - (\varphi - \psi)/2]. \tag{4.56}$$

В случае непоглощающей среды (k и W вещественны) из (4.56) следует, что **E** и **H** сдвинуты по фазе на $90°$. Согласно (3.53) это означает, что средний вектор Пойнтинга $\overline{\mathbf{\Pi}}$ равен нулю: стоячая волна в среднем не передает энергии. Видно также, что пространственные распределения **E** и **H** сдвинуты на четверть волны (рис. 4.10):

$$\mathbf{E} = \mathbf{x}_0 2A \cos\left(kz - \frac{\varphi - \psi}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\varphi + \psi}{2}\right),$$
$$\mathbf{H} = \mathbf{y}_0 2\frac{A}{W} \sin\left(kz - \frac{\varphi - \psi}{2}\right) \sin\left(\omega t + \frac{\varphi + \psi}{2}\right). \tag{4.57}$$

В дальнейшем (гл. 5) мы будем рассматривать существенно более сложные наложения плоских однородных волн, направления распространения которых могут быть и неколлинеарными, а амплитудно-фазовые соотношения произвольны. Такие наложения образуются при наличии границ, отражающих волны. Заметим пока, что если бы амплитуды рассмотренных нами противоположно распространяющихся волн были различны, то можно было бы выделить стоячую волну типа (4.57) и бегущую волну с разностной амплитудой.

§ 4.3. Дисперсия, разные оценки скорости

4.3.1. Общее представление о дисперсии сред и распространении сигналов. Свойства сред, в которых распространяются реальные электромагнитные процессы, всегда являются в той или иной степени частотно-зависимыми. Поэтому должна зависеть от частоты и фазовая скорость электромагнитной волны

$$v = \omega/k' = c/\mathrm{Re}\sqrt{\varepsilon\mu}. \tag{4.58}$$

Это называется *дисперсией*. Заметим, что даже при не зависящих от частоты вещественных проницаемостях ε и μ дисперсия должна существовать в силу присущей средам электропроводности ($\sigma \neq 0$). Это видно при подстановке в (4.58) комплексной диэлектрической проницаемости вида (3.33).

Природа дисперсии многообразна. В гл. 5—7 мы увидим, что для более сложных волновых процессов, например, таких, которые свойственны волноводам, дисперсия будет иметь место независимо от свойств внутренней среды (даже в случае вакуума).

Существование дисперсии необходимо учитывать, оценивая распространение электромагнитных сигналов — волновых процессов, переносящих информацию. Плоская однородная гармоническая волна не может рассматриваться как сигнал. Но такой процесс на самом деле и не может существовать, поскольку, строго говоря, его существование мыслится на бесконечном временно́м интервале во всем пространстве. Если же он имеет начало и конец, то это — им-

пульс, характеризуемый спектром частот. Сигналы, как известно, всегда обладают некоторым спектром. Поэтому дисперсия влияет на их распространение. Действительно, представляя сигнал в виде разложения Фурье (необходим интеграл, а не ряд Фурье), мы должны рассматривать распространение гармонических волн, соответствующих всем частотным компонентам. Скорости их распространения различны, так что, преодолев некоторое расстояние, эти гармонические составляющие приобретут различные фазовые запаздывания. Но сложение с новыми фазовыми сдвигами обязательно приведет к деформации, искажению сигнала. Дисперсия может быть мала, тогда она почти не сказывается на распространении сигналов, пока невелики расстояния. Чем они больше, тем более важно учитывать дисперсию.

4.3.2. Анализ слабой дисперсии: групповая скорость волнового процесса. Рассмотрим напряженность электрического поля сигнала, взяв следующее представление:

$$\mathbf{E} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{E}}(\omega)\, e^{i[\omega t - k(\omega)z]} d\omega = \mathrm{Re} \int\limits_{0}^{\infty} \dot{\mathbf{E}}(\omega)\, e^{i[\omega t - k(\omega)z]} d\omega. \qquad (4.59)$$

Как видно, при любом $z = \mathrm{const}$ компоненты вектора $\mathbf{E}$ выражаются интегралами Фурье вида (3.18), а при распространении каждая частотная составляющая приобретает фазовое запаздывание $k(\omega)z$, свойственное плоской однородной волне при этой частоте. Пусть спектр заключен в полосе частот $(\omega_0 - \Delta\omega,\ \omega_0 + \Delta\omega)$. Каждой частоте ω можно сопоставить $k(\omega)$ и, следовательно, можно говорить, что сигнал характеризуется спектром волновых чисел $(k_0 - \Delta k,\ k_0 + \Delta k)$, где $k_0 = k(\omega_0)$. Поэтому

$$\mathbf{E} = \mathrm{Re} \int\limits_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \dot{\mathbf{E}}(\omega)\, e^{i[\omega t - k(\omega)z]} d\omega = \mathrm{Re} \int\limits_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} \dot{\mathbf{E}}(k)\, e^{i[\omega(k)t - kz]} dk, \qquad (4.60)$$

где произведена замена переменных $\omega \to k$.

Разложим частоту как функцию волнового числа в ряд Тейлора и ограничимся членом с первой производной:

$$\omega \approx \omega_0 + \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0} (k - k_0). \qquad (4.61)$$

Это представление можно считать оправданным, если дисперсия относительно слаба, а полосы частот и соответствующих им волновых чисел являются узкими. Такой волновой процесс называют *группой волн*. Внося (4.61) в (4.60), получаем

$$\mathbf{E} \approx \mathrm{Re}\exp[i(\omega_0 t - k_0 z)] \int\limits_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} \dot{\mathbf{E}}(k) \exp\left\{ i \left[\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0} t - z \right] (k - k_0) \right\} dk \qquad (4.62)$$

(вне интеграла (4.60) записан дополнительный множитель $\exp(-ik_0 z)$, а под интегралом — компенсирующий его множитель $\exp(ik_0 z)$).

Пусть $\dot{\mathbf{E}}(k) = \dot{\mathbf{E}}(\omega)$ может считаться постоянной величиной (спектральные компоненты имеют одинаковые амплитуды). Тогда этот множитель выносится за знак интеграла, после чего интеграл легко взять (удобно при этом сделать замену переменных $k \to k - k_0$). В результате получаем

$$\mathbf{E} \approx 2\,\mathrm{Re}\,\dot{\mathbf{E}}(k_0) \exp[i(\omega_0 t - k_0 z)] \frac{\sin\left[\left(\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0} t - z\right)\Delta k\right]}{\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0} t - z}. \qquad (4.63)$$

Полагая $\dot{\mathbf{E}}(k_0) = \mathbf{E}_m e^{i\varphi}$, окончательно имеем

$$\mathbf{E} \approx 2\mathbf{E}_m S(z, t)\Delta k \cos(\omega t - kz + \varphi) \qquad (4.64)$$

$(\omega = \omega_0)$, где

$$S(z, t) = \frac{\sin\left[\left(\frac{d\omega}{dk} t - z\right)\Delta k\right]}{\left(\frac{d\omega}{dk} t - z\right)\Delta k} \qquad (4.65)$$

есть огибающая гармонической волны, которая, можно сказать, оказалась модулированной.

Чтобы понять характер распространения изучаемой группы волн, обратимся к ее мгновенному снимку (рис. 4.11). Находящаяся внутри огибающей модулированная косинусоида перемещается вдоль оси z с обычной фазовой скоростью $v = \omega/k$. Что касается огибающей, то условием локализации ее максимума является равенство нулю аргумента (ведь это функция $\sin\xi/\xi$, $\xi = [(d\omega/dk)t - z]\Delta k$):

$$\frac{d\omega}{dk} t - z = 0.$$

Для разных моментов времени t условие выполняется при различных z, т. е. огибающая смещается. Очевидно, что скорость смещения есть

$$v_{\mathrm{гр}} = \frac{d\omega}{dk}. \qquad (4.66)$$

Она называется *групповой скоростью*.

Во всех случаях, когда дисперсия еще не приводит к существенному искажению сигнала, групповая скорость рассматривается как скорость переноса сигнала.

Внося в (4.66) $\omega = vk$, получаем

$$v_{\mathrm{гр}} = v + k\frac{dv}{dk}. \qquad (4.67)$$

Соотношение связывает групповую скорость $v_{гр}$ и фазовую скорость v. Отсюда также следует

$$v_{гр} = v + k\frac{dv}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dk} = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda}. \qquad (4.68)$$

В зависимости от знака производной dv/dk (или $dv/d\lambda$) групповая

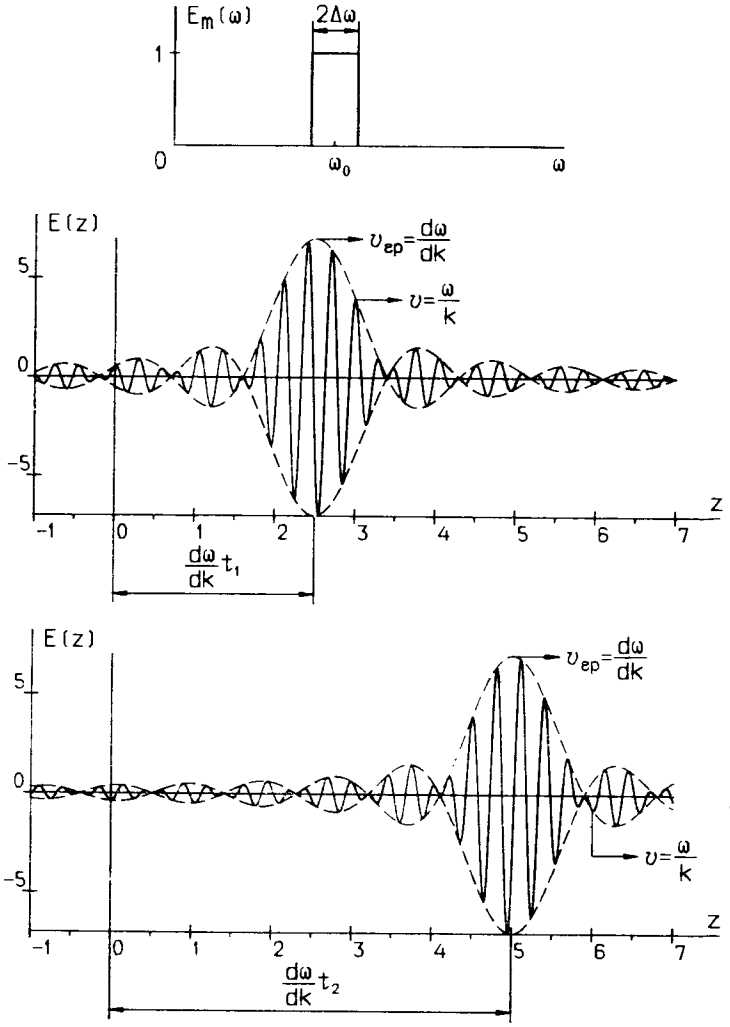


Рис. 4.11. (ЭВМ)

скорость может быть как больше, так и меньше фазовой. Скорость $v_{гр}$, однако, не может превышать скорости света c.

В дальнейшем мы неоднократно будем использовать понятие групповой скорости.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Какой смысл имеет отношение пространственного λ и временного T периодов гармонической волны?

2. Чем различается интерпретация параметров v и λ в случаях незатухающей и затухающей волн?

3. При $z = 0$ некоторый процесс описывается функцией $u(0, t) = \sin\sqrt{t}$. Какой вид будет иметь функция при $z = l$, если известно, что вдоль оси z распространяется плоская однородная волна типа (4.1)?

4. Рассмотреть наложение гармонических волн (4.5) при $u_m^+ \neq u_m^-$. Как изменяется амплитуда функции $u(z, t)$ в зависимости от z?

5. Записав уравнения (3.34) при $\dot{j}_m^{ст} = 0$ в координатной форме, показать, что при отсутствии зависимости поля от x и y равны нулю компоненты напряженностей поля E_z и H_z.

6. Записать комплексные амплитуды векторов поля плоской однородной электромагнитной волны, распространяющейся а) по оси x, б) по оси y.

7. Найти параметры k', k'', v, λ и W плоской однородной волны, распространяющейся в следующих средах (табл. 1.2): стекло ($f = 10^5$ Гц), полистирол ($f = 10^7$ Гц), олово ($f = 10^{10}$ Гц).

8. Представить волну, поляризованную в плоскости $X0Z$, в виде двух волн круговой поляризации, правой и левой.

9. Вычислить глубину проникновения Δ^0, а также волновое сопротивление W при $f = 10^{10}$ Гц для меди и свинца (табл. 1.2).

10. При выводе формулы (4.53) взять $B = 2A$. Построить кривую, описываемую концом вектора $\mathbf{E}$ в плоскости $z = 0$.

11. Выписать выражения векторов поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ стоячей волны в случае поглощающей среды.

12. Рассмотреть стоячую волну круговой поляризации.

13. Фазовая скорость волны изменяется по закону $v = v_0\sqrt{1 - \alpha/\omega^2}$ (v_0 и α не зависят от частоты). Найти групповую скорость.

14. Выразить групповую скорость в случае, когда диэлектрическая проницаемость некоторой непоглощающей среды зависит от частоты.

Глава 5

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И ОПТИКА

§ 5.0. Вспомогательные сведения. Вращение декартовой системы координат (А)

На рис. 5.1$а$ изображены две декартовы системы координат (x, y, z) и (ξ, η, ζ) с общим началом 0.

Введем девять углов

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix},$$

указывающих ориентацию осей второй системы относительно первой. Так в первой строке мы имеем углы, составляемые осью ξ с осями x, y и z (рис. 5.1$б$). В том же порядке во второй и третьей строках расположены углы ориентации осей η и, соответственно, ζ. Следовательно, между ортами обеих систем существуют

соотношения:

$$\begin{aligned}\xi_0 &= \mathbf{x}_0\cos\alpha_1 + \mathbf{y}_0\cos\alpha_2 + \mathbf{z}_0\cos\alpha_3,\\ \eta_0 &= \mathbf{x}_0\cos\beta_1 + \mathbf{y}_0\cos\beta_2 + \mathbf{z}_0\cos\beta_3,\\ \zeta_0 &= \mathbf{x}_0\cos\gamma_1 + \mathbf{y}_0\cos\gamma_2 + \mathbf{z}_0\cos\gamma_3\end{aligned} \tag{5.1}$$

и

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_0 &= \xi_0\cos\alpha_1 + \eta_0\cos\beta_1 + \zeta_0\cos\gamma_1,\\ \mathbf{y}_0 &= \xi_0\cos\alpha_2 + \eta_0\cos\beta_2 + \zeta_0\cos\gamma_2,\\ \mathbf{z}_0 &= \xi_0\cos\alpha_3 + \eta_0\cos\beta_3 + \zeta_0\cos\gamma_3.\end{aligned} \tag{5.2}$$

Аналогично преобразуются компоненты некоторого вектора

$$\mathbf{F} = \mathbf{x}_0F_x + \mathbf{y}_0F_y + \mathbf{z}_0F_z = \xi_0F_\xi + \eta_0F_\eta + \zeta_0F_\zeta.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}F_\xi &= F_x\cos\alpha_1 + F_y\cos\alpha_2 + F_z\cos\alpha_3,\\ F_\eta &= F_x\cos\beta_1 + F_y\cos\beta_2 + F_z\cos\beta_3,\\ F_\zeta &= F_x\cos\gamma_1 + F_y\cos\gamma_2 + F_z\cos\gamma_3\end{aligned} \tag{5.3}$$

и

$$\begin{aligned}F_x &= F_\xi\cos\alpha_1 + F_\eta\cos\beta_1 + F_\zeta\cos\gamma_1,\\ F_y &= F_\xi\cos\alpha_2 + F_\eta\cos\beta_2 + F_\zeta\cos\gamma_2,\\ F_z &= F_\xi\cos\alpha_3 + F_\eta\cos\beta_3 + F_\zeta\cos\gamma_3.\end{aligned} \tag{5.4}$$

А поскольку в качестве $\mathbf{F}$ может фигурировать и радиус-вектор

$$\mathbf{r} = \mathbf{x}_0x + \mathbf{y}_0y + \mathbf{z}_0z = \xi_0\xi + \eta_0\eta + \zeta_0\zeta,$$

соотношения (5.3), (5.4) дают также преобразование координат.

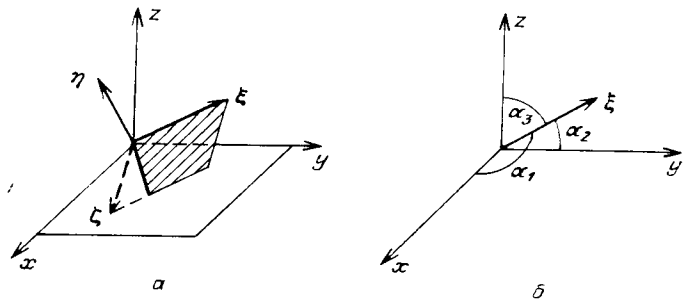


Рис. 5.1

Составляя скалярные произведения строчек (5.1) и (5.2), находим следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3 &= 1,\\ \cos\varphi_1\cos\psi_1 + \cos\varphi_2\cos\psi_2 + \cos\varphi_3\cos\psi_3 &= 0,\end{aligned} \tag{5.5}$$

при $\varphi = \alpha, \beta, \gamma$; $\psi = \alpha, \beta, \gamma$; $\varphi \neq \psi$.

$$\begin{aligned}\cos^2\alpha_i + \cos^2\beta_i + \cos^2\gamma_i &= 1,\\ \cos\alpha_i\cos\alpha_k + \cos\beta_i\cos\beta_k + \cos\gamma_i\cos\gamma_k &= 0\end{aligned} \tag{5.6}$$

при $i = 1, 2, 3$; $k = 1, 2, 3$; $i \neq k$.

§ 5.1. Отражение и преломление

5.1.1. Электромагнитные волны и оптические лучи (А). Оптика как наука о свете в значительной степени сформировалась задолго до установления его электромагнитной природы. В геометрической оптике оперируют понятием *луча*. В случае однородной изотропной среды луч есть прямая, указывающая направление распространения света. Обращаясь к представлению о плоской однородной волне (гл. 4), назовем лучом нормаль к ее фронту. Анализируя различные волновые процессы, мы в ряде случаев будем сопоставлять им лучевые схемы.

В отличие от гл. 4 нам придется рассматривать волны, распространяющиеся в разных направлениях, не совпадающих с осями декартовой системы координат (x, y, z). Положим, что волна распространяется в некотором направлении ζ. Естественной для этой волны назовем такую систему координат (ξ, η, ζ), в которой комплексные амплитуды напряженностей поля выражаются формулами, подобными (4.32):

$$\dot{\mathbf{E}}_m = \xi_0\dot{A}e^{-ik\zeta}, \quad \dot{\mathbf{H}}_m = \eta_0(\dot{A}/W)\,e^{-ik\zeta}. \tag{5.7}$$

Пользуясь правилами преобразования ортов и координат, запишем эти формулы в основной системе (x, y, z):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{E}}_m = (\mathbf{x}_0\cos\alpha_1 + \mathbf{y}_0\cos\alpha_2 + \mathbf{z}_0\cos\alpha_3)\times\\ \times\dot{A}\exp[-ik(x\cos\gamma_1 + y\cos\gamma_2 + z\cos\gamma_3)],\end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{H}}_m = (\mathbf{x}_0\cos\beta_1 + \mathbf{y}_0\cos\beta_2 + \mathbf{z}_0\cos\beta_3)\times\\ \times(\dot{A}/W)\exp[-ik(x\cos\gamma_1 + y\cos\gamma_2 + z\cos\gamma_3)].\end{aligned}$$

Ориентация луча ζ и фронта волны $\zeta = \text{const}$ показаны на рис. 5.2*а*.

Введем *волновой вектор*

$$\mathbf{k} = \zeta_0k = k(\mathbf{x}_0\cos\gamma_1 + \mathbf{y}_0\cos\gamma_2 + \mathbf{z}_0\cos\gamma_3), \tag{5.9}$$

указывающий направление луча и по абсолютному значению равный волновому числу. Скалярное произведение $\mathbf{kr} = k(x\cos\gamma_1 + y\cos\gamma_2 + z\cos\gamma_3)$ и экспоненциальный множитель в (5.7), (5.8) представляется в виде:

$$e^{-ik\zeta} = e^{-i\mathbf{kr}}. \tag{5.10}$$

Уравнение фронта волны $\zeta = \text{const}$ можно, таким образом, переписать в следующих формах:

$$x\cos\gamma_1 + y\cos\gamma_2 + z\cos\gamma_3 = \text{const}, \quad \mathbf{kr} = \text{const}. \tag{5.11}$$

Как показано на рис. 5.2*б*, проекция $\mathbf{r}$ на направление ζ, а с ним и величина $\mathbf{kr}$ остаются постоянными в плоскости фронта волны.

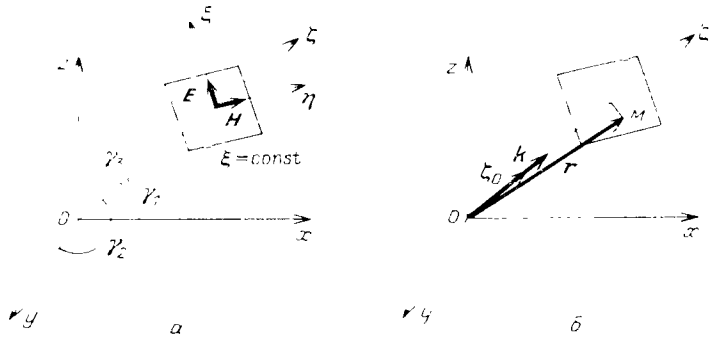


Рис. 5.2

5.1.2. Падение волны на границу раздела сред. Постановка задачи (А). На практике так или иначе приходится встречаться с влиянием границ физических тел на распространяющиеся волны, которые испытывают *отражение*. Это значит, что от границы распространяется новая волна, налагающаяся на первичную. Внутри тела, играющего роль препятствия, также возникает волновой процесс.

Будем рассматривать гармонический электромагнитный волновой процесс в случае, когда все пространство разделено плоскостью на два однородных полупространства с разными свойствами. Следует найти решения уравнений Максвелла (3.34) при $\mathbf{j}^{\text{ст}} = 0$ для каждого из полупространств, удовлетворяющие на указанной плоскости граничным условиям. Эти решения сформируем из плоских однородных волн (гл. 4). В первой среде зададим так называемую *падающую волну* $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{H}^0$, которая распространяется из бесконечности к границе под некоторым углом, и предположим, что существует *отраженная волна* $\mathbf{E}^-$, $\mathbf{H}^-$, распространяющаяся от границы. Во второй среде допустим существование одной *прошедшей волны* $\mathbf{E}^+$, $\mathbf{H}^+$ (ее называют также *преломленной волной*), которая уходит от границы в бесконечность. Это схематически показано на рис. 5.3.

Задача состоит в том, чтобы при заданной падающей волне подобрать такие комплексные амплитуды и направления распространения двух других волн, при которых тангенциальные компоненты векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ остаются непрерывными на границе раздела сред.

Запишем это в форме:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_{m1\tau} &= \dot{\mathbf{E}}_{m2\tau}, \\ \dot{\mathbf{H}}_{m1\tau} &= \dot{\mathbf{H}}_{m2\tau}, \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}^0_{m\tau} + \dot{\mathbf{E}}^-_{m\tau} &= \dot{\mathbf{E}}^+_{m\tau}, \\ \dot{\mathbf{H}}^0_{m\tau} + \dot{\mathbf{H}}^-_{m\tau} &= \dot{\mathbf{H}}^+_{m\tau} \end{aligned} \tag{5.12}$$

(имеются в виду тангенциальные компоненты на плоскости $z = 0$, рис. 5.3; индексы 1, 2 обозначают две разные среды).

Может возникнуть вопрос, не является ли выбор этих трех волн произвольным. Почему, например, во второй среде ожидаемое решение задачи исчерпывается только одной волной? Это требование физической определенности задачи. При падении заданной волны на границу раздела сред возникает вторичный волновой процесс, начинающийся на этой границе, и нет оснований ожидать, что появятся новые волны, приходящие из бесконечности. Отказ от введения таких волн согласуется с принципом причинности и называется *условием излучения*. В дальнейшем мы увидим, что «трехволновое представление», действительно, приводит к единственному, а тем самым, физически содержательному решению задачи.

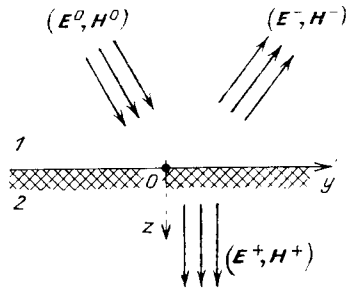


Рис. 5.3

5.1.3. Законы Снеллиуса (А). Лучевая схема для рассматриваемой задачи дана на рис. 5.4*а*. Из оптики известны законы отражения и преломления лучей:

1. *Угол отражения* φ' равен *углу падения* φ.
2. Синусы *угла преломления* ϑ и *угла падения* φ подчинены соотношению:

$$\sin\vartheta/\sin\varphi = n_1/n_2 = n_{12}, \tag{5.13}$$

где n_1 и n_2 — *коэффициенты преломления* сред, а n_{12} называется относительным коэффициентом преломления; в оптике это экспериментально определяемый параметр.

Мы записали так называемые *законы Снеллиуса*.

С точки зрения электродинамики эти законы — следствия уравнений Максвелла, причем

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu} \tag{5.14}$$

для всякой среды с данными проницаемостями.

ВЫВОД. Падающей, отраженной и преломленной волнам сопоставим волновые векторы $\mathbf{k}^0$, $\mathbf{k}^-$ и $\mathbf{k}^+$. Тогда (п. 5.1.1)

$$\begin{aligned} e^{-i\mathbf{k}^0\mathbf{r}} &= \exp\left[-ik_1\left(x\cos\gamma_1^0 + y\cos\gamma_2^0 + z\cos\gamma_3^0\right)\right], \\ e^{-i\mathbf{k}^-\mathbf{r}} &= \exp\left[-ik_1\left(x\cos\gamma_1^- + y\cos\gamma_2^- + z\cos\gamma^-\right)\right], \\ e^{-i\mathbf{k}^+\mathbf{r}} &= \exp\left[-ik_2\left(x\cos\gamma_1^+ + y\cos\gamma_2^+ + z\cos\gamma_3^+\right)\right], \end{aligned} \tag{5.15}$$

где $k_1 = (\omega/c)\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$ и $k_2 = (\omega/c)\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}$ — волновые числа для первой и второй сред, а углы γ_1, γ_2 и γ_3 (с теми или иными верхними индексами) — это ориентационные углы направлений распространения соответствующих волн (см. рис. 5.2*а*).

Компоненты векторов поля в граничных условиях (5.12) имеют характер констант, умноженных на функции из (5.15), взятые при

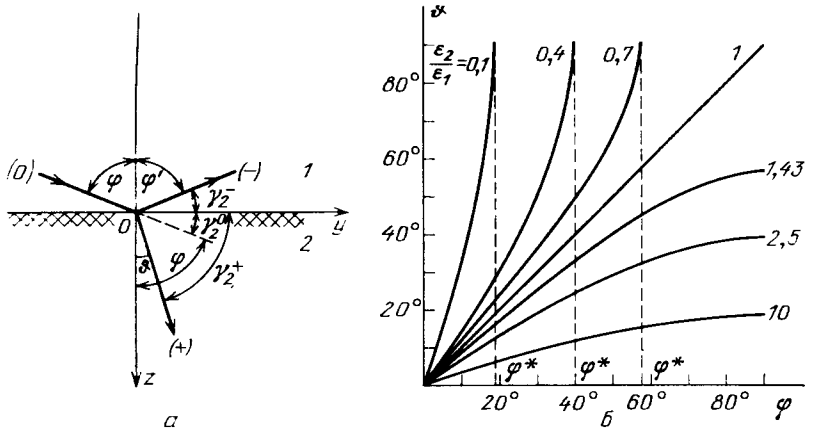


Рис. 5.4

$z = 0$ (см. рис. 5.3). Эти условия могут быть удовлетворены только при линейной зависимости[1]) компонент, что требует выполнения равенств:

$$\exp\left[-ik_1\left(x\cos\gamma_1^0 + y\cos\gamma_2^0\right)\right] = \exp\left[-ik_1\left(x\cos\gamma_1^- + y\cos\gamma_2^-\right)\right] = \exp\left[-ik_2\left(x\cos\gamma_1^+ + y\cos\gamma_2^+\right)\right]. \quad (5.16)$$

Лишь в этом случае условия (5.12), будучи удовлетворены в некоторой точке (например, в начале координат), выполняются везде на границе.

Потребуем, чтобы луч падающей волны лежал в плоскости чертежа, т. е. составлял угол $\gamma_1^0 = 90°$ с осью x (направленной по нормали к чертежу). Тогда $\cos\gamma_1^0 = 0$ и из (5.16) следует, что $\cos\gamma_1^- = \cos\gamma_1^+ = 0$. Следовательно, $\gamma_1^- = \gamma_1^+ = 90°$: *все три луча лежат в одной плоскости*. Смысл этого факта очень прост. Раз поле падающей волны не зависит от координаты x, такая зависимость отсутствует и у двух других волн.

[1]) Функции $f_1, \ldots, f_n$ называются линейно зависимыми, если можно подобрать такие коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (не все равные нулю), что линейная комбинация $\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n$ будет равной нулю при любых значениях аргументов функций.

Сосредоточим внимание на зависимости от y в (5.16) и запишем, как следствие, двойное равенство:

$$k_1\cos\gamma_2^0 = k_1\cos\gamma_2^- = k_2\cos\gamma_2^+. \quad (5.17)$$

Во-первых, (5.17) означает, что $\gamma_2^0 = \gamma_2^-$ (оба угла — острые, рис. 5.4*а*). Но $\gamma_2^0 = 90° - \varphi$ и $\gamma_2^- = 90° - \varphi'$. Поэтому

$$\varphi' = \varphi, \quad (5.18)$$

что составляет содержание первого закона Снеллиуса.

Во-вторых, учитывая дополнительно, что $\gamma_2^+ = 90° - \vartheta$, и переходя в (5.17) от косинусов к синусам, получаем

$$k_1\sin\varphi = k_2\sin\vartheta, \quad (5.19)$$

а это соотношение — не что иное, как выражение второго закона Снеллиуса, вытекающее из электродинамической теории. Мы не только пришли к оптическому закону (5.13) по форме, но и можем теперь дать электродинамическое толкование входящим в (5.13) коэффициентам преломления n_1 и n_2. Сопоставляя (5.13) и (5.19), имеем:

$$n_1/n_2 = k_1/k_2 = \sqrt{\varepsilon_1\mu_1}/\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}. \quad (5.20)$$

Положив $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$ и $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2\mu_2}$, приходим к (5.14). ■

Выполненный вывод вполне согласуется с оптической трактовкой, пока проницаемости сред вещественны. При этом $n_1 = c/v_1$ и $n_2 = c/v_2$, где v_1, v_2 — фазовые скорости плоской однородной волны для обеих сред. Закону (5.13), таким образом, можно придать следующий вид:

$$\sin\vartheta/\sin\varphi = v_2/v_1. \quad (5.21)$$

При поглощении, когда проницаемости сред, а с ними и коэффициенты преломления становятся комплексными, наглядная лучевая трактовка утрачивается. Но выполненный электродинамический вывод законов Снеллиуса остается в силе и, значит, сохраняют справедливость их формулировки. Электродинамическая трактовка законов Снеллиуса шире оптической; комплексным значениям тригонометрических функций отвечает определенное физическое содержание (см., в частности, п. 5.1.5).

На рис. 5.4*б* второй закон Снеллиуса поясняется при помощи семейства кривых $\vartheta(\varphi)$ для случая двух идеальных диэлектриков; при этом $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1}$ и $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2}$ вещественны. Биссектриса выделяет два класса процессов преломления. В одном из них первая среда является, как говорят, оптически более плотной: $n_{12} > 1$. В другом — она оптически менее плотная: $n_{12} < 1$.

5.1.4. Следствия второго закона Снеллиуса (А). Подчеркнем, что электродинамический вывод законов Снеллиуса — это всего лишь промежуточный этап при решении задачи о падении электро-

магнитной волны на границу раздела сред, постановка которой обсуждалась выше в п. 5.1.2. Однако уже на этом этапе можно сделать ряд содержательных выводов.

Полное отражение на границе непоглощающих сред. Пусть первая среда — оптически более плотная. Из (5.13) или (5.19) (см. также рис. 5.4*б*) следует, что угол преломления ϑ в данном случае больше угла падения φ; это отражает лучевая схема на

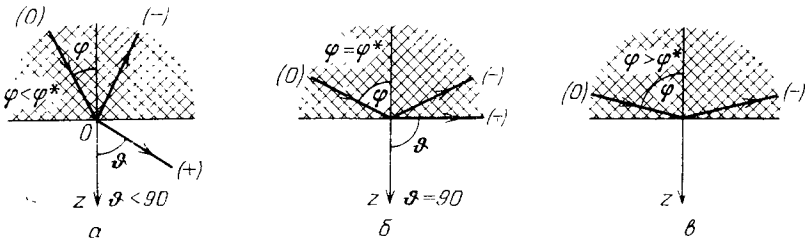


Рис. 5.5

рис. 5.5*а*. Следовательно, при некотором остром угле $\varphi = \varphi^*$, который называется *предельным углом внутреннего отражения*, окажется, что угол ϑ — прямой (рис. 5.5*б*). Преломленный луч при этом как бы скользит вдоль границы раздела сред. Полагая в (5.13) или (5.19) $\vartheta = 90°$, для $\varphi = \varphi^*$ получаем

$$\sin\varphi^* = k_2/k_1 = 1/n_{12}. \tag{5.22}$$

При дальнейшем увеличении угла падения ($\varphi > \varphi^*$), как следует из второго закона Снеллиуса, $\sin\vartheta > 1$. Это значит, что углам φ, лежащим в пределах $\varphi^* < \varphi < 90°$, не соответствуют какие-либо вещественные ϑ: преломленного луча нет, происходит *полное отражение* (рис. 5.5*в*). Возвращаясь к рис. 5.4*б*, видим, что, действительно, в случае большей оптической плотности первой среды ($n_{12} > 1$) областью определения функции $\vartheta(\varphi)$ является отрезок оси абсцисс $0 < \varphi < \varphi^*$.

Интересное и важное явление полного отражения на границе непоглощающих сред потребует в дальнейшем более обстоятельного анализа (см. п. 5.3.1), основанного на изучении электромагнитного поля.

Преломление в весьма оптически плотной среде. Продолжая рассматривать среды без поглощения, обратимся к случаю, когда $n_2 \gg n_1$. Согласно второму закону Снеллиуса

$$\sin\vartheta = \frac{n_1}{n_2}\sin\varphi \ll 1. \tag{5.23}$$

Это значит, что при любом угле падения φ преломленный луч близок по направлению к внутренней нормали (рис. 5.6).

5.1.5. Преломление при поглощении (Б). Пусть волна, распространяясь в среде без поглощения, падает на границу раздела с поглощающей средой (n_1 — величина вещественная, а n_2 — комплексная). Из (5.13) следует, что при любом угле падения φ неизбежно окажется комплексным $\sin\vartheta$, а следовательно, ϑ уже не может рассматриваться как обычный пространственный угол.

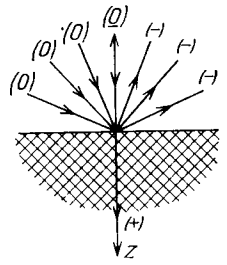


Рис. 5.6

Волну во второй среде характеризует функция, записанная в третьей строке (5.15). Так как $\cos\gamma_1^+ = 0$, $k_2\cos\gamma_2^+ = k_1\cos\gamma_1^0 = k_1\sin\varphi$ (см. второй закон Снеллиуса — п. 5.1.3) и $\gamma_3^+ = \vartheta$, то

$$e^{-i\mathbf{k}^+\mathbf{r}} = \exp\{-i[(k_1\sin\varphi)\,y + (k_2\cos\vartheta)\,z]\}. \tag{5.24}$$

В квадратных скобках первый член — вещественный, а второй — комплексный. Действительно, вещественными являются $k_1 = n_1\omega/c$ и $\sin\varphi$ и, далее,

$$(k_2\cos\vartheta)^2 = k_2^2(1 - \sin^2\vartheta) = k_2^2 - (k_1\sin\varphi)^2,$$

где $k_2 = n_2\omega/c$ — комплексная величина. Обозначим

$$k_1\sin\varphi = \chi_y, \qquad k_2\cos\vartheta = \chi_z, \tag{5.25}$$

причем

$$\chi_z = \sqrt{k_2^2 - (k_1\sin\varphi)^2} = \chi_z' - i\chi_z'', \tag{5.26}$$

где χ_z' и χ_z'' вещественны. Таким образом, выражение (5.24) принимает вид

$$e^{-i\mathbf{k}^+\mathbf{r}} = e^{-\chi_z''z}\exp[-i(\chi_y y + \chi_z' z)]. \tag{5.27}$$

Записывая вытекающие отсюда условия постоянства амплитуды и фазы процесса, видим, что это уравнения двух несовпадающих плоскостей

$$z = \text{const}, \quad \chi_y y + \chi_z' z = \text{const}. \tag{5.28}$$

Рассматривая эквифазную плоскость как фронт волны (см. п. 4.0.3), мы должны констатировать, что волна неоднородна: ее амплитуда не остается постоянной в плоскости фронта, а экспоненциально изменяется по нормали к границе сред; из физических соображений ясно, что по мере углубления в поглощающую среду поле должно убывать: $\chi_z'' > 0$.

Очевидно χ_y и χ_z' в (5.28) пропорциональны функциям $\sin\gamma$ и $\cos\gamma$, где γ — угол между нормалью к фронту волны и осью z. Это пояснено на рис. 5.7*а*. На основании (5.28) с учетом (5.25), (5.26)

$$\operatorname{ctg}\gamma = \frac{\chi_z'}{\chi_y} = \frac{\operatorname{Re}\sqrt{k_2^2 - k_1^2\sin^2\varphi}}{k_1\sin\varphi}, \tag{5.29}$$

а поскольку вещественную величину $k_1 \sin\varphi$ можно заменить при помощи закона Снеллиуса на $k_2 \sin\vartheta$, получаем:

$$\operatorname{ctg}\gamma = \operatorname{Re}\operatorname{ctg}\vartheta. \qquad (5.30)$$

Пусть потери малы. Взяв $|n_2| > n_1$ (вторая среда является оптически более плотной), можно убедиться, что угол γ близок к той величине ϑ, которая получается в пренебрежении потерями. Если

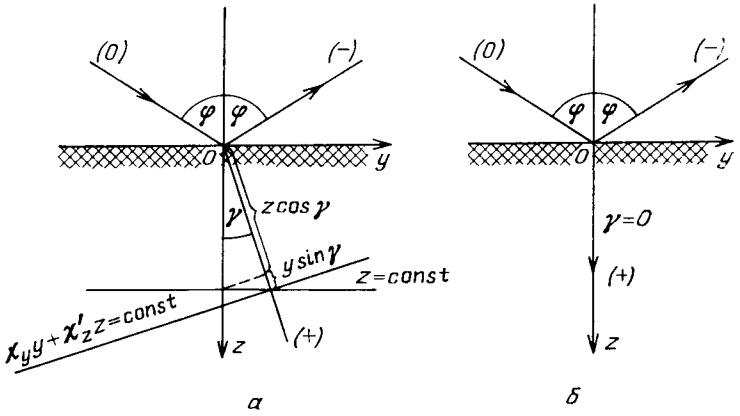


Рис. 5.7

же $|n_2| < n_1$, то различие будет заключаться в том, что полное отражение при потерях, строго говоря, уже окажется невозможным: во всех случаях угол γ будет существовать.

Представляет интерес случай, когда $|n_2| \gg n_1$, т. е. оптическая плотность поглощающей среды относительно весьма высока, что может быть как при малых, так и при больших потерях. Из (5.29) видно, что угол γ в этом случае становится очень малым ($\operatorname{ctg}\gamma \gg 1$): преломленный луч уходит в глубь поглощающей среды практически по нормали (рис. 5.7*б*), т. е. так же, как в аналогичном случае при отсутствии потерь (ср. рис. 5.6).

Отметим как важный факт то, что условие $|n_2| \gg n_1$ ($|k_2| \gg k_1$) в сильной степени выполняется при падении волны на границу с металлом. Мы вернемся к этому в п. 5.4.1.

§ 5.2. Поля при падении волны на границу раздела сред

5.2.1. Случай нормального падения (А). Нам нужно завершить решение задачи о падении плоской однородной электромагнитной волны на плоскость раздела различных сред (п. 5.1.2). Начнем с рассмотрения частного случая, когда падающая волна распространяется вдоль оси z, т. е. по нормали к границе раздела. Направления распространения отраженной и прошедшей волн коллинеарны

(рис. 5.8). Выпишем выражения комплексных амплитуд векторов **E** и **H** всех трех волн:

$$\dot{\mathbf{E}}_m^0 = \mathbf{x}_0 \dot{A} e^{-ik_1 z}, \quad \dot{\mathbf{H}}_m^0 = \mathbf{y}_0 (\dot{A}/W_1) e^{-ik_1 z} \quad (z<0), \qquad (5.31)$$

$$\dot{\mathbf{E}}_m^- = \mathbf{x}_0 \dot{B} e^{ik_1 z}, \quad \dot{\mathbf{H}}_m^- = -\mathbf{y}_0 (\dot{B}/W_1) e^{ik_1 z} \quad (z<0), \qquad (5.32)$$

$$\dot{\mathbf{E}}_m^+ = \mathbf{x}_0 \dot{C} e^{-ik_2 z}, \quad \dot{\mathbf{H}}_m^+ = \mathbf{y}_0 (\dot{C}/W_2) e^{-ik_2 z} \quad (z>0). \qquad (5.33)$$

Требуется ответить на вопрос, каковы будут комплексные амплитуды отраженной и прошедшей волн при заданной падающей волне, которая, разумеется, может нести любой поток энергии,

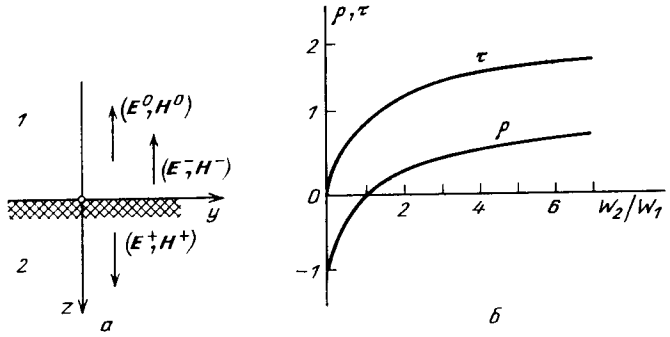


Рис. 5.8

так что коэффициент $\dot{A}$ является неопределенным. Определим *коэффициент отражения* ρ и *коэффициент прохождения* τ следующими формулами:

$$\rho = \dot{E}_m^-(0)/\dot{E}_m^0(0), \quad \tau = \dot{E}_m^+(0)/\dot{E}_m^0(0). \qquad (5.34)$$

Это отношения комплексных амплитуд вектора **E** для волн на границе раздела сред. Как видно из (5.31)—(5.33), $\rho = \dot{B}/\dot{A}$ и $\tau = \dot{C}/\dot{A}$.

Чтобы найти ρ и τ, достаточно потребовать выполнения сформулированных в п. 5.1.2 граничных условий. Векторы поля всех волн имеют только тангенциальные компоненты на границе раздела сред. Полагая в (5.31)—(5.33) $z = 0$ и внося эти выражения в (5.12), после простых преобразований получаем систему уравнений:

$$1 + \rho = \tau, \quad 1 - \rho = (W_1/W_2)\tau. \qquad (5.35)$$

Отсюда

$$\rho = (W_2 - W_1)/(W_2 + W_1), \quad \tau = 2W_2/(W_2 + W_1). \qquad (5.36)$$

Задача решена: теперь на основании (5.34), (5.36) для всякого заданного $\dot{A}$ по формулам (5.31)—(5.33) можно выразить полное электромагнитное поле в обеих средах.

Остается проанализировать полученный результат. Отметим сначала, что отражение от границы может отсутствовать, при этом волна полностью проходит во вторую среду. Из (5.36) следует, что эта возможность реализуется при равенстве волновых сопротивлений:

$$W_2 = W_1$$

или

$$\mu_2/\varepsilon_2 = \mu_1/\varepsilon_1. \qquad (5.37)$$

Говорят, что в этом случае среды *согласованы*.

Пусть W_1 и W_2 — вещественные. При этом удобно рассматривать ρ и τ как функции отношения W_2/W_1 (рис. 5.8*б*). Полное отражение ($|\rho| = 1$) имеет место при $W_2/W_1 = 0$ и $W_1/W_2 = 0$.

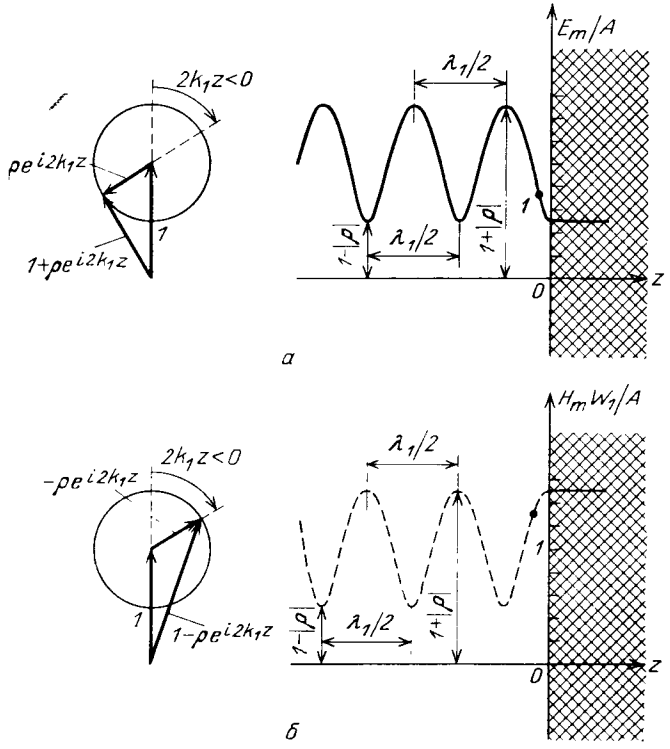


Рис. 5.9

На практике отражение велико, когда $W_2 \ll W_1$ или $W_1 \ll W_2$. Далее складывая падающую и отраженную волны, на основании формул (5.31), (5.32), (5.34) и (5.36) запишем следующие выражения комплексных амплитуд векторов поля в первой среде:

$$\dot{\mathbf{E}}_m = \mathbf{x}_0 \dot{A} e^{-ik_1 z}(1 + \rho e^{i2k_1 z}), \quad \dot{\mathbf{H}}_m = \mathbf{y}_0 \frac{\dot{A}}{W_1} e^{-ik_1 z}(1 - \rho e^{i2k_1 z}) \qquad (5.38)$$

($z \leqslant 0$). Как видно, амплитуды $\mathbf{E}_m$ и $\mathbf{H}_m$ векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ пропорциональны модулям комплексных чисел, заключенных в круглые скобки. Чтобы понять характер функций $E_m(z)$ и $H_m(z)$, рассмотрим диаграммы (рис. 5.9*а, б*, слева), представляющие $1 + \rho \exp(i2k_1z)$ и $1 - \rho \exp(i2k_1z)$ в виде условных векторных сумм. Неподвижный вертикальный отрезок изображает единицу, а слагаемое $\rho \exp(i2k_1z)$ и, соответственно, $-\rho \exp(i2k_1z)$ представлены вращающимся отрезком, длина которого равна $|\rho|$ (взято $\rho < 0$, что соответствует $W_2 < W_1$ в (5.36)). Полный оборот вращающегося отрезка происходит при изменении фазы $2k_1z = 4\pi z/\lambda_1$ на 2π. Это отвечает смещению по оси z на $\lambda_1/2$. Поэтому период пространственного распределения $E_m(z)$ и $H_m(z)$ равен половине длины волны в первой среде. Таково расстояние между соседними максимумами либо минимумами данных функций (рис. 5.9*а, б*, справа). Напряженности поля принимают максимальные значения, которые в $1 + |\rho|$ раз выше, и минимальные, которые в $1 - |\rho|$ раз ниже, чем в падающей волне.

Пример 1. Рассмотрим отражение волны от проводящего полупространства. Взяв сначала идеальный проводник, согласно (4.48) положим $W_2 = 0$, так как $\sigma_2 \to \infty$. Из (5.36) следует, что $\rho = -1$ и $\tau = 0$, т. е. происходит

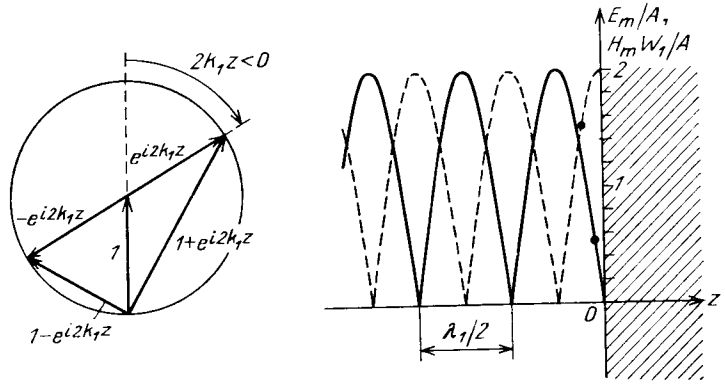


Рис. 5.10

полное отражение. При подстановке $\rho = -1$ в (5.38) получаем величины $\dot{\mathbf{E}}_m$ и $\dot{\mathbf{H}}_m$, соответствующие стоячей волне:

$$\dot{\mathbf{E}}_m = \mathbf{x}_0(-i2\dot{A}) \sin k_1 z, \quad \dot{\mathbf{H}}_m = \mathbf{y}_0 \frac{2\dot{A}}{W_1} \cos k_1 z \qquad (5.39)$$

(ср. п. 4.2.2). Распределение амплитуд поля показано на рис. 5.10. На границе ($z = 0$) амплитуда магнитного поля удваивается и распределен ток с плотностью

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_m = [-\mathbf{z}_0, \dot{\mathbf{H}}_m(0)] = \mathbf{x}_0 2\dot{A}/W_1 = \mathbf{x}_0 2\dot{H}_m^0. \qquad (5.40)$$

Возьмем вместо идеального проводника реальный. Отношение $W_2/W_1 = w$ — очень малая величина: согласно (4.57) $w = (1+i)\sqrt{\dfrac{\omega\varepsilon_0\varepsilon_1\mu_2}{2\mu_1\sigma_2}}$. Например, для меди ($\sigma_2 = 5.8\cdot10^7$ См/м), если первая среда — воздух, при $f = 10^9$ Гц $w = (1+i)\cdot2{,}188\cdot10^{-5}$. Поэтому выражения ρ и τ (5.36) удобно разложить по малому параметру w. С точностью до w^2 имеем:

$$\rho = -1 + 2w \quad \text{и} \quad \tau = 2w. \tag{5.41}$$

Таким образом, для меди отражение оказалось практически полным. ■

5.2.2. Наклонное падение. Формулы Френеля (А). Вернемся к общей задаче о наклонном падении волны, на пути решения которой уже получены законы Снеллиуса (см. п. 5.1.3). Следующий шаг — вывод формул, которые подобно (5.36) позволяли бы находить комплексные амплитуды полей отраженной и прошедшей волны, когда падающая волна задана. Результат должен зависеть от поляризации падающей волны, и мы отдельно рассмотрим две ортогональные поляризации. В одном варианте вектор **E** будет перпендикулярен плоскости падения, а в другом — параллелен ей. Ясно, что все иные типы поляризации можно рассматривать путем наложения решений, полученных для этих двух вариантов, т. е., как говорят, для случаев *перпендикулярной* и *параллельной* поляризации.

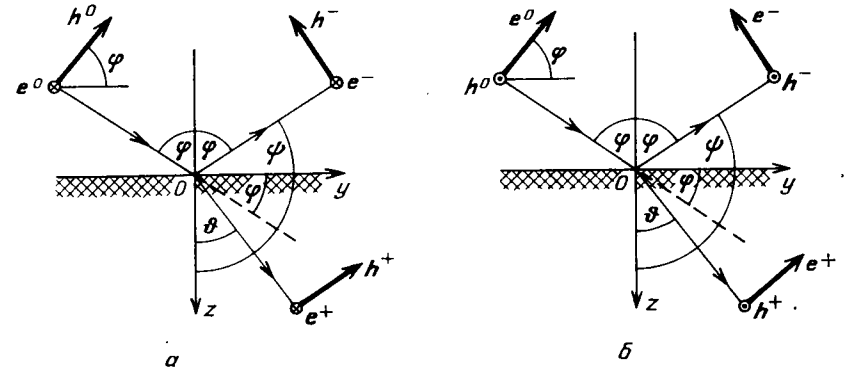


Рис. 5.11

На рис. 5.11*а* изображена лучевая схема наклонного падения (ср. рис. 5.4*а*), на которой отмечены орты для представления полей в случае перпендикулярной поляризации: $\mathbf{h}^0$, $\mathbf{h}^-$ и $\mathbf{h}^+$ — единичные векторы в выражениях $\dot{\mathbf{H}}^0_m$, $\dot{\mathbf{H}}^-_m$ и $\dot{\mathbf{H}}^+_m$. Все орты для электрических векторов направлены по оси x: $\mathbf{e}^0 = \mathbf{e}^- = \mathbf{e}^+ = \mathbf{x}_0$. Как и выше в п. 5.2.1, будем пользоваться понятиями коэффициента отражения и коэффициента прохождения (5.34), но отметим их индексами $\perp$ (символ перпендикулярной поляризации). Будет показано, что

$$\rho_\perp = \frac{W_2\cos\varphi - W_1\cos\vartheta}{W_2\cos\varphi + W_1\cos\vartheta}, \quad \tau_\perp = \frac{2W_2\cos\varphi}{W_2\cos\varphi + W_1\cos\vartheta}. \tag{5.42}$$

В случае параллельной поляризации (рис. 5.11*б*) $\mathbf{h}^0 = \mathbf{h}^- = \mathbf{h}^+ = -\mathbf{x}_0$, а орты для представления напряженности электрического поля $\mathbf{e}^0$, $\mathbf{e}^-$ и $\mathbf{e}^+$ лежат в плоскости чертежа. При этой поляризации, используя символ $\|$, запишем:

$$\rho_\| = -\frac{W_2\cos\vartheta - W_1\cos\varphi}{W_2\cos\vartheta + W_1\cos\varphi}, \quad \tau_\| = \frac{2W_2\cos\varphi}{W_2\cos\vartheta + W_1\cos\varphi}. \tag{5.43}$$

Выражения (5.42), (5.43) называются *формулами Френеля.*

Прежде чем анализировать формулы Френеля, покажем, как они получаются.

ВЫВОД. Начнем с того, что введем новое понятие. Пусть волна перпендикулярной поляризации распространяется под углом

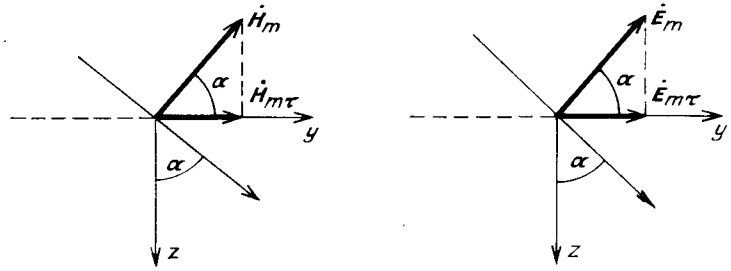


Рис. 5.12

α к оси z (рис. 5.12*а*). Проецируя $\dot{\mathbf{E}}_m$ и $\dot{\mathbf{H}}_m$ этой волны на некоторую плоскость $z = \text{const}$, получаем $\dot{E}_{m\tau} = \dot{E}_m$ и $\dot{H}_{m\tau} = \dot{H}_m\cos\alpha$. Отношение $\dot{E}_{m\tau}/\dot{H}_{m\tau}$ назовем *импедансом при перпендикулярной поляризации* и обозначим $Z_\perp(\alpha)$. Очевидно, что

$$Z_\perp(\alpha) = W/\cos\alpha. \tag{5.44}$$

Аналогично вводится *импеданс при параллельной поляризации* $Z_\|(\alpha)$ (рис. 5.12*б*). В этом случае $\dot{E}_{m\tau} = \dot{E}_m\cos\alpha$ и $\dot{H}_{m\tau} = \dot{H}_m$, так что

$$Z_\|(\alpha) = W\cos\alpha. \tag{5.45}$$

С целью вывести формулы Френеля (5.42) обратимся к рис. 5.11*а*. Для падающей, отраженной и прошедшей волн импеданс $Z_\perp(\alpha)$ (5.44) принимает следующие значения:

$$Z^0_\perp = \frac{W_1}{\cos\varphi}, \quad Z^-_\perp = \frac{W_1}{\cos\psi} = \frac{-W_1}{\cos\varphi}, \quad Z^+_\perp = \frac{W_2}{\cos\vartheta}. \tag{5.46}$$

Поэтому при наложении на границе раздела сред ($z = 0$) граничных условий (5.12) получаем:

$$\dot{E}^0_m(0) + \dot{E}^-_m(0) = \dot{E}^+_m(0), \qquad \frac{\dot{E}^0_m(0)}{Z^0_\perp} + \frac{\dot{E}^-_m(0)}{Z^-_\perp} = \frac{\dot{E}^+_m(0)}{Z^+_\perp}. \tag{5.47}$$

Разделив все члены на $\dot{E}^0_m(0)$ и принимая во внимание, что появившиеся отношения комплексных амплитуд согласно (5.34) дают $\rho = \rho_\perp$ и $\tau = \tau_\perp$, приходим к системе уравнений:

$$\rho_\perp - \tau_\perp = -1, \quad \rho_\perp + \frac{W_1 \cos\vartheta}{W_2 \cos\varphi}\tau_\perp = 1. \tag{5.48}$$

Выражения (5.42) получаются непосредственно в качестве решения этой системы.

Аналогично в случае параллельной поляризации (рис. 5.11*б*) после конкретизации импеданса $Z_\parallel(\alpha)$ (5.45)

$$Z^0_\parallel = W_1 \cos\varphi, \quad Z^-_\parallel = -W_1 \cos\varphi, \quad Z^+_\parallel = W_2 \cos\vartheta \tag{5.49}$$

и наложения граничных условий (5.12) получим соотношения, не отличающиеся по форме от (5.47), но содержащие не полные комплексные амплитуды $\dot{\mathbf{E}}^0_m(0)$, $\dot{\mathbf{E}}^-_m(0)$ и $\dot{\mathbf{E}}^+_m(0)$ (вектор $\dot{\mathbf{E}}_m$ каждой из волн уже не параллелен плоскости $z = 0$), а только $\dot{E}^0_{m\tau}(0)$, $\dot{E}^-_{m\tau}(0)$ и $\dot{E}^+_{m\tau}(0)$:

$$\dot{E}^0_{m\tau}(0) + \dot{E}^-_{m\tau}(0) = \dot{E}^+_{m\tau}(0), \qquad \frac{\dot{E}^0_{m\tau}(0)}{Z^0_\parallel} + \frac{\dot{E}^-_{m\tau}(0)}{Z^-_\parallel} = \frac{\dot{E}^+_{m\tau}(0)}{Z^+_\parallel}. \tag{5.50}$$

Учтем, что

$$\dot{E}^0_{m\tau}(0) = \dot{E}_m(0)\cos\varphi, \quad \dot{E}^-_{m\tau}(0) = -\dot{E}_m(0)\cos\varphi, \quad \dot{E}^+_{m\tau}(0) = \dot{E}^+_m(0)\cos\vartheta. \tag{5.51}$$

Поэтому, разделив все члены (5.50) на $\dot{E}_{0m\tau}(0)$, на основании определяющих формул (5.34) получаем следующую систему уравнений:

$$\rho_\parallel + \frac{\cos\vartheta}{\cos\varphi}\tau_\parallel = 1, \qquad \rho_\parallel - \frac{W_1}{W_2}\tau_\parallel = -1. \tag{5.52}$$

Формулы Френеля (5.43) — решения этой системы. ■

Итак, при наклонном падении плоской однородной волны на плоскость раздела различных сред направления отраженной и прошедшей волн подчинены законам Снеллиуса (5.18), (5.19), а их комплексные амплитуды при двух характерных поляризациях находятся при помощи формул Френеля (5.42), (5.43). Разумеется, ранее найденные выражения коэффициентов ρ и τ при нормальном падении волны (5.36) — это частный случай формул Френеля (5.42) или (5.43), соответствующий $\varphi = 0$ (при этом на основании (5.19) и $\vartheta = 0$). Впрочем, при переходе к (5.36) от (5.43) надо учесть, что при $\varphi = 0$ $\mathbf{e}^- = -\mathbf{e}^0$ (рис. 5.11*б*), поэтому в выражении для ρ надо изменить знак.

На рис. 5.13 представлены кривые, построенные по формулам Френеля (5.42), (5.43) для случая идеального диэлектрика (проницаемости вещественны, причем $\mu_1 = \mu_2 = 1$). Сначала сосредоточим внимание на семействе кривых, построенных для случая, когда оптическая плотность первой среды выше: $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$. Видно, что при этом независимо от вида поляризации коэффициент отражения ($\rho_\perp$ или $\rho_\parallel$) каждый раз стремится к единице при $\varphi = \varphi^*$ (ср. рис. 5.4*б*) и далее при $\varphi > \varphi^*$ сохраняет это значение. Если же более высокой является оптическая плотность второй среды ($\varepsilon_1 < \varepsilon_2$), то в области пологого падения ($\varphi \approx 90°$) для обеих поляризаций и при всех значениях параметра $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ коэффициент отражения близок к значению — 1.

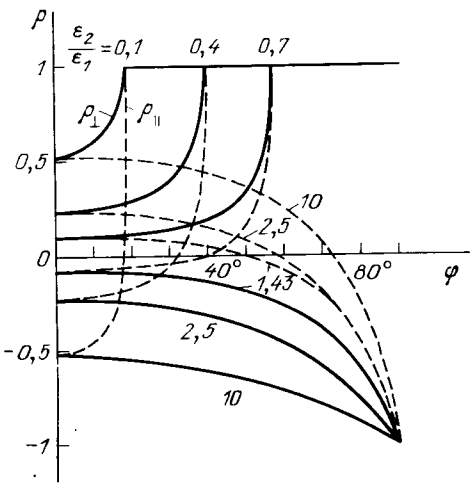


Рис. 5.13

При параллельной поляризации независимо от соотношения оптических плотностей сред коэффициент отражения меняет знак, проходя через нуль. Таким образом, при некоторых углах отражение отсутствует: происходит *полное прохождение* волны во вторую среду. Угол падения φ, при котором возникает полное прохождение, называется *углом Брюстера*.

Условие обращения в нуль коэффициента отражения $\rho_\parallel$ легко получить из формулы (5.43), выражающей эту величину. Для этого обратим в нуль числитель указанного выражения, заменив в нем $\cos\vartheta$ через $\sqrt{1 - \sin^2\vartheta} = \sqrt{1 - \left(\frac{k_1}{k_2}\sin\varphi\right)^2}$. Это дает

$$W_2^2(k_2^2 - k_1^2\sin^2\varphi) = W_1^2(1 - \sin^2\varphi)k_2^2,$$

откуда

$$\sin^2\varphi = \frac{\mu_2/\mu_1 - \varepsilon_2/\varepsilon_1}{\varepsilon_1/\varepsilon_2 - \varepsilon_2/\varepsilon_1}. \tag{5.53}$$

В случае $\mu_1 = \mu_2$ из (5.53) получаем следующее выражение угла Брюстера:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}. \tag{5.54}$$

Нетрудно проверить, что нули функции при разных $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ на рис. 5.13 соответствуют формуле (5.54).

Обращение в нуль числителя выражения $\rho_\perp$ (5.42) приводит вместо (5.53) к равенству:

$$\sin^2\varphi = \frac{\varepsilon_2/\varepsilon_1 - \mu_2/\mu_1}{\mu_1/\mu_2 - \mu_2/\mu_1}. \tag{5.55}$$

При $\mu_1 = \mu_2$ не существует угла φ, удовлетворяющего этому уравнению, а следовательно, полное прохождение невозможно.

5.2.3. Полное электромагнитное поле (А). Задача о наклонном падении решена. Остается выписать формулы, выражающие комплексные амплитуды $\dot{\mathbf{E}}_m$ и $\dot{\mathbf{H}}_m$ падающей, отраженной и прошедшей волн при обеих исследованных поляризациях. Для этого надо лишь конкретизировать запись типа (5.8) и учесть формулы Френеля.

Перпендикулярная поляризация. Чтобы записать поле падающей волны, учтем (рис. 5.11*а*) что

$$\begin{aligned} &\alpha_1^0 = 0, && \alpha_2^0 = 90°, && \alpha_3^0 = 90°,\\ &\beta_1^0 = 90°, && \beta_2^0 = \varphi, && \beta_3^0 = 90° + \varphi,\\ &\gamma_1^0 = 90°, && \gamma_2^0 = 90° - \varphi, && \gamma_3^0 = \varphi. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_m^0 &= \mathbf{x}_0 \dot{A} \exp[-ik_1(y\sin\varphi + z\cos\varphi)],\\ \dot{\mathbf{H}}_m^0 &= \frac{\dot{A}}{W_1}(\mathbf{y}_0\cos\varphi - \mathbf{z}_0\sin\varphi)\exp[-ik_1(y\sin\varphi + z\cos\varphi)]. \end{aligned} \tag{5.56}$$

Для отраженной волны (рис. 5.11*а*)

$$\begin{aligned} &\alpha_1^- = 0, && \alpha_2^- = 90°, && \alpha_3^- = 90°,\\ &\beta_1^- = 90°, && \beta_2^- = 180° - \varphi, && \beta_3^- = 90° + \varphi,\\ &\gamma_1^- = 90°, && \gamma_2^- = 90° - \varphi, && \gamma_3^- = 180° - \varphi. \end{aligned}$$

Внося это в (5.8) и заменяя $\dot{A}$ на $\dot{A}\rho_\perp$, пишем

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_m^- &= \mathbf{x}_0\rho_\perp \dot{A} \exp[-ik_1(y\sin\varphi - z\cos\varphi)],\\ \dot{\mathbf{H}}_m^- &= -\frac{\rho_\perp \dot{A}}{W_1}(\mathbf{y}_0\cos\varphi + \mathbf{z}_0\sin\varphi)\exp[-ik_1(y\sin\varphi - z\cos\varphi)]. \end{aligned} \tag{5.57}$$

Для прошедшей волны (рис. 5.11*а*)

$$\begin{aligned} &\alpha_1^+ = 0, && \alpha_2^+ = 90°, && \alpha_3^+ = 90°,\\ &\beta_1^+ = 90°, && \beta_2^+ = \vartheta, && \beta_3^+ = 90° + \vartheta,\\ &\gamma_1^+ = 90°, && \gamma_2^+ = 90° - \vartheta, && \gamma_3^+ = \vartheta. \end{aligned}$$

Прежним путем с заменой $\dot{A}$ на $\dot{A}\tau_\perp$ находим

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_m^+ &= \mathbf{x}_0\tau_\perp \dot{A} \exp[-ik_2(y\sin\vartheta + z\cos\vartheta)],\\ \dot{\mathbf{H}}_m^+ &= \frac{\tau_\perp \dot{A}}{W_2}(\mathbf{y}_0\cos\vartheta - \mathbf{z}_0\sin\vartheta)\exp[-ik_2(y\sin\vartheta + z\cos\vartheta)]. \end{aligned} \tag{5.58}$$

Параллельная поляризация. Все рассуждения повторяются с ориентацией на рис. 5.11*б*. Для падающей волны

$$\begin{aligned} &\alpha_1^0 = 90°, && \alpha_2^0 = \varphi, && \alpha_3^0 = 90° + \varphi,\\ &\beta_1^0 = 180°, && \beta_2^0 = 90°, && \beta_3^0 = 90°,\\ &\gamma_1^0 = 90°, && \gamma_2^0 = 90° - \varphi, && \gamma_3^0 = \varphi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_m^0 &= \dot{A}(\mathbf{y}_0\cos\varphi - \mathbf{z}_0\sin\varphi)\exp[-ik_1(y\sin\varphi + z\cos\varphi)],\\ \dot{\mathbf{H}}_m^0 &= -\mathbf{x}_0\frac{\dot{A}}{W_1}\exp[-ik_1(y\sin\varphi + z\cos\varphi)]. \end{aligned} \tag{5.59}$$

Для отраженной волны

$$\begin{aligned} &\alpha_1^- = 90°, && \alpha_2^- = 180° - \varphi, && \alpha_3^- = 90° + \varphi,\\ &\beta_1^- = 180°, && \beta_2^- = 90°, && \beta_3^- = 90°,\\ &\gamma_1^- = 90°, && \gamma_2^- = 90° - \varphi, && \gamma_3^- = 180° - \varphi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_m^- &= -\rho_\parallel \dot{A}(\mathbf{y}_0\cos\varphi + \mathbf{z}_0\sin\varphi)\exp[-ik_1(y\sin\varphi - z\cos\varphi)],\\ \dot{\mathbf{H}}_m^- &= -\frac{\rho_\parallel \dot{A}}{W_1}\mathbf{x}_0\exp[-ik_1(y\sin\varphi - z\cos\varphi)]. \end{aligned} \tag{5.60}$$

Для прошедшей волны

$$\begin{aligned} &\alpha_1^+ = 90°, && \alpha_2^+ = \vartheta, && \alpha_3^+ = 90° + \vartheta,\\ &\beta_1^+ = 180°, && \beta_2^+ = 90°, && \beta_3^+ = 90°,\\ &\gamma_1^+ = 90°, && \gamma_2^+ = 90° - \vartheta, && \gamma_3^+ = \vartheta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_m^+ &= \tau_\parallel \dot{A}(\mathbf{y}_0\cos\vartheta - \mathbf{z}_0\sin\vartheta)\exp[-ik_2(y\sin\vartheta + z\cos\vartheta)],\\ \dot{\mathbf{H}}_m^- &= -\frac{\tau_\parallel \dot{A}}{W_2}\mathbf{x}_0\exp[-ik_2(y\sin\vartheta + z\cos\vartheta)]. \end{aligned} \tag{5.61}$$

5.2.4. Применение принципа двойственности (Б). Сопоставив результаты, полученные в случаях перпендикулярной и параллельной поляризации, нетрудно заметить, что эти две задачи находятся в соотношении, определяемом принципом двойственности (см. п. 3.4.3): структуры электрического и магнитного полей при переходе от одной задачи к другой как бы меняются ролями. Можно было бы рассмотреть только случай перпендикулярной поляризации, а все результаты для параллельной поляризации получить при помощи замены (3.79).

Убедимся в этом на примере формул Френеля. Делая в (5.42) замену (3.79), мы должны учесть, что во-первых, таким образом волновые сопротивления заменяются обратными величинами и, во-вторых, вместо $\rho_\perp = \dot{E}_m^-(0)/\dot{E}_m^0(0)$ и $\tau_\perp = \dot{E}_m^+(0)/\dot{E}_m^0(0)$ (5.34) получатся отношения $\dot{H}_m^-(0)/\dot{H}_m^0(0)$ и $\dot{H}_m^+(0)/\dot{H}_m^0(0)$. Таким образом, из формул Френеля (5.42) получатся следующие равенства:

$$\frac{\dot{H}_m^-(0)}{\dot{H}_m^0(0)} = \frac{W_2^{-1}\cos\varphi - W_1^{-1}\cos\vartheta}{W_2^{-1}\cos\varphi + W_1^{-1}\cos\vartheta}, \qquad \frac{\dot{H}_m^+(0)}{\dot{H}_m^0(0)} = \frac{2W_2^{-1}\cos\varphi}{W_2^{-1}\cos\varphi + W_1^{-1}\cos\vartheta}. \tag{5.62}$$

Теперь учтем, что

$$\frac{\dot{H}_m^-(0)}{\dot{H}_m^0(0)} = \frac{\dot{E}_m^-(0)}{\dot{E}_m^0(0)} = \rho_\parallel, \qquad \frac{\dot{H}_m^+(0)}{\dot{H}_m^0(0)} = \frac{W_1\dot{E}_m^+(0)}{W_2\dot{E}_m^0(0)} = \frac{W_1}{W_2}\tau_\parallel, \tag{5.63}$$

в результате чего приходим от (5.62) к формулам Френеля (5.43), относящимся к другой поляризации.

Пользуясь принципом двойственности, можно было бы, в частности, при исследовании полного прохождения не выводить отдельно равенства (5.53) и (5.55): одно из них вытекает из другого при замене $\varepsilon_0\varepsilon \rightleftarrows \mu_0\mu$.

Разумеется, путем замены (3.79) можно получить полные поля (5.59)—(5.61) из (5.56)—(5.58) либо произвести обратную операцию. Общий неопределенный коэффициент при этом изменяется.

§ 5.3. Полное отражение и направляемые волны (А)

5.3.1. Волны вдоль идеально проводящей плоскости. Если плоская однородная волна при наклонном падении на границу раздела сред полностью отражается, то отраженная волна несет такую же энергию, как и падающая. На рис. 5.14 показана векторная диаграмма, на которой средние значения вектора Пойнтинга падающей и отраженной волн $\overline{\Pi}^0$ и $\overline{\Pi}^-$ разложены на нормальные и тангенциальные границе компоненты. Поскольку нормальные компоненты взаимно уничтожаются, а тангенциальные складываются, поток энергии переносится вдоль границы. Мы увидим, что при этом

формируется особый волновой процесс, направляемый границей раздела сред.

Сначала будет рассмотрено полное отражение от идеально проводящей границы ($\sigma_2 \to \infty$ и $W_2 = 0$).

Перпендикулярная поляризация. Из формул Френеля (5.42) следует, что в этом случае

$$\rho_\perp = -1, \ \tau_\perp = 0. \tag{5.64}$$

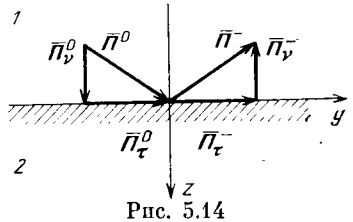


Рис. 5.14

Учитывая это в (5.57), сложим комплексные амплитуды напряженностей падающей и отраженной волн (5.56), (5.57); поскольку поле существует только в одной среде, единицу в индексе снимем. В результате получаем:

$$\dot{\mathbf{E}}_m = \mathbf{x}_0(-i2\dot{A})\sin(kz\cos\varphi)\,e^{-iky\sin\varphi}, \tag{5.65}$$

$$\dot{\mathbf{H}}_m = 2\frac{\dot{A}}{W}\left[\mathbf{y}_0\cos\varphi\cos(kz\cos\varphi) + \mathbf{z}_0 i\sin\varphi\sin(kz\cos\varphi)\right]e^{-iky\sin\varphi}, \ z<0.$$

Параллельная поляризация. Аналогично из (5.43) при $W_2 = 0$ имеем:

$$\rho_\parallel = 1, \quad \tau_\parallel = 0. \tag{5.66}$$

Подставим $\rho_\parallel = 1$ в (5.60). Складывая комплексные амплитуды полей (5.59) и (5.60), получаем аналогичное (5.65) выражение для поля, представляющего собой наложение падающей и отраженной волн:

$$\dot{\mathbf{E}}_m = -i2\dot{A}\left[\mathbf{y}_0\cos\varphi\sin(kz\cos\varphi) - \mathbf{z}_0 i\sin\varphi\cos(kz\cos\varphi)\right]e^{-iky\sin\varphi},$$
$$\dot{\mathbf{H}}_m = -\mathbf{x}_0\frac{2\dot{A}}{W}\cos(kz\cos\varphi)\,e^{-iky\sin\varphi}, \quad z<0. \tag{5.67}$$

Рассмотрим внимательно выражения полей (5.65) и (5.67). Каждое из них имеет характер волны, распространяющейся в направлении y, а в плоскостях фронта $y = \text{const}$ распределение поля есть стоячая волна. В целом это *плоские неоднородные волны*, распространяющиеся вдоль границы. Процесс характеризуется двумя волновыми числами Γ и χ, которые связаны соотношениями:

$$\Gamma = k\sin\varphi, \quad \chi = k\cos\varphi, \quad \Gamma^2 + \chi^2 = k^2. \tag{5.68}$$

Величина Γ называется *продольным волновым числом*, или *постоянной распространения*, а χ — *поперечным волновым числом*. При вещественном k (ср. (4.3)) $\Gamma = \omega/v_\Phi = 2\pi/\Lambda$, где v_Φ — фазовая скорость волны, а Λ — пространственный период, т. е. длина волны. Запишем также соотношение $\chi = 2\pi/\Lambda_\perp$, вводя этим обозначение $\Lambda_\perp$ для периода стоячей волны в плоскости фронта.

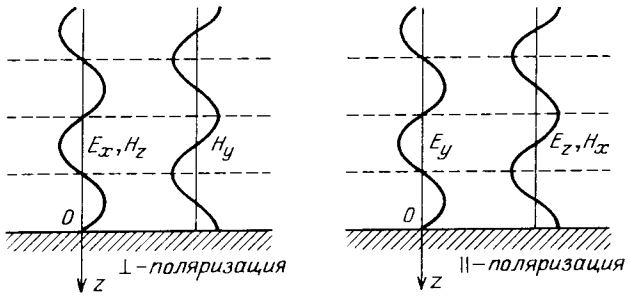
Характерно, что неоднородные волны имеют не только поперечные, но и продольные компоненты векторов поля. При перпен-

дикулярной поляризации формируется неоднородная волна, имеющая продольную магнитную компоненту H_y, а при параллельной поляризации — продольную электрическую компоненту E_y. В первом случае употребляется термин *H-волна*, а во втором — *E-волна*.

Фазовые скорости этих волн $v_ф$ выше фазовой скорости v однородной волны в той же среде. Говорят, что это *быстрые волны*. Действительно, поскольку $0 < \varphi < 90°$, то при вещественном $k = \omega/v$ (4.37) из (5.68) следует

$$\Gamma < k, \quad v_ф > v. \tag{5.69}$$

На рис. 5.15*а, б* представлено распределение компонент векторов поля в плоскости фронта рассматриваемых неоднородных волн.



а *б*

Рис. 5.15

На расстояниях $z = -n\Lambda_\perp/2$ от границы раздела лежат плоскости, на которых выполняется условие $E_\tau = 0$ и которые, следовательно, могли бы быть заменены идеально проводящими плоскостями без всякого нарушения структуры поля.

5.3.2. Плоский полый волновод. Если введена дополнительная идеально проводящая плоскость, о которой говорилось выше, то между ней и первоначальной границей $z = 0$ образуется энергетически изолированный слой, внутри которого может существовать прежняя *H*- или *E*-волна. Это простейший *полый волновод*.

Пусть расстояние между двумя рассматриваемыми плоскостями фиксировано и равно d. Наложим условие

$$\chi = n\pi/d, \qquad n = (0),\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{5.70}$$

($n = 0$ имеет смысл только в варианте параллельной поляризации). При подстановке значений $n\pi/d$ (5.70) величины $\chi = k\cos\varphi$ в (5.65) и (5.67) на введенной плоскости $z = -d$ удовлетворяется граничное условие $E_\tau = 0$. Это значит, что для плоского волновода существует бесконечная последовательность значений χ, при которых в этой структуре могут распространяться *H*- и *E*-волны.

При этом волновой процесс в обычном смысле (п. 4.0.3) возможен лишь при достаточно высоких частотах. Действительно, исходя из (5.68), при подстановке значений χ (5.70) получаем:

$$\Gamma = \sqrt{k^2 - (n\pi/d)^2} = k\sqrt{1 - (\omega_{кр}/\omega)^2}, \tag{5.71}$$

где $\omega_{кр} = (c/\sqrt{\varepsilon\mu})(n\pi/d)$ называется *критической* (круговой) частотой. При вещественных ε и μ

$$\mathrm{Re}\,(e^{-i\Gamma y}e^{i\omega t}) = \begin{cases} \cos(\omega t - \Gamma y), & \omega > \omega_{кр}; \\ e^{\mp|\Gamma|y}\cos\omega t, & \omega < \omega_{кр}, \end{cases} \tag{5.72}$$

поскольку с понижением частоты при прохождении точки $\omega = \omega_{кр}$ постоянная распространения Γ становится чисто мнимой. Фазовое запаздывание, свойственное обычной волне (п. 4.0.3), исчезает, и процесс экспоненциально затухает (в направлении y или $-y$).

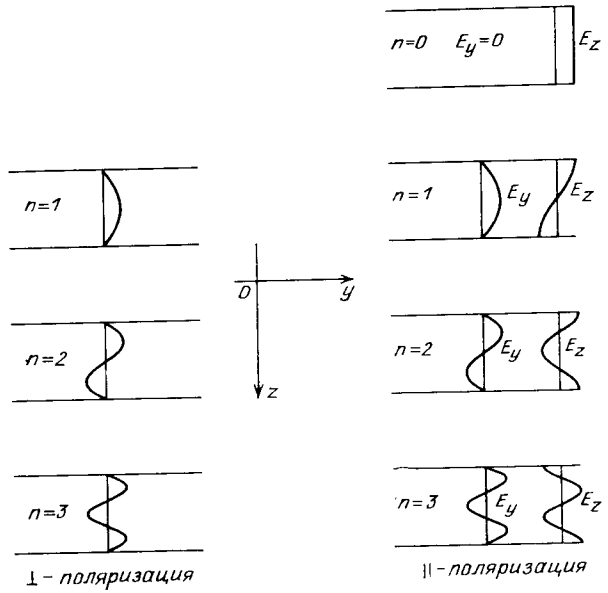


Рис. 5.16

На рис. 5.16 показано распределение компоненты $E_x(E_y)$ в плоскости фронта направляемой волны при перпендикулярной (параллельной) поляризации для разных n. Это, как говорят, разные *типы волн*. Чем меньше n, тем ниже критическая частота; она обращается в нуль при $n = 0$. В этом единственном случае распространяется плоская однородная волна, лишенная продольной компоненты поля.

На основании (5.68) при сопоставлении с (5.71) имеем

$$\Gamma = k\sqrt{1-\cos^2\varphi}, \quad \cos\varphi = \omega_{кр}/\omega. \tag{5.73}$$

На рис. 5.17 (левый столбец) показана серия лучевых картин с постепенным уменьшением φ в интервале $90° > \varphi \geqslant 0$, что, как

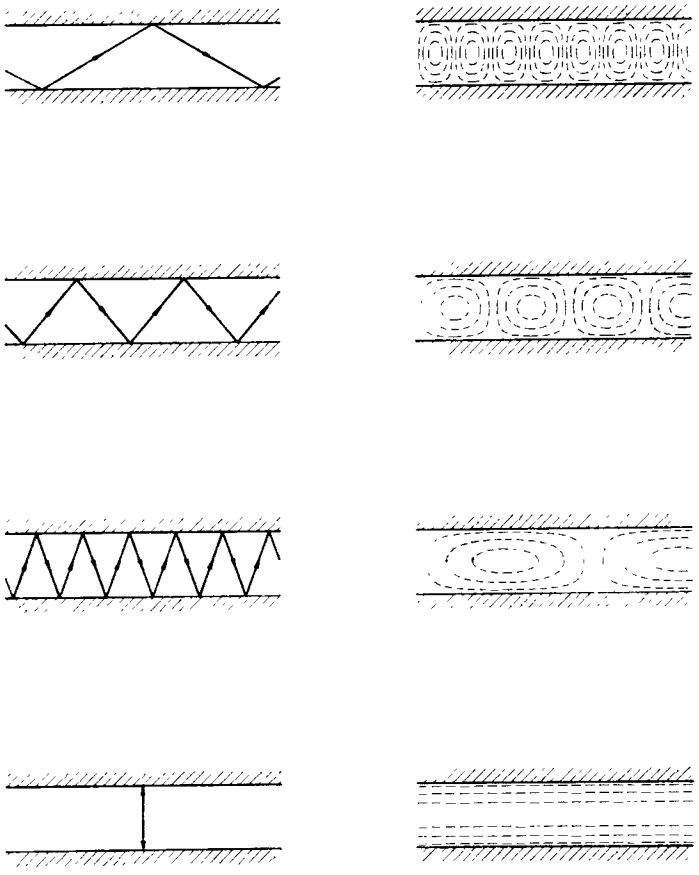


Рис. 5.17. (ЭВМ)

видно из (5.73), соответствует уменьшению частоты ω вплоть до критической. Там же (правый столбец) представлены картины поля направляемой волны, отвечающие взятым углам φ; для определенности рассматривается низшая H-волна ($n=1$), показаны магнитные силовые линии. Несмотря на некоторую условность лучевых картин, они полезны для понимания процесса. При углах φ, близких к 90°, однородные волны, отражающиеся от плоскостей,

распространяются «полого», что возможно при высоких частотах $\omega \gg \omega_{кр}$. С понижением ω увеличивается $\cos\varphi$, т. е. угол φ уменьшается, а при $\omega = \omega_{кр}$ обращается в нуль. При этом исходная волна распространяется по нормали к плоскостям, формируется поперечная стоячая волна и передача энергии вдоль волновода прекращается. Можно понижать частоту и дальше, но тогда согласно (5.73) $\cos\varphi > 1$, и значения угла φ лежат в мнимой области. Поле, как мы знаем, при этом теряет волновой характер: становится синфазным и затухающим.

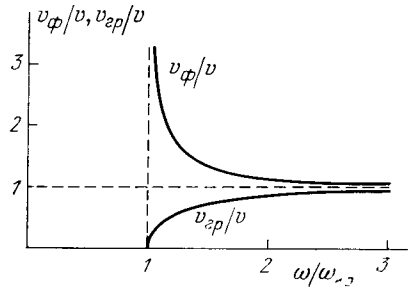


Рис. 5.18

Как видно, при уменьшении φ до нуля неограниченно возрастает пространственный период поля $\Lambda = 2\pi/\Gamma = \lambda/\sin\varphi$. Вычислим также фазовую скорость направляемой волны $v_ф = \omega/\Gamma$ и ее групповую скорость

$$v_{гр} = d\omega/d\Gamma$$

(ср. (4.66)). Получаем

$$v_ф = v/\sin\varphi, \quad v_{гр} = v\sin\varphi, \quad v_ф v_{гр} = v^2, \tag{5.74}$$

причем ввиду (5.73) $\sin\varphi = \sqrt{1-(\omega_{кр}/\omega)^2}$. На рис. 5.18 представлены частотные зависимости обеих скоростей. Обращаясь к рис. 5.17, видим, что $v_ф$ во столько раз превосходит v, во сколько лучевой путь длиннее пути направляемой волны в волноводе.

5.3.3. Волны вдоль плоской границы диэлектриков. Построенная на рис. 5.14 диаграмма потоков энергии в равной мере относится и к случаю полного отражения плоской однородной волны от границы с оптически менее плотной диэлектрической средой, который уже обсуждался выше в п. 5.1.4 с позиций второго закона Снеллиуса. Определяя граничный угол φ^* по формуле (5.22), мы можем теперь убедиться, что при $\varphi > \varphi^*$, на самом деле, независимо от поляризации волна отражается полностью. Действительно, поскольку в этом случае $\sin\vartheta > 1$, то $\cos\vartheta = \sqrt{1-\sin^2\vartheta}$ — величина мнимая. Это значит, что формулы Френеля (5.42) и (5.43) для $\rho_\perp$ и $\rho_\parallel$ принимают вид выражений $(P-iQ)/(P+iQ)$, где P и Q при отсутствии поглощения вещественны. Поэтому модули $\rho_\perp$ и $\rho_\parallel$ равны единице, и можно написать:

$$\rho_\perp = e^{i\Psi_\perp}, \quad \rho_\parallel = e^{i\Psi_\parallel}. \tag{5.75}$$

Перпендикулярная поляризация. Построим электромагнитное поле при полном отражении от границы диэлектриков перпендикулярно поляризованной волны. Внесем в (5.57) $\rho_\perp = \exp(i\psi_\perp)$ и

сложим обе волны в первой среде. Из (5.56) и (5.57) следует

$$\dot{\mathbf{E}}_m = \mathbf{x}_0 2\dot{A}\cos(k_1 z\cos\varphi + \psi_\perp/2)\exp[-i(k_1 y\sin\varphi - \psi_\perp/2)],$$
$$\dot{\mathbf{H}}_m = -\frac{2\dot{A}}{W_1}[\mathbf{y}_0 i\cos\varphi\sin(k_1 z\cos\varphi + \psi_\perp/2) + \mathbf{z}_0\sin\varphi\cos(k_1 z\cos\varphi + \psi_\perp/2)]\exp[-i(k_1 y\sin\varphi - \psi_\perp/2)], \quad (5.76)$$
$$z<0.$$

При этом во второй среде на основании (5.58):

$$\dot{E}_m = \mathbf{x}_0\tau_\perp\dot{A}\exp[-ik_2(y\sin\vartheta + z\cos\vartheta)],$$
$$\dot{H}_m = \tau_\perp\frac{\dot{A}}{W_2}(\mathbf{y}_0\cos\vartheta - \mathbf{z}_0\sin\vartheta)\exp[-ik_2(y\sin\vartheta + z\cos\vartheta)], \quad (5.77)$$
$$z>0.$$

Параллельная поляризация. Аналогично при подстановке $\rho_\parallel = \exp(i\psi_\parallel)$ в (5.60) и сложении комплексных амплитуд (5.59) и (5.60) получаем:

$$\dot{E}_m = -2\dot{A}[\mathbf{y}_0 i\cos\varphi\sin(k_1 z\cos\varphi + \psi_\parallel/2) + \mathbf{z}_0\sin\varphi\cos(k_1 z\cos\varphi + \psi_\parallel/2)]\exp[-i(k_1 y\sin\psi - \psi_\parallel/2)], \quad (5.78)$$

$$\dot{\mathbf{H}}_m = -\mathbf{x}_0\frac{2\dot{A}}{W_1}\cos(k_1 z\cos\varphi + \psi_\parallel/2)\exp[-i(k_1 y\sin\varphi - \psi_\parallel/2)],$$
$$z<0.$$

На основании (5.61) во второй среде:

$$\dot{\mathbf{E}}_m = \tau_\parallel\dot{A}(\mathbf{y}_0\cos\vartheta - \mathbf{z}_0\sin\vartheta)\exp[-ik_2(y\sin\vartheta + z\cos\vartheta)],$$
$$\dot{\mathbf{H}}_m = -\mathbf{x}_0\tau_\parallel\frac{\dot{A}}{W_2}\exp[-ik_2(y\sin\vartheta + z\cos\vartheta)], \quad (5.79)$$
$$z>0.$$

Полученные для обеих поляризаций представления комплексных амплитуд векторов поля, как видно, имеют тот же характер, что и в случае отражения от идеально проводящей плоскости (см. п. 5.3.1). Как показывают формулы (5.76) и (5.78), поле в первой среде есть уже знакомая нам плоская неоднородная волна, распространяющаяся в направлении y. В плоскости фронта $y = \text{const}$ распределение поля по-прежнему имеет вид стоячей волны, которая, однако, теперь несколько смещена по оси z, так что при $z = 0$ уже не выполняется условие $E_\tau = 0$. Как и в п. 5.3.1,

поле в первой среде можно охарактеризовать при помощи двух волновых чисел, которые обозначим Γ и χ_1. Аналогично (5.68) запишем

$$\Gamma = k_1\sin\varphi, \quad \chi_1 = k_1\cos\varphi, \quad \Gamma^2 + \chi_1^2 = k_1^2. \quad (5.80)$$

Что представляет собой поле во второй среде? Это продолжение рассматриваемой неоднородной волны. Как видно из формул (5.77) и (5.79), продольные зависимости полей в обеих средах одинаковы (достаточно учесть второй закон Снеллиуса (5.19)): в противном случае не было бы выполнено условие непрерывности тангенциальных компонент на границе раздела сред. Это позволяет написать подобно (5.80):

$$\Gamma = k_2\sin\vartheta, \quad \chi_2 = k_2\cos\vartheta, \quad \Gamma^2 + \chi_2^2 = k_2^2, \quad (5.81)$$

где введено поперечное волновое число для второй среды χ_2.

Выясним, как распределено поле в плоскости фронта $y = \text{const}$ во второй среде. Согласно (5.77), (5.79) закон распределения имеет вид:

$$f(z) = \exp[-ik_2 z\cos\vartheta] = e^{-i\chi_2 z},$$

где необходимо учесть, что $\cos\vartheta$ — мнимая величина, как уже было отмечено в начале п. 5.3.3 (поскольку $\sin\vartheta > 1$). Запишем:

$$\cos\vartheta = -i\left|\sqrt{1 - \left(\frac{k_1}{k_2}\sin\varphi\right)^2}\right| = -i\,|\cos\vartheta|, \quad (5.82)$$

т. е. выберем при извлечении корня $\sqrt{1-\sin^2\vartheta}$ знак минус. Тогда

$$f(z) = e^{-\beta z}, \quad \beta = k_2\,|\cos\vartheta|. \quad (5.83)$$

Во второй среде ($z>0$) поле экспоненциально убывает от границы раздела: говорят, что рассматриваемый процесс имеет здесь характер *поверхностной волны*. Очевидно, что выбор другого знака в (5.82) не был бы физически оправдан.

На рис. 5.19*а, б* показано распределение компонент векторов поля в плоскости фронта неоднородной волны в обеих средах при двух поляризациях (H-волна и E-волна): стоячая волна в первой среде переходит в поверхностную во второй.

Легко прийти к выводу, что фазовая скорость рассматриваемой волны $v_\Phi = \omega/\Gamma$ лежит между значениями v_1 и v_2, т. е.

$$k_1 \geqslant \Gamma \geqslant k_2, \quad v_1 \leqslant v_\Phi \leqslant v_2. \quad (5.84)$$

Действительно, $\Gamma \leqslant k_1$, так как $\Gamma = k_1\sin\varphi$ и $\sin\varphi \leqslant 1$ ($0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$). В то же время $\Gamma \geqslant k_2$, поскольку $\Gamma = k_2\sin\vartheta$, тогда как $\sin\vartheta \geqslant 1$. Итак, фазовая скорость неоднородной волны, распространяющейся вдоль границы раздела сред (при полном отражении), выше фазовой скорости однородной волны в первой среде $v_1 =$

$= c/\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$, но ниже аналогичной величины $v_2 = c/\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}$ для второй среды. В ней волна является, таким образом, *медленной* ($v_\phi \leqslant v_2$), будучи при этом *поверхностной*, как показано выше.

Ввиду (5.82) импеданс $Z_\perp^+$ (5.46) или $Z_\parallel^+$ (5.49) в случае поверхностной волны — чисто мнимая величина. Введем понятие

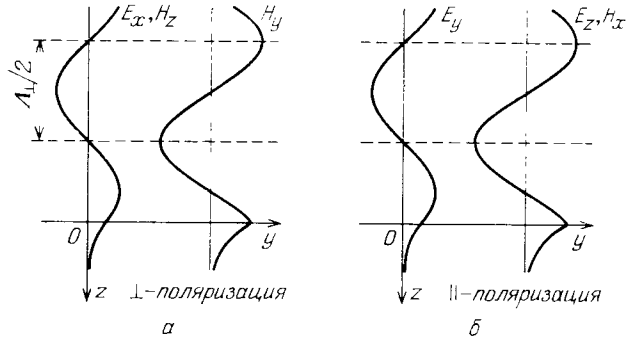


Рис. 5.19

поверхностного импеданса Z_S, который определяет соотношение $\dot{\boldsymbol{E}}_{m\tau}$ и $\dot{\boldsymbol{H}}_{m\tau}$ на границе раздела сред:

$$\dot{\mathbf{E}}_{m\tau} = Z_S\left[\dot{\mathbf{H}}_{m\tau}, \mathbf{v}_0'\right]. \tag{5.85}$$

Здесь $\mathbf{v}_0'$ — орт внутренней нормали для первой среды: $\mathbf{v}_0' = -\mathbf{z}_0$. Подставляя (5.77), (5.79) в (5.85), получаем следующие выражения Z_S для обеих поляризаций:

$$Z_S = \begin{cases} -Z_\perp^+ = -W_2/\cos\vartheta, & H\text{-волны}, \\ -Z_\parallel^+ = -W_2\cos\vartheta, & E\text{-волны}. \end{cases} \tag{5.86}$$

Принимая во внимание (5.82), мы можем утверждать, что Z_S имеет *емкостный* характер для H-волн и *индуктивный* — для E_τ-волн. Наличие такого поверхностного импеданса (поддерживаемого процессом в первой среде), можно рассматривать как *условие существования* поверхностной волны во второй среде.

Сделаем, наконец, следующее замечание. Анализируя поле, мы существенно уточнили оптическую трактовку полного отражения от границы непоглощающих сред (п. 5.1.4), согласно которой преломленный луч просто отсутствует. Но ведь формулы (5.77) и (5.79) выражают не что иное, как волну, распространяющуюся во второй среде под углом ϑ. Оказывается (как легко проверить), этот угол преломления — комплексный, а именно, $\vartheta = 90° + i\alpha$ ($\alpha > 0$), т. е. при $\varphi > \varphi^*$ угол ϑ получает чисто мнимое приращение $i\alpha$. Формально можно утверждать, что при полном отражении преломленный луч ориентирован под комплексным углом.

5.3.4. Плоский диэлектрический волновод. Как и при полном отражении от идеально проводящей границы (см. п. 5.3.1), в случае полностью отражающей границы диэлектриков тоже существуют плоскости (см. рис. 5.19), на которых $E_\tau = 0$. Каждую такую плоскость можно заменить идеально проводящей границей, и в «отсеченном» диэлектрическом слое сохранится рассматриваемое

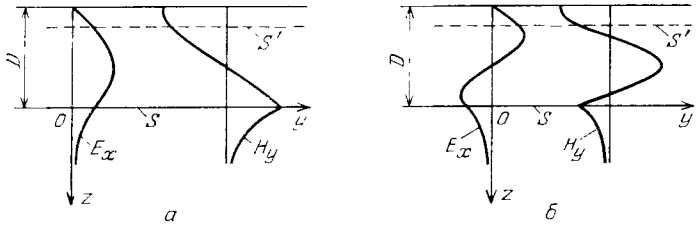


Рис. 5.20

поле. Поэтому ясно, что слой диэлектрика фиксированной толщины D, ограниченный с одной стороны идеально проводящей плоскостью, способен направлять различные волновые процессы. На рис. 5.20 показано распределение компонент поля для двух таких неоднородных волн *а* и *б* (ср. рис. 5.16). Необходимое условие существования волн в этом слое, экранированном при $z = -D$, имеет вид:

$$\begin{aligned} E_x(-D) &= 0, \quad H\text{-волны}, \\ E_y(-D) &= 0, \quad E\text{-волны}. \end{aligned} \tag{5.87}$$

Если детализировать эти соотношения при помощи формул (5.76) и (5.78), подставив в них $z = -D$, можно было бы подойти к определению поперечных волновых чисел (в п. 6.2.3 мы вернемся к этому с других позиций); вопрос сложнее, чем в случае плоского полого волновода, когда аналогично была получена формула (5.70).

Не останавливаясь на этом, отметим следующее. При полном отражении от границы диэлектриков S (рис. 5.20) тангенциальные компоненты E_τ и H_τ подчинены определенному соотношению, диктуемому формулами (5.85), (5.86), где Z_S имеет требуемый реактивный характер. Но ведь в силу симметрии поля точно такое же соотношение тангенциальных компонент имеет место на выделенной в диэлектрике плоскости S'. Поэтому ту часть структуры, которая лежит за этой плоскостью, можно отбросить, заменив полупространством с такими же свойствами, как и при $z > 0$. Тогда смогут существовать поля, показанные на рис. 5.21. При этом внутри диэлектрического слоя на обеих его границах выполняются условия полного отражения для однородной волны. Каждая из этих границ является импедансной поверхностью, «поддерживающей» вне слоя поверхностную волну. Плоский диэлектрический слой

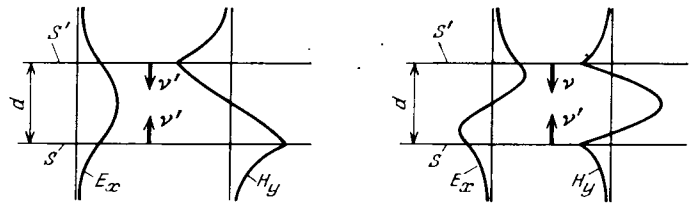


Рис. 5.21

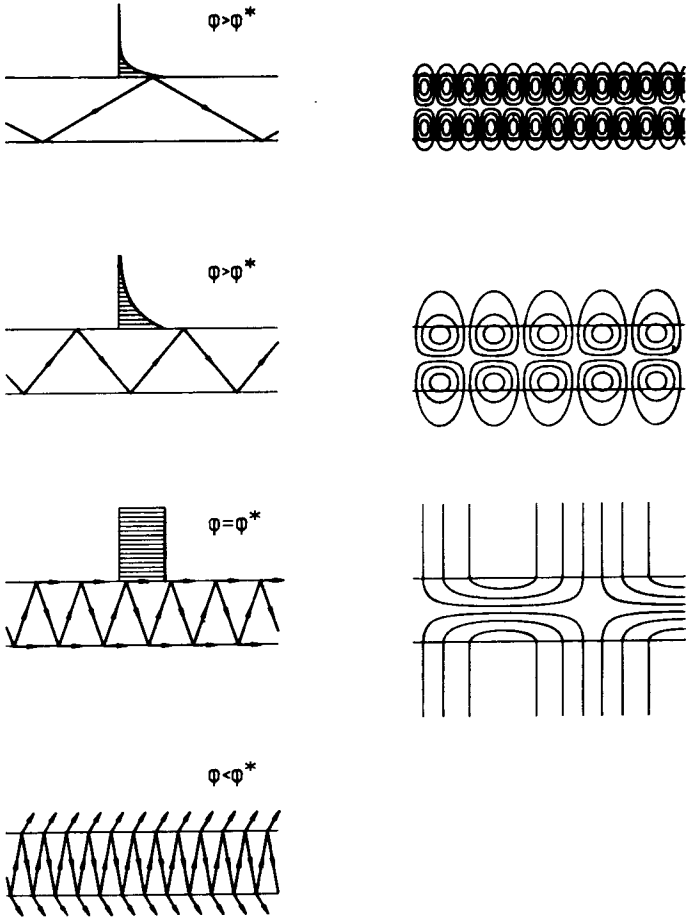


Рис. 5.22. (ЭВМ)

выступает как волновод — структура, направляющая волновой процесс.

Как и в случае полого волновода, для пояснения процесса можно привлечь лучевые схемы (ср. рис. 5.17). Обратимся к рис. 5.22, на котором показано несколько стадий направляемого волнового процесса, соответствующего второй H-волне (рис. 5.21*б*) диэлектрического слоя: взято $d = 7$ мм и $\varepsilon = 9$. Для изображения сверху $f = 23{,}497$ ГГц; при этом $\varphi = 60° > \varphi^*$; вне слоя происходит быстрое убывание поля (картина магнитных силовых линий показана справа). Далее (во втором ряду) $f = 13{,}02$ ГГц и $\varphi = 40° > \varphi^*$; внешнее поле убывает существенно медленнее, что заметно и по картине силовых линий, которая свидетельствует также об увеличении длины волны Λ (пространственный период направляемой волны). Наконец, $\varphi = \varphi^* = 19{,}48°$; поле вне слоя уже не имеет поверхностного характера, оно является обыкновенной однородной волной, распространяющейся вдоль слоя; это видно и по картине магнитных силовых линий справа; слева на лучевой схеме показано, что преломленный луч параллелен границе раздела сред; $\Lambda = \lambda$ для внешней среды. Это имеет место при $f = 7{,}578$ ГГц, данная частота является критической. При $f \leqslant f_{кр}$ ($\varphi \leqslant \varphi^*$) рассматриваемая направляемая волна «разрушается» или, как еще говорят, «высвечивается» во внешнее пространство. Снизу на рис. 5.22 показана лучевая схема для $\varphi = 10° < \varphi^*$; видны преломленные лучи.

На рис. 5.23 аналогичные стадии показаны для случая основной H-волны того же слоя (ср. рис. 5.21*а*). Углы имеют те же значения: 60°, 40° и $19{,}48° = \varphi^*$. Соответствующие им частоты равны: 9,202 ГГц, 3,694 ГГц и, наконец, частота, равная нулю. Дело в том, что критическая частота в данном случае равна нулю: волна не имеет отсечки.

Для плоского диэлектрического волновода нетрудно вывести следующую формулу критических частот:

$$\omega_{кр}^{(n)} = \frac{n\pi}{d} \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1 - \varepsilon_2\mu_2}}. \qquad (5.88)$$

ВЫВОД. Поскольку критические частоты $\omega = \omega_{кр}^{(n)}$ соответствуют условию $\varphi = \varphi^*$, при котором $\vartheta = 90°$, то из формул Френеля (5.42) и (5.43) следует: $\rho_\perp = \rho_\parallel = 1$, т. е. $\psi_\perp = \psi_\parallel = 0$. При $\varphi = \varphi^*$ вне слоя в направлении y распространяется обычная однородная волна, а следовательно, на границе продольная компонента (H_y или E_y в зависимости от типа поляризации) утрачивается. Согласно (5.76) и (5.78) это будет, если

$$\sin(k_1 z \cos\varphi^*) = 0, \qquad (5.89)$$

$z = 0$, $z = -d$. При $z = 0$ условие заведомо выполнено, а второе требование дает:

$$k_1 d \cos\varphi^* = n\pi, \qquad n = 0,\ 1,\ \ldots \qquad (5.90)$$

Учитывая, что

$$\cos\varphi^* = \sqrt{1-\sin^2\varphi^*} = \sqrt{1-(k_2/k_1)^2} \qquad (5.91)$$

и $\omega = \omega_{кр}$, из (5.90) получаем формулу (5.88). ■

Значение $n = 0$ относится к низшей H-волне (рис. 5.23) и низшей E-волне. Как видно из (5.88), $\omega_{кр}^{(0)} = 0$, причем этот вывод следует

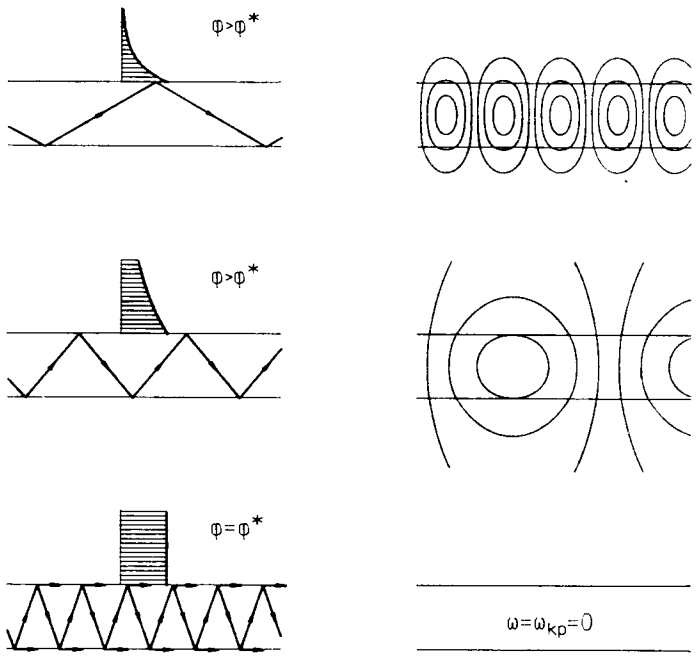


Рис. 5.23. (ЭВМ)

и из промежуточного соотношения (5.90). Действительно, если $n = 0$, то это равенство удовлетворяется только при $k_1 = 0$.

Рассмотренный нами идеальный диэлектрический волновод в виде бесконечного слоя представляет собой хорошее приближение к некоторым *пленочным волноводам*, используемым в интегральной оптике. Для оптики, где частоты весьма велики, имеет важное значение тот факт, что даже в случае относительно толстой пленки ($d \gg \lambda$) можно не допустить существования высших волн ($n \geqslant 1$). Для этого, как следует из (5.88), надо погрузить пленку в среду с близкой оптической плотностью. Чем ближе показатели преломления первой и второй сред $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$ и $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2\mu_2}$, тем выше критические частоты. Если же удалось выполнить условие $\omega_{кр}^{(1)} > \omega$, то в слое будет распространяться только низшая волна той или иной поляризации.

§ 5.4. Действие проводящих границ (А)

5.4.1. Поверхностный эффект и граничный импеданс. Вернемся к одному из следствий второго закона Снеллиуса (см. п. 5.1.5), согласно которому при $|k_2| \gg k_1$ любые лучи в первой среде порождают во второй преломленный луч, уходящий почти по нормали.

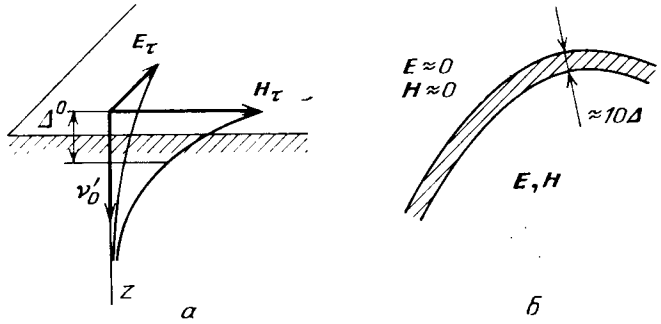


Рис. 5.24

Это значит, что всевозможные поля в первой среде вызывают во второй процесс, близкий к плоской однородной волне, фронт которой параллелен границе. Когда вторая среда — проводник, этот процесс относительно быстро затухает, что называется *поверхностным*

Таблица 5.1

Глубина проникновения Δ^0 [мкм] $= A/\sqrt{f[\text{ГГц}]}$ и поверхностное сопротивление $R_{пр}[\text{Ом}] = B\sqrt{f[\text{ГГц}]}$.

Металл	A	$B\cdot10^9$	Металл	A	$B\cdot10^9$
Серебро	2,031	8,019	Железо	5,033	19,869
Медь отожженная	2,090	8,250	Олово	5,400	21,314
Алюминий	2,675	10,560	Свинец	7,264	28,679
Латунь	4,180	16,500	Ртуть	15,576	61,494

эффектом, а также *скин-эффектом*. Выше в п. 4.1.4 уже было найдено расстояние Δ^0, на котором поле в проводнике уменьшается в e раз:

$$\Delta^0 = \sqrt{2/(\omega\mu_0\mu\sigma)}. \qquad (5.92)$$

В данном случае расстояние Δ^0 отсчитывается по нормали в глубь проводника (рис. 5.24*а*) и называется *глубиной проникновения*. Для распространенных металлов формула (5.92) приведена к соотношению $\Delta^0[\text{мкм}] = A/\sqrt{f[\text{ГГц}]}$ в табл. 5.1.

Пример 2. В случае меди при частоте $f = 10$ ГГц, как легко найти из табл. 5.1, $\Delta^0 = 0{,}66$ мкм. На расстоянии $10\Delta^0$, т. е. в данном случае всего лишь на глубине 6,6 мкм поле уменьшается в $\exp(10) \approx 22\,026$ раз. Это значит, что в смысле экранирующего действия столь тонкая пленка практически равноценна бесконечной толще металла. ■

Хотя подобные рассуждения относятся — в строгом смысле — к плоским границам, они применяются на практике к границам реальных проводящих тел, пока все радиусы кривизны поверхности значительно больше глубины проникновения Δ^0. Пусть при выполнении этого условия некоторая проводящая оболочка (рис. 5.24*б*) ограничивает область V, в которой рассматривается поле **E**, **H**. Если оболочка — не слишком тонкая (например, нигде не тоньше $10\Delta^0$), то ее поверхность S действует подобно границе сплошного проводника: волна, уходящая вглубь, затухает, «не успевая» дойти до внешней границы (от которой должно произойти отражение). Значит, влияние проводника здесь определяется лишь его границей и не зависит от занимаемого им объема.

Эти рассуждения наводят на мысль, что влияние проводника во многих случаях можно учесть при помощи некоторого граничного условия. Поскольку тангенциальные компоненты векторов **E** и **H** на поверхности проводника непрерывно переходят в поперечные компоненты поля уходящей в глубь волны, соотношение между ними дается формулой (4.27). Запишем

$$\dot{\mathbf{E}}_{m\tau} = W_{\text{пр}}\,[\dot{\mathbf{H}}_{m\tau}, \mathbf{v}_0'], \tag{5.93}$$

где $\mathbf{v}_0'$ — орт внутренней нормали $(\mathbf{v}_0' = \mathbf{z}_0)$ и согласно (4.48), (4.49)

$$W_{\text{пр}} = (1+i)\sqrt{\omega\mu_0\mu/2\sigma} = (1+i)/\sigma\Delta^0, \tag{5.94а}$$

или

$$W_{\text{пр}} = R_{\text{пр}} + iX_{\text{пр}}, \quad R_{\text{пр}} = X_{\text{пр}} = 1/\sigma\Delta^0. \tag{5.94б}$$

Мы видим, что сформулировано *импедансное граничное условие* (ср. (5.85)) и $W_{\text{пр}}$ играет роль поверхностного импеданса. Равенство (5.93) называется *приближенным граничным условием Леонтовича*.

Заметим, что поскольку при $\sigma \to \infty$ волновое сопротивление $W_{\text{пр}}$ исчезает, граничное условие Леонтовича в случае идеального проводника переходит в известное условие $E_\tau = 0$.

Пример 3. Рассмотрим плоский проводящий слой (рис. 5.25*а*), на обеих сторонах которого напряженность электрического поля имеет одно и то же значение: $\dot{\mathbf{E}}_m(d) = \dot{\mathbf{E}}_m(-d) = \dot{\mathbf{E}}_{m\tau}$. Поле внутри слоя представляет собой наложение двух однородных волн, направленных внутрь от обеих границ:

$$\dot{\mathbf{E}}_m = \mathbf{x}_0(\dot{A}e^{-ikz} + \dot{B}e^{ikz}).$$

Внося сюда $z = d$ и $z = -d$, а затем приравнивая результаты, получаем, что $\dot{A} = \dot{B}$. Отсюда $\dot{\mathbf{E}}_m = \mathbf{x}_0 2\dot{A}\cos kz$ и $\dot{\mathbf{E}}_{m\tau} = \mathbf{x}_0 2\dot{A}\cos kd$. Поэтому окончательно

$$\dot{\mathbf{E}}_m = \dot{\mathbf{E}}_{m\tau}\frac{\cos kz}{\cos kd}, \quad \dot{\mathbf{j}}_m = \sigma\dot{\mathbf{E}}_{m\tau}\frac{\cos kz}{\cos kd}, \tag{5.95}$$

где использовано материальное уравнение (1.69). Входящее сюда комплексное волновое число k согласно (4.47) и (4.49) есть

$$k = (1-i)\sqrt{\omega\mu_0\mu\sigma/2} = (1-i)/\Delta^0. \tag{5.96}$$

На рис. 5.25 приведены также результаты конкретных расчетов на основании (5.95). Взят слой меди ($\sigma = 5{,}8 \cdot 10^7$ См/м) толщиной $2d = 12$ мкм и для частот от 0,05 до 8,1 ГГц вычислено распределение поля (*в*); для сравнения тут же

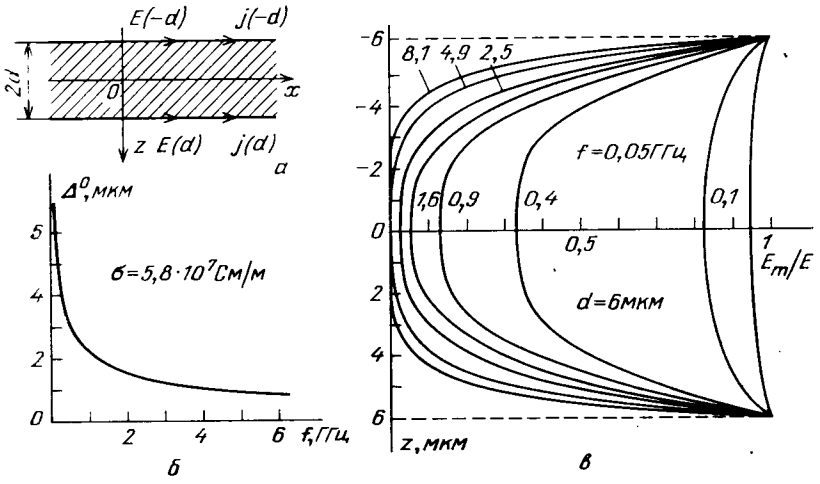


Рис. 5.25

дан (*б*) график частотной зависимости Δ^0. Когда $d \gg \Delta^0$, что соответствует применимости граничного условия Леонтовича, идущие от обеих границ волны затухают, практически не взаимодействуя. При этом параметр Δ^0, действительно, есть глубина, на которой поле уменьшается в e раз. Когда d и Δ^0 — одного порядка, этот смысл утрачивается. При $d \ll \Delta^0$, можно сказать, пропадает поверхностный эффект: распределение близко к равномерному; оно становится равномерным при постоянном токе ($\omega \to 0$), поскольку при этом $\Delta^0 \to \infty$.

В случае применимости граничного условия Леонтовича обычно говорят о *сильном* поверхностном эффекте. ■

5.4.2. Поглощение при сильном поверхностном эффекте. Чтобы найти мощность, поглощаемую проводником, или *мощность потерь* $\overline{P}_{\text{п}}$, надо вычислить входящий в него из внешней среды поток энергии. Таким образом,

$$\overline{P}_{\text{п}} = \operatorname{Re}\int_S \dot{\mathbf{\Pi}}_{\nu'}\,\mathbf{ds} = -\operatorname{Re}\int_S \dot{\mathbf{\Pi}}\,\mathbf{ds} \tag{5.97}$$

(ν' — направление внутренней нормали). Здесь имеется в виду средняя величина (см. п. 3.3.1).

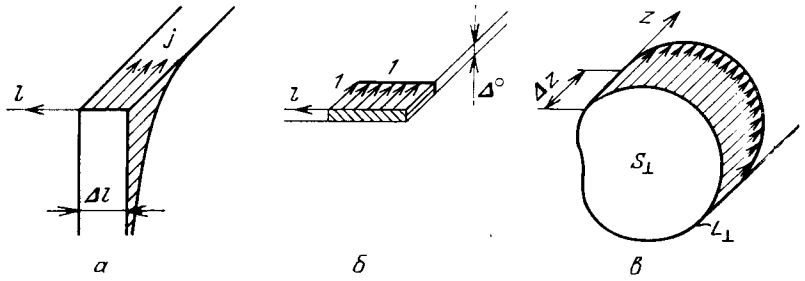
Ограничиваясь случаем сильного поверхностного эффекта, используем граничное условие Леонтовича (5.93). При этом

$$\dot{\mathbf{\Pi}}_{\nu'} = \frac{1}{2}\,[\dot{\mathbf{E}}_{m\tau}, \dot{\mathbf{H}}^*_{m\tau}]_{\nu'} = \frac{1}{2}\,[W_{\text{пр}}[\dot{\mathbf{H}}_{m\tau}, \mathbf{v}_0'], \dot{\mathbf{H}}^*_{m\tau}]_{\nu'} = \frac{1+i}{2\sigma\Delta^0}\,H^2_{m\tau}$$

и, следовательно,

$$\overline{P}_{\text{п}} = \frac{1}{2\sigma\Delta^0}\int\limits_S H_{m\tau}^2\,ds = \frac{R_{\text{пр}}}{2}\int\limits_S H_{m\tau}^2\,ds. \qquad (5.98)$$

Будем рассматривать ток в проводнике. Поскольку $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$, плотность тока $\mathbf{j}$, как и поле, быстро убывает в глубь проводника. Напомним, что существует представление об идеальном поверхностном токе, который не занимает объема (см. п. 1.4.1). Ток в реальном



а *б* *в*

Рис. 5.26

проводнике в случае сильного поверхностного эффекта удобно относить к линии, которую он пересекает на поверхности, т. е. условно рассматривать как поверхностный. На рис. 5.26*а* линия l ортогональна направлению тока. Ток $\Delta\dot{I}_m$, проходящий через всю толщу проводника на участке Δl, вычисляется как

$$\Delta\dot{I}_m = \Delta l\int\limits_0^\infty \dot{j}_m\,dv' = \Delta l\sigma\int\limits_0^\infty \dot{E}_m\,dv',$$

где $\dot{E}_m = \dot{E}_{m\tau}\exp(-ikv')$. Поэтому согласно определению (1.82)

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_m = \sigma\dot{\mathbf{E}}_{m\tau}\int\limits_0^\infty e^{-ikv'}\,dv' = -i\frac{\sigma}{k}\,\dot{\mathbf{E}}_{m\tau}. \qquad (5.99)$$

Привлекая формулы (5.93) и (5.96), получаем

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_m = [\dot{\mathbf{H}}_{m\tau}, \mathbf{v}_0'] = [\mathbf{v}_0, \dot{\mathbf{H}}_{m\tau}]. \qquad (5.100)$$

Интересно отметить, что полученный результат формально воспроизводит второе из равенств (1.90), которое относится к случаю идеального поверхностного тока на экранирующей границе. В рассматриваемой задаче мы переходим к такому случаю при $\sigma\to\infty$, когда $\Delta^0\to 0$ и ток, действительно, становится поверхностным, не проникая в идеальный проводник. Это *идеальный поверхностный эффект.*

Сопоставляя (5.100) и (5.93), видим, что

$$\dot{E}_{m\tau} = W_{\text{пр}}\dot{\eta}_m. \qquad (5.101)$$

Таким образом, поверхностный импеданс $W_{\text{пр}}$ получает новую интерпретацию.

Возвращаясь к выражению мощности потерь (5.98) и учитывая соотношение (5.100), получаем следующую формулу:

$$\overline{P}_{\text{п}} = \frac{1}{2}R_{\text{пр}}\int\limits_S \eta_m^2\,ds. \qquad (5.102)$$

Если бы ток был равномерно распределен в слое глубиной Δ^0, мы получили бы точно такой же результат. Дело в том, что $R_{\text{пр}}$ (5.94б) есть сопротивление единичного квадрата проводящего листа толщиной Δ^0 (рис. 5.26*б*). Эти соображения объясняют смысл слов *глубина проникновения.*

Пример 4. Пусть ток проходит по проводнику поперечного сечения $S_\perp$ с контуром $L_\perp$ (рис. 5.26*в*). В условиях сильного поверхностного эффекта вычислим мощность потерь, отнесенную к единице длины проводника $\bar{p}_{\text{п}} = d\overline{P}_{\text{п}}/dz$. Согласно (5.102) на отрезке проводника Δz поглощается мощность

$$\Delta\overline{P}_{\text{п}} = \frac{1}{2}R_{\text{пр}}\int\limits_{L_\perp}\eta_m^2\,dl\,\Delta z.$$

Переходя к пределу при $\Delta z\to 0$, находим:

$$\bar{p}_{\text{п}} = \frac{1}{2}R_{\text{пр}}\int\limits_{L_\perp}\eta_m^2\,dl. \qquad (5.103)$$

Если можно говорить о *падении напряжения* на единицу длины проводника U', то $\dot{U}_m' = \dot{E}_{mz} = \dot{E}_{m\tau}$ — величина постоянная. Тогда согласно (5.101) постоянна и плотность тока $\dot{\eta}_m$. В этом случае из (5.103) получаем

$$\bar{p}_{\text{п}} = \frac{1}{2}\mathscr{R}'I_m^2,\quad \mathscr{R}' = R_{\text{пр}}l^{-1} = \frac{1}{\sigma\Delta^0 l},\quad I_m = \eta_m l, \qquad (5.104)$$

где $\mathscr{R}'$ — погонное сопротивление проводника, а l — длина контура $L_\perp$ его поперечного сечения (рис. 5.26*в*). ■

§ 5.5. Локально плоские волны и геометрическая оптика

5.5.1. Локально плоские волны и понятие эйконала (А). Если фронт волны, представляющий собой некоторую поверхность $\varphi(x, y, z) = \text{const}$ (4.13), в малой области пространства близок к плоскому, волну называют *локально плоской* (см. п. 4.0.3).

Будем рассматривать некоторое электромагнитное поле, напряженности которого характеризуются комплексными амплитудами

$$\dot{\mathbf{E}}_m = \mathfrak{E}e^{-i\varphi},\quad \dot{\mathbf{H}}_m = \mathfrak{H}e^{-i\varphi}. \qquad (5.105)$$

Если компоненты векторов $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$ изменяются в зависимости от координат значительно медленнее, чем φ, то уравнения Максвелла (3.34) при $\dot{j}_m^{ст} = 0$ с высокой степенью точности сводятся к следующим:

$$[\mathfrak{H},\ \nabla\varphi] = \omega\varepsilon_0\varepsilon\mathfrak{E},\quad [\nabla\varphi, \mathfrak{E}] = \omega\mu_0\mu\mathfrak{H}. \tag{5.106}$$

ВЫВОД. Используя тождество (1.27), запишем

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}_m = e^{-i\varphi}\operatorname{rot}\mathfrak{E} + [\nabla e^{-i\varphi},\ \mathfrak{E}] = e^{-i\varphi}\operatorname{rot}\mathfrak{E} - ie^{-i\varphi}[\nabla\varphi,\ \mathfrak{E}]$$

и аналогично преобразуем $\operatorname{rot}\dot{H}_m$. Это приводит уравнения (3.34) при $\dot{j}_m^{ст} = 0$ к следующей форме:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathfrak{H} + i[\mathfrak{H},\ \nabla\varphi] &= i\omega\varepsilon_0\varepsilon\,\mathfrak{E},\\ \operatorname{rot}\mathfrak{E} - i[\nabla\varphi, \mathfrak{E}] &= -i\omega\mu_0\mu\mathfrak{H}.\end{aligned} \tag{5.107}$$

Чем медленнее меняются компоненты векторов $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$ в пространстве, тем с большим основанием можно в (5.107) пренебречь членами $\operatorname{rot}\mathfrak{E}$ и $\operatorname{rot}\mathfrak{H}$. Это приводит к уравнениям (5.106). ■

Обсудим полученные уравнения (5.106), заметив сначала, что в случае плоской однородной волны они переходят в точные соотношения (4.27), (4.28). Это понятно, поскольку в этом случае $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$ вообще не зависят от координат, так что $\operatorname{rot}\mathfrak{E} = 0$ и $\operatorname{rot}\mathfrak{H} = 0$.

Как видно из (5.106), векторы $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ и $\nabla\varphi$ взаимно перпендикулярны и образуют правую тройку векторов: такую же тройку образуют векторы $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и $\nabla\varphi$. Это значит, что $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ касательны поверхности $\varphi = \text{const}$. При вещественном φ напряженности $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$

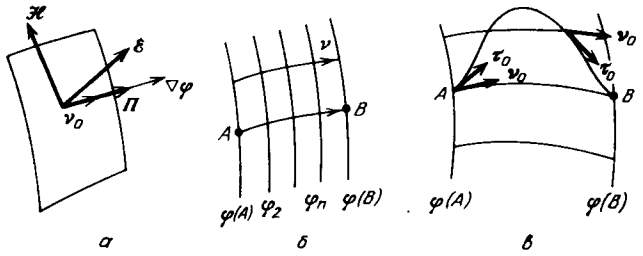


Рис. 5.27

синфазны, а рассматриваемое поле есть не что иное, как волна с фронтом $\varphi = \text{const}$. Вектор Пойнтинга $\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ направлен, как $\nabla\varphi$, т. е. по нормали к фронту (рис. 5.27*а*). Очевидно, что орт нормали $\mathbf{v}_0$ есть

$$\mathbf{v}_0 = \nabla\varphi/|\nabla\varphi|. \tag{5.108}$$

Прежде чем дать окончательную характеристику анализируемого решения, сосредоточим внимание на функции φ, которая называется *эйконалом*. Из (5.106) непосредственно получаются уравнения:

$$[[\nabla\varphi,\ \mathfrak{E}],\ \nabla\varphi] = k^2\mathfrak{E},\ [\nabla\varphi,\ [\mathfrak{H},\ \nabla\varphi]] = k^2\mathfrak{H} \tag{5.109}$$

(среда предполагается изотропной, но может быть неоднородной). Взяв одно из этих равенств и применяя формулу (1.6), приходим к так называемому *уравнению эйконала*

$$(\nabla\varphi)^2 = k^2, \tag{5.110}$$

которое в декартовых координатах имеет вид

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 = k^2. \tag{5.111}$$

Уравнение эйконала есть основное уравнение геометрической оптики.

Вернемся к обсуждению характера электромагнитного поля (5.105), которое — по нашему требованию — должно с высокой точностью описываться при помощи функций $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ и φ, удовлетворяющих уравнениям (5.106) и полученному из них уравнению эйконала (5.110).

Уже было показано, что это волна с фронтом в виде поверхности $\varphi = \text{const}$. Учитывая (5.110), видим, что согласно (5.108)

$$\nabla\varphi = \mathbf{v}_0|\nabla\varphi| = \mathbf{v}_0 k = \mathbf{k}, \tag{5.112}$$

где использовано представление о волновом векторе $\mathbf{k}$ (5.9). При этом, взяв некоторую локальную систему координат, имеем

$$e^{-i\varphi} = \exp\left[i\varphi(0) + i\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|_{\nu=0}\nu + \ldots\right] \approx e^{-i\varphi(0)}e^{-ik\nu},$$

где множитель $\exp[i\varphi(0)]$ можно рассматривать в качестве неопределенного коэффициента. Это значит, что согласно предыдущему:

$$\left.\begin{aligned}\dot{\mathbf{E}}_m &= \mathfrak{E}e^{-ik\nu},\\ \dot{\mathbf{H}}_m &= \mathfrak{H}e^{-ik\nu}\end{aligned}\right\}\dot{\mathbf{E}}_m = W[\dot{\mathbf{H}}_m, \mathbf{v}_0],\qquad W = \sqrt{\frac{\mu_0\mu}{\varepsilon_0\varepsilon}} \tag{5.113}$$

(ср. (4.32), (4.27)). Мы видим, что локально волновой процесс описывается как плоская однородная волна.

5.5.2. Оптическая длина луча. Принцип Ферма (А). В геометрической оптике поверхности $\varphi = \text{const}$ рассматриваются как ортогональные поверхности к семействам лучей (рис. 5.27*б*). В силу (5.112)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = k = \frac{\omega}{c}n. \tag{5.114}$$

Поэтому, интегрируя вдоль луча от A до B, получаем следующее выражение *оптической длины* данного отрезка луча:

$$\int_A^B k\,d\nu = \frac{\omega}{c}\int_A^B n\,d\nu = \varphi(B) - \varphi(A). \tag{5.115}$$

Это разность фаз начальной и конечной точек. В случае однородной среды ($n = \text{const}$)

$$\varphi(B) - \varphi(A) = kd = \frac{\omega}{c} nd, \tag{5.116}$$

где d — длина пути вдоль луча.

В п. 5.5.3 будет показано, что лучи в однородной изотропной среде всегда — прямые линии. Пока отметим, что, например, в случае плоской волны последовательные положения фронта — параллельные плоскости, а лучи — ортогональные прямые. Если же распространяется сферическая волна, то лучи — радиальные прямые.

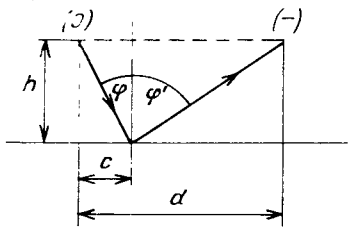


Рис. 5.28

Лучи являются векторными (силовыми) линиями градиента эйконала $\nabla\varphi$, а следовательно, и вектора Пойнтинга $\mathbf{\Pi}$. Поэтому их естественно наносить с густотой, отображающей интенсивность, а точнее, модуль плотности потока энергии $\mathbf{\Pi}$. Эта возможность нередко используется при построении лучевых картин.

Покажем, что из всех возможных линий, соединяющих точки A и B, луч — это такая линия, вдоль которой оптическая длина минимальна, т. е.

$$\int_A^B n\, dv = \min \int_A^B n\, dl, \tag{5.117}$$

где слева интегрирование производится по лучу, а справа имеются в виду всевозможные мыслимые пути (v и l соответственно на рис. 5.28*в*). Сформулированное положение известно под названием *принципа Ферма*.

ВЫВОД. Для доказательства принципа Ферма рассмотрим определенный интеграл

$$\int_A^B \nabla\varphi\, \mathbf{dl} = \varphi(B) - \varphi(A). \tag{5.118}$$

Результат не зависит от пути интегрирования, который может совпадать или не совпадать с лучом. Это свойство было установлено еще в п. 2.1.2, когда формально аналогичное выражение анализировалось при обсуждении свойств электростатического потенциала.

Если путь интегрирования не совпадает с лучом (рис. 5.28*в*), то

$$\int_A^B \nabla\varphi\, \mathbf{dl} = \int_A^B \mathbf{k}\, \mathbf{dl} = \frac{\omega}{c} \int_A^B n \cos\alpha\, dl,$$

где $\cos\alpha = (\mathbf{v}_0, \boldsymbol{\tau}_0)$ ($\boldsymbol{\tau}_0$ и $\mathbf{v}_0$ — касательные орты для пути интегрирования и луча соответственно). Взяв, в частности, путь интегрирования вдоль луча, следует положить $\cos\alpha = 1$. Но интеграл (5.118) от пути не зависит, поэтому

$$\int_A^B n \cos\alpha\, dl = \int_A^B n\, dv.$$

Отметим теперь, что существование множителя $\cos\alpha \leqslant 1$ может привести только к уменьшению интеграла слева. Убрав его, имеем

$$\int_A^B n\, dl \geqslant \int_A^B n\, dv, \tag{5.119}$$

что эквивалентно соотношению (5.117). ■

Пример 5. Покажем, что из принципа Ферма следует, в частности, первый закон Снеллиуса. При отражении луча от плоскости S оптическая длина луча между точками A и B (рис. 5.28) равна геометрической длине $l = l_1 + l_2$, умноженной на k. Будем искать минимум этой величины, опустив несущественный множитель k. Как видно из рис. 5.28, $l = \sqrt{h^2 + c^2} + \sqrt{h^2 + (d-c)^2}$. Вычислив dl/dc, легко убедиться, что эта величина обращается в нуль при $c = d/2$, причем получено условие минимума l. Поэтому $\varphi = \varphi'$ при условии, что оптическая длина луча минимальна. ■

5.5.3. Лучи в неоднородных средах (А). Распространение локально плоских волн в неоднородных средах описывается при помощи криволинейных лучей. Причину искривления луча нетрудно

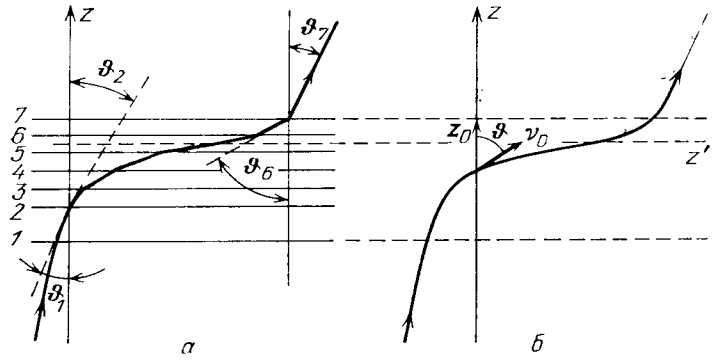


Рис. 5.29

понять, рассмотрев сначала многократное преломление в среде, состоящей из однородных слоев, различающихся по оптической плотности (рис. 5.29*а*). Взято $n_1 > n_2 > n_3 > n_4 > n_5 < n_6 < n_7$; характер ломаной вполне определяется вторым законом Снеллиуса (5.13). Если «сгладить» закон изменения n в направлении нормали к грани-

цам слоев, взяв некоторую непрерывную функцию $n(z)$, вместо ломаного появится искривленный луч (рис. 5.29*б*).

Радиус кривизны луча на некоторой «высоте» z (рис. 5.29*б*) вычисляется следующим образом:

$$R = -\frac{n}{(dn/dz)\sin\vartheta}. \qquad (5.120)$$

ВЫВОД. Рассмотрим простейший вывод формулы (5.120); с необходимой строгостью вопрос будет обсуждаться в п. 5.5.4.

На рис. 5.30 показано два положения фронта локально плоской волны φ_1 и φ_2 (штриховые линии) при ее распространении в среде, оптическая плотность которой изменяется в направлении z. При данном смещении фронта на разных уровнях будут пройдены различные пути. В частности, пути Δl_1 и Δl_2 (вдоль лучей ν_1 и ν_2) равны:

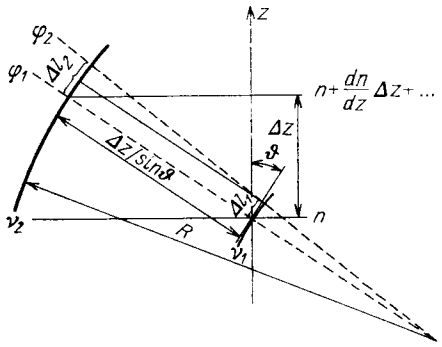


Рис. 5.30

$$\Delta l_1 = \frac{c\tau}{n},$$

$$\Delta l_2 = \frac{c\tau}{n + \frac{dn}{dz}\Delta z + \ldots},$$

где τ — время смещения фронта волны. Дело в том, что на нижнем уровне фазовая скорость есть $v(z) = c/n$, а при вычислении $v(z+\Delta z)$ надо учесть приращение показателя преломления. Из подобия треугольников на рис. 5.30 следует

$$\frac{\Delta l_2 - \Delta l_1}{\Delta z/\sin\vartheta} \approx \frac{\Delta l_2}{R},$$

где R — радиус кривизны луча. Отсюда с учетом выражений Δl_1 и Δl_2 получаем

$$R = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta z/\sin\vartheta}{1 - \Delta l_1/\Delta l_2} = \frac{-n}{(dn/dz)\sin\vartheta},$$

что совпадает с (5.120). ■

Рассмотрим некоторые следствия из формулы (5.120).

При переходе к однородной среде ($dn/dz \to 0$) согласно (5.120) $R \to \infty$: радиус кривизны неограниченно возрастает, т. е. луч становится прямым.

Учтем, что в силу записи (и выполненного вывода) формулы (5.120) радиус кривизны R считается положительным, если кривая (луч) обращена выпуклостью в сторону возрастания z. Поэтому луч уклоняется вниз при уменьшении показателя с высотой и вверх — при увеличении. На рис. 5.29*б* эти два случая соответствуют зонам $z < z'$ и $z > z'$.

Искривление лучей, описывающих распространение локально плоских электромагнитных волн в неоднородных средах, обычно называют *рефракцией* (слово означает «преломление», но в этом смысле употребляется редко). В дальнейшем (п. 15.5) мы встретимся с рефракцией радиоволн в атмосфере.

5.5.4. Характеристики кривизны лучей (Б). Малый плоский элемент $\Delta\nu$ луча ν (рис. 5.31), заключенный между точками M и M', представим как элемент дуги радиуса R: $\Delta\nu = \alpha R$. Чем меньше угол α, тем он ближе к величине $\Delta\mathbf{v}_0/\mathbf{v}_0 = \Delta\nu_0$, где $\Delta\nu_0$ — абсолютное значение приращения $\Delta\mathbf{v}_0$ единичного вектора $\mathbf{v}_0$ касательной к лучу ($\nu_0 = 1$). В пределе при $\alpha \to 0$ получаем:

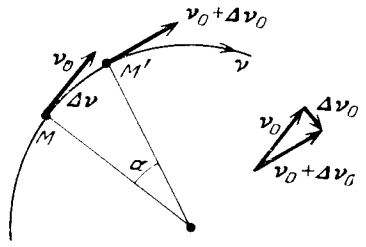


Рис. 5.31

$$R = d\nu/d\nu_0, \quad \mathbf{K} = \mathbf{R}_0/R = \mathbf{dv}_0/d\nu. \qquad (5.121)$$

Величина $\mathbf{K}$ есть векторная характеристика кривизны луча.

Формальные преобразования правой части (5.121), которые мы опускаем (см., например, [Г.2, В.6]), позволяют написать:

$$\mathbf{K} = -[\mathbf{v}_0, \operatorname{rot}\mathbf{v}_0]. \qquad (5.122)$$

Поскольку для рассматриваемых нами лучей $\mathbf{v}_0 n = \nabla\varphi$ (поле потенциально), как это следует из (5.112), то в силу (1.22)

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}_0 n = 0. \qquad (5.123)$$

Поэтому, используя векторное тождество (1.27), имеем

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}_0 = -\frac{1}{n}[\nabla n, \mathbf{v}_0]. \qquad (5.124)$$

Внося (5.124) в (5.122), получаем следующее уравнение, характеризующее оптические лучи в неоднородной среде:

$$\mathbf{K} = \frac{1}{n}[\mathbf{v}_0, [\nabla n, \mathbf{v}_0]]. \qquad (5.125)$$

Если раскрыть двойное векторное произведение при помощи (1.6), то получается другая форма этого уравнения:

$$\mathbf{K} = \frac{1}{n}[\nabla n - \mathbf{v}_0(\mathbf{v}_0\nabla n)]. \qquad (5.126)$$

Наконец, если учесть что

$$\frac{d}{d\nu}(\mathbf{v}_0 n) = n\frac{\mathbf{dv}_0}{d\nu} + \mathbf{v}_0(\mathbf{v}_0\nabla n),$$

то из (5.126) получаем еще одну эквивалентную форму:

$$\frac{d}{d\nu}(\mathbf{v}_0 n) = \nabla n. \qquad (5.127)$$

Нетрудно убедиться, что ранее полученная формула (5.120) вытекает из найденных общих соотношений. Пусть показатель преломления зависит от одной координаты z. При этом $\nabla n = \mathbf{z}_0 dn/dz$ и $\mathbf{v}_0\mathbf{z}_0 = \cos\vartheta$ (рис. 5.29б). Делая соответствующую подстановку в (5.126), пишем,

$$\frac{\mathbf{R}_0}{R} = \frac{1}{n}\frac{dn}{dz}(\mathbf{z}_0 - \mathbf{v}_0\cos\vartheta). \tag{5.128}$$

Чтобы получить отсюда формулу (5.120), надо лишь возвести левую и правую часть в квадрат, а затем извлечь корни из полученных скалярных величин (взяв справа знак минус, что отвечает принятому нами выбору знака при определении радиуса кривизны).

Продолжая рассматривать среду, неоднородную только в направлении z и учитывая, что при этом $[\nabla n,\ \mathbf{z}_0] = 0$, умножим обе части (5.127) векторно на $\mathbf{z}_0$. В результате получаем

$$d[\mathbf{v}_0 n,\ \mathbf{z}_0]/dv = 0, \quad n[\mathbf{v}_0,\ \mathbf{z}_0] = \text{const} \tag{5.129}$$

($\mathbf{z}_0 = \text{const}$) или (рис. 5.29б):

$$n\cos\vartheta = \text{const}, \tag{5.130}$$

что можно рассматривать как обобщение второго закона Снеллиуса: для любых двух касательных к лучу, составляющих углы ϑ_1 и ϑ_2, согласно (5.130): $n_1\sin\vartheta_1 = n_2\sin\vartheta_2$.

5.5.5. О пределах применимости геометрической оптики (Б). Переход от уравнений Максвелла к уравнениям (5.106) и, далее, к уравнению эйконала (5.110) был проведен в предположении, что

$$\frac{|\operatorname{rot}\mathfrak{E}|}{|[\nabla\varphi, \mathfrak{E}]|} \ll 1, \quad \frac{|\operatorname{rot}\mathfrak{H}|}{|[\mathfrak{H}, \nabla\varphi]|} \ll 1, \tag{5.131}$$

или

$$\frac{|\operatorname{rot}\mathfrak{E}|}{\omega\mu_0|\mu\mathfrak{H}|} \ll 1, \quad \frac{|\operatorname{rot}\mathfrak{H}|}{\omega\varepsilon_0|\varepsilon\mathfrak{E}|} \ll 1. \tag{5.132}$$

Проще всего воспользоваться этими неравенствами, когда некоторое поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ уже известно и представлено в форме (5.105). Тогда можно сказать, правомерно ли трактовать поле с позиций геометрической оптики. Обычно такая оценка переносится на родственные поля, в результате чего выявляется класс электромагнитных полей, допускающих геометрооптическую трактовку.

Неравенства (5.131), (5.132) дают информацию о допустимой быстроте изменения векторных амплитудных коэффициентов $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$ в представлении поля (5.105). Перепишем (5.132) в форме:

$$\frac{\lambda}{2\pi}\frac{|\operatorname{rot}\mathfrak{E}|}{W|\mathfrak{H}|} \ll 1, \quad \frac{\lambda}{2\pi}\frac{|\operatorname{rot}\mathfrak{H}|}{W^{-1}|\mathfrak{E}|} \ll 1 \tag{5.133}$$

(проницаемости считаем вещественными); величины W и $\lambda = 2\pi/k$ определяем обычным образом, но полагаем изменяющимися в пространстве вместе с ε и μ. Поскольку в числителях (5.133) фигурируют первые производные компонент $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$ по координатам, то неравенства (5.133) будут заведомо выполнены, если

$$\frac{1}{2\pi}\frac{1}{W|h|}\left|\frac{\partial e}{\partial\xi}\lambda\right| \ll 1, \quad \frac{1}{2\pi}\frac{1}{W^{-1}|e|}\left|\frac{\partial h}{\partial\xi}\lambda\right| \ll 1, \tag{5.134}$$

где e и h — любые компоненты $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$, а ξ — любая пространственная координата. Заметим, что $(\partial e/\partial\xi)\lambda$ и $(\partial h/\partial\xi)\lambda$ это приращения величин e и h на расстоянии λ.

Требуемое слабое изменение поля мыслимо только при соответственно слабом изменении свойств среды. Таким образом, в случае неоднородных сред представления геометрической оптики применяют, когда относительные изменения ε и μ на расстояниях порядка длины волны малы.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Выписать выражения комплексных амплитуд и мгновенных значений векторов поля в случае плоской однородной волны, поляризованной в плоскости $z = \text{const}$, если волновой вектор составляет угол 30° с плоскостью $x = \text{const}$.

2. Волновой вектор плоской однородной волны составляет одинаковые углы со всеми осями декартовой системы координат. Записать выражение эйконала.

3. Найти предельные углы полного отражения для ряда диэлектрических сред (см. табл. 1.2), граничащих с воздухом (взять парафин, стеатит, плавленый кварц, титанат бария).

4. Продолжая рассматривать границы раздела тех же диэлектриков (см. упражнение 3) и воздуха, определить углы Брюстера.

5. Угол падения волны на поверхность моря изменяется в пределах $0 \div \approx 90°$. В каких пределах изменяется угол преломления?

6. Построить график изменения амплитуды магнитного поля внутри медного листа, на который нормально падает волна с амплитудой электрического поля 1 В/м при частоте 20 ГГц.

7. Распространяясь внутри диэлектрика, волна падает на границу с воздухом под углом 45° к нормали. Взяв $f = 10$ ГГц, построить график изменения амплитуды поля в направлении нормали в воздухе для случаев сред, указанных в упражнении 3.

8. Объяснить, почему фазовая скорость неоднородной волны, распространяющейся вдоль границы раздела диэлектриков, одна и та же в обеих средах.

9. Исследовать отраженную и преломленную волны, возникающие при наклонном падении на границу раздела сред волны круговой поляризации.

10. Выписать выражения комплексных амплитуд векторов поля и проверить выполнение граничных условий в случае, когда волна падает на границу раздела диэлектриков под углом Брюстера.

11. Выписать выражения комплексных амплитуд векторов поля в оптически менее плотной среде, когда на ее границу волна падает под предельным углом полного отражения; рассмотреть оба вида поляризации.

12. Полное отражение от границы несовершенного диэлектрика невозможно. Показать это математически и объяснить физическую причину.

13. Плоский полый волновод образован идеально проводящими плоскостями, находящимися на расстоянии $d = 3$ см. Найти первые пять критических частот для H- и столько же для E-волн. Внутренняя среда — воздух.

14. Плоский диэлектрический волновод представляет собой расположенный в воздухе слой диэлектрика толщиной $d = 3$ см с диэлектрической про-

ницаемостью $\varepsilon = 1{,}1$. Найти критические частоты H- и E-волн, как в предыдущем примере.

15. Можно ли применять формулу (5.104) для определения погонных потерь в медном проводе диаметром 0,1 мм при $f = 1$ Мгц, 1 Ггц, 10 Ггц?

16. Написать выражение эйконала для плоской волны, распространяющейся в произвольном направлении; для сферической волны.

17. Какое значение принимают левые части неравенств (5.131) и (5.132) в случае плоской однородной волны?

18. Выписать выражения плотности поверхностного тока и поверхностного заряда на идеально проводящих плоскостях, образующих полый волновод.

Глава 6

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В СТРУКТУРАХ

§ 6.0. Используемые математические понятия и символы (А)

6.0.1. Однородное уравнение Гельмгольца. Задачи для продольно-однородных структур. В п. 4.1.2 уже приходилось решать однородное уравнение Гельмгольца. Однако анализировался процесс, зависящий только от одной декартовой координаты, так что фактически фигурировало обыкновенное дифференциальное уравнение (4.24). В дальнейшем будут рассматриваться существенно более сложные электромагнитные процессы. В качестве подготовки к этому мы предварительно обсудим некоторый класс решений однородного скалярного уравнения Гельмгольца (4.17)

$$\nabla^2 \dot{u}_m + k^2 \dot{u}_m = 0. \tag{6.1}$$

Пусть пространственная структура, для которой ищется решение $\dot{u}_m$, является однородной в направлении z, т. е. все ее сечения плоскостями $z = \text{const}$ тождественны. Примеры таких структур показаны на рис. 6.1: функция u рассматривается внутри и (или) вне обобщенного цилиндра ($а$) или при наличии нескольких аналогичных подобластей ($б$). Параметр k может принимать разные постоянные значения в подобластях; на их границах $\dot{u}_m$ удовлетворяет некоторым условиям. Например, могут рассматриваться решения уравнения (6.1) внутри цилиндрической области (рис. 6.1$а$) при граничном условии $\dot{u}_m = 0$.

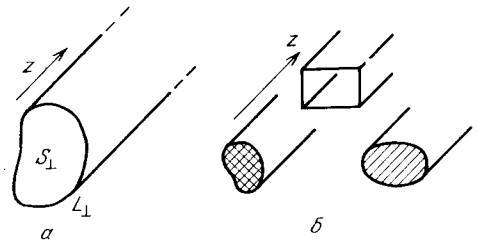


Рис. 6.1

Предположим, что решение $\dot{u}_m$ можно представить в виде произведения двух неизвестных функций *разных* аргументов: $\dot{u}_m(x, y, z) = T(x, y)Z(z)$. В результате подстановки этого представления в (6.1) получаем:

$$Z\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2\right) T + \frac{d^2 Z}{dz^2} T = 0.$$

Разделим все члены на TZ и введем обозначение

$$\nabla_\perp^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{6.2}$$

(оно будет использоваться и в дальнейшем). Теперь имеем

$$\frac{1}{T}\left(\nabla_\perp^2 T + k^2 T\right) + \frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} = 0. \tag{6.3}$$

Говорят, что в этом равенстве разделены переменные: оба слагаемых — функции разных аргументов. Поэтому, в частности, изменяя z, нельзя повлиять на первый член, и он наверняка сохраняет при этом постоянное значение. Но ввиду равенства (6.3) это означает, что остается постоянным и второй член, т. е. он равен некоторой константе. Обозначим ее Γ^2, т. е. $Z''/Z = \Gamma^2$. Мы видим, что первый член равен противоположной константе $-\Gamma^2$. Рассуждения приводят, таким образом, от (6.3) к двум независимым уравнениям:

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \Gamma^2 Z = 0, \tag{6.4}$$

$$\nabla_\perp^2 T + \chi^2 T = 0, \qquad \chi^2 = k^2 - \Gamma^2. \tag{6.5}$$

Если решения Z и T найдены, то тем самым найдено и решение первоначального уравнения Гельмгольца (6.1) $u = TZ$. Использованный прием называется *методом разделения переменных*. В гл. 7 мы будем его широко применять, доводя до конца, при решении задач о волноводах.

В данном случае существенно, что удалось выяснить некоторые общие черты интересующих нас решений уравнения Гельмгольца в классе продольно-однородных структур. Действительно, вид решений обыкновенного дифференциального уравнения (6.4) хорошо известен. Как и в п. 4.1.2, предпочтем экспоненциальную форму $Z = \dot{A}\exp(-i\Gamma z) + \dot{B}\exp(i\Gamma z)$, где $\dot{A}$ и $\dot{B}$ — неопределенные константы. Поэтому

$$\dot{u}_m = \dot{A}T(x, y)e^{-i\Gamma z} + \dot{B}T(x, y)e^{i\Gamma z}. \tag{6.6}$$

Напомним, что по форме два члена решения — не что иное, как комплексные амплитуды волн. Это вообще неоднородные волны, поскольку их амплитуды зависят от поперечных координат x, y. Если Γ — вещественная величина, то она играет такую же роль,

как k в (4.3). При комплексном Γ имеем

$$\Gamma = \Gamma' - i\Gamma'', \quad \Gamma' = \omega/v_\Phi = 2\pi/\Lambda \tag{6.7}$$

(ср. (4.11)), где Λ — длина волны, v_Φ — ее фазовая скорость, а Γ'' — коэффициент затухания (предполагается, что $\Gamma' > 0$, $\Gamma'' > 0$).

Величина Γ называется *продольным волновым числом*, а также *постоянной распространения*. Введенный в (6.5) параметр χ называют *поперечным волновым числом*.

Постоянная распространения Γ может оказаться и чисто мнимой величиной. Такой случай нам известен из п. 5.3.2. Вообще в п. 5.3 при анализе неоднородных волн уже встречались некоторые понятия, введенные теперь с более общих позиций.

6.0.2. Краевые (граничные) задачи для двумерного уравнения Гельмгольца. Собственные функции и собственные значения. Можно сказать, что трехмерную задачу о распространении волн в продольно-однородной структуре мы свели к рассмотрению двумерного уравнения Гельмгольца (6.5). При этом неизвестна не только функция $T(x, y)$, но и параметр χ^2. Само по себе уравнение (6.5) не имеет определенных решений. Необходимо поставить *краевую (граничную) задачу* (ср. п. 2.0.4). Пусть, например, $L_\perp$ — контур поперечного сечения цилиндра на рис. 6.1*а*. *Первой краевой задачей* для двумерного уравнения Гельмгольца назовем следующую:

$$\nabla_\perp^2 T + \chi^2 T = 0, \quad T = 0 \text{ на } L_\perp. \tag{6.8}$$

Пусть это задача внутренняя (т. е. решение T ищется внутри цилиндра). Тогда она имеет бесконечное множество решений $\{T_n\}$, каждое из которых реализуется при определенном значении параметра χ^2. Решения T_n называются *собственными функциями*, а соответствующие им значения χ_n^2 параметра χ^2 — *собственными значениями*. Нумерация производится в порядке неубывания собственных значений: $\chi_1^2 \leqslant \chi_2^2 \leqslant \ldots$ Если разным собственным функциям соответствуют одинаковые собственные значения, то последние называются *вырожденными*.

Мы не можем здесь дать теорию краевых задач (6.8) и аналогичных им. Однако в гл. 7 будут решаться конкретные краевые задачи, приводящие к нахождению систем собственных функций и собственных значений. Этот материал позволит составить представление об их свойствах, что важно для понимания электромагнитных волновых процессов.

Сформулируем *вторую краевую задачу* для уравнения (6.5):

$$\nabla_\perp^2 T + \chi^2 T = 0, \quad \partial T/\partial \nu = 0 \text{ на } L_\perp. \tag{6.9}$$

Эта задача также порождает систему собственных функций, которым отвечают собственные значения.

Как для первой, так и для второй краевой задачи легко получить следующее интегральное соотношение:

$$\chi^2 = \frac{\int\limits_{S_\perp} |\operatorname{grad} T|^2 \, ds}{\int\limits_{S_\perp} |T|^2 \, ds}. \tag{6.10}$$

Для этого обе части уравнения уравнения (6.5) умножаются на T^* и производится интегрирование по поперечному сечению $S_\perp$ цилиндра (см. рис. 6.1*а*). Далее применяется двумерный аналог теоремы Грина (1.35) с заменой $V \to S_\perp$, $S \to L_\perp$ при $\varphi = \psi^* = T$. После этого остается только учесть граничное условие первой или второй задачи, что приводит к уничтожению контурного интеграла.

Из (6.10) следует, что собственные значения рассматриваемых задач неотрицательны.

Если фигурирует несколько подобластей (см. рис. 6.1*б*), и для каждой из них k принимает свое значение k_i, то соответственно этому в (6.5) возникают разные поперечные волновые числа:

$$\chi_i^2 = k_i^2 - \Gamma \tag{6.11}$$

(имеются в виду номера подобластей). Постоянная распространения Γ является общей для всей продольно-однородной структуры: в противном случае было бы невозможно связать решения в подобластях граничными условиями на поверхностях их раздела. Соотношения (6.11), фактически, уже использовались выше в п. 5.3.3.

§ 6.1. Электромагнитные волны в продольно-однородных структурах (А)

6.1.1. Общее представление поля. Продольно-однородные структуры, понятие о которых было введено выше в п. 6.0.1, в простейших вариантах уже рассматривались в гл. 5. Продольно-однородной структурой, направляющей неоднородную волну, может быть, как мы видели, плоская граница раздела сред. Формирование такой волны истолковывалось как результат наложения простейших однородных волн при полном отражении. Этот подход нагляден, но в сложных задачах нереализуем. Гораздо более удобен другой путь, основные черты которого были намечены выше в § 6.0. Следуя ему, мы с единых позиций рассмотрим в дальнейшем весьма разнообразные структуры, имеющие важное практическое значение. Некоторые из них показаны (в поперечном сечении) на рис. 6.2. Это различные *полые волноводы* (*а*) — металлические трубы того или иного поперечного сечения; *диэлектрические волноводы* (*б*); открытые и замкнутые структуры с несколькими металлическими элементами (*в*) и ряд других, включая линии передачи, используемые в так называемых *интегральных схемах* (ИС) СВЧ (*г*).

Согласно п. 6.0.1, любая из компонент векторов $\dot{\mathbf{E}}_m$ и $\dot{\mathbf{H}}_m$ свободного электромагнитного процесса в продольно-однородной структуре может быть представлена в виде (6.6). Рассматривая волны одного направления, оставим первый член суммы (т. е. положим $B=0$).

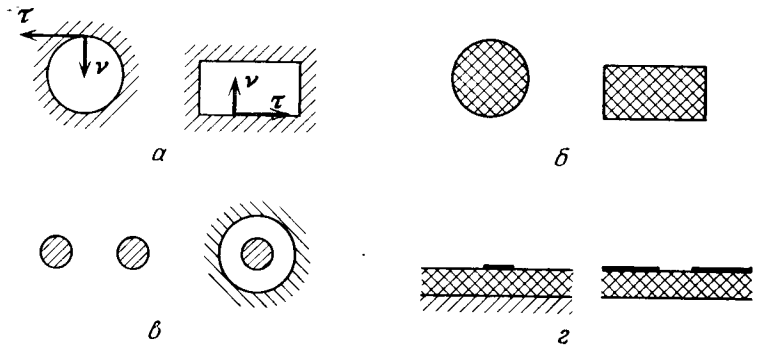


Рис. 6.2

Таким образом, векторы $\dot{\mathbf{E}}_m$ и $\dot{\mathbf{H}}_m$ выразим в следующем виде:

$$\dot{\mathbf{E}}_m = \dot{\mathfrak{E}}(x, y)e^{-i\Gamma z}, \quad \dot{\mathbf{H}}_m = \dot{\mathfrak{H}}(x, y)e^{-i\Gamma z}. \tag{6.12}$$

Подстановка (6.12) в однородные векторные уравнения Гельмгольца (4.22) приводит к двумерным уравнениям

$$\nabla_\perp^2 \mathfrak{E} + \chi^2 \mathfrak{E} = 0, \qquad \nabla_\perp^2 \mathfrak{H} + \chi^2 \mathfrak{H} = 0, \tag{6.13}$$

где

$$\chi^2 = k^2 - \Gamma^2$$

(если имеется несколько однородных областей i с разными свойствами, то столько же раз пишутся уравнения, причем $\chi_i^2 = k_i^2 - \Gamma^2$).

Следующий шаг — использование однородных ($\dot{\mathbf{j}}_m^{\text{ст}} = 0$) уравнений Максвелла (3.34), которые будут записаны в координатной форме. При этом учтем, что поскольку продольная зависимость всех компонент поля описывается множителем $\exp(-i\Gamma z)$, дифференцирование по z сводится к умножению на $-i\Gamma$. Итак, имеем следующие шесть скалярных уравнений:

$$\frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial y} + i\Gamma \dot{E}_{my} = -i\omega\mu_0\mu \dot{H}_{mx} \qquad \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial y} + i\Gamma \dot{H}_{my} = i\omega\varepsilon_0\varepsilon \dot{E}_{mx},$$

$$i\Gamma \dot{E}_{mx} + \frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial x} = i\omega\mu_0\mu \dot{H}_{my}, \qquad i\Gamma \dot{H}_{mx} + \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial x} = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon \dot{E}_{my}, \tag{6.14}$$

$$\frac{\partial \dot{E}_{my}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_{mx}}{\partial y} = -i\omega\mu_0\mu \dot{H}_{mz}, \qquad \frac{\partial \dot{H}_{my}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_{mx}}{\partial y} = i\omega\varepsilon_0\varepsilon \dot{E}_{mz}.$$

Сосредоточим внимание на первых двух парах уравнений, которые соединены перекрестными стрелками. Каждая из этих пар есть не что иное, как система двух линейных алгебраических уравнений относительно двух поперечных компонент векторов $\dot{\mathbf{E}}_m$ и $\dot{\mathbf{H}}_m$. Решая их, выражаем все поперечные компоненты через продольные:

$$\begin{aligned}
\dot{E}_{mx} &= -i\frac{\Gamma}{\chi^2}\left(\frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial x} + \frac{\omega\mu_0\mu}{\Gamma}\frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial y}\right),\\
\dot{E}_{my} &= -i\frac{\Gamma}{\chi^2}\left(\frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial y} - \frac{\omega\mu_0\mu}{\Gamma}\frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial x}\right),\\
\dot{H}_{mx} &= -i\frac{\Gamma}{\chi^2}\left(-\frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon}{\Gamma}\frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial x}\right),\\
\dot{H}_{my} &= -i\frac{\Gamma}{\chi^2}\left(\frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon}{\Gamma}\frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial y}\right).
\end{aligned} \tag{6.15}$$

Эти формулы удобно свернуть к следующей векторной форме записи:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{E}}_{mt} &= -i\frac{\Gamma}{\chi^2}\nabla_\perp \dot{E}_{mz} - \frac{i\omega\mu_0\mu}{\chi^2}\operatorname{rot}_\perp \dot{H}_{mz},\\
\dot{\mathbf{H}}_{mt} &= \frac{i\omega\varepsilon_0\varepsilon}{\chi^2}\operatorname{rot}_\perp \dot{E}_{mz} - i\frac{\Gamma}{\chi^2}\nabla_\perp \dot{H}_{mz}.
\end{aligned} \tag{6.16}$$

Здесь, как и ранее, символ $\perp$ употребляется в качестве знака отбрасывания производных по z; $\dot{\mathbf{E}}_{mt} = \dot{\mathbf{E}}_{mx} + \dot{\mathbf{E}}_{my}$ и $\dot{\mathbf{H}}_{mt} = \dot{\mathbf{H}}_{mx} + \dot{\mathbf{H}}_{my}$. Выражения (6.16) уже не связаны с определенным выбором поперечных координат: вместо x и y можно взять произвольные криволинейные ортогональные координаты в плоскости $z = \text{const}$.

Полученные формулы будут неоднократно применяться при нахождении электромагнитных полей различных волноводов. Но сначала используем их для общего анализа решений.

6.1.2. Классы волн. Волны *T*. Волна, переносящая энергию в направлении z, обязательно должна иметь как поперечную электрическую, так и поперечную магнитную компоненты: в противном случае $\Pi_z = 0$. Выражения (6.15) или (6.16) показывают, что таким свойством может обладать электромагнитное поле с одной только электрической или только магнитной продольной компонентой. При этом общее решение может рассматриваться как наложение двух частных, для одного из которых $E_z \neq 0$ и $H_z = 0$, а для другого $H_z \neq 0$ и $E_z = 0$.

Поэтому, рассматривая различные волны в продольно-однородных структурах, выделяют класс так называемых *E-волн*, или *электрических волн*, для которых $E_z \neq 0$ и $H_z = 0$, и класс *H-волн*,

или *магнитных волн*, для которых $H_z \neq 0$ и $E_z = 0$. Вместо символов E и H употребляются также TM и, соответственно, TE (говорят *поперечно-магнитные* и *поперечно-электрические* волны).

Более сложные волновые процессы, имеющие как электрическую, так и магнитную продольные компоненты, принято называть *гибридными волнами*.

Как известно (см. гл. 4), простейшая электромагнитная волна в свободном пространстве, которое, несомненно, является продольно-однородной структурой, совершенно лишена продольных компонент ($E_z = 0$, $H_z = 0$). Она принадлежит классу *Т-волн*, или по-другому, *ТЕМ-волн* (говорят *поперечно-электромагнитные волны*). Выражения (6.15), (6.16) допускают существование таких волн при $\chi^2 = 0$: они становятся неопределенностями типа 0/0.

Из равенства $\chi^2 = 0$ вытекает, что

$$\Gamma = k, \tag{6.17}$$

т. е. любые T-волны в некоторой среде распространяются с той же фазовой скоростью, что и плоская однородная волна. Внося $\chi^2 = 0$ в (6.13), получаем следующие двумерные уравнения Лапласа

$$\nabla_\perp^2 \mathfrak{E} = 0, \qquad \nabla_\perp^2 \mathfrak{H} = 0, \tag{6.18}$$

которым удовлетворяют функции поперечных координат $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$ в выражениях (6.12) в случае T-волн. Сами эти выражения принимают вид:

$$\dot{\mathbf{E}}_m = \mathfrak{E} e^{-ihz}, \quad \dot{\mathbf{H}}_m = \mathfrak{H} e^{-ihz}. \tag{6.19}$$

Выявлено два важных свойства T-волн. Во-первых, они мыслимы только в однородных средах, так как равенство (6.17) не может быть выполнено, если k (вместе с ε и μ) принимает разные значения в разных подобластях продольно-однородной структуры. Во-вторых, поперечное распределение полей в случае T-волн должно повторять продольно-однородные (не зависящие от z) статические распределения. Действительно, при $\omega = 0$ и при отсутствии продольной зависимости уравнения (4.22) принимают вид (6.18).

В каких из показанных на рис. 6.2 структурах могут существовать T-волны? Возьмем, например, полые волноводы (см. рис. 6.2*а*), полагая сначала их оболочки идеально проводящими. Легко убедиться, что в этих структурах T-волн не может быть. Ведь функция $\mathfrak{E}$ в точности совпадает с решением статической задачи, удовлетворяя уравнению (6.18) и граничному условию $\mathscr{E}_\tau = 0$, также выполняемому в электростатике. Но электростатическое поле внутри обычной полости в проводнике тождественно равно нулю (см. п. 2.2.5), следовательно, равна нулю и функция $\mathfrak{E}$. В этих рассуждениях можно было бы исходить также из $\mathfrak{H}$.

Обходя структуры, в которых T-волны невозможны из-за неоднородности среды, перейдем к классу (рис. 6.2*в*), содержащему

двухпроводную и коаксиальную линии, а также другие волноводы с однородным диэлектриком и не менее, чем с двумя проводниками. Повторяя прежние рассуждения, приходим к выводу, что в данном случае T-волны наверняка возможны, так как существуют статические решения. Более того, $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$ должны совпадать с соответствующими статическими (стационарными) полями, а потому легко выясняется вопрос о количестве различных T-волн в той или иной структуре. Например, в коаксиальной линии возможна только одна T-волна, причем $\mathfrak{E}$ есть поле бесконечного коаксиального конденсатора, а $\mathfrak{H}$ — магнитное поле коаксиального кабеля при постоянном токе (только в пространстве между проводниками!).

Что изменится, если ввести в рассмотрение конечную проводимость металлических элементов? Поскольку это означает переход к структурам с неоднородной средой, то, строго говоря, T-волны во всех случаях невозможны. Однако, если при $\sigma \to \infty$ T-волна существовала, то отвечающее ей решение при конечной проводимости окажется весьма близким, будучи формально E-волной: $E_z \neq 0$, так как на оболочке $j_z \neq 0$. Насколько мала эта продольная электрическая компонента, можно судить на основании граничного условия Леонтовича (см. п. 5.4.1).

6.1.3. Быстрые и медленные волны. От T-волн все остальные волновые процессы формально отличаются невыполнением равенства (6.17). Поэтому согласно (6.13)

$$\Gamma = \sqrt{k^2 - \chi^2}. \tag{6.20}$$

Если рассматривать только незатухающие волны, для которых постоянная распространения Γ — величина вещественная, то ясно, что при $\chi^2 > 0$ они будут *быстрыми*: $\Gamma < k$ и $v_\Phi > v$ (v_Φ — фазовая скорость данной волны, а v — скорость T-волны в данной среде). При $\chi^2 < 0$, т. е. при мнимых поперечных волновых числах χ волны будут *медленными*: $\Gamma > k$ и $v_\Phi < v$.

Напомним, что в § 5.3 мы уже познакомились с этими категориями на примере простейших направляемых волн.

В плоском полом волноводе (см. п. 5.3.2) может распространяться одна T-волна (в отличие от полых волноводов, показанных на рис. 6.2, это структура с двумя проводниками!) и существует бесконечное множество решений в виде E- и H-волн. В п. 6.2.3 мы увидим, что для E- и H-волн в любых экранированных структурах с однородной средой при идеальной проводимости оболочки $\chi^2 > 0$. Соотношение (6.20) при этом удобно записать в виде:

$$\Gamma = k\sqrt{1 - \left(\frac{\chi}{k}\right)^2} = k\sqrt{1 - \left(\frac{f_{\text{кр}}}{f}\right)^2} = k\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}, \tag{6.21}$$

где $f = \omega/2\pi$ — частота, $\lambda = 2\pi/k$ — длина T-волны в данной среде, условно называемая «рабочей» длиной волны. Введенные парамет-

ры (ср. п. 5.3.2) выражаются следующим образом:

$$f_{кр} = \chi c/(2\pi\sqrt{\varepsilon\mu}), \quad \lambda_{кр} = 2\pi/\chi. \tag{6.22}$$

Это *критическая частота* и, соответственно, *критическая длина волны*. С понижением частоты f (ростом рабочей длины волны λ) постоянная распространения Γ, проходя через ноль при $f = f_{кр}$ ($\lambda = \lambda_{кр}$), становится чисто мнимой величиной. Как было показано в п. 5.3.2 на примере плоского волновода, поле при этом теряет обычный волновой характер, не переносит энергии и экспоненциально затухает. Для быстрой волны, существующей при $f > f_{кр}$, на основании (6.21) и (6.7) имеем:

$$\Lambda = \lambda/\sqrt{1-(f_{кр}/f)^2} = \lambda/\sqrt{1-(\lambda/\lambda_{кр})^2},$$
$$v_ф = v/\sqrt{1-(f_{кр}/f)^2} = v/\sqrt{1-(\lambda/\lambda_{кр})^2} \tag{6.23}$$

и, далее, вычисляя $d\omega/d\Gamma$, записываем:

$$v_{гр} = v\sqrt{1-(f_{кр}/f)^2} = v\sqrt{1-(\lambda/\lambda_{кр})^2} \tag{6.24}$$

(ср. (5.74)). Зависимость фазовой скорости от частоты, т. е. закон дисперсии, найденный при анализе плоского волновода (см. рис. 5.18), как теперь видно, сохраняется для весьма широкого класса быстрых волн. Дополнительно приведем частотную зависимость относительной постоянной распространения Γ/k (рис. 6.3), которая при $f > f_{кр}$ является вещественной ($\Gamma = \Gamma'$), а при $f < f_{кр}$ — чисто мнимой ($\Gamma = -i\Gamma''$).

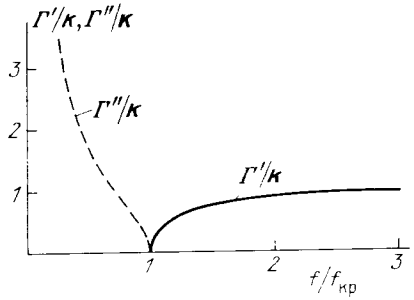


Рис. 6.3

Что касается медленных волн, то напомним *медленные поверхностные волны* в среде с меньшей оптической плотностью (пп. 5.3.3—5.3.4), распространяющиеся при условии, что граница раздела сред обладает определенным *импедансом* (5.86). Таков характер волнового процесса вне диэлектрического слоя (см. п. 5.3.4).

Реальные полые и диэлектрические волноводы будут рассматриваться в гл. 7.

§ 6.2. Конкретизация полей и постановка краевых задач для классов волн

6.2.1. Волны E и H в структурах с однородной средой (A). Комплексные амплитуды волн различных классов, имеющие вид (6.12), нетрудно выразить при помощи соотношений (6.16) через продольные компоненты.

Рассматривая *E-волны*, положим в (6.16) $\dot{H}_{mz} = 0$ и, выписывая $\dot{\mathbf{E}}_m$, добавим к $\dot{\mathbf{E}}_{mt}$ величину $\dot{\mathbf{E}}_{mz}$. В результате получаем

$$\dot{\mathbf{E}}_m = [\mathbf{z}_0\dot{\mathscr{E}}_z - i(\Gamma/\chi^2)\nabla_\perp\dot{\mathscr{E}}_z]e^{-i\Gamma z},$$
$$\dot{\mathbf{H}}_m = (i\omega\varepsilon_0\varepsilon/\chi^2)\,\mathrm{rot}_\perp\dot{\mathscr{E}}_z e^{-i\Gamma z} = -(i\omega\varepsilon_0\varepsilon/\chi^2)[\mathbf{z}_0,\ \nabla_\perp\dot{\mathscr{E}}_z]e^{-i\Gamma z}. \tag{6.25}$$

Отсюда видно, что

$$\dot{\mathbf{E}}_{mt} = W^E[\dot{\mathbf{H}}_{mt},\ \mathbf{z}_0], \quad W^E = \Gamma/\omega\varepsilon_0\varepsilon, \tag{6.26}$$

т. е. поперечные компоненты векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ ортогональны, причем скалярные величины $\dot{E}_{mt}$ и $\dot{H}_{mt}$ различаются только постоянным множителем W^E. Следовательно, распределение интенсивности электрического и магнитного поперечных полей в сечении $z = \mathrm{const}$ описывается одной и той же функцией. Величина W^E называется *волновым сопротивлением* в классе E-волн.

Ввиду (6.25) достаточно знать функцию $\dot{\mathscr{E}}_z$ и поперечное волновое число χ, чтобы определить все поле. Пусть все проводники являются идеальными ($\sigma \to \infty$); внутренняя среда — по постановке задачи — однородна. Проецируя первое из уравнений (6.13) на ось z и учитывая условие на границе с проводником, записываем:

$$\nabla_\perp^2\dot{\mathscr{E}}_z + \chi^2\dot{\mathscr{E}}_z = 0, \quad \dot{\mathscr{E}}_z = 0 \text{ на } L_\perp. \tag{6.27}$$

Это не что иное, как формулировка (6.8) первой краевой задачи для скалярного уравнения Гельмгольца; под $L_\perp$ понимается идеально проводящий контур поперечного сечения полого волновода или совокупность контуров в более сложных случаях (рис. 6.2*а*, *б*). Из интегрального соотношения (6.10), где теперь надо положить $T = \dot{\mathscr{E}}_z$, следует, что $\chi^2 \geqslant 0$. При этом $\chi^2 = 0$ соответствует предельному случаю T-волн ($\dot{\mathscr{E}}_z \to 0$); как известно (см. п. 6.1.2), эти волны не всегда существуют. Для E-волн $\chi^2 > 0$, т. е. это волны *быстрые* (п. 6.1.3).

Итак, для определения E-волн той или иной направляющей структуры с однородной средой и при идеализации проводящих границ надо найти решения первой краевой задачи для скалярного уравнения Гельмгольца (6.27). При этом определяются собственные функции $\dot{\mathscr{E}}_z^{(n)}$ и отвечающие им собственные значения χ_n^2 ($n = 1, 2, \ldots$). Затем применяются формулы (6.25).

Переходя к *H-волнам*, положим в (6.16) $\dot{E}_{mz} = 0$ и запишем комплексные амплитуды полных полей, добавляя $\dot{\mathbf{H}}_{mz}$ к $\dot{\mathbf{H}}_{mt}$:

$$\dot{\mathbf{E}}_m = -(i\omega\mu_0\mu/\chi^2)\,\mathrm{rot}_\perp\dot{\mathscr{H}}_z e^{-i\Gamma z} = -(i\omega\mu_0\mu/\chi^2)[\nabla_\perp\dot{\mathscr{H}}_z,\ \mathbf{z}_0]e^{-i\Gamma z},$$
$$\dot{\mathbf{H}}_m = [\mathbf{z}_0\dot{\mathscr{H}}_z - i(\Gamma/\chi^2)\nabla_\perp\dot{\mathscr{H}}_z]e^{-i\Gamma z}, \tag{6.28}$$

откуда

$$\dot{\mathbf{E}}_{mt} = W^H[\dot{\mathbf{H}}_{mt},\ \mathbf{z}_0], \quad W^H = \omega\mu_0\mu/\Gamma. \tag{6.29}$$

Здесь W^H — *волновое сопротивление* в классе H-волн. Как и в случае E-волн, делаем вывод об ортогональности векторов $\mathbf{E}_t$ и $\mathbf{H}_t$, а также об идентичности распределений их скалярных амплитуд в любой поперечной плоскости.

Поскольку все поле определяется через $\mathscr{H}_z$, сформулируем задачу, приводящую к нахождению этой продольной компоненты. Проецируя второе из уравнений (6.13) на ось z, мы получим уже знакомое скалярное уравнение Гельмгольца. Но надо еще наложить некоторое граничное условие на границе, принимаемой за идеально проводящую.

Условия этого нет в готовом виде, его надо вывести. Пусть $x=\tau$ и $y=\nu$ — локальные декартовы координаты в некоторой точке контура $L_\perp$ (см. рис. 6.2*а*), тангенциальная и нормальная. Перепишем в координатах τ, ν первую строку правого столбца системы уравнений (6.14):

$$\frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial \nu} + i\Gamma \dot{H}_{m\nu} = i\omega\varepsilon_0\varepsilon \dot{E}_{m\tau}.$$

Так как на поверхности идеального проводника $E_\tau=0$ и $B_\nu=0$, а в силу однородности (и изотропии) прилегающей среды и $H_\nu=0$, то, как видно из сделанной записи, $\partial \dot{H}_{mz}/\partial\nu=0$. Поэтому для функции $\mathscr{H}_z$ формулируется следующая краевая задача:

$$\nabla_\perp^2 \mathscr{H}_z + \chi^2 \mathscr{H}_z = 0, \quad \partial\mathscr{H}_z/\partial\nu = 0 \text{ на } L_\perp. \tag{6.30}$$

Это вторая краевая задача (6.9) для скалярного уравнения Гельмгольца. Используя интегральное соотношение (6.10), как и при анализе E-волн, видим, что $\chi^2 \geqslant 0$; H-волны являются *быстрыми*, так как случай $\chi^2=0$ относится к предельному случаю T-волн ($\mathscr{H}_z \to 0$).

Общий план определения поля в структуре остается прежним. Только вместо (6.27) решается краевая задача (6.30), дающая совокупность собственных функций $\mathscr{H}_z^{(n)}$ с собственными значениями χ_n^2 ($n=1, 2, \ldots$). После этого полное поле находится из (6.28).

6.2.2. T-волны (А). Векторные уравнения, которым удовлетворяют функции $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$ в случае T-волн, были сформулированы в п. 6.1.2. Это уравнения Лапласа (6.18). Поскольку $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$ потенциальны, выразим их в виде

$$\mathfrak{E} = -\nabla_\perp \varphi, \quad \mathfrak{H} = -\nabla_\perp \psi. \tag{6.31}$$

Здесь векторные функции выражены через электростатический и магнитостатический потенциалы φ и ψ, как это делалось в пп. 2.1.2 и 2.1.3. Краевые задачи для них — двумерные аналоги задач Дирихле и Неймана (2.15), (2.16). Запишем:

$$\begin{aligned} &\nabla_\perp^2 \varphi = 0, && \nabla_\perp^2 \psi = 0, \\ &\varphi = \Phi_i \text{ на } L_{\perp i}, && \partial\psi/\partial\nu = 0 \text{ на } L_{\perp i}, \end{aligned} \tag{6.32}$$

где граничные условия, налагаемые на φ и ψ, соответствуют обращению в нуль E_τ и H_ν на $L_\perp$; в задаче Дирихле предполагается, что φ принимает разные постоянные значения на отдельных (несмыкающихся) частях $L_{\perp i}$ границы $L_\perp$.

Анализ показывает, что задачи (6.32) не имеют ненулевых решений в случае полых волноводов (аналогичные рассуждения приводились выше в п. 2.2.5).

К T-волнам можно перейти, взяв выражения (6.25) или (6.28), представляющие поля E- и, соответственно, H-волн. Умножив их на $-i\chi^2/\Gamma$, надо перейти к пределу при $\Gamma \to k$. В результате продольные компоненты исчезают, а функции $\mathscr{E}_z$ и $\mathscr{H}_z$ приобретают смысл потенциалов φ и ψ. Поэтому можно также воспользоваться формулами (6.26) и (6.29) для нахождения волнового сопротивления в классе T-волн. Полагая в этих формулах $\Gamma=k$, приходим к выводу, что оно совпадает с известной величиной W (4.29), полученной для однородной T-волны. Действительно, $k/\omega\varepsilon_0\varepsilon = \omega\mu_0\mu/k = W$. Таким образом, для T-волн:

$$\dot{\mathbf{E}}_m = W[\dot{\mathbf{H}}_m, \mathbf{z}_0], \quad W = \sqrt{\mu_0\mu/\varepsilon_0\varepsilon}. \tag{6.33}$$

6.2.3. Краевые задачи и их решения для плоских структур (Б). Для иллюстрации изложенного материала обратимся к плоским структурам, уже рассматривавшимся в п. 5.3.2, 5.3.4. При этом

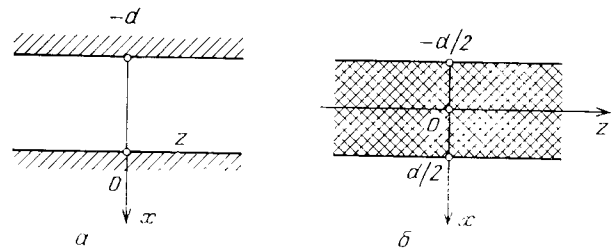


Рис. 6.4

сделаем замену координат $y \to z$, $z \to x$, $x \to y$ (чтобы ось z стала продольной). Тогда для системы двух идеально проводящих плоскостей (рис. 6.4*а*) краевая задача (6.27) принимает вид

$$\frac{d^2\mathscr{E}_z}{dx^2} + \chi^2\mathscr{E}_z = 0, \quad \mathscr{E}_z(0) = \mathscr{E}_z(-d) = 0. \tag{6.34}$$

Ее решение:

$$\mathscr{E}_z^{(n)} = B_n \sin\gamma_n x, \quad \chi_n^2 = \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2, \qquad (n=1, 2, \ldots) \tag{6.35}$$

дает собственные функции и собственные значения, отвечающие E-волнам.

Взяв задачу (6.30)

$$\frac{d^2\mathscr{H}_z}{dx^2} + \chi^2\mathscr{H}_z = 0, \quad \mathscr{H}_z'(0) = \mathscr{H}_z'(-d) = 0, \tag{6.36}$$

получаем собственные функции и собственные значения

$$\mathscr{H}_z^{(n)} = A_n \cos\chi_n x, \quad \chi_n^2 = \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2, \qquad (n=1, 2, \ldots), \tag{6.37}$$

отвечающие H-волнам.

Способ получения решений (6.35), (6.37) очень прост: берется общее решение уравнения в форме $A\cos\chi x + B\sin\chi x$ и производится наложение граничных условий, что сразу приводит к отбрасыванию одного члена и конкретизации χ. Чтобы получить полные поля, достаточно внести $\mathscr{E}_z^{(n)}$ в (6.25) и $\mathscr{H}_z^{(n)}$ в (6.28). Это даст формулы (5.65) и (5.67), записанные с учетом (5.68); разумеется, надо принять во внимание преобразование координат и неопределенность коэффициентов A_n, B_n.

Случай, соответствующий $n=0$ (параллельная поляризация) остался вне рассмотрения: он относится к классу T-волн. Сформулируем задачу (6.32)

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0, \qquad \varphi(0) = C_1, \qquad \varphi(-d) = C_2, \tag{6.38}$$

где C_1 и C_2 — произвольные, но различающиеся константы. Общее решение дифференциального уравнения есть $\varphi = Ax + B$, а с учетом граничных условий:

$$\varphi = (C_1 - C_2)x/d + C_1. \tag{6.39}$$

Согласно (6.31)

$$\mathfrak{E} = -\nabla_\perp\varphi = \mathrm{x}_0(C_2 - C_1)/d = \mathrm{x}_0\mathscr{E}. \tag{6.40}$$

Чтобы найти $\mathfrak{H}$, достаточно использовать соотношение (6.33). Полные комплексные амплитуды поля T-волны даются формулами (6.19).

Перейдем к случаю плоского диэлектрического волновода (рис. 6.4б). Это структура с двумя разнородными областями, в каждой из которых ищутся решения уравнений Гельмгольца (6.13). Рассматривая E-волны, мы должны сформулировать уравнение Гельмгольца относительно $\mathscr{E}_z$ дважды. Для внутренней области $(-d/2 < x < d/2)$ запишем два типа решений (четные и нечетные):

$$\mathscr{E}_z = A\cos\chi_1 x, \quad B\sin\chi_1 x. \tag{6.41}$$

Вне слоя (достаточно рассмотреть область $x < -d/2$) решение сформулируем в виде

$$\mathscr{E}_z = Ce^{-i\chi_2 x} = Ce^{|\chi_2|x}, \tag{6.42}$$

т. е. $\chi_2 = i|\chi_2|$: поле должно быть убывающим. Для полупространства $x > d/2$ решение четным или нечетным образом повторяет функцию (6.42) — в зависимости от выбора решения (6.41).

Для согласования констант в (6.41) и (6.42) надо наложить условия непрерывности тангенциальных компонент $E_\tau = E_z$ и $H_\tau = H_y$ на границе раздела сред $x = -d/2$. Сначала выразим H_{my} посредством (6.25): при $-d/2 < x < d/2$

$$\mathscr{H}_y = A\frac{i\omega\varepsilon_0\varepsilon_1}{\chi_1}\sin\chi_1 x, \qquad -B\frac{i\omega\varepsilon_0\varepsilon_1}{\chi_1}\cos\chi_1 x, \tag{6.43}$$

при $x < -d/2$

$$\mathscr{H}_y = -C(\omega\varepsilon_0\varepsilon_2/\chi_2)e^{-i\chi_2 x}. \tag{6.44}$$

Наложение указанных граничных условий дает в двух вариантах четности:

$$\begin{cases} A\cos\dfrac{\chi_1 d}{2} = Ce^{i(\chi_2 d/2)}, \\ iA\dfrac{\varepsilon_1}{\chi_1}\sin\dfrac{\chi_1 d}{2} = C\dfrac{\varepsilon_2}{\chi_2}e^{i(\chi_2 d/2)}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -B\sin\dfrac{\chi_1 d}{2} = Ce^{i(\chi_2 d/2)}, \\ iB\dfrac{\varepsilon_1}{\chi_1}\cos\dfrac{\chi_1 d}{2} = C\dfrac{\varepsilon_2}{\chi_2}e^{i(\chi_2 d/2)}. \end{cases} \tag{6.45}$$

Избавляясь от неопределенных коэффициентов, получаем трансцендентные уравнения относительно поперечных волновых чисел:

$$\operatorname{tg}\frac{\chi_1 d}{2} = -i\frac{\chi_1}{\chi_2}\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \qquad \operatorname{ctg}\frac{\chi_1 d}{2} = i\frac{\chi_1}{\chi_2}\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \tag{6.46}$$

Поскольку $\chi_{1,2}^2 = k_{1,2}^2 - \Gamma^2$, то $\chi_1^2 - \chi_2^2 = k_1^2 - k_2^2$ и, следовательно, в (6.46) можно оставить только χ_1 или $\chi_2 = i|\chi_2|$.

Уравнения (6.46) позволяют при заданных проницаемостях обеих сред и толщине слоя найти поперечные волновые числа, а следовательно, и постоянные распространения Γ волн, направляемых слоем. Полные поля находятся с привлечением формул (6.25).

Проверим характер поверхностного импеданса граничных плоскостей диэлектрического волновода. Полагая в (6.42) и (6.44) $x = -d/2$, получаем после очевидных операций $\dot{E}_{m\tau}$ и $\dot{H}_{m\tau}$. При подстановке в (5.85) это дает:

$$Z_s = \chi_2/\omega\varepsilon_0\varepsilon_2, \quad E\text{-волны}. \tag{6.47}$$

Поскольку $\chi_2 = i|\chi_2|$, то, как видно, поверхностный импеданс является индуктивным.

Все выполненные операции нетрудно повторить для случая H-волн. В этом, однако, нет необходимости, так как вместо этого достаточно применить принцип двойственности (п. 3.4.3). В част-

ности, сделав замену $\varepsilon_0\varepsilon \rightleftarrows \mu_0\mu$ (3.79), мы можем сразу же записать трансцендентные уравнения, которые получаются вместо (6.46):

$$\operatorname{tg}\frac{\chi_1 d}{2} = -i\frac{\chi_1}{\chi_2}\frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad \operatorname{ctg}\frac{\chi_1 d}{2} = i\frac{\chi_1}{\chi_2}\frac{\mu_2}{\mu_1}. \tag{6.48}$$

Применяя принцип двойственности (3.79) к (5.85) и (6.47), получаем

$$Z_s = \omega\mu_0\mu_2/\chi_2, \quad H\text{-волны}. \tag{6.49}$$

Здесь импеданс — емкостный.

Выводы о характере импеданса, разумеется, подтверждают ранее сделанные в п. 5.3.3.

§ 6.3. Периодические структуры (А)

6.3.1. Постановка задачи. Общие сведения о волновых процессах. В технике применяются не только продольно-однородные структуры, направляющие электромагнитные волны, но и *периодические*, т. е. изменяющие свои свойства по некоторому периодическому закону. Примеры *одномерно периодических*, или *продольно-периодических* структур даны на рис. 6.5. Структуры могут быть открытыми (*а*, *б*, *в*, *г*) и экранированными (*д*, *е*); это полые периодические

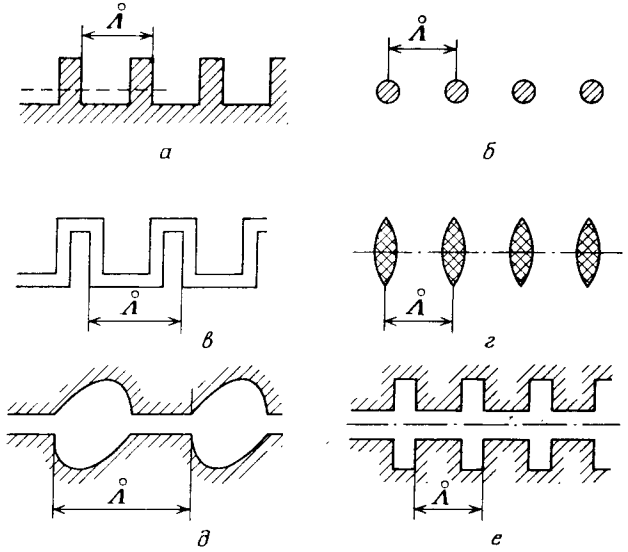


Рис. 6.5

волноводы. Гребенчатая структура (*а*), система поперечных стержней (*б*), некоторая проволочная структура (*в*), система диэлектрических линз (*г*) дают представление лишь о некоторых классах периодических структур.

Свободные электромагнитные поля в одномерно-периодических структурах подчиняются так называемой *теореме Флоке*, выражающей следующее свойство комплексных амплитуд векторов **E** и **H**:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{E}}_m(x, y, z+\mathring{\Lambda}) &= \dot{\mathbf{E}}_m(x, y, z)\,e^{-i\varphi},\\ \dot{\mathbf{H}}_m(x, y, z+\mathring{\Lambda}) &= \dot{\mathbf{H}}_m(x, y, z)\,e^{-i\varphi},\end{aligned} \tag{6.50}$$

где φ — величина вещественная, если отсутствует поглощение. Это значит, что при сдвиге на величину пространственного периода структуры $\mathring{\Lambda}$ обнаруживается некоторый фазовый сдвиг φ без каких-либо иных изменений поля.

В силу теоремы Флоке (6.50) нетрудно построить следующие периодические по z функции:

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}(x, y, z) &= \dot{\mathbf{E}}_m(x, y, z)\,e^{i\gamma z},\\ \mathfrak{H}(x, y, z) &= \dot{\mathbf{H}}_m(x, y, z)\,e^{i\gamma z},\end{aligned} \tag{6.51}$$

$\gamma = \varphi/\mathring{\Lambda}$, где γ — специально введенный параметр. Периодичность записанных векторных функций следует из того, что множитель $\exp(i\gamma z)$ компенсирует «естественный» фазовый сдвиг, возникающий согласно (6.50) на отрезке длиной $\mathring{\Lambda}$.

Функции $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$ можно разложить в ряды Фурье типа (3.17), выразив коэффициенты Фурье через соответствующие интегралы. Например,

$$\mathfrak{E}(x, y, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathfrak{E}_n(x, y)\,e^{-i(2\pi n/\mathring{\Lambda})z}, \tag{6.52}$$

где

$$\mathfrak{E}_n(x, y) = \frac{1}{\mathring{\Lambda}}\int_z^{z+\mathring{\Lambda}} \mathfrak{E}(x, y, z)\,e^{i(2\pi n/\mathring{\Lambda})z}\,dz =$$

$$= \frac{1}{\mathring{\Lambda}}\int_z^{z+\mathring{\Lambda}} \dot{\mathbf{E}}_m(x, y, z)\,e^{i(\gamma+2\pi n/\mathring{\Lambda})z}\,dz. \tag{6.53}$$

Точно так же можно представить $\mathfrak{H}$. Введя множитель $\exp(-i\gamma z)$, снова перейдем от $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$ к $\dot{\mathbf{E}}_m$ и $\dot{\mathbf{H}}_m$ соответственно:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{E}}_m(x, y, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathfrak{E}_n(x, y)\,e^{-i(\gamma+2\pi n/\mathring{\Lambda})z},\\ \dot{\mathbf{H}}_m(x, y, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathfrak{H}_n(x, y)\,e^{-i(\gamma+2\pi n/\mathring{\Lambda})z}.\end{aligned} \tag{6.54}$$

Полученный результат истолковывается следующим образом. Некоторый свободный волновой процесс в периодической структуре, создающий фазовое запаздывание φ на протяжении ее периода $\mathring{\Lambda}$, эквивалентен наложению бесконечного множества плоских неоднородных волн с комплексными амплитудами $\mathcal{E}_n \exp(-i\Gamma_n z)$, $\mathcal{H}_n \exp(-i\Gamma_n z)$ и постоянными распространения

$$\Gamma_n = \gamma + n\frac{2\pi}{\mathring{\Lambda}} \tag{6.55}$$

($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty$). Эти волны, называемые *пространственными гармониками*, имеют следующие фазовые скорости

$$v_{\phi(n)} = \omega/\Gamma_n = \omega/(\gamma + 2\pi n/\mathring{\Lambda}) \tag{6.56}$$

и одну общую групповую скорость

$$v_{\text{гр}} = d\omega/d\Gamma_n = d\omega/d\gamma. \tag{6.57}$$

Таким образом, фазовая скорость пространственных гармоник может как совпадать по направлению с групповой, так и быть ей противоположной. Их называют *прямыми* и, соответственно, *обратными* волнами.

Разложение процесса в периодической структуре на пространственные гармоники показывает, насколько он сложнее по сравнению с волной продольно-однородной структуры. Не следует забывать, что процесс эквивалентен построенному наложению гармоник *в целом*. Если, например, взять структуру, показанную на рис. 6.5*а*, то формально каждая пространственная гармоника существует на всей линии AB. Но внутри металла поле отсутствует. В разложениях (6.54) это совокупный эффект действия всех гармоник: ряды сходятся к нулю.

6.3.2. Частые периодические структуры: импедансные поверхности. Периодические структуры, для которых $\mathring{\Lambda} \ll \lambda$, будем условно называть *частыми*: на расстоянии длины волны в однородной среде укладывается большое число пространственных периодов.

Пусть, например, рассматривается ребристая структура, однородная в направлении y (рис. 6.6). Если она частая, то можно ожидать, что по отношению к верхнему полупространству ($x < 0$) граница структуры $x = 0$ проявляет некоторые усредненные свойства, а волновой процесс, распространяющийся в направлении z, представляется главным образом нулевой гармоникой разложений (6.54).

В пазах структуры может существовать поле, в общих чертах показанное на рис. 6.6. Волновой процесс в целом при этом можно считать E-волной. В первом приближении поле внутри паза не изменяется в направлении z, имея характер стоячей T-волны по x, так что

$$\dot{\mathbf{E}}_m = \mathbf{z}_0 i2A \sin k(x - d), \qquad \dot{\mathbf{H}}_m = \mathbf{y}_0 \frac{2A}{W} \cos k(x - d) \tag{6.58}$$

($0 < x < d$); выполняется условие $\dot{\mathbf{E}}_m = 0$ при $x = d$. Формулы (6.58) можно, например, получить из (4.56), положив $\varphi = 180°$, $\psi = 0$ и преобразуя координаты: $z \to x - d$, $x \to z$, $y \to -y$. На основании (6.58) нетрудно найти следующее соотношение между комплексными амплитудами $\dot{\mathbf{E}}_m$ и $\dot{\mathbf{H}}_m$ на плоскости $x = 0$:

$$\dot{\mathbf{E}}_m(0) = Z_s[\dot{\mathbf{H}}_m(0), \mathbf{x}_0], \quad Z_s = iW \operatorname{tg} kd. \tag{6.59}$$

Поэтому, пренебрегая площадью ребер при $x = 0$, можно сказать, что эта граница структуры проявляет себя как поверхность, характеризуемая импедансом Z_s. Напомним, что в п. 5.3.3 при анализе

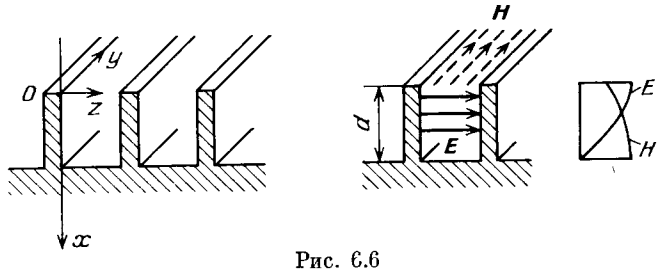


Рис. 6.6

волн, направляемых границей диэлектриков, было введено понятие импедансной поверхности, причем соотношения (6.59) и (5.85) имеют один и тот же смысл: в данном случае $\mathbf{x}_0 = \mathbf{v}_0'$ (орт внутренней нормали), а $\dot{\mathbf{E}}_m(0)$ и $\dot{\mathbf{H}}_m(0)$ тангенциальны границе.

В п. 5.3.3 было установлено, что поверхность «поддерживает» медленную E-волну, поле которой экспоненциально убывает в поперечном направлении, если Z_s согласно второму равенству (5.86) являясь мнимой положительной величиной, имеет индуктивный характер. Остается распространить этот вывод на рассматриваемую ребристую структуру. Поскольку при

$$\operatorname{tg} kd > 0 \tag{6.60}$$

импеданс Z_s (6.59) также является индуктивным, то записанное неравенство есть условие существования направляемой E-волны. По мере углубления пазов или возрастания частоты это условие будет выполняться сначала при $0 < d < \lambda/4$, т. е. пока глубина пазов не превышает четверти длины волны в данной среде.

Хотя рассуждения с самого начала были упрощенными, они привели к пониманию важного момента: вне частой ребристой структуры, как и вне диэлектрического волновода могут распространяться медленные поверхностные волны. В этом смысле ребристая структура играет роль «искусственного диэлектрика».

Импедансное описание границы частой периодической структуры оказывается возможным и в других случаях.

§ 6.4. Передача и потери энергии в структурах

6.4.1. Передаваемая мощность и погонные потери (А). Поток энергии через поперечное сечение продольно-однородной или периодической структуры выражает передаваемую мощность. Имеет смысл рассматривать средний поток энергии (см. п. 3.3.1). Таким образом,

$$\overline{P} = \int\limits_{S_\perp} \overline{\Pi}_z ds = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re} \int\limits_{S_\perp} [\dot{\mathbf{E}}_m, \dot{\mathbf{H}}_m^*]_z\, ds = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re} \int\limits_{S_\perp} [\dot{\mathbf{E}}_{mt}, \dot{\mathbf{H}}_{mt}^*]_z\, ds, \quad (6.61)$$

где $S_\perp$ — поперечное сечение структуры, которое может быть и бесконечным. Если среда однородна и в структуре распространяется одна T-, E- или H-волна, то из (6.61) следует:

$$\overline{P} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,\widehat{W} \int\limits_{S_\perp} \mathbf{H}_{mt}^2 ds = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{\widehat{W}^*} \int\limits_{S_\perp} \mathbf{E}_{mt}^2 ds, \quad (6.62)$$

где $\widehat{W}$ — волновое сопротивление W, W^E или W^H.

Пример 1. Пусть рассматривается полый волновод без потерь энергии. Если частота выше критической, то согласно (6.26) или (6.29) с учетом (6.21) волновое сопротивление W^E или W^H вещественно. Поэтому вещественна и величина $\overline{P}$, так что символ Re в (6.62) опускается. Если же частота ниже критической, то волновое сопротивление — чисто мнимое и на основании (6.62) $\overline{P} = 0$: передача энергии отсутствует. ■

Потери энергии в структурах можно вычислять путем применения общего соотношения (3.59). В случае продольно-однородных структур определяются погонные потери $\overline{p}_\text{п}$:

$$\overline{p}_\text{п} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z} \frac{\omega}{2} \int\limits_{\Delta V} (\varepsilon_0 \varepsilon'' \dot{\mathbf{E}}_m \dot{\mathbf{E}}_m^* + \mu_0 \mu'' \dot{\mathbf{H}}_m \dot{\mathbf{H}}_m^*)\, dv =$$

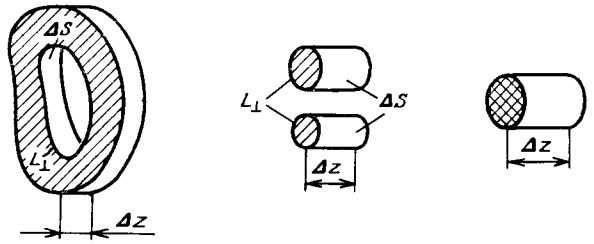
$$= \frac{\omega}{2} \int\limits_{S_\perp} (\varepsilon_0 \varepsilon'' \dot{\mathbf{E}}_m \dot{\mathbf{E}}_m^* + \mu_0 \mu'' \dot{\mathbf{H}}_m \dot{\mathbf{H}}_m^*)\, ds. \quad (6.63)$$

Здесь имеется в виду объем ΔV, заключенный между двумя поперечными сечениями z и $z + \Delta z$. Отсечение поперечного слоя структуры в разных вариантах показано на рис. 6.7*а*, *б*, *в*. Как правило, объем ΔV содержит разнородные среды, например, в случае полого волновода (*а*) — металл и внутренний диэлектрик; соответственно разделяется на подобласти поперечное сечение $S_\perp$.

На практике по формуле (6.63) чаще всего находятся только потери в диэлектрике. Что касается металла, то при сильном поверхностном эффекте (п. 5.4.2) простую формулу погонных потерь можно получить, учитывая поток энергии, уходящий внутрь металлических элементов. Таким образом, на основе граничного условия Леонтовича была получена общая формула (5.98). Обозначим через ΔS площадь «пояса» металлического элемента (элементов) в отсеченном слое ΔV (рис. 6.7). Обозначая погонные потери в металле $\overline{p}^\text{м}_\text{п}$, имеем

$$\overline{p}^\text{м}_\text{п} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z} \frac{1}{2\sigma\Delta^0} \int\limits_{\Delta S} \mathbf{H}_m^2 ds = \frac{1}{2\sigma\Delta^0} \int\limits_{L_\perp} \mathbf{H}_m^2 dl = \frac{1}{2} R_\text{пр} \int\limits_{L_\perp} \mathbf{H}_m^2 dl, \quad (6.64)$$

где $L_\perp$ — контур или совокупность контуров поперечного сечения всех металлических элементов.



а *б* *в*

Рис. 6.7

6.4.2. Затухание в продольно-однородных структурах: энергетический анализ (А). В результате потерь энергии происходит затухание волн, с которым мы уже знакомы на примере однородной T-волны, см. п. 4.1.3. В продольно-однородной структуре амплитуды векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ уменьшаются по закону $\exp(-\Gamma'' z)$, а передаваемая мощность $\overline{P}$ ввиду (6.62) — по закону $\exp(-2\Gamma'' z)$:

$$\overline{P}(z) = \overline{P}(0)\, e^{-2\Gamma'' z}. \quad (6.65)$$

На отрезке пути Δz в результате убывания $\overline{P}(z)$ наблюдается отрицательное приращение передаваемой мощности:

$$\Delta\overline{P} = \frac{d\overline{P}}{dz}\Delta z + \ldots = -2\Gamma''\overline{P}\Delta z + \ldots \quad (6.66)$$

(отброшены члены высшего порядка малости). Приращение потерь на этом отрезке выразим через погонные потери $\overline{p}_\text{п}$:

$$\Delta\overline{P}_\text{п} = \frac{d\overline{P}_\text{п}}{dz}\Delta z + \ldots = \overline{p}_\text{п}\Delta z + \ldots. \quad (6.67)$$

В силу закона сохранения энергии

$$\Delta\overline{P} + \Delta\overline{P}_\text{п} = 0. \quad (6.68)$$

При $\Delta z \to 0$ выражения (6.66), (6.67) становятся точными. Их подстановка в (6.68) приводит к следующему, как говорят, «энергети-

ческому» выражению коэффициента затухания:

$$\Gamma'' = \bar{p}_{\text{п}}/2\bar{P}. \tag{6.69}$$

Соотношение является вполне строгим.

Погонные потери можно разделить на части. Бывает удобно, например, разделить потери в металле и диэлектрике, т. е. $\bar{p}_{\text{п}} = \bar{p}_{\text{п}}^{\text{м}} + \bar{p}_{\text{п}}^{\text{д}}$. Вообще, если $\bar{p}_{\text{п}} = \bar{p}_{\text{п}1} + \bar{p}_{\text{п}2} + \ldots$, то согласно (6.69)

$$\Gamma'' = \frac{1}{2\bar{P}} \sum_n \bar{p}_{\text{п}n} = \sum_n \Gamma''_n, \tag{6.70}$$

где члены $\Gamma'' = \bar{p}_{\text{п}n}/2\bar{P}$ выражают парциальные коэффициенты затухания. В большинстве случаев

$$\Gamma'' = \Gamma''_{\text{м}} + \Gamma''_{\text{д}}, \tag{6.71}$$

где $\Gamma''_{\text{м}} = \bar{p}_{\text{п}}^{\text{м}}/2\bar{P}$ и $\Gamma''_{\text{д}} = \bar{p}_{\text{п}}^{\text{д}}/2\bar{P}$. Используя формулы (6.63) и (6.64), при $\mu'' = 0$ получаем:

$$\Gamma''_{\text{д}} = \frac{\omega\varepsilon_0 \int\limits_{S_\perp} \varepsilon'' \dot{\mathbf{E}}_m \dot{\mathbf{E}}_m^* ds}{2\,\mathrm{Re} \int\limits_{S_\perp} [\dot{\mathbf{E}}_m, \dot{\mathbf{H}}_m^*]_z \mathbf{ds}}, \qquad \Gamma''_{\text{м}} = \frac{R_{\text{пр}} \int\limits_{L_\perp} \dot{\mathbf{H}}_m \dot{\mathbf{H}}_m^* ds}{2\,\mathrm{Re} \int\limits_{S_\perp} [\dot{\mathbf{E}}_m, \dot{\mathbf{H}}_m^*]_z \mathbf{ds}}. \tag{6.72}$$

В большинстве практических случаев точные значения $\dot{\mathbf{E}}_m$, $\dot{\mathbf{H}}_m$ получить гораздо труднее, чем решить идеализированную задачу, в которой потери исключены. Но если такая задача решена, то соответствующие значения $\dot{\mathbf{E}}_m$, $\dot{\mathbf{H}}_m$ можно внести в (6.72) в качестве приближенных комплексных амплитуд. Это даст приближенные значения $\Gamma''_{\text{д}}$ и $\Gamma''_{\text{м}}$. Так обычно и делается (см. ниже гл. 7). Таким образом, энергетический анализ дает возможность приближенно оценивать затухание волн в различных структурах на основании сведений о полях в тех же структурах без потерь.

Сразу же подчеркнем, что такой подход возможен не всегда. Выше в примере было показано, что при отсутствии потерь передаваемая мощность $\bar{P}$ в области частот $f < f_{\text{кр}}$ равна нулю. Поскольку $\bar{P}$ формирует знаменатели выражений (6.72), то последние при данной подстановке теряют смысл. В действительности величина $\bar{P}$ при наличии потерь никогда строго в нуль не обращается.

Пример 2. Вычислим коэффициент $\Gamma''_{\text{д}}$ для некоторой H-волны, распространяющейся в структуре с однородной средой. Поскольку в этом случае $\dot{\mathbf{E}}_{mt} = \mathbf{E}_m$, то

$$\bar{P} = \mathrm{Re}\frac{1}{2(W^H)^*} \int\limits_{S_\perp} \mathbf{E}_m^2 ds, \qquad \bar{p}_{\text{п}}^{\text{д}} = \frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon''}{2} \int\limits_{S_\perp} \mathbf{E}_m^2 ds.$$

При подстановке этих выражений в формулу $\Gamma''_{\text{д}} = \bar{p}_{\text{п}}^{\text{д}}/2\bar{P}$ интегралы сократятся (можно было бы взять первую формулу (6.72)). В результате получается:

$$\Gamma''_{\text{д}} = \frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon''}{2\,\mathrm{Re}\,(1/W^{H*})} = \frac{\omega^2\varepsilon_0\mu_0\mu\varepsilon''}{2\,\mathrm{Re}\,\Gamma^*} = \frac{\mathbf{k}^2\,\mathrm{tg}\,\Delta}{2\,\mathrm{Re}\,\Gamma}, \tag{6.73}$$

где учтено, что $W^H = \omega\mu_0\mu/\Gamma$ (6.29), а также использовано обозначение $\mathbf{k} = (\omega/c)\sqrt{\varepsilon'\mu'}$ из (4.38).

В произведенных действиях подразумевалось, что $\dot{\mathbf{E}}_m$ есть точное решение для структуры, в которой учтены диэлектрические потери, а металл заменен идеальным проводником. Формула (6.73) является точной, однако для вычисления $\Gamma''_{\text{д}}$ надо знать $\mathrm{Re}\,\Gamma = \Gamma'$.

Если структура без потерь изучена и в области $f > f_{\text{кр}}$ известна вещественная постоянная распространения $\mathscr{T} = \sqrt{\mathbf{k}^2 - \chi^2}$, то в (6.73) можно заменить $\mathrm{Re}\,\Gamma$ на $\mathscr{T}$, что даст следующую приближенную формулу:

$$\Gamma''_{\text{д}} = \mathbf{k}^2\,\mathrm{tg}\,\Delta/2\mathscr{T}. \tag{6.74}$$

Можно убедиться, что этот результат верен также и в случае E-волн. Наконец, переходя к T-волнам, сделаем замену $\mathscr{T} \to \mathbf{k}$. Тогда (6.74) переходит в (4.44). ■

6.4.3. Аналитическое определение коэффициента затухания (А). Если в результате решения задачи для некоторой продольно-однородной структуры найдено поперечное волновое число χ, то по формуле (6.20) можно определить и постоянную распространения Γ; для нахождения коэффициента затухания надо лишь отделить ее мнимую часть. В частности, для E- и H-волн волновода с идеально-проводящей оболочкой $\chi^2 > 0$. Пусть внутренняя среда является поглощающей. Внося в (6.20) k в форме (4.41), запишем:

$$\Gamma = \sqrt{\mathbf{k}^2(1 - i\,\mathrm{tg}\,\Delta) - \chi^2} = \sqrt{\mathscr{T}^2 - i\mathbf{k}^2\,\mathrm{tg}\,\Delta}. \tag{6.75}$$

Разделение вещественной и мнимой частей приводит к следующим формулам:

$$\begin{aligned} \Gamma' &= \mathbf{k}\sqrt{1/2\,(\sqrt{\mathscr{T}^4/\mathbf{k}^4 + \mathrm{tg}^2\Delta} + \mathscr{T}^2/\mathbf{k}^2)}, \\ \Gamma'' &= \mathbf{k}\sqrt{1/2\,(\sqrt{\mathscr{T}^4/\mathbf{k}^4 + \mathrm{tg}^2\Delta} - \mathscr{T}^2/\mathbf{k}^2)}. \end{aligned} \tag{6.76}$$

При $\mathscr{T} \to \mathbf{k}$ отсюда получаются выражения (4.42), справедливые для *Т-волн*.

Пример 3. Рассмотрим некоторый полый волновод с идеально-проводящей оболочкой, заполненный поглощающей средой, для которой $\mu = 1$, $\varepsilon = \varepsilon' - i\sigma/\omega\varepsilon_0$ (3.33), причем $\mathrm{tg}\,\Delta = \sigma/\omega\varepsilon_0\varepsilon = 0{,}2f_{\text{кр}}/f$; под $f_{\text{кр}}$ понимается критическая частота рассматриваемой волны при отсутствии поглощения ($\mathrm{tg}\,\Delta = 0$), таким образом, $f_{\text{кр}}/f = \chi/\mathbf{k}$. На рис. 6.8*а* построены частотные зависимости относительных величин $\Gamma'/\mathbf{k}$ и $\Gamma''/\mathbf{k}$, полученные по формулам (6.76). Штриховые линии соответствуют случаю $\mathrm{tg}\,\Delta = 0$ (ср. также рис. 6.3). Как показывает расчет, при потерях постоянная распространения в нуль не обращается и всегда остается комплексной величиной; при $f = f_{\text{кр}}$ согласно (6.75)

$$\Gamma = (1 - i)\mathbf{k}\sqrt{(\mathrm{tg}\,\Delta)/2} \tag{6.77}$$

(так как $\mathscr{T} = 0$), т. е. $\Gamma' = \Gamma''$. Поскольку $\Gamma' \neq 0$ при любых частотах, то и при $f < f_{кр}$ существует передача энергии (действительно, $\overline{P} \neq 0$ (6.62), потому что $\widetilde{W} = W^E = \Gamma/\omega\varepsilon_0\varepsilon$ или $\widetilde{W} = W^H = \omega\mu_0\mu/\Gamma$ — не чисто мнимая величина). Но в этой области частот велико затухание. На рис. 6.8*б* построена кривая частотной зависимости относительной фазовой скорости $v_ф/v$, где $v_ф = \omega/\Gamma'$ и $v = \omega/\mathrm{k}$; при отсутствии потерь (штриховая линия) $v_ф/v \to \infty$ при

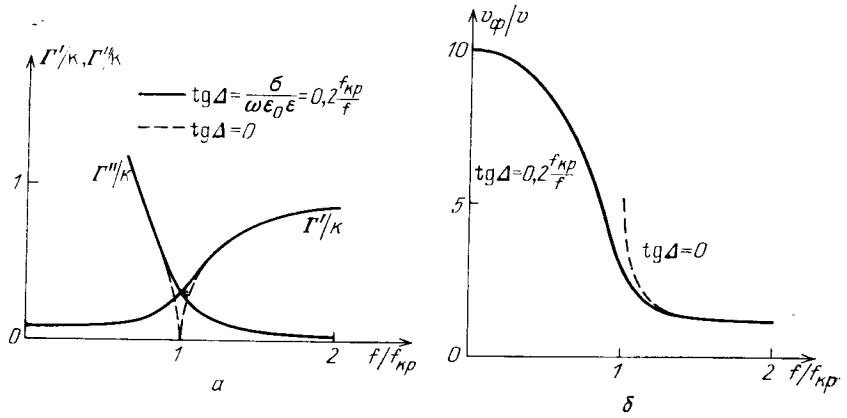


Рис. 6.8

$f \to f_{кр}$. Заметим, что взятая в этом примере поглощающая среда при $f > f_{кр}$ проявляет себя как несовершенный диэлектрик ($\mathrm{tg}\Delta \ll 1$), но, если $f \ll f_{кр}$, то она становится проводником. ■

В большинстве случаев при нахождении $\Gamma'' = \Gamma''_д$ область $f \approx f_{кр}$ обходится и выполняется неравенство $|\mathscr{T}|^2 \gg \mathrm{k}^2 \mathrm{tg}\,\Delta$. При этом из (6.75) путем разложения в ряд по малому параметру легко получить следующие приближенные выражения:

$$\Gamma \approx \begin{cases} \mathscr{T} - i\dfrac{\mathrm{k}^2}{2\mathscr{T}}\mathrm{tg}\,\Delta, & f > f_{кр}, \\ \dfrac{\mathrm{k}^2}{2|\mathscr{T}|}\mathrm{tg}\,\Delta - i|\mathscr{T}|, & f < f_{кр}. \end{cases} \tag{6.78}$$

Мы видим, что при $f > f_{кр}$ коэффициент затухания оказывается таким же, как и при вычислении по формуле (6.74).

6.4.3. О скорости движения энергии (Б). Еще в п. 1.5.4 было получено выражение, позволяющее находить скорость движения энергии в электромагнитном поле. Рассматривая быстрые *E*- и *H*-волны в некоторой продольно-однородной структуре без потерь, установим в этом случае связь скорости движения энергии и групповой скорости. Отправляясь от формулы (1.117), вместо $\mathbf{v}_э = \mathbf{П}/w$ введем величину

$$\overline{\overline{v}}_э = \frac{\int\limits_{S_\perp} \overline{\Pi}_z ds}{\int\limits_{S_\perp} \overline{w} ds}. \tag{6.79}$$

По смыслу этой записи величину $\overline{\overline{v}}_э$ надо рассматривать как скорость движения энергии $v_э$, усредненную во времени и по поперечному сечению структуры $S_\perp$. Можно сказать, что $\overline{\overline{v}}_э$ — скорость переноса энергии структурой в целом.

Взяв для определенности некоторую *E*-волну и раскрывая подынтегральные выражения в (6.79) при помощи формул (6.25), получаем:

$$\overline{\overline{v}}_э = \frac{\dfrac{\omega\varepsilon_0\varepsilon}{2\Gamma}\int\limits_{S_\perp}\dfrac{\Gamma^2}{\chi^4}|\nabla_\perp \mathscr{E}_z|^2\,ds}{\dfrac{\varepsilon_0\varepsilon}{4}\int\limits_{S_\perp}\left(|\mathscr{E}_z|^2 + \dfrac{\Gamma^2}{\chi^4}|\nabla_\perp\mathscr{E}_z|^2\right)ds + \dfrac{\mu_0\mu}{4}\int\limits_{S_\perp}\dfrac{\omega^2\varepsilon_0^2\varepsilon^2}{\chi^4}|\nabla_\perp\mathscr{E}_z|^2\,ds} =$$

$$= 2\frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon}{\Gamma}\left[\varepsilon_0\varepsilon\left(\frac{\chi^4}{\Gamma^2}\frac{\int\limits_{S_\perp}|\mathscr{E}_z|^2\,ds}{\int\limits_{S_\perp}|\nabla_\perp\mathscr{E}_z|^2\,ds} + 1\right) + \mu_0\mu\frac{\omega^2\varepsilon_0^2\varepsilon^2}{\Gamma^2}\right]^{-1}$$

при $f > f_{кр}$. Как было показано выше в п. 6.2.1, интегральное соотношение (6.10) справедливо при $T = \mathscr{E}_z$. Учитывая это, в круглых скобках последнего выражения имеем $\chi^2/\Gamma^2 + 1 = k^2/\Gamma^2$. Дальнейшие преобразования дают:

$$\overline{\overline{v}}_э = v\Gamma/k = v\sqrt{1 - (f_{кр}/f)^2} = v_{гр}, \tag{6.80}$$

где учтено выражение групповой скорости (6.24). Итак, введенная выше скорость переноса энергии $\overline{\overline{v}}_э$ совпадает с групповой скоростью.

Вывод оказывается справедливым и в случае *H*-волн. Все выкладки нетрудно повторить, детализируя подынтегральные выражения в (6.79) при помощи формул (6.28).

6.4.4. Затухание волновых процессов в периодических структурах (Б). Пусть в некотором поперечном сечении $S_\perp(z)$ периодической структуры передается мощность

$$\overline{P}(z) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int\limits_{S_\perp(z)}[\dot{\mathbf{E}}_m, \dot{\mathbf{H}}^*_m]_z\,ds \tag{6.81}$$

(ср. (6.61)). Вычисляя передаваемую мощность на расстоянии одного периода, воспользуемся теоремой Флоке (6.50):

$$\overline{P}(z + \mathring{\Lambda}) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int\limits_{S_\perp(z+\mathring{\Lambda})}[\dot{\mathbf{E}}_m, \dot{\mathbf{H}}^*_m]_z\,ds = \overline{P}(z)\,e^{-i(\varphi-\varphi^*)}. \tag{6.82}$$

Сравнение результатов (6.81) и (6.82) показывает, что при чисто вещественном φ (когда этот параметр выражает только фазовый

сдвиг), передаваемая мощность не изменяется. Затухание имеет место при комплексном

$$\varphi = \varphi' - i\varphi'' \tag{6.83}$$

($\varphi'' > 0$). В этом случае $\exp(-i\varphi + i\varphi^*) = \exp(-2\varphi'')$. Поэтому убывание передаваемой мощности на рассматриваемом отрезке периодической структуры есть

$$\overline{P}(z) - \overline{P}(z + \mathring{\Lambda}) = (1 - e^{-2\varphi''})\,\overline{P}(z). \tag{6.84}$$

В силу закона сохранения энергии эта величина равна потерям $\Delta\overline{P}_{\text{п}}$ на том же отрезке: $\overline{P}(z) - \overline{P}(z + \mathring{\Lambda}) = \Delta\overline{P}_{\text{п}}$. Отсюда

$$e^{-2\varphi''} = 1 - \Delta\overline{P}_{\text{п}}/\overline{P}(z), \tag{6.85}$$

а если потери малы, так что $\exp(-2\varphi'') \approx 1 - 2\varphi''$, то

$$\varphi'' \approx \Delta\overline{P}_{\text{п}}/2\overline{P} \tag{6.86}$$

(значения $\overline{P}$ при z и $z + \mathring{\Lambda}$ весьма близки).

Итак, в виде формул (6.85), (6.86) мы получили энергетическое описание затухания волнового процесса в периодической структуре; вторая из этих формул напоминает уже известное выражение (6.69).

Параметр φ'' будем называть *затуханием на период*, а $\Delta\overline{P}_{\text{п}}$ — *потерями на период*.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Привести формулы (5.65) и (5.67) к виду (6.25), (6.28), сделав нужное преобразование координат и выделив продольные компоненты $\mathscr{E}_z$, $\mathscr{H}_z$.

Аналогично представить поля всех направляемых волн, рассматривавшихся в п. 5.3.

2. Раскрыть формулы (6.25), (6.28) в цилиндрических координатах r, α, z (см. табл. 2.2), а также в обобщенно-цилиндрических координатах q_1, q_2, z (q_1 и q_2 — произвольные ортогональные криволинейные координаты, см. п. 2.0.2).

3. Рассматривая существование волн различных классов, объяснить, какой принципиальной особенностью обладает плоский полый волновод при сопоставлении со всеми остальными полыми волноводами.

4. Записать выражения волновых сопротивлений для всех классов собственных волн плоского полого волновода.

5. Произвести вывод формулы (6.10) для первой и второй краевых задач.

6. В каком смысле волны, направляемые плоским диэлектрическим волноводом, следует рассматривать как медленные и в каком — как быстрые?

7. Проверить формулу (6.24).

8. Проверить тождественность двух форм представления $\dot{\mathbf{H}}_m$ в (6.25) и $\dot{\mathbf{E}}_m$ в (6.28).

9. Графически или при помощи ЭВМ найти несколько корней уравнений (6.46).

10. Сопоставив ребристую структуру (п. 6.3.2) и слой диэлектрика на идеально-проводящей плоскости (п. 5.3.4), показать, каким образом первую структуру можно охарактеризовать некоторой эффективной диэлектрической проницаемостью.

11. Почему формулы (6.62) являются строгими лишь до тех пор, пока проводник направляющей структуры (например, оболочка волновода) идеализируется ($\sigma \to \infty$)?

12. Является ли формула (6.64) всегда достаточно точной?

13. Объяснить, почему в рассмотренном примере (рис. 6.8б) при $\omega \to 0$ оказывается $v_\Phi = 10c$.

14. Вывести формулу (6.80) в случае H-волн.

Глава 7
НАПРАВЛЯЮЩИЕ СТРУКТУРЫ

§ 7.0. Решение двумерного уравнения Гельмгольца методом разделения переменных (А)

7.0.1. Задачи в декартовых координатах. В этой главе при рассмотрении конкретных направляющих структур нам придется находить решения двумерного уравнения Гельмгольца (6.5) и решать краевые задачи (6.8), (6.9). Будет использоваться метод разделения переменных, уже обсуждавшийся в п. 6.0.1.

В декартовых координатах двумерное уравнение Гельмгольца (6.5) имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \chi^2 T = 0. \tag{7.1}$$

Применение метода разделения переменных начинается с предположения, что неизвестное решение T можно представить в виде произведения функций разных координат: $T(x, y) = X(x)\,Y(y)$. Подстановка этого представления в (7.1) дает:

$$\frac{d^2X}{dx^2}\,Y + X\,\frac{d^2Y}{dy^2} + \chi^2 XY = 0,$$

а после деления всех членов на XY получаем уравнение:

$$\frac{1}{X}\,\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\,\frac{d^2Y}{dy^2} = -\chi^2, \tag{7.2}$$

где слагаемые слева — функции разных аргументов. Они, таким образом, независимы (см. аналогичное обсуждение в п. 6.0.1), а следовательно, каждое слагаемое равно константе; обозначив эти константы — χ_x^2 и $-\chi_y^2$, получаем вместо (7.2) следующие два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \chi_x^2 X = 0, \qquad \frac{d^2Y}{dy^2} + \chi_y^2 Y = 0, \tag{7.3}$$

которые эквивалентны уравнению (7.2) при

$$\chi_x^2 + \chi_y^2 = \chi^2. \tag{7.4}$$

Общие решения уравнений (7.3), как известно, можно выразить в тригонометрической и экспоненциальной форме. Запишем:

$$X = \begin{cases} A\cos\chi_x x + B\sin\chi_x x, \\ \widetilde{A}e^{-i\chi_x x} + \widetilde{B}e^{i\chi_x x}, \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} C\cos\chi_y y + D\sin\chi_y y, \\ \widetilde{C}e^{-i\chi_y y} + \widetilde{D}e^{i\chi_y y}. \end{cases} \tag{7.5}$$

Здесь введен ряд неопределенных констант; неопределенными являются также χ_x и χ_y.

Поставим первую краевую задачу (6.8) для прямоугольной области, показанной на рис. 7.1. Граничное условие $T = 0$ на $L_\perp$ означает следующие требования:

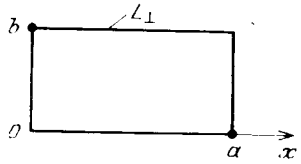


Рис. 7.1

$$T = 0 \tag{7.6}$$

при $x = 0$, $y = 0$; $x = a$, $y = b$. Взяв тригонометрическое представление решения

$$T(x, y) = (A\cos\chi_x x + B\sin\chi_x x)\times$$
$$\times(C\cos\chi_y y + D\sin\chi_y y), \tag{7.7}$$

согласно (7.6) мы должны иметь, в частности, $T(0, y) = 0$. Подставив в (7.7) $x = 0$, видим, что это возможно только при $A = 0$. Потребовав далее выполнения равенства $T(x, 0) = 0$, точно так же убеждаемся, что $C = 0$, т. е.

$$T(x, y) = N\sin\chi_x x\sin\chi_y y, \tag{7.8}$$

где N — неопределенная константа, появившаяся как произведение BD. Остается наложить на (7.8) условия $T(a, y) = 0$ и $T(x, b) = 0$. Они выполняются при $\chi_x a = m\pi$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ и $\chi_y b = n\pi$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, т. е.

$$\chi_x = m\pi/a, \qquad \chi_y = n\pi/b, \tag{7.9}$$

где $m = 1, 2, \ldots$ и $n = 1, 2, \ldots$ (нулевые значения m и n исключаем, так как при этом $T \equiv 0$).

Итак, мы получили систему решений первой краевой задачи для двумерного уравнения Гельмгольца (6.8) в случае прямоугольной области. Это *собственные функции* $T^{(1)}_{mn}$, которым соответствуют *собственные значения* χ^2_{mn}. Согласно (7.8), (7.9) и (7.4)

$$\left.\begin{aligned} T^{(1)}_{mn}(x, y) &= N^{(1)}_{mn}\sin(m\pi x/a)\sin(n\pi y/b), \\ \chi^2_{mn} &= (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2, \end{aligned}\right\} \quad m = 1, 2, \ldots, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{7.10}$$

($N^{(1)}_{mn}$ — неопределенные константы).

В случае второй краевой задачи (6.9) на решение (7.7) следует наложить условие $\partial T/\partial\nu = 0$ на $L_\perp$, что означает:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = a, \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad y = b. \end{aligned} \tag{7.11}$$

Дифференцируя $T(x, y)$ (7.7) по x, а затем по y и требуя обращения в нуль соответствующих производных при $x = 0$ и $y = 0$, находим, что $B = 0$ и $D = 0$, т. е.

$$T(x, y) = N\cos\chi_x x\cos\chi_y y, \tag{7.12}$$

где N — неопределенная константа. Налагая теперь условие обращения в нуль тех же производных при $x = a$ и $y = b$ соответственно, приходим к прежним выражениям (7.9). В результате получаем систему решений второй краевой задачи (6.9) в случае прямоугольной области в виде следующих собственных функций и отвечающих им собственных значений:

$$\left.\begin{aligned} T^{(2)}_{mn}(x, y) &= N^{(2)}_{mn}\cos(m\pi x/a)\cos(n\pi y/b), \\ \chi^2_{mn} &= (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2 \end{aligned}\right\} \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{7.13}$$

(как и ранее, $N^{(2)}_{mn}$ — неопределенные константы). Значения $m = 0$ и $n = 0$ теперь не исключаются. При одновременном равенстве нулю m и n собственная функция есть константа, а соответствующее собственное значение — нуль.

7.0.2. Цилиндрические функции. В дальнейшем нам понадобится решать уравнение (6.5) в цилиндрических координатах. Здесь в результате разделения переменных появится обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0, \tag{7.14}$$

которое называется *уравнением цилиндрических функций*, а также *уравнением Бесселя* n-го порядка. Общее решение уравнения (7.14) записывают в следующей форме:

$$y = \begin{cases} AJ_n(x) + BN_n(x), \\ \widetilde{A}H^{(1)}_n(x) + \widetilde{B}H^{(2)}_n(x) \end{cases} \tag{7.15}$$

(оба варианта эквивалентны), где: $J_n(x)$ — *функции Бесселя* n-го порядка, $N_n(x)$ — *функции Неймана* n-го порядка, $H^{(1)}_n(x)$ — *функции Ханкеля 1-го рода* n-го порядка, $H^{(2)}_n(x)$ — *функции Ханкеля 2-го рода* n-го порядка. Это различные виды *цилиндрических функций*.

Смысл представлений (7.15) легко понять, если учесть, что при $x \to \infty$ уравнение (7.13) переходит в хорошо известное уравнение $y'' + y = 0$, решение которого можно представить в двух формах: $y = \cos x + \sin x$ или $y = \exp(-ix) + \exp(ix)$. При этом $\exp(\pm ix) = \cos x \pm i\sin x$. Аналогично

$$H^{(1,2)}_n(x) = J_n(x) \pm iN_n(x). \tag{7.16}$$

Цилиндрические функции не являются периодическими, но они «осциллируют». Функции Бесселя и Неймана с ростом x принимают значения, колеблющиеся около нуля с монотонно убывающей амплитудой и приближающиеся к тригонометрическим при $x \to \infty$.

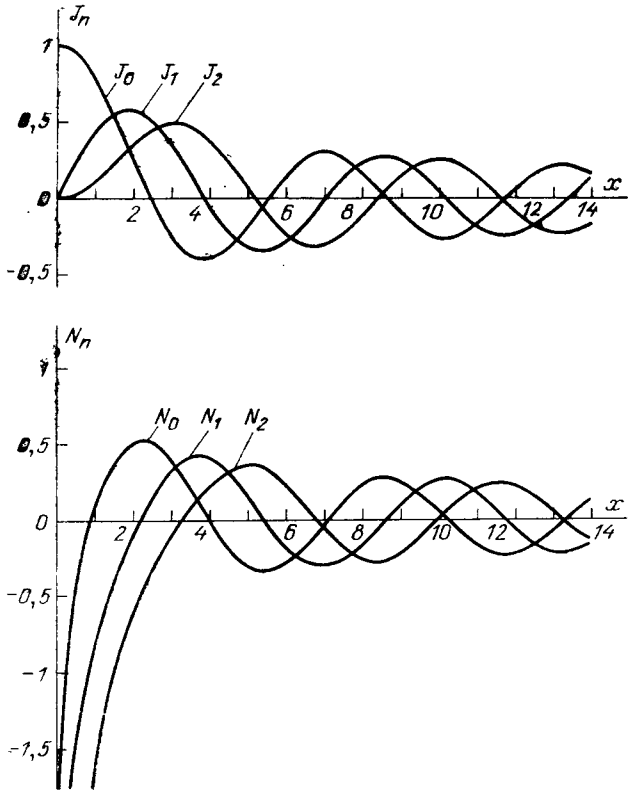


Рис. 7.2

Существенно, что $J_0(0)=1$, $J_n(0)=0$ при $n \neq 0$ и $N_n(0)=-\infty$. Цилиндрические функции хорошо табулированы. Широко распространены программы вычисления их на ЭВМ (рис. 7.2).

Нам понадобятся значения аргументов x, при которых функции Бесселя и их первые производные обращаются в нуль, т. е. корни $x=B_{nm}$ уравнения $J_n(x)=0$ и корни $x=A_{nm}$ уравнения $J'_n(x)=0$ (табл. 7.1, 7.2).

Запишем также некоторые формулы, часто используемые при операциях с цилиндрическими функциями; последние будем обозначать $Z_n(x)$, подразумевая, что имеется в виду функция Бесселя, Неймана или Ханкеля целого порядка.

Таблица 7.1

Корни B_{nm} уравнения $J_n(x)=0$

n	m			
	1	2	3	4
0	2,405	5,520	8,654	11,792
1	3,832	7,016	10,173	13,324
2	5,136	8,417	11,620	14,796
3	6,380	9,761	13,015	16,223

Таблица 7.2

Корни A_{nm} уравнения $J'_n(x)=0$

n	m			
	1	2	3	
0	3,832	7,016	10,173	13,324
1	1,841	5,331	8,536	11,706
2	3,054	6,706	9,969	13,170
3	4,201	8,015	11,346	14,586

Функциональные соотношения; дифференцирование:

$$Z_{-n}(x)=(-1)^n Z_n(x), \tag{7.17}$$

в частности,

$$Z_{-1}(x)=-Z_1(x), \tag{7.18}$$

$$\frac{dZ_n(x)}{dx}=-\frac{n}{x}Z_n(x)+Z_{n-1}(x)=\frac{n}{x}Z_n(x)-Z_{n+1}(x). \tag{7.19}$$

Далее, из (7.19) следует:

$$Z_{n-1}(x)+Z_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}Z_n(x), \tag{7.20}$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-n}Z_n(kx)\right]=-kx^{-n}Z_{n+1}(kx), \tag{7.21}$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{n}Z_n(kx)\right]=kx^{n}Z_{n-1}(kx), \tag{7.22}$$

в частности,

$$Z'_0(x)=-Z_1(x), \quad Z'_1(x)=Z_0(x)-\frac{Z_1(x)}{x}. \tag{7.23}$$

Формулы интегрирования:

$$\int x^{n+1}Z_n(x)\,dx=x^{n+1}Z_{n+1}(x), \tag{7.24}$$

$$\int x^{-n+1}Z_n(x)\,dx=-x^{-n+1}Z_{n-1}(x), \tag{7.25}$$

$$\int xZ_n^2(x)\,dx=\frac{x^2}{2}\left[Z_n^2(x)-Z_{n-1}(x)Z_{n+1}(x)\right]=$$

$$=\frac{x^2}{2}\left\{\left[1-\left(\frac{n}{x}\right)^2\right]Z_n^2(x)+Z_n'^2(x)\right\}, \tag{7.26}$$

$$\int\left[\frac{n^2Z_n^2(x)}{x^2}+Z_n'^2(x)\right]x\,dx=\frac{x^2}{2}\left\{Z_n^2(x)\left[1-\left(\frac{n}{x}\right)^2\right]+\frac{2}{x}Z_n(x)Z'_n(x)+Z_n'^2(x)\right\}, \tag{7.27}$$

$$\int xZ_n(\alpha x)Z_n(\beta x)\,dx=\frac{\beta xZ_n(\alpha x)Z_{n-1}(\beta x)-\alpha xZ_{n-1}(\alpha x)Z_n(\beta x)}{\alpha^2-\beta^2}. \tag{7.28}$$

При неограниченно возрастающем аргументе цилиндрические функции переходят в тригонометрические или экспоненциальные. Используются следующие *асимптотические представления*:

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left[x - \frac{\pi}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right] + O(x^{-3/2}), \tag{7.29}$$

$$N_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left[x - \frac{\pi}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right] + O(x^{-3/2}), \tag{7.30}$$

$$H_n^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\exp\left\{i\left[x - \frac{\pi}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]\right\} + O(x^{-3/2}), \tag{7.31}$$

$$H_n^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\exp\left\{-i\left[x - \frac{\pi}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]\right\} + O(x^{-3/2}). \tag{7.32}$$

Запишем *степенной ряд*

$$J_n(x) = \frac{(x/2)^n}{0!n!} - \frac{(x/2)^{n+2}}{1!(n+1)!} + \frac{(x/2)^{n+4}}{2!(n+2)!} - \ldots \tag{7.33}$$

При $x \ll 1$ отсюда следует:

$$J_n(x) \approx \frac{x^n}{n!2^n}, \tag{7.34}$$

в частности,

$$J_0(x) \approx 1, \quad J_1(x) \approx x/2. \tag{7.35}$$

При малых x имеем также:

$$N_0(x) \approx -\frac{2}{\pi}\ln\frac{2}{\gamma x}, \quad N_n(x) \approx -\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^n \tag{7.36}$$

$$(\gamma = 1{,}781\ldots)\ (n > 0).$$

7.0.3. Задачи в цилиндрических координатах. Двумерное уравнение Гельмгольца (6.5) в цилиндрических координатах (см. п. 2.0.2) имеет вид:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} + \chi^2 T = 0. \tag{7.37}$$

Решение ищем в виде произведения $T(r, \alpha) = \mathcal{R}(r)\mathcal{A}(\alpha)$. После этой подстановки, раскрыв круглые скобки, имеем:

$$\left(\frac{d^2\mathcal{R}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\mathcal{R}}{dr}\right)\mathcal{A} + \frac{\mathcal{R}}{r^2}\frac{d^2\mathcal{A}}{d\alpha^2} + \chi^2\mathcal{R}\mathcal{A} = 0.$$

Умножим все члены на $r^2/\mathcal{R}\mathcal{A}$ и перегруппируем:

$$\frac{r^2}{\mathcal{R}}\frac{d^2\mathcal{R}}{dr^2} + \frac{r}{\mathcal{R}}\frac{d\mathcal{R}}{dr} + r^2\chi^2 + \frac{1}{\mathcal{A}}\frac{d^2\mathcal{A}}{d\alpha^2} = 0. \tag{7.38}$$

Это привело к разделению переменных: первые три члена зависят только от r, а последний — от α. Введем константу n^2 и приравняем

ей сумму членов, зависящих от r; тогда последний равен $-n^2$. В результате получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\frac{d^2\mathcal{R}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\mathcal{R}}{dr} + \left(\chi^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)\mathcal{R} = 0, \tag{7.39}$$

$$\frac{d^2\mathcal{A}}{d\alpha^2} + n^2\mathcal{A} = 0 \tag{7.40}$$

(при записи (7.39) все члены были умножены на $\mathcal{R}/r^2$).

Обыкновенное дифференциальное уравнение (7.39) — это уравнение Бесселя (7.14) при $y = \mathcal{R}$, $x = \chi r$. Его общее решение запишем в форме (7.15):

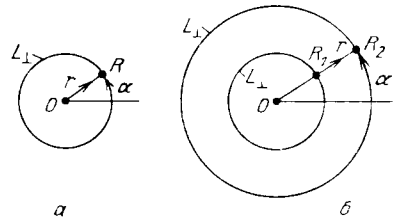
$$\mathcal{R}(r) = \begin{cases} AJ_n(\chi r) + BN_n(\chi r), \\ \tilde{A}H_n^{(1)}(\chi r) + \tilde{B}H_n^{(2)}(\chi r). \end{cases} \tag{7.41}$$

Решение уравнения (7.40) нам известно:

$$\mathcal{A}(\alpha) = \begin{cases} C\cos n\alpha + D\sin n\alpha, \\ \tilde{C}e^{-in\alpha} + \tilde{D}e^{in\alpha}. \end{cases} \tag{7.42}$$

Итак, найден общий вид решения $T = \mathcal{R}\mathcal{A}$ уравнения (6.5) в цилиндрических координатах, содержащий ряд неопределенных констант.

Перейдем к решению краевых задач (6.8), (6.9) в случаях областей, показанных на рис. 7.3*а, б*. Поскольку при этом $T(r, \alpha) = T(r, \alpha + 2\pi n)$, то n в (7.41), (7.42) — целое или нуль.



а *б*

Рис. 7.3

Начнем с краевой задачи (6.8) для круговой области (рис. 7.3*а*). Выбирая решение в форме первой строчки (7.41), умноженной на $\mathcal{A}$ (7.42), мы должны сразу положить $B = 0$, потому что в противном случае T окажется неограниченным в центре круга $r = 0$ (напомним, что $N_n(x) \to -\infty$ при $x \to 0$). Таким образом,

$$T(r, \alpha) = J_n(\chi r)\mathcal{A}(\alpha). \tag{7.43}$$

Граничное условие $T = 0$ на $L_\perp$ влечет за собой:

$$J_n(\chi R) = 0. \tag{7.44}$$

Это значит, что $\chi R = B_{nm}$ (см. табл. 7.1), т. е.

$$\chi = B_{nm}/R. \tag{7.45}$$

В результате мы можем записать решение краевой задачи (6.8). Как видно, систему решений образуют собственные функции, получаемые при подстановке χ (7.45) в (7.43). Запишем выражения этих

функций вместе с соответствующими им собственными значениями:

$$T^{(1)}_{nm}(r,\alpha)=N^{(1)}_{nm}J_n\left(\frac{B_{nm}}{R}r\right)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} n\alpha = N^{(1)}_{nm}J_n\left(\frac{B_{nm}}{R}r\right)\begin{matrix}e^{-in\alpha}\\ e^{in\alpha}\end{matrix}, \quad (7.46)$$

$$\chi^2_{nm}=(B_{nm}/R)^2.$$

Здесь линейные комбинации (7.42) представлены в форме столбцов: выбор одной из позиций столбца дает вариант собственной функции.

Решая для той же области (рис. 7.3*а*) вторую краевую задачу (6.9), опять приходим к формуле решения (7.43). Граничное условие $\partial T/\partial\nu=0$ на $L_\perp$ дает:

$$J'_n(\chi R)=0. \quad (7.47)$$

Поэтому $\chi R=A_{nm}$ (см. табл. 7.2) и

$$\chi=A_{nm}/R. \quad (7.48)$$

В итоге вместо (7.46) получаем:

$$T^{(2)}_{nm}(r,\alpha)=N^{(2)}_{nm}J_n\left(\frac{A_{nm}}{R}r\right)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} n\alpha = N^{(2)}_{nm}J_n\left(\frac{A_{nm}}{R}r\right)\begin{matrix}e^{-in\alpha}\\ e^{in\alpha}\end{matrix}, \quad (7.49)$$

$$\chi^2_{nm}=(A_{nm}/R)^2.$$

Решение краевых задач в случае кольцевой области (рис. 7.3*б*) отличается тем, что теперь нет оснований отбрасывать член с функцией Неймана в (7.41), так как центр круга исключен из рассмотрения. Вместо (7.43) пишем:

$$T(r,\alpha)=[AJ_n(\chi r)+BN_n(\chi r)]\mathscr{A}(\alpha). \quad (7.50)$$

Решая первую краевую задачу (6.8), теперь необходимо потребовать обращения в нуль решения при $r=R_1$ и $r=R_2$. Отсюда

$$\begin{aligned}AJ_n(\chi R_1)+BN_n(\chi R_1)&=0,\\ AJ_n(\chi R_2)+BN_n(\chi R_2)&=0.\end{aligned} \quad (7.51)$$

Выполняя условие совместности этой системы уравнений, обратим в нуль ее определитель:

$$J_n(\chi R_1)N_n(\chi R_2)-J_n(\chi R_2)N_n(\chi R_1)=0. \quad (7.52)$$

Это и есть уравнение относительно χ. Если корни $\chi=\chi_{nm}$ найдены, остается подставить их в (7.50) и, далее, воспользовавшись одной из строчек (7.51), найти отношение коэффициентов B и A. Получаем:

$$\mathscr{R}(r)=A\left[J_n(\chi_{nm}r)-\frac{J_n(\chi_{nm}R_1)}{N_n(\chi_{nm}R_1)}N_n(\chi_{nm}r)\right]. \quad (7.53)$$

Для получения полных собственных функций надо внести это выражение (опустив A) в первую строчку (7.46) вместо $J_n\left(\frac{B_{nm}}{R}r\right)$.

Что касается χ_{nm}, то корни уравнения (7.52) приводятся в различных справочниках, например, в [К. 3].

Пусть теперь решается вторая краевая задача (6.9) для кольцевой области (рис. 7.3*б*). Решение по-прежнему представляется в виде (7.50), а вместо T нужно обратить в нуль при $r=R_1$ и $r=R_2$ производную этой функции по r. Поэтому имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}AJ'_n(\chi R_1)+BN'_n(\chi R_1)&=0,\\ AJ'_n(\chi R_2)+BN'_n(\chi R_2)&=0.\end{aligned} \quad (7.54)$$

Отсюда прежним путем получаем уравнение относительно χ:

$$J'_n(\chi R_1)N'_n(\chi R_2)-J'_n(\chi R_2)N'_n(\chi R_1)=0. \quad (7.55)$$

В конечном счете вместо (7.53) находим:

$$\mathscr{R}(r)=A\left[J_n(\chi_{nm}r)-\frac{J'_n(\chi_{nm}R_1)}{N'_n(\chi_{nm}R_1)}N_n(\chi_{nm}r)\right], \quad (7.56)$$

где χ_{nm} — корни (7.55); они приводятся, например, в [К. 3].

Для получения полных собственных функций надо внести $\mathscr{R}(r)$ (7.56) вместо $J_n\left(\frac{A_{nm}}{R}r\right)$ в (7.49), отбросив A.

§ 7.1. Прямоугольный волновод (А)

7.1.1. Решение задачи. Среди полых волноводов (см. рис. 6.2*а*) наиболее распространен *прямоугольный волновод*, металлическая труба прямоугольного поперечного сечения (рис. 7.4). Мы располагаем всеми необходимыми данными, чтобы записать решение электродинамической задачи для прямоугольного волновода, оболочка которого принимается за идеально проводящую, а внутренняя среда является однородной. Такая математическая модель в большинстве случаев оказывается удовлетворительной. При необходимости она уточняется путем учета потерь в металле; это также будет сделано.

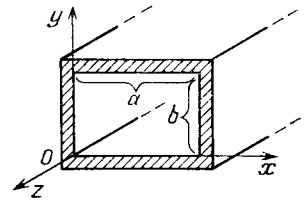


Рис. 7.4

В прямоугольном волноводе с идеально проводящей оболочкой могут существовать только волны классов E и H (см. п. 6.1.2). Рассматривая E-волны, мы должны решить краевую задачу (6.27) для прямоугольного контура, а это не что иное, как уже решенная выше в п. 7.0.1 первая краевая задача для уравнения (7.1) с граничным условием (7.6). Итак, решение задачи (6.27) для прямоугольного

волновода (рис. 7.4) дает согласно (7.10)

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{E}_z^{mn} &= E_0^{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, \\ \chi_{mn}^2 &= \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned} m &= 1, 2, \ldots, \\ n &= 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{7.57}$$

где E_0^{mn} — неопределенные коэффициенты. Зная эти *собственные функции* $\mathscr{E}_z^{mn}$ и соответствующие им *собственные значения* χ_{mn}^2, путем подстановки (7.57) в (6.25) выразим полные электромагнитные поля:

E-волны

$$\dot{\mathbf{E}}_m^{mn} = E_0^{mn}\left[\mathbf{z}_0\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} - \right.$$
$$\left. - i\,\frac{\Gamma_{mn}}{\chi_{mn}^2}\left(\mathbf{x}_0\frac{m\pi}{a}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}+\mathbf{y}_0\frac{n\pi}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\right)\right]e^{-i\Gamma_{mn}z}, \tag{7.58}$$

$$\dot{\mathbf{H}}_n^{mn} = i\,\frac{E_0^{mn}}{W_{mn}^E}\,\frac{\Gamma_{mn}}{\chi_{mn}^2}\left(\mathbf{x}_0\frac{n\pi}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}-\mathbf{y}_0\frac{m\pi}{a}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\right)e^{-i\Gamma_{mn}z},$$

где (6.26)

$$W_{mn}^E = \frac{\Gamma_{mn}}{\omega\varepsilon_0\varepsilon} = W\sqrt{1-\left(\frac{f_{\text{кр}}^{mn}}{f}\right)^2} = W\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}^{mn}}\right)^2} \tag{7.59}$$

($W = 120\pi\sqrt{\mu/\varepsilon}$) и (6.20)—(6.22):

$$\Gamma_{mn} = k\sqrt{1-\left(\frac{f_{\text{кр}}^{mn}}{f}\right)^2} = k\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}^{mn}}\right)^2}, \tag{7.60}$$

причем

$$f_{\text{кр}}^{mn} = \frac{c}{2\pi\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2},\quad \lambda_{\text{кр}}^{mn} = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2+(n/b)^2}}. \tag{7.61}$$

Анализ *H*-волн требует решения краевой задачи (6.30). В п. 7.0.1 это было сделано: для прямоугольного контура (рис. 7.1) было поставлено граничное условие (7.11) и найдена система решений уравнения (7.1). Поэтому согласно (7.13)

$$\mathscr{H}_z^{mn} = H_0^{mn}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b},\quad \chi_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \tag{7.62}$$

где $m = (0), 1, 2, \ldots, n = (0), 1, 2, \ldots$, H_0^{mn} — неопределенные коэффициенты (ср. E_0^{mn} в (7.57)). Нулевые значения m и n можно брать лишь при сочетании с ненулевыми (поэтому нули взяты в скобки). Дело в том, что $\mathscr{H}_z^{00}$ есть константа, причем $\chi_{00}^2 = 0$; это решение не относится к классу *H*-волн. Подставляя собственные функции $\mathscr{H}_z^{mn}$ и собственные значения χ_{mn}^2 (7.62) в (6.28), получаем *H-волны*

$$\dot{\mathbf{E}}_m^{mn} = iW_{mn}^H H_0^{mn}\frac{\Gamma_{mn}}{\chi_{mn}^2}\left(\mathbf{x}_0\frac{n\pi}{b}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}-\mathbf{y}_0\frac{m\pi}{a}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\right)e^{-i\Gamma_{mn}z}, \tag{7.63}$$

$$\dot{\mathbf{H}}_m^{mn} = H_0^{mn}\left[\mathbf{z}_0\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b} + i\,\frac{\Gamma_{mn}}{\chi_{mn}^2}\left(\mathbf{x}_0\frac{m\pi}{a}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}+\right.\right.$$
$$\left.\left. + \mathbf{y}_0\frac{n\pi}{b}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\right)\right]e^{-i\Gamma_{mn}z},$$

где

$$W_{mn}^H = \frac{\omega\mu_0\mu}{\Gamma_{mn}} = \frac{W}{\sqrt{1-(f_{\text{кр}}^{mn}/f)^2}} = \frac{W}{\sqrt{1-(\lambda/\lambda_{\text{кр}}^{mn})^2}}, \tag{7.64}$$

а постоянные распространения Γ_{mn} и критические частоты $f_{\text{кр}}^{mn}$ по-прежнему выражаются формулами (7.60), (7.61).

7.1.2. Анализ волновых процессов. Полученные решения показывают, что прямоугольному волноводу свойственно бесконечное множество свободных электромагнитных полей классов *E* и *H*, которые определяются выбором чисел m и n в (7.57) или, соответственно, (7.62). Говорят, что выбранное решение дает *тип поля*, или *тип волны* E_{mn} (в классе *E*) и H_{mn} (в классе *H*).

При фиксированной частоте f только для некоторых достаточно малых m и n будет выполнено условие $f > f_{\text{кр}}$ (7.61). Поэтому лишь для конечного числа типов поля постоянные распространения Γ_{mn} (7.60) окажутся вещественными. Эти типы поля имеют характер распространяющихся волн, которые переносят энергию. Все остальные типы поля, составляющие бесконечное множество, энергии не переносят и экспоненциально затухают (см. пп. 6.1.3, 5.3.2, 6.4.1). Передача энергии невозможна, если $f < f_{\text{кр}}$ для всех m и n.

Особую роль играет тип волны с наименьшей критической частотой $\min f_{\text{кр}}^{mn}$. Если $a > b$ (см. рис. 7.4), то

$$\min f_{\text{кр}}^{mn} = f_{\text{кр}}^{10} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\,\frac{1}{2a}. \tag{7.65}$$

Этот минимум реализуется в классе *H* (см. выбор чисел m и n в (7.62)). Волна H_{10}, обладающая наименьшей критической частотой, называется *основной волной* прямоугольного волновода. Обычно соблюдается условие $f > f_{\text{кр}}^{10}$ при $f < f_{\text{кр}}^{mn}$ для остальных типов волн. В этом случае в волноводе перенос энергии осуществляется только одной основной волной.

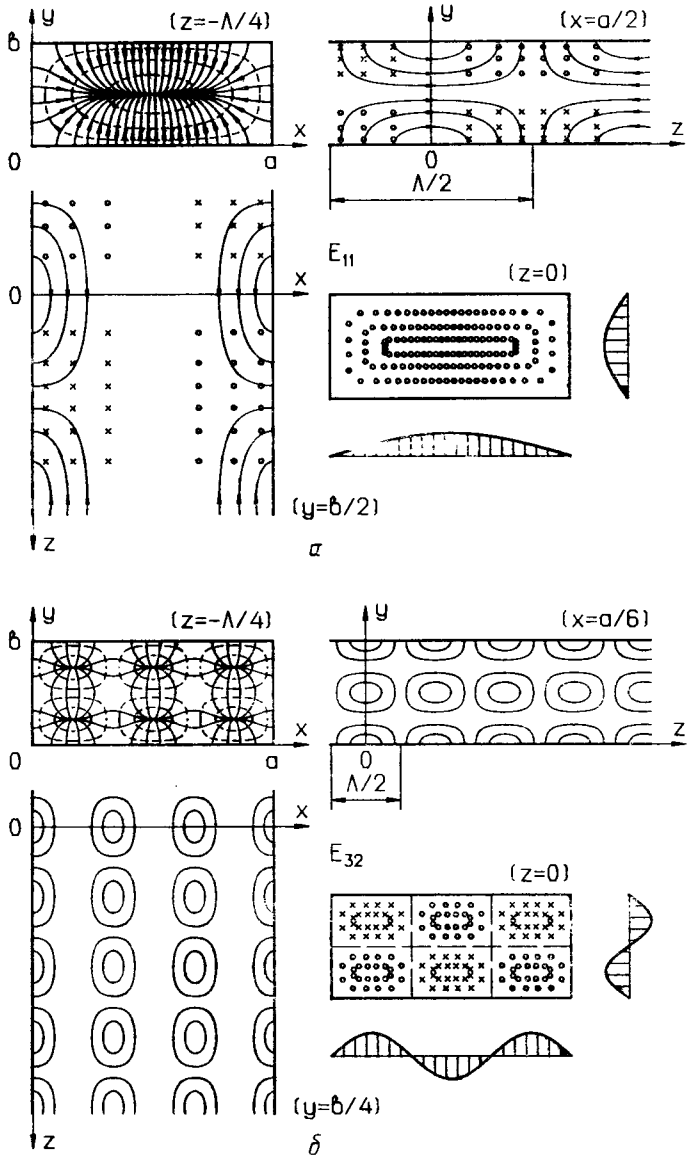


Рис. 7.5. (ЭВМ)

Рассмотрим строение электромагнитных полей. В классе E простейшим является тип поля E_{11}. Ему посвящена серия изображений на рис. 7.5*а* (здесь и далее $a = 35$ мм, $b = 15$ мм). Это «мгновенный снимок» поля, смещающегося вдоль оси z с фазовой скоростью $v_\Phi = \omega/\Gamma_{11}$. Он получен при $f = 12$ ГГц на основе формул (7.58) для момента времени $t = 0$. В поперечном сечении $z = 0$ (рис. 7.5*а* внизу справа) наблюдается лишь продольное электрическое поле. Распределение E_z, разумеется, соответствует выражению (7.57) при $m = 1$, $n = 1$, когда $\mathscr{E}_z^{11} = E_0^{11} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}$. Эпюры этого распределения по осям x и y показаны вместе с поперечным сечением $z = 0$. В средней точке сечения находится максимум E_z; система точек — следы силовых линий вектора **E** в данной плоскости. В сдвинутом на $\Lambda/4$ поперечном сечении (рис. 7.5*а* вверху слева) $E_z = 0$. Видны системы взаимно ортогональных электрических и магнитных силовых линий.

Подчеркнем, что характер этой картины можно предвидеть из следующих соображений. Поскольку речь идет о волне класса E, вектор **H** вообще не имеет продольной компоненты: все магнитные силовые линии лежат в поперечных плоскостях. Известно, что они обязательно должны быть замкнутыми кривыми (среда однородна, так что линии **B** и **H** одинаковы). Из соображений симметрии ясно, что центром семейства замкнутых магнитных силовых линий должна быть средняя точка сечения. Заметим, что в этой же точке лежит максимум продольного тока смещения. В направлении z максимумы E_z и $\partial D_z/\partial t$ сдвинуты на $\Lambda/4$ (это легко проверить по формулам (7.58)). Можно сказать, что здесь реализуется одна из типичных структур электромагнитного поля, обсуждавшаяся еще в гл. 1 (см. рис. 1.11).

На рис. 7.5*а* показаны два продольных сечения «мгновенного снимка» волны E_{11}: $x = a/2$ и $y = b/2$. Отмечен отрезок структуры длиной $\Lambda/2$. Видно, что длина волны в волноводе Λ есть пространственный период поля.

При анализе любых структур в классе E рассмотренный тип поля E_{11} служит «элементарной ячейкой». На рис. 7.5*б* в прежнем порядке представлена структура поля E_{32} ($m = 3$, $n = 2$) при $f = 28$ ГГц. Можно сказать, что поперечное сечение разбито на 3×2 клеток, в каждой из которых воспроизводится поле E_{11}. Отметим следующее: во-первых, все плоские границы между ячейками могут быть заменены идеально проводящими плоскостями, это не нарушает структуру поля; во-вторых, направления силовых линий в соседних ячейках согласованы таким образом, что на их границах тангенциальные компоненты **E** и **H** непрерывны; в-третьих, во всех случаях, когда m и n больше единицы, появляются замкнутые электрические силовые линии; семейства замкнутых электрических и магнитных силовых линий как бы сцеплены подобно звеньям цепи.

На рис. 7.6 дается представление об объемной картине силовых линий волны E_{11}. Показаны только электрические силовые линии, связанные с зарядами левой и нижней стенок волновода (a); но даже при этом картина выглядит несколько запутанной. Поэтому отдельно ($б$) дана картина, на которой оставлены лишь «петли» наибольшего размера; здесь хорошо просматривается форма этих неплоских кривых. Рис. 7.6 и рис. 7.5a согласованы, но число линий в первом случае уменьшено.

Перейдем к обсуждению полей класса H, начав с типа поля H_{11}; оно не является простейшим, но более простые структуры, когда

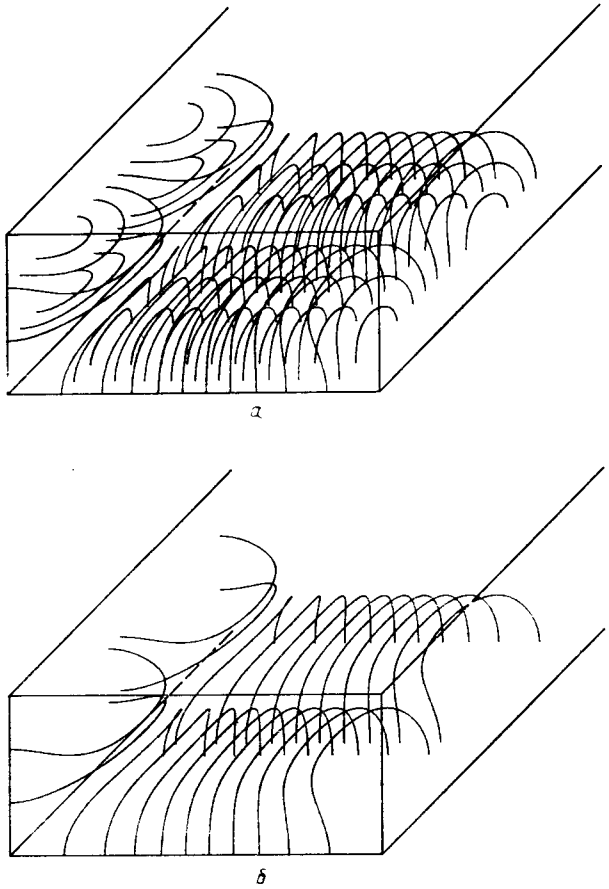


Рис. 7.6. (ЭВМ)

$m = 0$ или $n = 0$, будут рассмотрены отдельно. На рис. 7.7a при $f = 12$ ГГц показаны два поперечных и два продольных сечения структуры поля H_{11} для момента времени $t = 0$ согласно (7.63).

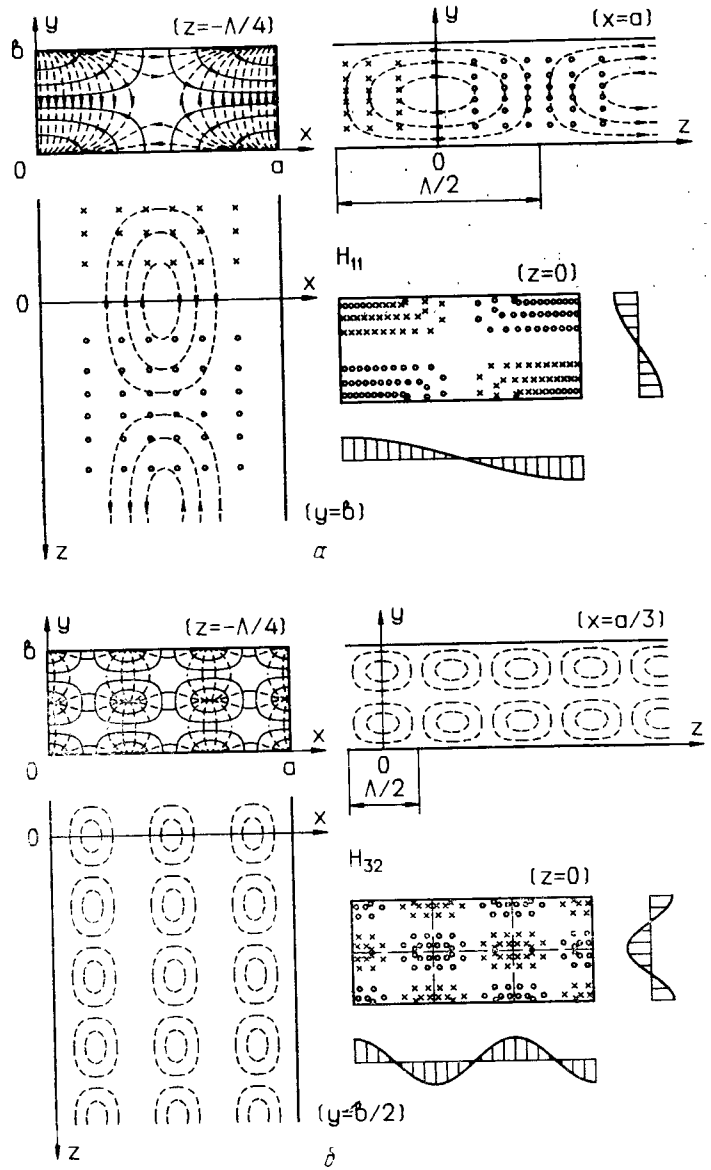
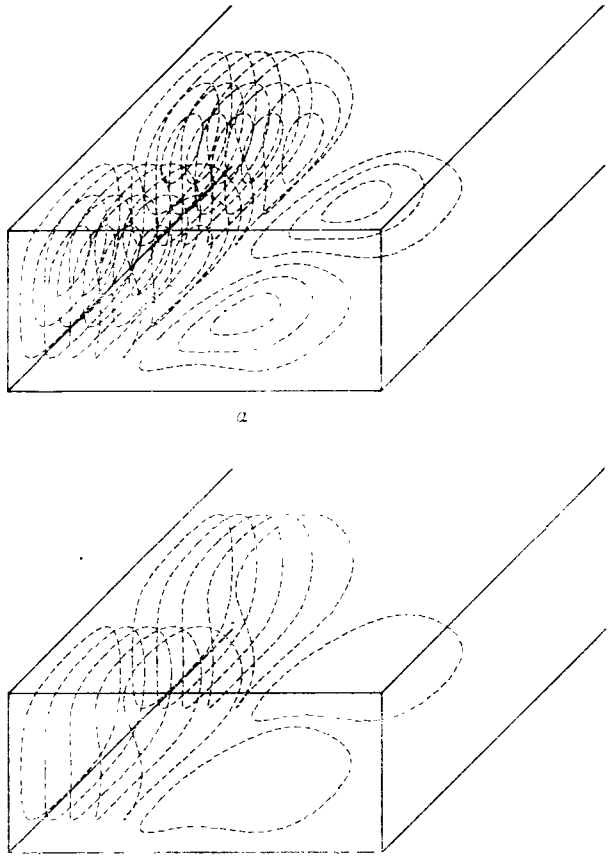


Рис. 7.7. (ЭВМ)

В сечении $z = 0$ (рис. 7.7*а* внизу справа) существует только продольное магнитное поле. При этом распределение $\mathbf{H}_z$ соответствует выражению (7.62) при $m = 1$, $n = 1$, когда $\mathcal{H}_z^{11} = H_0^{11} \cos\frac{\pi x}{a} \cos\frac{\pi y}{b}$. Эпюры этого распределения по осям x и y тут же показаны. В средней точке сечения $H_z = 0$; следы силовых линий вектора $\mathbf{H}$ в данной плоскости показаны точками и кружками. В сдвинутом на $\Lambda/4$ поперечном сечении (рис. 7.7*а* вверху слева) $H_z = 0$; показаны системы взаимно ортогональных электрических и магнитных силовых линий. В продольных сечениях $x = 0$ и $y = b$ видны системы замкнутых магнитных силовых линий; отмечен полупериод структуры.

Структура поля H_{11} играет роль элементарной ячейки при анализе всех более сложных структур, когда $m \geqslant 1$ и $n \geqslant 1$. В качестве примера на рис. 7.7*б* при $f = 28$ ГГц показана структура поля H_{32}.



а

Рис. 7.8. (ЭВМ)

Замечания об особенностях структуры высших E-полей (см. выше) почти без изменений распространяются на высшие H-поля.

На рис. 7.8 (ср. рис. 7.6) дана объемная картина магнитных силовых линий волны H_{11}; построены только линии, семейства которых начинаются у левой и нижней стенок волновода, причем это сделано с большей (*а*) и меньшей (*б*) подробностью. По сравнению с рис. 7.7*а* число линий уменьшено.

Все рассматривавшиеся выше E- и H-волны, как говорят, являются попарно *вырожденными*: разным собственным функциям $\mathcal{E}_z^{mn}$ и $\mathcal{H}_z^{mn}$ при одних и тех же m и n соответствуют равные собственные значения χ_{mn}^2. Поэтому различные по структуре полей волны E_{mn} и H_{mn} имеют одинаковые постоянные распространения Γ_{mn}, а следовательно, равные фазовые скорости. Подчеркнем, что все сказанное имеет строгий смысл по отношению к волноводу с идеально проводящей оболочкой. Вырождение снимается при переходе к реальному металлическому волноводу. Более того, собственные волны оказываются уже *гибридными* (п. 6.1.2): типы поля E_{mn} и H_{mn} связываются в некоторые комбинации с преобладанием одного из них.

Отметим еще одно обстоятельство. С повышением частоты или увеличением поперечных размеров волновода растет отношение Γ/χ. В пределе отношение продольных компонент к поперечным стремится к нулю (см. (7.58) и (7.63)). Волны классов E и H переходят в T-волны.

7.1.3. Невырожденные волны. Основная волна в реальном волноводе. Волнам в классе H с индексом $m = 0$ или $n = 0$ нет соответствия в классе E; поэтому нет указанного выше вырождения. Это еще не значит, что не может быть вырождения иного рода. Например, в случае волновода квадратного поперечного сечения ($a = b$) постоянные распространения волн E_{mn} и E_{nm}, H_{mn} и H_{nm} (а в частности, H_{m0} и H_{0m}) будут одинаковыми.

Рассматриваемому подклассу принадлежит основная волна H_{10}. Взяв в (7.62) $m = 1$, $n = 0$, получаем: $\mathcal{H}_z^{10} = H_0^{10} \cos\frac{\pi x}{a}$. На рис. 7.9*а* при $f = 6$ ГГц тип поля H_{10} отображен точно так же, как ранее отображались другие поля волновода (см. рис. 7.5 и рис. 7.7). Отличительным свойством основной волны является однородность поля в направлении y. При $n = 0$ поле остается однородным по y при любых m; структура H_{10} играет роль элементарной ячейки при анализе структур H_{m0}. На рис. 7.9*б* показано строение типа поля H_{30}. Поля H_{0k} отличаются от H_{k0} поворотом структуры на 90°.

Поскольку основная волна представляет наибольший практический интерес, рассмотрим ее подробнее. На рис. 7.10*а* показана объемная картина силовых линий, дополняющая рис. 7.9*а*. Выпишем формулы, выражающие поле и основные параметры волны H_{10}. Комплексные амплитуды $\dot{\mathbf{E}}_m$ и $\dot{\mathbf{H}}_m$ получаются непосредственно из (7.63). Но ниже будет удобно изменить неопределенную константу,

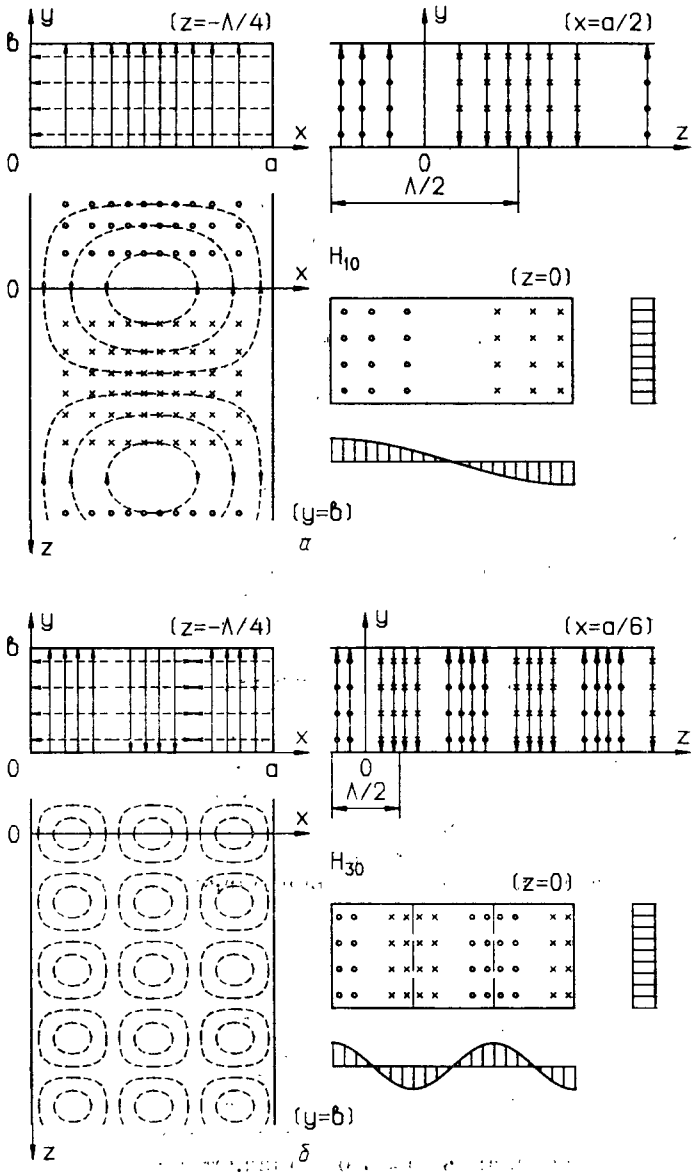


Рис. 7.9. (ЭВМ)

чтобы упростить выражение $\dot{E}_m$. В результате:

$$\dot{\mathbf{E}}_m = \mathbf{y}_0 E_0 \sin\frac{\pi x}{a} e^{-i\Gamma_{10}z},$$
$$\dot{\mathbf{H}}_m = \frac{E_0}{W_{10}^H}\left(-\mathbf{x}_0 \sin\frac{\pi x}{a} + \mathbf{z}_0 \frac{i}{\Gamma_{10}}\frac{\pi}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\right) e^{-i\Gamma_{10}z} \qquad (7.66)$$

$\left(H_0^{10} = i\left(E_0/W_{10}^H\right)\frac{\pi}{a}\frac{1}{\Gamma_{10}}\right)$. Здесь на основании (7.60), (7.61)

$$\Gamma_{10} = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{\varepsilon\mu - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2} \qquad (7.67)$$

и ввиду (7.64)

$$W_{10}^H = \frac{W}{\sqrt{1-(\lambda/2a)^2}} = \frac{120\pi\mu}{\sqrt{\varepsilon\mu - (\lambda_0/2a)^2}}. \qquad (7.68)$$

Здесь λ — длина T-волны при заданной частоте f в среде с параметрами ε, μ (которой заполнен волновод), а λ_0 — длина T-волны в вакууме, обычно называемая *рабочей*. Если ε и μ — комплексные величины, удобнее пользоваться формулами (7.67), (7.68) во втором варианте записи. Впрочем, для случая поглощающей внутренней среды ранее были получены специальные формулы (6.76) и (6.78).

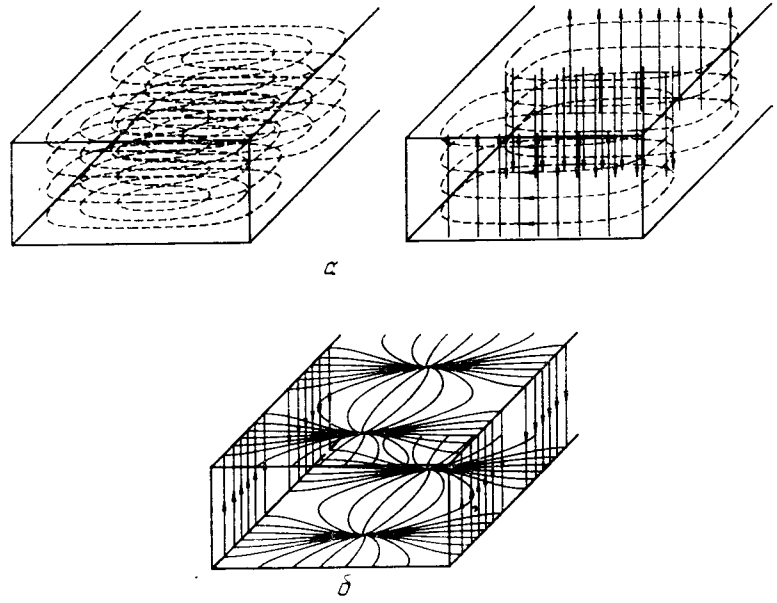


Рис. 7.10. (ЭВМ)

На оболочке волновода возникают поверхностные токи и заряды, которые характеризуются плотностями $\boldsymbol{\eta} = [\mathbf{v}_0, \mathbf{H}]$ и $\xi = \mathbf{v}_0\mathbf{D}$ (1.90), (5.100), где $\mathbf{v}_0$ — орт нормали к оболочке, обращенный внутрь

волновода. На рис. 7.10*б* показаны линии вектора $\boldsymbol{\eta}$ на оболочке волновода, согласованные с картиной поля (рис. 7.10*а*).

Отметим, что невырожденные волны прямоугольного волновода имеют такую же структуру, как H-волны плоского волновода, рассмотренного выше в п. 5.3.2. Роль отражающих плоскостей играют стенки, вдоль которых поле однородно: $x=0$ и $x=a$ для волн H_{m0} (см. рис. 7.4). Наличие двух других стенок не влияет на структуру поля.

Неидеальность оболочки волновода в формулах (7.66), разумеется, не учтена. Но этот фактор практически не влияет на структуру волны H_{10}. Что касается затухания, вносимого металлом реального волновода, то его можно учесть при помощи второй формулы (6.72).

Сначала выразим мощность, передаваемую волной H_{10} при идеальной проводимости оболочки. Пусть также внутренняя среда — идеальный диэлектрик; $f>f_{\text{кр}}^{10}$, так что W_{10}^{H} — величина вещественная. Внося $\dot{\mathbf{E}}_m$ (7.66) в (6.62), получаем

$$\overline{P}=\frac{E_0^2}{2W_{10}^{H}}\int_0^a\int_0^b \sin^2\frac{\pi x}{a}\,dx\,dy=\frac{abE_0^2}{4W_{10}^{H}},\quad f>f_{\text{кр}}^{10}. \tag{7.69}$$

Подчеркнем, что используя эту формулу при наличии потерь, когда она становится приближенной, надо учитывать резкую потерю точности при $f\approx f_{\text{кр}}^{10}$ (см. п. 6.4.2).

Для подстановки в формулу типа (6.69) вычислим погонные потери в проводнике $\overline{p}_{\text{п}}^{\text{м}}$ (6.64):

$$\overline{p}_{\text{п}}^{\text{м}}=\frac{1}{2}R_{\text{пр}}\int_{L_\perp}\dot{\mathbf{H}}_m^2\,dl=R_{\text{пр}}\left[\int_0^b H_{mz}^2\big|_{x=0}dy+\int_0^a\left(H_{mz}^2+H_{mx}^2\right)\big|_{y=0}dx\right]=$$

$$=R_{\text{пр}}\frac{E_0^2}{W^2}\left[\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2 b+\frac{a}{2}\right], \tag{7.70}$$

что легко проверить, используя вторую строчку (7.66). На основании (6.69), (7.69) и (7.70) окончательно получаем:

$$\Gamma_{\text{м}}''=\frac{R_{\text{пр}}}{W}\,\frac{1+\frac{2b}{a}\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}{b\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}},\qquad f>f_{\text{кр}}. \tag{7.71}$$

Это частный вид формулы (6.72).

Приближенная формула (7.71) теряет смысл при $f=f_{\text{кр}}$ ($\lambda=2a$). Несмотря на это, она вполне пригодна для расчета затухания волны H_{10} при частотах, не слишком близких к критической. На рис. 7.11 приведены результаты вычисления $\Gamma_{\text{м}}''$ при изменении материала волновода (*а*) и размеров поперечного сечения (*б*). Как

видно, $\Gamma_{\text{м}}''$ имеет минимум. Относительно слабый рост затухания с повышением частоты вызывается увеличением поверхностного сопротивления $R_{\text{пр}}$ (5.94), которое пропорционально величине $\sqrt{f}$.

Если уменьшать размер b поперечного сечения волновода, то определяемая по формуле (7.67) постоянная распространения Γ_{10},

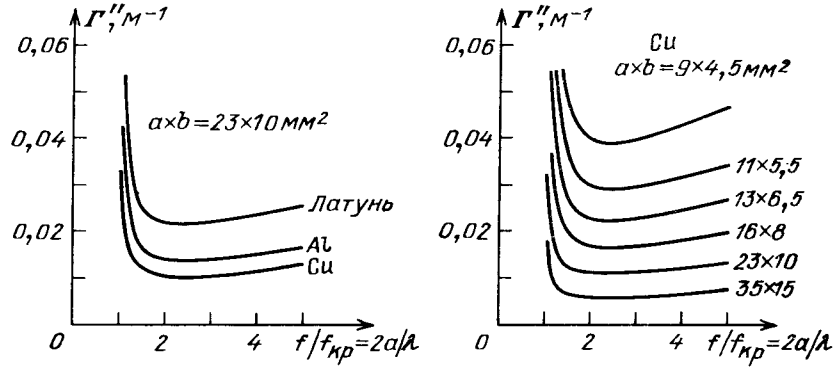


Рис. 7.11

а вместе с ней — фазовая скорость основной волны и соответствующая длина волны Λ, групповая скорость (6.24) и волновое сопротивление W_{10}^{H} (7.68) останутся неизменными. Но, как видно из (7.71), это существенно затронет коэффициент затухания, который при $b\ll a$ почти обратно пропорционален b.

§ 7.2. Другие полые волноводы

7.2.1. Круглый волновод. Решение задачи (А). Рассматривая полый волновод кругового поперечного сечения, называемый *круглым волноводом* (рис. 7.12), мы, как и ранее, можем сразу же записать решение электродинамической задачи, полагая внутреннюю среду однородной, а оболочку — идеально проводящей.

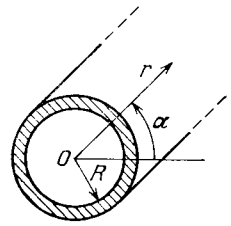


Рис. 7.12

В случае E-волн надо получить собственные функции и отвечающие им собственные значения, порождаемые краевой задачей (6.27) при контуре $L_\perp$ в виде окружности. Они были найдены выше в п. 7.0.3. На основании (7.46) пишем:

$$\mathscr{E}_z^{nm}=E_0^{nm}J_n\left(\frac{B_{nm}}{R}r\right)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}n\alpha=E_0^{nm}J_n\left(\frac{B_{nm}}{R}r\right)\begin{matrix}e^{-in\alpha}\\ e^{in\alpha}\end{matrix},\quad (\chi_{nm})^2=\left(\frac{B_{nm}}{R}\right)^2, \tag{7.72}$$

где B_{nm} — корни уравнения (7.44), сведенные в табл. 7.1. Внося (7.72) в (6.25), получаем комплексные амплитуды полных полей:

E-волны

$$\dot{\mathbf{E}}_m^{nm} = E_0^{nm}\left\{\mathbf{z}_0 J_n(\chi_{nm}^E r)\,\mathscr{A}(n\alpha) - \right.$$

$$\left. - i\frac{\Gamma_{nm}^E}{(\chi_{nm}^E)^2}\left[\mathbf{r}_0\chi_{nm}^E J_n'(\chi_{nm}^E r)\,\mathscr{A}(n\alpha) + \alpha_0\frac{n}{r}J_n(\chi_{nm}^E r)\,\mathscr{A}'(n\alpha)\right]\right\} e^{-i\Gamma_{nm}^E z},$$

$$\dot{\mathbf{H}}_m^{nm} = i\frac{E_0^{nm}}{W_{nm}^E}\frac{\Gamma_{nm}^E}{(\chi_{nm}^E)^2}\left[\mathbf{r}_0\frac{n}{r}J_n(\chi_{nm}^E r)\,\mathscr{A}'(n\alpha) - \right.$$

$$\left. - \alpha_0\chi_{nm}^E J_n'(\chi_{nm}^E r)\,\mathscr{A}(n\alpha)\right] e^{-i\Gamma_{nm}^E z}. \qquad (7.73)$$

Здесь

$$\mathscr{A}(n\alpha) = \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} n\alpha = \begin{matrix}e^{-in\alpha}\\ e^{in\alpha}\end{matrix}, \qquad (7.74)$$

где подразумевается любая линейная комбинация функций, расположенных в столбце. Штрихом в (7.73) обозначены производные функций указанного в скобках аргумента (если, например, $\mathscr{A}(n\alpha) = \cos n\alpha$, то $\mathscr{A}'(n\alpha) = -\sin n\alpha$). Далее, согласно (6.26), (6.20)—(6.22)

$$W_{nm}^E = \frac{\Gamma_{nm}^E}{\omega\varepsilon_0\varepsilon} = W\sqrt{1-\left(\frac{f_{\text{кр}}^{nm}}{f}\right)} = W\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}^{nm}}\right)^2}, \qquad (7.75)$$

$W = 120\pi\sqrt{\mu/\varepsilon}$),

$$\Gamma_{nm}^E = k\sqrt{1-\left(\frac{f_{\text{кр}}^{nm}}{f}\right)^2} = k\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}^{nm}}\right)^2}, \qquad (7.76)$$

где

$$f_{\text{кр}}^{nm} = \frac{c}{2\pi\sqrt{\varepsilon\mu}}\frac{B_{nm}}{R}, \quad \lambda_{\text{кр}}^{nm} = \frac{2\pi R}{B_{nm}}. \qquad (7.77)$$

Рассматривая H-волны, выпишем собственные функции и собственные значения, порождаемые краевой задачей (6.30); они для кругового контура $L_\perp$ были получены в п. 7.0.3. Используя (7.49), получим:

$$\mathscr{H}_z^{nm} = H_0^{nm} J_n\left(\frac{A_{nm}}{R}r\right)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} n\alpha = H_0^{nm} J_n\left(\frac{A_{nm}}{R}r\right)\begin{matrix}e^{-in\alpha}\\ e^{in\alpha}\end{matrix},$$

$$(\chi_{nm}^H)^2 = \left(\frac{A_{nm}}{R}\right)^2, \qquad (7.78)$$

где A_{nm} — корни уравнения (7.47), сведенные в табл. 7.2. Комплексные амплитуды полных полей получаем, подставляя (7.78) в (6.28):

H-волны

$$\dot{\mathbf{E}}_m^{nm} = iH_0^{nm}W_{nm}^H\frac{\Gamma_{nm}^H}{(\chi_{nm}^H)^2}\left[-\mathbf{r}_0\frac{n}{r}J_n(\chi_{nm}^H r)\,\mathscr{A}'(n\alpha) + \right.$$

$$\left. + \alpha_0\chi_{nm}^H J_n'(\chi_{nm}^H r)\,\mathscr{A}(n\alpha)\right] e^{-i\Gamma_{nm}^H z},$$

$$\dot{\mathbf{H}}_m^{nm} = H_0^{nm}\left\{\mathbf{z}_0 J_n(\chi_{nm}^H r)\,\mathscr{A}(n\alpha) - \right.$$

$$\left. - \frac{i\Gamma_{nm}^H}{(\chi_{nm}^H)^2}\left[\mathbf{r}_0\chi_{nm}^H J_n'(\chi_{nm}^H r)\,\mathscr{A}(n\alpha) + \alpha_0\frac{n}{r}J_n(\chi_{nm}^H r)\,\mathscr{A}'(n\alpha)\right]\right\} e^{-i\Gamma_{nm}^H z}. \qquad (7.79)$$

Здесь (см. 6.29)

$$W_{nm}^H = \frac{\omega\mu_0\mu}{\Gamma_{nm}^H} = \frac{W}{\sqrt{1-(f_{\text{кр}}^{nm}/f)^2}} = \frac{W}{\sqrt{1-(\lambda/\lambda_{\text{кр}}^{nm})^2}}. \qquad (7.80)$$

Постоянная распространения Γ_{nm}^H выражается формулой (7.76), в которой

$$f_{\text{кр}}^{nm} = \frac{c}{2\pi\sqrt{\varepsilon\mu}}\frac{A_{nm}}{R}, \quad \lambda_{\text{кр}}^{nm} = \frac{2\pi R}{A_{nm}}. \qquad (7.81)$$

7.2.2. Анализ волновых процессов (А). Как и в случае прямоугольного волновода, мы отмечаем, что круглому волноводу свойственно бесконечное множество свободных электромагнитных полей классов E и H. Чтобы выбрать решение, соответствующее классу E, надо задать порядок n функции Бесселя и номер m корня B_{nm} уравнения (7.44). Выбирая решение из класса H, задают порядок n функции Бесселя и номер m корня A_{nm} уравнения (7.47). Эти решения (ср. п. 7.1.2) дают типы полей (типы волн) E_{nm} или, соответственно, H_{nm}. Наименьшим оказывается корень $A_{11} = 1{,}841\ldots$ Таким образом, волна H_{11} обладает низшей критической частотой

$$\min f_{\text{кр}}^{nm} = \frac{c}{2\pi\sqrt{\varepsilon\mu}}\frac{A_{11}}{R} = \frac{c}{2\pi\sqrt{\varepsilon\mu}}\frac{1.841}{R}. \qquad (7.82)$$

Это *основная волна* круглого волновода.

Прежде чем обсуждать строение полей, обратим внимание на характер их азимутальной зависимости. Неопределенность в $\mathscr{A}(n\alpha)$ (7.74) отражает свободу азимутальной ориентации собственных волн. Если для некоторого типа поля при $n \neq 0$ в одном случае взять $\mathscr{A}(n\alpha) = \cos n\alpha$, а в другом $\mathscr{A}(n\alpha) = \sin n\alpha$, то получатся две структуры, различающиеся только поворотом на угол $90°/n$. Вообще при вещественных A и B имеем: $\mathscr{A}(n\alpha) = A\cos n\alpha + B\sin n\alpha = C\cos(n\alpha - \psi)$, где $C = \sqrt{A^2+B^2}$ и $\psi = \operatorname{arctg}(B/A)$. Это значит, что по сравнению со случаем $B = 0$ отмечается поворот структуры на

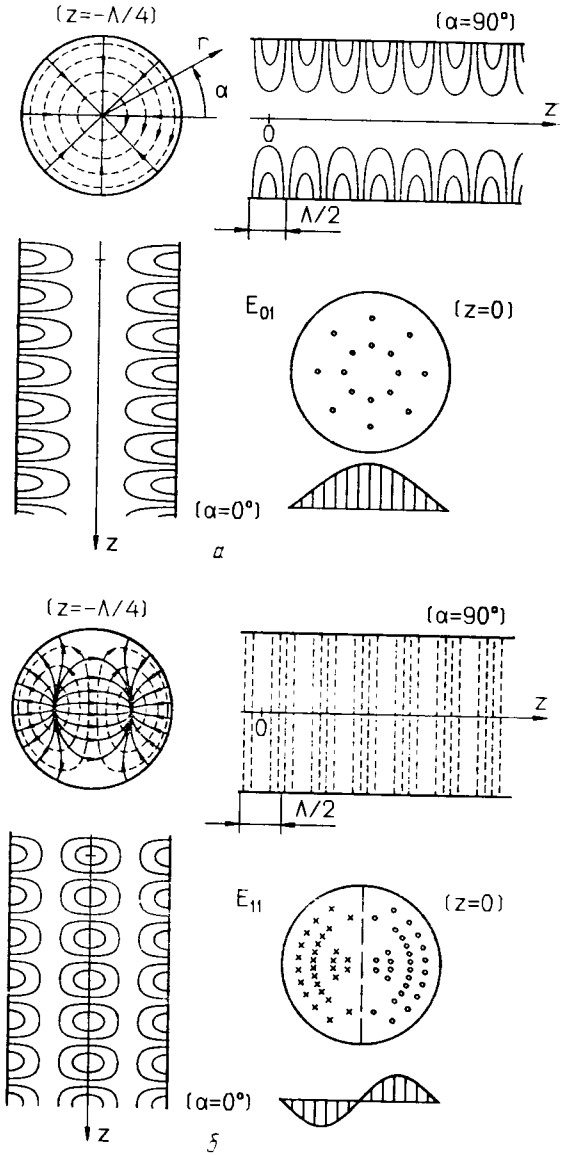


Рис. 7.13. (ЭВМ)

угол ψ/n. Если же взять $B=\pm iA$, то получится структура, вращающаяся относительно оси z, аналог круговой поляризации однородной T-волны (см. п. 4.2.1); при этом $\mathscr{A}(n\alpha)=\exp(\pm in\alpha)$.

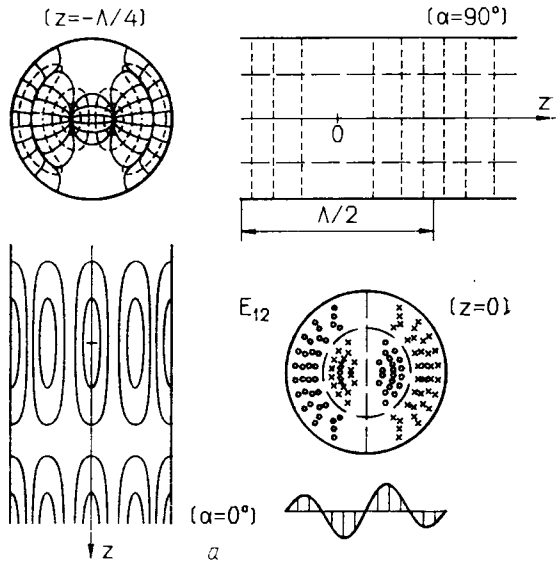
При построении картин силовых линий положим $\mathscr{A}(n\alpha)=\cos n\alpha$. Возьмем $R=8{,}7335$ мм. На рис. 7.13*а* построен «мгновенный снимок» волны E_{01}. Общий тип построения картин силовых линий, например, выбор поперечных и продольных сечений в случае круглого волновода производится подобно предыдущему (см. § 7.1). Отметим, что при $n=0$ множитель $\mathscr{A}(n\alpha)$ превращается в константу и поле оказывается азимутально-однородным (не зависящим от α). В данном случае согласно (7.72) имеем: $\mathscr{E}_z^{01}=E_0^{10}J_0(B_{01}r/R)$, где $B_{01}=2{,}405$ (см. табл. 7.1). Магнитные силовые линии при этом — окружности в плоскости поперечного сечения, поперечное электрическое поле радиально. Построение на рис. 7.13*а* выполнено при $f=39$ ГГц. Для этой же частоты на рис. 7.13*б* представлена структура волны E_{11}. Из (7.72) при $m=1$, $n=1$ следует: $\mathscr{E}_z^{11}=E_0^{11}J_1(B_{11}r/R)\cos\alpha$, где $B_{11}=3{,}832$ (см. табл. 7.1). Поэтому поле при изменении α от 0 до 360° образует период.

Сопоставляя рис. 7.13*а* и рис. 7.5*а*, убеждаемся, что волна E_{01} круглого волновода и волна E_{11} волновода прямоугольного имеют однотипную структуру; что касается волны E_{11} круглого волновода, то она в такой же мере сопоставима с волной E_{21} прямоугольного (достаточно взять две соседние ячейки на рис. 7.5*б*). Но такое соответствие существует только для некоторых видов волн. Легко, например, убедиться, что среди собственных волн прямоугольного волновода нет соответствия волнам E_{0m} круглого при $m\neq 1$.

На рис. 7.14 показаны еще две структуры, относящиеся к классу E круглого волновода; по-прежнему, $f=39$ ГГц. Для волны E_{12} (*а*) $\mathscr{E}_z^{12}=E_0^{12}J_1(B_{12}r/R)\cos\alpha$, где $B_{12}=7{,}016$. Поскольку $m=2$, (берется второй корень уравнения $J_1(x)=0$), в интервале $0<r<R$ имеется значение $r=R'$, соответствующее корню $x=B_{11}=3{,}832$. Поэтому на окружности радиуса $R'=(B_{11}/B_{12})R=0{,}5462R$ удовлетворяется такое же граничное условие, как и на оболочке волновода. Для волны E_{31} (*б*) $\mathscr{E}_z^{31}=E_0^{31}J_3(B_{31}r/R)\cos 3\alpha$, где $B_{31}=6{,}380$. В данном случае при изменении α поле образует три периода. На радиальных линиях, ограничивающих каждый полупериод (60° — сектор в поперечном сечении) удовлетворяется условие $E\tau=0$; для первого сектора это радиусы $\alpha=\pm 30°$.

Анализируя волны круглого волновода E_{nm} при различных m и n, можно, как и в случае прямоугольного волновода, выделить ячейки, ограниченные координатными линиями, но уже не ортогональными прямыми, а окружностями и радиальными прямыми. Ячейки будут иметь равные угловые размеры, но окажутся все одинаковыми только при $m=1$.

Перейдем к обсуждению H-волн. Рис. 7.15 построен аналогично рис. 7.13; показаны структуры поля типа H_{01} (*а*) и поля типа



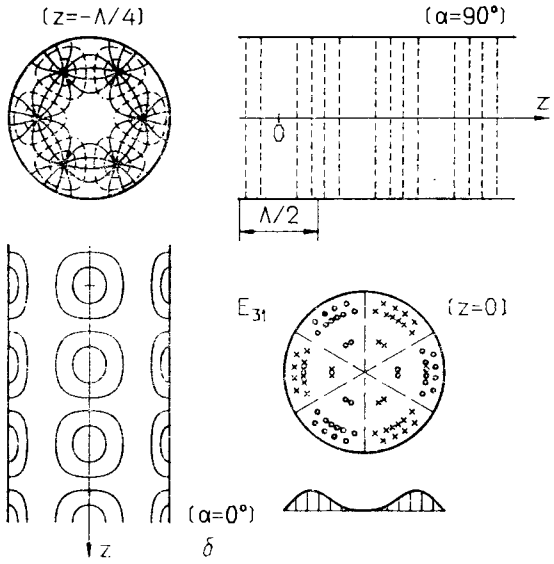
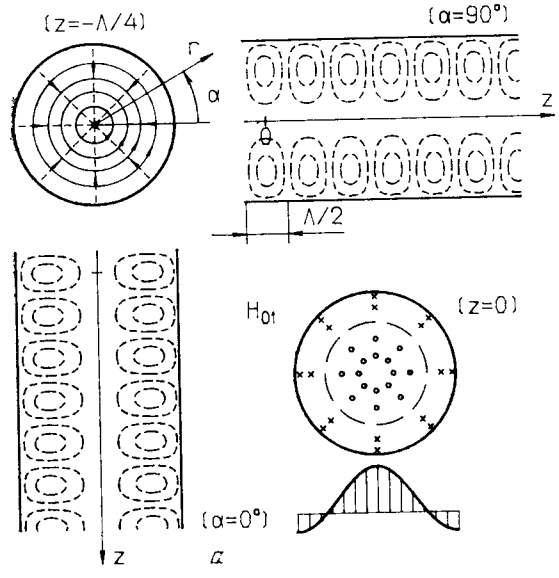


Рис. 7.14. (ЭВМ)



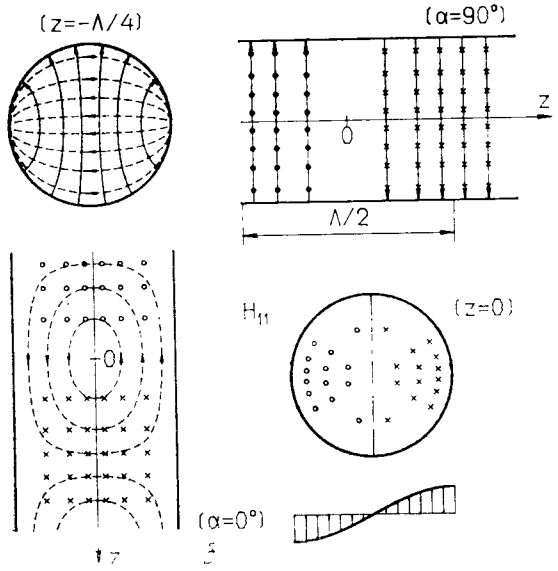


Рис. 7.15. (ЭВМ)

H_{11} (*б*), в первом случае $f = 39$ ГГц, во втором $f = 12$ ГГц. Рассматривая поле H_{01}, заметим, что согласно (7.78) $\mathcal{H}_z^{01} = H_0^{01} J_0 (rA_{01}/R)$, где $A_{01} = 3{,}832$. Наиболее интересным свойством этого типа поля (а также и всех типов H_{0m}) является то, что на оболочке волновода ($r = R$) сохраняется только продольная магнитная компонента H_z, которой соответствует азимутальный ток $\eta = \alpha_0 H_z$. С ростом частоты или радиуса R отношение H_z/H_r уменьшается, в пределе обращаясь в нуль; это видно из формул (7.79). Таким образом, могут быть созданы условия, при которых токи в оболочке очень малы. К обсуждению этого вопроса мы вернемся ниже в п. 7.2.3. Для H_{11} из (7.78) имеем: $\mathcal{H}_z^{11} = H_0^{11} J_{11} (rA_{11}/R) \cos\alpha$, где $A_{11} = 1{,}841$. Уже отмечалось, что волна H_{11} — основная. Интересно, что структура ее поля и поля основной волны H_{10} прямоугольного волновода (рис. 7.9*а*) аналогичны.

На рис. 7.16 показаны структуры полей H_{12} (*а*) и H_{31} (*б*). В этих случаях из (7.78): $\mathcal{H}_z^{12} = H_0^{12} J_1 (rA_{12}/R) \cos\alpha$ ($A_{12} = 5{,}331$) и $\mathcal{H}_z^{31} = H_0^{31} J_3 (rA_{31}/R) \cos 3\alpha$ ($A_{31} = 4{,}201$). При построении взято $f = 39$ ГГц. Замечание о ячейках, ограниченных координатными линиями, сделанное при обсуждении E-полей, разумеется, сохраняет смысл и для H-полей.

Чтобы дать представление о более сложных полях, на рис. 7.17 в поперечном сечении показаны структуры E_{32} и H_{32}.

Волновые процессы в прямоугольном и круглом волноводах имеют ряд общих черт. Это было видно, например, при рассмотрении основной волны. Однако волна H_{11} круглого волновода в отличие от волны H_{10} прямоугольного, как говорят, *поляризационно неустойчива*: небольшие деформации оболочки могут вызывать заметные повороты структуры поля. Это связано с поляризационным вырождением, которое свойственно всем волнам круглого волновода за исключением азимутально-однородных ($n = 0$). Действительно, как уже отмечалось, могут существовать две азимутальные ориентации ($\mathcal{A}(n\alpha) = \cos n\alpha$ и $\mathcal{A}(n\alpha) = \sin n\alpha$); соответствующие поля ортогональны и при наложении порождают любые другие ориентации.

Вернемся к вопросу о волнах, поля которых вращаются относительно оси z. Можно взять, например, две ортогонально ориентированные основные волны H_{11} с одинаковыми амплитудами и фазовым сдвигом $\pm 90°$. Результирующее поле представляет собой уже известную структуру (рис. 7.15*б*), которая вращается относительно продольной оси, причем в центре ($r = 0$) поле оказывается таким же, как при круговой поляризации T-волны: вектор $\mathbf{E}$ вращается без изменения величины. Не следует, однако, думать, что вращающиеся структуры возможны только в круглом волноводе. Взяв волновод квадратного поперечного сечения и рассматривая одновременное существование волн H_{10} и H_{01} при том же амплитудно-фазовом соотношении, легко убедиться, что результирующая структура вращается

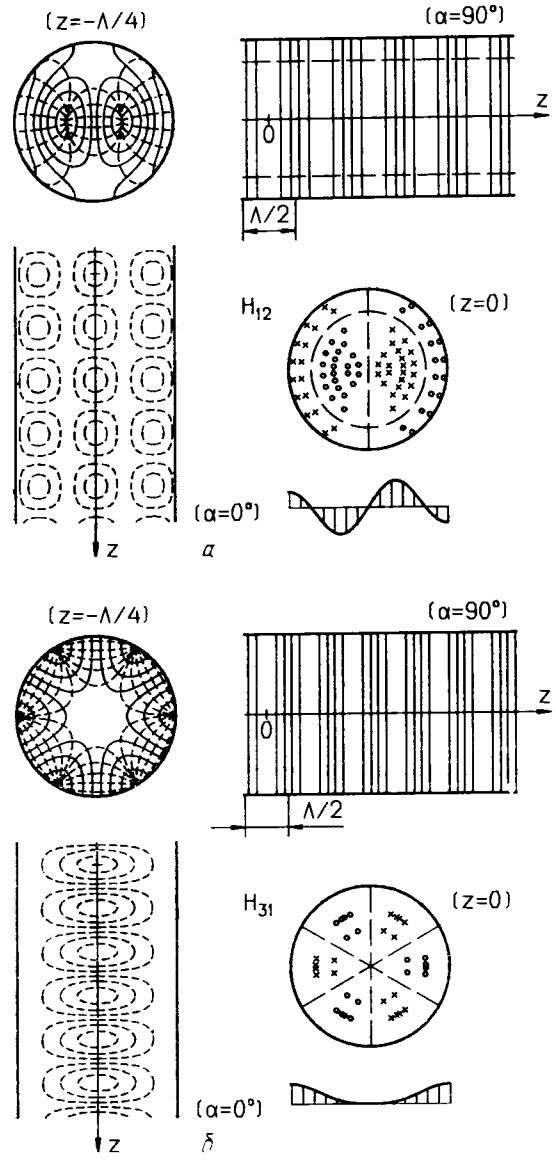


Рис. 7.16. (ЭВМ)

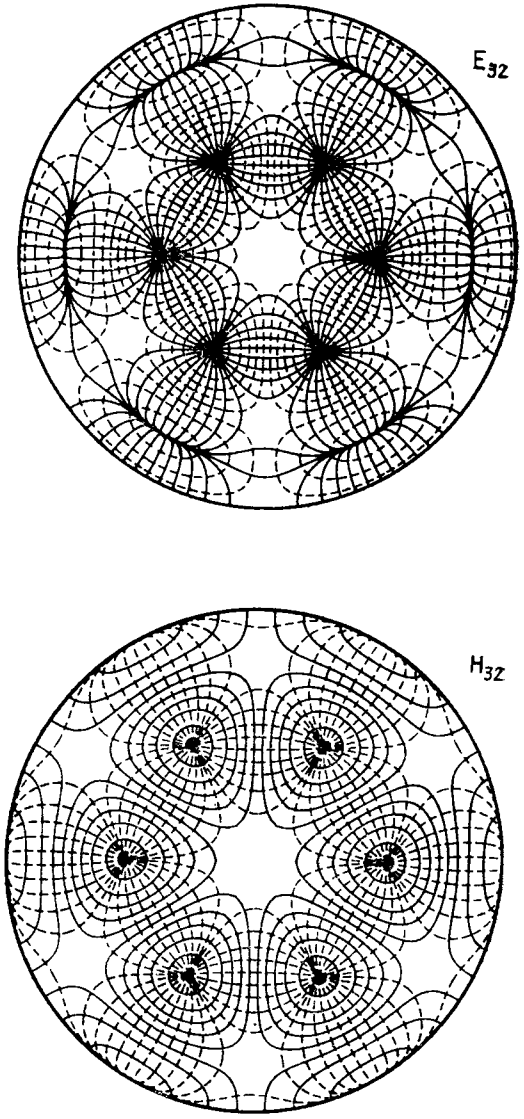


Рис. 7.17. (ЭВМ)

(правда, деформируясь), а в средней точке сохраняется обычная круговая поляризация.

Наконец, отметим, что, как видно из табл. 7.1 и 7.2, $A_{0m} = B_{1m}$ ($m = 1, 2, \ldots$). Это означает, что каждая пара волн E_{1m} и H_{0m} является вырожденной. Например, вырождены волны E_{11} и H_{01}.

7.2.3. Передача энергии. Учет проводимости металла (А). Волны реального металлического круглого волновода, строго говоря, остаются волнами E и H только при $n = 0$. Прочие волны являются гибридными, хотя фактически отличаются от рассматривавшихся выше E- и H-волн незначительно.

Мощность $\bar{P}$, передаваемая основной волной H_{11} фиксированной поляризации, выражается следующим образом:

$$\bar{P} = |H_0^{11}|^2 \frac{\pi W_{11}^H (\Gamma_{11}^H)^2}{4(\chi_{11}^H)^4}(A_{11}^2 - 1) J_1^2(A_{11}) = \\ = E_0^2 \frac{\pi R^2}{W_{11}^H} \frac{A_{11}^2 - 1}{A_{11}^2} J_1^2(A_{11}) \approx 0{,}75 |E_0|^2 \frac{R^2}{W_{11}^H}. \quad (7.83)$$

Здесь H_0^{11} — амплитудный коэффициент из (7.79), а E_0 — амплитуда электрического поля на оси волновода ($r = 0$). Запись имеет смысл при $f > f_{кр}$.

Запишем также коэффициент затухания, обусловленного потерями в металле:

$$\Gamma_м'' = \frac{R_{пр}}{W_{11}^H} \frac{1 + \frac{1}{A_{11}^2}\left(\frac{\Gamma_{11}^H}{\chi_{11}^H}\right)^2}{\left(\frac{\Gamma_{11}^H}{\chi^H}\right)^2 \frac{A_{11}^2 - 1}{A_{11}^2} R} = \frac{R_{пр}\left[\left(\frac{\chi_{11}^H}{k}\right)^2 + \frac{1}{A_{11}^2 - 1}\right]}{W \frac{\Gamma_{11}^H}{k} R} = \\ = \frac{R_{пр}\left[\left(\frac{\lambda}{3{,}413R}\right)^2 + 0{,}418\right]}{WR\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{3{,}413R}\right)^2}}, \quad f > f_{кр}. \quad (7.84)$$

ВЫВОД. Будем исходить из выражения (6.62) и положим в (7.79) $\chi_{nm}^H = A_{11}/R$, $\mathcal{A}(n\alpha) = \cos\alpha$:

$$\bar{P} = \frac{W_{11}^H}{2} \int_{S_\perp} H_{mt}^2 ds = \frac{W_{11}^H}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^R (H_{mr}^2 + H_{m\alpha}^2) r\, dr\, d\alpha = \\ = |H_0^{11}|^2 \frac{W_{11}^H}{2} \left(\frac{\Gamma_{11}^H}{\chi_{11}^H}\right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^R \left\{\left[J_1'(\chi_{11}^H r)\cos\alpha\right]^2 + \left[\frac{J_1(\chi_{11}^H r)\sin\alpha}{\chi_{11}^H r}\right]^2\right\} r\, dr\, d\alpha = \\ = |H_0^{11}|^2 \frac{W_{11}^H}{2} \frac{\pi(\Gamma_{11}^H)^2}{(\chi_{11}^H)^4} \int_0^{A_{11}} \left[J_1'^2(x) + \frac{J_1^2(x)}{x^2}\right] x\, dx.$$

Чтобы получить формулу (7.83) в первом варианте, надо взять последний интеграл при помощи (7.27), учитывая при этом, что $J_1'(A_{11}) = 0$.

Далее, найдем амплитуду вектора $\mathbf{E}$ волны H_{11} при $r = 0$ и $\alpha = 90°$ (при $\mathscr{A}(n\alpha) = \cos\alpha$). Согласно (7.79)

$$\mathcal{E}_m(0,90°) = \mathbf{r}_0 \frac{-iH_0^{11}W_{11}^H\Gamma_{11}^H}{\chi_{11}^H} \frac{J_1(\chi_{11}^H r)}{\chi_{11}^H r}\bigg|_{r\to 0} = \mathbf{r}_0 H_0^{11} \frac{-iW_{11}^H\Gamma_{11}^H}{2\chi_{11}^H} \quad (7.85)$$

(из (7.33) видно, что $J_1(x)/x \to 1/2$ при $x \to 0$).

Обозначая $\mathcal{E}_m(0, 90°) = \mathbf{r}_0 E_0$, приходим к второму варианту записи (7.83). Числовой коэффициент получен с учетом того, что $J_1(A_{11}) = 0{,}58137\ldots$

Для получения формулы (7.84) вычислим погонные потери $\bar{p}_{\text{п}}^{\text{м}}$ (6.64):

$$\bar{p}_{\text{п}}^{\text{м}} = \frac{1}{2} R_{\text{пр}} \int_{L_\perp} H_m^2 dl =$$

$$= \frac{R_{\text{пр}}}{2} |H_0^{11}|^2 \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\Gamma_{11}^H}{\chi_{11}^H A_{11}} \right)^2 J_1^2(A_{11}) \sin^2\alpha + J_1^2(A_{11}) \cos^2\alpha \right] R\, d\alpha =$$

$$= \frac{R_{\text{пр}}}{2} |H_0^{11}|^2 \pi J_1^2(A_{11}) \left[1 + \left(\frac{\Gamma_{11}^H}{\chi_{11}^H A_{11}} \right)^2 \right] R. \quad (7.86)$$

Формула (7.84) получается при подстановке (7.86) и (7.83) в (6.69). ■

Запишем без вывода коэффициент затухания $\Gamma_{\text{м}}''$ для азимутально-однородных волн.

В случае волны E_{01}

$$\Gamma_{\text{м}}'' = \frac{R_{\text{пр}}}{W_{01}^E R} = \frac{R_{\text{пр}}}{WR\sqrt{1 - (\lambda/2{,}612R)^2}}. \quad (7.87)$$

В случае волны H_{01}

$$\Gamma_{\text{м}}'' = \frac{R_{\text{пр}}}{W_{01}^H R} \left(\frac{\chi_{01}^H}{\Gamma_{01}^H} \right)^2 = \frac{R_{\text{пр}}(\lambda/1{,}64R)^2}{WR\sqrt{1 - (\lambda/1{,}64R)^2}}. \quad (7.88)$$

Сопоставление формул (7.71), (7.84) и (7.87) показывает, что общий характер частотной зависимости $\Gamma_{\text{м}}''$ во всех этих случаях одинаков: резкое возрастание затухания вблизи критической частоты (напомним, что при $f = f_{\text{кр}}$ формулы теряют смысл) и медленный рост (как $\sqrt{f}$) при высоких частотах. Иной характер имеет частотная зависимость $\Gamma_{\text{м}}''$ для волны H_{01} (рис. 7.18). С ростом частоты затухание

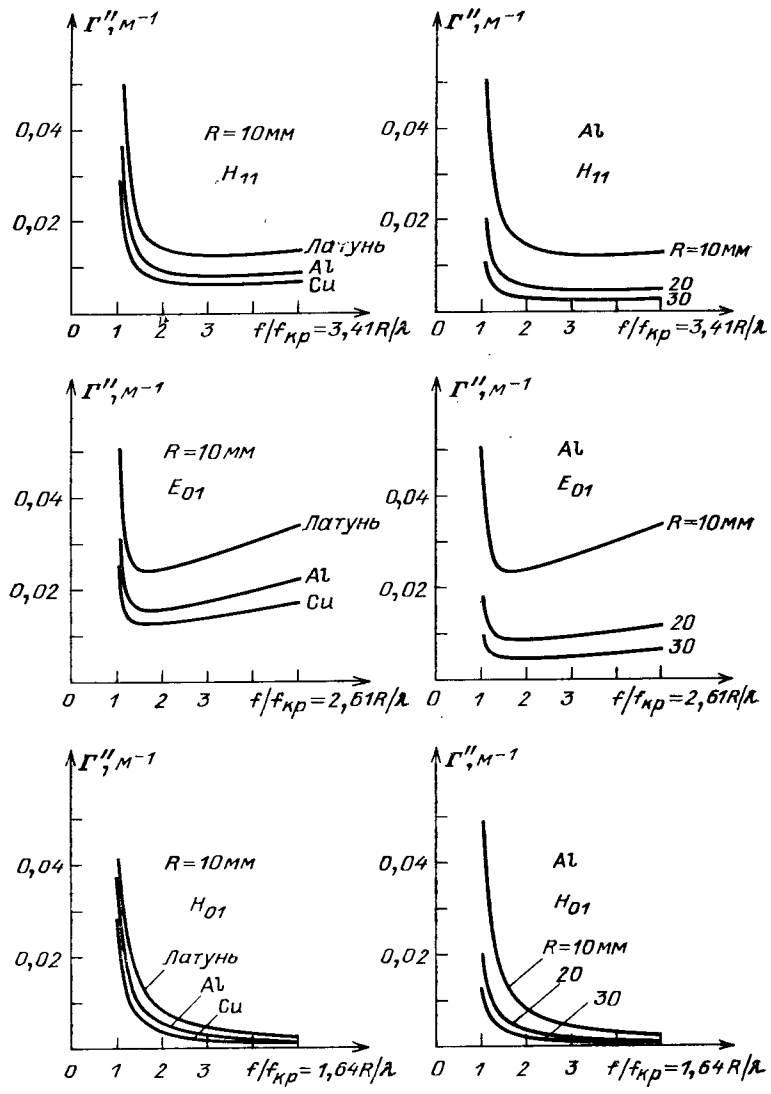


Рис. 7.18

исчезает. Причина этого — в монотонном уменьшении токов в оболочке, о котором уже говорилось выше.

7.2.4. Волноводы некругового поперечного сечения (Б). На рис. 7.19 в поперечных сечениях показано несколько полых волноводов, которые встречаются значительно реже, чем прямоугольный (см. § 7.1) и круглый, рассматривавшийся выше. Для волноводов (*а*, *б*, *в*, *г*) краевые задачи (6.8), (6.9) могут быть решены методом разделения переменных, причем в случаях, когда области (*а*, *б*) образуют элементарные ячейки поперечного сечения круглого волновода, эти задачи уже решены выше. Если угол секториальной области (*а*) не подчинен условию $\alpha_0 = \pi/n$, то порядок функций Бесселя, описывающих собственные функции, уже не будет целым;

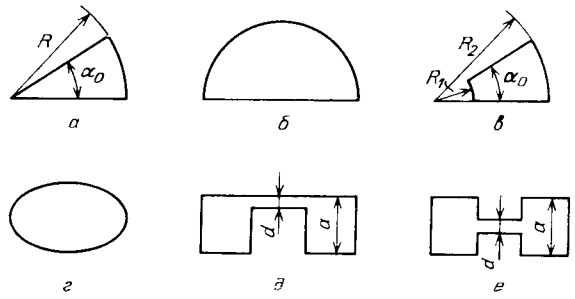


Рис. 7.19

в более сложном случае (*в*) при произвольном соотношении радиусов приходится строить решение с включением функции Неймана (см. п. 7.0.3).

Эллиптический волновод (*г*) отличается от круглого поляризационной устойчивостью; в ряде случаев такие волноводы применяются на практике.

Для эллиптического цилиндра существует особая система координат и построены специальные функции, благодаря чему решения краевых задач (6.8), (6.9) могут быть получены методом разделения переменных в замкнутой форме.

Волноводы с поперечным сечением невыпуклого профиля, называемые П-образным (*д*) и *H*-образным (*е*), по ряду причин находят применение в технике СВЧ. Сужение поперечного сечения приводит к весьма существенному понижению критической частоты (по сравнению с прямоугольным волноводом, получаемым при $d = a$). Это значит, что для заданной частоты такие волноводы оказываются относительно малогабаритными. Следует, однако, иметь в виду, что миниатюризация аппаратуры СВЧ развивается значительно более радикально: широкое распространение получили не П- и *H*-образные волноводы, а полосковые и щелевые структуры, о которых будет говориться ниже в § 7.5.

Заметим, что хотя границы контура поперечного сечения П- и *H*-образного волноводов описываются как координатные линии декартовой системы, решения задач (6.8), (6.9) в замкнутой форме получить не удается. Хотя для каждой прямоугольной подобласти поперечного сечения можно найти частные решения, пользуясь представлениями (7.5), однако наложение условий на границах подобластей возможно лишь при формировании рядов таких решений. В результате возникают бесконечные системы алгебраических уравнений относительно коэффициентов этих рядов. Подобные задачи решаются при помощи ЭВМ (см. гл. 12—13).

Наконец, отметим следующее: основной волной любого полого волновода должна быть обязательно *H*-волна. Средствами вариационного исчисления (см., например, [И. 3]) удается сопоставить собственные значения, отвечающие задачам (6.8) и (6.9). При этом оказывается, что

$$\min \chi^H \leqslant \min \chi^E, \tag{7.89}$$

откуда и следует такой вывод.

§ 7.3. Многосвязные направляющие структуры

7.3.1. Коаксиальная линия (А). В п. 6.1.2 уже отмечалось, что эта линия относится к классу продольно однородных структур, способных направлять *T*-волны (см. рис. 6.2*в*); строго говоря, имелись в виду структуры с идеальными проводниками. Поперечные сечения всех таких структур являются *многосвязными*. Поясним термин на примере *коаксиальной линии* (рис. 7.20*а*); одновременно рассмотрим также *однопроводную линию* (рис. 7.20*б*). Дело в том, что имеются

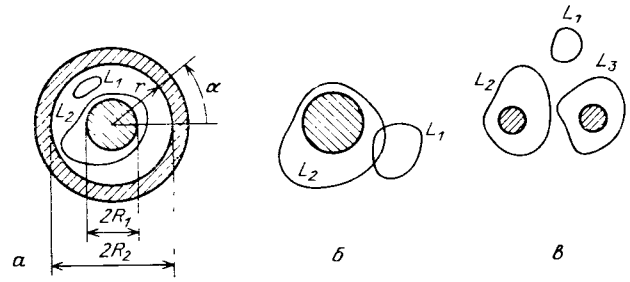


Рис. 7.20

два класса контуров в поперечном сечении — таких, что в одном случае контур может быть стянут к точке (L_1), а в другом это невозможно (L_2). По этому признаку область поперечного сечения называется двусвязной. Очевидно, что в случае любого полого волновода любой контур стягивается к точке, т. е. существует лишь один класс контуров, а например, в поперечном сечении двухпроводной

линии (см. рис. 6.2*в*) можно выделить три принципиально различных класса контуров. Поперечные сечения являются соответственно односвязным и трехсвязным. Итак, лишь многосвязные структуры могут направлять T-волны, что обусловлено существованием ненулевых решений краевых задач (6.32). Можно показать, что число решений этих задач, а следовательно, число T-волн в той или иной структуре на единицу меньше порядка связности. В двусвязной коаксиальной линии возможна одна T-волна.

Рассматривая T-волну коаксиальной линии, можно идти от задач (6.32) и, определив потенциалы φ и ψ, найти векторные функции $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$ по формулам (6.31), а затем выписать выражения комплексных амплитуд полного поля при помощи формул (6.19). Но в данном случае мы уже знаем $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$ (в п. 2.2.5 рассматривался коаксиальный конденсатор, а в п. 2.3.3 — аксиально-симметричные магнитные поля при постоянном токе). Будем исходить из выражения (1.58) (см. п. 2.3.3), так что первоначально запишем:

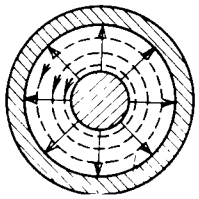


Рис. 7.21

$$\mathfrak{H} = \alpha_0 I_m / 2\pi r.$$

Далее определим $\dot{\mathbf{H}}_m$ как $\dot{\mathbf{H}}_m = \mathfrak{H} e^{-ikz}$ (6.19) и $\dot{\mathbf{E}}_m = \mathbf{W}[\dot{\mathbf{H}}_m, \mathbf{z}_0]$ (6.33). В результате получаем:

$$\dot{\mathbf{E}}_m = \mathbf{r}_0 \frac{\dot{I}_m W}{2\pi r} e^{-ikz}, \quad \dot{\mathbf{H}}_m = \boldsymbol{\alpha}_0 \frac{\dot{I}_m}{2\pi r} e^{-ikz}. \tag{7.90}$$

На рис. 7.2 показана картина силовых линий этой T-волны в поперечном сечении.

Поскольку в каждом поперечном сечении $z = \text{const}$, вектор $\dot{\mathbf{E}}_m$ есть градиент некоторого потенциала (6.31), можно говорить о разности потенциалов между проводниками коаксиальной линии, которая определяется по формуле типа (2.24). Комплексную амплитуду разности потенциалов при некотором z обозначим $\dot{U}_m(z)$. Тогда, используя (7.90), пишем:

$$\dot{U}_m(z) = \int_{R_1}^{R_2} \dot{E}_m(z)\, dr = \frac{\dot{I}_m e^{-ikz} W}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{W \dot{I}_m e^{-ikz}}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Обозначая $\dot{U}_m(z) = \dot{\mathcal{U}}_m e^{-ikz}$, введем понятие волнового сопротивления линии, определяемого по напряжению и току:

$$W_{\text{л}} = \frac{\dot{\mathcal{U}}_m}{\dot{I}_m} = \frac{W}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}. \tag{7.91}$$

Это величина, используемая в так называемой теории длинных линий. В случае вакуума (практически, и воздуха) $W = 120\pi$ (см. п. 4.1.3), так что $W_{\text{л}} = 60 \ln(R_2/R_1)$.

Вычисляя мощность $\bar{P}$, передаваемую основной волной коаксиальной линии, т. е. рассматриваемой нами T-волной, имеем

$$\bar{P} = \frac{W}{2} \int_{S_\perp} H_m^2 ds = \frac{W I_m^2}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr\, d\alpha}{r} = \frac{W I_m^2}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \tag{7.92}$$

или, с учетом (7.91),

$$\bar{P} = {}^1\!/_2 I_m^2 W_{\text{л}}. \tag{7.93}$$

Чтобы определить обычным путем $\Gamma''_{\text{м}}$, надо также найти

$$\bar{p}^{\text{м}}_{\text{п}} = \frac{R_{\text{п}}}{2} \int_{L_\perp} H_m^2 dl = \frac{R_{\text{п}}}{2} \int_0^{2\pi} \left(H_m^2 |_{r=R_1} R_1 + H_m^2 |_{r=R_2} R_2 \right) d\alpha =$$

$$= \frac{R_{\text{п}} I_m^2}{4\pi} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

поэтому согласно (6.69)

$$\Gamma''_{\text{м}} = \frac{R_{\text{пр}}}{W} \frac{R_1 + R_2}{2 R_1 R_2 \ln(R_2/R_1)}. \tag{7.94}$$

Частотная зависимость коэффициента затухания (рис. 7.22) обусловлена поверхностным сопротивлением $R_{\text{пр}}$, которое, как известно, пропорционально $\sqrt{f}$, однако при достаточно низких частотах (см. § 5.4) становится неприменимой теория сильного поверхностного эффекта, приводящая к представлению о поверхностном сопротивлении $R_{\text{пр}}$.

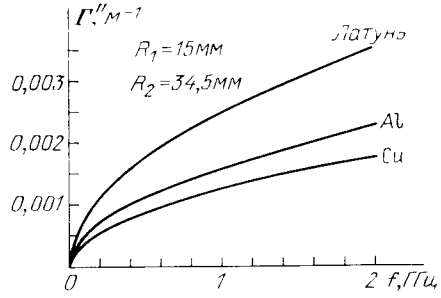


Рис. 7.22

Как и в круглом волноводе, в коаксиальной линии может существовать бесконечное множество полей классов E и H. Как и в прочих случаях (см. § 7.1, 7.2), для исследования этих волн надо определить собственные функции и собственные значения, порождаемые задачами (6.27), (6.30) при данном поперечном сечении. Решения этих задач были найдены выше в п. 7.0.3. Собственные значения получаются как решения уравнений (7.52), (7.55). Полные поля можно представить по той же схеме, что и в случае круглого волновода.

Среди E- и H-волн наименьшей критической частотой обладает волна H_{11}. При относительно малом радиусе внутреннего проводника она по структуре поля напоминает волну H_{11} круглого волновода.

Как правило, для передачи энергии коаксиальной линией используется основная волна T. При этом рабочая частота обычно значительно ниже наименьшей критической частоты множества высших волн, т. е. критической частоты волны H_{11}.

Наконец, заметим, что формулы (7.90) формально справедливы также в случае однопроводной линии. Попробуем вычислить мощность $\bar{p}$, передаваемую такой волной. По сравнению с действиями (7.92) различие состоит в том, что теперь нужно интегрировать не от R_1 до R_2, а от R_1 до ∞. Полагая $R_2 \to \infty$, видим, что интеграл (7.92) расходится: при конечном токе мощность оказывается бесконечной. Это значит, что конечная мощность соответствует исчезающе малому току провода, а следовательно, и нулевому локальному полю. В этом смысле T-волна провода не отличается от однородной T-волны свободного пространства, это также некоторый идеализированный образ: волна физически нереализуема. Рассуждение, однако, сохраняет силу только для идеального проводника. Ниже в п. 7.4.4 будет учтена проводимость реального провода, направляющего T-волну.

7.3.2. Обоснование теории длинных линий (Б). При рассмотрении коаксиальной линии уже отмечалось, что, так как поле потенциальное, то правомерно понятие разности потенциалов между проводниками в любой плоскости поперечного сечения $z = \text{const}$. Пусть A и B — точки на разных проводниках некоторой многосвязной структуры, а L — замкнутый контур, охватывающий один из проводников, причем и точки, и контур лежат в некотором поперечном сечении z. Функции

$$U(z, t) = \int_A^B \mathbf{E}\,\mathbf{dl}, \quad I(z, t) = \oint_L \mathbf{H}\,\mathbf{dl} \tag{7.95}$$

это разность потенциалов (напряжение) и ток. Если векторы поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ подчинены волновому закону, то то же самое можно сказать о напряжении и токе. Второй интеграл справедлив потому, что $E_z = 0$, а следовательно, через поперечное сечение не проходит ток смещения.

Будем рассматривать систему двух проводников, т. е., например, открытую двухпроводную либо коаксиальную линию, пренебрегая потерями. Для этого случая существуют уравнения теории длинных линий, или *телеграфные уравнения*:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -\mathscr{L}' \frac{\partial I}{\partial t}, \quad \frac{\partial I}{\partial z} = -C' \frac{\partial U}{\partial t}, \tag{7.96}$$

где $\mathscr{L}'$ и C' — погонные индуктивность и емкость, которые определяются при отсутствии временной зависимости (электростатика, поле постоянного тока).

Покажем, что уравнения (7.96) непосредственно следуют из уравнений Максвелла.

ВЫВОД. На рис. 7.23 показана продольно-однородная структура из двух проводников в вариантах открытой и экранированной

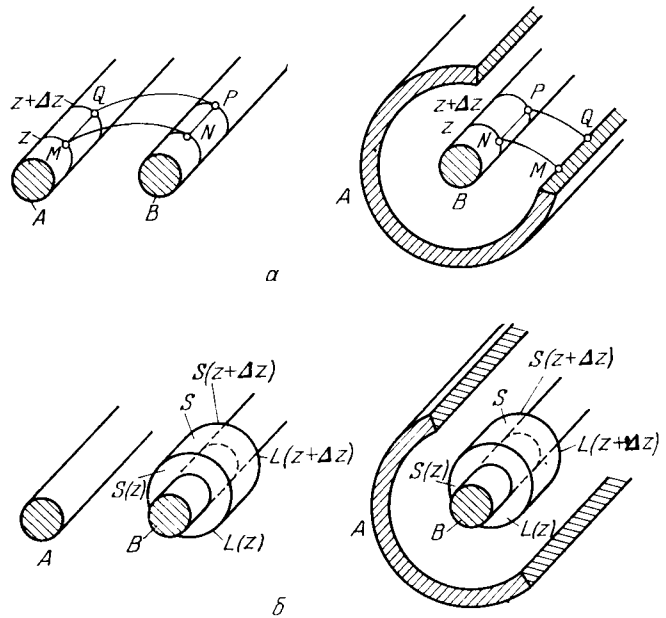


Рис. 7.23

линий. Будем вычислять U (7.95) в двух поперечных плоскостях z и $z+\Delta z$ (рис. 7.23$а$):

$$U(z, t) = \int_M^N \mathbf{E}\,\mathbf{dl}, \quad U(z+\Delta z, t) = \int_Q^P \mathbf{E}\,\mathbf{dl}. \tag{7.97}$$

При этом

$$\oint_{NMQP} \mathbf{E}\,\mathbf{dl} = -\int_M^N \mathbf{E}\,\mathbf{dl} + \int_Q^P \mathbf{E}\,\mathbf{dl}$$

(на участках NP и QM, лежащих на проводниках, $E_\tau = 0$). Это значит, что

$$\oint_{NMQP} \mathbf{E}\,\mathbf{dl} = U(z+\Delta z) - U(z) = \frac{\partial U}{\partial z}\Delta z + \ldots \tag{7.98}$$

Полученное равенство выражает циркуляцию вектора $\mathbf{E}$ слева во втором уравнении Максвелла в интегральной форме (1.54).

Рассмотрим теперь правую часть уравнения (1.54), которая дает:

$$-\frac{d}{dt}\int\limits_S \mathbf{B}\,d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt}\Delta\Phi,$$

где $\Delta\Phi$ — магнитный поток через поверхность S, ограниченную в данном случае контуром $NMQP$. Поскольку $\Delta\Phi = I\mathscr{L}'\Delta z + \ldots$, где $\mathscr{L}' = d\mathscr{L}/dz$ — погонная индуктивность, то

$$-\frac{d}{dt}\int\limits_S \mathbf{B}\,d\mathbf{s} = -\mathscr{L}'\frac{\partial I}{\partial t}\Delta z + \ldots \qquad (7.99)$$

Приравнивая левую (7.98) и правую (7.99) части второго уравнения Максвелла и переходя к пределу при $\Delta z \to 0$, приходим к первому из телеграфных уравнений (7.96). Чтобы вывести второе из уравнений (7.96), рассмотрим построение на рис. 7.23*б* (в двух вариантах). Имеется в виду цилиндр, основания которого лежат на поперечных сечениях z и $z + \Delta z$. В силу первого уравнения Максвелла (1.53) для этих оснований:

$$\oint\limits_{L(z)} \mathbf{H}\,d\mathbf{l} = I(z, t), \qquad \oint\limits_{L(z+\Delta z)} \mathbf{H}\,d\mathbf{l} = I(z+\Delta z, t) \qquad (7.100)$$

(поток вектора $\mathbf{D}$ равен нулю, так как $D_z = 0$); здесь $L(z)$ есть контур области основания цилиндра $S(z)$, аналогичный смысл имеет $L(z+\Delta z)$. Поскольку

$$\oint\limits_{L(z)} \mathbf{H}\,d\mathbf{l} - \oint\limits_{L(z+\Delta z)} \mathbf{H}\,d\mathbf{l} = \oint\limits_{L_{\text{бок}}} \mathbf{H}\,d\mathbf{l},$$

где $L_{\text{бок}}$ — контур боковой поверхности цилиндра

$$\oint\limits_{L_{\text{бок}}} \mathbf{H}\,d\mathbf{l} = I(z) - I(z+\Delta z) = -\frac{\partial I}{\partial z}\Delta z + \ldots \qquad (7.101)$$

Это левая часть первого уравнения Максвелла (1.53).

Рассматривая правую часть этого уравнения, запишем

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{S_{\text{бок}}} \mathbf{D}\,d\mathbf{s} = \frac{d}{dt}\Delta q,$$

где Δq — заряд проводника на участке Δz; ток проводимости в данном случае отсутствует. Очевидно, что $\Delta q = UC'\Delta z + \ldots$, где $C' = dC/dz$ — погонная емкость. Поэтому

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{S_{\text{бок}}} \mathbf{D}\,d\mathbf{s} = C'\frac{\partial U}{\partial t}\Delta z + \ldots \qquad (7.102)$$

Остается приравнять выражения (7.101) и (7.102) в соответствии с первым уравнением Максвелла. Переходя при этом к пределу при $\Delta z \to 0$, получаем второе из уравнений (7.96).

В случае гармонического во времени процесса производится переход к комплексным представлениям напряжения и тока и телеграфные уравнения записываются в комплексных амплитудах. Пусть в линии вдоль оси z распространяется T-волна. При этом $\dot{U} = \dot{U}_m \exp(i\omega t - ikz)$ и $\dot{I} = \dot{I}_m \exp(i\omega t - ikz)$. Внося это в (7.96), получаем:

$$k\dot{U}_m = \omega\mathscr{L}'\dot{I}_m, \qquad k\dot{I}_m = \omega C'\dot{U}_m. \qquad (7.103)$$

Отсюда нетрудно найти k и $W_{\text{л}}$

$$k = \frac{\omega}{v} = \omega\sqrt{\mathscr{L}'C'}, \qquad v = \frac{1}{\sqrt{\mathscr{L}'C'}}; \qquad (7.104)$$

$$W_{\text{л}} = \dot{U}_m/\dot{I}_m = \sqrt{\mathscr{L}'/C'}, \qquad (7.105)$$

причем волновое сопротивление $W_{\text{л}}$ можно определить, зная поле, при помощи интегральных представлений (7.95) напряжения и тока. На основании (7.104), (7.105) легко выразить погонные реактивности:

$$\mathscr{L}' = W_{\text{л}}/v, \qquad C' = 1/(W_{\text{л}}v). \qquad (7.106)$$

В заключение заметим, что при выводе телеграфных уравнений фигурирует T-волна, называемая противофазной: токи проводников, как и их заряды, сдвинуты по фазе на 180°. В случае двухпроводной линии, которая является трехсвязной (см. выше п. 7.3.1), следует также учитывать существование решения в виде синфазной T-волны, которая подобна волне однопроводной линии.

§ 7.4. Диэлектрические волноводы и родственные структуры

7.4.1. Типы структур с диэлектрическими элементами (А). На рис. 7.24 показаны поперечные сечения ряда продольно-однородных структур с неоднородными средами, начиная с плоского слоя диэлектрика (*а*), который рассматривался еще в п. 5.3.4 (см. также п. 6.2.3) в качестве идеализированного диэлектрического волновода. Реальны прямоугольный (*б*) и круглый (*в*) диэлектрические волноводы. Однопроводная линия (*г*) показана здесь потому, что при конечной проводимости она анализируется по той же схеме, что и круглый диэлектрический волновод. Круглый диэлектрический волновод может быть двухслойным (*д*); применяются и другие волноводы из нескольких диэлектрических элементов (*е*). Используется однопроводная линия с диэлектрической оболочкой (*ж*). Следующие структуры (*з*, *и*, *к*) являются экранированными; это круглый и прямоугольный волновод с диэлектрическими включениями.

Некоторые диэлектрические волноводы находят широкое применение в оптическом диапазоне частот. Уже отмечалось (см. п. 5.3.4), что диэлектрический слой (*а*) есть модель используемых в интегральной оптике пленочных волноводов; в оптике применяются также круглые волноводы (*в*, *д*), прямоугольный волновод на диэлек-

трическом слое ($е$), называемый в этом случае полосковым оптическим волноводом, и ряд других.

Если граница раздела сред рассматриваемой структуры описывается как цилиндрическая координатная поверхность $r = \text{const}$ ($в$, $г$, $д$, $ж$, $з$), то, как и в случае полого круглого волновода (см. § 7.2), в основе анализа лежит использование решений скалярного

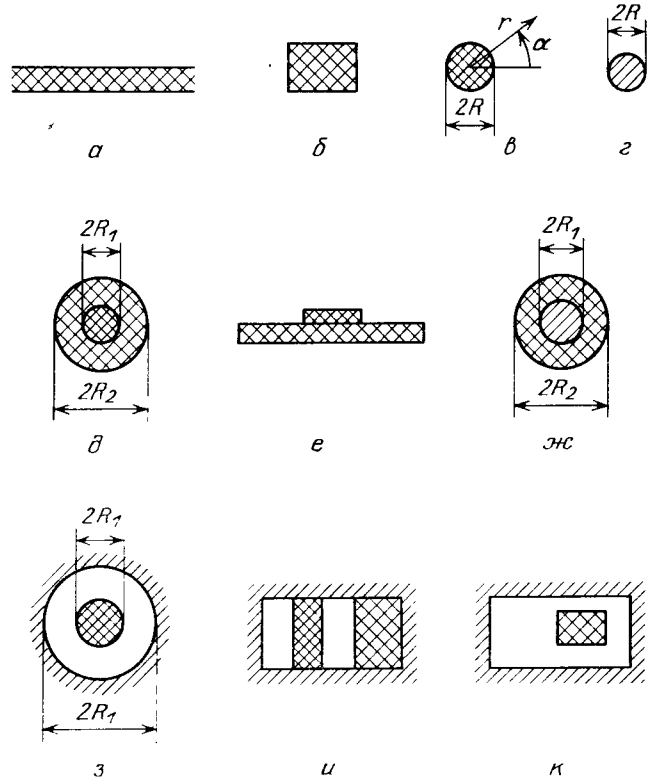


Рис. 7.24

уравнения Гельмгольца в цилиндрических координатах (см. п. 7.0.3), получаемых методом разделения переменных. Решение электродинамической задачи выражается в замкнутой форме; некоторые трудности могут быть связаны лишь с нахождением поперечных волновых чисел как корней трансцендентных уравнений. Легко выписывается решение задачи о прямоугольном волноводе со слоистым диэлектрическим заполнением ($и$). Что касается структур с прямоугольными подобластями ($б$, $е$, $к$), то здесь замкнутые выражения решений отсутствуют; необходимо применение методов алгоритмизации, ориентированных на ЭВМ (гл. 12—13).

7.4.2. Круглый диэлектрический волновод (А). Этой структуре свойственны гибридные волны, а также волны классов E и H. Таким образом, в общем случае для представления поля надо выразить продольную электрическую и магнитную компоненты. В области диэлектрического стержня $0 < r < R$ (рис. 7.24$в$) функции $\mathscr{E}_z$ и $\mathscr{H}_z$ представим в виде:

$$\begin{aligned} \mathscr{E}_z &= AJ_n(\chi_1 r)\cos n\alpha, \\ \mathscr{H}_z &= BJ_n(\chi_1 r)\cos(n\alpha - \psi), \\ \chi_1^2 &+ \Gamma^2 = k_1^2. \end{aligned} \tag{7.107}$$

Аналогичные выражения $\mathscr{E}_z$ и $\mathscr{H}_z$ были получены для круглого полого волновода (см. § 7.2) в классах полей E и H. В гибридной волне такие поля связаны, причем до решения задачи неизвестен ориентационный угол ψ. В (7.107) индексом 1 обозначены величины, относящиеся к области стержня; при этом $k_1 = (\omega/c)\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$.

Вне стержня при $r > R$ (рис. 7.23$в$):

$$\begin{aligned} \mathscr{E}_z &= CH_n^{(2)}(\chi_2 r)\cos n\alpha, \\ \mathscr{H}_z &= DH_n^{(2)}(\chi_2 r)\cos(n\alpha - \psi), \\ \chi_2^2 &+ \Gamma^2 = k_2^2. \end{aligned} \tag{7.108}$$

Вместо функций Бесселя здесь фигурируют функции Ханкеля второго рода (см. п. 7.0.2). Это означает выбор решения уравнения (7.39) в форме второй строчки (7.15) с сохранением того члена, который с ростом r убывает быстрее, чем $1/\sqrt{r}$, если $\chi_2 = -i|\chi_2|$; чтобы убедиться в этом, достаточно привлечь асимптотическое представление (7.32). В (7.108) индексом 2 обозначены величины, относящиеся к внешнему пространству $r > R$; в частности, $k_2 = (\omega/c)\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}$ (если внешняя среда — воздух, то практически, $\varepsilon_2 = 1$, $\mu_2 = 1$).

При решении электродинамической задачи о диэлектрическом волноводе сначала надо выразить полное электромагнитное поле в комплексных амплитудах: $\dot{\mathbf{E}}_m = \dot{\mathbf{E}}_{mz} + \dot{\mathbf{E}}_{mt}$, $\dot{\mathbf{H}}_m = \dot{\mathbf{H}}_{mz} + \dot{\mathbf{H}}_{mt}$ во внутренней и внешней областях. Для получения поперечного поля $\dot{\mathbf{E}}_{mt}$, $\dot{\mathbf{H}}_{mt}$ продольные компоненты $\dot{\mathbf{E}}_{mz} = \mathbf{z}_0\mathscr{E}_z e^{-i\Gamma z}$ и $\dot{\mathbf{H}}_{mz} = \mathbf{z}_0\mathscr{H}_z e^{-i\Gamma z}$, следующие из (7.107), (7.108), вносятся в (6.16). При наложении условий непрерывности тангенциальных компонент векторов напряженностей поля на поверхности стержня $r = R$ устраняются неопределенности в представлениях полей и формулируется уравнение относительно поперечных волновых чисел. Все эти операции приведены ниже в п. 7.4.3, а здесь опускаются.

В общем случае указанное уравнение имеет вид

гибридные волны

$$n^2\frac{\Gamma^2k_2^2}{\chi_1^2\chi_2^2}\left(\frac{k_1^2}{k_2^2}-1\right)^2=\left[\frac{\mu_1}{\mu_2}\chi_2R\frac{J_n'(\chi_1R)}{J_n(\chi_1R)}-\chi_1R\frac{H_n^{(2)\prime}(\chi_2R)}{H_n^{(2)}(\chi_2R)}\right]\times$$

$$\times\left[\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\chi_2R\frac{J_n'(\chi_1R)}{J_n(\chi_1R)}-\chi_1R\frac{H_n^{(2)\prime}(\chi_2R)}{H_n^{(2)}(\chi_2R)}\right], \quad (7.109)$$

причем связь между поперечными числами в обеих средах

$$\chi_1^2-\chi_2^2=k_1^2-k_2^2, \quad (7.110)$$

которая следует из (7.107), (7.108), позволяет исключить из (7.109) χ_1 или χ_2.

Если $n=0$, т. е. поле является азимутально-однородным, то левая часть в (7.109) исчезает и уравнение распадается на два более простых: поочередно приравниваются нулю выражения в квадратных скобках. Как показано ниже в п. 7.4.3, азимутально-однородные волны не являются гибридными, а относятся к классам E и H, так что уравнения, получаемые из (7.109) при $n=0$, соответствуют этим классам. Ниже они записаны после небольших преобразований:

E-волны

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\chi_1R\frac{J_0(\chi_1R)}{J_1(\chi_1R)}=\chi_2R\frac{H_0^{(2)}(\chi_2R)}{H_1^{(2)}(\chi_2R)}; \quad (7.111)$$

H-волны

$$\frac{\mu_2}{\mu_1}\chi_1R\frac{J_0(\chi_1R)}{J_1(\chi_1R)}=\chi_2R\frac{H_0^{(2)}(\chi_2R)}{H_1^{(2)}(\chi_2R)} \quad (7.112)$$

(в частности, учтено первое из соотношений (7.23)).

Анализ полученных уравнений приводит к выводу, что общий характер волн, направляемых диэлектрическим стержнем, близок к тому, что уже известно о волнах плоского диэлектрического волновода (см. п. 5.3.4). Рассмотрим E-волны. Выше отмечалось, что для направляемых волн $\chi_2=-i\beta$ $(\beta>0)$; при достаточно большом β волна имеет резко поверхностный характер. Так как $\chi_2^2<0$ и $\chi_1^2>0$, то (см. (7.107), (7.108))

$$\Gamma^2>k_2^2 \qquad \Gamma^2<k_1^2. \quad (7.113)$$

Волны, таким образом, являются быстрыми по отношению к внутренней и медленными — по отношению к внешней среде, ср. (5.84).

Характер распределения корней уравнения (7.111) или (7.112) легко понять, проанализировав левую и правую части, как функции от $x=\chi_1R$. Левая часть $F_{\text{л}}^{E,H}(x)$ (индексы соответствуют случаям волн E и H) в обоих вариантах построена на рис. 7.25; взято $\varepsilon_1=9{,}6$ и $\mu_1=1$ при $\varepsilon_2=1$ и $\mu_2=1$ (диэлектрический стержень в воздухе). Правая часть $F_{\text{п}}^{E,H}(x)$ при $\chi_2=-i\beta$ $(\beta>0)$ отрицательна, а значит, в рассмотрение входят только отрицательные участки ветвей $F_{\text{л}}^{E,H}(x)$. Правая часть $F_{\text{п}}^{E,H}(x)$ имеет одно и то же значение в вариантах E и H. Поскольку ввиду (7.110) $\chi_2R=\sqrt{x^2-(\omega/c)^2R^2(\varepsilon_1\mu_1-\varepsilon_2\mu_2)}$, то $F_{\text{п}}^{E,H}(x)$ зависит от частоты. На рис. 7.25 эта функция построена для $R=7$ мм при нескольких частотах. На самой низкой из них корней нет, но с повышением частоты сначала появляется один корень, затем два и три. Как видно, все они лежат между нулями и полюсами функции $F_{\text{л}}^{E,H}(x)$, т. е. между нулями ее числителя и знаменателя, а это корни B_{0m} и B_{1m} уравнений $J_0(x)=0$ и $J_1(x)=0$ соответственно.

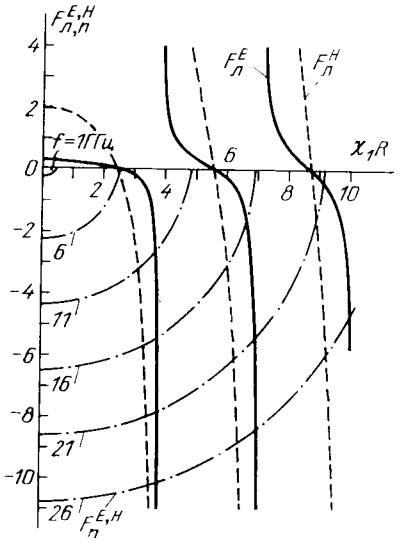


Рис. 7.25

При критической частоте $f=f_{\text{кр}}$, для которой $\chi_2=0$, вне стержня поле утрачивает продольную электрическую (магнитную) компоненту и становится T-волной; при этом $\Gamma=k_2$. Как и в случае плоского диэлектрического волновода (см. п. 5.3.4), это «разрушение» направляемой волны: энергия распространяется во внешнем пространстве. Из (7.111) и (7.112) следует, что при $\chi_2=0$ обращается в нуль и $J_0(\chi_1R)$, т. е. $\chi_1R=B_{0m}$. Привлекая (7.110), получаем:

$$\omega_{\text{кр}}^{(m)}=\frac{B_{0m}}{R}\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1-\varepsilon_2\mu_2}} \quad (7.114)$$

(ср. (5.101)).

Разумеется, корни трансцендентных уравнений (7.111), (7.112) и (7.109) находят не графически, а путем численного решения на ЭВМ. Для прежнего диэлектрического стержня ($\varepsilon_1=9{,}6$; $R=7$ мм) в воздухе таким путем найдены частотные зависимости, представленные на рис. 7.26 и рис. 7.27. По оси ординат отложена величина $k_2/\Gamma=\Lambda/\lambda_2=v_\phi/v_2$ $(v_2=c)$. Отношение фазовой скорости v_ϕ направляемой волны к скорости $v_2=c$ волны T во внешней среде стремится к единице при отсечке. На рис. 7.26 отмечены критические частоты типов волн E_{0m} и H_{0m}, отвечающие формуле (7.114).

Кривые на рис. 7.27 относятся к гибридным волнам, анализируемым при помощи уравнения (7.109). Существенно, что основная волна рассматриваемого волновода является гибридной. Она обозна-

чается символом HE_{11} и имеет критическую частоту, равную нулю. Минимальная критическая частота в классе всех остальных волн (E, H и гибридных) определяется по формуле (7.114) при $m=1$:

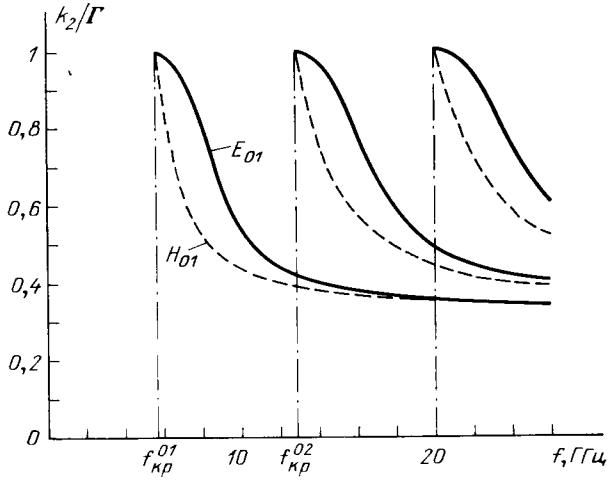


Рис. 7.26

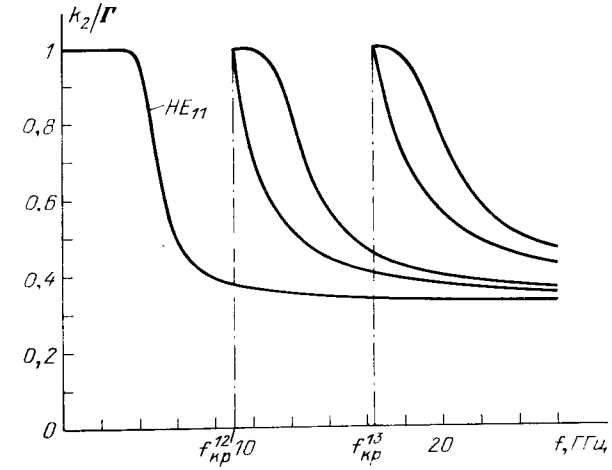


Рис. 7.27

это критическая частота типов волн E_{01} и H_{01}. Таким образом, в полосе частот

$$0<f<\frac{B_{01}}{2\pi R}\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1-\varepsilon_2\mu_2}} \qquad (7.115)$$

может существовать лишь основная волна HE_{11}. При фиксированном R полоса такого одноволнового (говорят еще одномодового) режима тем шире, чем ближе коэффициенты преломления обеих сред $n_1=\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$ и $n_2=\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}$ (ср. п. 5.3.4).

В оптических системах нередко используют двухслойные диэлектрические волноводы (см. рис. 7.24*д*). Достаточно толстая внешняя диэлектрическая оболочка оказывает на внутренний стержень почти такое же действие, как безграничная среда с теми же проницаемостями ε и μ. Полосу одномодового режима при этом можно оценивать по формуле (7.115).

7.4.3. Вывод основных соотношений (Б). Приведем вывод выражений комплексных амплитуд полного поля круглого диэлектрического волновода и уравнения (7.109).

Отправляясь от формул (7.107) и (7.108), потребуем непрерывности продольных компонент векторов **E** и **H** на поверхности стержня $r=R$. Это дает:

$$\frac{C}{A}=\frac{D}{B}=\frac{J_n(\chi_1 R)}{H_n^{(2)}(\chi_2 R)}. \qquad (7.116)$$

Чтобы получить поперечные компоненты векторов поля внутри и вне стержня, внесем в (6.16) $\dot{\mathbf{E}}_{mz}=\mathbf{z}_0\mathscr{E}_z\exp(-i\Gamma z)$ и $\dot{\mathbf{H}}_{mz}=\mathbf{z}_0\mathscr{H}_z\exp(-i\Gamma z)$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{E}}_{mt}&=\frac{-i}{\chi_1^2}\{A\Gamma\nabla_\perp J_n(\chi_1 r)\cos n\alpha+\\&\quad+B\omega\mu_0\mu_1[\nabla_\perp J_n(\chi_1 r)\cos(n\alpha-\psi),\mathbf{z}_0]\}e^{-i\Gamma z},\\ \dot{\mathbf{H}}_{mt}&=\frac{-i}{\chi_1^2}\{A\omega\varepsilon_0\varepsilon_1[\mathbf{z}_0,\nabla_\perp J_n(\chi_1 r)\cos n\alpha]+\\&\quad+B\Gamma\nabla_\perp J_n(\chi_1 r)\cos(n\alpha-\psi)\}e^{-i\Gamma z},\\&\quad r<R\end{aligned} \qquad (7.117)$$

и затем с учетом (7.116):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{E}}_{mt}&=\frac{-iJ_n(\chi_1 R)}{\chi_2^2 H_n^{(2)}(\chi_2 R)}\{A\Gamma\nabla_\perp H_n^{(2)}(\chi_2 r)\cos n\alpha+\\&\quad+B\omega\mu_0\mu_2[\nabla_\perp H_n^{(2)}(\chi_2 r)\cos(n\alpha-\psi),\mathbf{z}_0]\}e^{-i\Gamma z},\\ \dot{\mathbf{H}}_{mt}&=\frac{-iJ_n(\chi_1 R)}{\chi_2^2 H_n^{(2)}(\chi_2 R)}\{A\omega\varepsilon_0\varepsilon_2[\mathbf{z}_0,\nabla_\perp H_n^{(2)}(\chi_2 r)\cos n\alpha]+\\&\quad+B\Gamma\nabla_\perp H_n^{(2)}(\chi_2 r)\cos(n\alpha-\psi)\}e^{-i\Gamma z},\\&\quad r>R.\end{aligned} \qquad (7.118)$$

Здесь согласно (2.3) и табл. 2.2

$$\begin{aligned}\nabla_\perp Z_n(\chi r)\cos(n\alpha+\beta)&=\mathbf{r}_0\chi Z_n'(\chi r)\cos(n\alpha+\beta)-\\&\quad-\boldsymbol{\alpha}_0\frac{n}{r}Z_n(\chi r)\sin(n\alpha+\beta),\end{aligned}$$

где Z_n есть J_n или $H_n^{(2)}$; $\beta=0$, ψ; $\chi=\chi_{1,2}$.

Выделяя из (7.117) и (7.118) азимутальные компоненты и приравнивая их при $r=R$, получаем два равенства:

$$A\sin n\alpha\left[\frac{n\Gamma}{R}J_n(\chi_1R)\left(\frac{1}{\chi_1^2}-\frac{1}{\chi_2^2}\right)\right]=$$

$$=\omega\mu_0B\cos(n\alpha-\psi)\left[-\frac{\mu_1}{\chi_1}J_n'(\chi_1R)+\frac{\mu_2}{\chi_2}\frac{J_n(\chi_1R)}{H_n^{(2)}(\chi_2R)}H_n^{(2)\prime}(\chi_2R)\right] \tag{7.119}$$

и

$$\omega\varepsilon_0A\cos n\alpha\left[-\frac{\varepsilon_1}{\chi_1}J_n'(\chi_1R)+\frac{\varepsilon_2}{\chi_2}\frac{J_n(\chi_1R)}{H_n^{(2)}(\chi_2R)}H_n^{(2)\prime}(\chi_2R)\right]=$$

$$=-B\sin(n\alpha-\psi)\left[\frac{n\Gamma}{R}J_n(\chi_1R)\left(\frac{1}{\chi_1^2}-\frac{1}{\chi_2^2}\right)\right]. \tag{7.120}$$

Если $n\neq 0$, равенства (7.119) и (7.120) могут быть удовлетворены только при $\psi=\pm 90^\circ$, тогда тригонометрические множители сокращаются. Исключая константы A и B, получаем из (7.119), (7.120) непосредственно уравнение (7.109).

Остается показать, что уравнения (7.111) и (7.112), действительно отвечают классам полей E и H соответственно. Это следует из (7.119) и (7.120). Пусть удовлетворяется уравнение (7.111), тогда не выполнено равенство (7.112), а потому при $n=0$ выражение в квадратных скобках справа в (7.119) не равно нулю. Но ввиду $n=0$ левая часть в (7.119) уничтожается. Отсюда $B=0$, т. е. согласно (7.107), (7.108), (7.116) $H_z=0$: мы имеем E-волны. Аналогично показывается, что (7.112) отвечает H-волнам.

7.4.4. **Цилиндрические проводники (Б).** Все полученные выше основные соотношения, начиная с формул (7.107) и (7.108) сохраняют справедливость при комплексных проницаемостях стержня и окружающей среды; при этом, разумеется, анализ корней уравнений (7.109), (7.111) и (7.112) оказывается в общем случае более сложным. Таким путем можно учесть потери в диэлектрическом волноводе и решить другие задачи. В частности, можно рассмотреть металлический стержень в диэлектрической среде и цилиндрический канал в металле, заполненный диэлектриком.

Однопроводная линия и полый волновод. Из сказанного следует, что можно учесть действие реального проводника в случаях однопроводной линии (см. конец п. 7.3.1) и круглого волновода (см. § 7.2), взяв $\varepsilon_1=-i\sigma/\omega\varepsilon_0$ в первом случае и $\varepsilon_2=-i\sigma/\omega\varepsilon_0$ — во втором. Как известно (см. п. 6.1.2), при наличии реального проводника чистых T-волн быть не может и основную волну однопроводной линии следует искать в классе E-волн; это низшая волна, обозначаемая E_{00}. Поэтому обратимся к уравнению (7.111).

Постоянная распространения Γ волны E_{00} должна быть близка к величине k_2, которая является постоянной распространения

T-волны линии при идеализации проводника. Поскольку $\Gamma=\sqrt{k_2^2-\chi_2^2}$, то при $\Gamma\approx k_2$ поперечное волновое число χ_2 оказывается весьма малым: $|\chi_2|\ll 1$. Учитывая также неравенство $|k_1|\gg|k_2|$, на основании (7.110) приходим к выводу, что $\chi_1\approx k_1$, причем его значение очень велико $k_1=(1-i)/\Delta^0$ (5.96). Следовательно, в левой части (7.111) можно использовать асимптотическое представление функций Бесселя (7.29). В результате

$$\frac{J_0(\chi_1R)}{J_1(\chi_1R)}\approx\frac{J_0(k_1R)}{J_1(k_1R)}\approx\operatorname{ctg}\left(k_1R-\frac{\pi}{4}\right)\approx i$$

и уравнение (7.111) принимает вид:

$$i\omega\varepsilon_0\varepsilon_2W_{\text{пр}}\approx\chi_2R\frac{H_0^{(2)}(\chi_2R)}{H_1^{(2)}(\chi_2R)}, \tag{7.121}$$

где $W_{\text{пр}}=(1+i)/\sigma\Delta^0$ (5.94).

Для представления функций Ханкеля малого аргумента можно привлечь формулы (7.35), (7.36) с учетом (7.16). Полагая $J_1(x)=0$ и $J_0(x)=1$, имеем:

$$H_1^{(2)}(x)=i2/\pi x$$

и

$$H_0^{(2)}(x)=1+i(2/\pi)\ln(2/\gamma x)=i[-i+(2/\pi)\ln(2/\gamma x)].$$

А поскольку $-i=(2/\pi)\ln(-i)$, то

$$H_0^{(2)}(x)=i(2/\pi)\ln(2/i\gamma x).$$

Уравнение (7.121) принимает вид:

$$i\omega\varepsilon_0\varepsilon_2W_{\text{пр}}R=(\chi_2R)^2\ln(2/i\gamma\chi_2R). \tag{7.122}$$

Это уравнение, полученное Зоммерфельдом, традиционно обсуждается в литературе ([А.2], [А.3], [В.2] и др.). В одном из примеров его решения для медного провода диаметром 2 мм в воздухе при $f=1$ ГГц было получено: $\Gamma/k_2=1{,}00006-i\cdot 0{,}000064$. Как видно, замедление и затухание волны довольно малы.

Поскольку волна E_{00} является, в принципе, поверхностной, радиальное убывание поля происходит быстрее, чем $1/\sqrt{r}$. Поэтому при вычислении передаваемой мощности $\bar{P}$ интеграл уже не расходится, как было в случае идеального проводника в п. 7.3.1.

Перейдем к задаче о полом волноводе, который будем рассматривать как канал в толще металла. Выше в п. 7.2.3 было отмечено, что только азимутально-однородные волны ($n=0$) принадлежат классам E и H, а остальные волны круглого волновода при конечной проводимости оболочки являются гибридными. Теперь можно сказать, что этот факт — следствие уравнения (7.109), обсуждавшееся в п. 7.4.2.

Азимутально-однородные E- и H-волны анализируются при помощи уравнений (7.111), (7.112). Поскольку в данном случае $k_2 = (1-i)/\Delta^0$ очень большая величина, также велико и число $\chi_2 = \sqrt{k_2^2 - \Gamma^2}$. Поэтому в правой части уравнений (7.111) и (7.112) можно использовать асимптотическое представление функций Ханкеля (7.32). В результате $H_0^{(2)}(\chi_2 R)/H_1^{(2)}(\chi_2 R) \approx -i$. Заменяя в (7.111) и (7.112) χ_2 на весьма близкую величину k_2, получаем:

$$\chi_1 R \frac{J_0(\chi_1 R)}{J_1(\chi_1 R)} = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_1 W_{\text{пр}} R \qquad (7.123)$$

для E-волн и

$$\chi_1 R \frac{J_1(\chi_1 R)}{J_1(\chi_1 R)} W_{\text{пр}} = -i\omega\mu_0\mu_1 R \qquad (7.124)$$

для H-волн.

Гибридные волны обозначают символами EH и HE; первые близки к E-волнам, а вторые — к H-волнам идеализированного полого волновода. Решения в классах EH и HE при $\sigma \to \infty$ переходят в известные из § 7.2 решения в виде E- и H-волн.

Поверхностный эффект в случае провода. Рассмотренный подход позволяет без упрощений исследовать поверхностный эффект для металлического цилиндра; напомним, что выше в п. 5.4.2 мы смогли рассмотреть только сильный поверхностный эффект в проводе.

Переменный ток цилиндрического провода будем считать распределенным равномерно по азимуту ($\partial/\partial\alpha = 0$) и в продольном направлении ($\partial/\partial z = 0$). Сопутствующее ему поле есть не что иное, как волна E_{00} при $\Gamma = 0$. Поэтому $\chi_1 = k_1$ и электрическое поле лишено поперечной составляющей (это видно из (7.117), (7.118)). Значит, полное электрическое поле внутри провода можно выразить при помощи первого равенства (7.107);

$$\dot{\mathbf{E}}_m = \mathbf{z}_0 A J_0(k_1 r) = \mathbf{z}_0 \dot{E}_m(R) \frac{J_0(k_1 r)}{J_0(k_1 R)} \quad (r \leqslant R), \qquad (7.125)$$

где $\dot{E}_m(R) = \dot{E}_{m\tau}$ — поле на поверхности проводника и $k_1 = k = (1-i)/\Delta^0$; напомним, что параметр $\Delta^0 = \sqrt{2/\omega\mu_0\mu\sigma}$ имеет смысл глубины проникновения в случае плоской границы (см. п. 4.1.4, п. 5.4.1).

Формула (7.125) имеет такой же смысл, как и первое из равенств (5.95) в случае проводящего слоя. Поскольку $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$, закон распределения плотности тока в проводнике повторяет зависимость (7.125) (ср. второе равенство (5.95)). На рис. 7.28 (ср. рис. 5.25) при разных значениях параметра R/Δ^0 представлена плотность тока как функция радиальной координаты.

Путем интегрирования плотности тока по поперечному сечению проводника находим полный ток; при этом используется

формула (7.24):

$$\dot{I}_m = \sigma \int_0^{2\pi} \int_0^R \dot{E}_m r\, dr\, d\alpha = \frac{2\pi\sigma \dot{E}_{m\tau}}{J_0(kR)} \int_0^R J_0(kr)\, r\, dr = \frac{2\pi R\sigma \dot{E}_{m\tau} J_1(kR)}{k J_0(kR)}. \qquad (7.126)$$

Следующий шаг — определение погонного импеданса провода $\mathscr{Z}' = \mathscr{R}' + i\mathscr{X}'$:

$$\mathscr{Z}' = \frac{\dot{E}_{m\tau}}{\dot{I}_m} = \frac{k}{2\pi R\sigma} \frac{J_0(kR)}{J_1(kR)}. \qquad (7.127)$$

На рис. 7.29 приведены зависимости $\mathscr{R}'$, $\mathscr{X}'$ и погонной индуктивности $\mathscr{L}' = \mathscr{X}'/\omega$ от параметра R/Δ^0. Эти величины отнесены к их

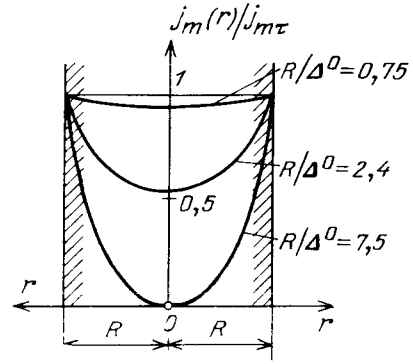


Рис. 7.28

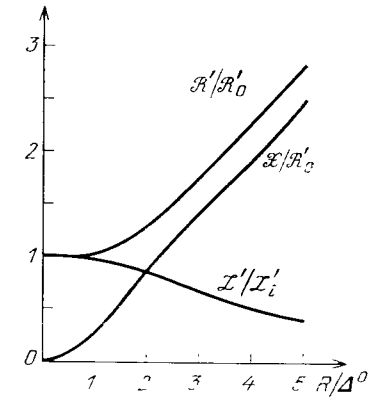


Рис. 7.29

значениям при постоянном токе $\mathscr{R}'_0$, $\mathscr{X}'_0$ и $\mathscr{L}'_0$, соответственно, причем $\mathscr{L}'_0$ определяется по формуле (2.135).

Простая проверка показывает, что в пределе при $\Delta^0/R \to 0$ получается погонное сопротивление $\mathscr{R}' = 1/\sigma\Delta^0 l$ ($l = 2\pi R$), соответствующее сильному поверхностному эффекту (5.104); надо лишь учесть, что $J_0(kR)/J_1(kR) \to i$. При $R/\Delta^0 \to 0$ приходим к случаю постоянного тока.

7.4.5. Заключительные замечания (Б). В § 7.2—7.4 было продемонстрировано, насколько физически разнообразны могут быть структуры, рассматриваемые в цилиндрической системе координат. Схема операций, производившихся в пп. 7.4.2—7.4.3, является довольно общей. Покажем, как она применяется в несколько более сложных случаях.

Другие типы структур. Рассмотрим, например, провод с диэлектрической оболочкой (см. рис. 7.24*ж*), называемый также линией Губо. Для представления поля внутри диэлектрика в данном случае

вместо функций Бесселя (7.107) надо использовать более общую форму решения в виде первой строки (7.41). Соотношение между функциями Бесселя и Неймана выбирается таким, чтобы на границе провода выполнялись условия $\mathscr{E}_z = 0$ и $\partial\mathscr{H}_z/\partial r = 0$ (ср. п. 7.2). В результате вместо (7.107) пишется (ср. (7.53), (7.56)):

$$\mathscr{E}_z = A\left[J_n(\chi_1 r) - \frac{J_n(\chi_1 R_1)}{N_n(\chi_1 R_1)} N_n(\chi_1 r)\right]\cos n\alpha,$$

$$\mathscr{H}_z = B\left[J_n(\chi_1 r) - \frac{J_n'(\chi_1 R_1)}{N_n'(\chi_1 R_1)} N_n(\chi_1 r)\right]\cos(n\alpha - \psi), \qquad (7.128)$$

$$\chi_1^2 + \Gamma^2 = k_1^2$$

для $R_1 < r < R_2$. Представление поля (7.108) остается справедливым для области $r > R_2$ и все операции, произведенные выше в п. 7.4.3, повторяются. Таким путем вместо (7.109) получается следующее уравнение:

$$n^2 \frac{\Gamma^2 k_2^2}{\chi_1^2 \chi_2^2}\left(\frac{k_1^2}{k_2^2} - 1\right)^2 =$$

$$= \left[\frac{\mu_1}{\mu_2}\chi_2 R_2 \frac{J_n'(\chi_1 R_2) - \dfrac{J_n'(\chi_1 R_1)}{N_n'(\chi_1 R_1)} N_n'(\chi_1 R_2)}{J_n(\chi_1 R_2) - \dfrac{J_n'(\chi_1 R_1)}{N_n'(\chi_1 R_1)} N_n(\chi_1 R_2)} - \chi_1 R_2 \frac{H_n^{(2)\prime}(\chi_2 R_2)}{H_n^{(2)}(\chi_2 R_2)}\right] \times$$

$$\times \left[\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\chi_2 R_2 \frac{J_n'(\chi_1 R_2) - \dfrac{J_n(\chi_1 R_1)}{N_n(\chi_1 R_1)} N_n'(\chi_1 R_2)}{J_n(\chi_1 R_2) - \dfrac{J_n(\chi_1 R_1)}{N_n(\chi_1 R_1)} N_n(\chi_1 R_2)} - \chi_1 R_2 \frac{H_n^{(2)\prime}(\chi_2 R_2)}{H_n^{(2)}(\chi_2 R_2)}\right]. \qquad (7.129)$$

Как и уравнение (7.109), полученное тоже распадается при $n = 0$ на два более простых, которые отвечают классам полей E и H.

Низшая азимутально-однородная E-волна имеет тот же характер, что и основная волна однопроводной линии, рассматриваемая без идеализации проводника (п. 7.4.4); она называется также E_{00}.

Круглый полый волновод с коаксиальным диэлектрическим стержнем (см. рис. 7.24*з*) можно считать диэлектрическим волноводом в экране. В данном случае также справедлива известная нам схема рассуждений (п. 7.4.2, 7.4.3). Представление (7.107) остается пригодным для области $0 < r < R_1$, а при $R_1 < r < R_2$ вместо (7.108) нужно взять

$$\mathscr{E}_z = C\left[J_n(\chi_2 r) - \frac{J_n(\chi_2 R_2)}{N_n(\chi_2 R_2)} N_n(\chi_2 r)\right]\cos n\alpha,$$

$$\mathscr{H}_z = D\left[J_n(\chi_2 r) - \frac{J_n'(\chi_2 R_2)}{N_n'(\chi_2 R_2)} N_n(\chi_2 r)\right]\cos(n\alpha - \psi), \qquad (7.130)$$

$$\chi_2^2 + \Gamma^2 = k_2^2.$$

Следуя прежней схеме (п. 7.4.3), нетрудно получить уравнение:

$$n^2 \frac{\Gamma^2 k_2^2}{\chi_1^2 \chi_2^2}\left(\frac{k_1^2}{k_2^2} - 1\right)^2 =$$

$$= \left[\frac{\mu_1}{\mu_2}\chi_2 R_1 \frac{J_n'(\chi_1 R_1)}{J_n(\chi_1 R_1)} - \chi_1 R_1 \frac{J_n'(\chi_2 R_1) - \dfrac{J_n'(\chi_2 R_2)}{N_n'(\chi_2 R_2)} N_n'(\chi_2 R_1)}{J_n(\chi_2 R_1) - \dfrac{J_n'(\chi_2 R_2)}{N_n'(\chi_2 R_2)} N_n(\chi_2 R_1)}\right] \times$$

$$\times \left[\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\chi_2 R_1 \frac{J_n'(\chi_1 R_1)}{J_n(\chi_1 R_1)} - \chi_1 R_1 \frac{J_n'(\chi_2 R_1) - \dfrac{J_n(\chi_2 R_2)}{N_n(\chi_2 R_2)} N_n'(\chi_2 R_1)}{J_n(\chi_2 R_1) - \dfrac{J_n(\chi_2 R_2)}{N_n(\chi_2 R_2)} N_n(\chi_2 R_1)}\right]. \qquad (7.131)$$

Это уравнение, как и аналогичные уравнения (7.109), (7.129), описывает гибридные волны, а при $n = 0$ распадается на два уравнения, которые уже отвечают классам волн E и H.

Если экран достаточно широк, волны, направляемые диэлектрическим стержнем, мало отличаются от тех, которые были бы в отсутствие экрана, т. е. от волн диэлектрического волновода, рассмотренного выше в п. 7.4.2. Подчеркнем, что при любой частоте стержень направляет лишь конечное число волн.

Но существует еще бесконечное множество типов поля, которые свойственны полому волноводу (см. § 7.2). Несколько упрощая, можно сказать, что эти же поля, возмущенные и при $n \neq 0$ попарно связанные, также фигурируют в виде собственных волн рассматриваемой структуры. Чем шире экран, тем ближе постоянные распространения этих типов волн (это легко проверить на примере круглого волновода, взяв формулы (7.76), (7.77) и (7.81)). В пределе при $R_2 \to \infty$ влияние экрана на волны, направляемые стержнем, исчезает, а обсуждаемые «экранные» волны образуют непрерывный спектр. Волны непрерывного спектра не являются поверхностными; при анализе диэлектрического волновода они были исключены из рассмотрения.

Импедансная трактовка поверхностных волн. Еще в п. 5.3.3 при анализе полного отражения от границы диэлектриков было выяснено, что для направляемых волн — поверхностных вне слоя — граница раздела сред выступает как импедансная поверхность. Цилиндрическая граница диэлектрического стержня или провода (без идеализации проводника) линии Губо также может быть охарактеризована поверхностным импедансом. Так в случае диэлектрического волновода, применяя определение (5.95) при $\mathbf{v}_0' = -\mathbf{r}_0$, из (7.107) и (7.117) нетрудно получить:

$$Z_S = -i\frac{\chi_1}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_1}\frac{J_0(\chi_1 R)}{J_1(\chi_1 R)} \text{ — } E\text{-волны},$$

$$Z_S = i\frac{\omega\mu_0\mu_1}{\chi_1}\frac{J_1(\chi_1 R)}{J_0(\chi_1 R)} \text{ — } H\text{-волны}$$

(в первом случае $E_\tau = E_z$, $H_\tau = H_\alpha$, а во втором $E_\tau = E_\alpha$, $H_\tau = H_z$). Поскольку функции $J_0(x)$ и $J_1(x)$ при $B_{0m} < x < B_{1m}$ (см. п. 7.4.2) имеют разные знаки (ср. п. 5.3.3), из записанных формул следует, что Z_S имеет индуктивный характер для E-волн и емкостный — для H-волн.

§ 7.5. Полосковые, щелевые и другие планарные структуры (А)

7.5.1. Типы планарных структур. О развитии линий передачи. На рис. 7.30 в поперечном сечении показаны некоторые продольно-однородные структуры, называемые *планарными*. Полосковая (микрополосковая) линия (*а*) представляет собой металлическую полоску, нанесенную на диэлектрический слой, подложку; последняя, в свою очередь, располагается на плоском металлическом экране. Можно рассматривать полосковую линию или иную планарную структуру в варианте полного экранирования. Экран при этом подобен прямоугольному волноводу; его контур показан штриховой линией. Полосковых проводников может быть несколько (*б*); в этом случае говорят о связанных полосковых линиях. Подложка иногда не лежит на экране (*в*) и называется подвешенной. Следующая структура (*г*) — это щелевая линия, называемая при наличии экрана волноводно-щелевой. Две связанные щелевые линии (*д*) можно трактовать как особого вида полосковую линию — так называемая компланарная линия. Планарные структуры могут быть многослойными и многоуровневыми. Имеется в виду многослойность диэлектрика и размещение металлических элементов на различных границах раздела слоев. В качестве примера показаны двухуровневые структуры: полосково-щелевая (*е*), двухполосковая (*ж*) и двущелевая (*з*).

Распространение планарных структур связано в первую очередь с происходящей уже в течение ряда лет миниатюризацией СВЧ аппаратуры. Так называемые интегральные схемы (ИС) СВЧ

обычно формируются из полосковых элементов, располагаемых на единой подложке. Как известно, поперечные размеры полых волноводов (см. § 7.1, 7.2) не могут быть меньше некоторых критических. Например, в случае прямоугольного волновода передача энергии возможна лишь при $a > \lambda/2$. Что касается полосковой линии,

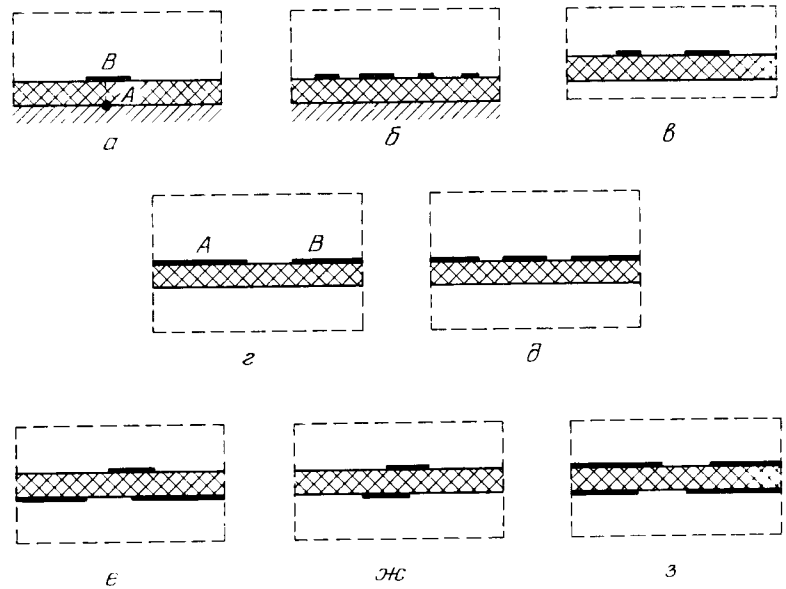


Рис. 7.30

то ее поперечные размеры могут быть, практически, как угодно малыми.

Интересно, что шаг от устройств на полых волноводах к ИС СВЧ, использующим полосковые линии, есть, в сущности, возврат к многосвязным структурам (к которым относится двухпроводная линия), в свое время уступившим место полым волноводам. Как здесь не вспомнить знаменитое диалектическое «отрицание отрицания»! Полые волноводы широко распространились, начиная с 40-х годов при освоении сантиметровых волн. Обладая допустимыми поперечными размерами, волноводные линии в отличие от проводных обеспечивали отсутствие взаимного влияния элементов аппаратуры и других нежелательных эффектов. Следует иметь в виду, что уже на дециметровых волнах полые волноводы оказываются слишком громоздкими.

Полосковые линии, вытесняющие в ряде случаев полые волноводы, во многих отношениях выгодно отличаются от проводных линий. Решающим фактором является концентрация поля основной волны в области подложки под полосковым проводником и, вслед-

ствие этого, малость паразитных влияний; иначе было бы невозможно построить ИС СВЧ. Но как бы ни развивалось в дальнейшем это направление, полые волноводы сохранят весьма значительную область применения, в частности, при передаче большой мощности.

7.5.2. Волновые процессы в планарных структурах. Электродинамическая теория направляющих структур, показанных на рис. 7.30, оказывается довольно сложной. Общий подход к подобным структурам будет обсуждаться ниже в п. 12.3.3, он ведет к построению алгоритмов, реализуемых на ЭВМ.

Волны, направляемые полосковыми и щелевыми линиями, являются гибридными. Это касается и низшей (основной) волны полосковой линии, которая аналогична T-волне двухпроводной линии.

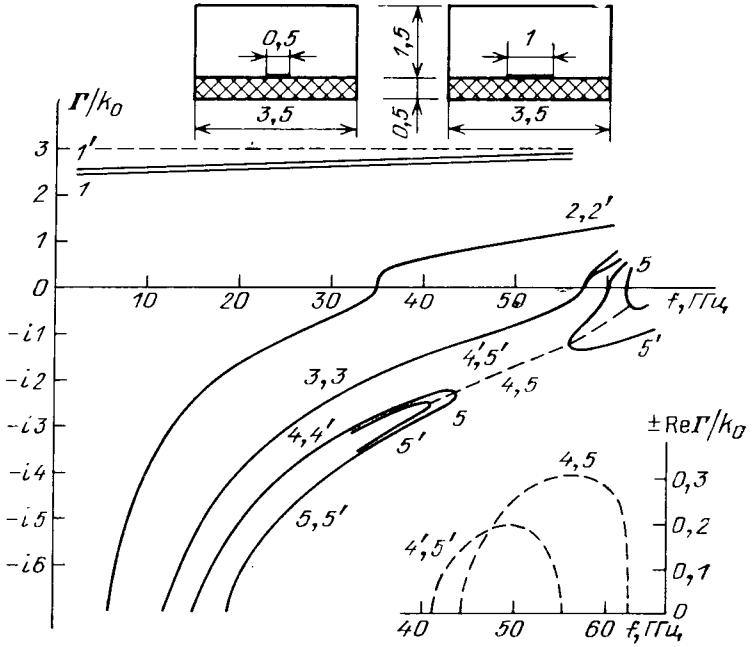


Рис. 7.31

Она также не имеет отсечки ($f_{кр} = 0$). В типичных условиях — при относительно малых поперечных размерах — поперечные компоненты резко преобладают над продольными.

Рассмотрим дисперсионные кривые для основной и нескольких высших волн экранированной полосковой линии (рис. 7.31)[1]). Это

[1]) *Никольский В. В., Никольская Т. И.* // Машинное проектирование устройств и систем СВЧ.— М.: МИРЭА, 1979.— С. 17.

частотные зависимости относительной постоянной распространения Γ/k_0 ($k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = 2\pi/\lambda$). На рисунке линия представлена в двух вариантах, различающихся шириной полоскового проводника; все размеры указаны в миллиметрах; кривые, относящиеся к линии с более широким проводником, отмечены штрихом (иногда кривые для обеих линий сливаются).

Если бы речь шла о настоящей T-волне, распространяющейся в среде подложки (в данном случае $\mu = 1$, $\varepsilon = 9$), то относительная постоянная распространения была бы равна $k/k_0 = \sqrt{\varepsilon\mu}$, т. е. $\Gamma/k_0 = \sqrt{\varepsilon} = 3$ (см. рис. 7.31, штриховая прямая). Основная волна полосковой линии характеризуется дисперсионной кривой *1*, лежащей несколько ниже. Дисперсия невелика. Заметим, что величину $(\Gamma/k_0)^2$ для основной волны называют *эквивалентной диэлектрической проницаемостью* $\varepsilon_э$ полосковой линии.

Все остальные кривые относятся к волнам той же симметрии, что и основная волна полосковой линии (антисимметричные волны пропущены). Кривые *2* и *3*, как показывает проверка, почти не изменяются, если вообще удалить полосковый проводник, оставив прямоугольный экран с диэлектрическим слоем. Соответствующие волны можно назвать *экранными*. Видно, что экранные волны выходят из области отсечки (постоянные распространения из мнимых становятся вещественными) при частотах около 35 ГГц и выше 57 ГГц. Следующие две волны (кривые *4*, *5*) необычны. Сначала дисперсионные кривые оказываются такими же, как в случае экранных волн, но затем кривые смыкаются, образуя петлю, а на частотах выше 56 ГГц ей отвечает другая петля. На участке между петлями постоянные распространения рассматриваемых волн оказываются комплексными. Нить, соединяющая петли,— участок семейства дисперсионных кривых, который дает одинаковые мнимые части постоянных распространения этих волн. Их вещественные части, различающиеся знаком, отображает отдельный фрагмент графика (справа внизу). Волны такого рода называют *комплексными*. По-видимому, впервые такого рода волны были обнаружены при анализе круглого волновода с коаксиальным диэлектрическим стержнем[1]) (рис. 7.24*з*). Не привлекая теорию комплексных волн, отметим, что они, как и другие волны в состоянии отсечки (рис. 7.31), не переносят энергии: поток энергии внутри подложки компенсируется противоположным потоком вне ее. Необходимо подчеркнуть, что потери энергии не учитывались. Практического значения рассмотренные комплексные волны не имеют, однако они интересны с принципиальной точки зрения. Можно сказать, что они образуются в результате связи экранных волн, обусловленной внесенным полосковым проводником.

При дальнейшем повышении частоты все большее число волн выходит из области отсечки. Среди них оказываются и такие вол-

[1]) ***Clarricoats P. J. B., Sinn K. R.*** // Electron. Letters, 1965.— V. 1.— P. 145.

ны, поля которых подобно полю основной волны сконцентрированы в области подложки под полосковым проводником. Эти волны можно назвать *подполосочными*. Основная и высшие подполосочные волны будут направляться полосковой линией и без замкнутого экрана; достаточно широкий экран на них почти не оказывает влияния.

На рис. 7.32 показано строение поля планарной структуры на примере двух связанных полосковых линий. Такой структуре свойственны две основные волны; одна существует при параллельных

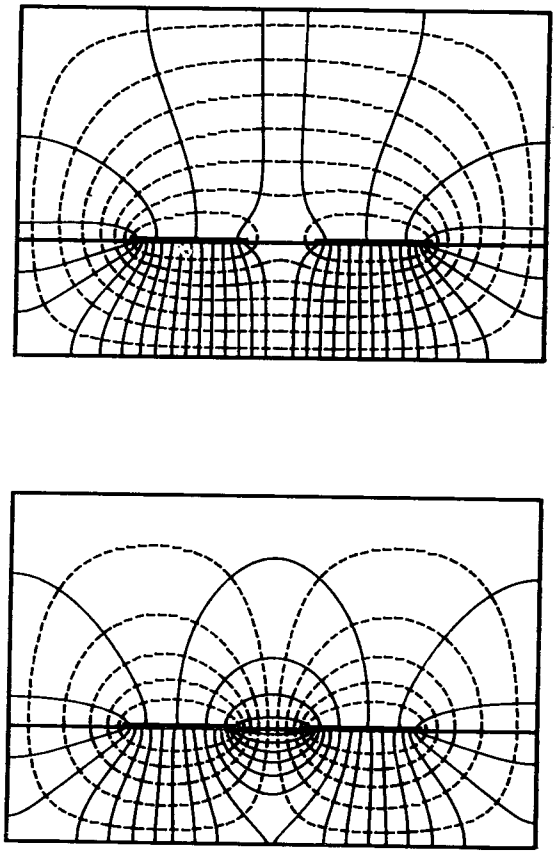


Рис. 7.32. (ЭВМ)

токах полосковых проводников, а другая — при антипараллельных (размеры экрана $2{,}3\times1{,}5$ мм^2, толщина подложки 0,5 мм, $\varepsilon=2{,}32$, ширина полоски 0,5 мм, зазор между полосками 0,3 мм, $f=20$ ГГц).

В инженерной практике нередко используются интегральные волновые сопротивления, характеризующие основные волны плапарных структур (ср. $W_л$ в п. 7.3.1). В случае полосковой линии (см. рис. 7.30*а*) можно определить волновое сопротивление как

$$W_л=\frac{\dot U_m}{\dot I_m},\qquad \dot U_m=\int_A^B \dot{\mathbf E}_m\,\mathbf{dl}, \tag{7.132}$$

где имеется в виду полный ток полоскового проводника. Существует также «энергетическое» определение, согласно которому

$$W_л=\frac{2\bar P}{I_m^2},\qquad \bar P=\frac12\operatorname{Re}\int_{S_\perp}[\dot{\mathbf E}_m,\dot{\mathbf H}_m^*]\,\mathbf{ds}. \tag{7.133}$$

Обе формулы дают весьма близкие значения в типичных случаях, когда толщина подложки значительно меньше длины волны в ее диэлектрике (поле в подложке квазистационарно).

В случае щелевой линии (рис. 7.30*г*)

$$W_л=\frac{U_m^2}{2\bar P},\qquad U_m=\int_A^B \mathbf E_m\,\mathbf{dl}, \tag{7.134}$$

а $\bar P$ вычисляется, как и ранее, обычным образом.

§ 7.6. Некоторые виды периодических структур (Б)

7.6.1. Цилиндрические замедляющие системы. В п. 6.3.2 было установлено, что частые периодические структуры могут — при определенных условиях — направлять медленные волны (фактически, речь идет о нулевой пространственной гармонике структуры). При этом фазовая скорость волнового процесса ниже скорости *T*-волны в прилежащей однородной среде, где волна проявляет себя как поверхностная.

На рис. 7.33 показаны три периодические структуры: *ребристый стержень* (*а*), *диафрагмированный волновод* (*б*) и *спиральный волновод* (*в*). Первые две из них родственны рассматривавшейся в п. 6.3.2 плоской ребристой структуре, однако ввиду их цилиндрической симметрии анализ естественно производить в цилиндрических координатах. При рассмотрении нулевой пространственной гармоники, имеющей характер азимутально-однородной ($n=0$) *E*-волны, поле в пазах между ребрами, как и ранее, отождествляют с поперечной стоячей *T*-волной; но теперь это — радиальная волна с векторами $\mathbf E=\mathbf z_0 E$ и $\mathbf H=\alpha_0 H$. Ранее было установлено, что граница системы ребер выступает как импедансная поверхность. В данном случае подобно (6.59) запишем:

$$\dot{\mathbf E}_{mz}(R)=Z_s[\dot{\mathbf H}_{m\alpha}(R),\ \mp\mathbf r_0], \tag{7.135}$$

где верхний знак берется в случае ребристого стержня (рис. 7.33*а*), а нижний — в случае диафрагмированного волновода (рис. 7.33*б*).

Поверхностная E-волна поддерживается структурой, когда Z_s имеет индуктивный характер.

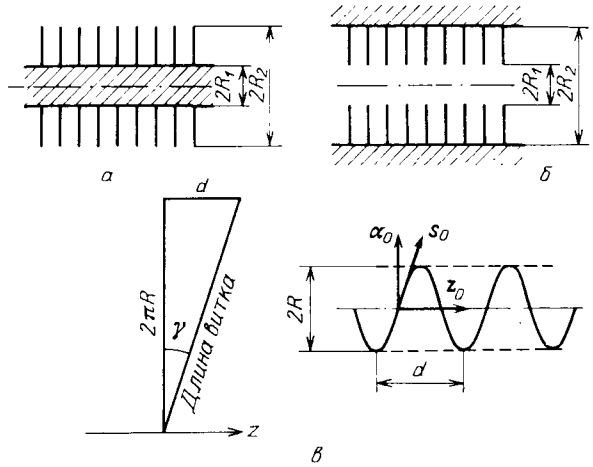


Рис. 7.33

Запишем уравнения, которым подчинены поперечные волновые числа χ азимутально-однородных E-волн ребристого стержня и диафрагмированного волновода (рис. 7.33$а, б$):

ребристый стержень

$$Z_S = -i\frac{\chi}{\omega\varepsilon_0\varepsilon}\frac{H_0^{(2)}(\chi R)}{H_1^{(2)}(\chi R)}, \tag{7.136}$$

диафрагмированный волновод

$$Z_S = i\frac{\chi}{\omega\varepsilon_0\varepsilon}\frac{J_0(\chi R)}{J_1(\chi R)}, \tag{7.137}$$

причем

$$Z_S = \mp iW\frac{N_0(kR_м)J_0(kR) - J_0(kR_м)N_0(kR)}{N_0(kR_м)J_1(kR) - J_0(kR_м)N_1(kR)}, \tag{7.138}$$

где верхний знак берется при $R_м < R$ (первый случай), а нижний при $R_м > R$ (второй случай). Если $|R_м - R| \ll R$, т. е. пазы неглубоки, то

$$Z_S \approx iW\operatorname{tg} kd, \tag{7.139}$$

где $d = |R_м - R|$ (ср. (6.59)).

ВЫВОД. Начнем с вывода формулы (7.138). Поскольку структура является частой ($\mathring{\Lambda} \ll \lambda$), будем считать, что поле внутри паза не меняется в направлении z (такое приближение использовалось и в п. 6.3.2). Тогда для области паза $\Gamma = 0$ и $k = \chi$. Выражая это поле, для представления продольной электрической компоненты используем формулу (7.53), положив $n = 0$, $\chi = k$ и $R_1 = R_м$ (так как $E_z = 0$ при $r = R_м$); при этом на основании (6.25)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{E}}_m &= \mathbf{z}_0 A\left[J_0(kr) - \frac{J_0(kR_м)}{N_0(kR_м)}N_0(kr)\right],\\ \dot{\mathbf{H}}_m &= \boldsymbol{\alpha}_0 A\frac{i}{W}\left[J_1(kr) - \frac{J_0(kR_м)}{N_0(kR_м)}N_1(kr)\right].\end{aligned} \tag{7.140}$$

Выражение поверхностного импеданса (7.138) получается при подстановке комплексных амплитуд (7.140) в (7.135) при $r = R$.

Чтобы прийти к приближенной формуле (7.139), надо лишь внести в (7.138) асимптотические представления цилиндрических функций (7.29), (7.30).

При выводе уравнения (7.136) учтем, что формулы (7.140) выражают поле ребристого стержня (для некоторого паза) в области $R_м < r < R$. Для внешней области $r > R$ положим $\mathscr{E}_z = BH_0^{(2)}(\chi r)$ и из (6.25) получим:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{E}}_m &= B\left[\mathbf{z}_0 H_0^{(2)}(\chi r) + \mathbf{r}_0\frac{i\Gamma}{\chi}H_1^{(2)}(\chi r)\right]e^{-i\Gamma z},\\ \dot{\mathbf{H}}_m &= \boldsymbol{\alpha}_0 B\frac{i\omega\varepsilon_0\varepsilon}{\chi}H_1^{(2)}(\chi r)\,e^{-i\Gamma z}.\end{aligned} \tag{7.141}$$

Компоненты $\dot{E}_{mz}$ и $\dot{H}_{m\alpha}$ внутреннего (7.140) и внешнего (7.141) полей приравняем при $r = R$ (множитель $\exp(-i\Gamma z)$ в (7.141) опускается). Это дает два равенства, содержащих неизвестные коэффициенты A и B. Исключение A и B приводит к (7.136).

В случае диафрагмированного волновода представление поля (7.140) относится к области $R < r < R_м$. При $0 < r < R$ положим $\mathscr{E}_z = BJ_0(\chi r)$, так что на основании (6.25):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{E}}_m &= B\left[\mathbf{z}_0 J_0(\chi r) + \mathbf{r}_0\frac{i\Gamma}{\chi}J_1(\chi r)\right]e^{-i\Gamma z},\\ \dot{\mathbf{H}}_m &= \boldsymbol{\alpha}_0 B\frac{i\omega\varepsilon_0\varepsilon}{\chi}J_1(\chi r)\,e^{-i\Gamma z}.\end{aligned} \tag{7.142}$$

Дальнейшие операции производятся по прежней схеме. При $r = R$ приравниваются тангенциальные компоненты электрического и магнитного полей ($\dot{E}_{mz}$ и $\dot{H}_{m\alpha}$), получаемые из (7.140) и (7.142); экспоненциальный множитель в (7.142) здесь отбрасывается. Из двух формулируемых равенств исключаются коэффициенты A и B, что дает уравнение (7.137). ■

Ребристый стержень, направляющий E-волну, естественно сопоставить с однопроводной линией, которая имеет диэлектрическую оболочку (см. п. 7.4.5): система ребер действует подобно слою диэлектрика. Впрочем, структура поля азимутально-однородной E-волны вне ребристого или имеющего диэлектрическую оболочку

стержня оказывается такой же, как и в случае круглого диэлектрического волновода (см. п. 7.4.2). Что касается диафрагмированного волновода, то его можно сравнить с круглым волноводом, на внутренней поверхности которого лежит коаксиальный диэлектрический слой.

Обратимся, наконец, к рассмотрению третьей периодической структуры, спирального волновода (рис. 7.33*в*). Можно представить себе некоторый волновой процесс, распространяющийся вдоль провода с фазовой скоростью v, свойственной T-волне. Полное поле есть волна, распространяющаяся в направлении оси спирали. Ее фазовая скорость v_Φ настолько меньше v, насколько шаг спирали d меньше длины витка $2\pi R$. Поэтому $v_\Phi = v\sin\gamma$, где γ — угол намотки (рис. 7.32*в*), а следовательно,

$$\Gamma = k/\sin\gamma. \qquad (7.143)$$

Полученная приближенная формула оказывается удовлетворительной для относительно высоких частот.

Нередко используется более сложная модель спирального волновода, в которой он рассматривается как цилиндрическая поверхность с анизотропной проводимостью: допускаются лишь токи в направлении намотки. Пусть $\mathbf{s}_0$ — орт этого направления. Тогда на поверхности $r = R$, моделирующей спиральный волновод, задается: $E_s = 0$, $H_s(R-0) = H_s(R+0)$. Непрерывность компоненты вектора $\mathbf{H}$ вдоль намотки означает отсутствие тока в ортогональном направлении. Кроме того на всей поверхности $r = R$ налагается требование непрерывности полной тангенциальной компоненты вектора $\mathbf{E}$. Поле внутри и вне цилиндра представляется точно так же, как при анализе круглого диэлектрического волновода (см. п. 7.4.2, 7.4.3). Желая исследовать основную волну, задаются в (7.107), (7.108) нулевым порядком цилиндрических функций, получают поперечные компоненты и связывают поля указанными выше граничными условиями при $r = R$. Это приводит к следующему уравнению относительно поперечных волновых чисел χ:

$$\chi^2 = -\frac{J_1(\chi R)\,H_1^{(2)}(\chi R)}{J_0(\chi R)\,H_0^{(2)}(\chi R)}\,k^2\operatorname{ctg}^2\gamma. \qquad (7.144)$$

Поскольку основная волна является медленной, то χ — величина мнимая (см. п. 6.1.3). Чем больше χ по модулю, тем сильнее выражен поверхностный характер волны. При помощи асимптотических формул (7.29) и (7.32) легко убедиться, что $J_1(x)H_1^{(2)}(x) \times \times\left[J_0(x)H_0^{(2)}(x)\right]^{-1} \to 1$, если $x \to -i\infty$. Тогда из (7.144) $\chi^2 = -k^2\operatorname{ctg}^2\gamma$, а поскольку $\Gamma^2 = k^2 - \chi^2$, то получается выражение (7.143).

В заключение отметим, что основная волна спирального волновода, будучи азимутально-однородной ($n = 0$), тем не менее, является гибридной, т. е. ее поле имеет электрическую и магнитную продольные компоненты.

7.6.2. Оптические и квазиоптические структуры. Если размеры технических объектов многократно превышают длину волны, что характерно для оптики, то, как известно (см. гл. 5), широко используется лучевая трактовка. В оптике давно применяются зеркала и линзы, на основе которых можно, в частности, строить периодические структуры, направляющие потоки энергии. Примеры

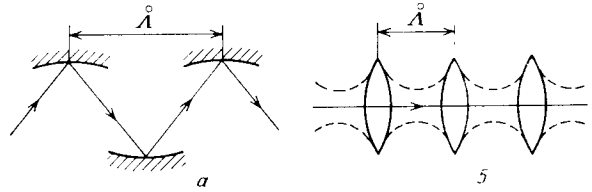


Рис. 7.34

зеркальных и *линзовых линий передачи* представлены на рис. 7.34; направление передачи энергии указывает выделенный центральный луч. Подобные линии передачи с характерными размерами, значительно превышающими длину волны, мыслимы не только в оптике; они находят применение на субмиллиметровых, миллиметровых и даже на сантиметровых волнах. При этом употребляется выражение *квазиоптические структуры*.

При передаче энергии в зеркальной или линзовой линии формируется волновой процесс, при котором практически вся энергия поля локализована в некоторой осевой зоне. Ее границы на рис. 7.34*б* несколько условно показаны штриховой линией. С точки зрения оптики, это некоторый *параксиальный пучок* лучей (лучи близки к параллельным); граница пучка строится как огибающая этих лучей и называется *каустикой*. Электродинамический анализ показывает, что на границе пучка поле быстро убывает в поперечном направлении, причем возможны процессы с различными поперечными распределениями поля, по аналогии с различными собственными волнами волновода. Мы еще вернемся к этому вопросу (см. § 10.6) после рассмотрения теории дифракции.

Остановимся пока на простейшей оптической трактовке линзовой линии. На рис. 7.35*а* показана отдельная линза, на которую падает параллельный пучок лучей, сходящийся после ее прохождения в *фокусе*. Суть в том, что оптическая длина всех лучей (см. п. 5.5.2) — одна и та же. Этого добиваются выбором формы линзы (для параксиальных пучков обе поверхности линзы можно считать сферическими); средний, самый короткий луч проходит наибольший путь внутри линзы, где $n > 1$ (волна замедляется); зато крайние лучи проходят бо́льшие пути в воздухе. Необходимость того, что лучи сходятся в фокусе, можно понять, если исходить из принципа

Ферма. Действительно, траектория среднего луча не вызывает сомнений, но, исходя из этого принципа, мы должны считать его оптически кратчайшим. При должном выборе профиля линзы крайний луч на рис. 7.35*а* будет иметь ту же оптическую длину, т. е.

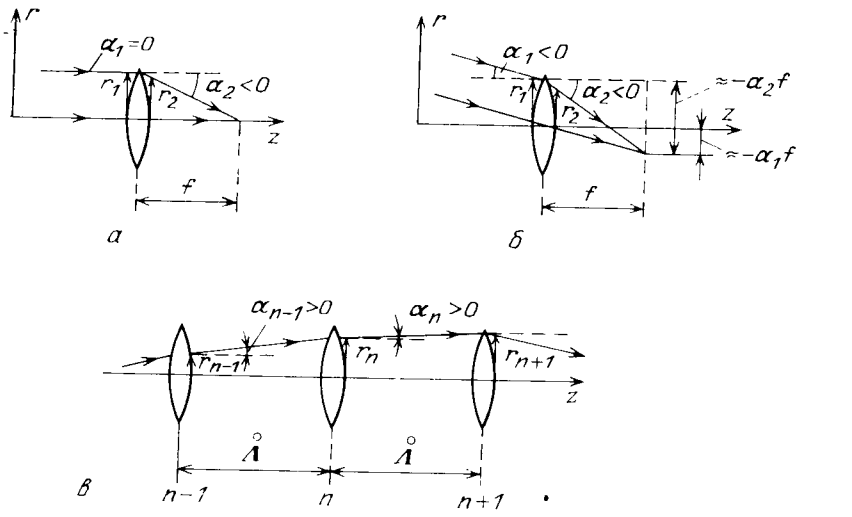


Рис. 7.35

он тоже будет кратчайшим, а следовательно, должен физически реализоваться. Этим же свойством обладают все лучи падающего на линзу параллельного пучка.

Процесс фокусировки в известном смысле устойчив: при небольших отклонениях падающего параллельного пучка от осевого направления (рис. 7.35*б*) он также фокусируется.

Лучи, принадлежащие параксиальным пучкам, будем характеризовать параметрами r и $dr/dz = \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$. Так на рис. 7.35*а* для крайнего случая на входе линзы имеем $r = r_1$, $\alpha = 0$, а на выходе $r = r_2 \approx r_1$ и $\alpha = \alpha_2 < 0$. При этом $\alpha_2 = -r_2/f$ (в дальнейшем при замене тангенсов углами будем ставить знак строгого равенства). Если же перейти к отклоненному пучку лучей (рис. 7.35*б*), то, как легко видеть, $\alpha_2 - \alpha_1 = -r_2/f$.

На этом основании для периодической линзовой структуры (рис. 7.35*в*) запишем соотношение:

$$\alpha_n - \alpha_{n-1} = -r_n/f, \tag{7.145}$$

где имеются в виду условные номера линз. Пусть $\mathring{\Lambda}$ — период структуры. Считая линзы тонкими, будем иметь: $r_n - r_{n-1} = \alpha_{n-1}\mathring{\Lambda}$ и $r_{n+1} - r_n = \alpha_n\mathring{\Lambda}$. Вычтем первое равенство из второго; учитывая

(7.145), получаем следующее рекуррентное соотношение:

$$r_{n+1} + (\mathring{\Lambda}/f - 2)\, r_n + r_{n-1} = 0. \tag{7.146}$$

Путем непосредственной проверки устанавливается, что

$$r_n = Ae^{-in\Theta} + Be^{in\Theta}, \tag{7.147}$$

где Θ удовлетворяет требованию:

$$\cos\Theta = 1 - \mathring{\Lambda}/2f. \tag{7.148}$$

Неопределенные константы A и B можно выразить через r_1 и r_2. Для этого надо решить систему двух уравнений, получающихся при подстановке в (7.147) $n = 1$ и $n = 2$. После подстановки полученных выражений A и B в (7.147) представление r_n принимает вид:

$$r_n = r_2 \frac{\sin(n-1)\Theta}{\sin\Theta} - r_1 \frac{\sin(n-2)\Theta}{\sin\Theta}. \tag{7.149}$$

Линзовая линия называется конфокальной, если $\mathring{\Lambda} = 2f$, т. е. фокусы лежат на середине расстояний между соседними линзами. Тогда согласно (7.148) $\cos\Theta = 0$; внося в (7.149) $\Theta = 90°$, получаем в этом случае:

$$r_n = r_1 \sin n\frac{\pi}{2} - r_2 \cos n\frac{\pi}{2}. \tag{7.150}$$

Важен следующий вывод. Величина Θ в (7.147) — (7.149) должна быть вещественной. В противном случае из-за появления в выражении r_n комплексного аргумента лучи могут с ростом n неограниченно отклоняться от оси. Если же Θ — величина вещественная, то в (7.148) $-1 \leqslant \cos\Theta \leqslant 1$. Поэтому

$$0 \leqslant \mathring{\Lambda} \leqslant 4f, \tag{7.151}$$

т. е. — с позиций геометрической оптики — получено условие передачи процесса в линзовой линии, согласно которому расстояние

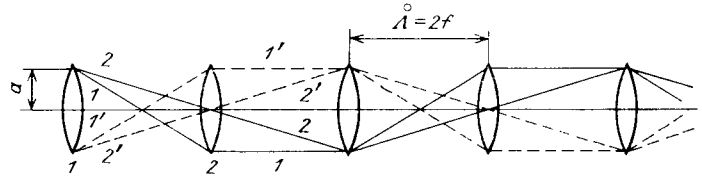


Рис. 7.36

между линзами не должно превышать четырех фокусных расстояний.

Пример. Построим несколько лучей для конфокальной линзовой линии. Пусть $r_1 = a$, $r_2 = -a$ ($a > 0$), т. е. между линзами *1* и *2* луч проходит через

фокус. Тогда на основании (7.150)

$$r_n = a\left(\sin n\frac{\pi}{2} + \cos n\frac{\pi}{2}\right)$$

и луч идет так, как это показано на рис. 7.36 (линия *1*). Можно взять $r_1 = -a$ и $r_2 = a$; при этом получится симметричный луч *1'*. Ту же картину двух симметричных лучей, но сдвинутую по оси на расстояние $\mathring{\Lambda}$, получаем, взяв $r_1 = r_2 = -a$ и $r_1 = r_2 = a$. Возьмем, далее, $r_1 = a$ и $r_2 = 0$. При этом

$$r_n = a\sin n\frac{\pi}{2}.$$

Лучи *2* и *2'* на рис. 7.36 соответствуют случаям $r_1 = \pm a$ и $r_2 = 0$. Сдвинутую на $\mathring{\Lambda}$ картину лучей получим, внося в (7.148) $r_1 = 0$ и $r_2 = \mp a$. ■

УПРАЖНЕНИЯ

1. Размеры поперечного сечения прямоугольного волновода составляют: $a = 2$ см, $b = 1$ см. Перечислить типы волн волновода, способных переносить энергию, если $f = 10$ ГГц, 20 ГГц, 30 ГГц (внутренняя среда воздух, оболочка считается идеально проводящей).

2. Сопоставив формулы (7.66) и (5.65) при надлежащей замене координат, показать, что поле H_{10} прямоугольного волновода имеет ту же структуру, что и в случае отражения наклонно падающей однородной T-волны от идеально проводящей плоскости при перпендикулярной поляризации.

3. В прямоугольном волноводе при $a = 2$ см, $b = 1$ см, $f = 10$ ГГц (внутренняя среда — воздух) мощность, передаваемая волновым процессом, составляет 1 Вт. Вычислить продольный ток, проходящий в оболочке волновода в направлении передачи энергии. Чему равен полный продольный ток оболочки?

4. Вывести выражение типа (7.71) при $m \neq 1$, $n = 0$ ($m = 0$, $n \neq 1$).

5. Показать, что в центре системы замкнутых магнитных силовых линий поля H_{10} лежит максимум ортогонального тока смещения, хотя максимум электрического поля сдвинут по оси z на $\Lambda/4$.

6. Охарактеризовать сходство и различие строения свободных полей прямоугольного и круглого волноводов.

7. Почему в случае круглого волновода основной является волна H_{11}, оба индекса которой не являются наименьшими (что можно сказать о волнах H_{01} и E_{01})?

8. Перечислить типы волн круглого волновода радиусом 1 см (внутренняя среда — воздух), способные переносить энергию при $f = 10$ ГГц, 20 ГГц, 30 ГГц.

9. Как известно, в случае однородной T-волны круговой поляризации (см. п. 4.2.1) вектор E(H) вращается в плоскости фронта, сохраняя постоянную амплитуду. Можно ли это сказать в отношении волны H_{11} круглого волновода при $\mathscr{A}(\alpha) = \exp(\pm i\alpha)$?

10. Показать, что как в прямоугольном, так и в круглом волноводе при $f \to \infty$ все волны становятся волнами T.

11. Вывести формулу, выражающую полный ток в оболочке круглого волновода при наличии волны E_{01} через максимальную амплитуду продольного электрического поля.

12. Рассмотреть волновод, поперечное сечение которого есть полукруг. Сопоставить его с круглым волноводом того же радиуса. Что можно сказать об основной волне в обоих случаях, имеет ли она одну и ту же фазовую скорость?

13. Пользуясь формулами (7.106) с учетом (7.91), вывести выражения погонной емкости и индуктивности для коаксиальной линии.

14. Вывести формулу, выражающую коэффициент затухания основной волны коаксиальной линии, стержень и оболочка которой выполнены из разных металлов.

15. Произвести подробную запись формул (7.117) и (7.118), раскрыв операцию $\nabla_\perp$ и разделяя компоненты векторов, азимутальные и радиальные.

16. В п. 7.4.3 произвести все действия, положив с самого начала $n = 0$, т. е. рассматривая азимутально-однородные поля.

17. Сравнить изменение характера волнового процесса при $f \to f_{кр}$ в полом и диэлектрическом волноводах.

18. Сравнить низшие E-волны круглого диэлектрического волновода, однопроводной линии с диэлектрической оболочкой (или рассматриваемой с учетом конечной проводимости металла) и ребристого стержня. Однотипны ли их внешние поля? Чем отличаются критические частоты? Каким образом применяется в этих случаях представление об импедансной поверхности?

19. Почему основная волна полосковой линии не является в строгом смысле T-волной?

20. Почему ребристые структуры называют замедляющими?

21. Как найти погонное сопротивление круглого провода при различных частотах?

22. При выводе формулы (7.143) использовалось представление о T-волне, фактический путь которой вдоль провода значительно превышает смещение процесса вдоль оси спирали, так что фазовый сдвиг в этом направлении оказывается соответственно бо́льшим: волновой процесс является медленным. Почему такого рода рассуждение совершенно неприменимо по отношению к лучевой картине для полого волновода (см. рис. 5.17)?

Глава 8
РЕЗОНАТОРЫ

§ 8.0. Трехмерное уравнение Гельмгольца и соответствующие краевые задачи

8.0.1. Декартовы координаты (А). Перед изучением основного материала этой главы, посвященного полям в ограниченных объемах, снова вернемся к скалярному уравнению Гельмгольца (6.1), которое в декартовых координатах имеет вид

$$\frac{\partial^2 \dot{u}_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{u}_m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{u}_m}{\partial z^2} + k^2 \dot{u}_m = 0. \tag{8.1}$$

Желая найти его общее решение, мы можем сразу же применить метод разделения переменных, как это было сделано для аналогичного двумерного уравнения (7.1). При этом положим: $\dot{u}_m(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$. После подстановки этого представления в (8.1) и деления всех членов на XYZ получаем:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -k^2. \tag{8.2}$$

Рассуждая так же, как в п. 7.0.1, записываем три обыкновенных дифференциальных уравнения

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \gamma_x^2 X = 0, \quad \frac{d^2Y}{dy^2} + \gamma_y^2 Y = 0, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \gamma_z^2 Z = 0, \tag{8.3}$$

которые эквивалентны уравнению (8.3) при

$$\chi_x^2 + \chi_y^2 + \chi_z^2 = k^2. \tag{8.4}$$

Решения первых двух уже были выписаны в п. 7.0.1 в тригонометрической и экспоненциальной формах (7.5). Совершенно такой же вид имеет решение третьего уравнения (8.3):

$$Z = \begin{cases} F\cos\chi_z z + G\sin\chi_z z, \\ \widetilde{F}e^{-i\chi_z z} + \widetilde{G}e^{i\chi_z z}. \end{cases} \tag{8.5}$$

Заметим теперь, что это третье уравнение есть не что иное, как уравнение (6.4), которое «отщепляется» и в более общем случае разделения переменных (см. п. 6.0.1). Общее решение уравнения (6.1), когда анализируемая структура однородна вдоль оси z, можно искать в виде TZ, что ведет к уравнениям (6.4) и (6.5); разумеется, это верно, когда все три координаты — декартовы.

Для области в виде параллелепипеда (рис. 8.1*а*) можно ставить различные краевые задачи. Например, потребовав, чтобы на всей

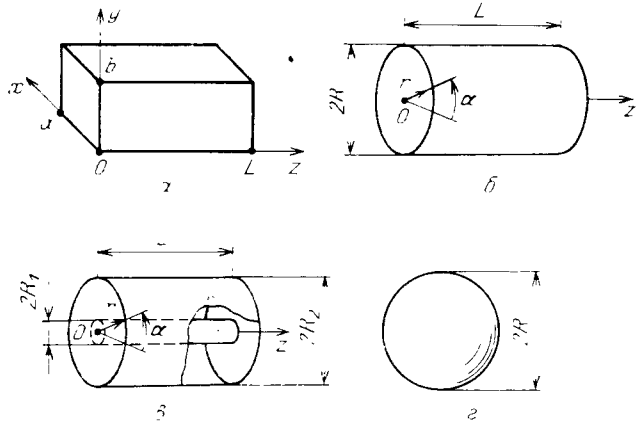


Рис. 8.1

его поверхности выполнялось условие $\dot{u}_m = 0$, мы пришли бы к первой краевой задаче типа (7.6). Можно было бы также поставить вторую краевую задачу, налагая вместо этого условие $\partial\dot{u}_m/\partial\nu = 0$ (ср. (7.11)). Однако для дальнейшего более интересны так называемые смешанные задачи, когда одно из данных граничных условий ставится на торцах $z = 0$, L, а другое — на остальной части поверхности.

Первая смешанная задача:

$$\dot{u}_m = 0 \text{ при } \begin{cases} x = 0, & y = 0, \\ x = a, & y = b; \end{cases} \quad \frac{\partial\dot{u}_m}{\partial z} = 0 \text{ при } \begin{cases} z = 0, \\ z = L. \end{cases} \tag{8.6}$$

Чтобы найти некоторое решение $\dot{u}_m = XYZ$, подчиненное этим граничным условиям, надо взять $T = XY$ (7.8) и построить нужную функцию Z, положив в (8.5) $G = 0$, $\chi_z = p\pi/L$. Легко видеть, что решения первой смешанной задачи образуют систему собственных функций $\dot{u}^{(1)}_{mnp}$ при собственных значениях k^2_{mnp}:

$$\dot{u}^{(1)}_{mnp} = N^{(1)}_{mnp}\sin\frac{m\pi y}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\cos\frac{p\pi z}{L}, \tag{8.7}$$

$$k^2_{mnp} = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2,$$

$$m = 1, 2\ldots; \quad n = 1, \quad 2\ldots; \quad p = 0, 1, 2\ldots$$

($N^{(1)}_{mnp}$ — неопределенные коэффициенты). Здесь использованы выражения $T^{(1)}_{mn}$ (7.10).

Вторая смешанная задача:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\dot{u}_m}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,\ x = a; \\ &\frac{\partial\dot{u}_m}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0,\ y = b; \\ &\dot{u}_m = 0 \quad \text{при} \quad z = 0,\ z = L. \end{aligned} \tag{8.8}$$

В данном случае решения $\dot{u}_m = XYZ$ строятся как призведения $T = XY$ (7.12) и $Z = \sin(p\pi z/L)$ (в (8.5) $F = 0$). Задача порождает следующие собственные функции:

$$\dot{u}^{(2)}_{mnp} = N^{(2)}_{mn}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{p\pi z}{L},$$

$$k^2_{mnp} = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2, \tag{8.9}$$

$$m = 0, 1, 2\ldots; \quad n = 0, 1, 2\ldots; \quad p = 1, 2, \ldots$$

8.0.2. Цилиндрические координаты (А). Уравнение (6.1) в цилиндрических координатах (см. п. 2.0.2)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\dot{u}_m}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\dot{u}_m}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\dot{u}_m}{\partial z^2} + k^2\dot{u}_m = 0 \tag{8.10}$$

тоже приводится к уравнениям (6.4) и (6.5), причем

$$k^2 = \chi^2 + \chi_z^2 \tag{8.11}$$

(вместо Γ в (6.4), (6.5) пишем χ_z). Уравнение (6.5), имеющее в данном случае вид (7.37), подробно рассматривалось в п. 7.0.3. Таким образом, $\dot{u}_m = TZ$, где $T = \mathscr{R}(r)\mathscr{A}(\alpha)$, и эти сомножители выражаются формулами (7.41), (7.42). Формула (8.5) по-прежнему дает $Z(z)$.

Получив общее представление решения $\dot{u}_m$, сформулируем, как и выше в п. 8.0.1, решения смешанных краевых задач, рассматривая теперь цилиндрическую область (рис. 8.1*б*).

Первая смешанная задача:

$$\dot{u}_m = 0 \quad \text{при} \quad r = R, \quad \frac{\partial \dot{u}_m}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \quad z = L. \tag{8.12}$$

Отправляясь от формул (7.46) и получая Z так же, как в случае параллелепипеда, запишем порождаемые задачей (8.12) собственные функции и соответствующие им собственные значения:

$$u^{(1)}_{nmp} = N^{(1)}_{nmp} J_n\left(\frac{B_{nm}}{R} r\right) \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} n\alpha \cos \frac{p\pi z}{L},$$
$$k^2_{nmp} = \left(\frac{B_{nm}}{R}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2, \tag{8.13}$$
$$m = 1, 2, \ldots; \quad n = 0, 1, 2 \ldots, \quad p = 0, 1, 2 \ldots$$

(собственные значения подчинены равенству (8.11)). Для краткости записи использована только одна форма множителя $\mathscr{A}(n\alpha)$.

Вторая смешанная задача:

$$\frac{\partial \dot{u}_m}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = R, \quad \dot{u}_m = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \quad z = L. \tag{8.14}$$

Прежним способом, но используя в данном случае формулы (7.49), выпишем собственные функции и собственные значения:

$$u^{(2)}_{nmp} = N^{(2)}_{nmp} J_n\left(\frac{A_{nm}}{R} r\right) \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} n\alpha \sin \frac{p\pi z}{L},$$
$$k^2_{nmp} = \left(\frac{A_{nm}}{R}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2, \tag{8.15}$$
$$m = 1, 2, \ldots; \quad n = 0, 1, 2, \ldots; \quad p = 1, 2, \ldots$$

На основе выражений (8.13), (8.15) легко получить выражения собственных функций, порождаемых краевыми задачами для цилиндрической области с кольцевым поперечным сечением (рис. 8.1*в*). Надо лишь заменить бесселевы функции $J_n(\chi r)$ комбинациями цилиндрических функций (7.53) и, соответственно, (7.56).

8.0.3. Сферические координаты (Б). В сферических координатах (см. п. 2.0.2) уравнение (6.1) имеет вид:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \dot{u}_m}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial \dot{u}_m}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 \dot{u}_m}{\partial \alpha^2} + k^2 \dot{u}_m = 0. \tag{8.16}$$

Для разделения переменных делается подстановка $u(r, \vartheta, \alpha) = \mathscr{R}(r)\Theta(\vartheta)\mathscr{A}(\alpha)$. Внося это в (8.16), а затем умножая все члены на $r^2 \sin^2\vartheta/\mathscr{R}\Theta\mathscr{A}$, имеем:

$$\frac{\sin^2\vartheta}{\mathscr{R}}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\mathscr{R}}{dr}\right) + \frac{\sin\vartheta}{\Theta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{d\Theta}{d\vartheta}\right) + \frac{1}{\mathscr{A}}\frac{d^2\mathscr{A}}{d\alpha^2} + k^2 r^2 \sin^2\vartheta = 0. \tag{8.17}$$

Третий член зависит только от α. Приравняем его некоторой константе $-m^2$. Тогда сумма остальных членов будет равна m^2, а уравнение распадется на два. Члены второго разделим на $\sin^2\vartheta$, после чего выражение, зависящее только от r, приравнивается константе p^2. Оставшаяся часть будет равна $-p^2$, и возникают два обыкновенных дифференциальных уравнения. В конечном счете получаются следующие три обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\frac{d^2\mathscr{A}}{d\alpha^2} + m^2\mathscr{A} = 0, \quad \frac{1}{\mathscr{R}}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\mathscr{R}}{dr}\right) + k^2 r^2 - p^2 = 0,$$
$$\frac{1}{\Theta\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{d\Theta}{d\vartheta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta} + p^2 = 0. \tag{8.18}$$

Решение $\dot{u}_m$, а следовательно, и $\mathscr{A}$ для шаровой области (рис. 8.1*г*) должно переходить в себя при замене α на $\alpha + 2\pi$. Поэтому $m = 0, 1, 2, \ldots$ Функцию $\mathscr{A}(\alpha)$ нетрудно выразить в тригонометрической или экспоненциальной форме.

Далее, если сделать замену $\cos\vartheta = t$, то уравнение относительно Θ в (8.18) принимает следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\left[(1-t^2)\frac{d\Theta}{dt}\right] + \left(p^2 - \frac{m^2}{1-t^2}\right)\Theta = 0 \tag{8.19}$$

$(-1 < t < 1)$. Его решения $\Theta(t)$ — это собственные функции, реализующиеся при собственных значениях $p^2 = n(n+1)$. Они равны так называемым *присоединенным функциям Лежандра* $P^{(m)}_n(t)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Наконец, второе из уравнений в (8.18) преобразуется путем замены $\mathscr{R}(r) = \rho(r)/\sqrt{kr}$ и с учетом того, что $p^2 = n(n+1)$, к виду:

$$\frac{d^2\rho}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\rho}{\partial r} + \left[k^2 - \frac{(n+1/2)^2}{r^2}\right]\rho = 0. \tag{8.20}$$

Это не что иное, как уравнение Бесселя (7.14) порядка $n + 1/2$ относительно ρ как функции аргумента kr. Таким образом, общее решение уравнения (8.20) представляется формулами (7.15), в которых надо заменить n на $n + 1/2$ и положить $x = kr$. Для области $0 < r < R$ сохраняется лишь функция Бесселя, так что $\mathscr{R}(r) = AJ_{n+1/2}(kr)/\sqrt{kr}$.

Итак, для внутренней области шара (см. рис. 8.1*в*) получаем:

$$\dot{u}_m = A\frac{1}{\sqrt{kr}} J_{n+1/2}(kr) P^{(m)}_n(\cos\vartheta) \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} m\alpha. \tag{8.21}$$

Представляют интерес две краевые задачи:
первая задача *вторая задача*

$$\dot{u}_m = 0 \quad \text{при} \quad r = R, \qquad \frac{\partial r\dot{u}_m}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = R. \tag{8.22}$$

Выражение (8.21) в том и другом случае представляет собственные функции. Что касается собственных значений k^2, то они согласно (8.22) получаются при решении уравнения

$$J_{n+1/2}(kR) = 0 \tag{8.23}$$

или, соответственно,

$$J_{n+1/2}(kR) + 2kRJ'_{n+1/2}(kR) = 0. \tag{8.24}$$

В заключение приведем справочные сведения о специальных функциях, входящих в (8.21). Присоединенные функции Лежандра вычисляются следующим образом:

$$P_n^{(m)}(t) = (1-t^2)^{m/2}\frac{d^m P_n(t)}{dt^m}, \qquad n = 0, 1, \ldots, m, \tag{8.25}$$

где $P_n(t)$ — полиномы Лежандра:

$$P_0(t) = 1, \quad P_1(t) = t, \quad P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1),$$

$$P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t), \ \ldots; \tag{8.26}$$

$$(n+1)P_{n+1}(t) - t(2n+1)P_n(t) + nP_{n-1}(t) = 0.$$

Для функций Бесселя полуцелого порядка существует представление:

$$J_{n+1/2}(x) = (-1)^n x^{n+1/2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d^n}{(x\,dx)^n}\frac{\sin x}{x}. \tag{8.27}$$

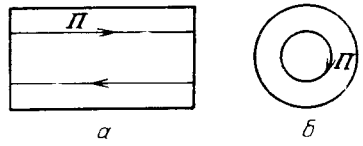
В частности,

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x, \quad J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right). \tag{8.28}$$

§ 8.1. Общая теория электромагнитных резонаторов

8.1.1. Накопление энергии в объеме. Резонатор и направляющая структура (А). Рассматривая в предыдущих главах различные волновые процессы, мы отмечали, что распространяющиеся, *бегущие* волны переносят энергию. Между тем, еще в пп. 4.0.2, 4.2.2 было введено представление о *стоячей* волне, наложении двух противоположно направленных волн с одинаковыми амплитудами; в этом случае (при отсутствии потерь) энергия в среднем не переносится. Если в узлах электрического поля однородной стоячей T-волны

(п. 4.2.2) установить идеально проводящие плоскости $z = \text{const}$, прежнее поле сохранится в отсеченном энергетически изолированном объеме. Можно сказать, что противоположно направленные бегущие волны полностью отражаются этими плоскостями, на которые они падают по нормали. Движение энергии при этом имеет колебательный характер, как схематически показано на рис. 8.2*а*. Направление вектора Пойнтинга меняется через четверть периода колебаний поля: он колеблется с удвоенной частотой (см. п. 3.3.1). Расстояние между соседними плоскостями составляет половину волны. Таким образом, условие существования поля между ними выполняется при вполне определенной частоте. Изолированный объем, в котором происходит колебательное движение энергии, в сущности, выступает как ее *накопитель*. Условие накопления энергии можно реализовать не только при колебательном, но и при циклическом движении энергии (рис. 8.2*б*) внутри некоторого объема. Поскольку во всех случаях *свободные* электромагнитные поля в энергетически изолированных объемах могут существовать только при определенных частотах, такие объемы являются *резонаторами*.



а *б*

Рис. 8.2

Легко показать, что резонатором будет любой отрезок некоторой продольно-однородной структуры, отсеченный двумя поперечными идеально проводящими плоскостями (рис. 8.3). Если исходной структурой является прямоугольный (*а*) или, например, круглый (*б*) волновод, то образуется *полый резонатор*; то же можно сказать о резонаторе, образованном коаксиальной линией (*в*). Но все дальнейшие рассуждения будут справедливы и в отношении отсеченного отрезка диэлектрического волновода (*г*) или какой-нибудь иной открытой структуры, например, двухпроводной линии (*д*).

В отсеченной области (рис. 8.3) возможно существование лишь таких полей, которые в дополнение к граничным условиям, свойственным исходной направляющей структуре, удовлетворяют также условию $E_\tau = 0$ на введенных перегородках. Таким свойством может обладать наложение прямой и обратной волн одного типа. Сосредоточив внимание на поперечной электрической компоненте поля, запишем:

$$\dot{E}_{mt} = A\mathscr{E}_t e^{-i\Gamma z} + B\mathscr{E}_t e^{i\Gamma z}, \tag{8.29}$$

где $\mathscr{E}_t$ — поперечная проекция вектора $\mathscr{E}$ (6.12), а A и B — некоторые комплексные коэффициенты. Потребуем обращения $\dot{E}_{mt}$ в нуль на плоскости $z = 0$, что реализуется при $B = -A$, причем выражение (8.29) принимает вид:

$$\dot{E}_{mt} = E_0\mathscr{E}_t \sin \Gamma z, \tag{8.30}$$

где $E_0 = -i2A$; это стоячая волна. Налагая такое же условие при

$z = L$, мы должны положить в (8.30) $\sin \Gamma L = 0$. Отсюда

$$\Gamma = p\pi/L, \quad p = 0, 1, 2, \ldots, \tag{8.31}$$

т. е. постоянная распространения Γ не может быть произвольной величиной, а принимает одно значение из этой последовательности. Поскольку $\Gamma = 2\pi/\Lambda$ (6.7), то из (8.31) следует

$$L = p\Lambda/2, \quad p = 0, 1, 2, \ldots \tag{8.32}$$

При $p = 0$, как видно из (8.30), $\dot{E}_{mt} \equiv 0$: поперечная электрическая компонента вообще отсутствует; эту возможность мы обсудим отдельно. Во всех остальных случаях равенство (8.32) означает, что

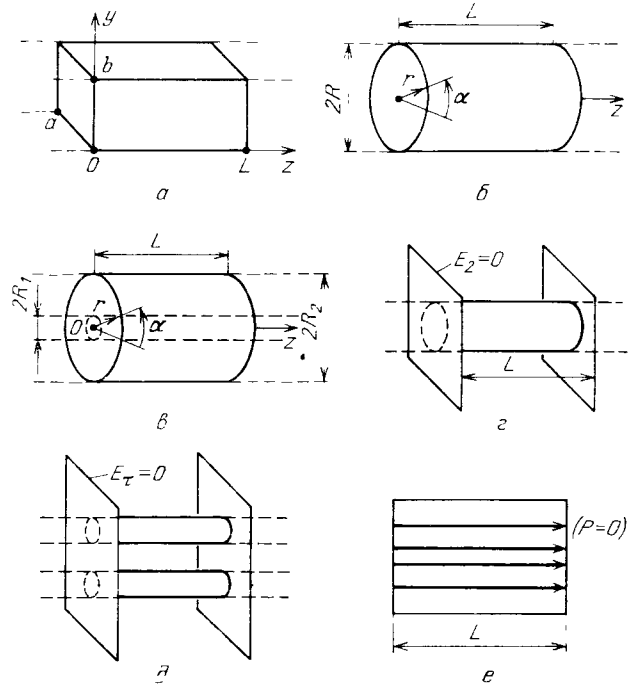


Рис. 8.3

длина отсеченного отрезка направляющей структуры должна быть кратна половине длины волны (того или иного типа).

Ввиду (6.13) $\Gamma^2 = k^2 - \chi^2$. Приравнивая этому выражению величину Γ^2, следующую из (8.31), получаем:

$$k^2 = \chi^2 + (p\pi/L)^2. \tag{8.33}$$

Поскольку $k^2 = (\omega/c)^2 \varepsilon\mu$, то отсюда

$$\omega = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\chi^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2}. \tag{8.34}$$

Полагая пока ε и μ вещественными константами, будем считать также не зависящим от частоты поперечное волновое число χ (как в случае полых волноводов, см. § 7.1, 7.2). Тогда (8.34) выражает в явной форме частоты, при которых поле может существовать в рассматриваемом объеме. Они называются *собственными частотами*. Объем выступает, таким образом, как *резонатор*.

Для каждого типа волны в направляющей структуре, которому отвечает определенное χ, существует бесконечное множество собственных частот, получаемых при переборе p. Собственные частоты, соответствующие всем типам волн при всех значениях p, образуют последовательность

$$0 < \omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \ldots \leqslant \omega_n \leqslant \ldots < \infty.$$

Заметим, что в случае T-волн $\chi = 0$, так что согласно (8.34) собственные частоты зависят только от продольного размера L и являются кратными низшей частоты:

$$\omega = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \frac{p\pi}{L}, \quad p \neq 0. \tag{8.35}$$

Значение $p = 0$ в данном случае невозможно. Это означало бы полное отсутствие электрического поля: для T-волн оно чисто поперечное.

Что касается случая $p = 0$, то поскольку при этом $\Gamma = 0$, соответствующая собственная частота резонатора, определяемая по формуле (8.34)

$$\omega = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \chi, \tag{8.36}$$

равна критической (круговой) частоте $\omega_{кр}$ для данной волны направляющей структуры (ср. $f_{кр} = \omega_{кр}/2\pi$ (6.22)). Так как при $p = 0$ поперечное электрическое поле отсутствует, то должно существовать продольное, а следовательно, речь может идти только о E-волнах. Как известно, при критической частоте поле не изменяется по z и $\Lambda \to \infty$. Согласно (8.32) длина резонатора при этом оказывается неопределенной: $L = 0 \cdot \infty$. Две поперечные плоскости могут располагаться на любом расстоянии друг от друга (рис. 8.3*е*). Заметим, что H-волны при критической частоте имеют подобное же продольное магнитное поле (и поперечное электрическое), так что граничные условия на поперечных идеально проводящих перегородках не могут быть удовлетворены.

8.1.2. Свойства полей резонаторов (А). Мы рассмотрели только определенный класс резонаторов, каждый из которых можно трактовать как энергетически изолированный участок направляющей структуры. Их поля обладают свойствами стоячей волны. В простейшем случае (см. п. 4.2.2) векторы **E** и **H** стоячей волны при отсутствии потерь сдвинуты по фазе на 90°, причем электрическое и магнитное поля синфазны на участке между соседними узлами.

Этим свойством отличаются многие поля резонаторов. Из (8.30) видно, что при вещественных Γ и $\mathscr{E}_t$ поле $\mathbf{E}_t$ синфазно в области постоянного знака синуса. Пусть $\dot{\mathbf{E}}_m = \mathbf{E}_m e^{i\varphi_E}$, где фаза φ_E не зависит от координат. Определяя комплексную амплитуду $\mathbf{H}$. имеем:

$$\dot{\mathbf{H}}_m = \frac{1}{-i\omega\mu_0\mu}\,\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{E}}_m = \mathbf{H}_m e^{i(\varphi_E - \pi/2)},$$

где

$$\mathbf{H}_m = \frac{1}{\omega\mu_0\mu}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}_m$$

— величина вещественная. Это значит, что фаза φ_H вектора $\mathbf{H}$ отличается от φ_E на $\pi/2$. При таком фазовом соотношении наступают моменты, когда существует только электрическое поле или только магнитное. Поток вектора Пойнтинга, проходящий через любое сечение резонатора, в среднем равен нулю. Движение энергии имеет колебательный характер (рис. 8.2*а*).

Можно убедиться, что в ряде случаев возникают и циклические движения энергии (рис. 8.2*б*). Если, например, рассматривать резонатор, показанный на рис. 8.3*б*, при круговой поляризации (см. п. 7.2.2), то в этом случае существует азимутальный циклический поток энергии (рис. 8.4*а*); через заштрихованное сечение проходит поток вектора Пойнтинга. в среднем не уничтожающийся. Между основаниями цилиндра $z = 0$ и $z = L$ устанавливается уже рассматривавшаяся стоячая волна, однако функция $\mathscr{E}_t$ в (8.30) при этом не является вещественной величиной и сделанный ранее вывод о фазовом соотношении $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ оказывается неприменимым. Как отмечалось в п. 7.2.2, волны круговой поляризации возможны не только в круглом волноводе. То же можно сказать и о циклических потоках энергии в резонаторах; мы могли бы рассматривать, в частности, прямоугольный резонатор.

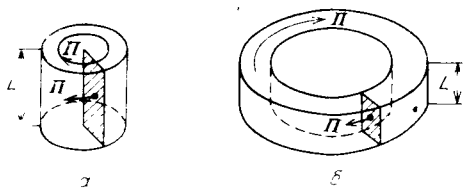


Рис. 8.4

Существуют резонаторы, образованные замкнутой направляющей структурой того или иного вида. На рис. 8.4*б* показан такой резонатор, который можно рассматривать как изогнутый в кольцо прямоугольный волновод. Если в волноводе распространяется переносящая энергию волна, то также образуется циклический поток вектора Пойнтинга. Это возможно, если вдоль замкнутого волновода укладывается целое число волн (чем больше радиус кольца, тем с большим основанием можно определять длину волны, как в п. 7.1). Впрочем, этот кольцевой резонатор можно трактовать как отсеченный двумя параллельными плоскостями отрезок коаксиальной линии, и это представление является точным.

Кроме резонаторов, примеры которых представлены на рис. 8.3, нередко применяются и такие, которые уже нельзя рассматривать, как это делалось выше в п. 8.1.1. Резонатором, например, может быть любая металлическая полость, какое-либо диэлектрическое тело, система зеркал, планарная структура и пр.

В общем случае в теории электромагнитных резонаторов ищутся решения уравнений Максвелла или производных уравнений второго порядка при требуемых граничных условиях. В частности, для произвольного полого резонатора с однородной изотропной средой формулируется одна из следующих двух задач:

$$\nabla^2\dot{\mathbf{E}}_m + k^2\dot{\mathbf{E}}_m = 0 \text{ в } V, \qquad \dot{E}_{m\tau} = 0 \text{ на } S \tag{8.37}$$

или

$$\nabla^2\dot{\mathbf{H}}_m + k^2\dot{\mathbf{H}}_m = 0 \text{ в } V, \qquad (\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{H}}_m)_\tau = 0 \text{ на } S \tag{8.37б}$$

(V — объем резонатора, S — граничная поверхность). Соленоидальные решения этих задач ($\mathrm{div}\,\dot{\mathbf{E}}_m = 0$, $\mathrm{div}\,\dot{\mathbf{H}}_m = 0$) дают систему полей, называемых *собственными колебаниями*. Каждое такое решение $\dot{\mathbf{E}}_m^{(n)}$ или $\dot{\mathbf{H}}_m^{(n)}$ ($n = 1, 2, \ldots$) реализуется при некотором *собственном значении* k_n^2 параметра $k^2 = \omega^2\varepsilon\mu/c^2$. Соответствующие значения $\omega = \omega_n$ — это *собственные круговые частоты* резонатора, а k_n — *собственные волновые числа*.

Трехмерные векторные задачи (8.37) аналогичны двумерным скалярным задачам (6.8), (6.9).

Если полый резонатор относится к уже рассматривавшемуся классу (см. рис. 8.3), то векторы $\dot{\mathbf{E}}_m$ и $\dot{\mathbf{H}}_m$ в (8.37) удобно спроецировать на ось z. Это приводит к скалярным задачам относительно $\dot{E}_{mz}$ и $\dot{H}_{mz}$. Легко убедиться, что первая смешанная задача в пп. 8.0.1—8.0.2 — это задача относительно $\dot{u}_m = \dot{E}_{mz}$, а вторая — относительно $\dot{u}_m = \dot{H}_{mz}$. Полное поле можно определить через $\dot{E}_{mz}$ (E-поля) или через $\dot{H}_{mz}$ (H-поля), подобно тому как это делалось в п. 6.1.1 для направляющих структур.

Аналогично первая и вторая задачи из п. 8.0.3 интерпретируются как задачи относительно $\dot{u}_m = \dot{H}_{mr}$ и, соответственно $\dot{u}_m = \dot{E}_{mr}$ шарового резонатора. Они также приводят к двум классам собственных колебаний, а полное поле восстанавливается по радиальной компоненте $\dot{E}_{mr}$ или $\dot{H}_{mr}$.

8.1.3. Учет потерь. Добротность резонаторов (А). Потери энергии в реальных резонаторах обусловлены поглощением в диэлектрических и металлических элементах, а также в ряде случаев излучением во внешнее пространство (например, полый резонатор излучает при наличии отверстия).

Пусть W — запас энергии резонатора при собственных колебаниях некоторого типа с частотой ω, а $P_п$ — мощность потерь. Введем величину

$$Q = \omega W / P_п, \tag{8.38}$$

которая, как мы убедимся, для каждого типа колебаний является константой и называется *добротностью резонатора*. Поскольку рассматривается полная энергия некоторого свободного электромагнитного поля, W и $P_п$ связаны соотношением (1.102); объединяя его с (8.38), получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dW}{dt} + \frac{\omega}{Q} W = 0. \tag{8.39}$$

Его решение

$$W(t) = W(0) \exp\left(-\frac{\omega}{Q} t\right) \tag{8.40}$$

показывает, что запас энергии собственных колебаний экспоненциально падает. Поскольку энергия квадратично связана с полем, то оно также экспоненциально затухает, причем амплитуды компонент $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ изменяются по закону $\exp\left(-\frac{\omega}{2Q} t\right)$. Это значит, что поле испытывает затухающие колебания (п. 3.2.3), причем в методе комплексных амплитуд комплексной величиной оказывается собственная частота (3.49):

$$\dot{\omega} = \omega' + i\omega'', \tag{8.41}$$

где в данном случае

$$\omega' = \omega, \quad \omega'' = \omega/2Q. \tag{8.42}$$

Комплексность собственных частот резонаторов при наличии потерь может быть установлена и непосредственно из полученных ранее формул. Пусть, например, рассматривается полый резонатор с идеально проводящей оболочкой, заполненный поглощающей средой. При этом согласно (8.33) $k^2 > 0$ — величина вещественная, но в силу комплексности ε и μ собственная частота, определяемая по формуле (8.34), комплексна:

$$\omega = \frac{c}{\sqrt{|\varepsilon||\mu|}} \sqrt{\chi^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2} \exp\left(\frac{i\Delta + i\Delta^м}{2}\right) \tag{8.43}$$

(использованы обозначения (3.37)).

Из комплексности собственной частоты вытекает экспоненциальный закон убывания запаса энергии, а следовательно, и постоянство параметра Q, определяемого по формуле (8.38): надо лишь привлечь (1.102).

В большинстве случаев рассматриваются слабо затухающие колебания, для которых $\omega'' \ll \omega'$. Так как при этом локально процесс близок к периодическому, под $P_п$ в (8.38) можно понимать среднюю мощность $\bar{P}_п$ (см. § 3.3).

При вычислении добротности резонаторов различные факторы, определяющие потери, можно учитывать отдельно. Пусть $P_п = P_п^д + P_п^м + P_п^\Sigma$, где имеются в виду потери в диэлектрических элементах, в металлических элементах и на излучение, соответственно. Введем парциальные добротности

$$Q_д = \frac{\omega W}{P_п^д}, \quad Q_м = \frac{\omega W}{P_п^м}, \quad Q_\Sigma = \frac{\omega W}{P_п^\Sigma}, \tag{8.44}$$

каждая из которых вычисляется с учетом одного из этих факторов. Из (8.38) следует, что

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_д} + \frac{1}{Q_м} + \frac{1}{Q_\Sigma}, \tag{8.45}$$

т. е. обратные добротности складываются. Правда, этот вывод нельзя считать строгим (ср. аналогичный случай в п. 6.4.1): действие разных факторов приводит к некоторому перераспределению поля, а следовательно, величина W не будет одной и той же при вычислении разных парциальных добротностей и полной добротности. На практике запас энергии W обычно вычисляют, исходя из распределения поля в резонаторе без потерь. В этом приближении и применяются формулы (8.44), (8.45).

Обратимся теперь к п. 3.3.3, в котором, в частности, рассматривался энергетически изолированный объем с поглощающей средой и было установлено, что свободное электромагнитное поле внутри него должно иметь характер затухающих гармонических колебаний. Воспользуемся выведенной там формулой (3.67). Выражая ω' и ω'' при помощи (8.42), находим:

$$Q = \frac{1}{2 \operatorname{tg}\left[(\Delta + \Delta^м)/2\right]}. \tag{8.46}$$

Получено выражение добротности резонатора, все потери которого обусловлены поглощением в некоторой однородной изотропной среде (диэлектрике); в большинстве случаев магнитные потери отсутствуют: $\Delta^м = 0$.

При вычислении парциальной добротности $Q = Q_д$ можно вместо формулы (8.46) исходить из соответствующего выражения в (8.44). В знаменателе положим: $W_д = W_{max}^э = 2\overline{W}^э$ (очевидно, что также $W = W_{max}^м = \overline{W}^м$), а $P_п^д$ найдем, как $\bar{P}_п^д$; магнитные потери будем считать отсутствующими. Таким образом, согласно (3.51), (1.110) и (3.59)

$$W = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon'}{2} \int_V \dot{\mathbf{E}}_m \dot{\mathbf{E}}_m^* dv, \quad P_п = \frac{\omega \varepsilon_0 \varepsilon''}{2} \int_V \dot{\mathbf{E}}_m \dot{\mathbf{E}}_m^* dv. \tag{8.47}$$

Отсюда

$$Q_д = 1/\operatorname{tg} \Delta. \tag{8.48}$$

Замена величины $P_п$ средней мощностью $\bar{P}_п$ закономерна в обычных условиях, когда $\omega'' \ll \omega'$ ($Q \gg 1$); тогда $\operatorname{tg} \Delta \approx \Delta$ и формула

(8.46), (8.48) дают один и тот же результат. Заметим, что, строго говоря, применение выражения (3.51) справедливо только для безынерционных сред (потери не связаны с процессами поляризации: $\operatorname{tg}\Delta = \sigma/\omega\varepsilon_0\varepsilon$).

Для определения парциальной добротности $Q_м$ будем вычислять запас энергии W через магнитную энергию, как $W^м_{max} = 2\overline{W}^м$, а потери — из теории сильного поверхностного эффекта, а именно при помощи формулы (5.98):

$$W = \frac{\mu\mu_0}{2}\int_{V_1}\dot{\mathbf{H}}_m\dot{\mathbf{H}}^*_m\,dv, \qquad P^м_п = \frac{1}{2\sigma\Delta^0}\int_S \dot{\mathbf{H}}_m\dot{\mathbf{H}}^*_m\,ds. \tag{8.49}$$

Внося это в (8.42), получаем

$$Q_м = 2\frac{\mu}{\mu_м}\frac{1}{\Delta^0}\int_V \dot{\mathbf{H}}_m\dot{\mathbf{H}}^*_m\,dv \Big/ \int_S \dot{\mathbf{H}}_m\dot{\mathbf{H}}^*_m\,ds, \tag{8.50}$$

где $\mu_м$ — относительная магнитная проницаемость металла ($\Delta^0 = \sqrt{2/\omega\mu_0\mu_м\sigma}$). Обычно $\mu_м = \mu = 1$.

Отношение интегралов в (8.50) при сохранении формы резонатора и типа колебаний пропорционально линейному размеру и, следовательно, обратно пропорционально собственной частоте ω. Учитывая частотную зависимость Δ^0, видим, что добротность $Q_м$ изменяется, как $1/\sqrt{\omega}$.

Вычисление парциальной добротности $Q_э$ не сводится к применению некоторой общей формулы. Резонатор нужно рассматривать одновременно со связанной через отверстие электродинамической структурой.

8.1.4. О собственных значениях идеальных полых резонаторов (Б). Для полых резонаторов с идеально проводящей оболочкой справедливы соотношения:

$$k^2 = \frac{\int_V |\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}_m|^2\,dv}{\int_V \dot{\mathbf{E}}_m\dot{\mathbf{E}}^*_m dv} = \frac{\int_V |\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_m|^2\,dv}{\int_V \dot{\mathbf{H}}_m\dot{\mathbf{H}}^*_m\,dv}. \tag{8.51}$$

Отсюда следует, что

$$k^2 > 0 \tag{8.52}$$

независимо от того, является ли внутренняя однородная изотропная среда поглощающей. Выше это было установлено в частном случае, когда резонатор является отрезком полого волновода. Что касается соотношения (8.51), то оно не зависит от формы резонатора.

Заметим, что два равенства, содержащиеся в (8.51), аналогичны интегральному соотношению (6.10), выражающему собственные значения двумерных задач (6.8), (6.9).

ВЫВОД. Чтобы получить выражение k^2 через электрическое поле, обратимся к формулировке первой краевой задачи (8.37). Умножив оба члена уравнения Гельмгольца на $\dot{\mathbf{E}}^*_m$ и применяя тождество (1.29), получим:

$$\dot{\mathbf{E}}^*_m(\operatorname{rot}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}_m - \operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\mathbf{E}}_m) = k^2\dot{\mathbf{E}}_m\dot{\mathbf{E}}^*_m.$$

Второй член в круглых скобках в дальнейшем отбрасывается, так как поле соленоидально ($\operatorname{div}\dot{\mathbf{E}}_m = 0$). Учитывая, что на основании (1.26)

$$\dot{\mathbf{E}}^*_m\operatorname{rot}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}_m = \operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}_m\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}^*_m + \operatorname{div}[\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}_m, \dot{\mathbf{E}}^*_m],$$

проинтегрируем все члены по объему резонатора V и применим теорему Остроградского — Гаусса (1.33). Это дает:

$$\int_V \operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}_m\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}^*_m\,dv + \oint_S[\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}_m.\ \dot{\mathbf{E}}^*_m]\,\mathbf{ds} = k^2\int_V \dot{\mathbf{E}}_m\dot{\mathbf{E}}^*_m\,dv, \tag{8.53}$$

где S — идеально проводящая оболочка объема V. Поскольку $\dot{E}_{mτ} = 0$ на S, поверхностный интеграл исчезает и из (8.53) следует первое из равенств (8.51). Чтобы получить второе, заменим в (8.53) $\dot{\mathbf{E}}_m$ на $\dot{\mathbf{H}}_m$. Поверхностный интеграл и здесь исчезает, так как $(\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_m)_τ = 0$ на S. ■

§ 8.2. Полые резонаторы (А)

8.2.1. Прямоугольный резонатор. Рассмотрим подробно полый резонатор, показанный выше на рис. 8.3*а*. В приближении идеальной проводимости оболочки собственные частоты определяются по формуле (8.34), в которую надо подставить выражение поперечных волновых чисел $\chi = \chi_{mn}$ (7.57), (7.62). В результате имеем:

$$\omega = \omega_{mnp} = \frac{c\pi}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{L}\right)^2} \tag{8.54}$$

(символ ω_{mnp} отражает тот факт, что собственная частота определяется тремя индексами m, n и p). Заметим, что выражение собственных волновых чисел (8.33) в данном случае переходит в (8.4). Собственные колебания будем классифицировать, опираясь на представление о E- и H-волнах волновода. Поскольку каждой из собственных волн E_{mn} или H_{mn} соответствует бесконечный ряд собственных колебаний, различающихся числами p, будем говорить о *типах собственных колебаний* E_{mnp} и H_{mnp}. Выпишем выражения соответствующих полей:

E-колебания

$$\dot{\mathbf{E}}_m^{mnp} = E_0^{mnp}\left[\mathbf{z}_0 \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\cos\frac{p\pi z}{L} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\chi_{mn}^2}\frac{p\pi}{L}\left(\mathbf{x}_0\frac{m\pi}{a}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} + \mathbf{y}_0\frac{n\pi}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\right)\sin\frac{p\pi z}{L}\right], \quad (8.55)$$

$$\dot{\mathbf{H}}_m^{mnp} = iE_0^{mnp}\frac{\omega_{mnp}\varepsilon_0\varepsilon}{\chi_{mn}^2}\left(\mathbf{x}_0\frac{n\pi}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b} - \right.$$

$$\left. - \mathbf{y}_0\frac{m\pi}{a}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\right)\cos\frac{p\pi z}{L},$$

где E_0^{mnp} — неопределенные коэффициенты. Индексы m, n, p могут принимать следующие значения: m, $n = 1, 2, \ldots$ и $p = 0, 1, 2, \ldots$ (см. пп. 7.1.1, 8.1.1).

H-колебания

$$\dot{\mathbf{E}}_m = -iH_0^{mnp}\frac{\omega_{mnp}\mu_0\mu}{\chi_{mn}^2}\left(-\mathbf{x}_0\frac{n\pi}{b}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} + \right.$$

$$\left. + \mathbf{y}_0\frac{m\pi}{a}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\right)\sin\frac{p\pi z}{L},$$

$$\dot{\mathbf{H}}_m = H_0^{mnp}\left[\mathbf{z}_0\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{p\pi z}{L} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\chi_{mn}^2}\frac{p\pi}{L}\left(\mathbf{x}_0\frac{m\pi}{a}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b} + \mathbf{y}_0\frac{n\pi}{b}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\right)\cos\frac{p\pi z}{L}\right]. \quad (8.56)$$

В отличие от E-колебаний в данном случае m, $n = (0), 1, 2, \ldots$ и $p = 1, 2, \ldots$; нуль в скобках означает, что m и n не могут вместе быть равны нулю.

Вывод формул (8.55), (8.56) несложен. Надо либо сложить две распространяющиеся навстречу волны, взяв выражения их полей из п. 7.1.1, либо исходить из продольных компонент $\dot{E}_{mz}$ и $\dot{H}_{mz}$, которые, как отмечалось в п. 8.1.1, даются формулами (8.7), (8.9). В этом случае поперечные компоненты $\dot{\mathbf{E}}_{mt}$ и $\dot{\mathbf{H}}_{mt}$ можно получить из уравнений Максвелла, которые приводят к формулам, почти не отличающимся от (6.16): вместо $-i\Gamma$ в (6.16) надо записать операцию $\partial/\partial z$.

Прежде чем анализировать собственные колебания прямоугольного резонатора, отметим, что записанное представление полей не является единственно возможным. Можно тремя различными способами выбирать продольную ось z, т. е. получать резонатор, мысленно перегораживая три разных ортогонально ориентированных прямоугольных волновода, как показано на рис. 8.5*а*. Мы получим три различных классификации собственных колебаний.

Возвращаясь к выбору индексов m, n, p в формулах (8.55) и (8.56), видим, что любая комбинация трех целых чисел, одно из которых может быть заменено нулем, определяет один или несколько типов колебаний резонатора. Разные собственные колебания (в частности, E_{mnp} и H_{mnp}), имеющие одинаковые собственные частоты, называются *вырожденными* (в п. 7.1.2 было введено представление о вырожденных волнах). Очевидно, что различные линейные комбинации полей такого рода также представляют собой собственные колебания.

Какова низшая собственная частота резонатора без потерь? Чтобы найти ее значение при заданных размерах a, b и L, надо

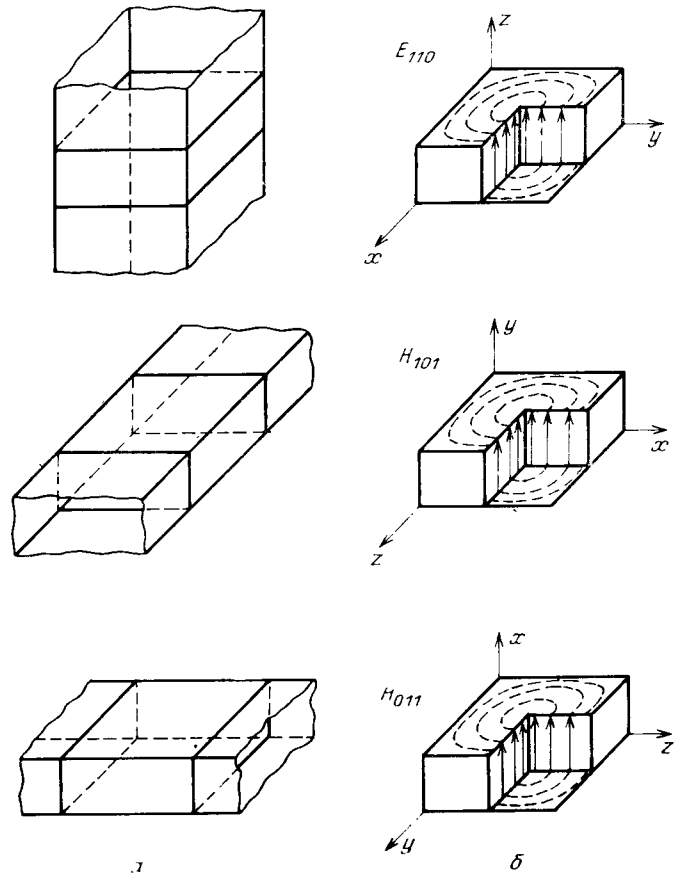


Рис. 8.5

минимизировать выражение ω_{mnp} (8.54) соответствующим выбором чисел m, n и p. Одно из них, которое отвечает наименьшему размеру, берется равным нулю, а каждое из оставшихся — единице. Соответствующий тип колебаний резонатора называется *основным*.

Структура его поля показана на рис. 8.5*б* при трех вариантах выбора системы координат. Одна и та же структура получает разные обозначения: E_{110}, H_{101}, H_{011}. Нулевой индекс соответствует той оси (x, y или z), вдоль которой поле однородно.

Заметим, что в случае, когда ни один из индексов не равен нулю, тип колебаний E и H при повороте оси z на 90° воспринимается как гибридный EH (HE), т. е. как наложение вырожденных колебаний типов E и H.

Рассмотрим несколько картин силовых линий собственных колебаний прямоугольного резонатора. На рис. 8.6 показаны типы колебаний H_{101} (*а*) и H_{304} (*б*); на рис. 8.7 — типы E_{111} (*а*) и E_{324} (*б*); на рис. 8.8 — типы H_{111} (*а*) и H_{324} (*б*). Эти изображения полезно сравнить с соответствующими мгновенными снимками волн в прямоугольном волноводе: рис. 7.9*а, б*; рис. 7.5*а, б*; рис. 7.7*а, б*. Таким образом, сопоставляются стоячие и бегущие волны. Различие картин силовых линий состоит в том, что системы электрических и магнитных линий в одном случае сдвинуты на $\Lambda/4$ по отношению к другому. При этом в волноводе вектор Пойнтинга вдоль оси z не меняет знака. В резонаторе полные поля **E** и **H** сдвинуты по фазе на 90°, а среднее значение вектора Пойнтинга равно нулю.

В заключение приведем формулу, выражающую добротность $Q_м$ для типа колебаний H_{101}:

$$Q_м = \frac{\mu}{\mu_м}\frac{1}{\Delta^0}\,\frac{abL\,(L^2+a^2)}{aL\,(L^2+a^2)+2b\,(L^3+a^3)} \equiv \frac{\mu}{\mu_м}\frac{D}{\Delta^0}. \qquad (8.57)$$

Имеющий размерность длины параметр D в случае кубического резонатора ($a=b=L$) равен $a/3$, а для плоского резонатора ($b \ll a$, $b \ll L$) $D \approx b$. Так как обычно $\mu = \mu_м = 1$, можно сказать, что добротность $Q_м$ плоского резонатора есть отношение его наименьшего размера b к глубине проникновения Δ^0.

ВЫВОД. Из (8.56) следует, что при $m=1$, $n=0$, $p=1$

$$\mathbf{H}_m^2 = (H_0^{101})^2\left(\cos^2\frac{\pi x}{a}\sin^2\frac{\pi z}{L} + \frac{a^2}{L^2}\sin^2\frac{\pi x}{a}\cos^2\frac{\pi z}{L}\right).$$

Поэтому

$$\int_V \mathbf{H}_m^2\,dv = \int_0^a\int_0^b\int_0^L \mathbf{H}_m^2\,dx\,dy\,dz = (H_0^{101})^2\frac{abL}{4}\left(1+\frac{a^2}{L^2}\right);$$

$$\int_S \mathbf{H}_m^2\,ds = 2\int_0^L\int_0^a \mathbf{H}_m^2|_{y=0}\,dz\,dx + 2\int_0^a\int_0^b \mathbf{H}_m^2|_{z=0}\,dx\,dy + 2\int_0^b\int_0^L \mathbf{H}_m^2|_{x=0}\,dy\,dz =$$
$$= (H_0^{101})^2\left[\frac{aL}{2}\left(1+\frac{a^2}{L^2}\right) + \frac{a^3b}{L^2} + bL\right].$$

Подставляя результаты интегрирования в (8.50), получаем (8.57).

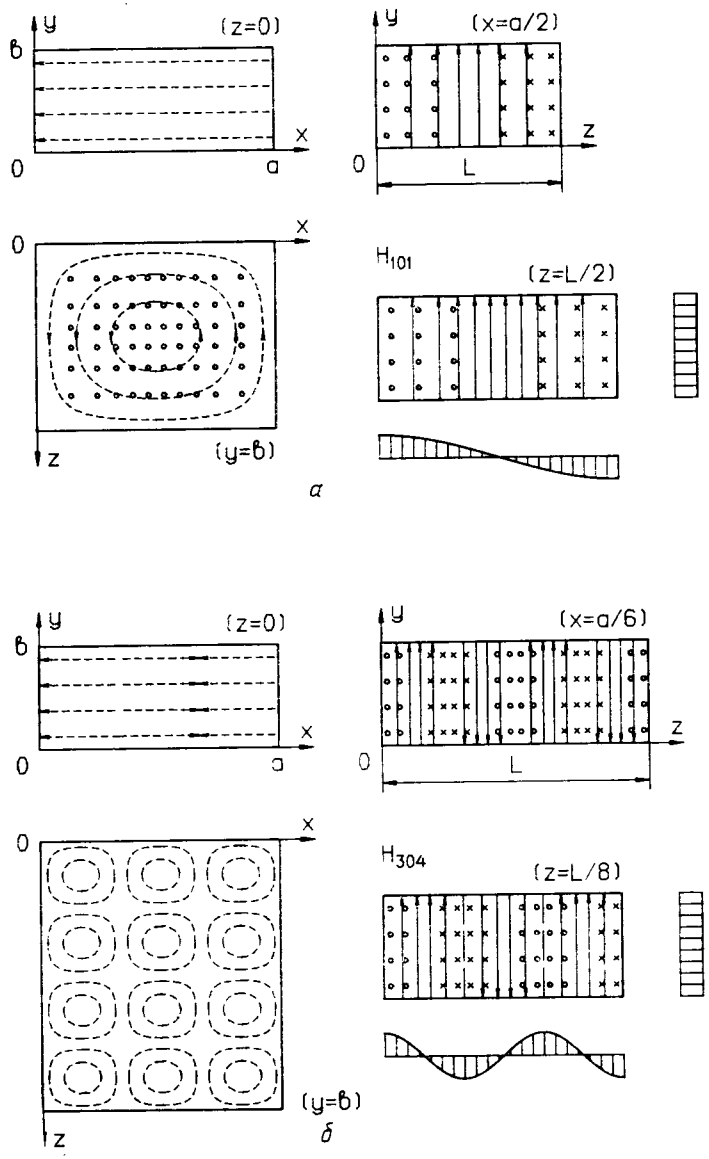


Рис. 8.6. (ЭВМ)

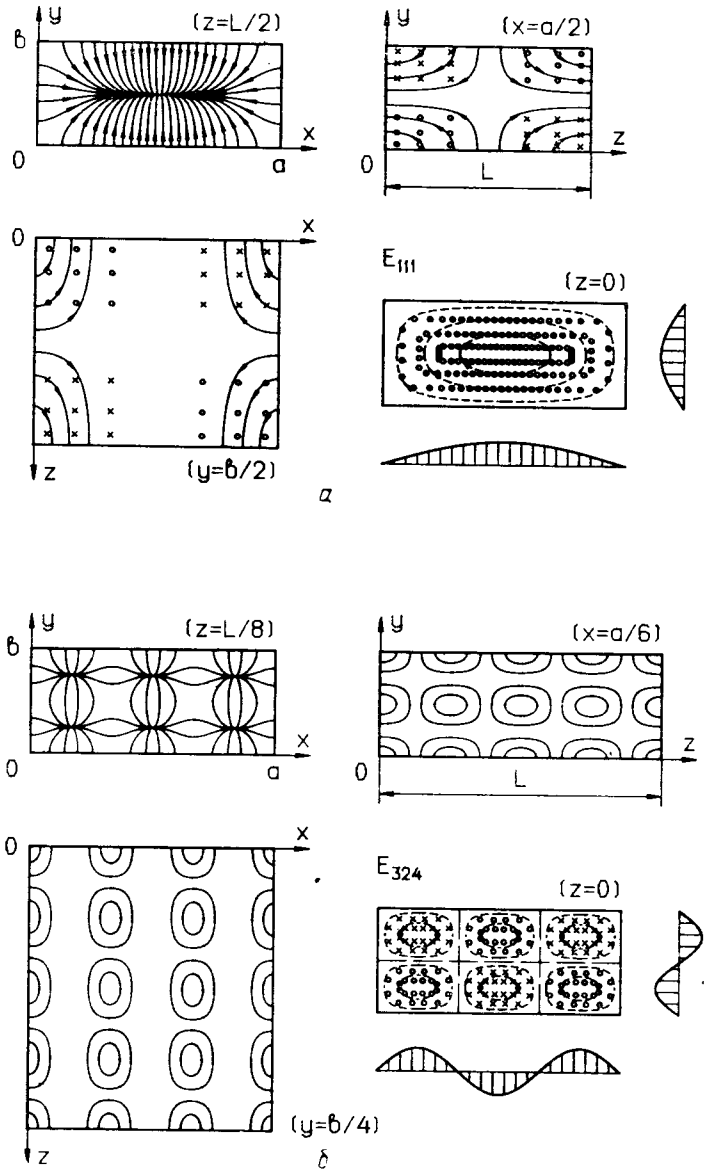


Рис. 8.7. (ЭВМ)

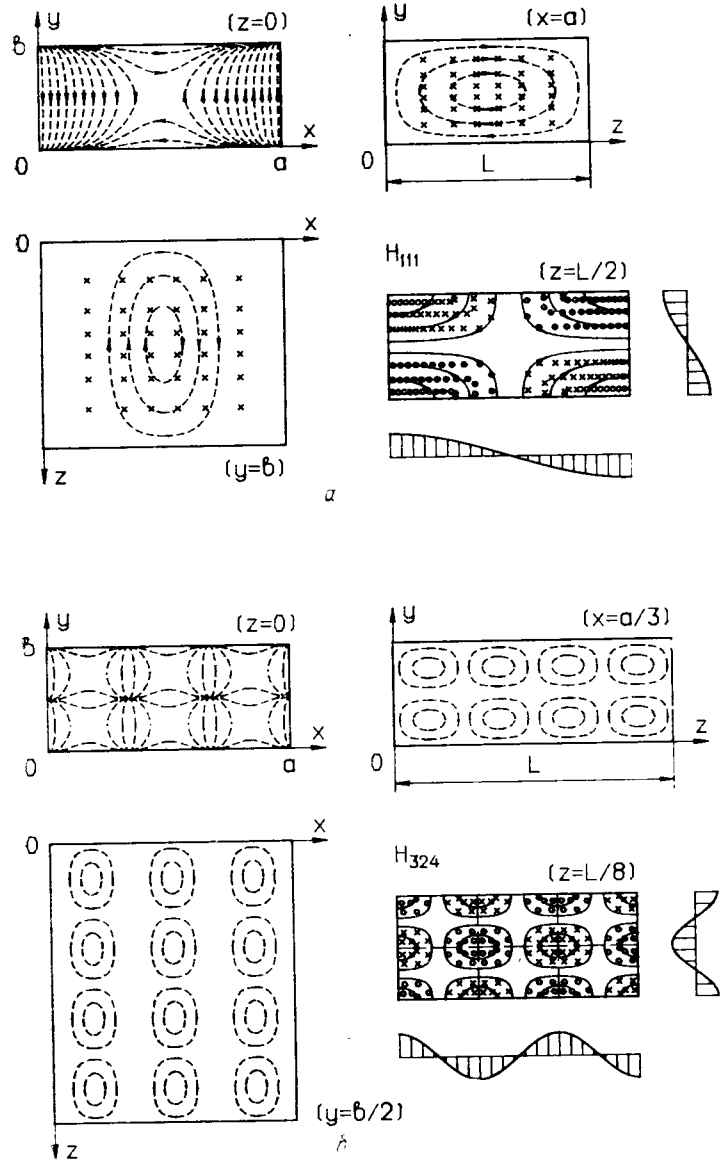


Рис. 8.8. (ЭВМ)

8.2.2. Цилиндрический резонатор. Конкретизируем χ в (8.34) при помощи (7.72), (7.78) и представим полные поля собственных колебаний, как это делалось в п. 8.2.1. В результате получаются следующие выражения:

E-колебания

$$\omega = \omega^E_{nmp} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\left(\frac{B_{nm}}{R}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2}; \tag{8.58}$$

$$\dot{\mathbf{E}}^{nmp}_m = E^{nmp}_0\left\{\mathbf{z}_0 J_n(\chi^E_{nm}r)\,\mathcal{A}(n\alpha)\cos\frac{p\pi z}{L} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\chi^{E2}_{nm}}\frac{p\pi}{L}\left[\mathbf{r}_0\chi^E_{nm}J'_n(\chi^E_{nm}r)\,\mathcal{A}(n\alpha) + \boldsymbol{\alpha}_0\frac{n}{r}J_n(\chi^E_{nm}r)\,\mathcal{A}'(n\alpha)\right]\sin\frac{p\pi z}{L}\right\}$$

$$\dot{\mathbf{H}}^{nmp}_m = iE^{nmp}_0\frac{\omega^E_{nmp}\varepsilon_0\varepsilon}{\chi^{E^2}_{nm}}\left[\mathbf{r}_0\frac{n}{r}J_n(\chi^E_{nm}r)\,\mathcal{A}'(n\alpha) - \right.$$

$$\left. - \boldsymbol{\alpha}_0\chi^E_{nm}J'_n(\chi^E_{nm}r)\,\mathcal{A}(n\alpha)\right]\cos\frac{p\pi z}{L} \tag{8.59}$$

$$(p = 0, 1, 2, \ldots);$$

H-колебания

$$\omega = \omega^H_{nmp} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\left(\frac{A_{nm}}{R}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2}, \tag{8.60}$$

$$\dot{\mathbf{E}}^{nmp}_m = -iH^{nmp}_0\frac{\omega^H_{nmp}\mu_0\mu}{\chi^{H^2}_{nm}}\left[\mathbf{r}_0\frac{n}{r}J_n(\chi^H_{nm}r)\,\mathcal{A}'(n\alpha) - \right.$$

$$\left. - \boldsymbol{\alpha}_0\chi^H_{nm}J'_n(\chi^H_{nm}r)\,\mathcal{A}(n\alpha)\right]\sin\frac{p\pi z}{L}, \tag{8.61}$$

$$\dot{\mathbf{H}}^{nmp}_m = H^{nmp}_0\left\{\mathbf{z}_0 J_n(\chi^H_{nm}r)\,\mathcal{A}(n\alpha)\sin\frac{p\pi z}{L} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\chi^{H^2}_{nm}}\frac{p\pi}{L}\left[\mathbf{r}_0\chi^H_{nm}J'_n(\chi^H_{nm}r)\,\mathcal{A}(n\alpha) + \boldsymbol{\alpha}_0\frac{n}{r}J_n(\chi^H_{nm}r)\,\mathcal{A}'(n\alpha)\right]\cos\frac{p\pi z}{L}\right.$$

$$\mathbf{(p = 1, 2, \ldots).}$$

В формулах (8.58)—(8.61) использованы обозначения (7.72), (7.74), (7.78).

Как и волны круглого волновода, собственные колебания рассматриваемого резонатора поляризационно вырождены; другой тип вырождения связан с равенством корней $A_{0m} = B_{1m}$ (см. п. 7.2.2). При определенных соотношениях размеров могут наблюдаться и другие случаи вырождения. Так, например, при выполнении равенства $(B_{01}/R)^2 = (A_{11}/R)^2 + (\pi/L)^2$ (при этом $L/R \approx 2{,}03$) типы колебаний H_{111} и E_{010} имеют одинаковые собственные частоты, как это видно из (8.58) и (8.60). Поскольку речь идет о наименьшей собственной частоте резонатора без потерь, то оба типа колебаний оказываются основными. Можно говорить о трехкратном вырождении основного типа колебаний, поскольку тип H_{111} уже двукратно вырожден (поляризационно). Как видно, для резонаторов более плоской формы ($L/R < 2{,}03$) основным будет тип E_{010}, а для более удлиненных ($L/R > 2{,}03$) — тип H_{111}.

Строение полей цилиндрического резонатора легко представить себе по рис. 7.13—7.16. По сравнению со случаем волновода электрическое и магнитное поля оказываются сдвинутыми на $\Lambda/4$, как это уже было показано на примере прямоугольного резонатора.

Добротность $Q_м$ для произвольного типа колебаний H_{nmp} выражается следующим образом:

$$Q_м = \frac{\mu}{\mu_м}\frac{1}{\Delta^0}\frac{RL}{\left(\frac{p\pi}{L}\right)^2\frac{2R-L}{k^2} + \frac{LA^2_{nm}}{A^2_{nm}-n^2}}. \tag{8.62}$$

ВЫВОД. Взяв $\mathcal{A}(n\alpha) = \cos n\alpha$, на основании (8.61) пишем:

$$\int_V \mathbf{H}^2_m\,dv = \frac{1}{W^2}\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^L \mathbf{E}^2_m r\,dr\,d\alpha\,dz =$$

$$= \delta\frac{k^2}{\chi^4}\pi L\int_0^{A_{nm}}\left[\frac{n^2J^2_n(x)}{x^2} + J'^2_n(x)\right]x\,dx = \delta\frac{k^2}{2\chi^4}(A^2_{nm}-n^2)J^2_n(A_{nm})\,\pi L$$

(использована формула (7.27)); здесь $\delta = 1$ при $n = 0$ и $\delta = 1/2$ при $n \neq 0$;

$$\int_S \mathbf{H}^2_m ds = 2\int_0^R\int_0^{2\pi} H^2_m|_{z=0}\,r dr\,d\alpha + R\int_0^{2\pi}\int_0^L H^2_m|_{r=R}\,d\alpha\,dz =$$

$$= \delta\left\{4\pi\left(\frac{p\pi}{L}\right)^2\frac{1}{\chi^4}\int_0^{A_{nm}}\left[\frac{n^2J^2_n(x)}{x^2} + J'^2_n(x)\right]x\,dx + \right.$$

$$\left. + \pi LRJ^2_n(A_{nm})\left[1 + \frac{n^2}{\chi^4R^2}\left(\frac{p\pi}{L}\right)^2\right]\right\} =$$

$$= \delta\pi\left\{\frac{2}{\chi^4}\left(\frac{p\pi}{L}\right)^2(A^2_{nm}-n^2) + LR\left[1 + \frac{n^2}{\chi^4R^2}\left(\frac{p\pi}{L}\right)^2\right]\right\}J^2_n(A_{nm}).$$

Подстановка найденных интегралов в (8.50) приводит к (8.62). ■

Без вывода приведем простую формулу, выражающую добротность $Q_м$ для типа колебаний E_{010}:

$$Q_м = \frac{\mu}{\mu_м}\frac{1}{\Delta^0}\frac{RL}{R+L}. \tag{8.63}$$

8.2.3. Другие полые резонаторы. Рассмотрим в краткой форме некоторые другие полные резонаторы.

Рассекая идеально проводящими поперечными плоскостями коаксиальную линию (см. п. 7.3.1), получаем *коаксиальный резонатор*. Если ограничиться рассмотрением собственных колебаний типа T, собственные частоты $\omega = \omega_p$ будут определяться формулой (8.35). Соответствующие типы колебаний будем обозначать T_p. Поле в этом классе представляется формулами, получаемыми из (7.90).

$$\dot{\mathbf{E}}_m = -\mathbf{r}_0 i H_0^p W \frac{1}{r} \sin\frac{p\pi z}{L}, \quad \dot{\mathbf{H}}_m = \boldsymbol{\alpha}_0 H_0^p \frac{1}{r} \cos\frac{p\pi z}{L}. \qquad (8.64)$$

Здесь $H_0^p = \dot{I}_m^0/2\pi$, где $\dot{I}_m^0$ — комплексная амплитуда тока внутреннего проводника в пучности.

На рис. 8.9*а* показано строение поля типа T_1.

На основании (8.50) и (8.64) нетрудно получить следующее выражение добротности $Q_м$ коаксиального резонатора для типа колебаний T_p:

$$Q_м = \frac{\mu}{\mu_м}\frac{1}{\Delta^0}\frac{2L\ln(R_2/R_1)}{4\ln(R_2/R_1) + L(1/R_1 + 1/R_2)}. \qquad (8.65)$$

Чтобы рассмотреть типы колебаний коаксиального резонатора, принадлежащие классам E и H, надо действовать так же, как в

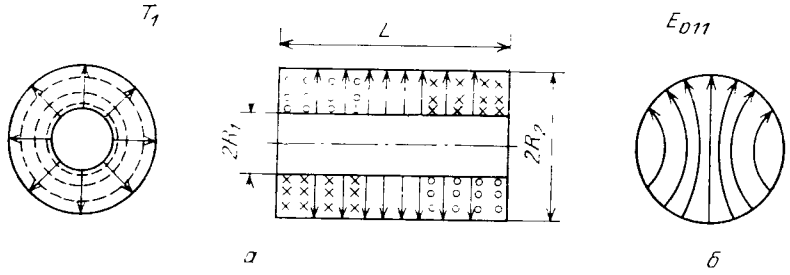


Рис. 8.9

случае резонатора цилиндрического (см. п. 8.2.2), но заменить бесселевы функции $J_n(\chi r)$ комбинациями цилиндрических функций (7.53), (7.54); см. также п. 8.0.2.

Идеально проводящая шаровая полость дает пример резонатора, который не сводится к отрезку регулярной направляющей структуры, но строго анализируется на основе метода разделения переменных. Типы колебаний этого *полого сферического резонатора* делятся на классы E и H относительно радиального направления (для E-колебаний $\dot{E}_{mr} \neq 0$, $\dot{H}_{mr} = 0$; для H-колебаний — наоборот). Чтобы найти соответствующие электромагнитные поля, надо решить краевые задачи (8.37). При построении решений векторных уравнений Гельмгольца, входящих в (8.37), используется решение ска

лярного уравнения (8.21) $\dot{u}_m = \dot{u}_m(k;\ r,\ \vartheta,\ \alpha)$. Радиальные компоненты $\dot{E}_{mr}$ и $\dot{H}_{mr}$, исходя из которых можно восстановить полное электромагнитное поле в классах E и H соответственно, отличаются от $\dot{u}_m$ (8.21) множителем $1/r$:

$$\dot{E}_{mr},\quad \dot{H}_{mr} = A\frac{1}{(kr)^{3/2}} J_{n+1/2}(kr)\, P_n^{(m)}(\cos\vartheta) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\alpha. \qquad (8.66)$$

При этом k есть корень уравнения (8.23) в классе H и (8.24) — в классе E. Как видно, собственные частоты $\omega = k/\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu}$ не зависят от индекса m. Низшим является первый из корней уравнения (8.24) при $n=1$: $kR = 2{,}75$. Взяв $m=0$, $n=1$ и $p=1$ (p — номер корня), получаем, таким образом, основной тип колебаний E_{011}; структура поля показана на рис. 8.9*б*. Тип колебаний трехкратно вырожден, поскольку при $n=1$ кроме $m=0$ возможно также значение $m=1$ (как следует из (8.25) и (8.26), при $m>1$ все $P_n^{(m)}$ равны нулю). Ту же, что и E_{011}, собственную частоту имеют типы колебаний E_{111} с азимутальными зависимостями $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ (поляризационное вырождение). Разумеется, все три типа колебаний различаются только ориентацией поля. Они аналогичны типам E_{110}, H_{101} и H_{011} кубического резонатора.

Как известно, при относительно низких частотах используются квазистационарные резонаторы (колебательные контуры), составляемые из индуктивных и емкостных элементов. Поскольку электрическое и магнитное поля при этом можно считать пространственно разделенными (см. п. 2.5.2), применяется теория цепей. Близкими свойствами обладают некоторые полые резонаторы, используемые, в частности, в электронике СВЧ. Таков, например, *тороидальный резонатор*, показанный на рис. 8.10. Его электрическое поле при

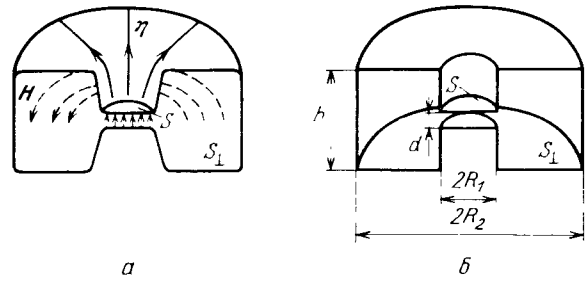


Рис. 8.10

основном типе колебаний можно рассматривать как сосредоточенное между центральными плоскими элементами в узком зазоре. Принимая эту часть за плоский конденсатор, имеем: $C = \varepsilon\varepsilon_0 S/d$ (рис. 8.10*б*). Магнитное поле описывается концентрическими силовыми линиями и подобно полю тороидального солеиоида (см. п. 2.3.3), так что $H = I/2\pi r$, где I — полный ток резонатора, линии

которого расходятся в радиальных сечениях (рис. 8.10*а*). Поэтому

$$\mathscr{L} = \frac{\Phi}{I} \approx \frac{\mu\mu_0}{I} \int\limits_{S_\perp} H ds = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \int\limits_{S_\perp} \frac{ds}{r}.$$

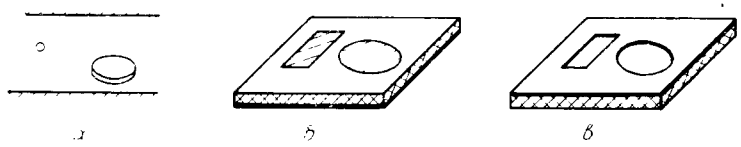
Собственную частоту основного типа колебаний определим по формуле $\omega = (\mathscr{L}C)^{-1/2}$. Внося сюда выражения $\mathscr{L}$ и C, имеем

$$\omega = \sqrt{2\pi d \left(\frac{\varepsilon\mu}{c^2} S \int\limits_{S_\perp} \frac{ds}{r} \right)^{-1}}. \qquad (8.67)$$

§ 8.3. Другие электромагнитные резонаторы (А)

8.3.1. Различные резонаторы в технике СВЧ. Рассматривавшиеся выше полые резонаторы типичны для техники СВЧ, главным образом для диапазона сантиметровых волн. Их отличительным признаком является весьма высокая добротность, которая в отдельных случаях может превышать 10^5. В силу ряда причин (в частности, технологических) наиболее распространены цилиндрические полые резонаторы. Интересно, что цилиндрический резонатор легко сделать перестраиваемым, снабдив передвижным дном — «поршнем». Для типов колебаний H_{0mp} так называемый бесконтактный поршень, т. е. дно, не касающееся цилиндрической поверхности, почти не нарушает условий существования поля, не разрывая путей токов в оболочке (они азимутальны, как уже отмечалось в п. 7.2.2). Различные полые резонаторы сложной формы незаменимы в СВЧ электронике.

Развитие линий передачи (см. п. 7.5.1) затронуло и принципы конструирования резонаторов. Миниатюризация полых резонаторов возможна лишь на пути применения все более оптически плотных заполняющих сред. Поскольку собственные частоты изменяются как $\varepsilon^{-1/2}$, можно изготовить электромагнитный резонатор малых размеров, металлизировав поверхность диэлектрического шарика



а *б* *в*

Рис. 8.11

или, например, диска с высокой проницаемостью. Однако в металлизации нет необходимости (к тому же появятся потери в металле): диэлектрическое тело в оптически менее плотной среде (например, воздухе) само способно быть резонатором. *Диэлектрические резонаторы*, действительно, находят применение на практике. На рис. 8.11*а* показаны диэлектрические резонаторы, помещенные в

полый волновод. Физическая причина, обусловливающая накопление энергии внутри диэлектрического тела, в определенном смысле та же, что при полном отражении волн от границы с менее оптически плотным диэлектриком (см. п. 5.1.4, 5.3.3). Задача о собственных колебаниях диэлектрического шара строго решается методом разделения переменных. При этом внутреннее поле представляется так же, как в случае полого резонатора, а внешнее — через функции Ханкеля. Удовлетворение условиям непрерывности E_τ и H_τ на поверхности шара приводит к двум уравнениям относительно собственных волновых чисел — для классов колебаний E и H.

Поскольку миниатюризация линий передачи привела к появлению различных планарных структур (см. § 7.5), были созданы и соответствующие планарные резонаторы. Таковы различные полосковые резонаторы, например, прямоугольный и дисковый (рис. 8.11*б*), а также аналогичные щелевые резонаторы (рис. 8.11*в*).

8.3.2. Оптические и квазиоптические резонаторы. В п. 7.6.2 уже обсуждались системы зеркал и линз, направляющих потоки электромагнитной энергии. Если в такого рода структуре созданы условия существования стоячих волн, мы получим резонатор. Ясно, что простейшим будет резонатор, образованный двумя зеркалами.

На первый взгляд, такая открытая структура кажется менее выгодной, чем полый резонатор, поскольку можно ожидать значительных потерь на излучение. Но необходимо учитывать, что зеркальные резонаторы применяются в условиях, когда их размеры на несколько порядков превышают длину волны. При подобных относительных размерах полого резонатора, т. е. при использовании собственных колебаний весьма высокого порядка, мы попадаем в сгущенную область его спектра: на некоторый фиксированный интервал частот приходится относительно много типов собственных колебаний. Это нежелательно по ряду причин; учитывая потери, можно установить, что, начиная с некоторой частоты, полый резонатор должен утратить резонансные свойства (см. п. 11.1.4). Существование эффекта сгущения спектра легко проверить на примере прямоугольного резонатора. Взяв формулу (8.54), видим, что с ростом m, n и p, соседние собственные частоты действительно сближаются. Между тем сгущение спектра отсутствует в классе T-колебаний: согласно (8.35) частотные интервалы между соседними типами колебаний везде одинаковы. Заметим, что в лучевой трактовке различным типам колебаний полого резонатора сопоставляются разные типы допустимых многократных отражений (рис. 8.12*а*). Если же рассматривать T-колебания для системы двух параллельных идеально проводящих плоскостей, то они описываются простейшей лучевой схемой (рис. 8.12*б*), содержащей прямой и обратной нормальные лучи.

Оптический резонатор из двух плоских параллельных зеркал характеризуется тем, что при достаточно больших углах α (рис. 8.12*в*) многократные отражения невозможны. Не слишком

большие потери на излучение будут только при малых α. Поэтому спектр собственных колебаний оказывается в значительной степени «прореженным». Если иметь в виду лучевые схемы, то возможны лишь параксиальные системы лучей. Поля собственных колебаний, практически, являются T-полями.

Плоские резонаторы, однако, не обладают удовлетворительной устойчивостью по отношению к деформациям, например, перекосам

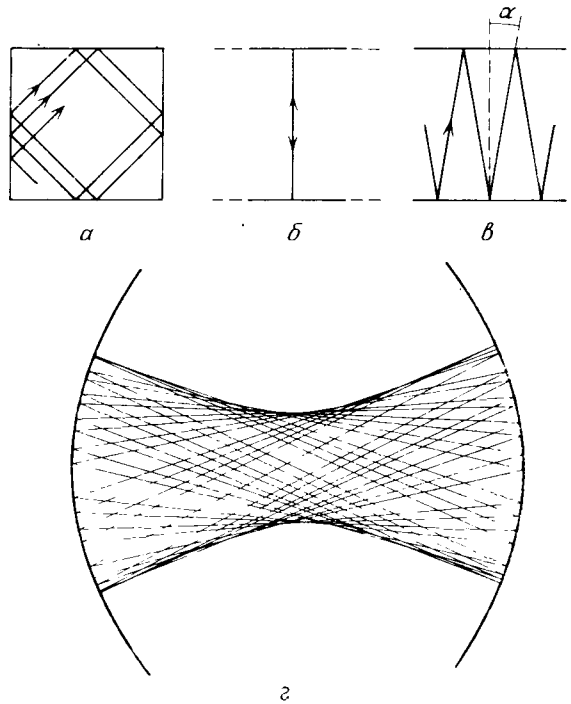


Рис. 8.12. (ЭВМ)

зеркал, которые приводят к резкому возрастанию потерь на излучение. Чаще применяются резонаторы с вогнутыми зеркалами, значительно более устойчивые по отношению к деформациям, но отличающиеся несколько меньшим разрежением спектра. При лучевой трактовке типов колебаний таких резонаторов приходят к некоторым замкнутым конфигурациям, не выходящим за пределы каустики: линия, ограничивающая систему лучей на рис. 8.12*г* (ср. п. 7.6.2).

Имеется сходство между процессами в линзовой линии и резонаторе с вогнутыми зеркалами. В обоих случаях существуют типы волн (бегущих и, соответственно, стоячих), которые имеют разные поперечные распределения; вне некоторой осевой зоны поля быстро убывают. К обсуждению подобных структур мы вернемся в п. 10.6.2.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать, что запас энергии полого резонатора без потерь W равен максимальной электрической энергии $W^{э}_{max}$ или максимальной магнитной энергии $W^{м}_{max}$.

2. Собственная частота резонатора $f = 10$ ГГц, а добротность $Q = 10^5$. За какое время запас энергии собственных колебаний уменьшится в e раз?

3. Кроме запаса энергии резонатора W введем в рассмотрение величину ΔW_T, выражающую изменение запаса энергии за период $T' = 2\pi/\omega'$. Как выразить добротность через W и ΔW_T?

4. Для прямоугольного резонатора с размерами $a = 1$ см, $b = 2$ см и $L = 3$ см (внутренняя среда — вакуум) вычислить первые пять собственных частот и идентифицировать соответствующие типы колебаний.

5. Выписать выражения компонент поля основного типа для резонатора из предыдущего примера.

6. Построить наложение вырожденных типов колебаний H_{101} и H_{011} для прямоугольного резонатора при $a = b$, взяв амплитуды полей равными, а фазы — отличающимися на $\pm 90°$. Показать, что при этом

$$\overline{\Pi} = \pm \frac{H_0^2 \omega \mu_0 \mu}{2\chi} (-\mathbf{x}_0 \sin \chi x \cos \chi y + \mathbf{y}_0 \cos \chi x \sin \chi y) \sin^2 \frac{\pi z}{L} \qquad (8.68)$$

и, следовательно, существует циклический поток энергии, направленный ортогонально оси z. Поглощение не учитывается.

7. Вывести формулы (8.55) и (8.56) двумя способами: а) составляя наложение прямой и обратной волн прямоугольного волновода и б) на основе скалярных решений, полученных в п. 8.0.1.

8. Показать, что в случае собственных колебаний цилиндрического резонатора с вращающейся структурой (при азимутальной зависимости $\exp(\pm in\alpha)$) существует циклический поток энергии, так что, в частности, для типа колебаний H_{111}

$$\overline{\Pi} = \pm \boldsymbol{\alpha}_0 \frac{H_0^2 \omega \mu_0 \mu}{2\chi^2 r} J_1^2(\chi r) \sin^2 \frac{\pi z}{L}. \qquad (8.69)$$

9. Показать, что для резонатора на рис. 8.10*б* формула (8.67) принимает следующий вид:

$$\omega = \sqrt{2d \left(\frac{\varepsilon \mu h}{c^2} R_1^2 \ln \frac{R_2}{R_1} \right)^{-1}}. \qquad (8.70)$$

10. Вычислить добротность $Q_м$ цилиндрического резонатора для типа колебаний H_{011} при следующих данных: материал — медь; $R = 2{,}5$ см; внутренняя среда — воздух.

ЧАСТЬ 3

ИЗЛУЧЕНИЕ И ДИФРАКЦИЯ

Глава 9
ИЗЛУЧЕНИЕ В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 9.0. Предварительные математические сведения (А)

9.0.1. Интегрирование неоднородного уравнения Гельмгольца. Различные векторные уравнения Гельмгольца с правой частью, характеризующей источники электромагнитного поля, обсуждались выше в п. 3.2.2. Начнем с рассмотрения неоднородного скалярного уравнения Гельмгольца

$$\nabla^2 \dot{u}_m(\mathbf{r}) + k^2 \dot{u}_m(\mathbf{r}) = \dot{f}_m(\mathbf{r}), \tag{9.1}$$

которое отличается от уравнения Пуассона (2.7) наличием второго члена в левой части равенства.

Как и при интегрировании уравнения Пуассона (см. п. 2.0.3), в данном случае вводится функция Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, являющаяся решением исходного уравнения (9.1) при правой части в виде дельта-функции Дирака

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \tag{9.2}$$

Теперь в отличие от (2.8) функция Грина имеет вид

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{9.3}$$

Используя, как и в п. 2.0.3, вторую формулу Грина (1.36) и соотношение (1.40), получаем на основе (9.1) и (9.2) интегральное соотношение

$$\dot{u}_m(\mathbf{r}) = \int_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \dot{f}_m(\mathbf{r}')\, dv' + \oint_S \left[\dot{u}_m(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial \nu'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial \nu'} \dot{u}_m(\mathbf{r}') \right] ds' \tag{9.4}$$

(в процессе выкладок использована симметрия функции Грина относительно аргументов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$, т. е. возможность замены $\mathbf{r} \rightleftarrows \mathbf{r}'$ в (9.3)). Как видно, (9.4) по форме совпадает с (2.10).

Внося выражение функции Грина (9.3) в (9.4), получаем

$$\dot{u}_m(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\dot{f}_m(\mathbf{r}')\, e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, dv' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial \dot{u}_m(\mathbf{r}')}{\partial \nu'} - \dot{u}_m(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial \nu'} \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} ds'. \tag{9.5}$$

Для нас важен случай, когда решение $\dot{u}_m(\mathbf{r})$ ищем во всем безграничном пространстве, так что граница S области V относится в бесконечность, тогда как функция $\dot{f}_m(\mathbf{r})$ отлична от нуля только в некоторой ограниченной области.

Выделим класс решений, обладающих таким свойством, что при отнесении в бесконечность границы S поверхностный интеграл в (9.5) исчезает. Напомним, что в п. 2.0.3 рассматривались обладающие аналогичным свойством решения уравнения Пуассона, регулярные в бесконечности. В данном случае выделенный класс потребует отдельного исследования, которое будет произведено ниже в п. 9.0.2. Пока же констатируем, что в рассматриваемом случае из (9.5) следует:

$$\dot{u}_m(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\dot{f}_m(\mathbf{r}')\, e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, dv'. \tag{9.6}$$

Интегрирование здесь фактически распространяется только на область, в которой $\dot{f}_m(\mathbf{r}) \neq 0$. Мы получили выражение решения неоднородного скалярного уравнения Гельмгольца (9.1).

Возьмем векторное уравнение

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{u}}_m(\mathbf{r}) + k^2 \dot{\mathbf{u}}_m(\mathbf{r}) = \dot{\mathbf{f}}_m(\mathbf{r}). \tag{9.7}$$

Рассматривая его проекции на оси декартовой системы координат (ср. п. 2.0.3), получим три скалярных уравнения типа (9.1), решения которых при оговоренных условиях выражаются формулой (9.6). Складывая их, запишем справедливое при тех же условиях представление решения неоднородного векторного уравнения Гельмгольца (9.7):

$$\dot{\mathbf{u}}_m(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\dot{\mathbf{f}}_m(\mathbf{r}')\, e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, dv'. \tag{9.8}$$

9.0.2. Условие излучения. Остается выяснить характер решений, для которых получены представления (9.6), (9.8), и уточнить требования, которым они должны удовлетворять.

Схема, поясняющая роль радиус-векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ при интегрировании (ср. рис. 2.1), дана на рис. 9.1. Пусть точка $P(\mathbf{r})$, в которой рассматривается решение, фиксирована. При интегрировании з

(9.6), (9.8) конец Q радиус-вектора $\mathbf{r}'$ пробегает область, внутри которой $f \neq 0$ (рис. 9.1*а*), т. е., иными словами, локализованы источники.

При вычислении поверхностного интеграла в (9.5) Q находится на поверхности S (рис. 9.1*б*). Будем относить S в бесконечность,

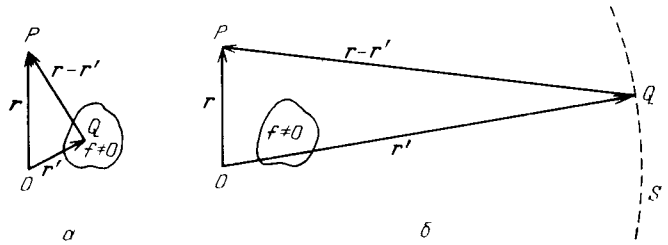


Рис. 9.1

считая эту поверхность сферой радиуса r'. Тогда $\nu' = r'$, а поскольку при $r' \to \infty$ исчезает различие между $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ и r', то подынтегральное выражение в пределе принимает вид:

$$\frac{e^{-ikr'}}{r'} \frac{\partial \dot{u}_m(\mathbf{r}')}{\partial r'} - \dot{u}_m(\mathbf{r}') \left[-ik \frac{e^{-ikr'}}{r'} - \frac{e^{-ikr'}}{(r')^2} \right].$$

Поскольку поверхность сферы пропорциональна $(r')^2$, то, как видно, поверхностный интеграл в (9.5) при отнесении границы S в бесконечность исчезнет, если

$$\lim_{r' \to \infty} r' e^{-ikr'} \left[\frac{\partial \dot{u}_m(\mathbf{r}')}{\partial r'} + ik\dot{u}_m(\mathbf{r}') + \frac{\dot{u}_m(\mathbf{r}')}{r'} \right] = 0.$$

Отбрасывая несущественный общий множитель и бесконечно малый член в скобках, а также изменяя обозначение аргумента $(r' \to r)$, получаем следующее условие:

$$\lim_{r \to \infty} r \left[\frac{\partial \dot{u}_m(\mathbf{r})}{\partial r} + ik\dot{u}_m(\mathbf{r}) \right] = 0, \tag{9.9}$$

которому должны удовлетворять решения $\dot{u}_m(\mathbf{r})$, определяемые по формуле (9.6). Это так называемое *условие излучения Зоммерфельда.*

Легко убедиться, что условию излучения (9.9) удовлетворяют только решения, имеющие при $r \to \infty$ вид расходящихся сферических волн (см. п. 4.0.4):

$$\dot{u}_m(\mathbf{r}) \to \frac{\dot{u}(\vartheta, \alpha)}{r} e^{-ikr}. \tag{9.10}$$

Это значит, что из рассмотрения исключаются все те решения, которые нельзя интерпретировать как волны, создаваемые заданными источниками.

Чтобы записать условие, определяющее класс решений векторного уравнения Гельмгольца (9.7), представляемых формулой (9.8), надо лишь заменить в (9.9) $\dot{u}_m$ на $\dot{\mathbf{u}}_m$. Это векторное условие излучения.

Как видно, решения (9.6), (9.8) по своему характеру, действительно, выражают расходящиеся волны, т. е. волновой процесс, возбуждаемый в области источника (где $f \neq 0$), который, запаздывая, распространяется в пространстве. Такой характер имеет уже функция Грина (9.3). Надо иметь в виду, что при замене $\exp(-ikr)$ на $\exp(ikr)$ формула (9.3) определяет другую функцию Грина (решение уравнения (9.2)), которая сама имеет смысл сходящейся волны и порождает такого же рода решения уравнения (9.1). Этот класс решений лишен физической содержательности.

§ 9.1. Излучение заданных источников (А)

9.1.1. Постановка и обсуждение задачи. Понятие *излучения* так или иначе уже затрагивалось в этой книге. Так в п. 3.1.1 говорилось об электромагнитных полях, существующих в результате действия сторонних сил, т. е. в результате преобразования некоторого вида энергии в электромагнитную. В свою очередь, сторонние силы в электродинамике удобно формализовать при помощи задания сторонних токов. Как уже отмечалось в п. 3.1.1, в качестве стороннего может рассматриваться любой заданный ток. Таков, например, ток антенны, поддерживаемый действием генератора. Область существования стороннего тока выступает как *источник излучения. Поле излучения* находится как решение уравнений Максвелла или вытекающих из них уравнений второго порядка (см. пп. 3.1.2, 3.1.3, 3.2.2) при заданной плотности стороннего тока $\mathbf{j}^{\text{ст}}$. Напомним, что до сих пор, решая различные задачи электродинамики в гл. 4—8, мы полагали $\mathbf{j}^{\text{ст}} = 0$ и определяли некоторые свободные электромагнитные поля, существование которых не связано с источниками.

При решении задачи об излучении заданного распределения тока в однородной изотропной среде предпочтем два подхода. В одном из них исходным является неоднородное уравнение Гельмгольца относительно вектора $\dot{\mathbf{H}}_m$:

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}}_m + k^2 \dot{\mathbf{H}}_m = -\operatorname{rot} \dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}_m, \tag{9.11}$$

а в другом — относительно векторного потенциала:

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{A}}_m + k^2 \dot{\mathbf{A}}_m = -\mu_0 \mu \dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}_m. \tag{9.12}$$

Оба уравнения были сформулированы в п. 3.2.2 ($k^2 = (\omega/c)^2 \varepsilon\mu$). Если найдено решение $\dot{\mathbf{H}}_m$ уравнения (9.11), то $\dot{\mathbf{E}}_m$ определяется

из первого уравнения Максвелла. Если же в результате решения уравнения (9.12) определен вектор $\dot{\mathbf{A}}_m$, то согласно (3.43) находится $\dot{\mathbf{H}}_m$, а затем $\dot{\mathbf{E}}_m$.

Используем тот факт, что записанные неоднородные уравнения Гельмгольца (9.11) и (9.12) при $\omega \to 0$ переходят в уравнения Пуассона. Это значит, что мыслимы столь низкие частоты, при которых $\dot{\mathbf{H}}_m$ и $\dot{\mathbf{A}}_m$ можно определять как решения уравнений Пуассона, полученных для постоянного тока; в частности, $\dot{\mathbf{A}}_m$ находится на основании (2.93). Прежде чем воспользоваться этой формулой, перейдем в (9.12) от комплексных амплитуд к полным комплексным представлениям $\dot{\mathbf{A}}$ и $\dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}$ путем умножения всех членов на $\exp(i\omega t)$. В силу (2.94)

$$\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \int_V \frac{\dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, dv'. \tag{9.13}$$

Этот результат относится к теории квазистационарных полей, обсуждавшихся выше в п. 2.5.1.

Как легко сообразить, недостаток формулы (9.13) заключается в том, что не учитывается время, необходимое для передачи электромагнитного взаимодействия от элементов тока, локализованных в точках $Q(\mathbf{r}')$, в точку наблюдения $P(\mathbf{r})$ (см. рис. 2.1). Попробуем устранить дефект, полагая, что для определения $\dot{A}(\mathbf{r}, t)$ надо заменить $\dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}(\mathbf{r}', t)$ под интегралом на $\mathbf{j}(\mathbf{r}', t-\tau)$, где $\tau = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/v$ есть время, требуемое для преодоления пути $QP = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ со скоростью $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Тогда получается:

$$\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \int_V \frac{\dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/v)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, dv', \tag{9.14}$$

а так как

$$\dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/v) = \dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}_m(\mathbf{r}')\, e^{i\omega(t - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/v)} = \dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}_m(\mathbf{r})\, e^{i(\omega t - k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)},$$

где $k = \omega/v$, и $\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \dot{\mathbf{A}}_m(\mathbf{r})\, e^{i\omega t}$, то из (9.14) следует

$$\dot{\mathbf{A}}_m(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \int_V \frac{\dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}_m(\mathbf{r}')\, e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, dv'. \tag{9.15}$$

Интересно, что эвристический подход привел в данном случае к строгому решению уравнения (9.12), которое соответствует формуле (9.8). Действительно, (9.8) переходит в (9.15), если в соответствии с (9.12) переобозначить в (9.7) $\dot{\mathbf{u}}_m$ как $\dot{\mathbf{A}}_m$ и $\dot{\mathbf{f}}_m$ как $-\mu_0\mu\dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}_m$.

9.1.2. Анализ решений. Итак, мы получили представление векторного потенциала поля излучения заданных источников в однородной среде с проницаемостями ε и μ.

Чтобы получить такое же представление решения уравнения (9.11), снова воспользуемся формулой (9.8), положив $\dot{\mathbf{u}}_m = \dot{\mathbf{H}}_m$ и $\dot{\mathbf{f}}_m = -\operatorname{rot} \dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}_m$. Это дает

$$\dot{\mathbf{H}}_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\operatorname{rot}' \dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}_m(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dv' \tag{9.16}$$

(штрих у rot означает, что дифференцирование производится по штрихованным координатам). Формула (9.16), однако, неудобна из-за необходимости дифференцировать функцию $\dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}_m$. При помощи ряда преобразований, похожих на вывод обобщенного закона Био — Савара в п. 2.3.1, полученный результат приводится к виду

$$\dot{\mathbf{H}}_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} + \frac{ik}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right) \left[\dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}_m(\mathbf{r}'), \mathbf{r}_{0q}\right] e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dv'. \tag{9.17}$$

ВЫВОД. Подынтегральное выражение в (9.16) преобразуем при помощи (1.26), положив $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}_m$ и $\psi = e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$; как видно, под интегралом мы имеем выражение $\psi \operatorname{rot} \mathbf{F}$. Поэтому

$$\dot{\mathbf{H}}_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_V \operatorname{rot}' \frac{\dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}_m(\mathbf{r}')\, e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, dv' - \right.$$
$$\left. - \int_V \left[\operatorname{grad}' \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}_m(\mathbf{r}')\right] dv' \right\}. \tag{9.18}$$

Взяв любую замкнутую поверхность S, охватывающую все источники, преобразуем первый интеграл при помощи формулы (1.37):

$$\int_V \operatorname{rot}' \frac{\dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}_m(\mathbf{r}')\, e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, dv' = \oint_S \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} [d\mathbf{s}', \dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}_m(\mathbf{r}')].$$

Поверхностный интеграл явно равен нулю, так как S проходит там, где нет тока. Следовательно, равен нулю рассматриваемый объемный интеграл, а в (9.18) остается только второй член.

Используя формулы (2.2) и (1.28), произведем следующее преобразование

$$\operatorname{grad}' \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \mathbf{r}_{0q} \left(\frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} + ik \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right),$$

где $\mathbf{r}_{0q}$ — единичный вектор, введенный в п. 2.0.1. В результате из (9.18) следует (9.17). ■

Теперь мы можем произвести некоторый анализ поля излучения на основании представления $\dot{\mathbf{H}}_m$; сначала отметим, что для пользования формулой (9.17) нет необходимости требовать, чтобы функция $\dot{\mathbf{j}}_m^{\text{ст}}$ была дифференцируемой.

Подынтегральное выражение в (9.17) представляет собой сумму двух членов; второй из них исчезает при $\omega \to 0$, а выражение в целом при этом переходит в закон Био — Савара (2.79).

Отношение подынтегральных слагаемых равно $ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$; пусть среда является непоглощающей, так что $k = 2\pi/\lambda$ — величина вещественная; как видно, в зависимости от соотношения величин $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ и λ может преобладать первый или второй член. Во всех случаях при удалении точки наблюдения $P(\mathbf{r})$ расстояние $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ неограниченно возрастает. Когда отношение $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/\lambda$ достаточно велико, первым членом подынтегрального выражения можно пренебречь. Если при этом величина $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ также достаточно велика по сравнению с размерами области источников, то компоненты вектора $\dot{\mathbf{H}}_m(\mathbf{r})$ все более приобретают пространственное распределение типа сферической волны (9.10). Это так называемое *дальнее поле*. Очевидно, что магнитное поле в целом удовлетворяет *условию излучения*

$$\lim_{r\to\infty} r\left[\frac{\partial \dot{\mathbf{H}}_m(\mathbf{r})}{\partial r} + ik\dot{\mathbf{H}}_m(\mathbf{r})\right] = 0 \qquad (9.19)$$

(ср. (9.9)).

Если область источников мала по сравнению с длиной волны, то можно указать такую область расстояний $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \ll \lambda$, когда преобладает первый член подынтегрального выражения, так что при оценке пространственного распределения поля вторым членом можно пренебречь. Это *ближнее поле* фактически подчинено закону Био — Савара.

Вернемся, наконец, к условию излучения. С одной его формой мы уже встретились в п. 5.1.2 при обсуждении задачи о падении волны на границу раздела сред; было отмечено, что условие излучения есть отражение принципа причинности в электродинамике.

Пусть условие излучения Зоммерфельда (9.9) наложено на векторы $\dot{\mathbf{E}}_m$ и $\dot{\mathbf{H}}_m$ (т. е. записано также равенство (9.19) с заменой $\dot{\mathbf{H}}_m$ на $\dot{\mathbf{E}}_m$). Можно показать, что в этом случае решение внешней задачи электродинамики является единственным без дополнительных требований, рассматривавшихся выше в п. 3.4.1.

§ 9.2. Элементарный электрический излучатель, диполь Герца (А)

9.2.1. Элемент переменного тока и колеблющийся диполь. Пользуясь полученными выше формулами, можно находить поля излучения, создаваемые различными распределениями тока. Естественно начать с простейших из них. Обычно рассматривается малый прямолинейный элемент тока, называемый *элементарным электрическим излучателем*, а также *диполем Герца*: Генриху Герцу принадлежит как практическая реализация, так и теория этого объекта. Представление о диполе Герца имеет отнюдь не только историческое значение, оно играет существенную роль в теории антенн.

Поле излучения, создаваемое элементарным электрическим излучателем, проще всего найти, отправляясь от формулы (9.17), и это будет сделано ниже в п. 9.2.2. Но сначала мы должны обсудить физическое содержание «открытого» элемента переменного тока, не принадлежащего какой-то замкнутой цепи.

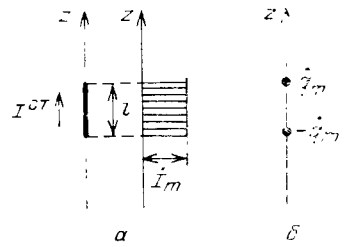


Рис. 9.2

Элемент тока с постоянной комплексной амплитудой $\dot{I}_m^{\text{ст}}$, занимающий участок длиной l на оси z, показан на рис. 9.2*а*. Будем рассматривать его как весьма тонкий цилиндр с поперечным сечением S и постоянной плотностью тока. Таким образом, $\dot{I}_m^{\text{ст}} = \dot{j}_m^{\text{ст}} S$ и $\dot{\mathbf{j}}_m^{\text{ст}} = \mathbf{z}_0 \dot{j}_m^{\text{ст}}$. Привлекая закон сохранения заряда (1.44), имеем:

$$d\dot{j}_m^{\text{ст}}/dz = -i\omega\dot{\rho}_m^{\text{ст}}. \qquad (9.20)$$

Умножив левую и правую части равенства на $S\Delta z$, слева получим $(d\dot{I}_m^{\text{ст}}/dz)\,\Delta z = \Delta\dot{I}_m^{\text{ст}}$, а справа $\dot{\rho}_m^{\text{ст}} S\Delta z = \dot{\rho}_m^{\text{ст}}\Delta V = \Delta\dot{q}_m^{\text{ст}}$ — заряд приходящийся на элемент Δz:

$$\Delta\dot{I}_m^{\text{ст}} = -i\omega\Delta\dot{q}_m^{\text{ст}}. \qquad (9.21)$$

Перемещая элемент Δz по оси z, видим, что как на отрезке l, так и вне его $\Delta\dot{I}_m^{\text{ст}} = 0$. Изменение тока от нуля до максимального значения и от максимального значения до нуля происходит только на концах отрезка l. Из (9.21) следует, что на этих концах сосредоточены колеблющиеся заряды (рис. 9.2*б*) с комплексными амплитудами:

$$\dot{q}_m^{\text{ст}} = \pm i\dot{I}_m^{\text{ст}}/\omega. \qquad (9.22)$$

Таким образом, с элементом тока $\dot{I}_m^{\text{ст}}$ совмещен диполь, момент которого $\mathbf{p}$ (2.4) имеет комплексную амплитуду

$$\dot{\mathbf{p}}_m = -i\frac{\dot{I}_m^{\text{ст}} l}{\omega}\mathbf{z}_0. \qquad (9.23)$$

Отсюда и происходит название *диполь Герца*.

Физический смысл полученного вывода состоит в том, что открытый элемент переменного тока в силу закона сохранения заряда поддерживается колеблющимися зарядами на его концах, имеющими разные знаки, колеблющимся диполем. Фазовый сдвиг на

$\pm 90°$ между зарядами и током означает, что в момент, когда оба заряда максимальны по абсолютной величине, ток равен нулю. Синхронное изменение зарядов вызывает ток, который с уменьшением $|q|$ растет и при отсутствии зарядов становится максимальным, а затем, уменьшаясь, перезаряжает диполь: заряды оказываются противоположными предшествующим. Это половина периода процесса.

9.2.2. **Поле излучения диполя Герца.** Продолжая рассматривать элемент тока, как равномерно обтекаемый током тонкий цилиндр,

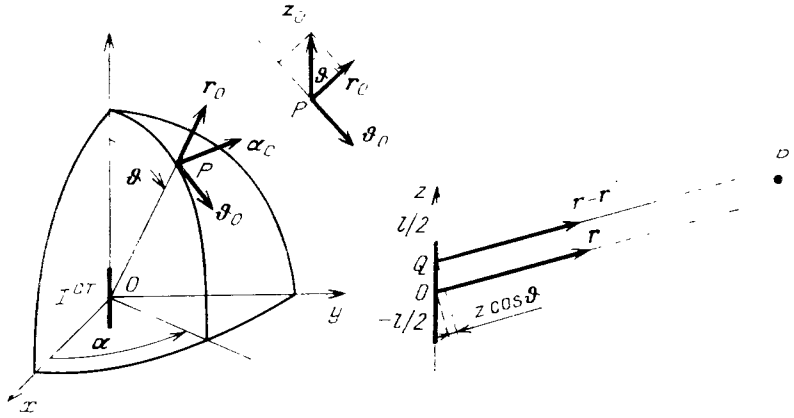


Рис. 9.3

ориентированный вдоль оси z, расположим начало координат в средней точке. При этом формула (9.17) принимает вид:

$$\dot{\mathbf{H}}_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-l/2}^{l/2} \dot{I}_m^{\text{ст}}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}+\frac{ik}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)[\mathbf{z}_0, \mathbf{r}_{0q}]\, e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dz'. \quad (9.24)$$

В дальнейшем будем пользоваться сферической системой координат (рис. 9.3*а*) и потребуем выполнения двух неравенств:

$$l \ll r, \quad l \ll \lambda \quad (9.25)$$

(пусть потери отсутствуют). Элемент должен быть мал по сравнению с расстоянием наблюдения (ср. п. 2.2.1) и мал в волновом масштабе. При этих условиях из (9.24) получается:

$$\dot{\mathbf{H}}_m = \boldsymbol{\alpha}_0 \frac{\dot{I}_m^{\text{ст}} l}{4\pi}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{ik}{r}\right)e^{-ikr}\sin\vartheta, \quad (9.26)$$

$$\dot{\mathbf{E}}_m = -\frac{\dot{I}_m^{\text{ст}} l}{4\pi\omega\varepsilon_0\varepsilon}\left[\mathbf{r}_0\frac{2}{r^2}\left(\frac{i}{r}-k\right)\cos\vartheta + \boldsymbol{\vartheta}_0\frac{1}{r}\left(\frac{i}{r^2}-\frac{k}{r}-ik^2\right)\sin\vartheta\right]e^{-ikr}. \quad (9.27)$$

Эти формулы представляют собой строгое решение задачи при

$\dot{p}_m = \text{const}$ (9.23), $l \to 0$, когда излучающий элемент становится точечным (ср. п. 2.2.1).

ВЫВОД. В силу первого из требований (9.25) векторы $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}$ оказываются близкими по величине и направлению (рис. 9.3*б*). Поэтому заменим $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ на r и вынесем за знак интеграла (9.24) все выражение в круглых скобках. Поскольку при этом $\mathbf{r}_{0q}$ можно заменить на $\mathbf{r}_0$, то выносится также $[\mathbf{z}_0, \mathbf{r}_0] = \boldsymbol{\alpha}_0 \sin\vartheta$. Вынесем и постоянную величину $\dot{I}_m^{\text{ст}}$. Что касается оставшейся пока под интегралом функции $\exp(-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)$, то следует иметь в виду, что в процессе интегрирования величина $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$, изменяясь, может отличаться от r не более, чем на $l/2$. Как бы ни было это изменение мало в сравнении с r, экспонента под интегралом будет испытывать сильное влияние, если длина l не мала в сравнении с λ. Но при выполнении второго требования (9.25) можно положить $\exp(-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)$ равным $\exp(-ikr)$ и также вынести за знак интеграла. В результате интегрирование дает множитель l, и из (9.24) получается равенство (9.26).

Чтобы выразить $\dot{\mathbf{E}}_m$ (вне элемента тока), возьмем первое уравнение Максвелла. Используя (2.5) и табл. 2.2, имеем:

$$\dot{\mathbf{E}}_m = \frac{\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_m}{i\omega\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{-i\dot{I}_m^{\text{ст}} l}{4\pi\omega\varepsilon_0\varepsilon}\begin{vmatrix} \mathbf{r}_0/r^2\sin\vartheta & \boldsymbol{\vartheta}_0/r\sin\vartheta & \boldsymbol{\alpha}_0/r \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\vartheta & \partial/\partial\alpha \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{r}+ik\right)e^{-ikr}\sin^2\vartheta \end{vmatrix}.$$

Выполняя эти действия, приходим к равенству (9.27). ■

Поле излучения, представляемое формулами (9.26) и (9.27), есть не что иное, как *сферическая волна*. При переходе от комплексных амплитуд $\dot{\mathbf{E}}_m$ и $\dot{\mathbf{H}}_m$ к самим векторам поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ члены полученных выражений приобретут множители $\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(\omega t - kr + \varphi)$.

Видно, что на каждой сферической поверхности $r = \text{const}$ любая из компонент поля E_r, E_ϑ и H_α синфазна, но амплитудное распределение зависит от ϑ; оно не остается постоянным при изменении r. Поле обладает осевой симметрией: отсутствует зависимость от азимутальной координаты α. Магнитные силовые линии — концентрические окружности в плоскостях, ортогональных элементу тока. Электрические силовые линии лежат в меридиональных плоскостях $\alpha = \text{const}$.

Рассмотрим поле в *ближней зоне*, т. е. на расстояниях $r \ll \lambda$ ($kr \ll 1$). Отбросив в формулах (9.26) и (9.27) пренебрежимо малые члены и полагая $\exp(-ikr) \approx 1$, получаем

$$\dot{\mathbf{E}}_m \approx \frac{\dot{p}_m}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^3}(\mathbf{r}_0 2\cos\vartheta + \boldsymbol{\vartheta}_0\sin\vartheta), \quad \dot{\mathbf{H}}_m \approx \boldsymbol{\alpha}_0\frac{\dot{I}_m^{\text{ст}} l}{4\pi r^2}\sin\vartheta = \boldsymbol{\alpha}_0\frac{i\omega\dot{p}_m}{4\pi r^2}\sin\vartheta \quad (9.28)$$

(использовано обозначение (9.23)). Это, так называемое, *ближнее поле* элементарного электрического излучателя (см. п. 9.1.2) имеет знакомую нам структуру. Распределение электрического поля оказывается таким, как в случае электростатического диполя, ср. (2.47); однако оно испытывает гармонические колебания синфазно с моментом $\mathbf{p} = \mathbf{p}_m \cos(\omega t + \varphi)$. Что касается магнитного поля, то при сопоставлении (9.28) и (2.80) видно соответствие результата закону Био — Савара. Поскольку в (9.28) $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ сдвинуты по фазе на 90°, $\dot{\mathbf{\Pi}}$ — мнимая величина, а следовательно (см. п. 3.3.1), $\overline{\mathbf{\Pi}} = 0$. Получаемый отсюда вывод об отсутствии (в среднем) переноса энергии, относится, конечно, к приближенному представлению поля.

В *дальней зоне*, т. е. на расстояниях $r \gg \lambda$ ($kr \gg 1$) поле оказывается совершенно иным. Действительно, теперь в выражениях (9.26) и (9.27) становятся пренебрежимо малыми как раз те члены, которые при $r \ll \lambda$ преобладали, в результате

$$\dot{\mathbf{E}}_m \approx \vartheta_0 \frac{i \dot{I}_m^{\text{ст}} l \omega \mu_0 \mu}{4\pi} \frac{\sin\vartheta}{r} e^{-ikr},$$
$$\dot{\mathbf{H}}_m \approx \alpha_0 \frac{i \dot{I}_m^{\text{ст}} l \omega \mu_0 \mu}{4\pi W} \frac{\sin\vartheta}{r} e^{-ikr}. \tag{9.29}$$

Это *дальнее поле* есть сферическая волна, электрическая и магнитная компоненты которой синфазны и имеют характер, отвечающий условию излучения (ср. (9.10)). Поле не имеет компонент, нормальных поверхности фронта $r = \text{const}$, т. е. может быть отнесено к классу T.

Волна неоднородна: амплитуды векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ не постоянны на поверхности фронта, но угловое распределение поля уже не зависит от r, оно окончательно сформировалось. Формулы (9.29) соответствуют представлению (5.113) и, в частности,

$$\dot{\mathbf{E}}_m = W[\dot{\mathbf{H}}_m, \mathbf{r}_0], \tag{9.30}$$

где W — волновое сопротивление в классе T-волн. Это значит, что волна является *локально-плоской* (п. 5.5.1) и в достаточно малой области пространства практически не отличается от плоской однородной T-волны (см. § 4.1).

Синфазность векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ рассматриваемой сферической волны означает вещественность вектора $\dot{\mathbf{\Pi}}$, который, таким образом, равен средней величине $\overline{\mathbf{\Pi}}$:

$$\overline{\mathbf{\Pi}} = \operatorname{Re}\dot{\mathbf{\Pi}} = \mathbf{r}_0 \frac{(I_m^{\text{ст}})^2 (l\omega\mu_0\mu)^2}{32\pi^2 W} \frac{\sin^2\vartheta}{r^2}. \tag{9.31}$$

Итак, та составляющая поля, которая пренебрежимо мала в ближней зоне, в дальней становится преобладающей из-за относительно медленного убывания с расстоянием и образует сферическую волну, переносящую энергию, создающую излучение.

Рассмотрим развитие поля излучения диполя Герца во времени. Сначала отметим, что согласно (9.22) временные зависимости заряда и тока диполя выглядят, как это показано на рис. 9.4. Для нескольких моментов времени, которым соответствуют фазы $\omega t = 0$, $\pi/8$, $\pi/4$, $3\pi/8$, $\pi/2$, $5\pi/8$, на рис. 9.5 построены картины электрических силовых линий (в первом квадранте меридиональной плоскости). При $t = 0$ заряды диполя максимальны по абсолютной величине, а ток отсутствует; на малых расстояниях от начала координат $r \ll \lambda$ поле имеет такую же структуру, как в случае идеального электростатического диполя (см. п. 2.2.1). В момент t_2 (фаза $\pi/2$) заряд равен нулю (рис. 9.4). Поэтому (рис. 9.5) не может быть электрических силовых линий, начинающихся на зарядах: все они замкнуты. В предшествующие моменты происходит характерная деформация ближнего поля. Силовые линии вытягиваются и отрываются от диполя. При $t = t_2$ уже сформировался *вихрь*, система замкнутых электрических силовых линий, в дальнейшем расширяющаяся и уходящая на периферию. А в следующий момент (фаза $5\pi/8$) при появлении зарядов противоположных знаков (рис. 9.4) вблизи начала координат возникло новое квазистационарное поле. При $\omega t = \pi$, когда заряды вновь станут максимальными по абсолютной величине, структура поля окажется такой же, как при $t = 0$, только изменится направление $\mathbf{E}$. Мы обсудили, таким образом, развитие поля в течение половины периода процесса.

Для более полного представления о поле излучения на рис. 9.6 показаны еще две картины силовых линий для некоторого промежуточного момента. Сверху показано поле во всех четырех квадрантах, снизу изменен масштаб, так что видна почти сформировавшаяся периодическая зависимость поля по радиальной координате. Штриховыми линиями на рис. 9.5 и рис. 9.6 показаны следы поверхностей, на которых $E_r = 0$. На достаточно большом расстоянии каждая такая поверхность есть фронт сферической волны с максимальным значением $\mathbf{\Pi}$.

Заметим, что первые картины силовых линий поля излучения диполя Герца — в несколько схематической форме — были построены еще самим Герцем [3.2].

9.2.3. Элементарный электрический излучатель как антенна. Из формул (9.29) и (9.31) видно, что элемент тока вообще не излучает в направлении своей оси ($\vartheta = 0$), а в экваториальной плоскости ($\vartheta = 90°$) излучение максимально. Распределение излучения в пространстве удобно охарактеризовать при помощи функции

$$F(\vartheta, \alpha) = \sqrt{\overline{\Pi}(\vartheta, \alpha)} / \sqrt{\overline{\Pi}_{\max}} = |\sin\vartheta|. \tag{9.32}$$

Это так называемая *нормированная характеристика направленности*, которая используется в теории антенн. График этой функции показывает распределение излучения в некоторой меридиональной плоскости (рис. 9.7*а*) и называется *диаграммой направленности.*

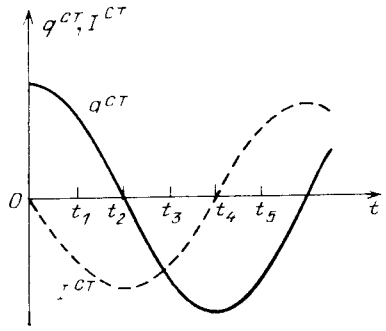


Рис. 9.4

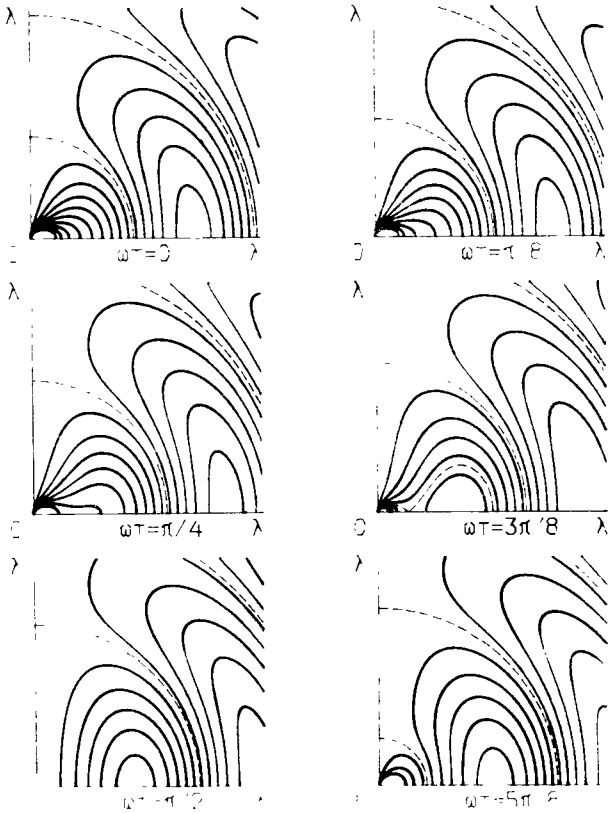
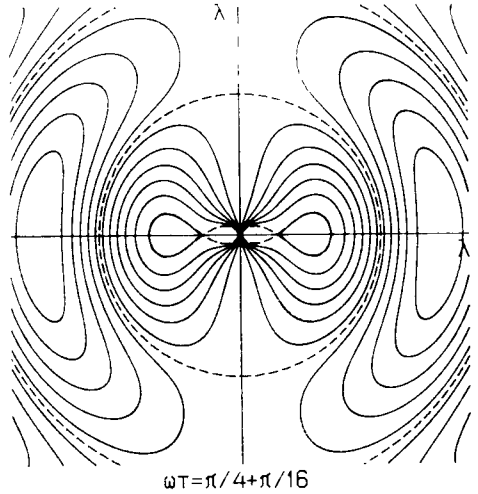


Рис. 9.5. (ЭВМ)



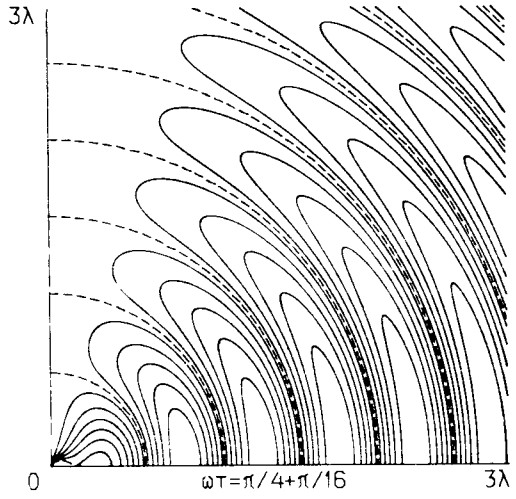


Рис. 9.6. (ЭВМ)

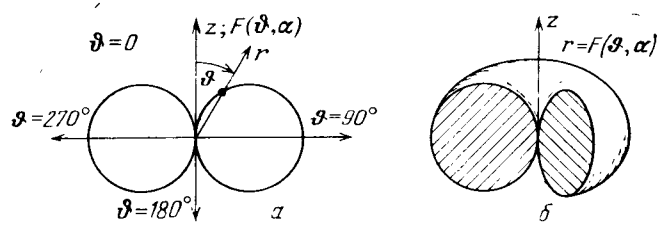


Рис. 9.7

Пространственная диаграмма направленности — тело вращения этой кривой, тор, показанный на рис. 9.7*б*. Употребляется еще характеристика, называемая *коэффициентом направленности действия*. Это отношение $\overline{\Pi}$ к некоторой величине $\overline{\Pi}_0$, полученной в предположении, что при той же мощности излучение распределено равномерно:

$$D(\vartheta, \alpha) = \overline{\Pi}(\vartheta, \alpha)/\overline{\Pi}_0. \tag{9.33}$$

Какова мощность излучения элементарного электрического излучателя? Эту величину можно найти как поток вектора $\overline{\Pi}$ (9.31) через некоторую координатную сферу:

$$\overline{P}^{\Sigma} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \overline{\Pi}_r r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\alpha = \frac{(I_m^{\text{ст}})^2 l^2 \mu_0^2 \mu^2 \omega^2}{16\pi W} \int_0^{\pi} \sin^3\vartheta\, d\vartheta \tag{9.34}$$

(разумеется, можно было бы взять любую замкнутую поверхность, охватывающую излучатель). В результате интегрирования находим

$$\overline{P}^{\Sigma} = \frac{\pi}{3} (I_m^{\text{ст}})^2 W \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2. \tag{9.35}$$

Нередко пишут, используя форму закона Джоуля — Ленца,

$$\overline{P}^{\Sigma} = \frac{1}{2} (I_m^{\text{ст}})^2 \mathcal{R}^{\Sigma}, \quad \mathcal{R}^{\Sigma} = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 W \tag{9.36}$$

и называют параметр $\mathcal{R}^{\Sigma}$ *сопротивлением излучения*. Очевидно $\mathcal{R}^{\Sigma}$ есть сопротивление, которое при токе $I^{\text{ст}}$ рассеивает мощность, равную мощности излучения диполя Герца в свободное пространство, характеризуя его как «поглотитель энергии».

Теперь мы можем вернуться к формуле (9.33). Учитывая, что при равномерном излучении через сферу радиуса R средняя плотность потока энергии $\overline{\Pi}_0$ есть $\overline{P}^{\Sigma}/4\pi R^2$, а $\overline{\Pi}_{\max} = 3\overline{P}^{\Sigma}/8\pi R^2$, находим, что

$$D_{\max} = 3/2. \tag{9.37}$$

На примере элементарного электрического излучателя было показано применение некоторых представлений теории антенн.

В антенной практике подобно диполю Герца ведут себя металлические стержни, отрезки провода и даже целые сооружения в виде башен и мачт при выполнении условий (9.25).

§ 9.3. Элементарный магнитный излучатель

9.3.1. Постановка задачи (А). Контур постоянного тока на больших расстояниях проявляет себя как магнитный диполь (см. п. 2.3.4). Поэтому следует ожидать, что замкнутый переменный ток при выполнении некоторых условий будет подобен колеблющемуся магнитному диполю.

Поле излучения, создаваемое контуром стороннего тока, можно найти при помощи интегрирования по формуле (9.17), выполнив действия, несколько более громоздкие, чем выше в § 9.2. Мы бы установили, что достаточно малый контур тока излучает как диполь Герца, векторы поля которого **E** и **H** поменялись ролями. Поэтому употребляется название *элементарный магнитный излучатель*, или *магнитный диполь Герца*.

Поскольку задача об элементарном электрическом излучателе выше уже решена, поле аналогичного магнитного излучателя проще всего найти, воспользовавшись принципом двойственности (см. п. 3.4.3). Если в готовом решении задачи (9.26), (9.27) сделать замену величин в соответствии с (3.81), то мы получим решение уравнений Максвелла М (3.80) при заданном элементе магнитного тока $I^{\text{м}}$, который расположен так же, как ранее сторонний ток $I^{\text{ст}}$ (рис. 9.3, а).

Остается уяснить, как в (9.26), (9.27) выполнить замену $\dot{\mathbf{j}}_m^{\text{ст}} \to -\dot{\mathbf{j}}_m^{\text{м}}$. Соответствующий заданному элементу магнитного тока магнитный момент имеет следующую комплексную амплитуду:

$$\dot{\mathbf{m}}_m = -i \frac{\dot{I}_m^{\text{м}} l}{\omega} \mathbf{z}_0. \tag{9.38}$$

Эта формула — магнитный аналог ранее полученного выражения (9.23). Она выводится совершенно так же (см. п. 9.2.1), но вместо (9.33) надо взять закон сохранения магнитного заряда (3.82). Теперь мы можем сформулировать окончательное правило замены величин. Так как замена $\dot{\mathbf{j}}_m^{\text{ст}} \to -\dot{\mathbf{j}}_m^{\text{м}}$ ведет к $\dot{I}_m^{\text{ст}} \to -\dot{I}_m^{\text{м}}$, то на основании (9.38): $\dot{I}_m^{\text{ст}} \to -i\omega \dot{m}_m/l$.

Окончательно вместо (3.81) имеем:

$$\varepsilon_0\varepsilon \rightleftarrows \mu_0\mu, \quad \dot{I}_m^{\text{ст}} \to -i\frac{\omega \dot{m}_m}{l}, \quad \dot{\mathbf{E}}_m \to -\dot{\mathbf{H}}_m. \quad \dot{\mathbf{H}}_m \to \dot{\mathbf{E}}_m. \tag{9.39}$$

9.3.2. Поле излучения магнитного диполя Герца (А). Замена величин в соответствии с (9.39) приводит формулы (9.26), (9.27) к следующему виду:

$$\dot{\mathbf{H}}_m = \frac{\dot{m}_m}{4\pi\mu_0\mu} \left[\mathbf{r}_0 \frac{2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + ik\right)\cos\vartheta + \vartheta_0 \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r} - k^2\right)\sin\vartheta\right] e^{-ikr}, \tag{9.40}$$

$$\dot{\mathbf{E}}_m = \alpha_0 \frac{\dot{m}_m \omega}{4\pi}\left(\frac{-i}{r^2} + \frac{k}{r}\right) e^{-ikr} \sin\vartheta. \tag{9.41}$$

Это представление поля излучения, создаваемого колеблющимся магнитным моментом **m**. Формулы являются точными в случае

идеального магнитного диполя ($\dot{m}_m = \text{const}$, $l \to 0$); в остальных случаях должны быть выполнены условия (9.25).

Совершенно так же, как это делалось в случае элементарного электрического излучателя, выпишем на основании (9.40), (9.41) представления ближнего и дальнего полей. В первом случае $r \ll \lambda$ ($kr \ll 1$) и формулы принимают вид

$$\dot{\mathbf{E}}_m \approx -\alpha_0 \frac{i\omega \dot{m}_m}{4\pi r^2} \sin\vartheta,$$
$$\dot{\mathbf{H}}_m \approx \frac{\dot{m}_m}{4\pi\mu_0\mu^3}(\mathbf{r}_0 2\cos\vartheta + \boldsymbol{\vartheta}_0 \sin\vartheta). \tag{9.42}$$

Во втором случае $r \gg \lambda$ ($kr \gg 1$) и получается следующее представление поля:

$$\dot{\mathbf{E}}_m \approx \alpha_0 \frac{\dot{m}_m k^2}{4\pi\mu_0\mu} W \frac{\sin\vartheta}{r} e^{-ikr},$$
$$\dot{\mathbf{H}}_m \approx -\boldsymbol{\vartheta}_0 \frac{\dot{m}_m k^2}{4\pi\mu_0\mu} \frac{\sin\vartheta}{r} e^{-ikr}. \tag{9.43}$$

Основные свойства ближнего и дальнего полей и, в частности, их энергетические характеристики остаются такими же, как для элементарного электрического излучателя. Ближнее поле квазистационарно; сопоставление формул (9.42) и (2.102) показывает, что в ближней зоне воспроизводится структура поля магнитостатического диполя. Электрическое и магнитное поля сдвинуты по фазе на 90°. В дальней зоне поля синфазны. Установившаяся сферическая волна является локально плоской и удовлетворяет соотношению (9.30). Развитие поля во времени происходит так же, как в случае электрического диполя Герца, только взяв изображения на рис. 9.5, рис. 9.6, надо трактовать электрические силовые линии как магнитные.

Если магнитный диполь Герца реализован в виде контура стороннего тока $I^{ст}$ с площадью S, то в формулах (9.40)—(9.43) надо взять m_m как абсолютное значение вектора

$$\dot{\mathbf{m}}_m = \mathbf{z}_0 \mu_0 \mu \dot{I}^{ст}_m S. \tag{9.44}$$

Эта запись — прямое следствие соотношения (2.98).

Из полученного представления поля следует, что

$$\overline{\Pi} = \operatorname{Re}\dot{\Pi} = \mathbf{r}_0 \frac{m_m^2 k^4 W}{32\pi^2 (\mu_0\mu)^2} \frac{\sin^2\vartheta}{r^2}. \tag{9.45}$$

Излучение распределено в пространстве совершенно так же, как в случае элементарного электрического излучателя. По-прежнему

$F(\vartheta, \alpha) = |\sin\vartheta|$ и сохраняют свое значение диаграммы на рис. 9.7, а также формула (9.37).

Вычислив поток вектора $\overline{\Pi}$ (9.44) через некоторую координатную сферу подобно тому, как это делалось в п. 9.2.3, получаем

$$\overline{P}^{\Sigma} = \frac{4\pi^3}{3} m_m^2 \frac{c^2}{\varepsilon\mu W} \frac{1}{\lambda^4}. \tag{9.46}$$

Имея в виду контур тока $I^{ст}$, можно ввести представление о сопротивлении излучения $\mathscr{R}^{\Sigma}$. Тогда

$$\overline{P}^{\Sigma} = \frac{1}{2}(I^{ст}_m)^2 \mathscr{R}^{\Sigma}, \quad \mathscr{R}^{\Sigma} = \frac{8\pi^3}{3} W \frac{S^2}{\lambda^4}. \tag{9.47}$$

Очевидно $\mathscr{R}^{\Sigma}$ можно истолковать как дополнительное сопротивление в цепи вследствие излучения. Таким путем можно оценивать потери на излучение в цепях переменного тока.

В антенной технике элементарный магнитный излучатель реализуется в виде ряда конструкций.

9.3.3. Другой способ определения поля излучения (Б). Рассматривая замкнутый контур стороннего тока, вместо определения поля излучения на основании (9.17) будем исходить из выражения векторного потенциала (9.15). При этом окажутся полезными промежуточные результаты, полученные выше в п. 2.3.4 в случае контура постоянного тока.

Пусть круглый контур стороннего тока $I^{ст}$ радиусом a расположен, как было показано на рис. 2.26*а*. Формулу (9.15) перепишем в виде:

$$\dot{\mathbf{A}}_m(\mathbf{r}) = \frac{\mu\mu_0 \dot{I}^{ст}_m}{4\pi} \oint_L \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{l}'. \tag{9.48}$$

она отличается от использовавшегося в п. 2.3.4 выражения (2.95) только экспоненциальным множителем под интегралом. Поэтому вместо (2.100) в данном случае будем иметь

$$\dot{\mathbf{A}}_m(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\alpha}_0 \frac{\mu_0\mu a \dot{I}^{ст}_m}{4\pi} \int_0^{2\alpha} \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\cos\alpha \, d\alpha}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \tag{9.49}$$

где

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = (r^2 + a^2 + 2ra\sin\vartheta\cos\alpha)^{1/2}$$

Как и в п. 2.3.4, рассмотрим предельный случай, взяв $a \to 0$ при $a^2 \dot{I}^{ст}_m = \text{const}$. Поскольку

$$e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = e^{-ikr}(1 - ika\sin\vartheta\cos\alpha$$

теперь надо вычислить:

$$\lim_{\substack{a/r\to 0\\ \dot I_m^{\text{ст}} a^2=\text{const}}} \alpha_0 \frac{\mu_0\mu \dot I_m^{\text{ст}}}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{-a}{r}\left[1-\frac{a}{r}\sin\vartheta\cos\alpha'-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2+\ldots\right]\times$$

$$\times e^{-ikr}(1-ika\sin\vartheta\cos\alpha'+\ldots)\cos\alpha'\,d\alpha',$$

что дает:

$$\dot{\mathbf{A}}_m(\mathbf{r}) = \alpha_0 \frac{\mu_0\mu \dot I_m^{\text{ст}} a^2}{4}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{ik}{r}\right)e^{-ikr}\sin\vartheta \tag{9.50}$$

(ср. (2.101)). Вычисляя $\dot{\mathbf{H}}_m = (\mu_0\mu)^{-1}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{A}}_m$, т. е.

$$\dot{\mathbf{H}}_m = \frac{\dot I_m^{\text{ст}} a^2}{4}\begin{vmatrix} \mathbf{r}_0/r^2\sin\vartheta & \vartheta_0/r\sin\vartheta & \alpha_0/r \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\vartheta & \partial/\partial\alpha \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{r}+ik\right)e^{-ikr}\sin^2\vartheta \end{vmatrix},$$

приходим к выражению (9.40), где $\dot m_m = \mu_0\mu\pi a^2 \dot I_m^{\text{ст}}$ (9.44).

§ 9.4. Обобщенная задача об излучении. Принцип Гюйгенса (А)

9.4.1. Обобщенная задача об излучении и ее решение. Как можно было убедиться на примере задачи об элементарном магнитном излучателе, введенное в п. 3.4.3 представление о магнитных токах, на первый взгляд довольно абстрактное, выступает как полезный инструмент анализа. Поэтому можно ожидать пользы и от дальнейшего обобщения, когда электрические и магнитные источники вводятся в рассмотрение в рамках одной задачи. Эта *обобщенная задача об излучении*, которая формулируется в виде следующей системы уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_m &= i\omega\varepsilon_0\varepsilon\dot{\mathbf{E}}_m + \dot{\mathbf{j}}_m^{\text{ст}}, \\ \operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}_m &= -i\omega\mu_0\mu\dot{\mathbf{H}}_m - \dot{\mathbf{j}}_m^{\text{м}}. \end{aligned} \tag{9.51}$$

Действительно, в силу линейности уравнений (при линейности среды) решение $\dot{\mathbf{E}}_m$, $\dot{\mathbf{H}}_m$ есть наложение двух решений

$$\dot{\mathbf{E}}_m = \dot{\mathbf{E}}_m^{\text{э}} + \dot{\mathbf{E}}_m^{\text{м}}, \qquad \dot{\mathbf{H}}_m = \dot{\mathbf{H}}_m^{\text{э}} + \dot{\mathbf{H}}_m^{\text{м}}, \tag{9.52}$$

где $\dot{\mathbf{E}}_m^{\text{э}}$, $\dot{\mathbf{H}}_m^{\text{э}}$ и $\dot{\mathbf{E}}_m^{\text{м}}$, $\dot{\mathbf{H}}_m^{\text{м}}$ — решения уравнений Максвелла Э и М (3.80), которые представляют поля, создаваемые только электрическими и, соответственно, только магнитными источниками.

Согласно п. 9.1.2,

$$\dot{\mathbf{H}}_m^{\text{э}} = \frac{1}{4\pi}\int_V\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}+\frac{ik}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)[\dot{\mathbf{j}}_m^{\text{ст}}(\mathbf{r}'),\,\mathbf{r}_{0q}]\,e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dv',$$

$$\dot{\mathbf{E}}_m^{\text{э}} = -\frac{i}{\omega\varepsilon_0\varepsilon}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_m^{\text{э}} \text{ — вне источников.} \tag{9.53}$$

Чтобы найти поле $\dot{\mathbf{E}}_m^{\text{м}}$, $\dot{\mathbf{H}}_m^{\text{м}}$, применим принцип двойственности в форме (3.81) к представлению (9.17). В конечном счете имеем:

$$\dot{\mathbf{E}}_m^{\text{м}} = \frac{1}{4\pi}\int_V\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}+\frac{ik}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)[\mathbf{r}_{0q},\,\dot{\mathbf{j}}_m^{\text{м}}(\mathbf{r}')]\,e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dv',$$

$$\dot{\mathbf{H}}_m^{\text{м}} = \frac{i}{\omega\mu_0\mu}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}_m^{\text{м}} \text{ — вне источников.} \tag{9.54}$$

Решение обобщенной задачи об излучении можно выразить и в другой форме. Используя понятие векторного потенциала, согласно (9.15) и (3.43) имеем:

$$\dot{\mathbf{H}}_m^{\text{э}} = \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\int_V\frac{\dot{\mathbf{j}}_m^{\text{ст}}(\mathbf{r}')\,e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dv', \tag{9.55}$$

а $\dot{\mathbf{E}}_m^{\text{э}}$ находится из первого уравнения Максвелла, как в (9.53). Применение принципа двойственности в форме (3.81) приводит от (9.55) к следующему равенству:

$$\dot{\mathbf{E}}_m^{\text{м}} = \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\int_V\frac{\dot{\mathbf{j}}_m^{\text{м}}(\mathbf{r}')\,e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dv'. \tag{9.56}$$

Далее $\dot{\mathbf{H}}_m^{\text{м}}$ находим как в (9.54).

9.4.2. Эквивалентные источники. Принцип Гюйгенса. При определении поля излучения иногда бывает удобно вместо действительных источников рассматривать их эквиваленты. Именно так делалось в § 9.3, когда анализировался элемент фиктивного магнитного тока для определения поля излучения, создаваемого кольцевым сторонним током.

Важную роль играет представление об *эквивалентных поверхностных источниках*. Рассмотрим некоторое электромагнитное поле **E**, **H**; характеризующие его электрические и магнитные силовые линии изображены на рис. 9.8*а*. Пусть это же поле существует только в области *1* и отсутствует в области *2* (рис. 9.8*б*). Какие условия надо поставить на разделяющей границе S (штриховая линия), чтобы их действие оказалось эквивалентным отброшенному полю?

Ясно, что при переходе через поверхность S все компоненты векторов поля теперь будут обрываться. Остается лишь выяснить,

как согласовать это с общими положениями электродинамики. Разрывы компонент D_ν и H_τ, как известно (см. § 1.4), соответствуют существованию поверхностного заряда и поверхностного тока. Поскольку поле отсутствует в области *2*, на поверхности S выполняются условия (1.90). Запишем их в комплексных амплитудах:

$$\dot{\xi}_m = \varepsilon_0 \varepsilon \dot{E}^S_{m\nu}, \quad \dot{\eta}_m = [\mathbf{v}_0, \dot{\mathbf{H}}^S_m] \tag{9.57}$$

(среду полагаем изотропной); индексом S обозначены поля на S.

Но в рассматриваемом случае имеются также разрывы компонент B_ν и E_τ, что противоречит граничным условиям, выведенным

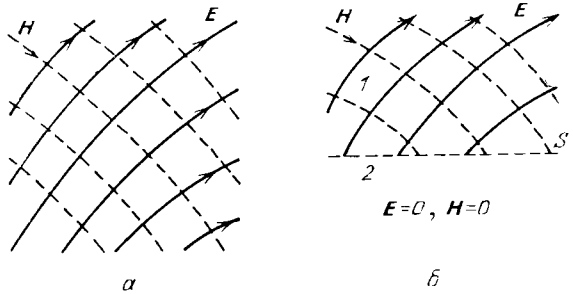


Рис. 9.8

в § 1.4 из обычных уравнений Максвелла. Здесь на помощь приходят условия (3.84) и (3.85), полученные при введении магнитных зарядов и токов. В отсутствие поля в области *2* из них следует:

$$\dot{\xi}^{\text{м}}_m = \mu_0 \mu \dot{H}^S_{m\nu}, \quad \dot{\eta}^{\text{м}}_m = [\dot{\mathbf{E}}^S_m, \mathbf{v}_0]. \tag{9.58}$$

Мы приходим к выводу: первоначальное поле **E**, **H** будет существовать в области *1* вплоть до границы S (без продолжения в область *2*), если на поверхности S распределены электрические и магнитные заряды и токи, связанные с полем соотношениями (9.57) и (9.58).

Сделанный вывод означает, что поле в объеме можно рассматривать как результат излучения источников, распределенных на некоторой поверхности, причем для определения источников достаточно знать поле на поверхности. Полное поле восстанавливается на основании информации о его состоянии на поверхности. Здесь уместно вспомнить идеи Христиана Гюйгенса о волновых процессах. Согласно известному *принципу Гюйгенса*, каждую точку фронта некоторой скалярной волны можно принять за источник локальной сферической волны; новое положение фронта может быть найдено при учете действия всех локальных волн, т. е. при помощи условных поверхностных источников. В широком смысле под принципом Гюйгенса можно понимать введение такого рода источников.

Как же применяется принцип Гюйгенса в электродинамике? Пусть требуется найти поле **E**, **H** в некоторой области V при условии, что источники поля, лежащие вне V, неизвестны, но зато известно поле $\mathbf{E}^S$, $\mathbf{H}^S$ на ограничивающей V поверхности S. Постановка задачи поясняется в двух вариантах на рис. 9.9: задача может быть внутренней (*а*) и внешней (*б*), т. е. поле **E**, **H** ищем внутри ограниченного объема или, соответственно, в бесконечном пространстве. Как следует из п. 3.4.1, знания $\mathbf{E}^S$ и $\mathbf{H}^S$ — при некоторых оговорках — вполне достаточно, чтобы поле в V определялось единственным образом; эта информация даже избыточна.

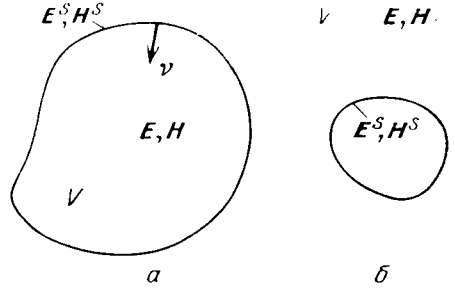


Рис. 9.9

Мысленно отбросим поле за границей S вне V и в соответствии с (9.57), (9.58) введем *эквивалентные поверхностные источники* $\boldsymbol{\eta}^{\text{ст}}$ и $\boldsymbol{\eta}^{\text{м}}$. Ограничимся внешней задачей (рис. 9.9*б*). Это не что иное, как обсуждавшаяся в п. 9.4.1 обобщенная задача об излучении. Ее решение выражается при помощи формул (9.52)—(9.54) или (9.52), (9.55), (9.56). Разумеется, вместо объемных записываются поверхностные интегралы ($V \to S$, $dv \to ds$); при этом

$$\dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}_m \to \dot{\boldsymbol{\eta}}^{\text{ст}}_m = [\mathbf{v}_0, \dot{\mathbf{H}}^S_m] \quad \text{и} \quad \dot{\mathbf{j}}^{\text{м}}_m \to \dot{\boldsymbol{\eta}}^{\text{м}}_m = [\dot{\mathbf{E}}^S_m, \mathbf{v}_0]. \tag{9.59}$$

Поле **E**, **H** находится, таким образом, по его тангенциальным компонентам на поверхности S, входящим в (9.59). Это и есть реализация принципа Гюйгенса в электродинамике.

Надо иметь в виду, что $\dot{\mathbf{E}}^S$ и $\dot{\mathbf{H}}^S_m$ в (9.59) — это векторные функции, связанные уравнениями Максвелла. Рассматривать электрические и магнитные эквивалентные поверхностные источники как независимые было бы ошибкой. Это приводит к противоречию с выводами, сделанными в п. 3.4.1, согласно которым поле единственным образом определяется заданием только электрической или только магнитной продольной компоненты.

9.4.3. Элементы Гюйгенса. Согласно предыдущему, элементы поверхности S с заданным распределением поля могут фигурировать как элементарные излучатели. Это так называемые элементы Гюйгенса, которые можно выделять на самых различных поверхностях в разных полях.

Рассмотрим простейший элемент Гюйгенса в виде элементарной площадки ΔS на плоскости $z = 0$, параллельной фронту плоской однородной волны (рис. 9.10). Распространение волны вдоль оси z можно истолковать как результат излучения всей совокупности

таких элементов при $z=0$. Поле излучения рассматриваемого элемента Гюйгенса в дальней зоне ($r \gg \lambda$) имеет следующий вид:

$$\dot{\mathbf{E}}_m \approx \frac{ik\dot{E}^S_m \Delta S}{4\pi}(1+\cos\vartheta)(\boldsymbol{\vartheta}_0\cos\alpha - \boldsymbol{\alpha}_0\sin\alpha)\frac{e^{-ikr}}{r},$$
$$\dot{\mathbf{H}}_m \approx \frac{ik\dot{E}^S_m \Delta S}{4\pi W}(1+\cos\vartheta)(\boldsymbol{\vartheta}_0\sin\alpha + \boldsymbol{\alpha}_0\cos\alpha)\frac{e^{-ikr}}{r} \qquad (9.60)$$

(излучатель расположен в сферической системе координат, рис. 9.11).

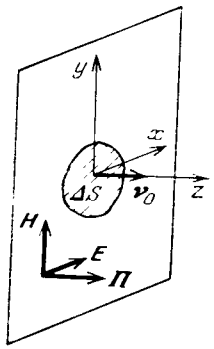


Рис. 9.10

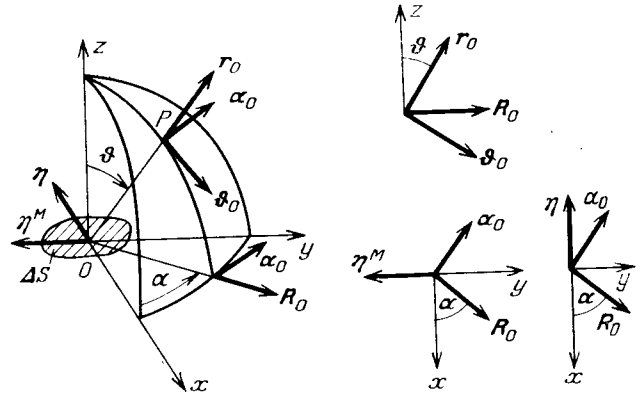


Рис. 9.11

ВЫВОД. При заданной поляризации плоской однородной волны плотности эквивалентных поверхностных токов элемента Гюйгенса выражаются следующим образом:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}^{\text{ст}}_m = [\mathbf{z}_0, \dot{\mathbf{H}}^S_m] = -\mathbf{x}_0 H^S_m, \quad \dot{\boldsymbol{\eta}}^{\text{м}}_m = [\dot{\mathbf{E}}^S_m, \mathbf{z}_0] = -\mathbf{y}_0 \dot{E}^S_m, \qquad (9.61)$$

где имеется в виду, что взятая плоская волна при $z=0$ характеризуется векторами $\dot{\mathbf{E}}^S_m = \mathbf{x}_0 \dot{E}^S_m$ и $\dot{\mathbf{H}}^S_m = \mathbf{y}_0 \dot{H}^S_m$. Пусть размеры элемента малы в сравнении с расстоянием наблюдения (аналогичное условие ставилось при рассмотрении электрического и магнитного элементарных излучателей).

Начнем с определения поля $\dot{\mathbf{E}}^{\text{э}}_m, \dot{\mathbf{H}}^{\text{э}}_m$, создаваемого электрическим током элемента Гюйгенса. Поскольку нас интересует только дальнее поле, отбросим в выражении $\dot{\mathbf{H}}^{\text{э}}_m$ (9.53) первый член в круглых скобках. Переходя к поверхностному интегралу и учитывая первое равенство (9.61), имеем

$$\dot{\mathbf{H}}^{\text{э}}_m \approx \frac{ik}{4\pi}\int_{\Delta S}\frac{[\dot{\boldsymbol{\eta}}^{\text{ст}}_m(\mathbf{r}'), \mathbf{r}_{0q}]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,ds' \approx -\frac{ik\dot{H}^S_m \Delta S}{4\pi}[\mathbf{x}_0, \mathbf{r}_0]e^{-ikr}. \qquad (9.62)$$

Поскольку $\mathbf{x}_0 = \mathbf{R}_0\cos\alpha - \boldsymbol{\alpha}_0\sin\alpha = (\mathbf{r}_0\sin\vartheta + \boldsymbol{\vartheta}_0\cos\vartheta)\cos\alpha - \boldsymbol{\alpha}_0\sin\alpha$ (рис. 9.11), это дает

$$\dot{\mathbf{H}}^{\text{э}}_m \approx \frac{ik\dot{H}^S_m \Delta S}{4\pi}(\boldsymbol{\vartheta}_0\sin\alpha + \boldsymbol{\alpha}_0\cos\vartheta\cos\alpha)\frac{e^{-ikr}}{r}. \qquad (9.63)$$

Из первого уравнения Максвелла в сферических координатах вычисляем:

$$\dot{\mathbf{E}}^{\text{э}}_m \approx \frac{ik\dot{H}^S_m W\Delta S}{4\pi}(\boldsymbol{\vartheta}_0\cos\vartheta\cos\alpha - \boldsymbol{\alpha}_0\sin\alpha)\frac{e^{-ikr}}{r} \qquad (9.64)$$

(члены, убывающие быстрее, чем $1/r$, отброшены).

Аналогично определяем создаваемое магнитным током элемента Гюйгенса поле $\dot{\mathbf{E}}^{\text{м}}_m, \dot{\mathbf{H}}^{\text{м}}_m$. Исходя из (9.54), пишем:

$$\dot{\mathbf{E}}^{\text{м}}_m \approx \frac{-ik}{4\pi}\int_{\Delta S}\frac{[\dot{\boldsymbol{\eta}}^{\text{м}}_m(\mathbf{r}'), \mathbf{r}_{0q}]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,ds' \approx \frac{ik\dot{E}^S_m \Delta S}{4\pi}[\mathbf{y}_0, \mathbf{r}_0]e^{-ikr}, \qquad (9.65)$$

а поскольку $\mathbf{y}_0 = \mathbf{R}_0\sin\alpha + \boldsymbol{\alpha}_0\cos\alpha = (\mathbf{r}_0\sin\vartheta + \boldsymbol{\vartheta}_0\cos\vartheta)\sin\alpha + \boldsymbol{\alpha}_0\cos\alpha$ (рис. 9.11), выражение принимает вид:

$$\dot{\mathbf{E}}^{\text{м}}_m \approx \frac{ik\dot{E}^S_m \Delta S}{4\pi}(\boldsymbol{\vartheta}_0\cos\alpha - \boldsymbol{\alpha}_0\cos\vartheta\sin\alpha)\frac{e^{-ikr}}{r}. \qquad (9.66)$$

Наконец, используется второе уравнение Максвелла, которое дает:

$$\dot{\mathbf{H}}^{\text{м}}_m \approx \frac{ik\dot{E}^S_m \Delta S}{4\pi W}(\boldsymbol{\vartheta}_0\cos\vartheta\sin\alpha + \boldsymbol{\alpha}_0\cos\alpha)\frac{e^{-ikr}}{r}. \qquad (9.67)$$

Чтобы получить полное поле излучения элемента Гюйгенса в дальней зоне, сложим согласно (9.52) поля (9.64) и (9.66), (9.63) и (9.67). Учитывая также, что $\dot{E}^S_m = W\dot{H}^S_m$, приходим к (9.60). ■

Как излучает элемент Гюйгенса? Вычисляя среднее значение вектора Пойнтинга, находим

$$\overline{\boldsymbol{\Pi}} = \operatorname{Re}\dot{\boldsymbol{\Pi}} = \mathbf{r}_0\frac{k^2(E^S_m)^2\Delta S^2}{32\pi^2 W}\left(\frac{1+\cos\vartheta}{r}\right)^2 \qquad (9.68)$$

и, следовательно, нормированная характеристика направленности (см. определение в п. 9.2.3) имеет вид

$$F(\vartheta, \alpha) = {}^1\!/_2(1+\cos\vartheta). \qquad (9.69)$$

Диаграмма направленности в произвольной меридиональной плоскости $\alpha = \text{const}$ есть *кардиоида* (рис. 9.12*а*); объемная диаграмма направленности — ее тело вращения (рис. 9.12*б*). Таким образом, элемент Гюйгенса максимально излучает в направлении оси z ($\vartheta = 0$), в обратном направлении ($\vartheta = 180°$) излучение отсутствует.

Пусть элемент Гюйгенса выбран в виде прямоугольника со сторонами Δx и Δy (рис. 9.13*а*). Согласно (9.61), он является носителем токов:

$$\dot{I}_m^{\text{ст}} = \dot{\eta}_m^{\text{ст}} \Delta y = -\dot{H}_m^S \Delta y, \quad \dot{I}_m^{\text{м}} = \dot{\eta}_m^{\text{м}} \Delta x = -\dot{E}_m^S \Delta x. \tag{9.70}$$

Это значит, что элемент Гюйгенса должен действовать подобно

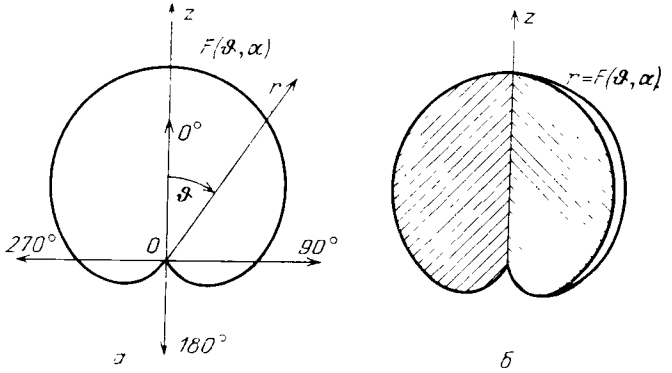


Рис. 9.12

системе двух ортогонально ориентированных диполей Герца — электрического и магнитного (рис. 9.13*б*) с моментами

$$\dot{\mathbf{p}}_m = i\,\frac{\dot{H}_m^S \Delta S}{\omega}\,\mathbf{x}_0, \quad \dot{\mathbf{m}}_m = i\,\frac{\dot{E}_m^S \Delta S}{\omega}\,\mathbf{y}_0. \tag{9.71}$$

Формулы (9.60) можно было бы получить путем наложения полей этих двух элементарных излучателей в дальней зоне. Но, отправляясь от формул (9.29) и (9.43), мы были бы вынуждены преобразовать их к единой сферической системе координат, что требует применения элементов сферической тригонометрии.

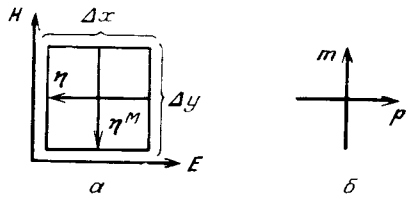


Рис. 9.13

Отметим, наконец, следующее. При выводе формул (9.60) было использовано соотношение $\dot{E}_m^S = W\dot{H}_m^S$. Именно оно отражает тот факт, что элемент Гюйгенса построен в плоскости фронта однородной T-волны. Заменив W на некоторый импеданс Z, легко получить представление поля излучения некоторого обобщенного элемента Гюйгенса. В зависимости от выбора Z можно придавать различный смысл такому элементарному излучателю. В частности, взяв $Z = W^E$ или $Z = W^H$ (6.26), (6.29), мы располагаем элемент Гюйгенса в плоскости фронта некоторой E- и, соответственно, H-волны.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Записать формулы (9.15) и (9.17) для случая линейных токов (ср. п. 2.3.1).
2. Какой вид должны принять формулы (9.15) и (9.17), если сторонний ток является поверхностным и распределен с плотностью $\eta^{\text{ст}}$ на S.
3. Найти комплексную амплитуду векторного потенциала **A** поля излучения диполя Герца.
4. Продолжая действия, начатые в упражнении 3, найти вектор **H** поля излучения диполя Герца.
5. Почему только в дальней зоне поле излучения диполя Герца может рассматриваться как локально плоская волна?
6. Взяв выражения комплексных амплитуд (9.26), (9.27), выписать напряженности **E** и **H** как функции координат и времени: а) при отсутствии поглощения в среде, б) при наличии поглощения.
7. Площадь некоторой плоской цепи переменного тока составляет $0{,}2\lambda^2$. Найти ее сопротивление излучения.
8. Показать, что поле излучения обобщенного элемента Гюйгенса (с. 342) выражается следующим образом:

$$\dot{\mathbf{E}}_m \approx \frac{ik\dot{E}_m^S \Delta S}{4\pi}\left[\vartheta_0\left(\frac{W}{Z}\cos\vartheta + 1\right)\cos\alpha - \boldsymbol{\alpha}_0\left(\frac{W}{Z} + \cos\vartheta\right)\sin\alpha\right]\frac{e^{-ikr}}{r},$$
$$\dot{\mathbf{H}}_m \approx \frac{ik\dot{E}_m^S \Delta S}{4\pi W}\left[\vartheta_0\left(\frac{W}{Z} + \cos\vartheta\right)\sin\alpha + \boldsymbol{\alpha}_0\left(\frac{W}{Z}\cos\vartheta + 1\right)\cos\alpha\right]\frac{e^{-ikr}}{r}. \tag{9.72}$$

Глава 10

ДИФРАКЦИЯ В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 10.1. Электродинамические задачи дифракции (А)

10.1.1. Общие представления. Постановка задач. Термин *дифракция*, относящийся к теории волновых процессов, имеет довольно широкое значение. Первоначально явлениями дифракции называли отклонения свойств света от тех идеализированных норм, которые диктуются геометрической оптикой. Свет в определенной степени огибает препятствия, границы света и тени не бывают идеально резкими. Однако, пока размеры рассматриваемых объектов весьма велики по сравнению с длиной волны ($d \gg \lambda$), что характерно для света, геометрическая оптика остается полезным и часто вполне достаточным инструментом теории. Объекты относительно больших размеров нередки, например, и в антенной технике, но здесь неравенство $d \gg \lambda$ уже не выполняется в столь сильной степени; поэтому отклонения от представлений геометрической оптики существенно сильнее. Наконец, когда размеры объекта сравнимы с длиной волны (а это типично для многих важных задач), геометрическая оптика теряет силу: волновой процесс в целом есть нечто, не укладывающееся в ее рамки.

Обсудим содержание и постановку *задач дифракции* в электродинамике. Как и выше в п. 5.1.2, будет рассматриваться падение

некоторой волны $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{H}^0$ на заданный объект (рис. 10.1), которым может быть какое-либо диэлектрическое (*а*) или металлическое (*б*) тело; нас будет интересовать, в частности, металлический экран с отверстием (*в*). Внутри диэлектрического тела возникает поле $\mathbf{E}^+$,

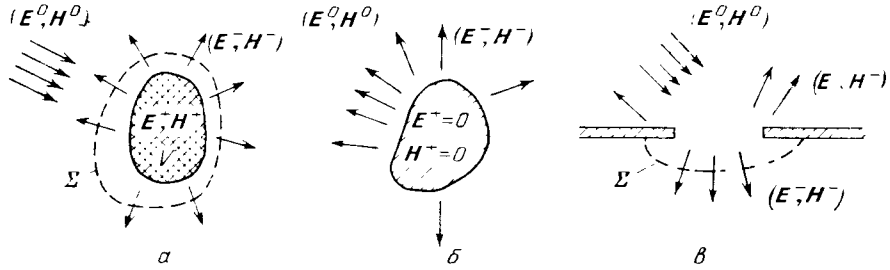


Рис. 10.1

$\mathbf{H}^+$, называемое *внутренним полем дифракции* (металлические объекты принимаем за идеально проводящие). Вне объектов появляется *внешнее поле дифракции* $\mathbf{E}^-$, $\mathbf{H}^-$. Оно называется также *полем рассеяния*.

Для нахождения внутреннего и внешнего полей дифракции при заданной падающей волне (которая не обязательно должна быть плоской) поставим граничную задачу. А именно, потребуем, чтобы решения уравнений Максвелла $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{H}^0$; $\mathbf{E}^+$, $\mathbf{H}^+$; $\mathbf{E}^-$, $\mathbf{H}^-$ на поверхности S объекта дифракции V удовлетворяли условиям непрерывности тангенциальных компонент:

$$[\dot{\mathbf{E}}_m^0 + \dot{\mathbf{E}}_m^-, \mathbf{v}_0] = [\dot{\mathbf{E}}_m^+, \mathbf{v}_0],$$
$$[\dot{\mathbf{H}}_m^0 + \dot{\mathbf{H}}_m^-, \mathbf{v}_0] = [\dot{\mathbf{H}}_m^+, \mathbf{v}_0]. \qquad (10.1)$$

Поле $\dot{\mathbf{E}}_m^-$, $\dot{\mathbf{H}}_m^-$ должно также удовлетворять условию излучения (см. пп. 5.1.2, 9.0.2, 9.1.2).

Если тело V — идеально проводящее, то внутреннее поле дифракции отсутствует и в постановку задачи входит только первая строка из (10.1), принимающая вид:

$$[\dot{\mathbf{E}}_m^0 + \dot{\mathbf{E}}_m^-, \mathbf{v}_0] = 0, \qquad (10.2)$$

вторая же согласно (1.90) приводит к соотношению

$$[\dot{\mathbf{H}}_m^0 + \dot{\mathbf{H}}_m^-, \mathbf{v}_0] = \dot{\boldsymbol{\eta}}_m, \qquad (10.3)$$

которое может быть использовано для нахождения поверхностного тока после определения внешнего поля дифракции.

Итак, в задаче дифракции, как и в рассматривавшейся ранее (см. п. 5.1.2) задаче о падении плоской однородной волны на границу раздела сред, фигурируют в общем случае три поля, которые мы обозначили при помощи одних и тех же индексов (0, +, −). Одинаковыми по смыслу являются и налагаемые на эти поля условия (10.1) и (5.12); для обеих задач существенно условие излучения. Различие состоит в том, что в задаче дифракции рассматривается уже не бесконечная плоская граница, а некоторый ограниченный объект. Плоская волна в первом случае порождает две другие плоские волны, тогда как во втором — возникают сложные поля дифракции. В немногих задачах удается представить эти поля в виде рядов, коэффициенты которых находятся непосредственно при наложении условий (10.1); таковы, например, задачи дифракции на цилиндре и шаре. Однако к настоящему времени развиты методы и построены различные алгоритмы, предназначенные для решения задач дифракции на ЭВМ (см. п. 12.3.3).

При оценке дифракционных процессов используются некоторые интегральные характеристики. Таков параметр $S_\perp$, называемый *поперечным сечением рассеяния*. Он определяется как отношение

$$S_\perp = \frac{\overline{P}^-}{\overline{\Pi}^0} = \frac{1}{\overline{\Pi}^0} \oint_\Sigma \overline{\Pi}^- \, d\mathbf{s}, \qquad (10.4)$$

где $\overline{\Pi}^0$ — абсолютное значение средней плотности $\overline{\boldsymbol{\Pi}}^0$ потока энергии падающей волны (плоской и однородной), а $\overline{P}^-$ — полный поток вектора $\overline{\boldsymbol{\Pi}}^-$ через поверхность Σ, охватывающую объект дифракции (рис. 10.1*а*); он называется *потоком рассеяния*.

Пример 1. Пусть плоская однородная волна падает на металлический лист (рис. 10.2), размеры которого велики в сравнении с длиной волны. В приближении геометрической оптики вычислим поток энергии волны, отраженной от листа:

$$\overline{P}_{\text{отр}} = \overline{\Pi}^- S \cos\varphi = \overline{\Pi}^0 S \cos\varphi,$$

где S — площадь листа и φ — угол падения (лист принимается за идеально-проводящий). Однако $\overline{P}_{\text{отр}}^-$ — это еще не полный поток рассеяния. Существование области тени следует рассматривать как наложение на падающую волну $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{H}^0$ локализованного в этой области поля $-\mathbf{E}^0$, $-\mathbf{H}^0$, в результате чего полное поле уничтожается. Полный поток рассеяния оказывается поэтому вдвое больше $\overline{P}_{\text{отр}}$. Итак, согласно (10.4) для рассматриваемой задачи в приближении геометрической оптики

$$S_\perp = 2\overline{P}_{\text{отр}}/\overline{\Pi}^0 = 2S\cos\varphi. \ \blacksquare \qquad (10.5)$$

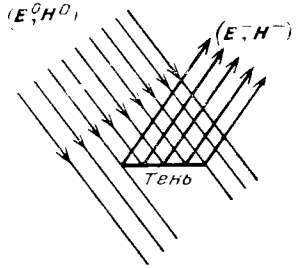


Рис. 10.2

В случае дифракции на отверстии (рис. 10.1*в*) вводится понятие *поперечного сечения прохождения*

$$T_\perp = \frac{\overline{P}^-}{\overline{\Pi}^0} = \frac{1}{\overline{\Pi}^0} \int_\Sigma \overline{\Pi}^- \, d\mathbf{s}, \qquad (10.6)$$

где Σ — некоторая поверхность, построенная так, что через нее проходит весь поток рассеяния в полупространство за отверстием. В приближении геометрической оптики параметр $T_\perp$ равен площади отверстия S.

10.1.2. Приближенные подходы; метод Гюйгенса — Кирхгофа. Поскольку решение электродинамических задач дифракции — за исключением простейших — было практически недоступным в течение ряда десятилетий, получили распространение различные идеализации. Заметим, что, хотя геометрическая оптика обычно применяется при больших относительных размерах объектов ($d \gg \lambda$), одного этого условия в действительности еще мало. Требуется также, чтобы поверхность рассматриваемого тела была гладкой и минимальный радиус кривизны оставался значительно больше длины волны ($R_{\min} \gg \lambda$). Тогда каждый элемент поверхности можно принимать за участок плоской границы раздела сред, для которой справедливы законы Снеллиуса, выведенные в п. 5.1.3. Можно строить картины отраженных и преломленных лучей; уравнение эйконала (5.110) описывает поверхности волновых фронтов, которые ортогональны лучам. Эта идеализация есть *приближение геометрической оптики*. Ясно, что при $\omega \to \infty$ ($\lambda \to 0$) мы имеем также: $R_{\min}/\lambda \to \infty$, т. е. в этом случае мы переходим к *пределу геометрической оптики* в теории дифракции. Впрочем, необходима важная оговорка. Тело не должно иметь идеальных ребер, на которых $R_{\min} = 0$. В противном случае останутся краевые эффекты. Плоский лист, рассмотренный выше в примере 1, строго говоря, не подлежит анализу геометрической оптики. Заметим, что в теории дифракции существует целое направление, называемое *геометрической теорией дифракции*, выработавшее методы учета влияния ребер в рамках концепции лучей.

В ряде случаев размеры тел малы по сравнению с длиной волны ($d \ll \lambda$). При этих условиях можно получить информацию о структуре полей дифракции, рассматривая предельный случай, соответствующий $\omega \to 0$ ($\lambda \to \infty$), т. е. переходя к *квазистационарному пределу*. В этом пределе $k^2 = 0$, так что, в частности, однородные уравнения Гельмгольца переходят в уравнения Лапласа.

Большое значение имеет так называемый *метод Гюйгенса — Кирхгофа*, применяемый при решении задач дифракции на металлических (и любых непрозрачных) телах. С точки зрения геометрической оптики, такое тело просто создает область тени, как это показано на рис. 10.3 в случаях некоторого ограниченного тела (*а*) и экрана с отверстием (*б*), если падающая волна — сферическая. Построим поверхность S (штриховая линия на рис. 10.3), по одну сторону которой остается источник падающей волны. Эта поверхность состоит из частей S' и S'' ($S = S' + S''$); S'' лежит в области тени. Если бы распределение поля на S было известно, то поле во всей бесконечной области V можно было бы найти без всякого упрощения, используя принцип Гюйгенса (см. п. 9.4.2). Но при

постановке задачи дифракции известно только поле падающей волны $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{H}^0$. Поэтому делается следующее допущение, которое называется *приближением Кирхгофа*:

$$\mathbf{E}^S = \begin{cases} \mathbf{E}^0 \text{ на } S', \\ 0 \text{ на } S''; \end{cases} \qquad \mathbf{H}^S = \begin{cases} \mathbf{H}^0 \text{ на } S', \\ 0 \text{ на } S''. \end{cases} \tag{10.7}$$

Смысл его очевиден: распределение поля на поверхности S соответствует представлениям геометрической оптики, поле отсутствует в затененной части S и не отличается от падающей волны в освещенной. Однако это не геометрическая оптика (ведь допущение не

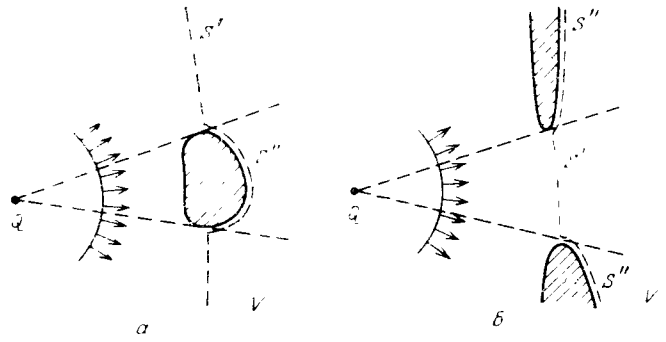


Рис. 10.3

распространяется на всю область V), а только лишь геометрооптический способ задания эквивалентных источников.

На следующей стадии вступает в действие весь аппарат определения полей $\mathbf{E}^э$, $\mathbf{H}^э$ и $\mathbf{E}^м$, $\mathbf{H}^м$ (см. п. 9.4.2) и согласно (9.52) находится поле $\mathbf{E}$. $\mathbf{H}$ в бесконечной области V. Надо иметь в виду, что в случае дифракции на отверстии (рис. 10.3*б*) $\mathbf{E} = \mathbf{E}^-$ и $\mathbf{H} = \mathbf{H}^-$, тогда как при дифракции на теле ограниченных размеров (рис. 10.3*а*) поле в объеме V включает и падающую волну: $\mathbf{E} = \mathbf{E}^0 + \mathbf{E}^-$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}^0 + \mathbf{H}^-$.

Весь изложенный подход и есть метод Гюйгенса — Кирхгофа, первоначально развитый в волновой оптике (в скалярной форме). В сущности он является эвристическим приемом широко использующимся в теории антенн.

§ 10.2. Отверстие в экране. Дифракция Фраунгофера

10.2.1. Постановка задачи. Применение метода Гюйгенса — Кирхгофа (А). Будем рассматривать нормальное падение плоской однородной волны $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{H}^0$ на идеально проводящий экран с отверстием S. Введем декартову и совмещенную с ней сферическую системы координат (рис. 10.4*а*). Падающую из левого полупространства ($z < 0$)

волну зададим при помощи комплексных амплитуд

$$\dot{\mathbf{E}}_m^0 = \mathbf{x}_0 \dot{A} e^{-ikz}, \quad \dot{\mathbf{H}}_m^0 = \mathbf{y}_0 \frac{\dot{A}}{W} e^{-ikz}, \tag{10.8}$$

и для определения поля дифракции $\mathbf{E}^-$, $\mathbf{H}^-$ в правом полупространстве ($z<0$) применим метод Гюйгенса — Кирхгофа.

Итак, в соответствии с (10.7) на теневой стороне экрана положим $\dot{\mathbf{E}}_m^S = 0$, $\dot{\mathbf{H}}_m^S = 0$, а на отверстии $\dot{\mathbf{E}}_m^S = \dot{\mathbf{E}}_m^0(0) = \mathbf{x}_0\dot{A}$, $\dot{\mathbf{H}}_m^S = \dot{\mathbf{H}}_m^0(0) = \mathbf{y}_0\dot{A}/W$ согласно (10.8). В этом приближении достаточно малые элементы отверстия являются элементами Гюйгенса, рассмотренными в п. 9.4.3. Поэтому нет необходимости приводить в действие весь аппарат эквивалентных поверхностных источников,

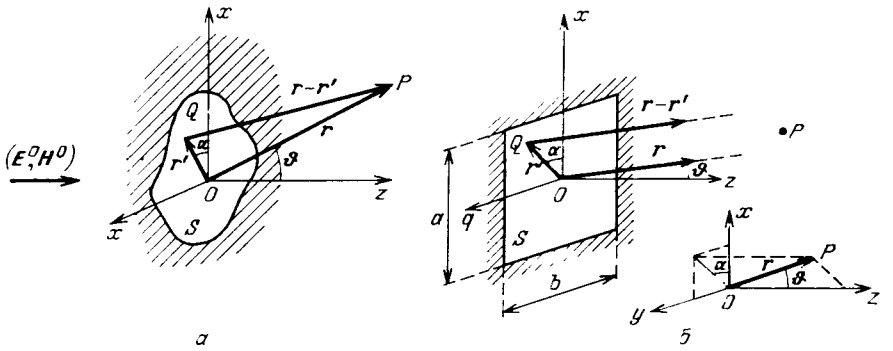


Рис. 10.4

описанный в п. 9.4.2. Гораздо проще воспользоваться уже полученными выражениями поля излучения элемента Гюйгенса (9.60) и охватить все элементы Гюйгенса, выполнив соответствующее интегрирование по S. Определяя таким путем поле дифракции, выразим комплексную амплитуду напряженности электрического поля:

$$\dot{\mathbf{E}}_m^- = \int_S d\dot{\mathbf{E}}_m^- = \frac{ik\dot{E}_m(0)}{4\pi} \int_S (1+\cos\vartheta_q) \times$$

$$\times (\vartheta_{0q}\cos\alpha_q - \alpha_{0q}\sin\alpha_q) \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} ds'. \tag{10.9}$$

Здесь использована первая строка из (9.60) и символом q отмечены угловые сферические координаты (а также орты) локальной системы координат с началом в Q; радиальная координата этой системы есть $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$. Дело в том, что формулы (9.60) записаны в системе координат с началом на элементе Гюйгенса, и это надо было учесть при интегрировании. Отметим, что текущая точка интегрирования $Q(\mathbf{r}')$ в декартовых координатах есть $Q(x', y', 0)$, а фиксированная

точка наблюдения $P(\mathbf{r})$, в которой определяется $\dot{\mathbf{E}}_m^-$, это — $P(x, y, z)$.

Возьмем прямоугольное отверстие (рис. 10.4*б*), а точку наблюдения P отнесем так далеко, чтобы векторы $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}$ можно было считать параллельными. Отверстие S при этом видно из P под нулевым углом, т. е. представляется точкой. Говорят, что в этом случае наблюдается дифракция *в дальней зоне*; употребляется также термин *дифракция Фраунгофера*, происходящий из волновой оптики. Интегрирование по формуле (10.9) приводит к следующему результату:

$$\dot{\mathbf{E}}_m^- = \frac{ik\dot{A}ab}{4\pi}\frac{e^{-ikr}}{r}(\vartheta_0\cos\alpha - \alpha_0\sin\alpha)(1+\cos\vartheta) \times$$

$$\times \frac{\sin(\frac{1}{2}ka\sin\vartheta\cos\alpha)}{\frac{1}{2}ka\sin\vartheta\cos\alpha} \frac{\sin(\frac{1}{2}kb\sin\vartheta\sin\alpha)}{\frac{1}{2}kb\sin\vartheta\sin\alpha}. \tag{10.10}$$

Эта сферическая волна является локально плоской, так что

$$\dot{\mathbf{H}}_m^- = \frac{1}{W}[\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{E}}_m^-]. \tag{10.11}$$

ВЫВОД. Поскольку в дальней зоне все точки отверстия имеют одинаковые угловые координаты $\vartheta_q = \vartheta$, $\alpha_q = \alpha$ и множитель $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-1}$ можно поменять на r^{-1}, под интегралом в (10.9) остается только экспоненциальный множитель. Интегрирование производим по прямоугольнику $-a/2 \leqslant x \leqslant a/2$, $-b/2 \leqslant y \leqslant b/2$. Таким образом, имеем:

$$\dot{\mathbf{E}}_m^- = \frac{ik\dot{E}_m^0(0)}{4\pi r}(1+\cos\vartheta)(\vartheta_0\cos\alpha - \alpha_0\sin\alpha) \times$$

$$\times \int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2} e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dx'\,dy'. \tag{10.12}$$

Несмотря на близость значений $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ и r, экспоненту под интегралом нельзя принять за $\exp(-ikr)$, так как размеры отверстия a и b не малы по сравнению с длиной волны (ср. п. 9.2.2, где условие малости выполнялось).

Разлагая $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ в биномиальный ряд, пишем:

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2]^{1/2} =$$

$$= [r^2 - 2(xx'+yy') + x'^2 + y'^2]^{1/2} = r - \frac{xx'+yy'}{r} + \ldots, \tag{10.13}$$

где отброшены члены второго порядка малости. Внося это в показатель экспоненты под интегралом (10.12), производим интегрирование; так как

$$\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2} \exp\left(ik\frac{xx'+yy'}{r}\right)dx'\,dy' = ab\frac{\sin\left(\frac{ka}{2r}x\right)\sin\left(\frac{kb}{2r}y\right)}{\frac{ka}{2r}x\,\frac{kb}{2r}y}, \tag{10.14}$$

то из (10.12) следует результат (10.10). Надо лишь заменить $\dot{E}_m(0)$ на A и перейти от декартовых координат к сферическим, используя соотношения: $x = r\sin\vartheta\cos\alpha$ и $y = r\sin\vartheta\sin\alpha$ (рис. 10.4*б*).

Выражение (10.11) получается при сопоставлении первой и второй строчек формул (9.60). Действительно

$$[\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\vartheta}_0\cos\alpha - \boldsymbol{\alpha}_0\sin\alpha] = \boldsymbol{\vartheta}_0\sin\alpha + \boldsymbol{\alpha}_0\cos\alpha$$

и поэтому представление $\dot{\mathbf{H}}_m^-$ (10.11) будет получено из второй строчки (9.60) при помощи точно тех же операций, которые привели к (10.10) от первой строчки (9.60). ■

10.2.2. Анализ дифракции Фраунгофера. Сначала уточним, при каких условиях можно пользоваться формулами (10.10), (10.11). В представлении (10.13) не сохранены члены, квадратичные относительно x' и y', которые принимают максимальное значение при $x' = a$ и $y' = b$. Так, отбрасывая член $(x'^2 + y'^2)/2$, мы пренебрегаем приращением фазы $k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = k(a^2 + b^2)/2r$. Это допустимо, если

$$d^2/r\lambda \ll 1. \qquad (10.15)$$

где $d = a$, b — размер отверстия. Мы получили критерий дифракции Фраунгофера.

Излучение из отверстия в правое полупространство удобно охарактеризовать при помощи функции $F(\vartheta, \alpha) = \sqrt{\overline{\Pi}(\vartheta, \alpha)}/\sqrt{\overline{\Pi}_{\max}}$, которая уже неоднократно использовалась нами в гл. 9 в качестве нормированной характеристики излучения. Определяя $\overline{\Pi} = \operatorname{Re}\dot{\Pi}$ при помощи выражений $\dot{\mathbf{E}}_m^-$ (10.10) и $\dot{\mathbf{H}}_m^-$ (10.11), отмечаем, что $\overline{\Pi}_{\max} = \overline{\Pi}(0, \alpha)$, т. е. излучение максимально в направлении оси z, и

$$F(\vartheta, \alpha) = \frac{1 + \cos\vartheta}{2}\left|\frac{\sin u}{u}\right|\left|\frac{\sin v}{v}\right|, \qquad (10.16)$$

где $u = (ka/2)\sin\vartheta\cos\alpha$ и $v = (kb/2)\sin\vartheta\sin\alpha$. Первый множитель в (10.16), зависящий только от ϑ, есть не что иное, как характеристика направленности элемента Гюйгенса (9.69). Множители вида $F(\xi) = |\sin\xi/\xi|$ ($\xi = u, v$) отображают эффект наложения локальных волн, создаваемых всеми элементами Гюйгенса на отверстии S; они называются *интерференционными множителями*. При $a \gg \lambda$ ($b \gg \lambda$) соответствующий интерференционный множитель изменяется в зависимости от ϑ гораздо быстрее, чем $\cos\vartheta$, и фактически определяет характеристику направленности в области малых ϑ.

Будем рассматривать излучение из отверстия в зависимости от ϑ при $\alpha = 0$, или, как говорят, *в E-плоскости*, и при $\alpha = 90°$ — *в H-плоскости*. Характеристика $F(\vartheta, \alpha)$ (10.16) в этих случаях принимает вид:

$$F^E(\vartheta) = \frac{1 + \cos\vartheta}{2}\left|\frac{\sin\xi^E}{\xi^E}\right|, \qquad F^H(\vartheta) = \frac{1 + \cos\vartheta}{2}\left|\frac{\sin\xi^H}{\xi^H}\right|. \qquad (10.17)$$

где $\xi^E = (ka/2)\sin\vartheta$ и $\xi^H = (kb/2)\sin\vartheta$.

На рис. 10.5 (сверху) показан график функции $F(\xi) = |\sin\xi/\xi|$. Как видно, при $\xi = 0$ функция имеет главный максимум, соответствующий максимуму излучения при $\vartheta = 0$, т. е. в направлении z.

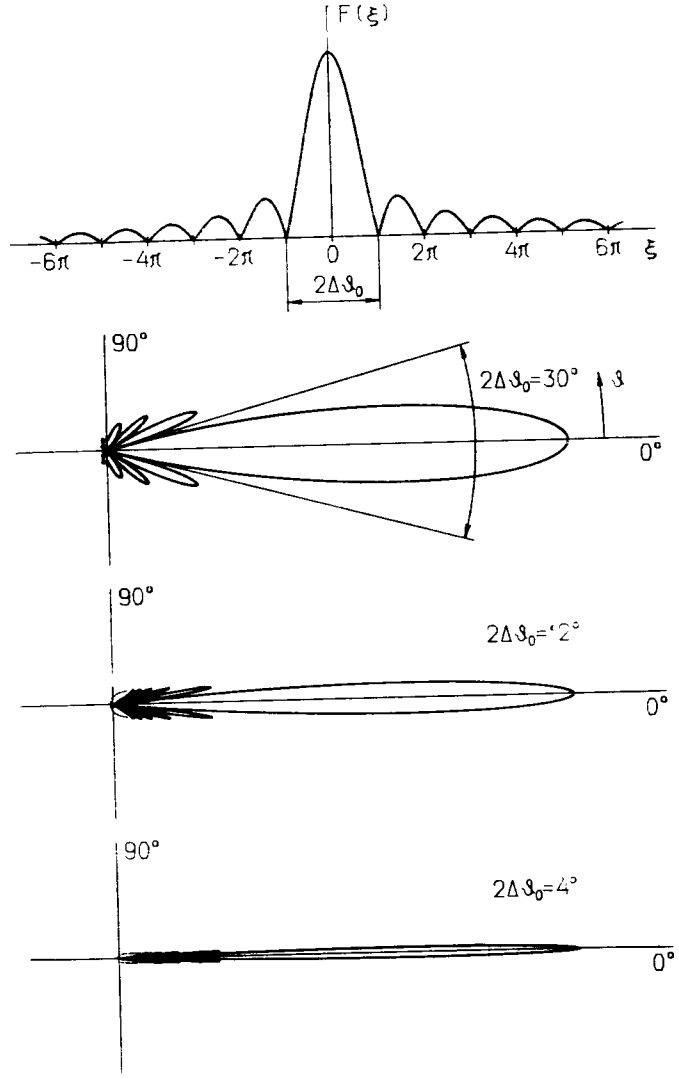


Рис. 10.5. (ЭВМ)

Поскольку в (10.17) при малых ϑ можно пренебречь влиянием множителя $(1 + \cos\vartheta)/2$, то об угловой ширине зоны наибольшего излучения можно судить по характеру интерференционного множителя. На рис. 10.5 отмечена угловая ширина «луча» как зоны, ограни-

ченной ближайшими к главному максимуму нулями, которые получаются при выполнении условий

$$\frac{ka}{2}\sin\Delta\vartheta_0^E=\pi,\qquad \frac{kb}{2}\sin\Delta\vartheta_0^H=\pi, \tag{10.18}$$

где $\Delta\vartheta_0^E$ и $\Delta\vartheta_0^H$ — угловые расстояния от главного максимума до ближайшего направления нулевого излучения в E- и H-плоскости соответственно. Ширина луча есть при этом $2\Delta\vartheta_0^E$ и $2\Delta\vartheta_0^H$. Ввиду малости этой величины можно заменить синусы в (10.18) их аргументами, поэтому

$$2\Delta\vartheta_0^E\approx 2\lambda/a,\qquad 2\Delta\vartheta_0^H\approx 2\lambda/b. \tag{10.19}$$

Весьма примечательно, что угловая ширина луча обратно пропорциональна размеру отверстия. В пределе при $a/\lambda\to\infty$, $b/\lambda\to\infty$ угловая ширина зоны прямого ($\vartheta=0$) излучения стремится к нулю: зона становится нерасширяющейся, что и ожидается в пределе геометрической оптики.

На рис. 10.5 в трех вариантах построена диаграмма направленности отверстия, получаемая по формулам (10.17); при этом $2\Delta\vartheta_0=30°$, $12°$ и $4°$. Такие диаграммы называют *игольчатыми*. Отметим, что в первом варианте отверстие еще недостаточно велико в сравнении с длиной волны для вполне уверенного применения приближения Кирхгофа, которым мы пользовались.

10.2.3. Идеальная поверхностная антенна (Б). Существует понятие *поверхностной антенны*; имеется в виду, что излучение такой антенны может быть истолковано как действие источников, распределенных на некоторой поверхности. В теории антенн к поверхностным относят, в частности, зеркальные и рупорные антенны. В большинстве случаев поверхностные антенны анализируют с позиций принципа Гюйгенса.

Рассмотренное нами отверстие, излучающее в полупространство в режиме дифракции, анализировалось выше как объект с равномерным по амплитуде синфазным распределением поверхностных источников. Это так называемая *идеальная поверхностная антенна*.

Вычислим коэффициент направленности действия $D_{\max}$ (см. п. 9.2.3) в направлении максимального излучения $\vartheta=0$. Для этого определим мощность излучения $\overline{P}^{\Sigma}$:

$$\overline{P}^{\Sigma}=\int_S \overline{\Pi}\,d\mathbf{s}=\frac{A^2ab}{2W}. \tag{10.20}$$

Плотность среднего потока энергии $\overline{\Pi}^0$ при равномерном излучении такой мощности во всех направлениях есть

$$\overline{\Pi}^0=\frac{\overline{P}^{\Sigma}}{4\pi r^2}=\frac{A^2ab}{8\pi W}\frac{1}{r^2}, \tag{10.21}$$

а для направления максимального излучения $\vartheta=0$ рассматриваемого отверстия имеем:

$$\overline{\Pi}_{\max}=\frac{k^2A^2a^2b^2}{8\pi^2W}\frac{1}{r^2} \tag{10.22}$$

(на основании (10.10), (10.11)). Поэтому

$$D_{\max}=\overline{\Pi}_{\max}/\overline{\Pi}^0=4\pi S/\lambda^2, \tag{10.23}$$

где $S=ab$. Эта формула имеет важное значение в теории антенн. Она применяется и для оценки реальных антенн; тогда под S понимается некоторая эффективная поверхность антенны.

§ 10.3. Отверстие в экране. Дифракция Френеля (А)

10.3.1. Изменение условий наблюдения. Рассматривая прежнюю задачу дифракции плоской однородной волны на прямоугольном отверстии в экране, поставим целью приблизить точку наблюдения. Условие (10.15) при этом уже не будет выполняться: будут учтены квадратичные члены в разложении величины $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$, формирующей показатель экспоненты под интегралом (10.12). Исследуемый

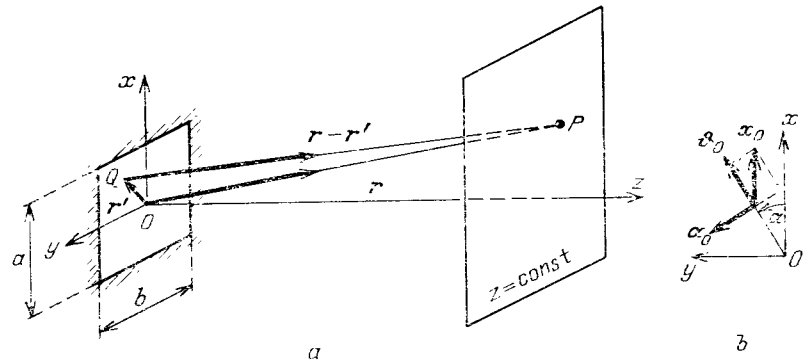


Рис. 10.6

волновой процесс, который предстанет теперь в ином виде, называется *дифракцией Френеля*.

Будем использовать *интегралы Френеля* — специальные функции, представляемые как следующие определенные интегралы:

$$C(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^u\cos t^2\,dt,\qquad S(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^u\sin t^2\,dt. \tag{10.24}$$

Эти функции табулированы (см., например, [К. 1]) и ниже в п. 10.3.2 будут рассмотрены подробнее.

Пусть точка наблюдения $P(\mathbf{r})$ лежит в некоторой плоскости $z=\text{const}$ (рис. 10.6*а*). Поле дифракции $\mathbf{E}^-$, $\mathbf{H}^-$, которое мы получим

при невыполнении условия (10.15), выражается через интегралы Френеля:

$$\dot{\mathbf{E}}_m^-(x, y, z) = \frac{i}{2}\dot{\mathbf{E}}_m^0(z)\,[C(u) - iS(u)]\Big|_{u_1}^{u_2}[C(v) - iS(v)]\Big|_{v_1}^{v_2},$$

$$\dot{\mathbf{H}}_m^-(x, y, z) = \frac{i}{2}\dot{\mathbf{H}}_m^0(z)\,[C(u) - iS(u)]\Big|_{u_1}^{u_2}[C(v) - iS(v)]\Big|_{v_1}^{v_2}, \quad (10.25)$$

где

$$u_{1,2} = \sqrt{\frac{k}{2z}}\left(x \pm \frac{a}{2}\right), \qquad v_{1,2} = \sqrt{\frac{k}{2z}}\left(y \pm \frac{b}{2}\right) \quad (10.26)$$

(верхний знак соответствует индексу 1, нижний — индексу 2).

ВЫВОД. Возвращаясь к выражению $\dot{\mathbf{E}}_m^-$ (10.12), представим расстояние $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ под интегралом в виде

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2]^{1/2} = z + \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{2z} + \ldots \quad (10.27)$$

(удержаны квадраты координат x' и y' точки Q). Кроме того, ограничиваясь областью относительно малых ϑ, не будем различать r и z, примем $\cos\vartheta$ за единицу и учтем, что $\vartheta_0\cos\alpha - \alpha_0\sin\alpha = \mathbf{x}_0$ (рис. 10.6*б*). Таким образом, вместо (10.12) получаем:

$$\dot{\mathbf{E}}_m^- = \mathbf{x}_0\frac{ik\dot{E}_m^0(0)}{2\pi}\,\frac{e^{-ikz}}{z}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}\exp\left[-ik\,\frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{2z}\right]dx'\,dy'. \quad (10.28)$$

Записанный двукратный интеграл есть произведение двух одинаковых по форме однократных. Рассмотрим первый из них. При подстановке $k(x - x')^2/2z = t^2$ имеем:

$$\int_{-a/2}^{a/2}\exp\left[-ik\frac{(x - x')^2}{2z}\right]dx' = -\sqrt{\frac{2z}{k}}\int_{\sqrt{k/2z}(x - a/2)}^{\sqrt{k/2z}(x + a/2)} e^{-it^2}dt. \quad (10.29)$$

Представляя $\exp(-it^2)$ как $\cos t^2 - i\sin t^2$, используем символы интегралов Френеля (10.24) и обозначения пределов интегрирования (10.26); в результате:

$$\int_{-a/2}^{a/2}\exp\left[-ik\frac{(x - x')^2}{2z}\right]dx' = -\sqrt{\frac{2z}{k}}\,[C(u) - iS(u)]\Big|_{u_1}^{u_2}. \quad (10.30)$$

Аналогично

$$\int_{-b/2}^{b/2}\exp\left[-ik\frac{(y - y')^2}{2z}\right]dy' = -\sqrt{\frac{2z}{k}}\,[C(v) - iS(v)]\Big|_{v_1}^{v_2}. \quad (10.31)$$

Подставляя в (10.28) произведение результатов (10.30) и (10.31), а также принимая во внимание, что $\mathbf{x}_0\dot{A}\exp(-ikz) = \dot{\mathbf{E}}_m^0(z)$, приходим к выражению $\dot{\mathbf{E}}_m^-$ в первой строке (10.25).

Совершенно так же можно вывести выражение $\dot{\mathbf{H}}_m^-$. ■

10.3.2. Анализ дифракции Френеля. Введем в рассмотрение величину

$$\tilde{d} = d/\sqrt{\lambda z}, \quad (10.32)$$

где $d = a$, b — один из размеров отверстия. Будем называть $\tilde{d}$ *дифракционным параметром*. Порядок $\tilde{d}$ существенным образом определяет характер наблюдаемого процесса. Напомним, что в случае дифракции Фраунгофера в силу (10.15) $\tilde{d} \ll 1$; при этом $a \gg \lambda$, $b \gg \lambda$.

Исследуя дифракцию Френеля, рассмотрим сначала поле $\mathbf{E}^-$, $\mathbf{H}^-$ в некоторой точке наблюдения $P(0, 0, z)$, лежащей против средней точки отверстия $Q(0, 0, 0)$. Пусть $\tilde{d} \gg 1$. Тогда, как видно из (10.26), весьма велики по абсолютному значению

$$u_{1,2}(0) = \pm\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{a}{\sqrt{\lambda z}}, \qquad v_{1,2}(0) = \pm\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{b}{\sqrt{\lambda z}}. \quad (10.33)$$

Обратимся к графику интегралов Френеля на рис. 10.7. При больших значениях аргумента они близки к 1/2; учтем также, что это

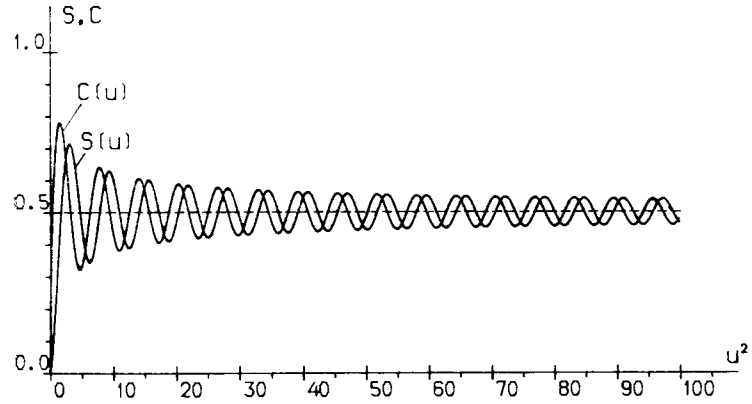


Рис. 10.7. (ЭВМ)

нечетные функции. Полагая $C(u_2) = -C(u_1) = S(v_2) = -S(v_1) = -1/2$, имеем:

$$[C(u) - iS(u)]\Big|_{u_1}^{u_2}[C(v) - iS(v)]\Big|_{v_1}^{v_2} = 4\left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)^2 = -i2.$$

В этом приближении

$$\dot{\mathbf{E}}_m^-(0, 0, z) = \dot{\mathbf{E}}_m^0(z), \qquad \dot{\mathbf{H}}_m^-(0, 0, z) = \dot{\mathbf{H}}_m^0(z), \quad (10.34)$$

т. е. поле дифракции $\mathbf{E}^-$, $\mathbf{H}^-$ в средней точке наблюдения не отличается от поля падающей волны $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{H}^0$. Последняя как бы не испытывает влияния экрана. При этом $\overline{\Pi}^-(0, 0, z) = z_0 A^2/2W$.

Сохраняя условие $\tilde{d} \gg 1$, исследуем изменение поля дифракции в плоскости $z = \text{const}$. Точнее говоря, будем рассматривать функцию

$$F(x, y) = \frac{\sqrt{\overline{\Pi}^-(x, y)}}{\sqrt{\overline{\Pi}^0}} = \frac{E_m^-(x, y)}{E_m^0} = \frac{H_m^-(x, y)}{H_m^0}. \qquad (10.35)$$

Согласно (10.25)

$$F(x, y) = {}^1/_2 \Phi(x)\Phi(y), \qquad (10.36)$$

где

$$\Phi(x) = |C(u_2) - iS(u_2) - [C(u_1) - iS(u_1)]|,$$
$$\Phi(y) = |C(v_2) - iS(v_2) - [C(v_1) - iS(v_1)]|. \qquad (10.37)$$

Чтобы найти $\Phi(x)$ или $\Phi(y)$, надо вычислить модуль разности двух значений комплексной функции $C(u) - iS(u)$. Наглядность этим действиям придает диаграмма, на которой нужные комплексные числа представляются в виде радиус-векторов. Это так называемая спираль Корню (рис. 10.8): по осям декартовой системы координат отложены $C(u)$ и $-S(u)$, а кривая соединяет точки, отвечающие равным аргументам u этих функций; значения u нанесены на самой кривой. Поэтому надо лишь выбрать на кривой требуемое значение аргумента; отрезок, соединяющий начало координат с этой точкой, изображает соответствующее значение функции $C(u) - iS(u)$. Чтобы вычислить $\Phi(x)$, выбираем точки u_1 и u_2. Их радиус-векторы изображают комплексные числа, которые вычитаются в (10.37). Нужная нам разность изображается отрезком, соединяющим точки u_1 и u_2. Длина этого отрезка дает $\Phi(x)$.

Прежде чем двигаться дальше, отметим, что связь функций $C(u)$, $S(u)$ и спирали Корню наглядно отображается пространственной кривой на рис. 10.9. Кривые всех трех функций получаются как ее проекции на ортогональные плоскости.

Будем рассматривать функцию $F(x, y)$ (10.35), положив $y = 0$, т. е. исследуя поле в E-плоскости. Согласно (10.36), (10.37) $F(x, 0) = \Phi(x)\Phi(0)/2 = \Phi(x)/\sqrt{2}$. При $x = 0$ точка наблюдения занимает то самое центральное положение, для которого получено представление поля (10.34). Поскольку дифракционный параметр $\tilde{d}$ (10.32) весьма велик, то, как уже отмечалось при выводе формул (10.34), $u_1(0) \approx 1/2$ и $u_2(0) \approx -1/2$, а это значит, что точки $u_1(0)$ и $u_2(0)$ находятся, практически, в фокусах спирали Корню. Иными словами, соединяющий фокусы отрезок изображает $F(0, 0)$, что соответствует полю (10.34). Он показан на рис. 10.10 (начало).

Перемещая далее точку наблюдения P в плоскости $z = \text{const}$ из среднего положения $x = 0$ в сторону возрастания x, заметим, что $u_1(x) = \sqrt{k/2z}(x + a/2)$ увеличивается, т. е. с еще бо́льшим основанием можно считать точку $u_1(x)$ лежащей в фокусе спирали Корню.

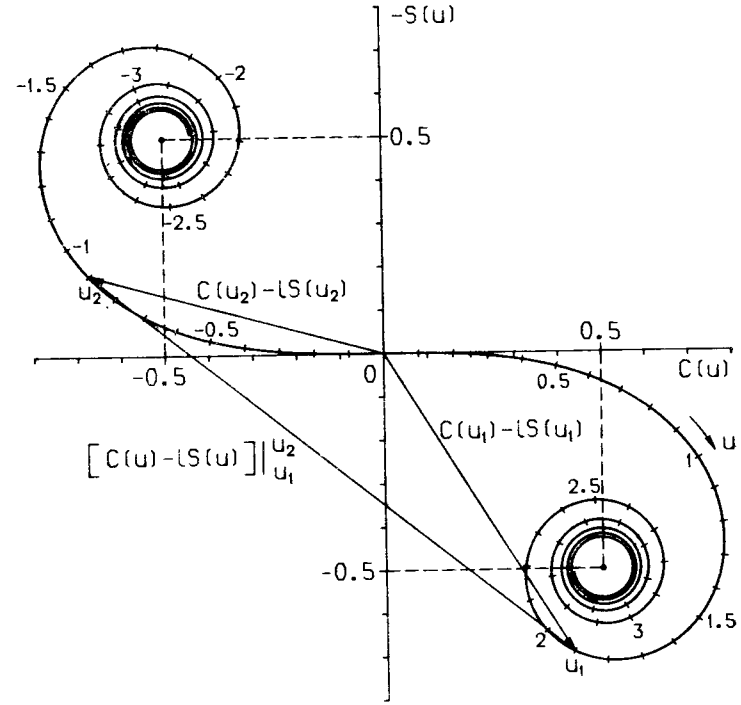


Рис. 10.8. (ЭВМ)

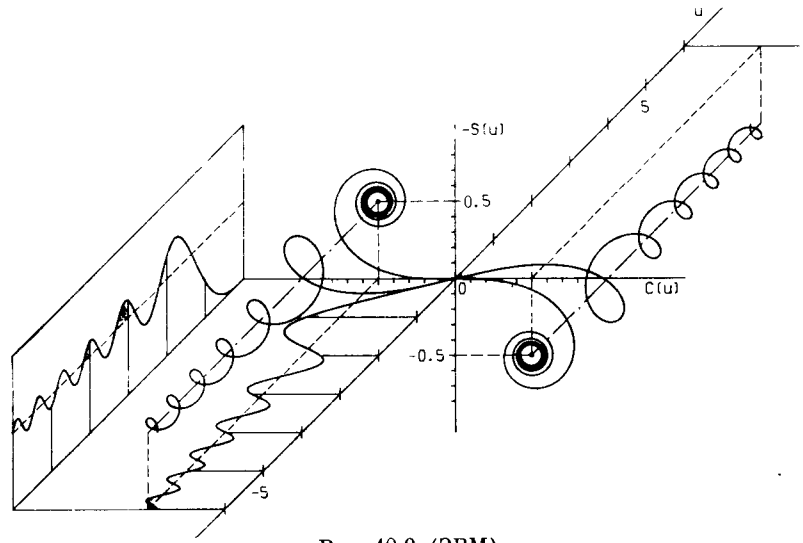


Рис. 10.9. (ЭВМ)

Что касается величины $u_2(x)=\sqrt{k/2z}(x-a/2)$, то она с ростом x в интервале $(0,\ a/2)$ уменьшается до нуля. При этом один конец изображающего отрезка на диаграмме остается неподвижным, а другой скользит по спирали Корню, как показано на рис. 10.10, обходя ее витки. Длина отрезка, а следовательно, величина $F(x,\ 0)$ сначала

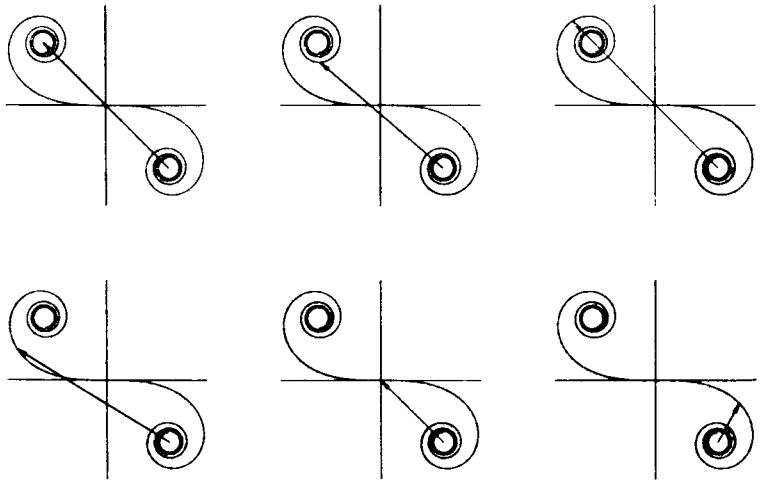


Рис. 10.10. (ЭВМ)

колеблется с ростом амплитуды, а затем монотонно убывает. Когда точка наблюдения P находится точно против края отверстия $(x=a/2)$, длина изображающего отрезка оказывается вдвое меньше его значения при $x=0$:

$$F(a/2,\ 0)=\tfrac{1}{2}F(0,\ 0). \qquad (10.38)$$

При дальнейшем увеличении x значение $u_2(x)$ становится положительным и возрастает, приближаясь к $u_1(x)$. Длина отрезка на рис. 10.10 (конец) при $x>\frac{1}{2}a$ монотонно падает, что соответствует убыванию поля дифракции в области геометрической тени. Подчеркнем, что согласно (10.38) амплитуды $\dot{\mathbf{E}}_m^-$, $\dot{\mathbf{H}}_m^-$ поля дифракции на границе тени оказываются вдвое меньше, чем в центре освещенной области.

На рис. 10.11 построена кривая $F(x,\ 0)$ для $\tilde{d}\approx 10^3$. Ход кривой при $x>0$ соответствует произведенным рассуждениям (ср. рис. 10.10), а при $x<0$ все повторяется. Заметим, что колебания интенсивности происходят относительно постоянного значения, предсказываемого геометрической оптикой (штриховая линия). Вблизи границы геометрической тени лежит пик наибольшей интенсивности. Чем больше величина $\tilde{d}$ (10.32), тем уже краевая зона, в которой

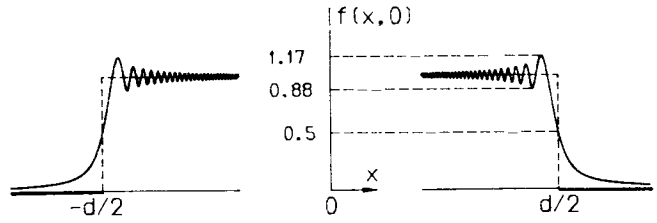


Рис. 10.11. (ЭВМ)

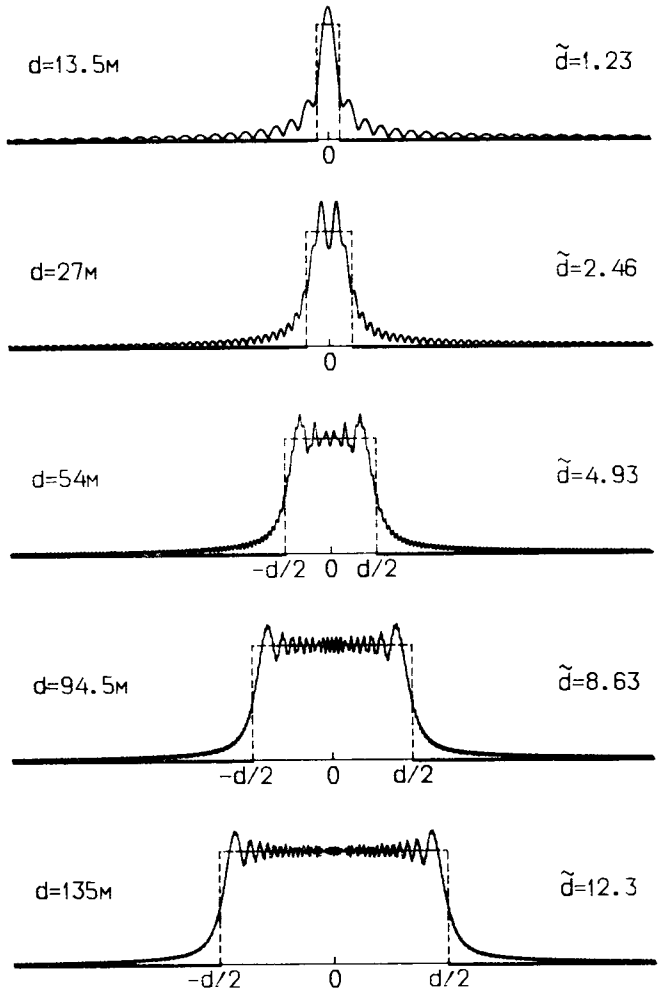


Рис. 10.12. (ЭВМ)

заметно проявляется дифракционный эффект. Общий тип картины сохраняется, пока $\tilde{d} \gg 1$.

Рассмотрим ряд кривых $F(x, 0)$ (рис. 10.12), полученных для расстояния $z = 4$ км при $\lambda = 3$ см, когда размер отверстия меняется от 135 м (что соответствует очень большому радиотелескопу) до

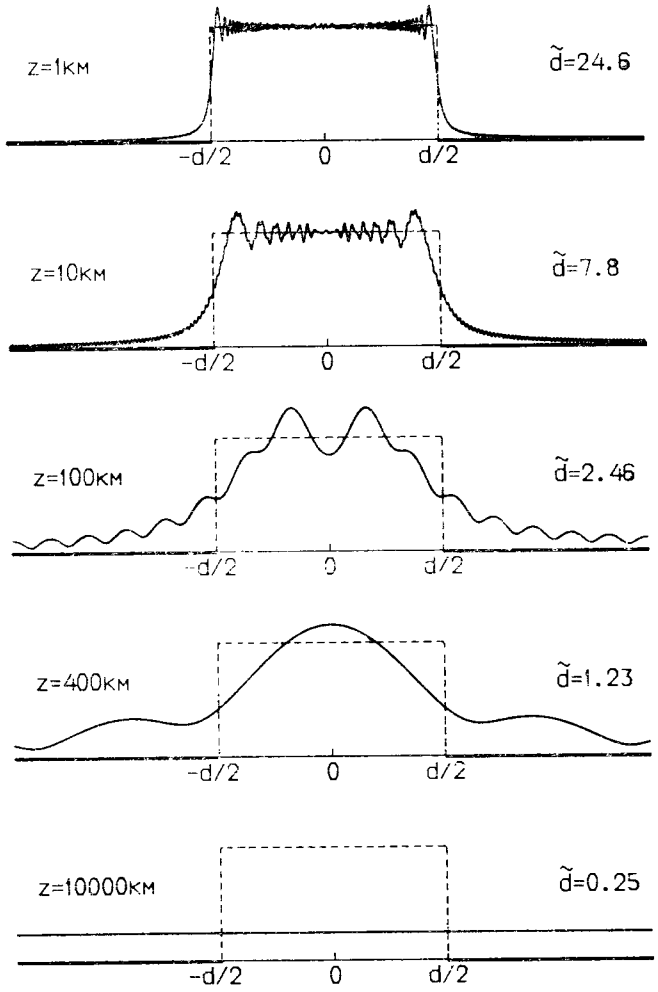


Рис. 10.13. (ЭВМ)

13,5 м. Дифракционный параметр $\tilde{d}$ в данном случае значительно меньше, чем в предшествующем случае (рис. 10.11). Пока $\tilde{d} \gg 1$, кривая $F(x, 0)$ остается похожей, но заметны мелкомасштабные осцилляции; их происхождение связано с тем, что в данном случае

уже нельзя рассматривать один конец изображающего отрезка (рис. 10.10) как фиксированный в фокусе спирали Корню. Он несколько смещен, но приближается к фокусу с ростом $|x|$.

На рис. 10.13 представлена еще одна серия кривых $F(x, 0)$ для $d = 135$ м при $\lambda = 3$ см. Изменяется расстояние z, так что параметр $\tilde{d}$, будучи при $z = 1$ км большим, при $z = 10^4$ км становится малым. Здесь уже наблюдается дифракция Фраунгофера, и, в сущности, мы видим центральный участок кривой $|\sin \xi/\xi|$. Ширина центрального максимума составляет согласно (10.19) $2\Delta\vartheta_0 = 2{,}(2) \cdot 10^{-4}$ рад, т. е. 2,(2) км, поэтому видимый на чертеже малый участок кривой выглядит, как постоянный уровень.

На рис. 10.13 видно, как с увеличением расстояния постепенно разрушается картина дифракции Френеля, свойственная области больших значений дифракционного параметра $\tilde{d}$.

10.3.3. О спирали Корню. Зоны Френеля. Простое графическое построение (рис. 10.14) поясняет происхождение спирали Корню. В качестве некоторого приближения представим себе, что число элементов Гюйгенса на отверстии является конечным. Желая найти поле дифракции, например, в средней точке $P(0, 0, z)$, мы должны

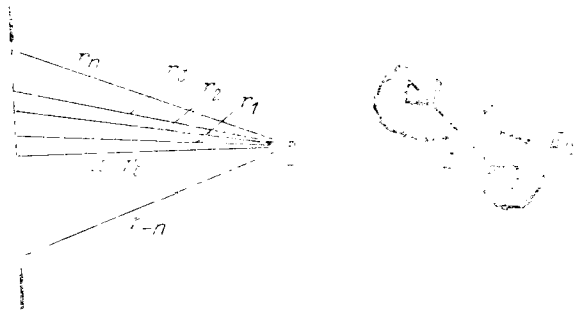


Рис. 10.14

сложить ряд комплексных величин $\Delta\dot{E}_m(r_n)$, выражающих комплексные амплитуды полей излучения отдельных элементов Гюйгенса (мы берем скалярные величины). Модули $\Delta E_m(r_n)$ приблизительно одинаковы, а соответствующие фазы изменяются тем быстрее, чем дальше от средней части отверстия расположены элементы.

Используя для сложения комплексных амплитуд $\Delta\dot{E}_m(r_n)$ векторную диаграмму (рис. 10.14), видим, что ломаная линия «закручивается». При достаточно мелком разбиении можно, в принципе, получить ломаную, приближающуюся к спирали Корню. Нахождение результирующего поля производится при помощи соединения концов ломаной, это дискретный аналог построения на рис. 10.10 (начало).

Обсудим также широко распространенное представление о *зонах Френеля*. Рассматривая поле дифракции в средней точке $P(0, 0, z)$

(рис. 10.15), выделим в плоскости отверстия круг радиуса

$$r_1 = \sqrt{(z+\lambda/2)^2 - z^2} \approx \sqrt{\lambda z}. \qquad (10.39)$$

Все расстояния от элементов Гюйгенса, лежащих в пределах этого круга, до P различаются не более, чем на полволны. Так строится

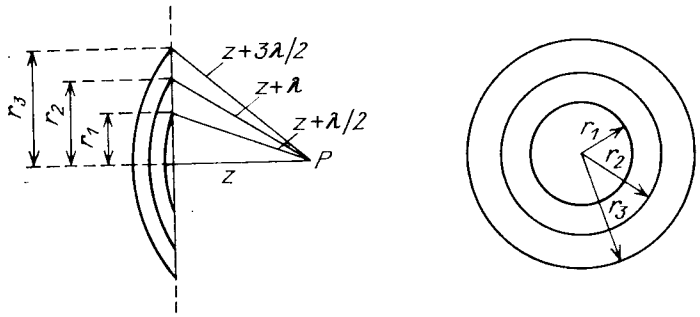


Рис. 10.15

первая зона Френеля. Аналогичными свойствами обладают кольцевые области с внешними радиусами

$$r_n = \sqrt{(z+n\lambda/2)^2 - z^2} \approx \sqrt{n\lambda z} \qquad (10.40)$$

($n > 1$); внутренние радиусы колец равны r_{n-1}. Это *зоны Френеля* номеров $n = 2, 3, \ldots$.

Чем выше номер зоны Френеля, тем ближе площади соседних зон. Можно полагать, что элементы Гюйгенса двух соседних зон Френеля достаточно высоких номеров создают в точке $P(0, 0, z)$ одинаковые по амплитуде поля. Но эти поля противофазны и, следовательно, взаимно компенсируются.

Пусть размеры отверстия весьма велики в сравнении с первой зоной Френеля

$$d \gg r_1, \qquad (10.41)$$

т. е. $d \gg \sqrt{\lambda z}$ (10.39), или — что то же: $\tilde{d} \gg 1$ (10.32). Это значит, что в отверстии (относительно произвольной формы) укладывается много зон Френеля. Действие зон высших номеров при этом в достаточной мере скомпенсировано, и, если отверстие увеличивать, то это уже практически не изменит поле дифракции в $P(0, 0, z)$. Влияние экрана перестанет сказываться. Действительно, именно к такому заключению мы пришли, получив в случае $\tilde{d} \gg 1$ формулы (10.34). Теперь этот результат осмыслен при помощи представления о зонах Френеля. Можно сказать, что поле дифракции создается, главным образом, элементами Гюйгенса нескольких центральных зон.

§ 10.4. Взаимно дополнительные экраны. Ограниченные тела (А)

10.4.1. Принцип Бабине в приближении Кирхгофа. Оказывается, полученное выше решение задачи дифракции на отверстии в бесконечном экране (будем называть ее задачей A) дает также поле дифракции для некоторой задачи B, отличающейся тем, что теперь рассматривается падение прежней волны $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{H}^0$ на ограниченный экран, имеющий форму и ориентацию прежнего отверстия, т. е., как говорят, конгруэнтный отверстию. Точнее говоря,

$$\mathbf{E}_B^- = -\mathbf{E}_A^-, \quad \mathbf{H}_B^- = -\mathbf{H}_A^-, \qquad (10.42)$$

где индексами A и B отмечены поля дифракции для обеих задач. Запись выражает так называемый *принцип Бабине*.

Покажем сначала, что принцип Бабине справедлив в приближении Кирхгофа.

ВЫВОД. Постановка задач A и B поясняется на рис. 10.16. В первой из них (а) поле в правом полупространстве ($z > 0$) есть

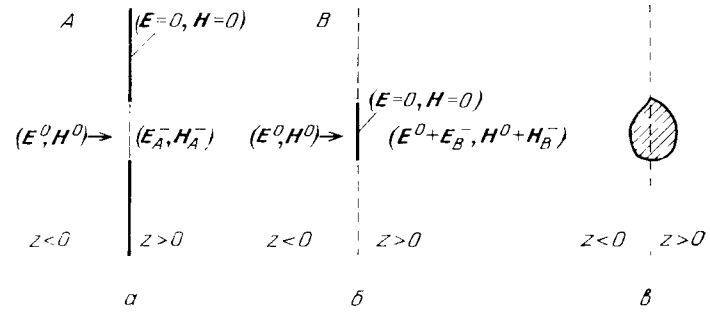


Рис. 10.16

поле дифракции: $\mathbf{E}_A = \mathbf{E}_A^-$, $\mathbf{H}_A = \mathbf{H}_A^-$. Именно это поле рассматривалось выше в § 10.2, 10.3. Во второй задаче (б) поле в правом полупространстве представляет собой наложение падающей волны и поля дифракции: $\mathbf{E}_B = \mathbf{E}^0 + \mathbf{E}_B^-$, $\mathbf{H}_B = \mathbf{H}^0 + \mathbf{H}_B^-$. Рассмотрим суперпозицию обоих полей:

$$\mathbf{E}_A + \mathbf{E}_B = \mathbf{E}_A^- + \mathbf{E}^0 + \mathbf{E}_B^-, \quad \mathbf{H}_A + \mathbf{H}_B = \mathbf{H}_A^- + \mathbf{H}_B^0 + \mathbf{H}_B^-. \qquad (10.43)$$

Мы имеем право говорить, что поле $\mathbf{E}_A + \mathbf{E}_B$, $\mathbf{H}_A + \mathbf{H}_B$ имеет источниками наложение элементов Гюйгенса задач A и B, т. е. оно создается всем фронтом падающей волны $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{H}^0$ в плоскости $z = 0$. Ясно, что это поле не отличается от $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{H}^0$ во всем полупространстве $z > 0$:

$$\mathbf{E}_A + \mathbf{E}_B = \mathbf{E}^0, \quad \mathbf{H}_A + \mathbf{H}_B = \mathbf{H}^0. \qquad (10.44)$$

Из сопоставления (10.43) и (10.44) вытекает принцип Бабине в форме (10.42). ■

Итак, в приближении Кирхгофа поля дифракции в задачах A и B о взаимно дополнительных экранах связаны соотношением (10.42). Можно пойти и дальше: вместо экрана в задаче B (рис. 10.16*б*) введем в рассмотрение некоторое тело (рис. 16.16*в*), обладающее тем свойством, что его сечение плоскостью $z = 0$ имеет форму прежнего экрана. Казалось бы, в произведенном выводе ничего не меняется: источники остаются прежними. В действительности же правое полупространство частично занято введенным телом, оно уже не однородно. Однако, оставаясь в рамках приближения Кирхгофа, этим до определенных пределов пренебрегают (в частности, тело не должно выходить за пределы тени экрана). Тогда формулы (10.42) позволяют судить и о дифракции на телах конечных размеров.

В частности, выводы о характере поля дифракции Фраунгофера и Френеля, сделанные выше в пп. 10.2 и 10.3, с некоторыми оговорками можно перенести и на задачи о непрозрачных телах конечных размеров.

Не следует, однако, забывать, что эвристический по своей сути метод Гюйгенса — Кирхгофа не приводит к точным решениям задач дифракции.

10.4.2. Симметрия полей и принцип двойственности. Продолжая рассматривать две задачи дифракции на взаимно дополнительных экранах (рис. 10.16*а*, *б*), введем еще одно различие, связанное с поляризацией падающей волны. Пусть падающие волны $\mathbf{E}^0_A$, $\mathbf{H}^A_0$

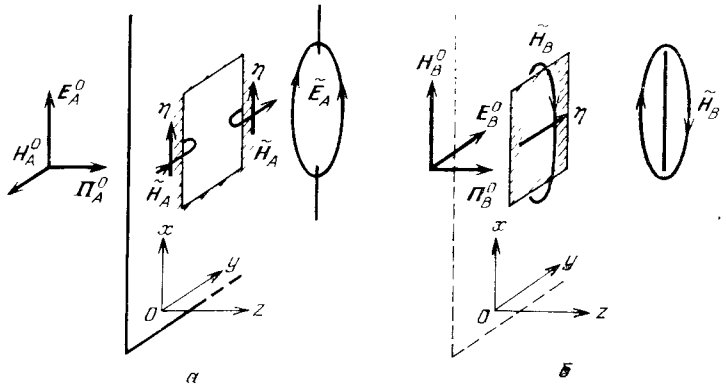


Рис. 10.17

(рис. 10.17*а*) и $\mathbf{E}^0_B$, $\mathbf{H}^0_B$ (рис. 10.17*б*) ориентированы так, что векторы $\mathbf{E}^0_A$ и $\mathbf{H}^0_B$ параллельны, а $\mathbf{H}^0_A$ и $\mathbf{E}^0_B$, соответственно этому, антипараллельны.

Полное поле во всем пространстве в обоих случаях можно представить в виде:

$$\mathbf{E}_{A,B} = \mathbf{E}^0_{A,B} + \tilde{\mathbf{E}}_{A,B}, \qquad \mathbf{H}_{A,B} = \mathbf{H}^0_{A,B} + \tilde{\mathbf{H}}_{A,B}, \tag{10.45}$$

где $\tilde{\mathbf{E}}_{A,B}$, $\tilde{\mathbf{H}}_{A,B}$ — поля, связанные с токами и зарядами, наведенными падающей волной в экране. При такой трактовке поля дифракции в правом полупространстве $z > 0$ выражаются следующим образом:

$$\mathbf{E}^-_A = \mathbf{E}^0_A + \tilde{\mathbf{E}}_A, \quad \mathbf{H}^-_A = \mathbf{H}^0_A + \tilde{\mathbf{H}}_A; \quad \mathbf{E}^-_B = \tilde{\mathbf{E}}_B, \quad \mathbf{H}^-_B = \tilde{\mathbf{H}}_B. \tag{10.46}$$

Поскольку токи и заряды лежат в плоскости $z = 0$, введенные поля обладают вполне определенной симметрией относительно этой плоскости. Так, в частности, магнитное поле $\mathbf{H}^-_B$ (рис. 10.17*б*) возбуждается токами, направленными вдоль оси y; линии вектора $\mathbf{H}^-_B$ лежат поэтому в плоскости $x0z$ и симметрично охватывают экран.

Рассмотрим распределение тангенциальных компонент полей дифракции $\mathbf{E}^-_A$, $\mathbf{H}^-_A$ и $\mathbf{E}^-_B$, $\mathbf{H}^-_B$ при $z = +0$. В задаче A на всем бесконечном экране S''_A равна нулю тангенциальная компонента вектора $\mathbf{E}_A$ (полного поля); поэтому $\mathbf{E}^-_{A\tau} = 0$ (при $z \geqslant 0$ полное поле есть поле дифракции). В задаче B на такой же части S'_B плоскости $z = 0$ $(S'_B = S''_A)$ $\mathbf{H}^-_{B\tau} = 0$, что следует из симметрии поля $\mathbf{H}^-_B = \mathbf{H}^-_B$ (рис. 10.17*б*). Возвращаясь к задаче A (рис. 10.17*а*), видим, что на отверстии S'_A поле $\tilde{\mathbf{H}}_A$, наведенное токами в экране, имеет только нормальную компоненту: $\tilde{\mathbf{H}}_{A\tau} = 0$. Поэтому в силу (10.46) $\mathbf{H}^-_{A\tau} = \mathbf{H}^0_A$. В задаче B на конгруэнтной части S''_B должно быть равно нулю полное электрическое тангенциальное поле: $\mathbf{E}_{B\tau} = 0$. Следовательно, из (10.45): $\tilde{\mathbf{E}}_{B\tau} = \mathbf{E}^-_{B\tau} = -\mathbf{E}^0_B$.

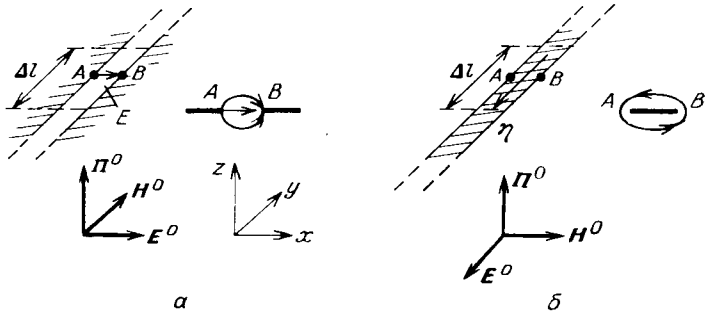
В итоге оказывается, что в задачах A и B тангенциальные компоненты напряженностей полей дифракции на границе правого полупространства поменялись ролями. Поставив электродинамические задачи в форме

$$\begin{array}{ll} A & B \\ \operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}^-_{mA} = i\omega\varepsilon_0\varepsilon\dot{\mathbf{E}}^-_{mA}, & \operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}^-_{mB} = -i\omega\mu_0\mu\dot{\mathbf{H}}^-_{mB}, \\ \operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}^-_{mA} = -i\omega\mu_0\mu\dot{\mathbf{H}}^-_{mA}, & \operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}^-_{mB} = i\omega\varepsilon_0\varepsilon\dot{\mathbf{E}}^-_{mB}, \\ \dot{\mathbf{E}}_{mA\tau} = 0 \quad \text{на} \quad \dot{S}''_A, & \dot{\mathbf{H}}_{mB\tau} = 0 \quad \text{на} \quad S'_B, \\ \dot{\mathbf{H}}_{mA\tau} = \dot{\mathbf{H}}^0_{mA} \quad \text{на} \quad S'_A, & \dot{\mathbf{E}}_{mB\tau} = -\dot{\mathbf{E}}^0_{mB} \quad \text{на} \quad S''_B, \end{array} \tag{10.47}$$

мы видим, что они находятся в соотношении, которое отвечает принципу двойственности (см. п. 3.4.3). Это значит, что, имея решение электродинамической задачи A в виде поля $\dot{\mathbf{E}}^-_{mA}$, $\dot{\mathbf{H}}^-_{mA}$, мы можем получить решение $\dot{\mathbf{E}}^-_{mB}$, $\dot{\mathbf{H}}^-_{mB}$ задачи B (при измененной поляри-

зации падающей волны), сделав в готовом решении замену (3.79). Точно так же получается решение задачи A, если имеется решение задачи B. Это утверждение называется принципом Бабине.

10.4.3. Щелевые излучатели. На основании предыдущего мы можем сравнивать задачи дифракции на щели в идеально проводящем экране (рис. 10.18$а$) и дополнительной полосе (рис. 10.18$б$).



$а$ $б$

Рис. 10.18

При указанной поляризации падающей волны в полосе возникает продольный ток I. Поэтому каждый элемент полосы $\Delta l \ll \lambda$ (условие $d \ll \lambda$ подразумевается) будет вести себя как элементарный электрический излучатель (см. § 9.2). Зная ток, можно по формулам из п. 9.2.2 выразить поле излучения, которое в данном случае есть не что иное, как поле дифракции $\mathbf{E}_B^-$, $\mathbf{H}_B^-$. Для дальней зоны на основании (9.29) имеем:

$$\dot{\mathbf{E}}_{mB}^- \approx \vartheta_0 \frac{i\dot{I}_m \Delta l \omega \mu_0 \mu}{4\pi} \frac{\sin\vartheta}{r} e^{-ikr},$$
$$\dot{\mathbf{H}}_{mB}^- \approx \alpha_0 \frac{i\dot{I}_m \Delta l \omega \mu_0 \mu}{4\pi W} \frac{\sin\vartheta}{r} e^{-ikr}, \qquad (10.48)$$

причем нетрудно связать ток I с магнитным полем на поверхности полоски:

$$\dot{I}_m = \oint_L \dot{\mathbf{H}}_m^S \, d\boldsymbol{l} = 2 \int_A^B \dot{\mathbf{H}}_m^S \, d\mathbf{l}; \qquad (10.49)$$

здесь имеется в виду, что замкнутый контур интегрирования L «прижат» к самой полоске: L есть $ABBA$ (рис. 10.18$б$).

Теперь мы можем выразить поле дифракции в случае щели (рис. 10.18$а$), применив принцип двойственности, т. е. сделав замену величин в соответствии с (3.79): $\varepsilon \rightleftarrows \mu$, $\dot{\mathbf{E}}_{mB}^- \to -\dot{\mathbf{H}}_{mA}^-$, $\dot{\mathbf{H}}_{mB}^- \to \dot{\mathbf{E}}_{mA}^-$, $\dot{\mathbf{H}}_m^S \to \dot{\mathbf{E}}_m^S$. При этом, как видно из (10.49),

$$\dot{I}_m \to 2 \int_A^B \dot{\mathbf{E}}_m^S \, d\mathbf{l} = 2\dot{U}_m, \qquad (10.50)$$

где $\dot{U}_m$ истолковывается как напряжение между краями щели. Представляемое формулами (10.48) поле $\dot{\mathbf{E}}_{mB}^-$, $\dot{\mathbf{H}}_{mB}^-$ переходит в поле дифракции задачи A:

$$\dot{\mathbf{E}}_{mA}^- = \alpha_0 \frac{ik\dot{U}_m \Delta l}{2\pi} \frac{\sin\vartheta}{r} e^{-ikr}, \qquad (10.51)$$
$$\dot{\mathbf{H}}_{mA}^- = -\vartheta_0 \frac{ik\dot{U}_m \Delta l}{2\pi W} \frac{\sin\vartheta}{r} e^{-ikr}.$$

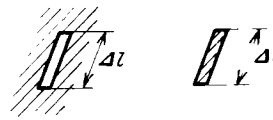
При сопоставлении (10.51) и (9.43) становится ясно, что элемент щели проявляет себя как элементарный магнитный излучатель, причем

$$\dot{m}_m = i2\dot{U}_m \Delta l/\omega, \quad \dot{I}_m^{\text{м}} = -2\dot{U}_m. \qquad (10.52)$$

Второе из этих равенств отвечает соотношению (9.38).

Анализ излучения щели на основе принципа взаимности ведет начало от работ А. А. Пистолькорса [1]).

Короткая щель (рис. 10.19$а$), как и короткий металлический элемент (рис. 10.19$б$), близки по своему действию к элементарным излучателям, магнитному и электрическому; надо, однако, иметь в виду, что распределение $\dot{\mathbf{E}}_m^S$ и, соответственно, $\dot{\mathbf{H}}_m^S$ на излучателях не является равномерным: существенны краевые эффекты.



$а$ $б$

Рис. 10.19

Проведенное рассмотрение нельзя считать решением дифракционных задач, так как не получена связь $\dot{\mathbf{E}}_m^S$ и $\dot{\mathbf{H}}_m^S$ ($\dot{U}_m$ и $\dot{I}_m$) с полем падающей волны. Были лишь исследованы общие свойства полей дифракции. Отметим следующее важное обстоятельство. При той поляризации падающей волны, которая показана на рис. 10.18$а$, вектор $\mathbf{H}^0$ параллелен щели. Это значит, что при отсутствии щели в экране будет распределен ток с плотностью $\boldsymbol{\eta} = 2[\mathbf{v}_0, \mathbf{H}^0] = \mathbf{x}_0 2H^0$, что соответствует стоячей волне, образующейся в результате полного отражения падающей. Щель «перерезает» ток проводимости в экране под прямым углом. Это обусловливает сильное возмущение поля с излучением из щели. Прерванный ток экрана замещается током смещения в щели.

Если изменить поляризацию падающей волны, сделав $\mathbf{H}^0$ перпендикулярным щели, то она окажется параллельной току в экране. Вносимое возмущение при этом невелико, так что излучение — пока узка щель — незначительно. При конструировании антенн и в технике СВЧ важно понимать, какие щели (разрезы) в металлических элементах будут существенно излучать, а какие — нет. Так, напри-

[1]) Пистолькорс А. А. // ЖТФ.— 1944.— Т. 14.— С. 681, 693.

мер, «незлучающим» будет разрез прямоугольного волновода плоскостью $x = a/2$, если распространяется основная волна. Действительно, этот разрез, проходя по средним линиям широких стенок, почти не повлияет на их токи.

§ 10.5. Дифракция на цилиндре (Б)

10.5.1. Постановка задачи. Рассматриваемый ниже пример позволит нам поставить и решить задачу дифракции как электродинамическую краевую задачу (см. п. 10.1.1), не прибегая к эвристическим приемам. Постановка задачи поясняется на рис. 10.20. Бесконечный круговой цилиндр, однородное тело с проницаемостями ε_2, μ_2 расположен в среде с проницаемостями ε_1, μ_1 и ориентирован по оси z. Индексами 1 и 2 будем обозначать и другие параметры, относящиеся к соответствующим средам. Падающая волна $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{H}^0$ распространяется по нормали к оси цилиндра; возьмем два варианта:

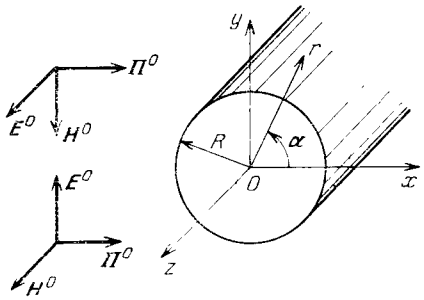


Рис. 10.20

параллельная поляризация ($\parallel$)

$$\dot{\mathbf{E}}^0_m = \mathbf{z}_0 \dot{A}^{\parallel} e^{-ik_1 x}, \qquad \dot{\mathbf{H}}^0_m = -\mathbf{y}_0 \frac{\dot{A}^{\parallel}}{W_1} e^{-ik_1 x}, \tag{10.53}$$

перпендикулярная поляризация ($\perp$)

$$\dot{\mathbf{E}}^0_m = \mathbf{y}_0 \dot{A}^{\perp} W_1 e^{-ik_1 x}, \qquad \dot{\mathbf{H}}^0_m = \mathbf{z}_0 \dot{A}^{\perp} e^{-ik_1 x}. \tag{10.54}$$

Требуется найти внутреннее и внешнее поля дифракции: $\mathbf{E}^+$, $\mathbf{H}^+$ и $\mathbf{E}^-$, $\mathbf{H}^-$.

Уравнения Максвелла для обеих однородных сред приводят к уравнениям Гельмгольца; источники отсутствуют, так что эти уравнения имеют вид (4.22). Учтем также, что ожидаемое решение не зависит от z. Таким образом,

$$\nabla_{\perp}^2 \dot{\mathbf{E}}_m + k_{1,2}^2 \dot{\mathbf{E}}_m = 0 \tag{10.55}$$

и

$$\nabla_{\perp}^2 \dot{\mathbf{H}}_m + k_{1,2}^2 \dot{\mathbf{H}}_m = 0. \tag{10.56}$$

Символ $\perp$ означает, что фигурируют координаты в плоскости поперечного сечения цилиндра, т. е. x, y или r, α.

Учтем, что $x = r\cos\alpha$ и запишем следующее разложение, которое при решении задачи будет ключевым:

$$e^{-ik_1 r\cos\alpha} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (-i)^n J_n(k_1 r)\, e^{in\alpha}. \tag{10.57}$$

Это не что иное, как ряд Фурье функции $\exp(-ik_1 r\cos\alpha)$ по системе $\{\exp(in\alpha)\}$; здесь фигурируют коэффициенты Фурье, которые представляются в виде:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik_1 r\cos\alpha} e^{-in\alpha}\, d\alpha = (-i)^n J_n(k_1 r). \tag{10.58}$$

Формула (10.58) — одно из основных соотношений теории цилиндрических функций.

Для решения задачи дифракции нужно получить представления полей $\mathbf{E}^+$, $\mathbf{H}^+$ и $\mathbf{E}^-$, $\mathbf{H}^-$ как суперпозиции подходящих решений уравнений Гельмгольца (10.55), (10.56) в цилиндрических координатах и наложить условия (10.1) на поверхности цилиндра $r = R$.

10.5.2. Параллельная поляризация. Согласно (10.53) и (10.57) имеем:

$$\dot{\mathbf{E}}^0_m = \mathbf{z}_0 \dot{A}^{\parallel} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n J_n(k_1 r)\, e^{in\alpha}, \qquad r > R \tag{10.59}$$

и

$$\dot{\mathbf{H}}^0_m = \frac{-\dot{A}^{\parallel}}{W_1}(\mathbf{r}_0 \sin\alpha + \boldsymbol{\alpha}_0 \cos\alpha) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n J_n(k_1 r)\, e^{in\alpha}, \qquad r > R \tag{10.60}$$

(учтено, что $\mathbf{y}_0 = \mathbf{r}_0 \sin\alpha + \boldsymbol{\alpha}_0 \cos\alpha$). Но магнитное поле удобнее представить в иной форме. Поскольку при $\mathbf{E}_m = \mathbf{z}_0 \dot{E}_m$

$$\dot{\mathbf{H}}_m = \frac{i}{\omega\mu_0\mu}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}_m = \frac{i}{\omega\mu_0\mu}\left(\frac{\mathbf{r}_0}{r}\frac{\partial \dot{E}_m}{\partial\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_0 \frac{\partial \dot{E}_m}{\partial r}\right), \tag{10.61}$$

а каждый член ряда (10.59) есть решение уравнений Максвелла, применяя к (10.59) почленно операцию (10.61), получаем следующее разложение $\dot{\mathbf{H}}^0_m$ по решениям уравнений Максвелла:

$$\dot{\mathbf{H}}^0_m = \frac{i\dot{A}^{\parallel}}{\omega\mu_0\mu_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n \left[\mathbf{r}_0 \frac{in}{r} J_n(k_1 r) - \boldsymbol{\alpha}_0 k_1 J_n'(k_1 r)\right] e^{in\alpha}, \qquad r > R. \tag{10.62}$$

Можно убедиться, что ряды (10.60) и (10.62) эквивалентны (при преобразованиях используются формулы (7.19), (7.20)).

Внутреннее поле дифракции представим при помощи рядов, подобных (10.59), (10.62), но с неизвестными коэффициентами $b_n^{\parallel}$:

$$\dot{\mathbf{E}}_m^+ = \mathbf{z}_0 \dot{A}^{\parallel} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n b_n^{\parallel} J_n(k_2 r)\, e^{in\alpha}, \qquad r < R, \tag{10.63}$$

$$\dot{\mathbf{H}}_m^+ = \frac{i\dot{A}^{\parallel}}{\omega\mu_0\mu_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n b_n^{\parallel} \left[\mathbf{r}_0 \frac{in}{r} J_n(k_2 r) - \boldsymbol{\alpha}_0 k_2 J_n'(k_2 r)\right] e^{in\alpha}, \qquad r < R. \tag{10.64}$$

Заметим, что каждый член в (10.63) есть решение $T = \mathscr{R}(r)\mathscr{A}(\alpha)$, построенное из первой строчки (7.41) при $B = 0$ и второй строчки (7.42), где сохранен один член ($\chi = k_2$).

Аналогичным образом выражается внешнее поле дифракции, однако теперь вместо бесселевых надо использовать функции Ханкеля, так что берется вторая строчка (7.41) при $\dot{A} = 0$. Только в этом случае внешнее поле дифракции будет удовлетворять условию излучения, которое мы обсудим после получения решения. Итак, пишем:

$$\dot{\mathbf{E}}_m^- = \mathbf{z}_0 \dot{A}^{\parallel} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n c_n^{\parallel} H_n^{(2)}(k_1 r)\, e^{in\alpha}, \qquad r > R, \tag{10.65}$$

$$\dot{\mathbf{H}}_m^- = \frac{i\dot{A}^{\parallel}}{\omega\mu_0\mu_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n c_n^{\parallel} \left[\mathbf{r}_0 \frac{in}{r} H_n^{(2)}(k_1 r) - \boldsymbol{\alpha}_0 k_1 H_n^{(2)\prime}(k_1 r)\right] e^{in\alpha}, \quad r > R. \tag{10.66}$$

Условия (10.1) в данном случае принимают вид:

$$\dot{E}_m^0 + \dot{E}_m^- = \dot{E}_m^+, \quad \dot{H}_{m\alpha}^0 + \dot{H}_{m\alpha}^- = \dot{H}_{m\alpha}^+, \qquad r = R. \tag{10.67}$$

Входящие сюда величины выразим при помощи разложений (10.59), (10.62), (10.63)—(10.66). Равенства (10.67) удовлетворяются почленно, что приводит к уравнениям:

$$\begin{aligned} b_n^{\parallel} J_n(k_2 R) - c_n^{\parallel} H_n^{(2)}(k_1 R) &= J_n(k_1 R), \\ b_n^{\parallel} \frac{k_2}{\mu_2} J_n'(k_2 R) - c_n^{\parallel} \frac{k_1}{\mu_1} H_n^{(2)\prime}(k_1 R) &= \frac{k_1}{\mu_1} J_n'(k_1 R), \end{aligned} \tag{10.68}$$

решения которых дает следующие выражения коэффициентов в разложениях (10.63)—(10.66):

$$b_n^{\parallel} = \frac{J_n(k_1 R) H_n^{(2)\prime}(k_1 R) - J_n'(k_1 R) H_n^{(2)}(k_1 R)}{J_n(k_2 R) H_n^{(2)\prime}(k_1 R) - \dfrac{W_1}{W_2} J_n'(k_2 R) H_n^{(2)}(k_1 R)}, \tag{10.69}$$

и

$$c_n^{\parallel} = \frac{-J_n(k_2 R) J_n'(k_1 R) + \dfrac{W_1}{W_2} J_n'(k_2 R) J_n(k_1 R)}{J_n(k_2 R) H_n^{(2)\prime}(k_1 R) - \dfrac{W_1}{W_2} J_n'(k_2 R) H_n^{(2)}(k_1 R)}. \tag{10.70}$$

Таким образом, решение задачи получено.

10.5.3. Перпендикулярная поляризация. Задачу дифракции в данном случае можно было бы решать прежним путем, отправляясь от разложения $\dot{\mathbf{H}}_m^0$ (10.54), повторяющего (10.59), и затем воспроизводя выкладки уже известного вида. Но в этом нет необходимости, поскольку принцип двойственности позволяет воспользоваться готовой формой решения, полученного выше в случае параллельной поляризации. Надо лишь произвести замену величин в соответствии с правилом (3.79). Как видно из (10.53), (10.54), при $\varepsilon \rightleftarrows \mu$, переход от параллельной поляризации к перпендикулярной происходит по схеме: $\dot{\mathbf{E}}_m \to \dot{\mathbf{H}}_m$, $\dot{\mathbf{H}}_m \to -\dot{\mathbf{E}}_m$. Выполняя требуемые операции, включая замену символов $\parallel \to \perp$, из (10.63)—(10.66) получаем:

$$\dot{\mathbf{E}}_m^+ = \frac{-i\dot{A}^{\perp}}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n b_n^{\perp} \left[\mathbf{r}_0 \frac{in}{r} J_n(k_2 r) - \boldsymbol{\alpha}_0 k_2 J_n'(k_2 r)\right] e^{in\alpha}, \qquad r < R, \tag{10.71}$$

$$\dot{\mathbf{H}}_m^+ = \mathbf{z}_0 \dot{A}^{\perp} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n b_n^{\perp} J_n(k_2 r)\, e^{in\alpha}, \qquad r < R; \tag{10.72}$$

$$\dot{\mathbf{E}}_m^- = \frac{-i\dot{A}^{\perp}}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n c_n^{\perp} \left[\mathbf{r}_0 \frac{in}{r} H_n^{(2)}(k_1 r) - \boldsymbol{\alpha}_0 k_1 H_n^{(2)\prime}(k_1 r)\right] e^{in\alpha}, \quad r > R, \tag{10.73}$$

$$\dot{\mathbf{H}}_m^- = \mathbf{z}_0 \dot{A}^{\perp} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n c_n^{\perp} H_n^{(2)}(k_1 r)\, e^{in\alpha}, \qquad r > R, \tag{10.74}$$

где коэффициенты выражаются следующим образом:

$$b_n^{\perp} = \frac{J_n(k_1 R) H_n^{(2)\prime}(k_1 R) - J_n'(k_1 R) H_n^{(2)}(k_1 R)}{J_n(k_2 R) H_n^{(2)\prime}(k_1 R) - \dfrac{W_2}{W_1} J_n'(k_2 R) H_n^{(2)}(k_1 R)}, \tag{10.75}$$

и

$$c_n^{\perp} = \frac{-J_n(k_2 R) J_n'(k_1 R) + \dfrac{W_2}{W_1} J_n'(k_2 R) J_n(k_1 R)}{J_n(k_2 R) H_n^{(2)\prime}(k_1 R) - \dfrac{W_2}{W_1} J_n'(k_2 R) H_n^{(2)}(k_1 R)}. \tag{10.76}$$

Эти последние формулы получены из (10.69), (10.70) при замене проницаемостей $\varepsilon \rightleftarrows \mu$.

10.5.4. Обсуждение результатов. Путем непосредственной проверки легко убедиться, что полученные поля рассеяния (10.65), (10.66) и (10.73), (10.74) удовлетворяют условию излучения в форме

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{F}}_m}{\partial r} + ik\dot{\mathbf{F}}_m\right) = 0 \tag{10.77}$$

(для этого надо перейти к асимптотическим представлениям (7.32)). Поскольку задача дифракции была двумерной, в (10.77) в отличие от соотношений (9.9), (9.19), фигурирует $\sqrt{r}$ вместо r (при выводе (10.77) вместо сферы, как в п. 9.0.2, должна рассматриваться цилиндрическая поверхность).

Рассмотрим некоторые численные результаты исследования дифракции на цилиндре. Пусть поляризация — параллельная, а цилиндр является идеально проводящим; для получения решения достаточно в (10.69), (10.70) перейти к пределу при $\varepsilon_2 \to -i\infty$. В результате имеем:

$$b_n^{\parallel} = 0, \qquad c_n^{\parallel} = -\frac{J_n(k_1 R)}{H_n^{(2)}(k_1 R)}. \tag{10.78}$$

Внутреннее поле дифракции $\mathbf{E}^+$, $\mathbf{H}^+$, как и следовало ожидать, отсутствует. При этом на поверхности цилиндра распределен ток, плотность которого в силу (10.3) есть

$$\boldsymbol{\eta} = -\mathbf{z}_0 (H_\alpha^0 + H_\alpha^-). \tag{10.79}$$

Чтобы выразить внешнее поле дифракции (поле рассеяния) $\mathbf{E}^-$, $\mathbf{H}^-$ в дальней зоне, используем асимптотическое представление

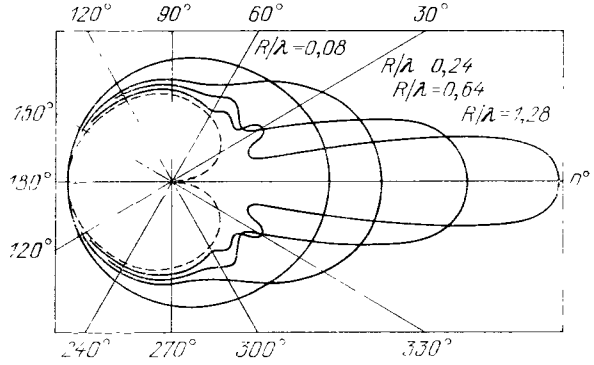


Рис. 10.21

(7.32); формулы (10.65), (10.66) при этом дают:

$$\dot{\mathbf{E}}_m^- = -\mathbf{z}_0 \dot{A}^{\parallel} f(r) Q(\alpha), \qquad \dot{\mathbf{H}}_m = \boldsymbol{\alpha}_0 \frac{\dot{A}^{\parallel}}{W_1} f(r) Q(\alpha) \tag{10.80}$$

(радиальная компонента H_r становится исчезающе малой), где

$$f(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 r}} e^{-i\left(k_1 r - \frac{\pi}{4}\right)}, \qquad Q(\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{\parallel} e^{in\alpha}. \tag{10.81}$$

На рис. 10.21 приведены результаты в виде диаграмм направленности поля рассеяния цилиндра [Г.4] (величина $\sqrt{\Pi^-}$ как

функция угловой координаты α) при относительно малых диаметрах $2R$; следует иметь в виду, что с увеличением радиуса цилиндра сходимость ряда $Q(\alpha)$ (10.81) быстро падает; обычно таким путем производятся расчеты при $k_1 R < 10$. Интересно, что при рассматриваемых размерах вместо тени наблюдается максимум излучения.

§ 10.6. Дифракционная теория направляющих структур и резонаторов с линзами и зеркалами (Б)

10.6.1. Теория линзовой линии. Линзовая линия уже рассматривалась выше в п. 7.6.2, но лишь с позиций геометрической оптики. Между тем, процесс передачи энергии здесь является типично дифракционным. Обычно для линзовой линии (см. рис. 7.34*б*) одновременно выполняются условия

$$R \gg \lambda, \qquad R \ll \mathring{\Lambda}, \tag{10.82}$$

где R — радиус линзы, так что заранее не определено соотношение величин R^2 и $\lambda\mathring{\Lambda}$, получаемых перемножением соответствующих частей обоих неравенств. Между тем, принимая одну из линз за излучающую апертуру, мы видим, что согласно (10.39) величина $\sqrt{\lambda\mathring{\Lambda}}$ есть не что иное, как радиус первой зоны Френеля в области соседней линзы. Это значит, что при невыполнении требования $R \gg \sqrt{\lambda\mathring{\Lambda}}$ (ср. (10.41)) линза может не «перехватывать» в достаточной степени направленный на нее поток энергии. Тогда передача энергии будет сопровождаться существенным затуханием в

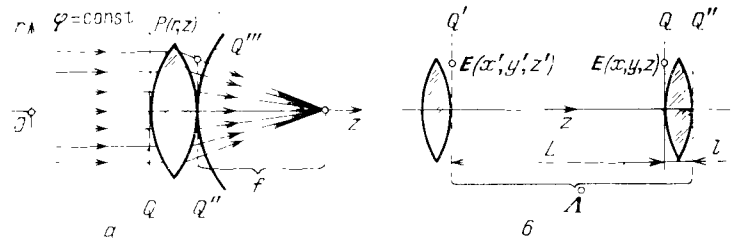


Рис. 10.22

результате излучения за пределы линзовой линии; будут велики, как говорят, *радиационные потери*.

Рассмотрим одну из теорий линзовой линии, трактующую процесс передачи энергии как дифракцию Френеля в периодической структуре.

Пусть на отдельную линзу падает параллельный пучок лучей (рис. 10.22*а*); за линзой он собирается в фокусе, что означает существование сходящейся сферической волны. Как видно, выполня-

ется равенство $(\Delta + f)^2 = f^2 + r^2$, где Δ — расстояние вдоль луча от плоскости Q'' до фронта Q''' сходящейся сферической волны. Пренебрегая малой величиной Δ^2 в сравнении с $2f\Delta$, будем иметь:

$$k\Delta = k\frac{r^2}{2f}. \tag{10.83}$$

Это не что иное, как фазовый сдвиг в плоскости Q'' (функция радиальной координаты) по отношению к сфере Q'''. Поля на Q и Q'' (вход и выход линзы) связаны соотношением:

$$\dot{\mathbf{E}}_m(x, y, z + l) = \mathbf{E}_m(x, y, z)\exp\left[-i\left(\varphi_0 - k\frac{r}{2f}\right)\right], \tag{10.84}$$

где φ_0 — постоянный сдвиг фазы между плоским и сферическим фронтами. Такое же соотношение можно было бы записать и в отношении $\dot{\mathbf{H}}_m$. Результат верен для параксиальных пучков (см. п. 7.6.2); продольные компоненты векторов поля пренебрежимо малы, и процесс представляет собой некоторую T-волну.

Перейдем к анализу периодической линзовой структуры. Исходя из заданной на Q' (рис. 10.22*б*) величины $\dot{\mathbf{E}}_m(x', y', z')$, определим $\dot{\mathbf{E}}_m(x, y, z)$ на Q на основании принципа Гюйгенса. Поскольку имеется в виду дифракция Френеля, исходным будет соотношение типа (10.28). Различие состоит в том, что в данном случае нельзя выносить за знак интеграла величину $\dot{\mathbf{E}}_m(0)$ (она зависит от поперечных координат) и, разумеется, интегрирование выполняется не по прямоугольнику. Таким образом:

$$\dot{\mathbf{E}}_m(x, y, z) = \frac{ik}{2\pi}\frac{e^{-ikL}}{L}\int_{Q'}\dot{\mathbf{E}}_m(x', y', z')\times$$

$$\times\exp\left[-ik\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2L}\right]dx'dy', \tag{10.85}$$

$$z = z' + L.$$

Так как структура — периодическая, свободные электромагнитные поля должны удовлетворять требованию (6.50):

$$\dot{\mathbf{E}}_m(x, y, z' + \mathring{\Lambda}) = \dot{\mathbf{E}}_m(x, y, z')e^{-i\varphi}. \tag{10.86}$$

При этом $\dot{\mathbf{E}}_m(x, y, z' + \mathring{\Lambda}) = \dot{\mathbf{E}}_m(x, y, z + l)$. Учитывая (10.84), пишем:

$$\dot{\mathbf{E}}_m(x, y, z)\exp\left[-i\left(\varphi_0 - k\frac{r^2}{2f}\right)\right] = \varkappa\dot{\mathbf{E}}_m(x, y, z'), \qquad \varkappa = e^{-i\varphi}, \tag{10.87}$$

и, следовательно, на основании (10.85)

$$\varkappa\dot{\mathbf{E}}_m(x, y, z') = \frac{ik}{2\pi L}\exp\left\{-i\left[k\left(L - \frac{r^2}{2f}\right) + \varphi_0\right]\right\}\int_{Q'}\dot{\mathbf{E}}_m(x', y', z')\times$$

$$\times\exp\left[-ik\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2L}\right]dx'dy'. \tag{10.88}$$

Мы получили не что иное, как *интегральное уравнение* относительно $\dot{\mathbf{E}}_m$. В краткой записи имеем:

$$\mathscr{L}\dot{\mathbf{E}}_m = \varkappa\dot{\mathbf{E}}_m, \tag{10.89}$$

где $\mathscr{L}$ — интегральный оператор в (10.88), а $\varkappa$ — неизвестный параметр. Сформулирована *задача на собственные значения* (ср. п. 6.0.2). Совокупность ее решений — система собственных функций $\dot{\mathbf{E}}_m = \dot{\mathbf{E}}_m^{(n)}$, которым отвечают собственные значения $\varkappa = \varkappa_n$, описывает различные волновые процессы в линзовой линии. Доказывается, что основной волне соответствует наиболее узкий пучок лучей (в геометрооптической трактовке), а радиационные потери при этом минимальны.

10.6.2. Линзовая линия и зеркальный резонатор. Будем считать, что на плоскости Q' (см. рис. 10.22*б*) вне апертуры линзы поле можно считать равным нулю. Тогда каждую линзу периодической структуры можно мысленно поместить в отверстие непрозрачного экрана, пусть это будет идеально проводящая перегородка. Линия, состоящая из таких экранов с отверстиями (рис. 10.23*а*),

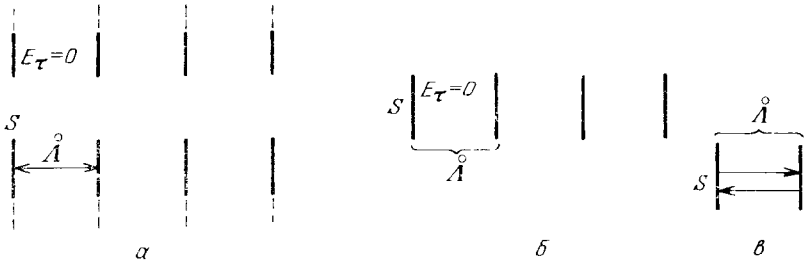


Рис. 10.23

может рассматриваться как предельный случай линзовой линии ($\mathring{\Lambda} = L$, $1/f = 0$). Это так называемая *диафрагменная линия*.

На рис. 10.23*б* показана периодическая структура, состоящая из экранов, дополнительных к диафрагменной линии. Очевидно, что два соседних экрана (пара экранов отдельно изображена на рис. 10.23*в*) можно рассматривать как зеркальный резонатор. Несомненно, режим резонанса возможен и в диафрагменной линии, причем векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в обоих случаях меняются ролями. Исходя

из того, что диафрагменная линия может быть описана посредством интегрального уравнения (10.88) при $\overset{\circ}{\Lambda} = L$, $1/f = 0$, $\varphi_0 = 0$,

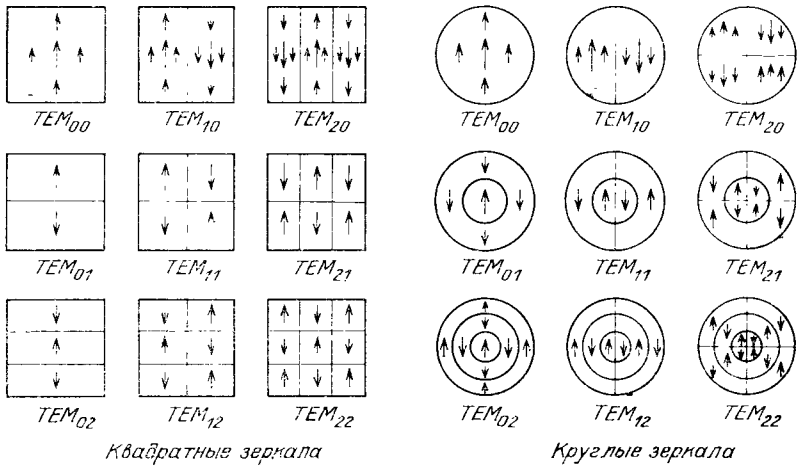


Рис. 10.24

мы можем сразу же получить аналогичное интегральное уравнение для зеркального резонатора, применив принцип двойственности. Оно имеет вид:

$$\varkappa \dot{\mathbf{H}}_m(x, y, z') = \frac{ik_0 e^{-ik\overset{\circ}{\Lambda}}}{2\pi\overset{\circ}{\Lambda}} \int_S \dot{\mathbf{H}}_m(x', y', z') \exp\left[-ik\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{2\overset{\circ}{\Lambda}}\right] dx'dy' \tag{10.90}$$

Собственные функции $\dot{\mathbf{H}}_m = \dot{\mathbf{H}}_m^{(n)}$, которым отвечают собственные значения $\varkappa = \varkappa_n$, дают поперечные распределения различных типов полей собственных колебаний.

На рис. 10.24 показана классификация структур собственных колебаний по Фоксу и Ли [1]) для случаев квадратных и круглых зеркал.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Плоская однородная волна ($f = 10$ ГГц) нормально падает на металлический экран с отверстием $a \times b = 1 \times 2$ м^2. Найти поле дифракции за экраном на расстоянии $r = 5$ м и 1 км.

2. Чему равно поперечное сечение прохождения (10.6) в приближении Гюйгенса — Кирхгофа?

3. Какой вид примет интеграл (10.9), если рассматривать дифракцию волны при наклонном падении?

[1]) *Fox A. G., Li T.* // Bell System Techn. J.— 1961.— V. 40, N 2.— P. 453. См. также [Д.7].

Указание: воспользоваться представлением об обобщенном элементе Гюйгенса в п. 9.4.3 и (9.72).

4. Можно ли найти диаметр отверстия, если сказано, что при длине волны $\lambda = 1$ м он равен размеру первой зоны Френеля?

5. Плоская однородная волна ($f = 10$ ГГц) нормально падает на металлический экран в виде прямоугольника с размерами $a \times b = 1 \times 2$ м^2. Выразить полное электромагнитное поле за экраном на расстоянии $r = 5$ м и 1 км.

6. Щель в экране длиной 1 см при напряжении между краями 1 В (его можно считать неизменным по длине щели) надо заменить круглой рамкой с током, идентично излучающей в полупространство. Найти диаметр и ток рамки; $f = 1$ ГГц.

7. При помощи спирали Корню проанализировать дифракцию Фраунгофера. Объяснить происхождение главного пространственного максимума излучения.

Глава 11

ИЗЛУЧЕНИЕ И ДИФРАКЦИЯ В ИЗОЛИРОВАННЫХ СТРУКТУРАХ (Б)

§ 11.0. Ортогональные системы функций и ряды Фурье

11.0.1. Некоторые свойства оператора Лапласа. Выше в § 6.0, 7.0, 8.0 уже рассматривались краевые (граничные) задачи для уравнения Гельмгольца, являющиеся задачами на собственные значения. Формулируя одну из таких задач, напишем:

$$\mathscr{L}\mathbf{u} = \varkappa\mathbf{u}, \tag{11.1}$$

где под $\mathscr{L}$ понимается операция $-\nabla^2$. Задавая те или иные граничные условия, налагаемые на $\mathbf{u}$, мы определяем класс функций, на которые распространяется операция $\mathscr{L}$, задаем область определения оператора Лапласа данной задачи $\mathscr{D}_{\mathscr{L}}$ (разумеется, функции $\mathbf{u} \in \mathscr{D}_{\mathscr{L}}$) должны допускать заданные операции дифференцирования). Входящий в (11.1) параметр $\varkappa$ в обсуждавшихся ранее краевых задачах — двумерных и трехмерных — обозначался χ^2 и k^2.

Рассматривая $u, v \in \mathscr{D}_{\mathscr{L}}$, введем интеграл

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_V \mathbf{u}\mathbf{v}^* dv, \tag{11.2}$$

где V — пространственная область задачи, некоторый объем (при переходе к двумерным и одномерным задачам V заменяется на S и L). Символ $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ (ср. (1.3)) употреблен потому, что введенный интеграл называется скалярным произведением функций $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Заметим, что $(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v})^*$.

Оператор $\mathscr{L}$ называется симметрическим, если

$$(\mathscr{L}\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathscr{L}\mathbf{v}). \tag{11.3}$$

Для скалярных u, v на основании первой формулы Грина (1.35)

$$(\mathscr{L}u, v) = -\int_V v^*\nabla^2 u dv = \int_V \nabla u \nabla v^* dV - \oint_S v^* \frac{\partial u}{\partial \nu} ds. \tag{11.4}$$

Поэтому, если u, $v=0$ на S либо $\partial u/\partial \nu$, $\partial v/\partial \nu = 0$ на S (**или** на одной части S выполняется первое условие, а на другой — второе: смешанная задача), то поверхностный интеграл в (11.4) равен нулю. Рассматривая аналогично $(u, \mathscr{L}v)$ (достаточно в (11.4) сделать замену $u \rightleftarrows v^*$), убеждаемся, что при данных граничных условиях

$$(\mathscr{L}u, v)=(\nabla u, \nabla v), \quad (u, \mathscr{L}v)=(\nabla u, \nabla v), \tag{11.5}$$

т. е. равенство (11.3) выполняется. Таким образом, возвращаясь к задачам, обсуждавшимся в § 6.0, 7.0, 8.0, легко убедиться, что оператор Лапласа был симметрическим.

Возьмем векторные $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Используя соотношения (1.29), (1.25), (1.26) и (1.33), получаем

$$(\mathscr{L}\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\int\limits_V \mathbf{v}^*\nabla^2\mathbf{u}\,dv = \int\limits_V (\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u})\,\mathbf{v}^*\,dv =$$

$$= \int\limits_V (\operatorname{rot}\mathbf{u}\operatorname{rot}\mathbf{v}^* + \operatorname{div}\mathbf{u}\operatorname{div}\mathbf{v}^*)\,dv + \oint\limits_S \{[\operatorname{rot}\mathbf{u}, \mathbf{v}^*] - \mathbf{v}^*\operatorname{div}\mathbf{u}\}\,ds. \tag{11.6}$$

Если принадлежащие $\mathscr{D}_{\mathscr{L}}$ функции таковы, что u_τ, $v_\tau = 0$ и $\operatorname{div}\mathbf{u}$, $\operatorname{div}\mathbf{v}=0$ на S; либо u_ν, $v_\nu = 0$ и $(\operatorname{rot}\mathbf{u})_\tau$, $(\operatorname{rot}\mathbf{v})_\tau = 0$ на S (можно рассматривать и смешанную задачу), то поверхностный интеграл в (11.6) исчезает. Тогда

$$\begin{aligned}(\mathscr{L}\mathbf{u}, \mathbf{v})&=(\operatorname{rot}\mathbf{u}, \operatorname{rot}\mathbf{v})+(\operatorname{div}\mathbf{u}, \operatorname{div}\mathbf{v}),\\ (\mathbf{u}, \mathscr{L}\mathbf{v})&=(\operatorname{rot}\mathbf{u}, \operatorname{rot}\mathbf{v})+(\operatorname{div}\mathbf{u}, \operatorname{div}\mathbf{v})\end{aligned} \tag{11.7}$$

(вторая строка получается при замене $\mathbf{u} \rightleftarrows \mathbf{v}^*$ в (11.6)). Оператор $\mathscr{L}$ является, таким образом, симметрическим и в рассмотренном случае, т. е., в частности, в задачах (8.37).

Собственные значения $\varkappa$ задачи (11.1) в случае симметрического $\mathscr{L}$ вещественны и неотрицательны. Действительно, образуя в (11.1) справа и слева скалярные произведения с $\mathbf{u}$, получаем

$$\varkappa = \frac{(\mathscr{L}\mathbf{u}, \mathbf{u})}{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}. \tag{11.8}$$

Знаменатель $(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ в силу (11.2) положителен. Ввиду (11.3) $(\mathscr{L}\mathbf{u}, \mathbf{u})=(\mathbf{u}, \mathscr{L}\mathbf{u})$, но в то же время $(\mathbf{u}, \mathscr{L}\mathbf{u})=(\mathscr{L}\mathbf{u}, \mathbf{u})^*$. Отсюда следует, что числитель в (11.8) — вещественен. Таким образом, собственные значения $\varkappa$ вещественны.

Рассматривая отдельно скалярные и векторные задачи, преобразуем $(\mathscr{L}\mathbf{u}, \mathbf{u})$ при помощи (11.5) и (11.7). Это дает

$$\varkappa = \frac{(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{u})}{(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \geqslant 0, \tag{11.9}$$

$$\varkappa = \frac{(\operatorname{rot}\mathbf{u}, \operatorname{rot}\mathbf{u}) + (\operatorname{div}\mathbf{u}, \operatorname{div}\mathbf{u})}{(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \geqslant 0. \tag{11.10}$$

Отсюда видно, что собственные значения задачи (11.1) при симметрическом $\mathscr{L} = -\nabla^2$ неотрицательны. Они могут быть расположены в следующем порядке:

$$0 \leqslant \varkappa_1 \leqslant \varkappa_2 \leqslant \ldots \leqslant \varkappa_i \leqslant \ldots \tag{11.11}$$

11.0.2. Ортогональные системы функций. Две функции $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ называют ортогональными, если

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0. \tag{11.12}$$

Будем рассматривать собственные функции $\mathbf{u} = \mathbf{u}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ задачи (11.1) при симметрическом $\mathscr{L}$. Для двух разных номеров i, k имеем

$$\mathscr{L}\mathbf{u}_i = \varkappa_i\mathbf{u}_i, \qquad \mathscr{L}\mathbf{u}_k = \varkappa_k\mathbf{u}_k. \tag{11.13}$$

Образуя скалярные произведения $(\mathscr{L}\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k)$ и $(\mathbf{u}_i, \mathscr{L}\mathbf{u}_k)$ и принимая во внимание вещественность собственных значений, получаем

$$(\mathscr{L}\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k) - (\mathbf{u}_i, \mathscr{L}\mathbf{u}_k) = (\varkappa_i - \varkappa_k)(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k), \tag{11.14}$$

или

$$(\varkappa_i - \varkappa_k)(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k), \tag{11.15}$$

поскольку оператор симметричен. Отсюда следует, что $(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k)=0$, т. е. *собственные функции ортогональны*, если им отвечают неравные собственные значения. Если встречаются вырожденные собственные функции (которым отвечают одинаковые собственные значения), то, как доказывается, их всегда можно выбрать ортогональными.

Будем говорить, что задача (11.1) порождает *ортогональные системы* функций $\{\mathbf{u}_i\}$.

Ортогональная система всегда может быть *нормирована*, т. е. можно так подобрать постоянные коэффициенты в выражениях $\mathbf{u}_i$, что $(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i)=N_i$, где N_i — любые положительные константы. В большинстве случаев берут $N_i = 1$ для всех i. Тогда получается *ортонормированная система*, для которой

$$(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k) = \delta_{ik}, \tag{11.16}$$

где $\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$ и $\delta_{ik} = 1$ при $i = k$ (*символ Кронекера*).

Пример 1. Убедимся, что ортогональны собственные функции (8.7)

$$u^{(1)}_{mnp} = N^{(1)}_{mnp}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\cos\frac{p\pi z}{L}. \tag{11.17}$$

Скалярное произведение функций $u^{(1)}_{mnp}$ и $u^{(1)}_{m'n'p'}$ имеет вид

$$\left(u^{(1)}_{mnp}, u^{(1)}_{m'n'p'}\right) = \int\limits_0^a\int\limits_0^b\int\limits_0^L N^{(1)}_{mnp}N^{(1)*}_{m'n'p'}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{m'\pi x}{a}\times$$

$$\times\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{n'\pi y}{b}\cos\frac{p\pi z}{L}\cos\frac{p'\pi z}{L}\,dx\,dy\,dz \tag{11.18}$$

(совокупность чисел m, n и p определяет номер i функции).

Интеграл (11.18) есть произведение трех однотипных табличных интегралов, которые дают нуль при $m \neq m'$, $n \neq n'$ и $p \neq p'$ соответственно. Система $\{u^{(1)}_{mnp}\}$, таким образом, ортогональна. Для нормировки в соответствии с (11.16) надо взять

$$N^{(1)}_{mnp} = 2\sqrt{2}/\sqrt{abL}, \tag{11.19}$$

если $p \neq 0$ (m и n в (11.17) не могут быть нулями). Если же $p = 0$, то правая часть в (11.19) делится на $\sqrt{2}$. ■

11.0.3. Ортогональные ряды. Взяв ортонормированную систему $\{u_n\}$ и некоторую функцию f, определенную в той же области, построим ряд

$$(f) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n, \qquad a_n = (f, u_n). \tag{11.20}$$

Он называется *ортогональным рядом*, или *рядом Фурье* функции f; a_n называются *коэффициентами Фурье*.

Отличительным свойством ряда Фурье (f) является выполнение равенства:

$$((f), u_k) = (f, u_k) \tag{11.21}$$

для всех k. Действительно, при составлении скалярного произведения с u справа в (11.20) в силу ортонормировки (11.16) получаем нуль во всех членах за исключением k-го, который дает a_n.

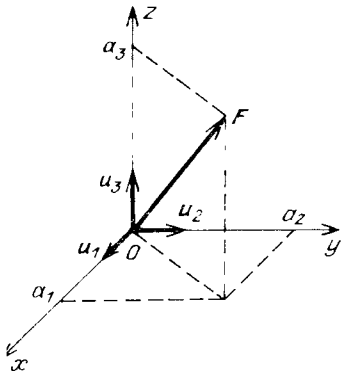


Рис. 11.1

Если система $\{u_n\}$ обладает, как говорят, свойством *полноты*, то ряд Фурье (f) (11.20) *сходится в среднем* к f, т. е.

$$\left(f - \sum_{n=1}^{N} a_n u_n,\ f - \sum_{n=1}^{N} a_n u_n\right) \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty. \tag{11.22}$$

Рассматриваемые нами системы собственных функций оператора Лапласа обладают этим свойством.

Сущность разложения Фурье поясняется следующим примером из векторной алгебры. Выберем в трехмерном пространстве декартову систему координат. Осям x, y и z соответствуют орты $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{y}_0$, $\mathbf{z}_0$. Переобозначим эти единичные взаимно перпендикулярные векторы следующим образом: $\mathbf{x}_0 = \mathbf{u}_1$, $\mathbf{y}_0 = \mathbf{u}_2$, $\mathbf{z}_0 = \mathbf{u}_3$. Мы имеем, таким образом, ортонормированную систему элементов $\{\mathbf{u}_n\}_{n=1}^3$: ведь скалярное произведение $(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k)$ удовлетворяет условию (11.16). Эта система полна в том смысле, что по ней может быть разложен любой вектор $\mathbf{F}$ (рис. 11.1):

$$\mathbf{F} = \sum_{n=1}^{3} a_n \mathbf{u}_n, \qquad a_n = (\mathbf{F}, \mathbf{u}_n), \tag{11.23}$$

причем $a_n = (\mathbf{F}, \mathbf{u}_n)$ — это не что иное, как *проекции* вектора $\mathbf{F}$ на оси x, y и z. Но именно так выражаются и коэффициенты Фурье a_n (11.20). Аналогия между разложениями (11.20) и (11.23) не является чисто формальной. Дело в том, что разлагаемая функция f трактуется как вектор в бесконечномерном пространстве, а ее ряд Фурье (11.20) есть разложение, подобное (11.23). При этом коэффициенты Фурье a_n выступают как проекции f на u_n.

Пример 2. Ряд Фурье (3.17) мы можем рассматривать как ряд вида (11.20) функции $u(t)$, заданной на интервале $-T/2 < t < T/2$, по системе $\{u_n\}$, ортонормированной согласно (11.16), где

$$u_n = T^{-1/2} \exp(in2\pi t/T), \qquad \int_{-T/2}^{T/2} u_i u_k^* dt = \delta_{ik} \tag{11.24}$$

(при определении скалярного произведения (11.2) вместо V фигурирует данный отрезок). Коэффициенты Фурье равны:

$$a_n = \int_{-T/2}^{T/2} u u_n^* dt = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} u e^{-in2\pi t/T} dt. \tag{11.25}$$

Мы видим, что формула ряда (3.17) эквивалентна (11.20).

Функции (11.24) получаются как собственные функции оператора Лапласа, т. е. из (11.1) при периодических граничных условиях: $u(-T/2) = u(T/2)$. Равенство (11.1) есть при этом обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-\frac{d^2u}{dt^2} = \varkappa u, \tag{11.26}$$

а собственные значения $\varkappa_n$ оказываются равными $(2\pi/T)^2$. ■

11.0.4. Собственные векторные функции оператора Лапласа. Конкретизируем задачу (11.1), взяв объем V в виде параллелепипеда $0 < x < a$, $0 < y < b$, $0 < z < L$ и сформулировав определенные граничные условия на его поверхности. Пусть

$$\nabla^2 \mathbf{u} + \varkappa \mathbf{u} = 0 \text{ в } V; \quad u_\tau = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ на } S. \tag{11.27}$$

Нас интересуют собственные функции этой задачи $\mathbf{u} = \mathbf{E}_i$, которым отвечают собственные значения $\varkappa = \varkappa_i$.

При проектировании векторов на оси координат задача (11.27) сводится к трем скалярным задачам, которые решаются методом разделения переменных, как было показано в п. 8.0.1. Выпишем результаты, которые понадобятся в дальнейшем.

Получаемая в конечном счете система $\{\mathbf{E}_i\}$ распадается на две подсистемы $\{\mathbf{E}^s_i\}$ и $\{\mathbf{E}^p_i\}$, объединяющие *соленоидиальные* функции $\mathbf{E}^s_i (\operatorname{div} \mathbf{E}^s_i = 0)$ и *потенциальные* функции $\mathbf{E}^p_i (\operatorname{rot} \mathbf{E}^p_i = 0)$. Те и другие выражаются в форме:

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{x}_0 A_x \cos\chi_x x \sin\chi_y y \sin\chi_z z + \mathbf{y}_0 A_y \sin\chi_x x \cos\chi_y y \sin\chi_z z + \mathbf{z}_0 A_z \sin\chi_x x \sin\chi_y y \cos\chi_z z, \tag{11.28}$$

где

$$\chi_x = m\pi/a, \quad \chi_y = n\pi/b, \quad \chi_z = p\pi/L \tag{11.29}$$

(m, n, $p = (0)$, 1, 2, ...). При этом

$$\varkappa_i = (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2 + (p\pi/L)^2 \tag{11.30}$$

(индекс i понимается как номер набора чисел m, n, p внутри каждой подсистемы).

Ниже будут записаны выражения коэффициентов в (11.28) при следующей ортонормировке:

$$\int_V \mathbf{E}_i \mathbf{E}_k^* dv = \delta_{ik}/\varepsilon_0 |\varepsilon|. \tag{11.31}$$

Внутри соленоидальной подсистемы $\{\mathbf{E}_i^s\}$ выделим подсистемы *E-функций* и *H-функций*: $\{\mathbf{E}_i^E\}$ и $\{\mathbf{E}_i^H\}$ соответственно. Введем обозначение:

$$Q = 2\sqrt{2}/\sqrt{\varepsilon_0 |\varepsilon| abL(\chi_x^2 + \chi_y^2)\varkappa}. \tag{11.32}$$

Для E-функций:

$$A_x = -Q\chi_x\chi_z, \quad A_y = -Q\chi_y\chi_z, \quad A_z = Q(\chi_x^2 + \chi_y^2) \tag{11.33}$$

(если $m \neq 0$, $n \neq 0$, $p \neq 0$); p может быть нулем, тогда все коэффициенты в (11.34) делятся на $\sqrt{2}$. Для H-функций:

$$A_x = Q\chi_y\sqrt{\varkappa}, \quad A_y = -Q\chi_x\sqrt{\varkappa}, \quad A_z = 0 \tag{11.34}$$

(если $m \neq 0$, $n \neq 0$, $p \neq 0$). Числа m и n могут порознь быть нулями, тогда все коэффициенты делятся на $\sqrt{2}$.

Для потенциальной подсистемы $\{\mathbf{E}_i^p\}$:

$$A_x = Q\chi_x\sqrt{\chi_x^2 + \chi_y^2}, \quad A_y = Q\chi_y\sqrt{\chi_x^2 + \chi_y^2}, \quad A_z = Q\chi_z\sqrt{\chi_x^2 + \chi_y^2} \tag{11.35}$$

(нулевые m, n и p исключаются).

Поставим теперь задачу

$$\nabla^2\mathbf{u} + \varkappa\mathbf{u} = 0 \text{ в } V; \quad u_\nu = 0, \qquad (\operatorname{rot}\mathbf{u})_\tau = 0 \text{ на } S. \tag{11.36}$$

Собственным функциям $\mathbf{u} = \mathbf{H}_i$ отвечают собственные значения $\varkappa = \varkappa_i$, которые по-прежнему выражаются формулой (11.30). Система $\{\mathbf{H}_i\}$ распадается на соленоидальную и потенциальную подсистемы $\{\mathbf{H}_i^s\}$ и $\{\mathbf{H}_i^p\}$. В свою очередь, $\{\mathbf{H}_i^s\}$ есть совокупность подсистем E-функций $\{\mathbf{H}_i^E\}$ и H-функций $\{\mathbf{H}_i^H\}$. Все собственные функции представляются в форме:

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{x}_0 B_x \sin\chi_x x \cos\chi_y y \cos\chi_z z + \mathbf{y}_0 B_y \cos\chi_x x \sin\chi_y y \cos\chi_z z + \mathbf{z}_0 B_z \cos\chi_x x \cos\chi_y y \sin\chi_z z, \tag{11.37}$$

где употреблены обозначения (11.29). Соотношение ортонормировки возьмем в форме:

$$\int_V \mathbf{H}_i \mathbf{H}_k^* dv = \delta_{ik}/\mu_0 |\mu|. \tag{11.38}$$

Тогда для подсистемы $\{\mathbf{H}_i^E\}$:

$$B_x = iQ\chi_y\sqrt{\varkappa}/W, \quad B_y = -iQ\chi_x\sqrt{\varkappa}/W, \quad B_z = 0. \tag{11.39}$$

Для подсистемы $\{\mathbf{H}_i^H\}$:

$$B_x = iQ\chi_x\chi_z/W, \quad B_y = iQ\chi_y\chi_z/W, \quad B_z = -iQ(\chi_x^2 + \chi_y^2)/W. \tag{11.40}$$

Формулы записаны для $m \neq 0$, $n \neq 0$, $p \neq 0$. Могут быть равны нулю p в (11.39) и m или n в (11.40), тогда соответствующие выражения делятся на $\sqrt{2}$.

Для потенциальной подсистемы $\{\mathbf{H}_i^p\}$:

$$B_x = -iQ\chi_x\sqrt{\chi_x^2 + \chi_y^2}/W, \quad B_y = -iQ\chi_y\sqrt{\chi_x^2 + \chi_y^2}/W, \quad B_z = -iQ\chi_y\sqrt{\chi_x^2 + \chi_y^2}/W \tag{11.41}$$

($m \neq 0$, $n \neq 0$, $p \neq 0$). Одно или два из этих чисел могут быть нулями, тогда выражения (11.41) делятся на $\sqrt{2}$ или, соответственно, на 2.

Постановка краевых задач типа (11.27), (11.36) уже обсуждалась в п. 8.1.2. Соленоидальные подсистемы $\{\mathbf{E}_i^s\}$ и $\{\mathbf{H}_i^s\}$ представляют комплексные амплитуды векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ собственных колебаний прямоугольного резонатора. Нормировка (11.31), (11.38) произведена так, что $\mathbf{E}_i^E$ и $\mathbf{H}_i^E$, $\mathbf{E}_i^H$ и $\mathbf{H}_i^H$ связаны уравнениями Максвелла; поэтому также в (11.39), (11.40) введены мнимые единицы. Потенциальные функции $\mathbf{E}_i^p$ и $\mathbf{H}_i^p$ можно рассматривать как решения уравнений Максвелла при $\omega = 0$.

Нас будут также интересовать двумерные аналоги задач (11.27), (11.36), когда вместо параллелепипеда рассматривается прямоугольник $0 < x < a$, $0 < y < b$. При этом $\nabla^2 \to \nabla_\perp^2$, $V \to S$ и $S \to L$ (L — контур прямоугольника S). Соответствующие собственные функции будем обозначать символами $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{h}_i$. Выражения $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{h}_i$ получаются, если в (11.28), (11.37) отбросить множители $\sin\chi_z z$, $\cos\chi_z z$ и положить $A_z = 0$, $B_z = 0$.

Оказывается, собственные функции $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{h}_i$ представляют поперечные компоненты собственных волн прямоугольного волновода (без множителя $\exp(-i\Gamma z)$), причем имеется следующее соответствие:

$$\{\mathbf{e}_i^p, \mathbf{h}_i^s\} \to E\text{-волны}, \qquad \{\mathbf{e}_i^s, \mathbf{h}_i^p\} \to H\text{-волны}, \tag{11.42}$$

т. е. поперечное электрическое поле E-волны является потенциальным, а магнитное — соленоидальным (по координатам x, y); для

H-волн имеет место обратное соотношение. Заметим, что это свойство любых волн данных классов, что вытекает из представлений (6.25), (6.28).

Нормировку $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{h}_i$ произведем так, чтобы учитывалась их связь при формировании волн волновода (обусловленная уравнениями Максвелла). Возьмем:

$$\int_S \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k^* ds = \delta_{ik} |W_k^{E,H}|, \qquad \int_S \mathbf{h}_i \mathbf{h}_k^* ds = \delta_{ik} / |W_k^{E,H}|, \tag{11.43}$$

при этом справедливо также:

$$\int_S [\mathbf{e}_i, \mathbf{h}_k^*]_z \, ds = \delta_{ik} W_k^{E,H} / |W_k^{E,H}|, \tag{11.44}$$

где $W_k^{E,H}$ — волновые сопротивления (6.26), (6.29). При данной ортонормировке функции $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{h}_i$ можно получить при помощи формул (7.58), (7.63), а именно (при отбрасывании $\exp(-i\Gamma z)$):

$$\mathbf{e}_i^p = \dot{\mathbf{E}}_{mt}^{mn}, \qquad \mathbf{h}_i^s = \dot{\mathbf{H}}_m^{mn}, \tag{11.45}$$

если взять в (7.58) $E_0^{mn} = i 2\chi_{mn} \sqrt{|W^E|} / |\Gamma_{mn}| \sqrt{ab}$.

Аналогично

$$\mathbf{e}_i^s = \dot{\mathbf{E}}_m^{mn}, \qquad \mathbf{h}_i^p = \dot{\mathbf{H}}_{mt}^{mn}, \tag{11.46}$$

если в (7.63) положить $H_0^{mn} = -i 2\chi_{mn} / \Gamma_{mn} \sqrt{ab |W^H|}$ ($m \neq 0$, $n \neq 0$); если $m = 0$ или $n = 0$, производится деление на $\sqrt{2}$.

Везде в двумерном варианте i — номер набора чисел m, n; $\varkappa_i = \chi_{mn}^2$.

§ 11.1. Вынужденные колебания. Излучение в полости

11.1.1. Постановка задачи. Рассматривая в гл. 8 различные электромагнитные резонаторы, мы исследовали только свободные электромагнитные поля. Между тем, на практике в большинстве случаев имеют дело с *вынужденными колебаниями*. Резонатор при этом связан с источником энергии, и внутреннее электромагнитное поле находим в результате решения задачи об излучении некоторого внесенного элемента. Обычно она называется *задачей о возбуждении резонатора*. Собственные колебания в большинстве случаев предполагаются известными.

На рис. 11.2 схематически представлены некоторые устройства возбуждения резонаторов. Полые резонаторы нередко соединяются с коаксиальными кабелями. Конец внутреннего проводника кабеля, проходящий внутрь полости, подобен элементарному электрическому излучателю. Таковы штыревые элементы, показанные в случаях прямоугольного (*а*) и цилиндрического (*б*) резонаторов. Применяются и петлевые элементы (*в*), подобные элементарному магнитному излучателю. Полые резонаторы возбуждаются также через отверстия в оболочке без всяких дополнительных элементов; в частности, при формировании резонаторов используются волноводные диафрагмы (*г*).

Подлежащее возбуждению электромагнитное поле должно иметь проекцию вектора $\mathbf{E}$ на ось штыревого элемента или проекцию вектора $\mathbf{H}$ на нормаль к плоскости петлевого. Как будет показано ниже в п. 11.1.3, возбуждаемое поле мало отличается по

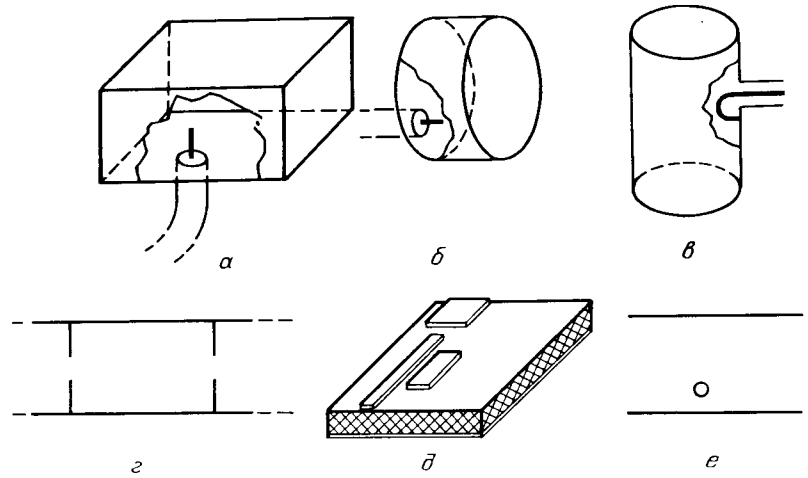


Рис. 11.2

своему строению от того или иного типа собственных колебаний, если частота источника близка к соответствующей собственной частоте.

Полосковые резонаторы, применяемые в интегральных схемах СВЧ, возбуждаются близко расположенными полосковыми линиями; это показано в двух вариантах (1 и 2) на рис. 11.2*д*. Диэлектрический резонатор может возбуждаться полем любой направляющей структуры, например, полого волновода, внутри которого он помещается (рис. 11.2*е*).

11.1.2. Собственные колебания резонатора и базис полей. Ниже в п. 11.1.3 будут подробно рассматриваться вынужденные колебания полого резонатора. Но чтобы выработать способ представления электромагнитного поля, мы должны предварительно вернуться к обсуждению некоторых свойств собственных колебаний.

Как известно, в случае свободных полей из уравнений Максвелла следуют однородные уравнения Гельмгольца относительно комплексных амплитуд $\dot{\mathbf{E}}_m$ и $\dot{\mathbf{H}}_m$. В п. 11.0.4 на примере области в виде параллелепипеда мы рассмотрели характерные краевые задачи

для такого уравнения, взяв граничные условия, свойственные вектору $\dot{\mathbf{E}}_m$ (11.27), а затем вектору $\dot{\mathbf{H}}_m$ (11.36) при идеально проводящей поверхности. Были получены решения этих задач в виде ортонормированных систем собственных функций $\{\mathbf{E}_i\}$ и $\{\mathbf{H}_i\}$. Как и следовало ожидать, при этом были найдены поля, отвечающие собственным колебаниям полого резонатора и соответствующие собственные частоты. Эти поля, являющиеся соленоидальными, образуют подсистемы $\{\mathbf{E}_i^s\}$ и $\{\mathbf{H}_i^s\}$ систем $\{\mathbf{E}_i\}$ и $\{\mathbf{H}_i\}$; последние содержат также подсистемы потенциальных векторных функций $\{\mathbf{E}_i^p\}$ и $\{\mathbf{H}_i^p\}$, которые полями резонатора не являются. Однако, если исключить из $\{\mathbf{E}_i\}$ и $\{\mathbf{H}_i\}$ потенциальные функции, то эти системы уже не будут обладать свойством полноты (см. п. 11.0.3). Будем говорить, что системы $\{\mathbf{E}_i\}$ и $\{\mathbf{H}_i\}$ образуют *базис полей* полого резонатора. Хотя в п. 11.0.4 рассматривался только параллелепипед, обладающий аналогичными свойствами базис полей существует во всех случаях. В тех случаях, когда задачи (11.27), (11.36) решаются методом разделения переменных (например, в цилиндрических и сферических координатах), базис полей можно легко построить.

Подчеркнем, что векторные функции $\mathbf{E}_i^s, \mathbf{H}_i^s$ и соответствующие собственные значения $\varkappa_i$ дают электромагнитное поле и соответствующую собственную частоту ω_i некоторого i-го типа колебаний данного резонатора: $\varkappa_i = k_i^2 = (\omega_i/c)^2 \varepsilon\mu$. Но функции $\mathbf{E}_i^p, \mathbf{H}_i^p$ такое поле не образуют, причем их собственные значения $\varkappa_i$ нельзя рассматривать как квадраты волновых чисел. Формально можно трактовать пару $\mathbf{E}_i^p, \mathbf{H}_i^p$ в качестве решения уравнений Максвелла при собственной частоте $\omega_i = 0$. Это сразу выясняется при прямой подстановке, если учесть, что потенциальные функции $\mathbf{E}_i^p$ и $\mathbf{H}_i^p$ — градиенты некоторых скалярных функций, тогда как $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi \equiv 0$ (1.22).

В дальнейшем будем пользоваться ортонормировкой вида (11.31), (11.38), согласно которой

$$\varepsilon_0 |\varepsilon| \int_V \mathbf{E}_i \mathbf{E}_k^* dv = \mu_0 |\mu| \int_V \mathbf{H}_i \mathbf{H}_k^* dv = \delta_{ik}. \tag{11.47}$$

Но надо убедиться, что это соотношение во всех случаях соответствует уравнениям Максвелла.

ВЫВОД. Рассматривая собственные колебания номеров i и k некоторого полого резонатора с идеально проводящей оболочкой запишем соответствующие уравнения Максвелла:

$$\begin{array}{ll} \operatorname{rot}\mathbf{E}_i = -i\omega_i\mu_0\mu\mathbf{H}_i, & \operatorname{rot}\mathbf{E}_k^* = i\omega_k^*\mu_0\mu^*\mathbf{H}_k^*, \\ \operatorname{rot}\mathbf{H}_i = i\omega_i\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}_i & \operatorname{rot}\mathbf{H}_k^* = -i\omega_k^*\varepsilon_0\varepsilon^*\mathbf{E}_k^*. \end{array} \tag{11.48}$$

Здесь опущены точки и индексы m, отмечающие комплексные амплитуды, причем для номера k применено комплексное сопряжение.

Уравнения Максвелла объединим попарно, как это указано стрелками. В первой строке левого столбца составим скалярное произведение с $\mathbf{H}_k^*$, а в другом уравнении этой пары — с $\mathbf{E}_i$; аналогичные действия производятся и с другой парой уравнений. Надо выполнить такие же операции, как при выводе равенства (3.55). Затем производится интегрирование по V и учитывается, что $\boldsymbol{E}_\tau = 0$ на S. В результате получаем:

$$\begin{aligned} \omega_i\mu_0\mu \int_V \mathbf{H}_i\mathbf{H}_k^* dv - \omega_k^*\varepsilon_0\varepsilon^* \int_V \mathbf{E}_i\mathbf{E}_k^* dv = 0, \\ \omega_k^*\mu_0\mu^* \int_V \mathbf{H}_i\mathbf{H}_k^* dv - \omega_i\varepsilon_0\varepsilon \int_V \mathbf{E}_i\mathbf{E}_k^* dv = 0. \end{aligned} \tag{11.49}$$

Отсюда можно исключить первый, а затем второй интегралы. Это дает следующие равенства:

$$(k_i^2 - k_k^2) \int_V \mathbf{H}_i\mathbf{H}_k^* dv = 0, \quad (k_i^2 - k_k^2) \int_V \mathbf{E}_i\mathbf{E}_k^* dv = 0, \tag{11.50}$$

справедливые при $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_i^s$, $\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_i^s$. При их получении учтено, что в силу вещественности волновых чисел (см. п. 8.1.4) $(\omega_i^*/c)^2 \varepsilon^*\mu^* = (\omega_i/c)^2 \varepsilon\mu$. Напомним, что при $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_i^p$, $\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_i^p$ все собственные частоты ω_i равны нулю.

Из (11.50) следует, что при $k_i^2 \neq k_k^2$ интегралы равны нулю, т. е. системы собственных функций ортогональны, если все собственные колебания являются невырожденными. В случае вырождения (когда разным полям отвечают одинаковые собственные частоты) всегда можно составить такие линейные комбинации полей, которые дадут ортогональные собственные функции.

Положим теперь в (11.49) $i = k$. Рассматривая соленоидальные поля, с учетом вещественности собственных значений $k_i^2 = (\omega_i/c)^2 \varepsilon\mu$ получаем:

$$\varepsilon_0 |\varepsilon| \int_V \mathbf{E}_i\mathbf{E}_i^* dv = \mu_0 |\mu| \int_V \mathbf{H}_i\mathbf{H}_i^* dv. \tag{11.51}$$

Если же $\mathbf{E}_i$ и $\mathbf{H}_i$ — потенциальные функции, то они не связаны между собой, при этом равенство (11.51) можно выполнить как наложенное условие. Теперь, чтобы прийти к ортонормировке (11.47), достаточно положить интегралы в (11.51) равными единице для всех i. ■

11.1.3. Вынужденные колебания полого резонатора. Решение задачи. Рассматривая некоторый полый резонатор, зададим внутри

его объема V электрические и магнитные источники, характеризуемые плотностями токов $\mathbf{j}^{ст}$ и $\mathbf{j}^{м}$; допустим также существование отверстия S_Σ в оболочке S, на котором задано поле $\mathbf{E}^{ст}$ (рис. 11.3). Формулировка задачи имеет следующий вид:

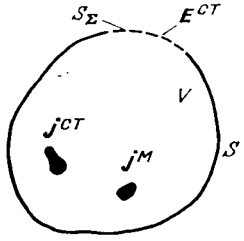


Рис. 11.3

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_m = i\omega\varepsilon_0\varepsilon\dot{\mathbf{E}}_m + \dot{\mathbf{j}}^{ст}_m,$$
$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}_m = -i\omega\mu_0\mu\dot{\mathbf{H}}_m - \dot{\mathbf{j}}^{м}_m \qquad (11.52)$$

в объеме V

$$\dot{\mathbf{E}}_{m\tau} = 0 \text{ на } S - S_\Sigma, \quad \dot{E}_{m\tau} = \dot{\mathbf{E}}^{ст}_m$$

на поверхности S_Σ. Здесь использованы уравнения Максвелла в форме (9.51).

Решение задачи $\dot{\mathbf{E}}_m$, $\dot{\mathbf{H}}_m$ при помощи разложений по системам $\{\mathbf{E}_i\}$ и $\{\mathbf{H}_i\}$, обсуждавшимся в п. 11.1.2 имеет вид

$$\dot{\mathbf{E}}_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\mathbf{E}_n, \qquad \dot{\mathbf{H}}_m = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\mathbf{H}_n, \qquad (11.53)$$

где

$$a_n = \frac{i}{\omega^2 - \omega_n^2}\frac{|\varepsilon|}{\varepsilon}\left(\omega Q_n^э + \frac{\mu^*}{\mu}\omega_n^* Q_n^м\right),$$
$$b_n = \frac{i}{\omega^2 - \omega_n^2}\frac{|\mu|}{\mu}\left(\frac{\varepsilon^*}{\varepsilon}\omega_n^* Q_n^э + \omega Q_n^м\right). \qquad (11.54)$$

Здесь обозначено:

$$Q_n^э = \int_V \dot{\mathbf{j}}^{ст}_m\mathbf{E}_n^* dv, \qquad Q_n^м = \int_V \dot{\mathbf{j}}^{м}_m\mathbf{H}_n^* dv + \int_{S_\Sigma}[\dot{\mathbf{E}}^{ст}_m, \mathbf{H}_n^*]\,\mathbf{ds}. \qquad (11.55)$$

Напомним, что ω_n — собственные частоты резонатора, когда соответствующие собственные функции $\mathbf{E}_n$, $\mathbf{H}_n$ соленоидальны; при потенциальных $\mathbf{E}_n$, $\mathbf{H}_n$ они равны нулю.

ВЫВОД. Любые решения $\dot{\mathbf{E}}_m$, $\dot{\mathbf{H}}_m$ уравнений Максвелла в (11.52), рассматриваемые в V, удовлетворяют следующей бесконечной системе интегральных соотношений:

$$\int_V (\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_m - i\omega\varepsilon_0\varepsilon\dot{\mathbf{E}}_m - \dot{\mathbf{j}}^{ст}_m)\,\mathbf{E}_k^* dv = 0,$$
$$\int_V (\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}_m + i\omega\mu_0\mu\dot{\mathbf{H}}_m + \dot{\mathbf{j}}^{м}_m)\,\mathbf{H}_k^* dv = 0, \qquad (11.56)$$
$$k = 1, 2, \ldots, \infty.$$

Действительно, поскольку заключенные в скобки функции согласно (11.52) равны нулю, обращаются в нуль и все эти интегралы. В сущности, они — не что иное, как коэффициенты Фурье a_k (11.20) при $f = 0$.

К первым членам подынтегральных выражений применим формулу (1.26) и образовавшиеся интегралы от дивергенций преобразуем в поверхностные при помощи теоремы Остроградского — Гаусса (1.33). Эти действия, которые можно назвать интегрированием по частям, приводят к соотношениям:

$$\int_V \dot{\mathbf{H}}_m \operatorname{rot}\mathbf{E}_k^* dv - \int_V (i\omega\varepsilon_0\varepsilon\dot{\mathbf{E}}_m + \dot{\mathbf{j}}^{ст}_m)\,\mathbf{E}_k^* dv = 0,$$
$$\int_V \dot{\mathbf{E}}_m \operatorname{rot}\mathbf{H}_k^* dv + \int_V (i\omega\mu_0\mu\dot{\mathbf{H}}_m + \dot{\mathbf{j}}^{м}_m)\,\mathbf{H}_k^* dv + \int_{S_\Sigma}[\dot{\mathbf{E}}^{ст}_m, \mathbf{H}_k^*]\,\mathbf{ds} = 0, \qquad (11.57)$$
$$k = 1, 2, \ldots, \infty.$$

Поверхностный интеграл сохранился только во второй строке, так как на S обращаются в нуль тангенциальные компоненты всех $\mathbf{E}_k$. Перепишем этот результат с учетом уравнений Максвелла (11.48), которым подчинены собственные функции:

$$\omega_k^*\mu_0\mu^* \int_V \dot{\mathbf{H}}_m\mathbf{H}_k^* dv - \omega\varepsilon_0\varepsilon\int_V \dot{\mathbf{E}}_m\mathbf{E}_k^* dv = -i\int_V \dot{\mathbf{j}}^{ст}_m\mathbf{E}_k^* dv,$$
$$\omega_k^*\varepsilon_0\varepsilon^* \int_V \dot{\mathbf{E}}_m\mathbf{E}_k^* dv - \omega\mu_0\mu\int_V \dot{\mathbf{H}}_m\mathbf{H}_k^* dv = \qquad (11.58)$$
$$= -i\int_V \dot{\mathbf{j}}^{м}_m\mathbf{H}_k^* dv - i\int_{S_\Sigma}[\dot{\mathbf{E}}^{ст}_m, \mathbf{H}_k^*]\,\mathbf{ds},$$
$$k = 1, 2, \ldots, \infty.$$

Неизвестное поле вынужденных колебаний $\dot{\mathbf{E}}_m$, $\dot{\mathbf{H}}_m$ представим в виде сумм:

$$\dot{\mathbf{E}}_m^N = \sum_{n=1}^{N} a_n\mathbf{E}_n, \qquad \dot{\mathbf{H}}_m^N = \sum_{n=1}^{N} b_n\mathbf{H}_n, \qquad (11.59)$$

которые можно рассматривать как частичные суммы разложений $\dot{\mathbf{E}}_m$ и $\dot{\mathbf{H}}_m$ по полным системам $\{\mathbf{E}_i\}$ и $\{\mathbf{H}_i\}$. Заменяя $\dot{\mathbf{E}}_m$ и $\dot{\mathbf{H}}_m$ в (11.58) суммами $\dot{\mathbf{E}}_m^N$ и $\dot{\mathbf{H}}_m^N$ (11.59), видим, что в силу ортогональности использованных систем остаются только члены с $n = k$. Учитывая (11.47), получаем

$$\omega\frac{\varepsilon}{|\varepsilon|}a_k - \omega_k^*\frac{\mu^*}{|\mu|}b_k = iQ_k^э,$$
$$\omega_k^*\frac{\varepsilon^*}{|\varepsilon|}a_k - \omega\frac{\mu}{|\mu|}b_k = -iQ_k^м, \qquad (11.60)$$
$$k = 1, \ldots, N,$$

где применены обозначения (11.53). Задача приведена, таким образом, к совокупности пар линейных уравнений типа (11.60). Каждая такая система имеет решение (11.54). Так как результат

не зависит от числа членов N в суммах (11.62), номер k в (11.60) может быть любым и, следовательно, определены члены бесконечных рядов (11.53). Решение (11.53)—(11.55) обосновано. ■

Прежде чем перейти к обсуждению найденного решения задачи о возбуждении полого резонатора, отметим ряд элементов идеализации в ее постановке. Во-первых, подчеркнем, что это была задача об излучении заданных источников, тогда как устройствам, показанным на рис. 11.2, адекватны *задачи дифракции*. Например, в случаях, когда к полому резонатору присоединяется коаксиальный кабель (рис. 11.2*а, б, в*), происходит дифракция T-волны, падающей из кабеля. Волна наводит ток на штыревом или петлевом элементе и отражается от резонатора. Распределение тока можно считать заданным лишь в известном приближении, его необходимо найти. Представляет интерес и амплитуда отраженной волны.

Во-вторых, непосредственно учтены лишь потери во внутренней среде, поскольку проницаемости рассматриваются как комплексные величины. Оболочка считалась идеально проводящей, а потери на излучение можно строго учесть, только определив внешнее (по отношению к резонатору) поле дифракции. Правда, мы увидим, что в некотором приближении все потери можно ввести в расчет и в рамках данной теории.

11.1.4. Обсуждение решения. Анализ вынужденных колебаний. Ряды (11.53) сходятся в среднем (см. (11.22)) в объеме резонатора; в этом смысле и надо понимать знаки равенства. Но, например, на отверстии S_Σ ряд для $\dot{\mathbf{E}}_m$ будет давать значение $\dot{E}_{m\tau} = 0$ (так как это свойство каждого члена ряда), что, разумеется, не соответствует исходному условию (11.52).

Возьмем сначала случай отсутствия потерь. При этом все собственные частоты резонатора ω_n вещественны. Это значит, что частота источника возбуждения резонатора ω может оказаться как угодно близкой к одной из собственных частот ω_k. Как видно из (11.54), соответствующие коэффициенты рядов (11.53) при этом неограниченно возрастают: $a_k \to \infty$, $b_k \to \infty$. Поскольку значения всех остальных членов (если данный тип не вырожден) ограничены, то поле вынужденных колебаний в своей структуре, можно сказать, не отличается от собственных колебаний $\mathbf{E}_k$, $\mathbf{H}_k$. Это *идеальный резонанс* типа k.

Если учесть потери, что мы можем сделать вполне строго в случае поглощения во внутренней среде, то собственные частоты ω_n окажутся комплексными величинами. Это значит, что не существует таких значений частоты возбуждения ω, при которых знаменатели выражений a_n и b_n (11.54) могут обратиться в нуль. Выражая собственные частоты согласно (8.41), (8.42) в виде

$$\omega_n = \omega_n' \left(1 + \frac{i}{2Q_n}\right), \tag{11.61}$$

запишем:

$$\frac{1}{|\omega^2 - \omega_k^2|} = \frac{1}{\omega_k'^2 \left|(\omega/\omega_k')^2 - 1 + 1/4Q_k^2 - i/Q_k\right|}. \tag{11.62}$$

Эта функция имеет максимум

$$\max \frac{1}{|\omega^2 - \omega_k^2|} = \frac{Q_k}{\omega_k'^2} \tag{11.63}$$

при частоте

$$\omega_{(k)} = \omega_k' \sqrt{1 - 1/4Q_k^2}, \tag{11.64}$$

которая и является, таким образом, *резонансной частотой*. Она отличается от соответствующей собственной частоты ω_k, понимаемой как вещественная часть ω_k.

Очевидно, что

$$\frac{a_k(\omega)}{a_k(\omega_{(k)})} \approx \frac{b_k(\omega)}{b_k(\omega_{(k)})} \approx \frac{1}{Q_k \left|(\omega/\omega_k')^2 - 1 + 1/4Q^4 - i/Q_k\right|}. \tag{11.65}$$

Эта зависимость (рис. 11.4) есть типичная *резонансная кривая*.

Если учесть, что $(\omega/\omega_k')^2 - 1 \approx 2(\omega - \omega_k')/\omega_k'$, и отбросить в (11.62) малый член $1/4Q^2k$, то оказывается, что

$$\omega_k \approx \omega_{(k)} + i\Delta\omega_k, \quad Q_k \approx \omega_{(k)}/2\Delta\omega_k, \tag{11.66}$$

где $2\Delta\omega_k$ — так называемая полоса пропускания, на краях которой отношение (11.65) уменьшается в $\sqrt{2}$ раз.

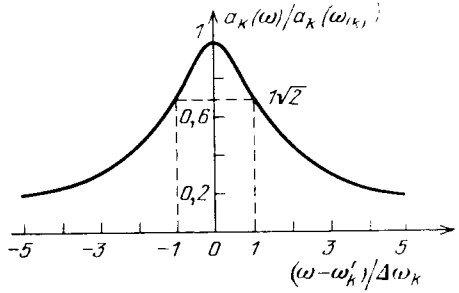


Рис. 11.4

Зависимость (11.65), однако, является достаточно точной частотной характеристикой вынужденных колебаний в окрестности $\omega_{(k)}$ только в том случае, если все прочие члены рядов (11.53) кроме k-х не оказывают заметного влияния хотя бы в пределах полосы пропускания. Это возможно на достаточно «разреженном» участке спектра при высокой добротности. Во всех случаях частотная зависимость поля возбуждения в широкой полосе частот оказывается довольно сложной.

Пример 3. Рассмотрим возбуждение прямоугольного резонатора (рис. 11.5) нитью тока Q, параллельной оси z; в этом направлении поле однородно, так что возбуждаются только типы колебаний E_{mn_0}. На рис. 11.6 (сверху) сплошной линией показана частотная зависимость амплитуды $\mathbf{E}_m$ вектора $\mathbf{E}$ в точке P, полученная по первой формуле (11.53); было учтено 100 членов суммы. Стенки резонатора — идеально проводящие, но внутренняя среда — реальный диэлектрик с комплексной проницаемостью $\varepsilon = 3(1 - i \cdot 10^{-3})$. Ниже

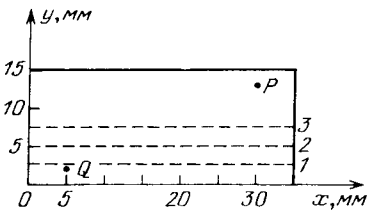


Рис. 11.5

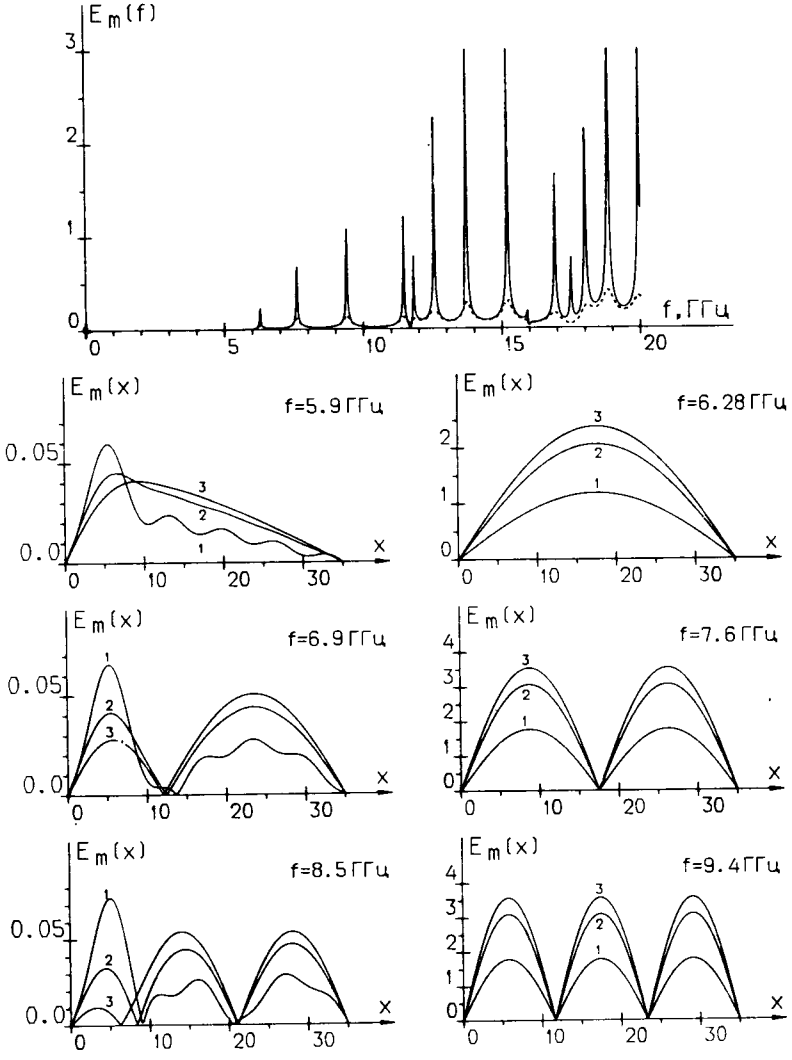


Рис. 11.6. (ЭВМ)

на рис. 11.6 показано, как изменяется поле в резонаторе в зависимости от x при разных y (уровни *1*, *2* и *3* на рис. 11.5) на нескольких частотах. В правом столбце изображений взяты резонансные частоты. Видно, что в резонансах поле значительно сильнее (ср. левый столбец) и меняется в пространстве почти по закону соответствующих собственных колебаний.

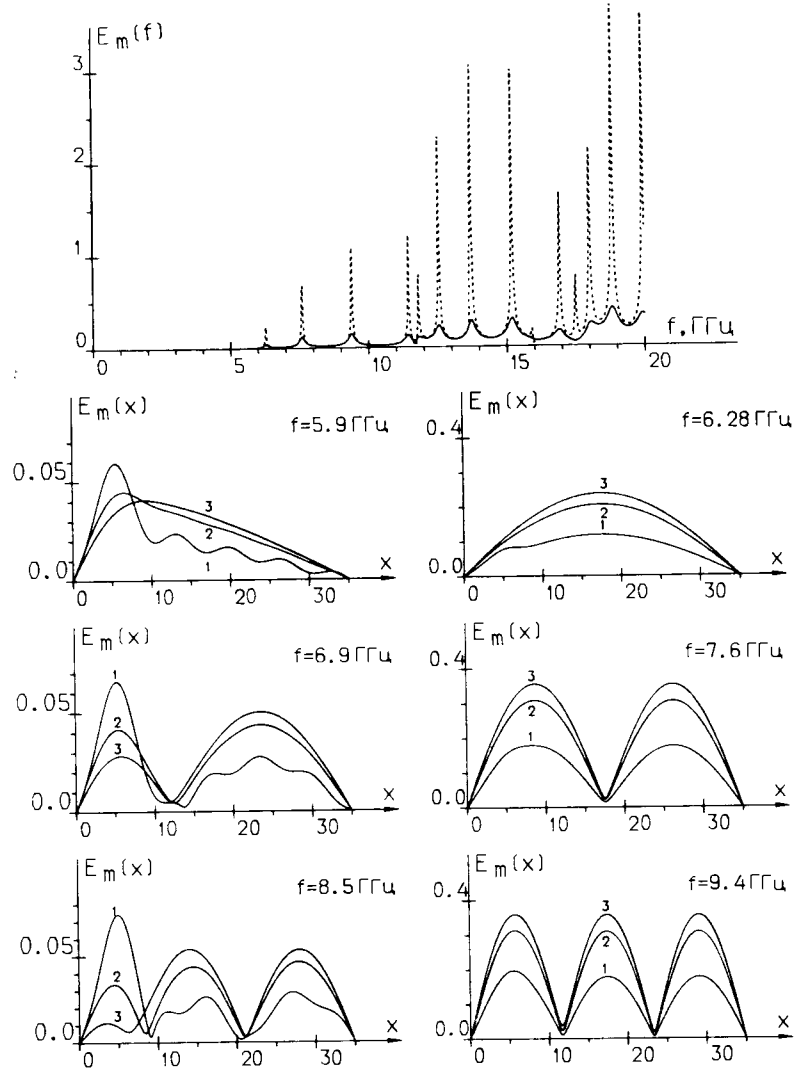


Рис. 11.7. (ЭВМ)

На рис. 11.7 аналогичные результаты представлены при ухудшении добротности: теперь взят диэлектрик с $\varepsilon = 3(1 - i \cdot 10^{-2})$. Сплошной линией показана изменившаяся частотная характеристика, пунктиром для сравнения повторена прежняя кривая (новая кривая также нанесена пунктиром на

рис. 11.6). На рис. 11.7 представлены и новые распределения поля; как видно, амплитуда поля в резонансах уменьшилась на порядок.

Рассмотрим подробнее (в увеличенном масштабе) один из участков частотной характеристики в обоих вариантах (рис. 11.8 и 11.9). Он, в частности,

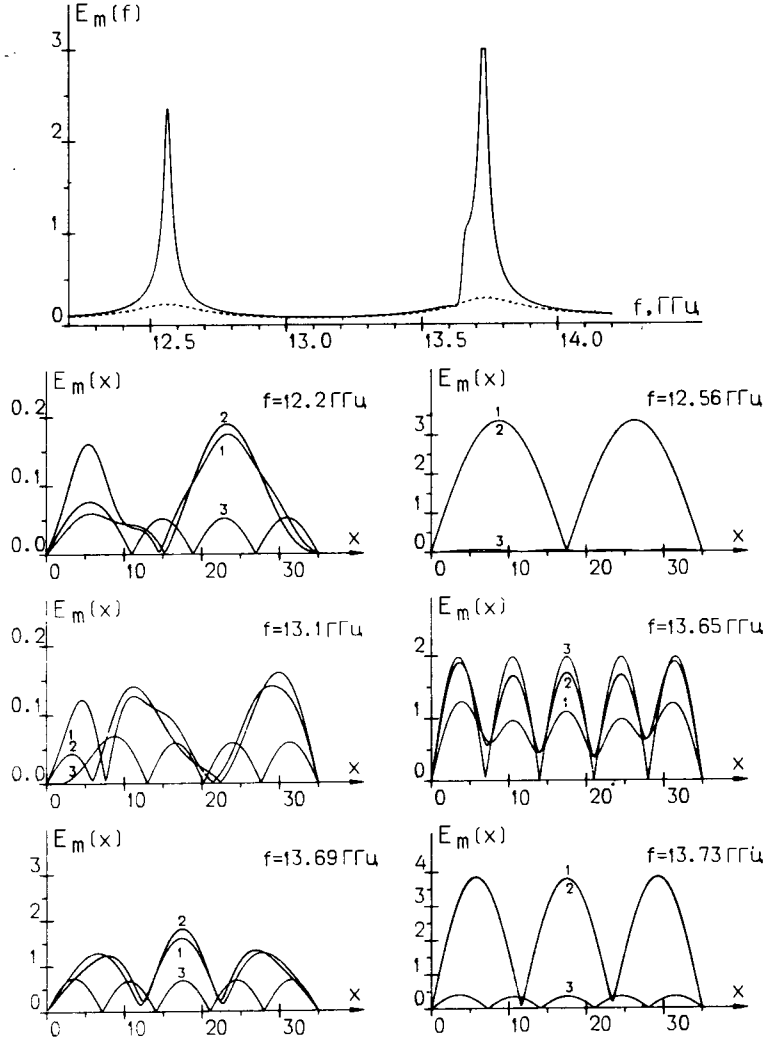


Рис. 11.8. (ЭВМ)

интересен тем, что содержит два почти слившихся резонанса. Это типы колебаний E_{510} и E_{320}, собственные частоты которых в отсутствие потерь равны 13,6526 ГГц и 13,7272 ГГц соответственно. ■

Как видно из формул (11.54), если источники возбуждения являются электрическими ($Q^{\text{м}} = 0$), то разложение магнитного поля не содержит потенциальных членов: $b_k = 0$, если $\omega_k = 0$. Аналогично при магнитных источниках ($Q^{\text{э}} = 0$) потенциальных членов не содержит разложение электрического поля.

Для возбуждения того или иного типа поля источники возбуждения надо выбирать (располагать и ориентировать) так, чтобы не оказались равными нулю величины $Q^{\text{э}}$ и $Q^{\text{м}}$, которые называют интегралами возбуждения.

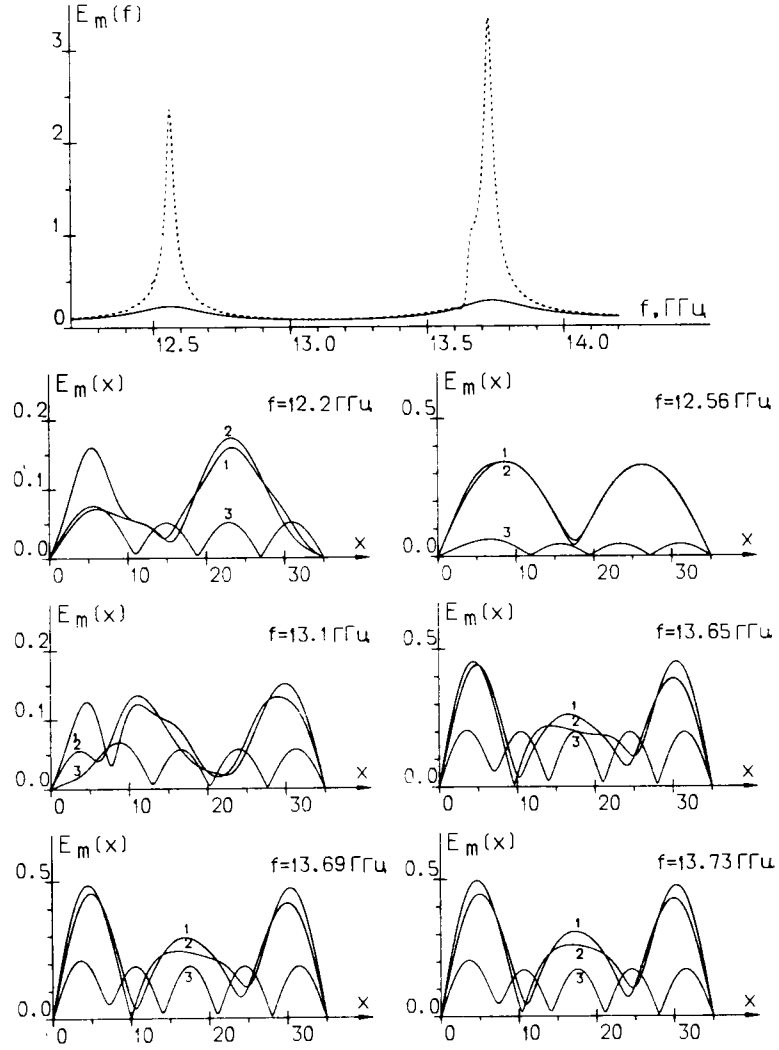


Рис. 11.9. (ЭВМ)

Остается выяснить, каким образом в этой теории можно учесть потери в металлической оболочке резонатора или потери на излучение. Если для некоторого типа колебаний известна добротность, найденная с учетом этих потерь,

то обычно допустимо приближение, заключающееся в том, что данная добротность вносится в (11.65).

Пример 4. Рассмотрим возбуждение прямоугольного резонатора (рис. 11.10) элементарным электрическим излучателем в виде отрезка тока, плотность которого задана следующим образом:

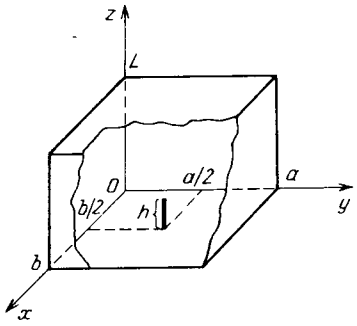


Рис. 11.10

$$\dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}_m = \mathbf{z}_0 \dot{I}^{\text{ст}}_m \,\delta\,(x - {}^1\!/_2 a)\,\delta\,(y - {}^1\!/_2 b), \qquad 0 < z < h. \tag{11.67}$$

Вычислим член разложения $\dot{\mathbf{E}}_m$ (11.53), соответствующий основному типу колебаний E_{110} (вместо номера n будем писать 110). Согласно (11.28), (11.33)

$$\dot{\mathbf{E}}_{110} = \mathbf{z}_0 \frac{2}{\sqrt{\varepsilon_0 |\varepsilon| abL}} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}. \tag{11.68}$$

На основании (11.54)

$$a_{110} = \frac{i\omega}{\omega^2 - \omega^2_{110}} \frac{|\varepsilon|}{\varepsilon} \int_V \dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}_m \dot{\mathbf{E}}^*_{110} dv = \frac{i\,|\varepsilon|\,2\dot{I}^{\text{ст}}_m h}{\varepsilon \sqrt{\varepsilon_0 |\varepsilon| abL}} \frac{\omega}{\omega^2 - \omega^2_{110}}, \tag{11.69}$$

где в соответствии с (11.61) $\omega_{110} = \omega'_{110}(1 + i/2Q_{110})$. При резонансе можно определить вектор $\dot{\mathbf{E}}_m$ полного поля вынужденных колебаний:

$$\dot{\mathbf{E}}_m \approx a_{110}(\omega'_{110})\,\mathbf{E}_{110} = \mathbf{z}_0 \frac{-4\dot{I}^{\text{ст}}_m h}{\varepsilon_0 \varepsilon abL} \frac{Q_{110}}{\omega'_{110}} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b} \tag{11.70}$$

(в знаменателе выражения (11.69) вещественная часть обращается в нуль). ■

§ 11.2. Вынужденные волны. Излучение в волноводе

11.2.1. Постановка задачи. Рассматривая в гл. 6 и 7 различные свободные электромагнитные поля направляющих структур, мы, фактически, исследовали *возможные* волновые процессы, которые им свойственны: собственные волны. На практике всегда имеют дело с вынужденными волнами; при этом электромагнитный процесс вполне определен его источником.

Устройства возбуждения обычно являются сочленениями направляющих структур. Если в одной из структур к месту соединения распространяется некоторая волна, вынужденные волны второй структуры составляют ее внешнее поле дифракции. Как и в случае возбуждения полого резонатора (см. п. 11.1.1), в аналогичных волноводных задачах (рис. 11.11) мы можем различать элементы, выступающие как штыревые (*а*), петлевые (*б*) и иные излучатели, близкие к элементарным (например, в виде отверстия (*в*)). В этих случаях можно ставить задачу об излучении заданных источников, что является лишь некоторым приближением к реальности. Имеется, впрочем, множество задач, когда такой подход нецелесообразен. На рис. 11.11 представлены соответствующие примеры: возбуждение полосковой линии путем ее сочленения с коаксиальной (*г*), несколько более сложный переход от коаксиальной линии (*д*) к линии Губо (см. п. 7.4.5), одно из типичных соединений прямоугольного волновода с коаксиальной линией (*е*). На рис. 11.12 (слева) поясняется постановка задачи о возбуждении полого волновода заданными электрическими и магнитными источниками. Последние заданы при помощи функций $\mathbf{j}^{\text{ст}}$ и $\mathbf{j}^{\text{м}}$, а также

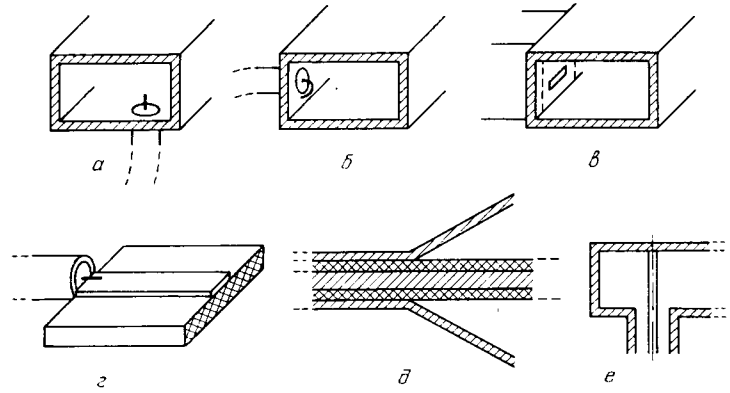


Рис. 11.11

в виде поля $\mathbf{E}^{\text{ст}}$ на отверстии в оболочке. Все источники локализованы между поперечными сечениями S_1 и S_2 на отрезке волновода $0 < z < L$. Ставится *условие излучения*, состоящее в том, что в полубесконечных волноводах $-\infty < z < 0$ и $l < z < \infty$ поле может представлять собой лишь наложение собственных волн, уходящих

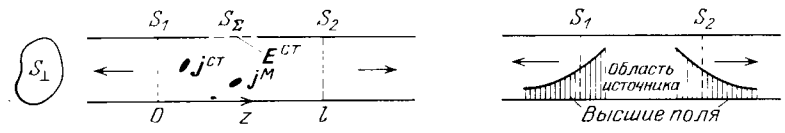


Рис. 11.12

от области локализации источников. Среди них — при отсутствии поглощения — только некоторые переносят энергию, распространяясь без затухания; этим свойством может обладать лишь одна основная волна (при соответствующем выборе частоты или поперечного сечения волновода). Для всех остальных типов волн частота оказывается ниже критической, т. е. они не переносят энергии и экспоненциально затухают, оставаясь синфазными. Слово «волна» употребляется в данном случае условно, так же, как и

«направление распространения» (имеется в виду направление затухания поля). Характер процесса поясняется на рис. 11.12 справа. В задаче о возбуждении волновода заданными источниками надо, по крайней мере, определить комплексные амплитуды векторов **E** и **H** всех типов волн, существующих вне области локализации источников.

11.2.2. Собственные волны волновода. Поскольку в отличие от гл. 6 и 7 мы должны одновременно рассматривать собственные волны обоих направлений, произведем необходимую детализацию. Сняв точки и амплитудные индексы m, будем обозначать комплексные амплитуды векторов **E** и **H** волны типа i следующим образом:

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}_i^+ = \mathcal{E}_i^+ e^{-i\Gamma_i z}, \quad \mathbf{H}_i^+ = \mathcal{H}_i^+ e^{-i\Gamma_i z} \text{ — направление } z, \\ &\mathbf{E}_i^- = \mathcal{E}_i^- e^{i\Gamma_i z}, \quad \mathbf{H}_i^- = \mathcal{H}_i^- e^{i\Gamma_i z} \text{ — направление } -z. \end{aligned} \tag{11.71}$$

При этом $\Gamma_i > 0$, если $\omega > \omega_{\text{кр}}^i$, и $i\Gamma_i > 0$, если $\omega < \omega_{\text{кр}}^i$; здесь $\omega_{\text{кр}}^i$ — критическая частота для типа волны i; потери отсутствуют.

Выделим поперечные компоненты

$$\mathcal{E}_{it}^{\pm} = \mathbf{e}_i, \quad \mathcal{H}_{it}^{\pm} = \pm \mathbf{h}_i = \pm [\mathbf{z}_0, \mathbf{e}_i]/W_i^{E,H}, \tag{11.72}$$

где $W_i^{E,H}$ — волновые сопротивления (6.26), (6.29). При $\omega > \omega_{\text{кр}}^i$ они положительны: $W_i^{E,H} > 0$. Если же $\omega < \omega_{\text{кр}}^i$, то

$$iW_i^E > 0, \quad iW_i^H < 0. \tag{11.73}$$

Напомним, что на примере прямоугольного волновода функции $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{h}_i$ уже обсуждались в п. 11.0.4. Было отмечено, что они образуют полные ортогональные системы $\{\mathbf{e}_i\}$ и $\{\mathbf{h}_i\}$ двумерного оператора Лапласа (при соответствующих граничных условиях), причем каждая из этих систем распадается на соленоидальную и потенциальную подсистемы, связанные правилом соответствия (11.42). Сказанное справедливо для любых полых волноводов. Сохраняется и ортонормировка (11.43), (11.44), так что, в частности,

$$\int\limits_{S_\perp} [\mathbf{e}_i, \mathbf{h}_k^*]_z \, ds = \delta_{ik} \frac{W_k^{E,H}}{|W_k^{E,H}|}, \tag{11.74}$$

где $S_\perp$ — поперечное сечение волновода (рис. 11.12). Последнее соотношение нуждается в обосновании.

ВЫВОД. Отметим сначала, что на основании (1.27)

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} e^{-i\Gamma z} = e^{-i\Gamma z} \operatorname{rot} \mathbf{F} + [\operatorname{grad} e^{-i\Gamma z}, \mathbf{F}] = e^{-i\Gamma z} \{\operatorname{rot} \mathbf{F} - i\Gamma [\mathbf{z}_0, \mathbf{F}]\} \tag{11.75}$$

и, если **F** не зависит от z, то $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \operatorname{rot}_\perp \mathbf{F}$. Поэтому при подстановке $\mathbf{E}_i^\pm$, $\mathbf{H}_i^\pm$ (11.71) в однородные уравнения Максвелла получаем следующие уравнения относительно функций поперечных

координат $\mathcal{E}_i^\pm$, $\mathcal{H}_i^\pm$:

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}_\perp \mathcal{H}_i^\pm \pm i\Gamma_i [\mathcal{H}_i^\pm, \mathbf{z}_0] = i\omega\varepsilon_0\varepsilon \mathcal{E}_i^\pm, \\ &\operatorname{rot}_\perp \mathcal{E}_i^\pm \mp i\Gamma_i [\mathbf{z}_0, \mathcal{E}_i^\pm] = -i\omega\mu_0\mu \mathcal{H}_i^\pm. \end{aligned} \tag{11.76}$$

Заменив i на k, запишем эти же уравнения в комплексно сопряженной форме:

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}_\perp \mathcal{H}_k^{\pm *} \mp i\Gamma_k^* [\mathcal{H}_k^{\pm *}, \mathbf{z}_0] = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon \mathcal{E}_k^{\pm *}, \\ &\operatorname{rot}_\perp \mathcal{E}_k^{\pm *} \pm i\Gamma_k^* [\mathbf{z}_0, \mathcal{E}_k^{\pm *}] = i\omega\mu_0\mu \mathcal{H}_k^{\pm *}. \end{aligned} \tag{11.77}$$

Взяв первое из уравнений (11.76) и второе из (11.77), образуем скалярные произведения с $\mathcal{E}_k^{\pm *}$ и $\mathcal{H}_i^\pm$ соответственно. Аналогичные действия выполним по отношению к оставшейся паре уравнений. В каждой из пар произведем вычитание соответственных частей равенств, после чего используем тождество (1.26), произведем интегрирование по $S_\perp$ и применим теорему Гаусса в двумерном варианте ($V \to S_\perp$, $S \to L_\perp$). Так как на контуре $L_\perp$ поперечного сечения $S_\perp$ волновода $E_\tau = 0$, то контурный интеграл уничтожится, и будем иметь:

$$\pm(\Gamma_i - \Gamma_k^*) \int\limits_{S_\perp} [\mathcal{E}_k^{\pm *}, \mathcal{H}_i^\pm] \mathbf{z}_0 ds = \omega\varepsilon_0\varepsilon \int\limits_{S_\perp} \mathcal{E}_i^\pm \mathcal{E}_k^{\pm *} ds - \omega\mu_0\mu \int\limits_{S_\perp} \mathcal{H}_i^\pm \mathcal{H}_k^{\pm *} ds, \tag{11.78}$$

$$\mp(\Gamma_i - \Gamma_k^*) \int\limits_{S_\perp} [\mathcal{E}_i^\pm, \mathcal{H}_k^{\pm *}] \mathbf{z}_0 ds = -\omega\mu_0\mu \int\limits_{S_\perp} \mathcal{H}_i^\pm \mathcal{H}_k^{\pm *} ds + \omega\varepsilon_0\varepsilon \int\limits_{S_\perp} \mathcal{E}_i^\pm \mathcal{E}_k^{\pm *} ds.$$

В смешанных произведениях под знаком поверхностных интегралов участвуют только поперечные компоненты векторов, которые можно выразить при помощи формул (11.72). После вычитания соответственных частей (11.78) сделаем замену $\mathcal{E}_{i,k}^\pm \to \mathbf{e}_{i,k}$ и $\mathcal{H}_{i,k}^\pm \to \pm \mathbf{h}_{i,k}$. Это дает:

$$(\Gamma_i - \Gamma_k^*) \int\limits_{S_\perp} \{[\mathbf{e}_i, \mathbf{h}_k^*] + [\mathbf{e}_k^*, \mathbf{h}_i]\} \mathbf{z}_0 ds = 0. \tag{11.79}$$

Как и в предшествующих выражениях, здесь подразумеваются волны обоих направлений, т. е. наряду с тройкой величины $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{h}_i$, Γ_i рассматривается также тройка $\mathbf{e}_i$, $-\mathbf{h}_i$, $-\Gamma_i$ (а следовательно, допускается обращение знака Γ).

Из (11.79) видно, что для таких волн, которым отвечают неравные Γ_i и Γ_k^*, должен обратиться в нуль весь интеграл. Если же заменить в (11.79) $\mathbf{e}_{i,k}$ через $\mathbf{h}_{i,k}$ (или наоборот) при помощи (11.72), то выясняется, что равен нулю интеграл от каждого слагаемого в отдельности. Этим обосновывается ортогональность не-

вырожденных собственных волн в смысле соотношений (11.43) и (11.44); в случае вырождения, как обычно, можно построить ортогональные собственные функции.

Остается рассмотреть нормировку. Пусть волны типов i и k имеют вещественные постоянные распространения $(\omega_{\text{кр}}^{i,k} < \omega)$. Тогда $\Gamma_k^* = \Gamma_k$, так что при $i = k$ множитель перед интегралом в (11.79) обращается в нуль. При этом оба подынтегральных слагаемых равны: $[\mathbf{e}_i, \mathbf{h}_i^*]_z = [\mathbf{e}_i^*, \mathbf{h}_i]_z = [\mathbf{e}_i, \mathbf{h}_i]_z = e_i^2/W_i^{E,H} = h_i^2 W_i^{E,H}$. Таким образом,

$$\int_{S_\perp} [\mathbf{e}_i, \mathbf{h}_i^*]_z \, ds \neq 0. \tag{11.80}$$

Положим теперь, что Γ_i и Γ_k — мнимые $(\omega_{\text{кр}}^{i,k} > \omega)$. При этом $\Gamma_k^* = -\Gamma_k$. Поэтому разность $\Gamma_i - \Gamma_k^*$ в (11.79) обращается в нуль, если $\Gamma_k = -\Gamma_i$, т. е. k-я волна есть волна типа i, распространяющаяся в противоположном направлении: $\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_i$, $\mathbf{h}_k = -\mathbf{h}_i$. Оба члена подынтегрального выражения при этом равны. Действительно, $[\mathbf{e}_i, \mathbf{h}_k^*] = -[\mathbf{e}_i, \mathbf{h}_i^*]$ и $[\mathbf{e}_k^*, \mathbf{h}_i] = [\mathbf{e}^*, \mathbf{h}_i] = -[\mathbf{e}_i, \mathbf{h}_i^*]$, так как это чисто мнимые величины. Как видно, и в этом случае выполняется неравенство (11.80).

Подводя итог, убеждаемся, что ортонормировка (11.74) возможна. ■

11.2.3. Вынужденные волны полого волновода. Решение задачи. Вернемся к задаче о возбуждении полого волновода заданными источниками, поставленной выше в п. 11.2.1 (см. рис. 11.12). Поле в полубесконечных каналах слева и справа от области локализации источников представляется в виде:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_m &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n^- \mathbf{E}_n^-, \quad \dot{\mathbf{H}}_m = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^- \mathbf{H}_n^-, \quad z \leqslant 0, \\ \dot{\mathbf{E}}_m &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n^+ \mathbf{E}_n^+, \quad \dot{\mathbf{H}}_m = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^+ \mathbf{H}_n^+, \quad z \geqslant L \end{aligned} \tag{11.81}$$

(как отмечалось, такое представление согласуется с условием излучения). Коэффициенты рядов выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} c_n^{\pm} &= \frac{-1}{2}(Q_n^{\text{э}\pm} + Q_n^{\text{м}\pm}), \quad \omega_{\text{кр}}^n < \omega, \\ c_n^{\mp} &= \frac{-1}{2}\frac{W_n}{|W_n|}(Q_n^{\text{э}\mp} + Q_n^{\text{м}\mp}), \quad \omega_{\text{кр}}^n > \omega, \end{aligned} \tag{11.82}$$

где

$$Q_n^{\text{э}\pm} = \int_V \dot{\mathbf{j}}_m^{\text{ст}} \dot{\mathbf{E}}_n^{\pm *} dv, \quad Q_n^{\text{м}\pm} = \int_V \dot{\mathbf{j}}_m^{\text{м}} \dot{\mathbf{H}}_n^{\pm *} dv + \int_{S_\Sigma} [\dot{\mathbf{E}}_m^{\text{ст}}, \mathbf{H}_n^{+*}] \, d\mathbf{s}. \tag{11.83}$$

ВЫВОД. Запишем следующие две пары уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_m &= -i\omega\mu_0\mu\dot{\mathbf{H}}_m - \dot{\mathbf{j}}_m^{\text{м}}, & \operatorname{rot} \mathbf{E}_k^{\pm *} &= i\omega\mu_0\mu\mathbf{H}_k^{\pm *}, \\ \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_m &= i\omega\varepsilon_0\varepsilon\dot{\mathbf{E}}_m + \dot{\mathbf{j}}_m^{\text{э}}, & \operatorname{rot} \mathbf{H}_k^{\pm *} &= -i\omega\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}_k^{\pm *}. \end{aligned} \tag{11.84}$$

В левом столбце — уравнения в форме (9.51), которым подчинены комплексные амплитуды $\dot{\mathbf{E}}_m$ и $\dot{\mathbf{H}}_m$ поля, возбуждаемого в волноводе заданными источниками. В правом столбце в комплексно сопряженной форме записаны однородные уравнения Максвелла относительно комплексных амплитуд собственных волн (11.71).

Подобно многим аналогичным случаям (см., например, пп. 11.1.2, 11.1.3) уравнения объединены в пары, как показано стрелками. Уравнения первой пары умножаются скалярно на $\mathbf{H}_k^{\pm *}$ и $\dot{\mathbf{E}}_m$ соответственно, а уравнения второй пары — на $\mathbf{E}_k^{\pm *}$ и $\dot{\mathbf{H}}_m$. Все операции в дальнейшем аналогичны предыдущим. При этом в качестве V берется объем, ограниченный поперечными сечениями S_1 и S_2 (см. рис. 11.12), а также боковой поверхностью соответствующего отрезка волновода; пусть S — полная граница V. Результат имеет вид

$$\oint_S \{[\dot{\mathbf{E}}_m, \mathbf{H}_k^{\pm *}] + [\mathbf{E}_k^{\pm *}, \dot{\mathbf{H}}_m]\} \, \mathbf{ds} = -\int_V (\dot{\mathbf{j}}_m^{\text{ст}} \mathbf{E}_k^{\pm *} + \dot{\mathbf{j}}_m^{\text{м}} \mathbf{H}_k^{\pm *}) \, dv, \tag{11.85}$$

а поскольку на боковой поверхности за исключением области отверстия $E_\tau = 0$ (для собственных волн — и на S_Σ), то

$$\int_{S_1 + S_2} \{[\dot{\mathbf{E}}_m, \mathbf{H}_k^*] + [\mathbf{E}_k^{\pm *}, \dot{\mathbf{H}}_m]\} \, \mathbf{ds} = -Q_k^{\text{э}\pm} - Q_k^{\text{м}\pm}, \tag{11.86}$$

где использованы обозначения (11.83).

Левую часть этого равенства обозначим $I_k^{\pm}$. При подстановке представлений поля (11.81) получаем

$$\begin{aligned} I_k^{\pm} = -\sum_{n=1}^{\infty} c_n^- \int_{S_1} \{[\mathbf{E}_n^-, \mathbf{H}_k^{\pm *}] + [\mathbf{E}_k^{\pm *}, \mathbf{H}_n^-]\} \, \mathbf{z}_0 ds + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^+ \int_{S_2} \{[\mathbf{E}_n^+, \mathbf{H}_k^{\pm *}] + [\mathbf{E}_k^{\pm *}, \mathbf{H}_n^+]\} \, \mathbf{z}_0 ds \end{aligned} \tag{11.87}$$

(учтено, что внешняя нормаль направлена по z на S_2 и против z на S_1). Принимая во внимание соотношения (11.71), (11.72) и ортонормировку (11.74), видим, что в рядах остаются только k-е члены, причем равенство (11.87) дает

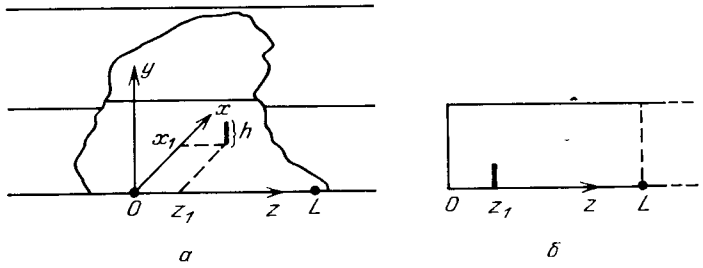
$$I_k^{\pm} = c_k^- \left(\mp \frac{W_k^{E,H}}{|W_k^{E,H}|} + \frac{|W_k^{E,H}|}{W_k^{E,H}} \right) + c_k^+ \left(\pm \frac{W_k^{E,H}}{|W_k^{E,H}|} + \frac{|W_k^{E,H}|}{W_k^{E,H}} \right) e^{-i(\Gamma_k \mp \Gamma_k^*)l}. \tag{11.88}$$

Далее учтем свойства волновых сопротивлений $W_k^{E,H}$, которые остаются вещественными, пока $\omega_{кр}^k < \omega$, а затем становятся мнимыми согласно (11.73). В результате получаем

$$I_k^{\pm} = \begin{cases} 2c_k^{\pm}, & (\omega_{кр}^k < \omega), \\ -2(W_k/|W_k|)\, c_k^{\mp}, & (\omega_{кр}^k > \omega). \end{cases} \tag{11.89}$$

Представляя левую часть в (11.86) при помощи (11.89), приходим к формулам (11.82). ■

11.2.4. Излучение диполя Герца в прямоугольном волноводе. Покажем применение полученных результатов (11.81)—(11.83) на



а *б*

Рис. 11.13

примере прямоугольного волновода, возбуждаемого малым элементом тока (рис. 11.13*а*), плотность которого задается в виде

$$\dot{\mathbf{j}}_m^{ст} = \mathbf{y}_0 \dot{I}_m^{ст} \delta(z - z_1)\, \delta(x - x_1), \qquad 0 < y < h \tag{11.90}$$

(ср. (11.67)).

Определим коэффициенты $c_k^{\pm}$ (11.82) разложений (11.81), где номер k соответствует основной волне H_{10}; вместо $c_k^{\pm}$ будем писать $c_{10}^{\pm}$. Поскольку

$$\mathbf{E}_{10}^{\pm} = \mathbf{e}_{10} e^{\mp i\Gamma_{10} z} = \mathbf{y}_0 \sqrt{\frac{2|W_{10}^H|}{ab}} \sin\frac{\pi x}{a}\, e^{\mp i\Gamma_{10} z}, \tag{11.91}$$

то и при вещественном, и при мнимом Γ_{10} справедливо равенство

$$c_{10}^{\pm} = -\frac{W_{10}^H}{2|W_{10}^H|} \int_V \dot{\mathbf{j}}_m^{ст} \mathbf{E}_{10}^{\mp} dv. \tag{11.92}$$

Действительно, $(\mathbf{E}_{10}^{\pm})^* = \mathbf{E}_{10}^{\mp}$ при $\omega_{кр}^{10} < \omega$ и $(\mathbf{E}_{10}^{\mp})^* = \mathbf{E}_{10}^{\mp}$ при $\omega_{кр}^{10} > \omega$. Внося в (11.92) представление тока (11.90), получаем

$$c_{10}^{\pm} = -\frac{W_{10}^H}{\sqrt{2|W_{10}^H|\, ab}}\, \dot{I}_m^{ст} h \sin\frac{\pi x_1}{a}\, e^{\pm i\Gamma_{10} z_1}. \tag{11.93}$$

Напомним, что $\Gamma_{10} = (2\pi/\lambda)\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}$ и $W_{10}^H = W/\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}$ (см. п. 7.1.3).

Если при заданной частоте ω размеры волновода таковы, что только тип поля H_{10} имеет характер распространяющейся волны ($2a > \lambda$), то на достаточном расстоянии от элемента тока полное поле будет выражаться одним членом ряда:

$$\dot{\mathbf{E}}_m = c_{10}^{\pm} \mathbf{E}_{10}^{\pm} = -\mathbf{y}_0 \frac{W_{10}^H \dot{I}_m^{ст} h}{ab} \sin\frac{\pi x_1}{a} \sin\frac{\pi x}{a}\, e^{\mp i\Gamma_{10}(z - z_1)} \tag{11.94}$$

(верхний знак соответствует области $z > z_1$, нижний — области $z < z_1$). Ток в (11.94) можно заменить моментом диполя Герца; очевидно $\dot{\mathbf{p}}_m = -\mathbf{y}_0 i \dot{I}_m^{ст} h/\omega$ (9.23). Полный поток энергии создается только волной H_{10}. Интегрируя средний вектор Пойнтинга по S_1 и S_2, дважды получим $ab\frac{E_m^2}{2}\operatorname{Re}\frac{1}{W_{10}^H}$. Сумма (т. е. удвоенная величина) и дает полный поток энергии; с учетом (11.94)

$$\overline{P}^{\Sigma} = \operatorname{Re} W_{10}^H \frac{I_m^{ст2} h^2}{2ab} \sin^2\frac{\pi x_1}{a}. \tag{11.95}$$

При $\lambda > 2a$, когда W_{10}^H становится мнимой величиной, $\overline{P}^{\Sigma} = 0$: диполь Герца не излучает в волновод при частоте ниже критической.

На рис. 11.13*б* при $z = 0$ в волноводе введена идеально проводящая перегородка (обычно возбуждающий элемент располагается вблизи закрытого конца волновода). Волна H_{10}, излучаемая влево, отразится от плоскости $z = 0$ (с изменением фазы на 180°) и сложится с волной, излучаемой вправо. Легко убедиться, что полное поле справа будет представлять собой следующую волну:

$$\dot{\mathbf{E}}_m = -\mathbf{y}_0 \frac{i2W_{10}\dot{I}_m^{ст} h}{ab} \sin\Gamma_{10} z_1 \sin\frac{\pi x_1}{a} \sin\frac{\pi x}{a}\, e^{-i\Gamma_{10} z}. \tag{11.96}$$

§ 11.3. Волноводная дифракция

11.3.1. Постановка задачи. Матрица рассеяния. В § 11.1 и 11.2 отмечалось на примерах устройств возбуждения резонаторов и волноводов, что при рассмотрении волновых процессов в изолированных структурах обычно должна быть задана падающая волна. Процесс в целом есть дифракция, поскольку эта волна возбуждает некоторое поле в структуре и отражается назад. Если все входящие в рассмотрение волны являются направляемыми, будем употреблять выражение *волноводная дифракция*.

Простейший пример волноводной дифракции — реакция некоторого тела A (рис. 11.14*а*), помещенного в полый волновод. Если, например, в волноводе слева из бесконечности распространяется волна типа k, то она частично отразится и пройдет в правый по-

лубесконечный волновод. Но, кроме того, возникнет множество всех мыслимых волн волновода (т. е. его собственных волн), уходящих в оба полубесконечных волновода и удовлетворяющих, таким образом, условию излучения. Слово «волна» здесь употребляется в том же смысле, что и выше в п. 11.2.1. Появление этих волн можно трактовать по-разному. Например, если тело A — металлическое,

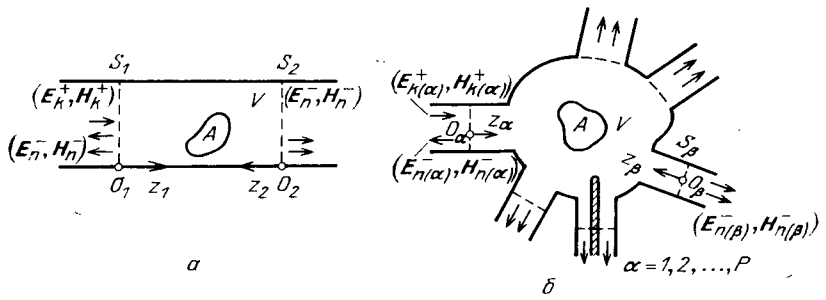


Рис. 11.14

говорят, что падающая волна наводит на нем токи проводимости, которые, в свою очередь, излучают (переизлучают) все появляющиеся волны. Как во всех дифракционных процессах, формируется такое поле, которое удовлетворяет граничным условиям (ср. п. 10.1.1).

Наиболее естественным средством описания волноводной дифракции является аппарат так называемой *матрицы рассеяния*. Рассмотрим его достаточно подробно.

При помощи поперечных сечений S_1 и S_2 (рис. 11.14*а*) отделим участок, на котором, как говорят, нарушается регулярность волновода. Каково бы ни было поле внутри отсеченного объема V, на S_1 и S_2 — это наложение полей собственных волн. То же самое будет и в более сложном случае (рис. 11.14*б*), когда к некоторой изолированной структуре присоединяется P различных волноводов. Если, например, на вход с номером α падает волна типа k волновода α, то, как в этом, так и во всех остальных волноводах появятся всевозможные собственные волны, уходящие от области V.

Опишем дифракцию при наиболее общих предположениях: пусть имеются падающие волны всех типов, так что в каждом присоединенном волноводе (рис. 11.14*б*) задается первичное поле

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_\alpha^+ \\ \mathbf{H}_\alpha^+ \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n(\alpha)}^+ \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{n(\alpha)}^+ \\ \mathbf{H}_{n(\alpha)}^+ \end{pmatrix} \tag{11.97}$$

($\alpha = 1, 2, \ldots, P$). Здесь $\mathbf{E}_{n(\alpha)}^+$, $\mathbf{H}_{n(\alpha)}^+$ определяются согласно (11.71), но, поскольку для каждого волновода система координат и перечисление полей свои, вводится индекс α (например, z_α вместо z).

В результате процесса внутри V во всех присоединенных волноводах появляется вторичное поле в виде наложений собственных волн, распространяющихся в обратном направлении:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_\alpha^- \\ \mathbf{H}_\alpha^- \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n(\alpha)}^- \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{n(\alpha)}^- \\ \mathbf{H}_{n(\alpha)}^- \end{pmatrix}, \tag{11.98}$$

$\alpha = 1, 2, \ldots, P$.

Если рассматриваемая электродинамическая структура линейна, то существует некоторый линейный оператор, сопоставляющий каждому первичному полю — *сигналу* вполне определенное вторичное поле — *отклик*. Поскольку эти поля характеризуются наборами коэффициентов $c_{n(\alpha)}^+$ и $c_{n(\alpha)}^-$, которые можно трактовать как векторы c^+ и c^- соответственно, то интересующий нас оператор представляется матрицей S в соотношении

$$c^- = Sc^+. \tag{11.99}$$

Это и есть *матрица рассеяния*. Заметим, что подразумевается *пассивность* структуры, т. е. отсутствие внутренних источников, в результате чего при $c^+ = 0$ должно быть $c^- = 0$.

Равенство (11.99) удобно детализировать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} c_1^- \\ \hline c_2^- \\ \hline \vdots \\ \hline c_P^- \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} S^{11} & S^{12} & \ldots & S^{1P} \\ \hline S^{21} & S^{22} & \ldots & S^{2P} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline S^{P1} & S^{P2} & & S^{PP} \end{array}\right) \begin{pmatrix} c_1^+ \\ \hline c_2^+ \\ \hline \vdots \\ \hline c_P^+ \end{pmatrix}, \tag{11.100}$$

где

$$c_\alpha^\pm = \begin{pmatrix} c_{1(\alpha)}^\pm \\ c_{2(\alpha)}^\pm \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad S^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} S_{11}^{\alpha\beta} & S_{12}^{\alpha\beta} & \ldots \\ S_{21}^{\alpha\beta} & S_{22}^{\alpha\beta} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \tag{11.101}$$

($\alpha, \beta = 1, 2, \ldots,$). Здесь векторы c^+ и c^- разделены на подвекторы $c_\alpha^\pm$ по числу присоединенных волноводов. В свою очередь, каждый подвектор имеет компонентами коэффициенты $c_{\alpha(n)}^\pm$ рядов (11.97), (11.98). Соответственно этому выделяются подматрицы $S^{\alpha\beta}$. На практике матрица рассеяния всегда имеет конечный порядок, поскольку в волноводах учитывается лишь ограниченное число волн: ряды (11.97), (11.98) заменяются конечными суммами. Чем дальше (в сторону убывания z_α) отнесены сечения S_α, тем в большей степени затухают все волны, не переносящие энергии. Если же эта передача может осуществляться только одной основной волной каждого волновода, то путем достаточного смещения всех S_α мы полу-

чаем возможность оставить в каждом из рядов только по одному члену. Тогда матрица S (11.100) будет иметь порядок P: в подматрицах $S^{\alpha\beta}$ остается по одному элементу, векторы $c_\alpha^\pm$ —однокомпонентные.

Какой смысл имеют элементы матрицы рассеяния $S_{kn}^{\alpha\beta}$? Зададим в волноводе β одну падающую волну типа n и единичной амплитуды. При этом компоненты вектора c^+ равны нулю, кроме единственной ненулевой компоненты $c^+_{n(\beta)} = 1$, так что согласно (11.100), (11.101) $c^-_{k(\alpha)} = S^{\alpha\beta}_{kn}$. При $\alpha = \beta$ получаем амплитуды обратных волн того же волновода β. Очевидно $S^{\beta\beta}_{nn}$ есть *коэффициент отражения* волны типа n волновода β (это диагональный элемент матрицы S), а все $S^{\beta\beta}_{kn}$ можно назвать *коэффициентами преобразования при отражении*; имеется в виду преобразование волны типа n в волны типов k. Что касается элементов $S^{\alpha\beta}_{kn}$ при $\alpha \neq \beta$, то это *коэффициенты преобразования при прохождении* (или просто *коэффициенты прохождения*) из волновода β в волноводы α.

Матрица рассеяния, как видно, определяет все мыслимые процессы дифракции для данной структуры, все ее *режимы*. Тем самым она дает полное математическое описание соответствующей электродинамической структуры.

Как будет показано в гл. 12, для определения матриц рассеяния реальных устройств необходимо применение методов, существенным образом опирающихся на применение ЭВМ.

11.3.2. Матрицы сопротивления и проводимости. Тангенциальные (поперечные) поля на всех сечениях S_α можно разложить в ортогональные ряды по полным системам $\{\mathbf{e}_{n(\alpha)}\}$ и $\{\mathbf{h}_{n(\alpha)}\}$ (см. п. 11.2.2):

$$\mathbf{E}_{t\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n(\alpha)}\mathbf{e}_{n(\alpha)}, \qquad \mathbf{H}_{t\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n(\alpha)}\mathbf{h}_{n(\alpha)}. \tag{11.102}$$

Ясно, что заданне всех $\mathbf{E}_{t\alpha}$ определяет тангенциальное электрическое поле на замкнутой поверхности, ограничивающей объем V (см. рис. 11.14), поскольку на дополнительной части этой границы $E\tau = 0$. Поэтому задание всех $\mathbf{E}_{t\alpha}$ однозначно определяет процесс в объеме V (см. п. 3.4.1), а тем самым, и все $\mathbf{H}_{t\alpha}$. Справедливо и обратное утверждение, потому что и задание всех $\mathbf{H}_{t\alpha}$ однозначно определяет процесс в объеме V. Иными словами, некоторый заданный набор коэффициентов $a_{n(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, P$) в (11.102) однозначно определяет набор всех $b_{n(\alpha)}$ и обратное тоже верно. Образуем векторы a и b, компонентами которых являются эти коэффициенты. Указанную зависимость выразим при помощи соотношений:

$$a = Zb, \quad b = Ya, \tag{11.103}$$

где Z называется *матрицей сопротивления*, а Y — *матрицей проводимости*.

Связь между матрицами Z, Y и матрицей рассеяния S оказывается очень простой. Полные поперечные поля на всех S_α можно также выразить, складывая все падающие и отраженные волны. Взяв представления (11.97), (11.98) и учитывая соотношения (11.71) и (11.72), пишем:

$$\mathbf{E}_{t\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(c^+_{n(\alpha)} + c^-_{n(\alpha)}\right) \mathbf{e}_{n(\alpha)},$$
$$\mathbf{H}_{t\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(c^+_{n(\alpha)} - c^-_{n(\alpha)}\right) \mathbf{h}_{n(\alpha)}. \tag{11.104}$$

Отсюда при сопоставлении с (11.102) следует, что $c^+_{n(\alpha)} + c^-_{n(\alpha)} = a_{n(\alpha)}$ и $c^+_{n(\alpha)} - c^-_{n(\alpha)} = b_{n(\alpha)}$; таким образом, полные векторы удовлетворяют равенствам

$$c^+ + c^- = a, \quad c^+ - c^- = b. \tag{11.105}$$

Подставляя их в (11.103), получаем

$$(Z - I)c^+ = (Z + I)c^-, \quad (I - Y)c^+ = (I + Y)c^- \tag{11.106}$$

(I — единичная матрица). При сравнении с равенством (11.99) приходим к следующим соотношениям:

$$S = (Z + I)^{-1}(Z - I), \quad S = (I + Y)^{-1}(I - Y). \tag{11.107}$$

Из (11.99), (11.103) и (11.105) получаются также формулы[1])

$$Z = (I - S)^{-1}(I + S), \quad Y = (I + S)^{-1}(I - S). \tag{11.108}$$

На основании соотношений (11.107), (11.108) описания некоторой электродинамической структуры через матрицы Z, Y и S следует рассматривать как эквивалентные. При этом надо заметить, что равенства

$$Z = Y^{-1}, \quad Y = Z^{-1} \tag{11.109}$$

справедливы не всегда, так как матрицы Z и Y могут не иметь обратных.

11.3.3. Некоторые свойства матриц Z, Y и S. Подробный анализ введенных матриц не входит в нашу задачу. Но даже на простых примерах можно показать, как их свойства отражают особенности электродинамических структур.

Пусть все отсчетные сечения S_γ ($\gamma = 1, 2, \ldots, P$) рассматриваемого объекта (см. рис. 11.14*б*) отнесены в дальнюю зону, где поле с удовлетворительной точностью представляется волной одного основного типа. При этом каждому сечению S_γ сопоставляется пара векторов $\mathbf{e}_\gamma$, $\mathbf{h}_\gamma$ (вместо бесконечных систем $\{\mathbf{e}_{n(\gamma)}\}$, $\{\mathbf{h}_{n(\gamma)}\}$).

[1]) Множители в (11.107), (11.108) коммутативны.

В соответствии с (11.74)

$$\int_{S_\gamma} [\mathbf{e}_\gamma, \mathbf{h}_\gamma]\, \mathbf{z}_{0\gamma} ds = 1 \qquad (11.110)$$

($\mathbf{e}_\gamma$ и $\mathbf{h}_\gamma$ вещественны).

Если внутренняя среда удовлетворяет требованиям, при соблюдении которых справедлива лемма Лоренца, то согласно (3.74)

$$\sum_{\gamma=1}^{P} \int_{S_\gamma} \{[\dot{\mathbf{E}}_{m2}, \dot{\mathbf{H}}_{m1}] - [\dot{\mathbf{E}}_{m1}, \dot{\mathbf{H}}_{m2}]\}\, \mathbf{z}_{0\gamma} ds = 0, \qquad (11.111)$$

так как внутренние источники отсутствуют, а все сечения S_γ образуют замкнутую поверхность, если их дополнить металлической границей, принимаемой за идеально проводящую (на ней подынтегральное выражение исчезает).

Пусть $\dot{\mathbf{H}}_{m1} = \delta_{\gamma\beta}\mathbf{h}_\beta$ (т. е. $\dot{\mathbf{H}}_{m1} = \mathbf{h}_\beta$ на S_β и $\dot{\mathbf{H}}_{m1} = 0$ на остальных сечениях). Тогда $\dot{\mathbf{E}}_{m1} = Z^{\gamma\beta}\mathbf{e}_\gamma$ ($\gamma = 1, 2, \ldots, P$). Зададим аналогично $\dot{\mathbf{H}}_{m2} = \delta_{\gamma\alpha}\mathbf{h}_\alpha$, так что $\dot{\mathbf{E}}_{m2} = Z^{\gamma\alpha}\mathbf{e}_\gamma$ ($\gamma = 1, 2, \ldots, P$). Подставляя эти выражения в (11.111), получаем

$$\int_{S_\beta} [Z^{\beta\alpha}\mathbf{e}_\beta, \mathbf{h}_\beta]\, \mathbf{z}_{0\beta} ds - \int_{S_\alpha} [Z^{\alpha\beta}\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{h}_\alpha]\, \mathbf{z}_{0\alpha} ds = 0,$$

откуда с учетом (11.110):

$$Z^{\beta\alpha} = Z^{\alpha\beta}. \qquad (11.112)$$

Матрица сопротивления Z оказывается *симметрической*, что выражает *принцип взаимности* (п. 3.4.2).

Совершенно аналогично устанавливается, что

$$Y^{\beta\alpha} = Y^{\alpha\beta}. \qquad (11.113)$$

Надо лишь поменять ролями электрическое и магнитное поля в предыдущих рассуждениях.

Несколько более громоздко выводится соотношение взаимности

$$S^{\beta\alpha} = S^{\alpha\beta}. \qquad (11.114)$$

ВЫВОД. Пусть в режиме 1 основная волна падает на вход S_β, а в режиме 2 — на S_α. Зададим соответственно

$$\dot{\mathbf{E}}_{m1} = \mathbf{e}_\gamma(\delta_{\gamma\beta} + S^{\gamma\beta}), \quad \dot{\mathbf{H}}_{m1} = \mathbf{h}_\gamma(\delta_{\gamma\beta} - S^{\gamma\beta}),$$

$$\dot{\mathbf{E}}_{m2} = \mathbf{e}_\gamma(\delta_{\gamma\alpha} + S^{\gamma\alpha}), \quad \dot{\mathbf{H}}_{m2} = \mathbf{h}_\gamma(\delta_{\gamma\alpha} - S^{\gamma\alpha}),$$

$\gamma = 1, 2, \ldots, P.$

Подставляя это в (11.111), пишем:

$$\int_{S_\alpha} \{[(1 + S^{\alpha\alpha})\,\mathbf{e}_\alpha, -S^{\alpha\beta}\mathbf{h}_\alpha] - [S^{\alpha\beta}\mathbf{e}_\alpha, (1 - S^{\alpha\alpha})\,\mathbf{h}_\alpha]\}\, \mathbf{z}_{0\alpha} ds +$$

$$+ \int_{S_\beta} \{[S^{\beta\alpha}\mathbf{e}_\beta, (1 - S^{\beta\beta})\,\mathbf{h}_\beta] - [(1 + S^{\beta\beta})\,\mathbf{e}_\beta, -S^{\beta\alpha}\mathbf{h}_\beta]\}\, \mathbf{z}_{0\beta} ds -$$

$$+ \sum_{\substack{\gamma=1 \\ (\gamma\neq\alpha, \gamma\neq\beta)}}^{P} \int_{S_\gamma} \{[S^{\gamma\alpha}\mathbf{e}_\gamma, -S^{\gamma\beta}\mathbf{h}_\gamma] - [S^{\gamma\beta}\mathbf{e}_\gamma, -S^{\gamma\alpha}\mathbf{h}_\gamma]\}\, \mathbf{z}_{0\gamma} ds = 0.$$

Все члены последней суммы, как видно, равны нулю, а интегралы по S_α и S_β с учетом нормировки (11.110) приводят к (11.114). ■

Потребуем, далее, чтобы в рассматриваемой структуре отсутствовали потери энергии. Тогда

$$\mathrm{Re} \sum_{\gamma=1}^{P} \int_{S_\alpha} [a_\gamma \mathbf{e}_\gamma, b_\gamma^* \mathbf{h}_\gamma]\, \mathbf{z}_{0\gamma} ds = 0, \qquad (11.115)$$

что следует из (3.57). Отсюда

$$\mathrm{Re} \sum_{\gamma=1}^{P} a_\gamma b_\gamma^* = \mathrm{Re} \sum_{\gamma=1}^{P} (Zb)_\gamma b_\gamma^* = \mathrm{Re} \sum_{\gamma=1}^{P} a_\gamma (Ya)_\gamma^* = 0. \qquad (11.116)$$

Равенство выполняется при любых a и b, что возможно только при чисто мнимых Z и Y. Итак, при отсутствии потерь *матрицы сопротивления и проводимости — мнимые.*

Подставим в (11.115) $a_\gamma = c_\gamma^+ + c_\gamma^-$ и $b_\gamma = c_\gamma^+ - c_\gamma^-$. Это дает:

$$\mathrm{Re} \sum_{\gamma=1}^{P} (c_\gamma^+ + c_\gamma^-)(c_\gamma^+ - \gamma_\gamma^-)^* = 0, \qquad (11.117)$$

или

$$\sum_{\gamma=1}^{P} |c_\gamma^+|^2 = \sum_{\gamma=1}^{P} |c_\gamma^-|^2. \qquad (11.118)$$

Свойство матрицы рассеяния S, в силу которого при любых c^+ выполняется равенство (11.118), называется *унитарностью.* Для унитарной матрицы S

$$\tilde{S}S = I, \qquad (11.119)$$

где $\tilde{S}$ — сопряженная матрица (т. е. транспонированная с комплексно-сопряженными элементами).

Представление о волноводной дифракции имеет широкое значение и используется не только при описании изолированных структур. Матрица S, а также матрицы Z и Y могут быть применены и при рассмотрении дифракции в свободном пространстве.

Пусть на некоторое тело A (рис. 11.15) падает плоская или сферическая волна $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{H}^0$. Вокруг A можно построить сферу, игра-

ющую такую же роль, как отсчетное поперечное сечение волновода S_α. Дело в том, что свободное пространство вне этой сферы может трактоваться как *шаровой волновод*, собственными волнами которого являются сходящиеся и расходящиеся сферические волны. Можно показать, что эти волны образуют подсистемы E- и H-волн (первые имеют радиальную электрическую, а вторые — радиальную магнитную компоненты). Тангенциальные к сфере компоненты этих волн образуют полные ортогональные системы $\{\mathbf{e}_i\}$ и $\{\mathbf{h}_i\}$. Весь аппарат матриц S, Y и Z оказывается похожим на рассматривавшийся, однако имеются и отличия, связанные с двумя фактами: во-первых, волновые сопротивления сходящихся и расходящихся волн не равны друг другу, во-вторых, падающую волну $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{H}^0$ (рис. 11.15) нельзя представить в виде наложения одних сходящихся сферических волн, концентрических выделенной сфере.

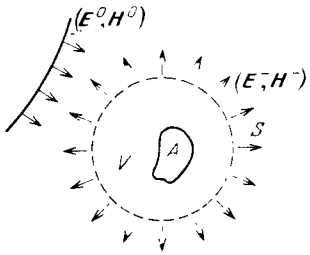


Рис. 11.15

УПРАЖНЕНИЯ

1. Прямоугольный резонатор возбуждается диполем Герца, расположенным, как в примере 4, п. 11.1.4. Из перечисленных ниже типов колебаний E_{111}, E_{112}, E_{120}, E_{210}, E_{310}, E_{130}, H_{101}, H_{011}, H_{111}, H_{221} некоторые будут иметь нулевые коэффициенты a_n, b_n (11.57). Какие именно? Как изменить положение и (или) ориентацию диполя Герца, чтобы возбуждались все эти типы колебаний?

2. Пусть рассматриваемый резонатор — идеально проводящий (см. упражнение 1); $a = b = 2$ см, $L = 1$ см; внутренняя среда характеризуется параметрами: $\varepsilon = 9 - i \cdot 0{,}001$, $\mu = 1$. Построить резонансную кривую для типа колебаний E_{110}.

3. Построить резонансную кривую для типа колебаний, ближайшего к основному (данные из упражнения 2).

4. Какие типы колебаний можно возбудить в резонаторе (см. рис. 11.5), если вместо штыревого возбуждающего элемента взять петлевой, расположив его в том же месте и ориентировав в плоскости $z0x$? Перечислить пять низших типов колебаний.

5. Выписать несколько функций, принадлежащих системам $\{\mathbf{e}_n\}$ и $\{\mathbf{h}_n\}$, для прямоугольного и круглого волноводов.

6. Пусть в случае прямоугольного волновода, возбуждаемого элементом тока (см. рис. 11.8*а*) $a/\lambda = 0{,}7$; $a = 2b = 2$ см; среда — вакуум; длина элемента тока $h = 0{,}1$ см, $x_1 = a/4$. Найти амплитуду тока (полагая, что она постоянна вдоль элемента), если средняя мощность, излучаемая в направлении оси z, составляет 10 мВт.

7. В том же примере найти амплитуду $\mathbf{E}_m$ типа колебаний H_{20} как функцию z. На каком расстоянии по z от элемента тока эта величина при $x = a/4$ в 100 раз меньше амплитуды $\mathbf{E}_m$ основной волны?

ЧАСТЬ 4

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ (Б)

Глава 12

ОБЩИЙ ПОДХОД. ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

§ 12.1. Постановка задач, представление полей, алгоритмизация

12.1.1. Математические модели электродинамики в радиоэлектронике. Базирующаяся на уравнениях Максвелла теория электромагнитных явлений представляет собой естественную основу математического моделирования в технике, использующей эти явления. В особенности это относится к радиоэлектронике.

Согласно существующим воззрениям, которые вряд ли будут пересмотрены в обозримом будущем, система уравнений Максвелла вполне определяет закономерности электромагнитных процессов (см. п. 1.6.1). Имея в виду макроскопические объекты, можно сказать, что надо лишь правильно формулировать входящие в эту систему материальные уравнения. Очень часто последние имеют простой вид, а среды характеризуются параметрами ε, μ и σ. Решение электродинамической задачи, т. е. некоторая совокупность математических операций (над уравнениями Максвелла при наложении тех или иных условий), даст исчерпывающие сведения о конкретном физическом процессе. Иными словами, *математические модели электродинамики адекватны физической реальности* (разумеется, уточнение этого высказывания потребовало бы ряда оговорок). Отмеченное очень важно. Казалось бы, в области электромагнитных явлений нет необходимости экспериментировать или заниматься трудоемкой отработкой технических конструкций при помощи измерений, если все подлежит точному расчету с единых позиций.

В действительности до появления современных ЭВМ подобная постановка вопроса была бы бессмысленной, а в настоящее время наука и техника лишь приближаются к построению удовлетворительных математических моделей электродинамики для таких сложных объектов радиоэлектроники, какими являются, например, некоторые реальные волноводные тракты, интегральные схемы СВЧ и антенные устройства. Дело в том, что неупрощенная постановка задач электродинамики, отвечающих реальным объектам техники, приводит к серьезным трудностям. Если под решениями понимать некоторые формулы (позволяющие вычислять требуемые величины), то можно утверждать, что для пендеализированных электро-

динамических задач они получаются крайне редко. Зато к настоящему времени разработаны методы, позволяющие получать решения весьма сложных задач при помощи вычислительных процессов, потенциально бесконечных, но редуцируемых таким образом, что за конечное число операций требуемые величины могут быть вычислены с желательной точностью. В большинстве случаев электродинамическая задача сводится к системе алгебраических уравнений, порядок которой в принципе не ограничен, а для реализации достаточной точности модели должен быть сделан настолько большим, что принципиально важно применение ЭВМ. Математические модели электродинамики, отвечающие сложным объектам техники, реализуются в виде комплексов программ для больших ЭВМ.

В настоящее время в радиоэлектронике еще играют значительную роль эвристические средства расчета электродинамических структур, основанные на различных догадках и упрощающих предположениях. Такой подход сложился еще в «домашинный» период. Эвристические средства полезны, поскольку концентрируют инженерный опыт, но полезность их ограниченна. Тот или иной упрощенный подход оправдан в какой-то области изменения параметров, которая известна весьма приблизительно. Поэтому он оказывается непригодным для применения в новых, нетрадиционных условиях. В упрощенную модель уже заложено нечто ожидаемое — образ, подсказанный предшествующим опытом. Нужно много времени, а порой и счастливое стечение обстоятельств, чтобы найти новый подходящий образ, который должен быть еще опробован. Между тем, применение неупрощенных моделей электродинамики не нуждается в предварительных догадках, так как источник их в фундаментальных положениях теории. Поэтому также практика машинных расчетов становится источником информации. «Мысленный эксперимент», реализуемый на ЭВМ, во многом выгодно отличается от натурного: он может производиться гораздо быстрее, в несравненно более широких масштабах и без посторонних влияний.

Важно следующее: математические модели электродинамики создаются для целых классов объектов, к которым относятся и еще не изобретенные технические устройства. Заранее разработанный программный комплекс может оказаться готовым к техническим идеям завтрашнего дня или даже способствовать их становлению.

Если учесть быстрый прогресс средств вычислительной техники, не остается сомнений, что в будущем техническое проектирование в высокой степени должно базироваться на строгой теории. К радиоэлектронике это относится в первую очередь, потому что здесь имеется надежная основа в виде системы уравнений Максвелла.

12.1.2. Электродинамические задачи радиоэлектроники. Начнем с обсуждения некоторых моментов радиоэлектронной проблематики, обнаруживающих прямую связь с электродинамической теорией.

Целую эпоху составило развитие теории цепей, которая и сейчас является важнейшим инструментом электротехники и радиоэлектроники, хотя само понятие цепи переменного тока, как отмечалось (см. п. 2.5.2), строится на допущениях, теряющих смысл с повышением частоты. Образы теории цепей оказались удобными для восприятия и в ряде случаев послужили началом дальнейших обобщений. Например, понятие импеданса употребляется уже без всякой связи с исходным представлением о цепи. Однако с развитием радиоэлектроники появляется все больше проблем, подход к которым должен быть строго электродинамическим. Отвлечься от существования электромагнитного поля невозможно при проектировании антенн и анализе распространения радиоволн как в природных условиях, так и в аппаратуре. По мере того, как в практику входили дециметровые, сантиметровые и еще более короткие волны, принципы построения радиоаппаратуры заметно менялись. Элементы аппаратуры СВЧ существенно неквазистационарны и могут напоминать акустические или оптические устройства в большей степени, чем электротехнические. Особого подхода требуют современные интегральные схемы СВЧ или, например, устройства оптоэлектроники. Но дело не только в принципах построения, а также и в проектировании, которое либо остается в значительной мере эмпирическим, либо должно опираться на неупрощенные математические модели электродинамики.

Подчеркнем, что неидеализированные задачи электродинамики, отвечающие объектам радиоэлектроники, почти всегда являются задачами дифракции. На приемную антенну падает некоторая волна, и нужно знать ее реакцию. В случае передающей антенны только при упрощении рассматривается излучение заданных источников, а в действительности распределение токов надо еще найти, и это — локальная задача дифракции. В частности, к антенне может подходить волновод или другая направляющая структура, и должна рассматриваться дифракция соответствующей падающей волны. Любое устройство СВЧ, волноводное или построенное в виде интегральной схемы, соединяется с другими посредством каких-либо направляющих структур (например, полых волноводов или коаксиальных кабелей). Опять-таки речь должна идти о дифракции соответствующих направляемых волн.

Разумеется, при построении математических моделей электродинамики приходится решать различные промежуточные задачи. К ним относятся задачи о собственных волнах направляющих структур и о собственных колебаниях резонаторов.

Реальным объектам отвечают *граничные задачи* электродинамики: решения уравнений Максвелла должны удовлетворять известным условиям на границах раздела сред или некоторых подобластей. Простейшие граничные задачи в этой книге не раз рассматривались (см. гл. 7, гл. 8 и пр.). При этом каждый раз использовался метод разделения переменных, а система координат соответ-

ствовала конфигурации области пространства, в которой ищем решение. Так, например, было получено решение задачи о собственных волнах прямоугольного волновода; система координат в этом случае — декартова, граница области описывается как совокупность нескольких координатных поверхностей (линий). Казалось бы, в задаче о полом волноводе H-образного поперечного сечения выполняются подобные условия, но здесь уже не удается получить решение задачи в явном виде. Метод разделения переменных, не имеющий альтернативы как средство нахождения таких решений, отказывает. Следует также иметь в виду, что существует немного систем координат, в которых этот метод может быть применен. Важнейшие из них: декартова, цилиндрическая, сферическая, эллиптическая и эллипсоидальная. При этом переход к новой системе требует введения аппарата специальных функций. Построение, исследование и, наконец, табулирование различных специальных функций составило целую эпоху в развитии математической физики. Достигнутые при этом успехи важны и сейчас. Однако этот путь не давал надежды приблизиться при постановке граничных задач к условиям практики, если не говорить о редких исключениях.

12.1.3. Вычислительная электродинамика. Перейдем к краткому обсуждению методов, которые стали мощным орудием благодаря современной вычислительной технике и в настоящее время позволяют строить математические модели электродинамики, все более отвечающие нуждам практики. Методы эти различны и зародились давно, однако их значение связано именно с такими возможностями реализации, которые дают современные ЭВМ. В последние годы все чаще употребляется словосочетание «вычислительная физика» для обозначения того направления в физике, которое опирается на вычислительные методы, реализуемые на ЭВМ. Не менее правомерно говорить о «вычислительной электродинамике». Ведь в электродинамике такое направление стало традиционным.

Вычислительные методы в электродинамике — тема этой и следующей глав. Разумеется, вопрос не удастся рассмотреть во всей полноте. но мы обсудим ряд ключевых положений и результативных подходов.

Центральным является способ представления решения задачи, т. е. электромагнитного поля.

Применяя метод разделения переменных (например, в упоминавшейся уже задаче о прямоугольном волноводе), мы получаем некоторые формульные выражения векторных функций, которые точно удовлетворяют уравнениям Максвелла и граничным условиям. В таких случаях иногда говорят, что решение получено в замкнутой форме. Хотя в большинстве технически интересных задач это недостижимо, метод разделения переменных оказывается полезным как средство построения систем функций, служащих для представления полей в различных случаях.

Пусть, например, методом разделения переменных получена система решений уравнений Максвелла $\{\mathbf{E}_n, \mathbf{H}_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$; каждая пара удовлетворяет граничным условиям на некоторой простой границе. В ряде случаев, пользуясь этой системой, можно построить представление решения вида:

$$\mathbf{E}^N = \sum_{n=1}^{N} c_n \mathbf{E}_n, \qquad \mathbf{H}^N = \sum_{n=1}^{N} c_n \mathbf{H}_n \tag{12.1}$$

(c_n — пока неизвестные коэффициенты). Взяв область со сложной границей, можно тем или иным способом (например, в системе точек) подчинить $\mathbf{E}^N$ и $\mathbf{H}^N$ требуемым граничным условиям, что при правильном подходе приведет к системе N линейных алгебраических уравнений относительно N коэффициентов c_n. Чем выше N, тем лучше удается удовлетворить граничным условиям, если система $\{\mathbf{E}_n, \mathbf{H}_n\}$ обладает нужными свойствами.

Иногда в распоряжении имеются системы функций $\{\mathbf{E}_n\}$ и $\{\mathbf{H}_n\}$, не связанных уравнениями Максвелла, но удовлетворяющих требуемым граничным условиям. Решение представляется в виде:

$$\mathbf{E}^N = \sum_{n=1}^{N} a_n \mathbf{E}_n, \qquad \mathbf{H}^N = \sum_{n=1}^{N} b_n \mathbf{H}_n. \tag{12.2}$$

Если системы $\{\mathbf{E}_n\}$ и $\{\mathbf{H}_n\}$ обладают некоторыми свойствами (частично обсуждавшимися в п. 11.0.3), удается приблизить пару $\mathbf{E}^N$, $\mathbf{H}^N$ к решению уравнений Максвелла. Это опять-таки сводит задачу к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_n и b_n в суммах (12.2). С ростом N качество получаемого решения граничной задачи оказывается выше.

Сущность того или иного метода состоит в том, каким путем граничная задача сводится к системе алгебраических уравнений. Ниже в этой главе будут рассмотрены так называемые *проекционные* методы. Представления полей подчиняются в этом случае системам интегральных соотношений. Производимые операции можно назвать *проецированием* в том смысле, который обсуждался в п. 11.0.3.

Другой важный класс составляют *дискретизационные* методы. Область, в которой ищут решение, при этом подвергается дискретизации, разбиению. Можно, например, рассматривать решение только на некотором множестве точек, выделенных в области. Образуя разности соседних значений, формируют аналоги производных, так что дифференциальный оператор задачи (например, оператор Лапласа) приближенно заменяется разностным оператором. Такой подход, называемый *разностным* методом, также сводит задачу к системе линейных алгебраических уравнений. Существуют другие дискретизационные методы, базирующиеся на выделении системы подобластей, а не точек; обычно они имеют черты проекционных. В гл. 13 мы обратимся к этой теме.

При построении математических моделей электродинамики те или иные вычислительные методы нередко применяются не к граничным задачам для уравнений Максвелла, а к эквивалентным интегральным уравнениям.

И, наконец, следующее. Налицо быстрый прогресс вычислительной техники; так в настоящее время большие надежды связаны с предстоящим появлением следующего поколения ЭВМ. Однако реальные технические объекты очень сложны. Поэтому не только сейчас, но и в будущем для большого количества реальных задач прямая алгоритмизация окажется невозможной (или будет требовать неправомерно большого расхода машинного времени), как бы ни был эффективен применяемый проекционный или дискретизационный методы. Выход из положения дает принцип *декомпозиции* (см. гл. 13): сложный (протяженный) объект можно расчленить на относительно простые (малые) части. Математические модели строятся для этих частей, причем предусматриваются все мыслимые режимы их взаимодействия. Затем математическая модель исходного сложного объекта получается посредством *рекомпозиции*, т. е. восстановления из частей при наложении конкретных связей.

§ 12.2. Проекционные методы. Процесс Бубнова — Галеркина

12.2.1. Основная проекционная схема: процесс Бубнова — Галеркина. Выше в п. 11.0.3 при обсуждении рядов Фурье уже было введено представление о проецировании в функциональном пространстве. В сущности, была лишь намечена главная мысль, поскольку последовательное изложение всех сопутствующих понятий составило бы обширный математический материал. Однако уже на этой основе можно понять сущность проекционных методов.

Большой общностью обладает подход, называемый *методом*, или *процессом Бубнова — Галеркина* по именам двух выдающихся инженеров и ученых, наших соотечественников, пришедших к центральной идее в 1913—15 г. [И.2]. Непосредственным предметом были задачи технической механики.

Рассмотрим процесс Бубнова — Галеркина, т. е. построение *основной проекционной схемы*. Поставленную задачу сжато сформулируем в виде равенства:

$$\mathscr{L}u = f. \tag{12.3}$$

Здесь $\mathscr{L}$ — какой-либо оператор задачи, например, дифференциальный (с заданием граничных условий), интегральный или иной; будем полагать его линейным. В правой части — заданная функция f, выражающая обычно то или иное внешнее воздействие на объект. Символом u обозначено неизвестное решение задачи.

Рассмотрим тождественно равную нулю функцию $\mathscr{L}u - f = 0$. Разлагая ее в ряд Фурье типа (11.20) по полной ортогональной системе $\{u_n\}$, мы должны положить все коэффициенты Фурье равными нулю:

$$(\mathscr{L}u - f,\ u_k) = 0, \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ \infty. \tag{12.4}$$

Приближенное решение задачи будем искать в виде ортогонального представления:

$$u^N = \sum_{n=1}^{N} a_n^N u_n, \tag{12.5}$$

где a_n^N — неизвестные коэффициенты; систему N функций $\{u_n\}_{n=1}^N$ будем называть базисом процесса Бубнова — Галеркина. Для каждой базисной функции u_n должно иметь смысл выражение $\mathscr{L}u_n$, т. е. $u_n \in \mathscr{D}_{\mathscr{L}}$ (обозначение употреблялось в п. 11.0.1). Тогда представление u^N (12.5) можно подставить в (12.4) вместо u. Сохраняя N таких соотношений, имеем:

$$(\mathscr{L}u^N - f,\ u_k) = 0, \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ N. \tag{12.6}$$

Это и есть требование, налагаемое на приближенное решение. В сущности, совокупность равенств (12.6) — это условия ортогональности невязки $\mathscr{L}u^N - f$ функциям u_k, принадлежащим базису $\{u_n\}_{n=1}^N$. Выполнение требования (12.6) должно привести к определенному выбору коэффициентов a_n^N и, следовательно, формированию приближенного решения u^N (12.5).

Как видно из (12.6), при подстановке (12.5) возникает следующая система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
&(\mathscr{L}u_1, u_1)\,a_1^N + (\mathscr{L}u_2, u_1)\,a_2^N + \ldots + (\mathscr{L}u_N, u_1)\,a_N^N = (f, u_1),\\
&(\mathscr{L}u_1, u_2)\,a_1^N + (\mathscr{L}u_2, u_2)\,a_2^N + \ldots + (\mathscr{L}u_N, u_2)\,a_N^N = (f, u_2),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&(\mathscr{L}u_1, u_N)\,a_1^N + (\mathscr{L}u_2, u_N)\,a_2^N + \ldots + (\mathscr{L}u_N, u_N)\,a_N^N = (f, u_N),
\end{aligned} \tag{12.7}$$

или в краткой записи:

$$La^N = f, \tag{12.8}$$

где a^N — вектор коэффициентов a_n^N (столбец чисел $a_1^N, a_2^N, \ldots, a_N^N$), вектор правой части f имеет компоненты (f, u_n), а матрица L — элементы $L_{kn} = (\mathscr{L}u_n, u_k)$.

Назовем систему уравнений (12.7) (или (12.8)) *проекционной моделью* физической системы, которую отображает задача (12.3). Нахождение коэффициентов a_n^N (и последующее построение приближенного решения (12.5)) сведено, таким образом, к решению алгебраической задачи.

Можно представить себе серию проекционных моделей (12.8), построенных при неограниченном возрастании N. В этом смысле можно говорить о переходе к пределу при $N \to \infty$. В пределе невязка $\mathscr{L}u^N - f$ оказывается ортогональной системе $\{u_n\}$, как и точный

нуль $\mathscr{L}u - f$. Можно ожидать, что представление $\lim\limits_{N\to\infty} u^N$ в определенном смысле не отличается от точного решения. Если это ожидание оправдывается, то говорят, что процесс Бубнова — Галеркина (или проекционная модель) сходится к решению задачи (12.3). Обычно при этом

$$a_n^N \to a_n \text{ при } N\to\infty, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{12.9}$$

где $a_n = (u, u_n)$ — коэффициенты Фурье решения u задачи (12.3). Следует подчеркнуть, что вообще $a_n^N \neq a_n^{N'}$ при $N \neq N'$. Строгое доказательство сходимости процесса Бубнова — Галеркина для того или иного класса задач может оказаться трудной проблемой.

Рассмотрим процесс Бубнова — Галеркина в случае задачи на собственные значения

$$\mathscr{A}u - \varkappa\mathscr{B}u = 0. \tag{12.10}$$

Можно сказать, что (12.10) получается из (12.3) при $f = 0$ и $\mathscr{L} = \mathscr{A} - \varkappa\mathscr{B}$, где $\varkappa$ — параметр; в частности, $\mathscr{B}u = u$ (т. е. $\mathscr{B}$ — единичный оператор). Задача на собственные значения имеет серию решений $u = u_{(1)}, u_{(2)}, \ldots$, которые реализуются при соответствующих значениях параметра $\varkappa$: $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$ По определению, $u_{(n)}$ — собственные функции, а $\varkappa_n$ — отвечающие им собственные значения задачи (12.10). И те, и другие необходимо найти.

Применяя метод Бубнова — Галеркина, вместо (12.6) имеем:

$$(\mathscr{A}u^N - \varkappa^N\mathscr{B}u^N, u_k) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, N, \tag{12.11}$$

где $\varkappa^N$ означает приближенное значение $\varkappa$, которое будет получено при реализации метода. Далее вместо (12.8) будем иметь

$$Aa^N - \varkappa^N Ba^N = 0, \tag{12.12}$$

где матрицы A и B имеют элементы $A_{kn} = (\mathscr{L}u_n, u_k)$ и $B_{kn} = (\mathscr{B}u_n, u_k)$, соответственно. Из условия совместности системы уравнений (12.12)

$$\operatorname{Det}|A - \varkappa^N B| = 0 \tag{12.13}$$

следует характеристическое уравнение относительно $\varkappa^N$, являющееся алгебраическим уравнением степени N. Его корни $\varkappa_1^N, \varkappa_2^N, \ldots$ — это приближенные значения искомых величин $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$. При решении системы уравнений (12.12) находятся отвечающие этим приближенным собственным значениям векторы a^N. Внося соответствующие наборы коэффициентов в представление (12.5), получают собственные функции $u_{(1)}^N, u_{(2)}^N, \ldots$.

В заключение сделаем несколько замечаний.

1. Нетрудно заметить, что все операции процесса Бубнова — Галеркина, а также вид окончательной алгебраической формы

(12.8) или (12.10) не изменятся, если система $\{u_n\}$ будет неортогональной. Действительно, ортогональность базиса Бубнова — Галеркина не является необходимой.

2. Применяются и такие базисные функции u_n, которые не входят в область определения оператора $\mathscr{L}$, но в этом случае используется специальный прием, который будет продемонстрирован на примере электродинамических задач ниже в п. 12.2.2.

3. Проекционная модель (12.8) или (12.10) может быть получена и совершенно иным путем. Главная альтернатива — применение вариационного исчисления. Не останавливаясь на этом, отметим только, что приводящий к (12.8) или (12.10) вариационный подход называется *методом Ритца*. Иногда проекционные методы называют вариационными.

Для детального ознакомления с проекционными методами как инструментом математической физики рекомендуется монография [И.2]; применение проекционных методов в электродинамике изложено в [И.3].

12.2.2. Основная проекционная схема для уравнений Максвелла. Электродинамическую задачу того или иного типа, сформулированную для некоторой области V, нетрудно выразить в форме (12.3). Для этого достаточно применить так называемый оператор Максвелла $\mathscr{M}$, ввести обобщенную проницаемость π и вместо $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ рассматривать столбцы $\mathbf{F}$; применение такого аппарата наряду с другими возможностями подробно обсуждалось в [И.3]. Вводится символика:

$$\mathscr{M} = i\begin{pmatrix} 0 & -\operatorname{rot} \\ \operatorname{rot} & 0 \end{pmatrix}, \quad \pi = \begin{pmatrix} \varepsilon_0\varepsilon & 0 \\ 0 & \mu_0\mu \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{E}}_m \\ \dot{\mathbf{H}}_m \end{pmatrix}. \tag{12.14}$$

При этом уравнения Максвелла (3.34) принимают вид:

$$(\mathscr{M} - \omega\pi)\mathbf{F} = \mathbf{J}, \tag{12.15}$$

где $\mathbf{J}$ — столбец с компонентами $-i\dot{\mathbf{j}}_m^{\text{ст}}$ и 0.

Но в последующих действиях мы не воспользуемся аппаратом оператора Максвелла. Чтобы сохранить легко обозримую преемственность с предшествующим материалом этой книги, будем строить основную проекционную схему, отправляясь непосредственно от уравнений Максвелла в форме (3.34).

Итак, пусть некоторое электромагнитное поле в виде комплексных амплитуд $\dot{\mathbf{E}}_m$ и $\dot{\mathbf{H}}_m$ надо найти в области V с границей S; внутренняя среда неоднородна: ε и μ — функции координат. Постановку задачи пока уточнять не будем. В объеме V зададим системы функций $\{\mathbf{E}_n\}$ и $\{\mathbf{H}_n\}$, которые не являются решениями исходных уравнений Максвелла (3.34) при заданных ω, ε и μ.

Применительно к уравнениям Максвелла (3.34) проекционная форма (12.4) записывается следующим образом:

$$\int_V (\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_m - i\omega\varepsilon_0\varepsilon\dot{\mathbf{E}}_m - \dot{\mathbf{j}}_m^{\text{ст}})\,\mathbf{E}_k^* dv = 0,$$
$$\int_V (\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_m + i\omega\mu_0\mu\dot{\mathbf{H}}_m)\,\mathbf{H}_k^* dv = 0, \qquad (12.16)$$
$$k = 1, 2, \ldots, \infty.$$

Действительно, если системы $\{\mathbf{E}_n\}$ и $\{\mathbf{H}_n\}$ ортогональны, то записанные соотношения имеют очевидное истолкование: равны нулю все коэффициенты Фурье функций $\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_m - i\omega\varepsilon_0\varepsilon\dot{\mathbf{E}}_m - \dot{\mathbf{j}}_m^{\text{ст}} = 0$ и $\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}_m + i\omega\mu_0\mu\dot{\mathbf{H}}_m = 0$.

В качестве $\{\mathbf{E}_n\}$ и $\{\mathbf{H}_n\}$ удобно взять системы векторных функций, рассматривавшиеся в п. 11.1.2, для некоторого объема V_0, который в общем случае охватывает V: $V \subset V_0$, т. е. используется базис полей полого резонатора с объемом V_0; в частности, $V_0 = V$.

В методе Бубнова — Галеркина известное решение задачи представляется в форме:

$$\mathbf{E}^N = \sum_{n=1}^{N} a_n^N \mathbf{E}_n, \qquad \mathbf{H}^N = \sum_{n=1}^{N} b_n^N \mathbf{H}_n, \qquad (12.17)$$

или — при переходе к индукциям:

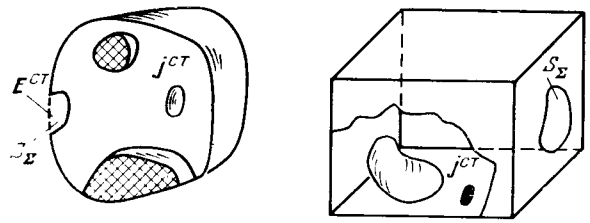
$$\mathbf{D}^N = \varepsilon_0 \sum_{n=1}^{N} p_n^N \mathbf{E}_n, \qquad \mathbf{B}^N = \mu_0 \sum_{n=1}^{N} q_n^N \mathbf{H}_n. \qquad (12.18)$$

Но прямая подстановка этих представлений в (12.16) допустима далеко не всегда; это может привести к неверным результатам. Действительно, рассчитывая на сходимость процесса, надо требовать, чтобы подстановка сохраняла смысл при $N \to \infty$. А это означает, что должно быть оправдано почленное дифференцирование (точнее, применение операции rot) по отношению к ортогональным рядам, в которые переходят представления (12.17). Возникшую трудность легко обойти, выполнив в (12.16) интегрирование по частям, т. е. надо использовать формулы (1.26) и (1.33). В последующих преобразованиях учтем также уравнения Максвелла (11.48), которым подчинены функции базиса (в них положим $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$; при этом ω_n вещественны). В результате соотношения (12.16) принимают вид

$$\omega\varepsilon_0 \int_V \varepsilon\dot{\mathbf{E}}_m\mathbf{E}_k^* dv - \omega_k\mu_0 \int_V \dot{\mathbf{H}}_m\mathbf{H}_k^* dv - i\int_S [\mathbf{E}_k^*, \dot{\mathbf{H}}_m]\,d\mathbf{s} - i\int_V \dot{\mathbf{j}}_m^{\text{ст}}\mathbf{E}_k^* dv = 0,$$
$$-\omega_k\varepsilon_0 \int_V \dot{\mathbf{E}}_m\mathbf{E}_k^* dv + \omega\mu_0 \int_V \mu\dot{\mathbf{H}}_m\mathbf{H}_k^* dv - i\int_S [\dot{\mathbf{E}}_m, \mathbf{H}_k^*]\,d\mathbf{s} = 0. \qquad (12.19)$$

При подстановке в (12.19) представлений (12.17) или (12.18) (в последнем случае предварительно делается замена $\dot{\mathbf{E}}_m = (\varepsilon_0\varepsilon)^{-1}\dot{\mathbf{D}}_m$ и $\dot{\mathbf{H}}_m = (\mu_0\mu)^{-1}\dot{\mathbf{B}}_m$) получается некоторая алгебраическая форма. Однако такая подстановка должна делаться осмысленно; ее правомерность для той или иной граничной задачи должна быть обоснована.

12.2.3. Применение метода Бубнова — Галеркина к некоторым классам электродинамических задач. Рассмотрим построение проекционной модели полого резонатора, содержащего некоторое тело, характеризуемое заданными проницаемостями; в объеме V проницаемости ε и μ — функции координат (если требуется, тензоры). Структура показана на рис. 12.1; колебания могут быть вынужденными и собственными, в последнем случае отверстие отсутствует.



а *б*

Рис. 12.1

Будем считать, что собственные колебания при отсутствии вносимого тела, нарушающего однородность среды, заранее изучены. При этом известны системы функций $\{\mathbf{E}_n\}$ и $\{\mathbf{H}_n\}$ при $V_0 = V$. Это условие, в частности, выполнено в случае прямоугольного резонатора (рис. 12.1*б*); функции $\mathbf{E}_n$, $\mathbf{H}_n$ выписаны в п. 11.0.4.

В варианте вынужденных колебаний на отверстии S_Σ в оболочке резонатора задано $\dot{\mathbf{E}}_m = \dot{\mathbf{E}}_m^{\text{ст}}$, а внутри — сторонний ток с плотностью $\dot{\mathbf{j}}_m^{\text{ст}}$. Внося в (12.19) представления $\mathbf{E}^N$, $\mathbf{H}^N$ (12.17) получаем следующую систему алгебраических уравнений:

$$\omega\breve{\mathcal{Э}}a^N - \Omega b^N = iQ^э,$$
$$-\Omega a^N + \omega\breve{\mathcal{M}}b^N = iQ^м, \qquad (12.20)$$

где матрицы $\breve{\mathcal{Э}}$ и $\breve{\mathcal{M}}$ имеют элементы

$$\breve{\mathcal{Э}}_{kn} = \varepsilon_0 \int_V \varepsilon\mathbf{E}_n\mathbf{E}_k^* dv, \quad \breve{\mathcal{M}}_{kn} = \mu_0 \int_V \mu\mathbf{H}_n\mathbf{H}_k^* dv. \qquad (12.21)$$

Матрица Ω — диагональная и составлена из собственных частот: $\Omega_{kn} = \delta_{kn}\omega_n$ (напомним, что для потенциальных функций эти

величины равны нулю); векторы $Q^э$ и $Q^м$ имеют компоненты

$$Q_k^э = \int_V \dot{\mathbf{j}}_m^{ст} \mathbf{E}_k^* dv, \quad Q_k^м = \int_{S_\Sigma} [\dot{\mathbf{E}}_m^{ст}, \mathbf{H}_k^*]\, ds \tag{12.22}$$

(при получении (12.20) учитывались соотношения ортонормировки (11.47), в которых $\varepsilon = 1$ и $\mu = 1$).

В варианте собственных колебаний полагаем $\dot{\mathbf{j}}_m^{ст} = 0$ и $\dot{\mathbf{E}}_m^{ст} = 0$, так что правая часть в (12.20) обращается в нуль. Частота ω оказывается неизвестной величиной. Поскольку получаемые методом Бубнова — Галеркина собственные частоты зависят от N, обозначим частоту ω^N. Система уравнений (12.20) принимает вид

$$\omega^N \widetilde{Э} a^N - \Omega b^N = 0, \quad -\Omega a^N + \omega^N \widetilde{M} b^N = 0. \tag{12.23}$$

Собственные частоты находим при обращении в нуль определителя этой системы.

При анализе собственных колебаний может иметь преимущество использование представлений индукций (12.18). Дело в том, что при отсутствии источников в разложениях индукций (12.18) остаются лишь соленоидальные функции $\mathbf{E}_n$, $\mathbf{H}_n$ и, соответственно этому, нет нулевых ω_n. Все ω_n — собственные частоты рассматриваемого резонатора без заполнения. Алгебраическая форма при этом такова:

$$\omega^N a^N - \Omega \underset{\frown}{M} b^N = 0, \quad \Omega \underset{\frown}{Э} a^N - \omega^N b^N = 0, \tag{12.24}$$

где элементы новых матриц выражаются следующим образом:

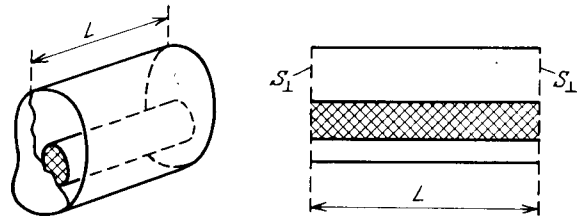
$$\underset{\wedge}{Э}_{kn} = \varepsilon_0^2 \int_V \varepsilon^{-1} \mathbf{E}_n \mathbf{E}_k^* dv, \quad \underset{\wedge}{M}_{kn} = \mu_0^2 \int_V \mu^{-1} \mathbf{H}_n \mathbf{H}_k^* dv. \tag{12.25}$$

Диагональная матрица Ω в данном случае имеет обратную (это матрица Ω^{-1}, составленная из диагональных элементов ω_n^{-1}).

Заметим, что как из (12.23), так и из (12.24) можно получать иные формулировки, исключая какой-то один вектор; тогда получаются системы N уравнений.

Возвращаясь к началу наших рассуждений, отметим, что действия, которые производились еще в п. 11.1.3 при анализе возбуждения полого резонатора, в сущности, также базировались на проекционной схеме. Действительно, соотношения (11.56) — это не что иное, как проекционная форма (12.16). Однако в п. 11.1.3 не было необходимости решать системы алгебраических уравнений высокого порядка, чтобы точно выразить коэффициенты представлений поля (11.53). Можно сказать, что в п. 11.1.3 бесконечная система распалась на независимые пары уравнений (11.60). Сопоставляя задачи о возбуждении резонатора, одна из которых решалась в п. 11.1.3, а другая рассматривалась сейчас, можно дать полученным результатам определенную физическую интерпретацию. Соотношение ортонормировки (11.47) означает, в частности, что собственные колебания резонатора не взаимодействуют, а величины $\widetilde{Э}_{kn}$ и $\widetilde{M}_{kn}$ (12.21) при $k \neq n$ истолковываются как взаимные энергии, электрическая и магнитная, появляющиеся при внесении в полость тела, которое нарушает однородность среды. При $\varepsilon = \text{const}$ и $\mu = \text{const}$, как следует из (11.47), интегралы $\widetilde{Э}_{kn}$ и, соответственно, $\widetilde{M}_{kn}$ для $k \neq n$ равны нулю. Это возвращает нас к задаче из п. 11.1.3.

Среди различных полых резонаторов, которые можно анализировать на основании полученных результатов, выделим волноводные, т. е. образованные отрезками регулярных волноводов (рис. 12.2*а*, *б*) с продольно-однородным заполнением (на расстоянии L располагаются идеально проводящие перегородки, рис. 12.2*б*).



а *б*

Рис. 12.2

Определив собственную частоту такого резонатора, мы заранее знаем, какой постоянной распространения (одной из собственных волн волновода) она соответствует. Пусть, например, рассматривается тип колебаний, для которого $p = 1$ (п. 8.1.1), что учитывается при формировании базисов $\{\mathbf{E}_n\}$ и $\{\mathbf{H}_n\}$ (для компонент всех векторных функций продольная зависимость берется в виде $\cos(\pi z/L)$ и $\sin(\pi z/L)$). Тогда согласно (8.32) $L = \Lambda/2$ и $\Gamma = \pi/L$. Поэтому, задаваясь некоторой длиной резонатора L и определяя ω^N, мы получаем точку кривой $\Gamma(\omega)$. Можно поступать и по-другому, а именно фиксировать требуемую частоту ω в (12.23) или (12.24) (вместо неизвестной ω^N). Определению подлежит при этом длина L (рис. 12.2*б*), один из пределов интегрирования при вычислении матричных элементов (12.21) и (12.25). Последние сводятся к интегралам по поперечному сечению $S_\perp$ волновода, например,

$$\underset{\wedge}{Э}_{kn} = \varepsilon_0 \int_{S_\perp} \varepsilon \mathbf{E}_n(\perp)\, \mathbf{E}_k^*(\perp)\, ds \frac{L}{2},$$

где символ $(\perp)$ означает, что векторная функция уже не зависит от z. Величина $L = \pi/\Gamma$ (можно писать $L^N = \pi/\Gamma^N$ ввиду зависимости результата от N) определяется из характеристического уравнения, получаемого при обращении в нуль определителя системы (12.23) или (12.24).

Итак, рассмотрен способ построения проекционной модели полого волновода с продольно-однородным заполнением. При анизотропии среды постоянная распространения волны может зависеть от направления (по z или против z), и вся схема нуждается в некоторой модификации. Не входя в подробности, отметим, что при этом достаточно использовать базисные функции $\mathbf{E}_n$, $\mathbf{H}_n$, удовлетворяющие условиям повторяемости на концах выделенного отрезка волновода [И.3].

Обратимся теперь к задачам дифракции, обсуждавшимся выше в п. 11.3.1. Оказывается, и в этом случае можно воспользоваться полученными результатами применения метода Бубнова — Галеркина. Покажем это на примере волновода, содержащего некоторое тело A, характеризуемое заданными проницаемостями ε и μ (см. рис. 11.14*а*).

Вместо исходной задачи (рис. 12.3*а*) достаточно решить две серии задач о возбуждении полого резонатора через отверстие. Они

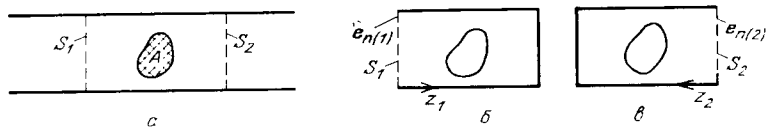


Рис. 12.3

получаются, когда одно из отсчетных поперечных сечений волновода S_1 или S_2 заменяется идеально проводящей перегородкой, а на другом (которое играет роль отверстия) задается некоторое стороннее электрическое поле. Эти ключевые задачи (рис. 12.3*б*, *в*) ставятся путем наложения следующих условий:

$$\mathbf{E}_\tau = \begin{cases} \mathbf{e}_{m(1)} \text{ на } S_1, \\ 0 \text{ на } S_2; \end{cases} \quad \mathbf{E}_\tau = \begin{cases} 0 \text{ на } S_1, \\ \mathbf{e}_{m(2)} \text{ на } S_2 \end{cases} \tag{12.26}$$

($m = 1, 2, \ldots$), где имеются в виду функции $\mathbf{e}_{n(\alpha)}$, использовавшиеся в п. 11.3.2. Постановка задач поясняется на рис. 12.3*б*, *в*. Оба поперечных сечения одинаковы, но направления осей z_1 и z_2 противоположны. Поэтому берется: $\mathbf{e}_{m(1)} = \mathbf{e}_{m(2)} = \mathbf{e}_m$ и $\mathbf{h}_{m(1)} = -\mathbf{h}_{m(2)} = \mathbf{h}_m$, где $\mathbf{e}_m$, $\mathbf{h}_m$ — собственные функции волновода (см. п. 11.2.2). Чтобы найти поле вынужденных колебаний резонатора, надо решить систему уравнений (12.20), взяв $\dot{a}_m^{\text{ст}} = 0$ и $\dot{\mathbf{E}}_m^{\text{ст}} = \mathbf{e}_m$ в (12.22); $S_\Sigma = S_1$ или $S_\Sigma = S_2$. При этом внутреннее поле определяется при помощи формул (12.17). Можно сказать, что таким путем находятся поля в различных режимах короткого замыкания исходной структуры (рис. 12.3*а*), которые задаются условиями (12.26).

Знание поля в каждом из режимов (12.26) позволяет вычислить один из элементов матрицы проводимости Y для поставленной

задачи дифракции (см. рис. 11.14*а*; рис. 12.3*а*). Далее посредством (11.107) матрица проводимости Y пересчитывается в матрицу рассеяния S.

Действительно, пусть, например, задан какой-то режим короткого замыкания согласно первому столбцу (12.26). В соответствии с (11.102) это означает, что $\mathbf{E}_{t1} = \mathbf{e}_{m(1)}$ и $\mathbf{E}_{t2} = 0$, т. е. для всех n за исключением $n = m$ равны нулю все коэффициенты $a_{n(1)}$ и $a_{n(2)}$, а $a_{m(1)} = 1$. Поэтому, как следует из (11.103),

$$b_{n(1)} = Y_{nm}^{11}, \quad b_{n(2)} = Y_{nm}^{21} \tag{12.27}$$

(вектор a имеет единственную ненулевую компоненту $a_{m(1)} = 1$). Если же задать один из режимов согласно второму столбцу (12.26), то, аналогичным образом, легко убедиться, что

$$b_{n(1)} = Y_{nm}^{12}, \quad b_{n(2)} = Y_{nm}^{22}. \tag{12.28}$$

Таким образом, для нахождения любого из элементов матрицы проводимости Y надо уметь вычислять коэффициенты $b_{n(\alpha)}$ из (11.102). В качестве $\mathbf{H}_{t\alpha}$ ($\alpha = 1, 2$) берется поле $\mathbf{H}^N$ (на S_1 и S_2), представляемое суммой (12.17), где коэффициенты b_n^N вычисляются в результате решения системы уравнений (12.20) с правой частью, которая соответствует требуемому режиму (12.26).

Первые проекционные модели полых резонаторов и волноводов с включениями, нарушающими однородность, а также изотропию внутренней среды, были построены более четверти века назад; они были реализованы на ЭВМ первого поколения «Стрела» [И.3, гл. 7]. В частности, рассматривался полый резонатор с диэлектрическим включением (рис. 12.4*а*), постепенно заполняющим объем (взято $\varepsilon = 10 - i \cdot 10^{-3}$). Анализировался низший тип собственных колебаний, для которого вектор $\mathbf{E}$ параллелен границе диэлектрика (ось z); структура однородна по z. В качестве базиса разложений (12.17) использовалось девятнадцать собственных функций, которые отвечают полям пустого резонатора $E_{110}, \ldots, E_{150}$; $E_{210}, \ldots, E_{250}$; $E_{310}, \ldots, E_{340}$; $E_{410}, \ldots, E_{440}$; E_{510} (потенциальные собственные функции отсутствуют, так как поле не имеет нормальной компоненты на границе раздела сред). По оси ординат на рис. 12.4*а* отложено низшее собственное число $k_{(1)}^N = \omega_{(1)}^N \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = 2\pi/\lambda_{(1)}^N$, вычисленное в условных единицах обратной длины (для пустого резонатора $k_{(1)}$ составляет 0,7721429...); по оси абсцисс — относительное заполнение p. График показывает изменение вещественной и мнимой частей $k_{(1)}$ в зависимости от степени заполнения объема диэлектриком. На рис. 12.4*б* показаны зависимости изменения коэффициентов b_n^1 в (12.17) от p (взяты только первые пять величин). Видно, что при малом ($p < 0{,}1$), а также при большом заполнении ($p > 0{,}9$) заметное значение имеет только одна низшая гармоника E_{110}. Резкое возрастание вклада высших гармоник при $p > 0{,}15$ (б) соответствует бы-

строму уменьшению $\mathrm{Re}\, k^N_{(1)}$ (*а*). Какова же точность метода на этом сложном участке? На рис. 12.4*в* для $p = 0{,}3$ приведены значения относительной (условной) ошибки величины $k^N_{(1)}(\omega^N_{(1)})$ с изменением N. Это величина $\delta\omega^N = (\omega^{19}_{(1)} - \omega^N_{(1)})/\omega^{19}_{(1)}$: за точное принимается значение $\omega^{19}_{(1)}$. Как видно, при $N > 13$ решение быстро стабилизируется (в алгоритме уменьшалось N так, что гармоники отбрасывались в порядке: 250, 150, 510, 440, 340, 430, 420, 410, 240, 140, 330, 320, 310, 230, 130, 220, 210, 120, 110).

Прежде чем двигаться дальше, подчеркнем, что во всех случаях использовалось представление поля типа (12.2), где $\mathbf{E}_n$, $\mathbf{H}_n$ не удовлетворяют уравнениям Максвелла *для рассматриваемой задачи* ни в

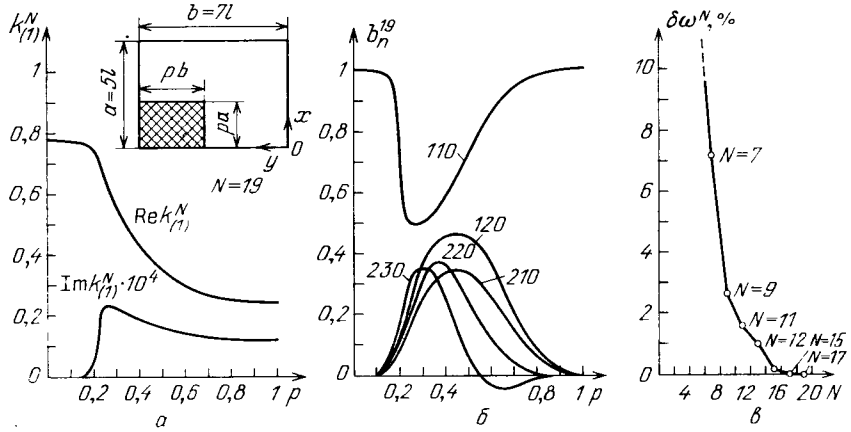


Рис. 12.4

одной точке. Тот факт, что взятые нами $\mathbf{E}_n$, $\mathbf{H}_n$ (если говорить о соленоидальных функциях) описывают собственные колебания некоторого полого резонатора, ничего не меняет: $\mathbf{E}_n$, $\mathbf{H}_n$ — решения других уравнений Максвелла, в которые вместо ω входят соответствующие собственные частоты ω_n, а ε и μ — константы. Что же было существенно при выборе именно этих систем функций? В первую очередь то, что по этим системам могут быть разложены любые векторные функции в V и в том числе неизвестное решение задачи $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$. Несколько упрощая, припишем это свойство, т. е. *полноту* систем, тому факту, что принадлежащие им функции образуют бесконечные наборы кратных гармоник вдоль каждой из осей декартовой системы координат. Другое существенное обстоятельство заключается в том, что на внешней оболочке функции $\mathbf{E}_n$, $\mathbf{H}_n$ удовлетворяют тем же граничным условиям, что и неизвестное решение $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$.

§ 12.3. Проекционное наложение граничных условий. Сведение задачи к рассмотрению границы

12.3.1. Проекционное наложение граничных условий: процесс Трефтца. Метод Бубнова — Галеркина весьма универсален. Представление поля типа (12.2) можно строить, не располагая какими-либо решениями уравнений задачи. Выбор систем $\{\mathbf{E}_n\}$ и $\{\mathbf{H}_n\}$, таким образом, не определяется свойствами среды в той области, где ищем поле. За эту универсальность, как говорится, «надо платить»; ниже мы вернемся к этому вопросу.

Если же среда обладает относительно простыми свойствами, например, однородна, то обычно можно построить такую систему $\{\mathbf{E}_n, \mathbf{H}_n\}$, где каждая пара функций связана уравнениями Максвелла решаемой задачи. При этом неизвестное решение задачи ищем в форме (12.1); коэффициенты разложений $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ по $\{\mathbf{E}_n\}$ и $\{\mathbf{H}_n\}$, соответственно, здесь принципиально одинаковы. Такая сумма удовлетворяет уравнениям задачи при любых коэффициентах c_n. Чтобы получить решение некоторой рассматриваемой электродинамической задачи, остается наложить на представление (12.1) необходимые граничные условия, что приведет к определению коэффициентов c_n. При конечном N это, вообще говоря, можно сделать лишь с некоторой точностью.

Процесс наложения граничных условий можно произвести в проекционной форме, т. е. аналогично тому, как в методе Бубнова — Галеркина удовлетворяются уравнения. Такой подход называют *методом*, или *процессом Трефтца*. Введенную выше систему решений уравнений Максвелла $\{\mathbf{E}_n, \mathbf{H}_n\}$ будем называть *базисом Трефтца*, если $\{\mathbf{E}_n\}$ и $\{\mathbf{H}_n\}$ пригодны для разложения произвольного тангенциального поля на той поверхности, где требуется удовлетворить граничным условиям.

Пример 1. Поясним применение метода Трефтца на простом примере. В случае возбуждения волноводного резонатора через отверстие S_Σ в его торце (основании цилиндра, рис. 12.5*а*) нетрудно построить базис Трефтца из стоячих волн волновода с узлом поперечного электрического поля $\mathbf{E}_t$ при $z = L$. Каждое из базисных полей получается при наложении двух противоположных волн (11.71). Оказывается, что такое поле $\mathbf{E}_n$, $\mathbf{H}_n$ удовлетворяет не только уравнениям Максвелла, но и граничным условиям везде за исключением торца $z = 0$. При этом $\mathbf{E}_{nt} = \mathbf{e}_n \sin \Gamma_n (z - L)$; положив $z = 0$, получаем полную ортогональную систему (о полноте $\{\mathbf{e}_n\}$ говорилось в п. 11.2.2), пригодную для разложения любого поля $\mathbf{E}_t$, заданного на этом торце резонатора. Характеризуя это поле, запишем:

$$\mathbf{E}_t(0) = \begin{cases} \mathbf{E}^\Sigma_t & \text{на } S_\Sigma, \\ 0 & \text{на } S_\perp - S_\Sigma. \end{cases} \tag{12.29}$$

Надо стремиться к выполнению равенства $\mathbf{E}^N_t(0) = \mathbf{E}_t(0)$, где $\mathbf{E}^N$ — представление поля в базисе Трефтца (12.1). Наложить это условие в проекционном смысле — значит, обратить в нуль коэффициенты Фурье функции $\mathbf{E}^N_t(0) - \mathbf{E}_t(0)$ в каком-нибудь базисе на $S_\perp$. Ввиду (11.74). запишем следующую

проекционную форму:

$$\int_{S_\perp} \left[\mathbf{E}^N(0) - \mathbf{E}(0), \mathbf{h}_k^*\right]_z ds = 0 \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{12.30}$$

(здесь остаются только поперечные компоненты полей, поэтому индекс t опущен). Внося представление $\mathbf{E}^N$ (12.1) в (12.30) и учитывая (12.29), получаем:

$$\int_{S_\perp} \sum_{n=1}^{N} c_n \left[\mathbf{E}_n(0), \mathbf{h}_k^*\right]_z ds = \int_{S_\Sigma} \left[\mathbf{E}^{\text{ст}}, \mathbf{h}_k^*\right]_z ds, \tag{12.31}$$

причем слева в качестве $\mathbf{E}_n(0)$ подставляются функции $\mathbf{E}_{nt}(0) = -\mathbf{e}_n \sin \Gamma_n L$.

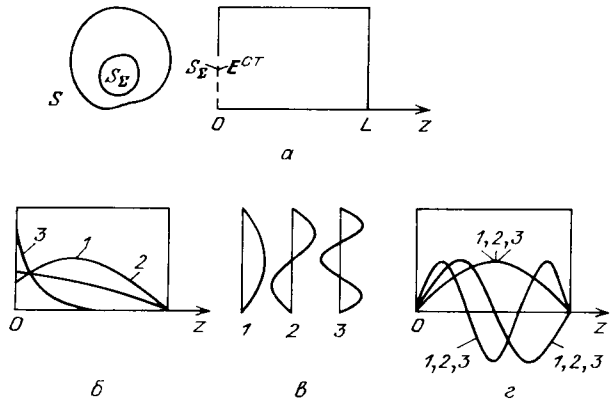


Рис. 12.5

Привлекая (11.74), видим, что в сумме сохраняется только один k-й член. В результате находим:

$$c_k = -\frac{|W_k|}{W_k \sin \Gamma_k L} \int_{S_\Sigma} \left[\mathbf{E}^{\text{ст}}, \mathbf{h}_k^*\right]_z ds. \tag{12.32}$$

В данном случае найденные коэффициенты c_n представления (12.1) не зависят от N. Для рассмотренной нами простой задачи применение метода Трефтца свелось к разложению функции $\mathbf{E}_t(0)$ (12.29) в ряд Фурье по $\{\mathbf{e}_n\}$. ■

Напомним (см. п. 12.2.3), что в п. 11.1.3 при решении задачи о возбуждении резонатора, в сущности, использовался метод Бубнова — Галеркина. Чтобы наглядно продемонстрировать различия процессов Трефтца и Бубнова — Галеркина, построены некоторые схематические изображения. На рис. 12.5*б* для первых трех функций базиса Трефтца показаны возможные продольные распределения компонент $\mathbf{E}_{nt}$, соответствующие закону $\sin \Gamma_n(z - L)$; третья волна (а значит, и все следующие) имеет уже мнимую постоянную распространения Γ_n, и синус становится гиперболическим. Это стоячие волны в волноводе, «закороченном» при $z = L$; их поперечные распределения $\mathbf{e}_n$ несколько условно представлены на рис. 12.5*в*.

По этим кратным гармоникам можно разложить произвольную функцию на $S_\perp$ при $z = 0$ (где задано стороннее поле). Что касается продольных распределений (рис. 12.5*б*), то они отнюдь не образуют полной системы функций, по которой может быть разложена произвольная зависимость $f(z)$. Но базис Трефтца и не должен обладать свойством полноты для объема резонатора. Требуется лишь полнота по отношению к той части границы, на которой должны быть удовлетворены граничные условия; это $S_\perp$ при $z = 0$. Если бы задача решалась методом Бубнова — Галеркина, проекционная форма записывалась бы для объема: базисы $\{\mathbf{E}_n\}$ и $\{\mathbf{H}_n\}$ должны содержать наборы гармоник по всем направлениям и, в частности, по z. Для каждого из поперечных распределений (рис. 12.5*в*) надо было бы предусмотреть ряд гармоник по z, как это показано на рис. 12.5*г*. При той же степени аппроксимации поля количество базисных функций в процессе Бубнова — Галеркина окажется значительно больше. Представление поля (12.2) при $N \to \infty$ способно сойтись к решению задачи **E**, **H** в среднем по объему V. Но, например, при $z = 0$ для любых N будет получаться $\mathbf{E}_t^N = 0$, и поле воспроизвести не удастся. Этим свойством обладают разложения (11.53), которые не воспроизводят $\mathbf{E}_\tau$ на отверстиях и медленно сходятся вдали от резонансных частот ω_n.

12.3.2. Процесс Трефтца как метод частичных областей. На рис. 12.6 схематически представлено несколько электродинамических задач, для которых естественно применение метода Трефтца. Все

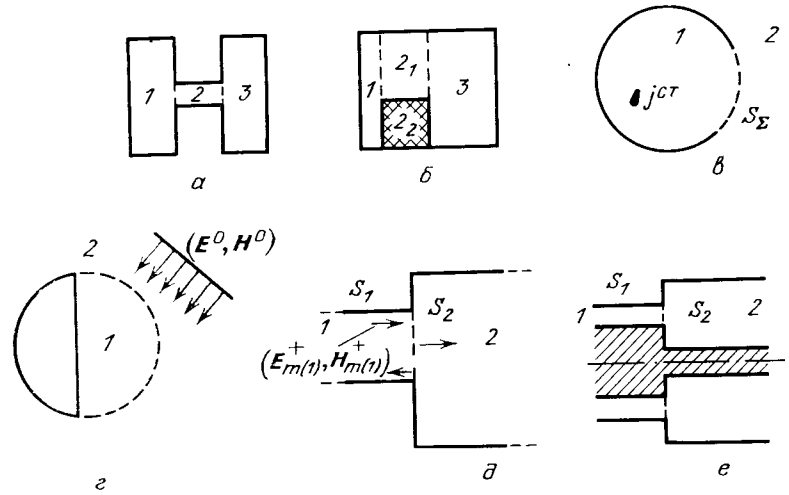


Рис. 12.6

они характерны тем, что область существования поля разделяется на несколько подобластей, в каждой из которых базис Трефтца может быть найден методом разделения переменных. Базисы Трефтца

должны обладать свойством полноты на смежных границах подобластей, где производится проекционное наложение граничных условий непрерывности тангенциальных компонент $\mathbf{E}^N$ и $\mathbf{H}^N$, или, как иногда говорят «проекционное сшивание» представлений поля типа (12.1). Такой подход называют *методом частичных областей*; он был впервые применен к задачам электродинамики около полувека назад [1]), но, разумеется, в сколько-нибудь сложных случаях может быть реализован только с применением ЭВМ.

На рис. 12.6 показаны: H-образный волновод (в поперечном сечении) ($а$); волновод (резонатор) с диэлектрическим включением ($б$); сферический резонатор, излучающий через отверстие в свободное пространство ($в$); сферическое зеркало, на которое падает волна ($г$); два варианта сочленения направляющих структур ($д$, $е$). Число таких примеров легко увеличить. Отметим, что в случаях ($в$) и ($г$) подобласти одинаковы — шаровая и дополнительная к ней.

Для определенности рассмотрим задачу о скачкообразном сочленении волноводов ($д$, $е$). Пусть решается задача дифракции некоторой волны $\mathbf{E}^+_{m(1)}$, $\mathbf{H}^+_{m(1)}$ первого волновода (падающей слева) на стыке со вторым ($z = 0$). Построим представление поля в обеих полубесконечных подобластях:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{E}^M_1\\ \mathbf{H}^M_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{E}^+_{m(1)}\\ \mathbf{H}^+_{m(1)}\end{pmatrix} + \sum_{n=1}^{M} c^M_{n(1)} \begin{pmatrix}\mathbf{E}^-_{n(1)}\\ \mathbf{H}^-_{n(1)}\end{pmatrix}, \qquad z \leqslant 0, \tag{12.33}$$

$$\begin{pmatrix}\mathbf{E}^N_2\\ \mathbf{H}^N_2\end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{N} c^N_{n(2)} \begin{pmatrix}\mathbf{E}^+_{n(2)}\\ \mathbf{H}^+_{n(2)}\end{pmatrix}, \qquad z \geqslant 0, \tag{12.34}$$

где в каждом из волноводов поле дифракции представляет собой наложение собственных волн (11.71), расходящихся от плоскости стыка. Запишем проекционные аналоги условий непрерывности E_τ и H_τ на стыке:

$$\int_{S_2} [\mathbf{E}^M_1 - \mathbf{E}^N_2, \mathbf{h}^*_{k(2)}]_z ds = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, N, \tag{12.35}$$

$$\int_{S_1} [\mathbf{e}^*_{k(1)}, \mathbf{H}^M_1 - \mathbf{H}^N_2]_z ds = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, M. \tag{12.36}$$

Подчеркнем, что непрерывность E_τ имеет место на большем сечении S_2; при этом вне отверстия S_1 на перегораживающей части стыка $E_\tau(-0) = E_\tau(+0) = 0$. Компонента H_τ непрерывна лишь в области меньшего сечения S_1.

Внося (12.33), (12.34) в (12.35) и (12.36), учтем соотношение ортонормировки (11.74), в котором надо брать $S_\perp = S_{1,2}$ для $\mathbf{e}_{n(1,2)}$, $\mathbf{h}_{n(1,2)}$ (направление оси z остается неизменным). Это приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов представлений (12.33), (12.34); запишем ее в форме:

$$\left(\begin{array}{c|c} w^*_1 & \widetilde{\Pi} \\ \hline -\Pi & w_2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} c^M_1 \\ \hline c^N_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} F_1 \\ \hline F_2 \end{array}\right), \tag{12.37}$$

где c^M_1 и c^N_2 — векторы коэффициентов сумм (12.33) и (12.34); Π — матрица с элементами

$$\Pi_{kn} = \int_{S_1} [\mathbf{e}_{n(1)}, \mathbf{h}^*_{k(2)}]_z ds, \tag{12.38}$$

$\widetilde{\Pi}$ — сопряженная матрица (элементы которой являются транспонированными и комплексно-сопряженными по отношению к (12.38)); $w_{1,2}$ — диагональные матрицы с элементами:

$$w_{1,2kk} = W_{k(1,2)}/|W_{k(1,2)}|. \tag{12.39}$$

Наконец, в правой части (12.37) фигурируют векторы со следующими компонентами:

$$F_{1k} = w^*_{1kk}\delta_{km}, \qquad F_{2k} = \Pi_{km}. \tag{12.40}$$

Смысл решения системы уравнений (12.37) ясен. Поскольку $c^M_{n(1)}$ и $c^N_{n(2)}$ — это комплексные амплитуды расходящихся от стыка волн при падающей волне единичной амплитуды заданного типа, то это — элементы матрицы рассеяния стыка (п. 11.3.1), а именно: $c^M_{n(1)} = S^{11}_{nm}$ и $c^N_{n(2)} = S^{21}_{nm}$. Разумеется, точность этих равенств зависит от M и N. При правильном выборе соотношения M и N (отметим только, что $M < N$) увеличение этих чисел с удовлетворительной быстротой приводит к довольно точным результатам.

Чтобы находить любые элементы матрицы рассеяния, надо еще рассмотреть дифракцию волны, падающей справа, со стороны второго волновода. При этом меняется только вид правой части системы (12.37), так что вместо (12.40) имеем:

$$F_{1k} = \Pi^*_{mk}, \qquad F_{2k} = -w_{2kk}\delta_{km}. \tag{12.41}$$

Решая систему уравнений (12.37) с правой частью (12.41), получаем: $c^M_{n(1)} = S^{12}_{nm}$ и $c^N_{n(2)} = S^{22}_{nm}$.

Путь, который мы обсудили, типичен для алгоритмизации задач, показанных на рис. 12.6, и многих аналогичных.

Отметим, что построенные выше представления поля (12.33), (12.34) удовлетворяют условию излучения: кроме заданной падающей волны они содержат лишь расходящиеся волны. Аналогично этому в задачах, соответствующих рис. 12.6$в$, $г$, в области 2 решение ищется в виде системы расходящихся сферических волн.

[1]) *Hahn W. C.* A new method for the calculation of cavity resonators. // J. Appl. Phys.— 1941.— V. 12, N 1.— P. 62—68.

12.3.3. Об интегральных уравнениях электродинамики. Выше было показано, что, располагая базисами Трефтца, уже не думают об удовлетворении уравнениям во внутренних точках рассматриваемых областей: какие бы то ни было операции производятся на их границах. Поэтому задачу электродинамики можно с самого начала привести к такой форме, в которой фигурирует только эта граница.

Для определенности будем рассматривать задачу дифракции для волновода с диафрагмой (рис. 12.7*а*). Подобно предыдущему это задача дифракции некоторой волны $\mathbf{E}^+_{m(1)}$, $\mathbf{H}^+_{m(1)}$, падающей слева.

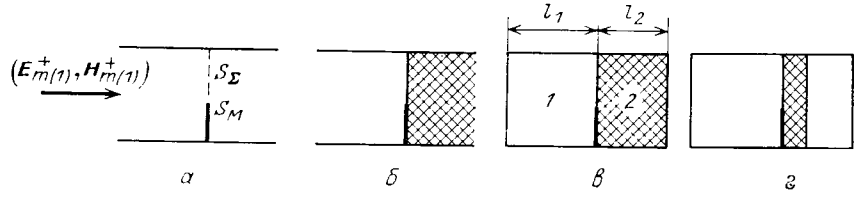


Рис. 12.7

Поэтому сохраним представление поля в базисах Трефтца (12.33), (12.34). Однако в данном случае нет оснований брать неодинаковое число учитываемых в подобластях волн, так что $M = N$. Поскольку слева и справа волноводы одинаковы, то $\mathbf{e}_{n(1)} = \mathbf{e}_{n(2)} = \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{h}_{n(1)} = \mathbf{h}_{n(2)} = \mathbf{h}_n$. Будет также удобно изменить ортонормировку (11.74) (которой соответствует (11.43)) на следующую:

$$\int_{S_\perp} \mathbf{e}^*_k \mathbf{e}_n \, ds = \delta_{kn}. \tag{12.42}$$

Электромагнитное поле в плоскости диафрагмы ($z = 0$) должно удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\mathbf{E}_\tau(-0) = \mathbf{E}_\tau(+0) \quad \text{на} \quad S_\perp = S_M + S_\Sigma, \tag{12.43}$$

$$\mathbf{E}_\tau(0) = 0 \quad \text{на} \quad S_M, \tag{12.44}$$

$$\mathbf{H}_\tau(-0) = \mathbf{H}_\tau(+0) \quad \text{на} \quad S_\Sigma. \tag{12.45}$$

Первое из них наложим в проекционной форме:

$$\int_{S_\perp} (\mathbf{E}_\tau(+0) - \mathbf{E}_\tau(-0)) \, \mathbf{e}^*_k = 0 \tag{12.46}$$

($k = 1, 2, \ldots$). Отсюда при подстановке $\mathbf{E}^N_{1\tau}(0)$ и $\mathbf{E}^N_{2\tau}(0)$ получаем:

$$c^N_{k(1)} + \delta_{km} = c^N_{k(2)}. \tag{12.47}$$

Выражая, далее, $c^N_{k(2)}$ как коэффициенты Фурье функции $\mathbf{E}_\tau(0) = \mathscr{E}$ в базисе $\{\mathbf{e}_n\}$, имеем:

$$c^N_{k(2)} = \int_{S_\perp} \mathscr{E} \mathbf{e}^*_k \, ds = \int_{S_\Sigma} \mathscr{E} \mathbf{e}^*_k \, ds. \tag{12.48}$$

При переходе к последнему интегралу учтено условие (12.44) $\mathscr{E} = 0$ на S_M. Остается лишь наложить граничное условие (12.45). Для этого просто приравняем выражения $\mathbf{H}^N_{1\tau}(0)$ и $\mathbf{H}^N_{2\tau}(0)$, следующие из (12.33), (12.34). При этом входящие в них коэффициенты $c^N_{n(1)}$, $c^N_{n(2)}$ представим, пользуясь формулами (12.48) и (12.47). Это дает:

$$\sum_{n=1}^N \int_{S_\Sigma} \mathscr{E} \mathbf{e}^*_n \, ds \, \mathbf{h}_n = \sum_{n=1}^N - \left(\int_{S_\Sigma} \mathscr{E} \mathbf{e}^*_n \, ds - \delta_{nm} \right) \mathbf{h}_n + \mathbf{h}_m \quad \text{на} \quad S_\Sigma.$$

Полученное равенство легко упростить. При этом также умножим векторно все члены на $\mathbf{z}_0$ и учтем, что согласно (11.72) $[\mathbf{h}_n, \mathbf{z}_0] = \frac{\mathbf{e}_n}{W_n}$. В результате получаем

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{W_n} \int_{S_\Sigma} \mathscr{E} \mathbf{e}^*_n \, ds \, \mathbf{e}_n = \frac{\mathbf{e}_m}{W_m}. \tag{12.49}$$

Это *интегральное уравнение* относительно неизвестной функции $\mathscr{E}$ на отверстии S_Σ в плоскости диафрагмы (см. рис. 12.7).

Перепишем интегральное уравнение в форме

$$\int_{S_\Sigma} Y^N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \, \mathscr{E}(\mathbf{r}') \, ds' = \frac{1}{W_m} \mathbf{e}_m(\mathbf{r}), \tag{12.50}$$

где $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ — координаты в плоскости $z = 0$, причем штрихованные меняются в процессе интегрирования. *Ядро* интегрального уравнения $Y^N(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ есть сумма

$$Y^N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{n=1}^N \frac{1}{W_n} \mathbf{e}_n(\mathbf{r}) \circ \mathbf{e}^*_n(\mathbf{r}'), \tag{12.51}$$

где кружок $\circ$ — символ так называемого диадного произведения векторов [1]). Ядро имеет размерность проводимости, и интегральное уравнение будем называть *адмитансным*. При некотором фиксированном N оно формулирует электродинамическую задачу, как мы будем говорить, в N-приближении. Если решение $\mathscr{E}$ найдено, то по

[1]) Здесь $\circ$ надо понимать как своего рода разделительный символ: пусть $\mathbf{v}$ — любой вектор, тогда $\mathbf{v}\mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_2 = (\mathbf{v}, \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_2 \mathbf{v} = \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_2, \mathbf{v})$, где скобки — скалярное произведение.

формулам (12.48) и (12.47) сразу определяются коэффициенты представлений (12.33) и (12.34), которые, как и выше в п. 12.3.2, имеют смысл элементов матрицы рассеяния.

Прежде чем решать адмитансное интегральное уравнение (12.50), отметим следующее. Если изменить порядок и способ наложения граничных условий (12.44) и (12.45) так, что сначала используется условие (12.45) в проекционной форме, то вместо (12.50) получается интегральное уравнение относительно плотности тока $\eta = [z_0, \mathbf{H}(+0) - \mathbf{H}(-0)]$ на диафрагме

$$\int_{S_M} Z^N(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\,\eta(\mathbf{r}')\,ds' = 2\mathbf{e}_m, \tag{12.52}$$

где

$$Z^N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{n=1}^{N} W_n \mathbf{e}_n(\mathbf{r}) \circ \mathbf{e}_n^*(\mathbf{r}'). \tag{12.53}$$

Ядро $Z^N(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ имеет размерность сопротивления, и уравнение (12.52) называется *импедансным*. Нахождение решения η, как ранее поля $\mathfrak{E}$, легко приводит к определению элементов матрицы рассеяния.

Как адмитансное, так и импедансное интегральные уравнения могут быть решены методом Бубнова — Галеркина. Запишем (12.50) и (12.52) в форме (12.3):

$$\mathscr{L}^{Y,Z}\mathbf{u}^{Y,Z} = \mathbf{f}^{Y,Z}, \tag{12.54}$$

$\mathbf{u}^Y = \mathscr{E}$, $\mathbf{u}^Z = \eta$, $\mathbf{f}^Y = \dfrac{\mathbf{e}_m}{W_m}$, $\mathbf{f}^Z = 2\mathbf{e}_m$, а интегральные операторы имеют вид

$$\mathscr{L}^Y(\ldots) = \int_{S_\Sigma} Y^N(\ldots)\,ds', \quad \mathscr{L}^Z(\ldots) = \int_{S_M} Z^N(\ldots)\,ds'. \tag{12.55}$$

Выбрав какой-то базис на S_Σ или, соответственно, S_M, запишем проекционное соотношение типа (12.4):

$$\int_{S_{\Sigma,M}} \left(\mathscr{L}^{Y,Z}\mathbf{u}^{Y,Z} - \mathbf{f}^{Y,Z}\right)\mathbf{u}_k^*\,ds = 0, \tag{12.56}$$

и представим решение в том же базисе:

$$\mathbf{u}^{Y,Z}\big|^M = \sum_{m=1}^{M} a_m^M \mathbf{u}_m. \tag{12.57}$$

Подстановка (12.57) в (12.56) приводит к системе линейных алгебраических уравнений в двух вариантах:

$$P^{Y,Z}D^{Y,Z}\tilde{P}^{Y,Z}a^M = F^{Y,Z}, \tag{12.58}$$

где a^M — вектор коэффициентов (12.57); матрица $P^{Y,Z}$ имеет элементы

$$P_{mn}^{Y,Z} = \int_{S_{\Sigma,M}} \mathbf{u}_m^* \mathbf{e}_n\,ds, \tag{12.59}$$

$\tilde{P}^{Y,Z}$ — сопряженная матрица, так что $\tilde{P}_{mn}^{Y,Z} = \left(P_{nm}^{Y,Z}\right)^*$; матрица $D^{Y,Z}$ — диагональная, причем

$$D_{mm}^{Y,Z} = W_m^{-1}, \; W_m. \tag{12.60}$$

Наконец, вектор правой части имеет компоненты

$$F_m^{Y,Z} = \int_{S_{\Sigma,M}} \mathbf{f}^{Y,Z}\mathbf{u}_m^*\,ds. \tag{12.61}$$

Оказывается, полученные интегральные уравнения почти не усложняются при переходе от диафрагмы (см. рис. 12.7*а*) к серии родственных задач (см. рис. 12.7*б*, *в*, *г*, и т. п.) Все сводится к тому, что в ядрах уравнений (12.51) и (12.53) происходит следующее изменение: $2W_n^{-1} \to Z_{n(1)}^{-1} + Z_{n(2)}^{-1}$ (см., например, [И.11], п. 1.3.4, п. 2.1.2). Импедансы $Z_{n(1)}$ и $Z_{n(2)}$ находятся непосредственно из базисов Трефтца для подобластей. Например, в случае полого резонатора (рис. 12.7*в*) с плоским проводником на границе раздела сред $Z_{n(1)} = iW_{n(1)}\,\mathrm{tg}\,\Gamma_{n(1)}l_1$ и $Z_{n(2)} = iW_{n(2)}\mathrm{tg}\,\Gamma_{n(2)}l_2$ ($\Gamma_{n(1,2)}$ и $W_{n(1,2)}$ — постоянные распространения и волновые сопротивления собственных волн для левого и правого волноводов). В данной задаче правая часть в (12.50) или (12.52), а следовательно, и в (12.58) равна нулю. При решении однородной системы (12.58) ее определитель приравнивается нулю, что дает уравнение относительно собственных частот анализируемой структуры. Аналогично исследуются полосковые, щелевые и другие линии передачи [И.11, п. 2.2.2] планарного типа. Приведенные выше в § 7.5 результаты получены этим методом. Интегральные уравнения импедансного и адмитансного типов можно получить и для многих других задач, например, в случае ряда внешних задач (см. рис. 12.6*г* и т. п.).

Мы рассмотрели только один путь получения интегральных уравнений, связанный с существованием базисов Трефтца. Интегральные уравнения электродинамики весьма разнообразны и существуют разные способы их вывода. Наиболее типично использование различных функций Грина, которые в случае внешних задач электродинамики известны в замкнутой форме. Вообще при решении внешних задач получение интегральных уравнений наиболее распространено [Г.5, И.4, 5]. Запишем одно известное [1]) интегральное

[1]) В. А. Фок. Распределение токов, возбуждаемых плоской волной на поверхности проводника // ЖЭТФ.— 1945.— Т. 15, № 12.— С. 693 (см. [Г.7]).

уравнение:

$$\frac{1}{2}\eta(\mathbf{r}) - \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} + \frac{ik}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)[\mathbf{v}_0, [\eta(\mathbf{r}'), \mathbf{r}_{0q}]]\, e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}ds' =$$

$$= [\mathbf{v}_0, \mathbf{H}^0(\mathbf{r})] \qquad (12.62)$$

(ср. подынтегральное выражение в (9.17)). Оно относится к задаче дифракции волны $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{H}^0$ на идеально проводящем теле V с поверхностью S (рис. 12.8). Если в результате решения этого уравнения найдена плотность поверхностного тока η на S, то поле дифракции определяется при помощи формулы (9.17) с заменой объемных величин на поверхностные (как в (9.59)). Уравнение (12.62) широко используется в численных исследованиях (см., например, [И.5]).

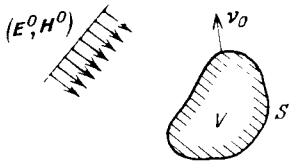
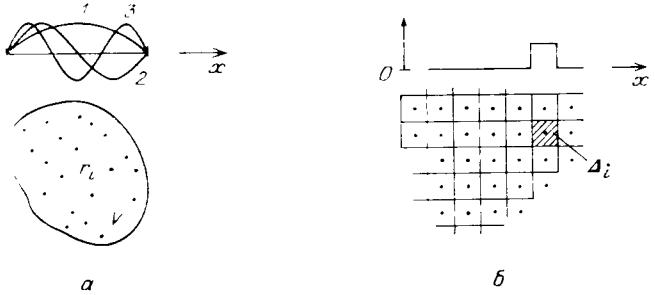


Рис. 12.8

Глава 13
ДИСКРЕТИЗАЦИЯ И ДЕКОМПОЗИЦИЯ

§ 13.1. Дискретизационные методы

13.1.1. Коллокации. Рассматривая некоторую задачу, сформулированную в виде (12.3), выделим в области существования решения систему точек, как это схематически показано на рис. 13.1*а*. Сохраняя представление решения (12.5), вместо проекционной формы (12.6) просто потребуем выполнения равенства



а *б*

Рис. 13.1

$$\mathscr{L}u^N(\mathbf{r}_i) = f(\mathbf{r}_i) \qquad (13.1)$$

($i = 1, 2, \ldots, N$), что приводит к системе N алгебраических уравнений относительно N неизвестных коэффициентов представления (12.5):

$$\sum_{n=1}^{N} a_n^N \mathscr{L}u_n(\mathbf{r}_i) = f(\mathbf{r}_i). \qquad (13.2)$$

Это *коллокационный метод* нахождения приближенного решения задачи (12.3), сводящий ее к алгебраической задаче (13.2).

Рассмотрим, например, задачу о собственных колебаниях полого резонатора, содержащего некоторое тело с проницаемостями ε и μ (см. п. 12.2.3). Представление решения берется в форме (12.17), где $\{\mathbf{E}_n\}$ и $\{\mathbf{H}_n\}$ — прежние базисы; граничные условия на оболочке резонатора ими удовлетворяются. Внося (12.17) в уравнения Максвелла, потребуем, как и в (13.2), выполнения равенств на множестве точек:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{N} b_n^N \operatorname{rot}\mathbf{H}_n(\mathbf{r}_i) - i\omega^N\varepsilon_0\varepsilon(\mathbf{r}_i)\, a_n^N\mathbf{E}_n(\mathbf{r}_i) = 0, \\ &\sum_{n=1}^{N} a_n^N \operatorname{rot}\mathbf{E}_n(\mathbf{r}_i) + i\omega^N\mu_0\mu(\mathbf{r}_i)\, b_n^N\mathbf{H}_n(\mathbf{r}_i) = 0 \end{aligned} \qquad (13.3)$$

(неизвестная собственная частота, которая может быть найдена только приближенно, обозначена ω^N, как и в п. 12.2.3). С учетом (11.48) пишем:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{N} \omega_n\varepsilon_0\mathbf{H}_n(\mathbf{r}_i)\, a_n^N - \omega^N\mu_0\mu(\mathbf{r}_i)\,\mathbf{H}_n(\mathbf{r}_i)\, b_n^N = 0, \\ &\sum_{n=1}^{N} \omega^N\varepsilon_0\varepsilon(\mathbf{r}_i)\,\mathbf{E}_n(\mathbf{r}_i)\, a_n^N - \omega_n\mu_0\mathbf{E}_n(\mathbf{r}_i)\, b_n^N = 0. \end{aligned} \qquad (13.4)$$

Если взять M точек ($i = 1, 2, \ldots, M$) и каждое из равенств спроецировать на оси декартовой системы координат, то количество уравнений будет $6M$. В принципе можно взять $N = 3M$ и получить в (13.4) квадратную матрицу. Если оказывается желательным при фиксированном N в (12.17) усилить дискретизацию (увеличить M), то система уравнений (13.4) окажется переопределенной, однако и в этом случае может быть получено решение (см., например, [И.6]).

Коллокационный подход применим и к интегральным уравнениям. Базис, как и выше, может строиться в виде набора гармоник (см. схематическое изображение на рис. 13.1*а*), но в данном случае его можно взять как набор констант, каждая из которых задана только на своем *носителе* Δ_i (рис. 13.1*б*). Применение такого базиса есть, по существу, реализация простейшего способа приближенного интегрирования.

Вместо проекционного наложения граничных условий (метод Трефтца) возможно коллокационное; система точек при этом выбирается на нужной границе. В результате получается система уравнений относительно граничных значений компонент поля.

Коллокационные методы, будучи очень простыми по замыслу, применяются относительно редко: во-первых, оптимальный выбор коллокационных точек в каждом отдельном случае требует исследования; во-вторых, они, вообще говоря, менее выгодны по сравнению

с проекционными, которые в ряде случаев приводят к удовлетворительным решениям при малых порядках системы алгебраических уравнений.

13.1.2. Разностные схемы. Как видно из предыдущего, для дискретизационного подхода характерно выделение в области задачи множества точек (рис. 13.1*а*), или, как говорят, *сетки*. Заметим, что поэтому дискретизационные методы в ряде случаев называют *сеточными*. На рис. 13.2*а* показана равномерная координатная сетка в

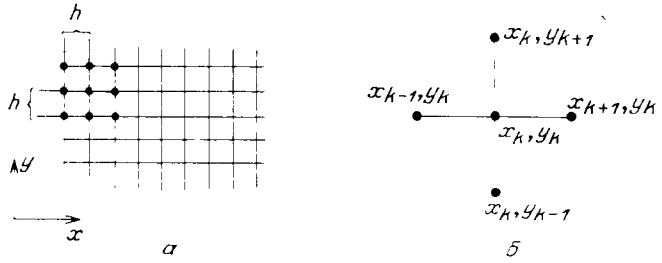


Рис. 13.2

плоскости $x0y$ с *шагом* h. Приближенный метод решения краевой задачи можно построить так, чтобы решение рассматривалось только в узлах сетки, т. е. в точках с координатами x_m, y_n. Для этого все производные в формулировке задачи надо заменить их конечно-разностными аналогами. Исходная задача сводится таким путем к системе линейных алгебраических уравнений посредством так называемой *разностной схемы*. К настоящему времени теория разностных схем основательно разработана (см., например [И.7]).

Рассмотрим кратко суть вопроса. Пусть нужно построить разностный аналог частной производной по x функции $u(x, y)$ в точке x_k, y_k (рис. 13.2*б*); значения $u(x_m, y_n)$ будем кратко обозначать $u_{m,n}$. Возможны, например, правый аналог $l_{\text{пр}}$ и левый $l_{\text{л}}$:

$$l_{\text{пр}} = \frac{u_{k+1,k} - u_{k,k}}{h} \to \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x_k, y_k}, \quad l_{\text{л}} = \frac{u_{k,k} - u_{k-1,k}}{h} \to \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x_k, y_k}. \tag{13.5}$$

Если теперь требуется построить вторую частную производную, то пишут:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_{x_k, y_k} \sim \frac{1}{h}(l_{\text{пр}} - l_{\text{л}}) = \frac{u_{k+1,k} - 2u_{k,k} + u_{k-1,k}}{h^2}. \tag{13.6}$$

Совершенно аналогично строится производная $\partial^2 u/\partial y^2$. Поэтому имеем следующий разностный аналог двумерного лапласиана $\nabla^2_{x,y}$:

$$\nabla^2_{x,y}\big|_{x_k, y_k} \sim \frac{u_{k+1,k} + u_{k-1,k} + u_{k,k+1} + u_{k,k-1} - 4u_{k,k}}{h^2}. \tag{13.7}$$

Поэтому, если, например, решается граничная задача

$$\nabla^2_{x,y} u = f \text{ в } S, \qquad u = 0 \text{ на } L_S \tag{13.8}$$

где фигурирует уравнение Пуассона, то для некоторого узла сетки с номером (k, k) согласно (13.7) имеем:

$$-u_{k+1,k} - u_{k,k+1} + 4u_{k,k} - u_{k-1,k} - u_{k,k-1} = -h^2 f_{k,k}, \tag{13.9}$$

что дает систему линейных алгебраических уравнений, матрица которой будет очень разреженной: для всех внутренних точек — независимо от числа узлов — количество отличных от нуля элементов матрицы в строке равно пяти.

Разностные схемы — распространенный метод алгоритмизации краевых задач. Поскольку аппроксимации подвергается дифференциальный оператор задачи, число узлов оказывается большим. Порядки систем линейных уравнений весьма высоки, по сравнению, например, с проекционными методами. Но разреженность матриц помогает в ряде случаев преодолевать эту трудность.

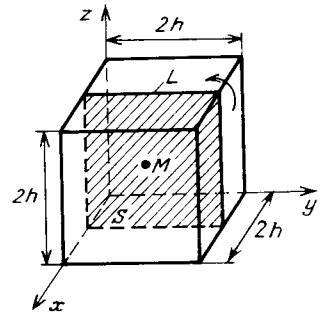


Рис. 13.3

Для электродинамических задач разностные схемы применялись относительно мало, что связано с рядом специфических трудностей. Заметим, что в электродинамике разностные схемы иногда получают [1]) на основе уравнений Максвелла в интегральной форме. Поясним это на примере объемной равномерной координатной сетки (рис. 13.3). Точка $M(x, y, z)$, для которой составляются разностные соотношения, лежит в средней точке куба с ребром $2h$. Применяя уравнение (1.54) в рамках метода комплексных амплитуд ($\partial/\partial t \to i\omega$) и заменяя **B** на **H**, возьмем в качестве S заштрихованное сечение куба плоскостью $x = \text{const}$; направление обхода его контура L показано стрелкой. При достаточно малом h из (1.54) приближенно следует

$$-i\omega 4h^2 \mu_0 \mu(x, y, z)\dot{H}_{mx}(x, y, z) = -2h\dot{E}_{my}(x, y, z + h) + 2hE_{mz}(x, y + h, z) + 2h\dot{E}_{my}(x, y, z - h) - 2h\dot{E}_{mz}(x, y - h, z),$$

или

$$-i\omega 2h\mu_0\mu\dot{H}_{mx} = -\dot{E}_{my}(z + h) + \dot{E}_{mz}(y + h) + \dot{E}_{my}(z - h) - \dot{E}_{mz}(y - h). \tag{13.10}$$

Аналогично из (1.53) получаем

$$i\omega 2h\varepsilon_0\varepsilon\dot{E}_{mx} + 2h\dot{j}^{\text{ст}}_{mx} = -\dot{H}_{my}(z + h) + \dot{H}_{mz}(y + h) + \dot{H}_{my}(z - h) - \dot{H}_{mz}(y - h). \tag{13.11}$$

[1]) См., например, *M. Albani, P. Bernardi.* A numerical method based on the discretization of Maxwell equations in integral form // IEEE Trans.— 1974.— V. MTT — 22, N 4.— P. 446—449.

Чтобы достроить систему разностных соотношений, нужно еще выполнить подобные же операции в плоскостях $y = \text{const}$ и $z = \text{const}$, проходящих через точку $M(x, y, z)$.

В этом кратком изложении мы совершенно не затрагиваем хорошо разработанные вопросы устойчивости и сходимости разностных схем.

13.1.3. Конечные элементы. В процессе дискретизации можно строить представление решения в некоторых малых областях, называемых *конечными элементами*. В п. 13.1.1 уже рассматривался пример (рис. 13.1*б*), позволяющий говорить о применении простейших конечных элементов в виде носителей констант Δ_i; речь шла об алгоритмизации интегрального уравнения. Обычно под *методом конечных элементов*, который называется также *проекционно-сеточным*, понимают процесс Бубнова — Галеркина для некоторой краевой задачи, в котором базис формируется из функций, определенных не во всей области задачи, а на специально построенной системе носителей в ней. В сравнении с разностными схемами метод можно считать новым: его детальная разработка была произведена 10—15 лет назад; наиболее удачно, на наш взгляд, метод изложен в монографиях [И.8—9].

Обсудим сущность метода конечных элементов. На рис. 13.4*а* показаны функции в виде констант на своих носителях (ср. рис. 13.1*б*). По таким функциям u_n можно было бы построить представление решения задачи u^N (12.5), если оператор $\mathscr{L}$ — интегральный; выражение $\mathscr{L}u_n$ при этом имеет смысл. Если же выполняется [1]) операция однократного дифференцирования, то нужно, чтобы

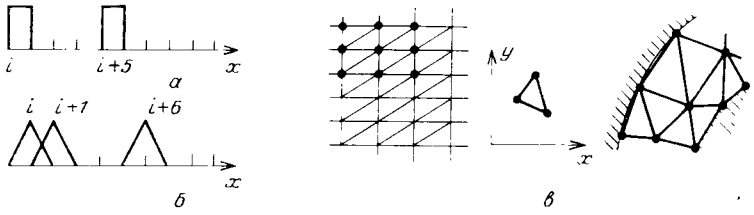


Рис. 13.4

базисные функции u_n были непрерывными. При этом конечно-элементное представление u^N (12.5) строится из функций-крышек (рис. 13.4*б*), носители которых пересекаются. Что дает метод конечных элементов в сравнении с обычным процессом Бубнова — Галеркина, когда базисные функции u_n определены во всей области задачи? Главное — это разреженность матрицы L в (12.8). Действительно, будут отличны от нуля только те из элементов $L_{kn} = (\mathscr{L}u_n, u_k)$, которые образованы функциями-крышками u_n соседних (пересекающихся) носителей.

[1]) Обычно после преобразования $(\mathscr{L}u_n, u_k)$ интегрированием по частям.

Существуют разные способы построения конечных элементов на поверхности и в объеме. Часто используется треугольная сетка, удобная, в частности, в случае криволинейной границы (рис. 13.4*в*). При этом базисные функции можно строить в виде

$$u_n = a_n + b_n x + c_n y, \tag{13.12}$$

где константы a_n, b_n и c_n однозначно связаны со значениями u_n в узлах (вершинах треугольника). Совокупность всех узловых значений образует неизвестный вектор решения. Весьма существенно, что представление u^N (12.5) в этом случае непрерывно. Представления типа (13.12) образуют линейные конечные элементы; можно построить квадратичные элементы и элементы более высокой степени.

При алгоритмизации электродинамической задачи $\mathbf{E}_n$ и $\mathbf{H}_n$ в (12.17) или (12.18) строятся так, что их координатные составляющие (E_{nx}, E_{ny} и т. д.) имеют конечно-элементное представление. В отличие от базисов $\{\mathbf{E}_n\}$ и $\{\mathbf{H}_n\}$, использовавшихся в п. 12.2.3, в данном случае существует возможность получить $\mathbf{E}_n$ и $\mathbf{H}_n$, удовлетворяющие требуемым условиям на внутренних границах раздела сред.

Дальнейшее развитие дискретизационных методов связано с декомпозиционным принципом, который обсуждается ниже.

§ 13.2. Декомпозиционный принцип. Математическое моделирование сложных структур

13.2.1. Декомпозиция сложной структуры и рекомпозиция ее математической модели. Всякой электродинамической структуре можно сопоставить некоторую краевую задачу для уравнений Максвелла, затем в результате алгоритмизации (посредством применения одного из обсуждавшихся выше методов) мыслимо получить математическую модель, реализуемую на ЭВМ. Однако конфигурационная сложность, а также протяженность реальных технических объектов очень быстро ставят предел такому прямому подходу: не только существующие ЭВМ, но и те, которые ожидаются в обозримом будущем, оказываются недостаточно мощными. Но и относительно простым объектам часто невыгодно сопоставлять краевую задачу, формулируемую для структуры как единого целого. Это ведет к слишком большому расходу машинного времени. Выходом из положения является расчленение структуры на независимо моделируемые части, *автономные блоки*. Такой подход называется *декомпозиционным* [И.10].

Начнем с рассмотрения простого для понимания примера. Чтобы построить математическую модель сложной волноводной структуры, было бы нерационально формулировать краевую задачу для всей области существования поля (рис. 13.5). Рассечем соединительные

волноводы поперечными плоскостями (они показаны штриховыми линиями), в результате чего оказываются выделенными частичные объекты A, B, C, ... Алгоритмизировать краевую задачу для каждого такого отдельного объекта гораздо легче. Сосредоточим внимание на объектах A и B. Рассматривая каждый из них с присоединением полубесконечных волноводов, мы можем в результате решения краевых задач определить их матрицы рассеяния $\overset{A}{S}$ и $\overset{B}{S}$ (см. п. 11.3.1). Таким образом, имеем соотношения:

$$\overset{AA}{S}c^{+} = \overset{A}{c}^{-}, \qquad \overset{BB}{S}c^{+} = \overset{B}{c}^{-}, \tag{13.13}$$

в которые входят векторы падающих и отраженных волн для объектов A и B.

Порядки матриц $\overset{A}{S}$ и $\overset{B}{S}$ вообще различны ($n_A \neq n_B$); они равны количествам учтенных типов волн. Отмечая, что объекты A и B

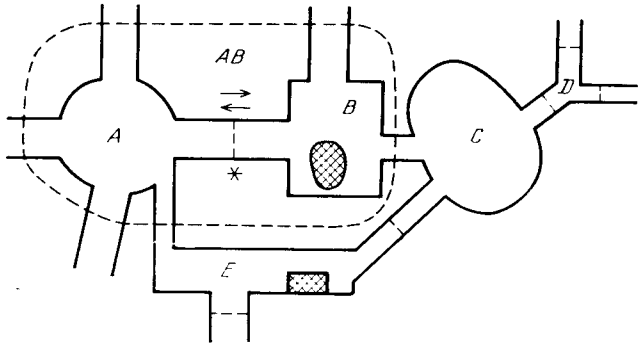


Рис. 13.5

соединены волноводом (*), в котором учтено k волн, перепишем равенства (13.13) следующим образом:

$$\left(\begin{array}{c|c} \overset{A}{S}{}^{11} & \overset{A}{S}{}^{12} \\ \hline \overset{A}{S}{}^{21} & \overset{A}{S}{}^{22} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \overset{A}{c}{}_1^{+} \\ \hline \overset{A}{c}{}_2^{+} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \overset{A}{c}{}_1^{-} \\ \hline \overset{A}{c}{}_2^{-} \end{array}\right), \quad \begin{array}{l} \} \; n_A - k, \\ \} \; k, \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \overset{B}{S}{}^{11} & \overset{B}{S}{}^{12} \\ \hline \overset{B}{S}{}^{21} & \overset{B}{S}{}^{22} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \overset{B}{c}{}_1^{+} \\ \hline \overset{B}{c}{}_2^{+} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \overset{B}{c}{}_1^{-} \\ \hline \overset{B}{c}{}_2^{-} \end{array}\right), \quad \begin{array}{l} \} \; n_B - k, \\ \} \; k, \end{array} \tag{13.14}$$

где порядок столбцов и строк выбран так, что последние k компонент каждого вектора относятся к волнам общего волновода.

Ясно, что волны общего волновода, которые являются падающими для объекта B, будут отраженными для объекта A (и обратно).

Поэтому подвекторы $\overset{A}{c}{}_2^{\pm}$ и $\overset{B}{c}{}_2^{\pm}$ в (13.14) подчинены следующим *условиям связи*:

$$\overset{A}{c}{}_2^{+} = \overset{B}{c}{}_2^{-}, \qquad \overset{A}{c}{}_2^{-} = \overset{B}{c}{}_2^{+}. \tag{13.15}$$

Рассматривая последние клеточные строки равенств (13.14), с учетом условий связи (13.15) получаем:

$$\begin{aligned} -\overset{A}{S}{}^{22}\overset{A}{c}{}_2^{+} + \overset{B}{c}{}_2^{+} &= \overset{A}{S}{}^{21}\overset{A}{c}{}_1^{+}, \\ \overset{A}{c}{}_2^{+} - \overset{B}{S}{}^{22}\overset{B}{c}{}_2^{+} &= \overset{B}{S}{}^{21}\overset{B}{c}{}_1^{+}. \end{aligned} \tag{13.16}$$

Решая эту систему уравнений относительно подвекторов общего канала, находим:

$$\begin{aligned} \overset{A}{c}{}_2^{+} \equiv \overset{B}{c}{}_2^{-} &= \left(I - \overset{B}{S}{}^{22}\overset{A}{S}{}^{22}\right)^{-1}\left(\overset{B}{S}{}^{22}\overset{A}{S}{}^{21}\overset{A}{c}{}_1^{+} + \overset{B}{S}{}^{21}\overset{B}{c}{}_1^{+}\right), \\ \overset{A}{c}{}_2^{-} \equiv \overset{B}{c}{}_2^{+} &= \left(I - \overset{A}{S}{}^{22}\overset{B}{S}{}^{22}\right)^{-1}\left(\overset{A}{S}{}^{21}\overset{A}{c}{}_1^{+} + \overset{A}{S}{}^{22}\overset{B}{S}{}^{21}\overset{B}{c}{}_1^{+}\right). \end{aligned} \tag{13.17}$$

Посредством этих соотношений нетрудно исключить $\overset{A}{c}{}_2^{\pm}$ и $\overset{B}{c}{}_2^{\pm}$ из (13.14). Результат запишем в следующей форме:

$$\left(\begin{array}{c|c} \overset{AB}{S}{}^{11} & \overset{AB}{S}{}^{12} \\ \hline \overset{AB}{S}{}^{21} & \overset{AB}{S}{}^{22} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \overset{A}{c}{}_1^{+} \\ \hline \overset{B}{c}{}_1^{+} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \overset{A}{c}{}_1^{-} \\ \hline \overset{B}{c}{}_1^{-} \end{array}\right), \quad \begin{array}{l} \} \; n_A - k, \\ \} \; n_B - k, \end{array} \tag{13.18}$$

где

$$\begin{aligned} \overset{AB}{S}{}^{11} &= \overset{A}{S}{}^{11} + \overset{A}{S}{}^{12}\left(I - \overset{B}{S}{}^{22}\overset{A}{S}{}^{22}\right)^{-1}\overset{B}{S}{}^{22}\overset{A}{S}{}^{21}, \\ \overset{AB}{S}{}^{12} &= \overset{A}{S}{}^{12}\left(I - \overset{B}{S}{}^{22}\overset{A}{S}{}^{22}\right)^{-1}\overset{B}{S}{}^{21}, \\ \overset{AB}{S}{}^{21} &= \overset{B}{S}{}^{12}\left(I - \overset{A}{S}{}^{22}\overset{B}{S}{}^{22}\right)^{-1}\overset{A}{S}{}^{21}, \\ \overset{AB}{S}{}^{22} &= \overset{B}{S}{}^{11} + \overset{B}{S}{}^{12}\left(I - \overset{A}{S}{}^{22}\overset{B}{S}{}^{22}\right)^{-1}\overset{A}{S}{}^{22}\overset{B}{S}{}^{21}. \end{aligned} \tag{13.19}$$

Смысл состоит в том, что найдено соотношение между векторами падающих и отраженных волн для того фрагмента волноводной структуры AB, который на рис. 13.5 заключен в штриховую рамку. Действительно, подвекторы $\overset{A}{c}{}_1^{\pm}$, $\overset{B}{c}{}_1^{\pm}$ охватывают падающие и отраженные волны именно для тех волноводов, которые пересекают рамку. Мы получили матрицу рассеяния для фрагмента, представляющего собой объединение объектов A и B и названного AB. Краткая форма записи соотношения (13.18) имеет вид:

$$\overset{AB}{S}\;\overset{AB}{c}{}^{+} = \overset{AB}{c}{}^{-}. \tag{13.20}$$

Теперь ясно, как получить матрицу рассеяния всей структуры, которую можно обозначить символом $AB \ldots E$. Надо принять фраг-

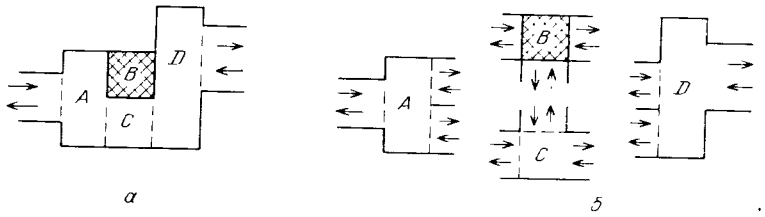
мент AB за новый объект A, а C за новый объект B и по формулам (13.19) найти матрицу рассеяния расширенного фрагмента ABC. Затем аналогично присоединяются объекты D и E.

Итак, на первом этапе производится *декомпозиция* сложной структуры и находятся матрицы рассеяния полученных ее частей, автономных блоков (они анализируются независимо от того, куда присоединены). На втором этапе выполняется *рекомпозиция* математической модели полной структуры, т. е. получение ее матрицы рассеяния по матрицам рассеяния автономных блоков. Формулы (13.18)—(13.20) будем называть рекомпозиционными.

Почему расчленение структуры на автономные блоки и последующая рекомпозиция вообще возможны, ведь казалось бы, при отсечении связей должна теряться какая-то информация? Дело в том, что описание автономных блоков при помощи матриц рассеяния охватывает все мыслимые режимы этих блоков, а объединение этих матриц на втором этапе восстанавливает именно те связи, которые реализуются в полной структуре.

Отметим, что вместо матриц рассеяния можно было бы также использовать матрицы проводимости или матрицы сопротивления [И.10].

13.2.2. Декомпозиционные методы. Расчленение волноводной структуры, показанной на рис. 13.5, на отдельно анализируемые части довольно очевидно потому, что реально существуют соединительные волноводы. Рассмотрим другую структуру (рис. 13.6*а*), которую можно алгоритмизировать, используя метод частичных областей (см. п. 12.3.2), поскольку в каждой из подобластей A, B, C



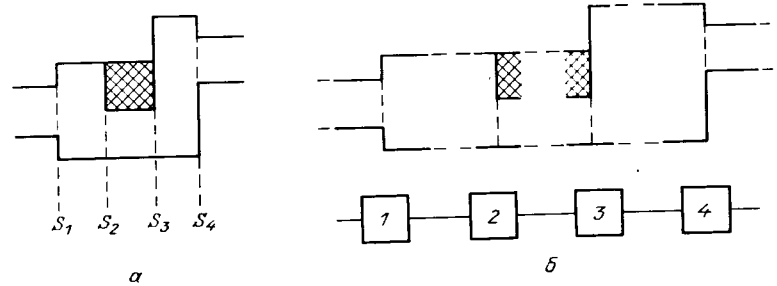
а *б*

Рис. 13.6

и D легко построить базисы Трефтца. Так как внутренних границ «сшивания» полей довольно много, процесс Трефтца приведет к системе линейных алгебраических уравнений весьма высокого порядка. Но эта трудность легко преодолевается путем применения декомпозиционного подхода.

Дело в том, что все подобласти можно рассматривать как *автономные многомодовые блоки* (АМБ), как это пояснено на рис. 13.6*б*. Для того чтобы сделать очевидным принципиальное сходство с прежней структурой (рис. 13.5), введем в рассмотрение виртуальные каналы — бесконечно короткие волноводы, которыми якобы соединены подобласти. По отношению к соответствующим входам (рис. 13.6*б*) каждая подобласть может быть охарактеризована посредством матрицы S, Y или Z; она может анализироваться отдельно и фигурировать как автономный блок. Математическая модель всего объекта (рис. 13.6*а*) получается путем рекомпозиционных операций, которые можно производить по формулам (13.19). Но более удобным оказывается применение матриц проводимости. Такой подход называется *методом автономных многомодовых блоков* (методом АМБ); он был предложен недавно (см. [И.10]).

Отметим, что к рассмотренной структуре можно применить и другой декомпозиционный подход. Рассекая ее системой поперечных плоскостей S_1, S_2, S_3 и S_4, имеем между ними (рис. 13.7*а*) участки



а *б*

Рис. 13.7

регулярных волноводов (между плоскостями S_2 и S_3 заключен отрезок волновода, частично заполненного диэлектриком). Каждый стык регулярных волноводов можно охарактеризовать посредством матрицы рассеяния, получение которой обсуждалось выше в п. 12.3.2. Декомпозиционная схема имеет каскадный вид, рис. 13.7*б*; каждый нумерованный элемент отображает стык двух полубесконечных волноводов (первому и третьему элементам сопоставлены соответствующие стыки). Матрица рассеяния всей структуры находится по формулам (13.19). Надо иметь в виду, что объединяемыми элементами являются не только стыки, как таковые, но и промежуточные регулярные отрезки, также описываемые своими матрицами рассеяния.

Далее, рассмотрим применение декомпозиционного подхода в случае так называемых интегральных схем (ИС) СВЧ [И.10—11]. На рис. 13.8*а* схематически представлена некоторая микрополосковая структура (см. § 7.5), которую можно разбить на ряд регулярных отрезков при помощи системы поперечных сечений $S_1, \ldots, S_{10}$ (слева и справа показаны поперечные сечения микрополосковых линий на входе и выходе). Это точно такая же линейная декомпозиция, как и в случае, рассмотренном выше на рис. 13.7*а*. Декомпозиционная схема на рис. 13.7*б* подходит и в данном случае: надо только увеличить число звеньев. В общем случае декомпозиция ИС СВЧ по-

яснена на рис. 13.8*б*. Структура рассекается двумя системами взаимно перпендикулярных плоскостей (их следы показаны штриховой линией). При этом она распадается на элементы, один из которых отмечен звездочкой и показан отдельно справа. Выделенные элементы — автономные блоки, которые могут быть охарактеризованы

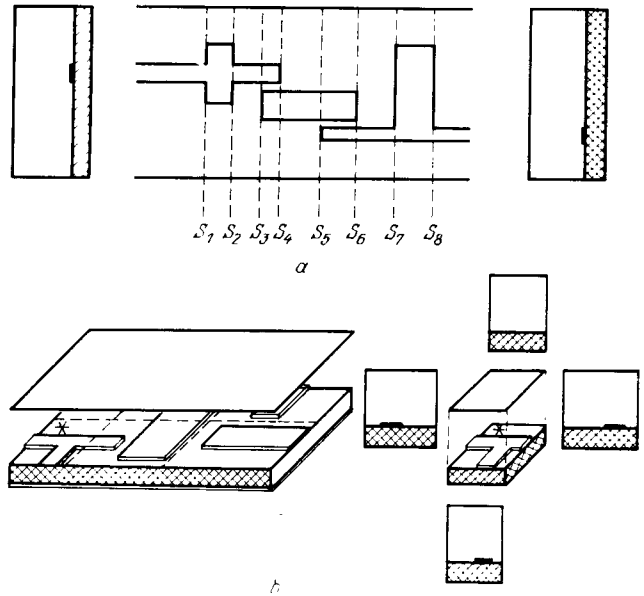


Рис. 13.8

своими матрицами рассеяния; поперечные сечения виртуальных волноводов, по отношению к которым вводится матрица рассеяния для элемента *, показаны. Общий подход здесь тот же, что и в методе АМБ. Однако построить математические модели отдельных автономных блоков гораздо сложнее; здесь можно, например, сформулировать и алгоритмизировать интегральные уравнения адмитансного и импедансного типа (см. п. 12.3.3).

Из многочисленных примеров математического моделирования нерегулярных элементов планарных структур на основе линейной декомпозиции [1]) рассмотрим два. На рис. 13.9 показаны результаты, относящиеся к возбуждению полоскового резонатора щелевой линией (отрезок структуры представляет собой полосково-щелевую линию, рис. 7.29*е*). Размеры указаны в миллиметрах; для подложки $\varepsilon = 9$. Показано, как модуль коэффициента отражения основной волны щелевой линии $|S_{11}^{11}|$ меняется с длиной полоскового элемента. Данные получены для частоты $f = 10$ ГГц. Отмечена длина l,

[1]) В. В. Никольский, Т. И. Никольская // Изв. вузов. Радиофизика.— 1981.— № 12.— С. 1423—1458; препринт/ИРЭ АН СССР.— М., 1984.— № 19 (391).— 71 с.

равная кратному числу половины длины основной волны полосково-щелевого типа полосково-щелевой линии ($\Lambda/2$). Как видно, резонансы имеют место при близких значениях l. Отметим, что при моделировании регулярной щелевой и полосково-щелевой линий в представлениях типа (12.51), (12.53) было около 110 членов; в суммах типа

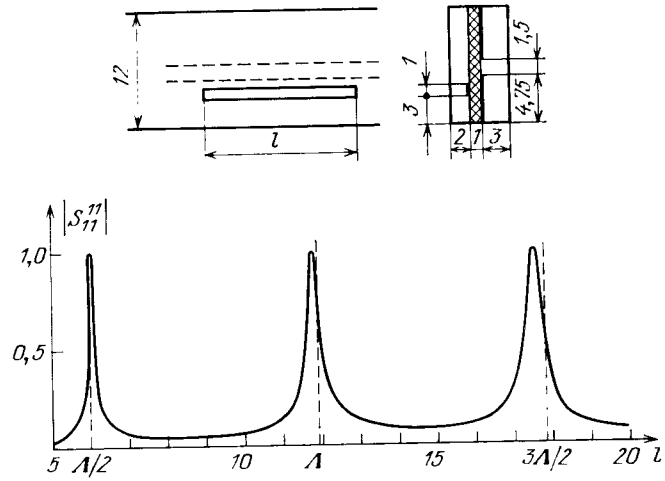


Рис. 13.9

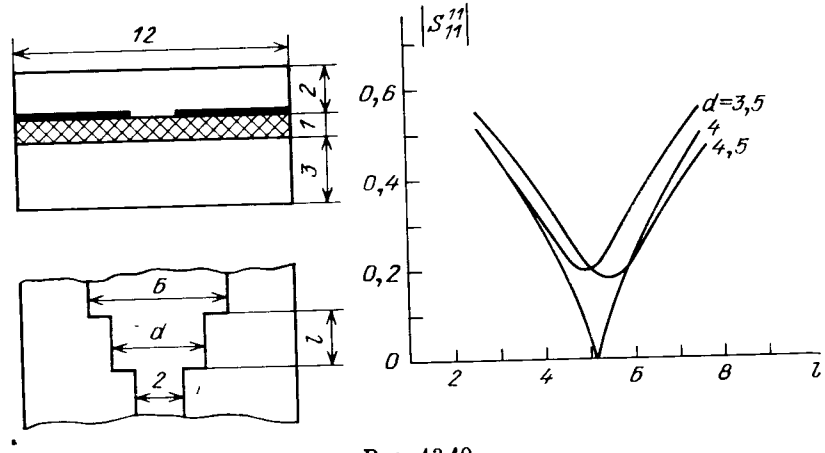


Рис. 13.10

(12.57) — одиннадцать (для щели) и семь (для полоски). При решении задачи дифракции учитывалось по семь собственных волн каждой структуры.

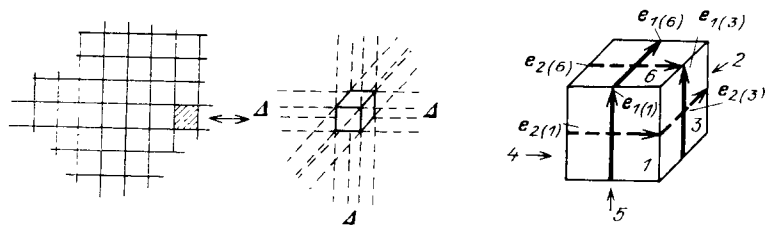
В качестве второго примера рассмотрим математическое моделирование так называемого согласующего трансформатора для волноводно-щелевых линий (рис. 13.10). Дан график изменения модуля коэффициента отражения основной волны узкой линии в зависимости от длины промежуточного отрезка l при разных значениях ширины его щели d; размеры в миллиметрах, $f = 11$ ГГц, для подложки $\varepsilon = 9$. В представлениях типа (12.53) было взято около 100 членов, а в суммах типа (12.57) — от 10 до 20. В трех щелевых линиях учитывалось от 6 до 15 собственных волн, однако результаты оказались очень близкими к одномодовым (учет только одной волны в каждой линии). Как видно из рис. 13.10, согласование ($|S_{11}^{11}| = 0$) достигается при $d = 4$ мм и $l = 5{,}08$ мм.

Интересно следующее. Если пользоваться упрощенным подходом, базирующимся на теории длинных линий, то согласование ожидается, когда длина среднего отрезка — четверть волны, а его волновое сопротивление $W_л$ есть среднее геометрическое волновых сопротивлений согласуемых линий. Расчеты показали, что четверть волны в средней линии составляет 5,0806 м. При этом волновые сопротивления трех линий, получаемые по формуле (7.134), равны: $W_{л1} = 206{,}4675$ Ом, $W_{л2} = 384{,}2857$ Ом и $W_{л3} = 711{,}2656$ Ом, так что $(W_{л1}W_{л3})^{1/2} = 383{,}2143$ Ом $\approx W_{л2}$. Таким образом, в данном случае, элементарная теория оказывается удовлетворительной.

13.2.3. Метод минимальных автономных блоков. На основе декомпозиционного подхода был разработан новый дискретизационный метод [И.10]. Он был построен специально для задач электродинамики (что, разумеется, не несет каких-то специфических ограничений). Как в методе конечных элементов (см. п. 13.1.3), в данном случае строится система элементарных подобластей. Однако в отличие от него поле внутри этих подобластей, называемых *минимальными автономными блоками* (МАБ), точно удовлетворяет уравнениям Максвелла, так что требуется только сшить представления решения на границах соседних подобластей. В этом смысле метод конечных элементов и метод МАБ соотносятся как процессы Бубнова — Галеркина и Трефтца. Но этим вопрос не исчерпывается. В методе МАБ каждая элементарная подобласть выступает как независимая электродинамическая система; она описывается своей матрицей рассеяния, известной заранее, независимо от того, в какой конкретной структуре эта подобласть выделена. Это автономный блок. Минимальным он называется потому, что минимизирован базис, в котором представляется граничное поле.

Поясним сказанное. Однородную область некоторой электродинамической структуры можно разбить на малые кубические объемы (или параллелепипеды), как показано на рис. 13.11*а*. Отдельный куб мы вправе рассматривать как среднюю часть соединения шести условных (виртуальных) волноводов (рис. 13.11*б*), по отношению к которым он характеризуется многомодовой матрицей рассеяния. Чем меньше кубические объемы, тем с бо́льшим основанием можно

считать электромагнитное поле однородным на каждой грани (но, конечно, его направление произвольно). При соединении всех кубических объемов виртуальные волноводы имеют бесконечно малую длину, поэтому их природа условна. Если все такие волноводы взять с периодическими граничными условиями на оболочке, то, как нетрудно убедиться, в спектре собственных волн будут присутствовать



а *б* *в*

Рис. 13.11

две однородные T-волны ортогональных поляризаций. Этих двух волн достаточно для представления любого однородного тангенциального поля, а следовательно, малый однородный куб описывается всего лишь двухмодовой шестиканальной матрицей рассеяния (две волны в каждом канале, соответствующем грани). Чем меньше размеры куба, тем данное описание будет все более точным при дискретизации любой электромагнитной структуры.

Матрицы рассеяния различных МАБ (не только кубических и не только для случая изотропной среды) известны [И.10]. Применение метода МАБ сводится к использованию рекомпозиционных формул (13.19) и еще нескольких стандартных действий. В отличие от других дискретизационных методов (см. § 13.1) — в силу декомпозиционного характера — метод МАБ не требует формулирования системы алгебраических уравнений, отвечающей структуре в целом. Выпишем без вывода матрицу рассеяния кубического МАБ в случае изотропной среды:

$$S = \left(\begin{array}{cccccc:cccccc}
0 & \alpha & \beta & \beta & \beta & -\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\alpha & 0 & \beta & \beta & -\beta & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\beta & \beta & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta & \beta \\
\beta & \beta & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & -\beta \\
\beta & -\beta & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & \beta & \beta & 0 & 0 \\
-\beta & \beta & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & \beta & \beta & 0 & 0 \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & -\beta & \beta & \beta & \beta \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & \beta & -\beta & \beta & \beta \\
0 & 0 & 0 & 0 & \beta & \beta & -\beta & \beta & 0 & \alpha & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \beta & \beta & \beta & -\beta & \alpha & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\beta & \beta & 0 & 0 & \beta & \beta & 0 & 0 & 0 & \alpha \\
0 & 0 & \beta & -\beta & 0 & 0 & \beta & \beta & 0 & 0 & \alpha & 0
\end{array}\right), \qquad (13.21)$$

где

$$\alpha = \frac{1 - I^2}{T - I^2}, \quad \beta = i\frac{I^2}{T - I^2}\frac{k\Delta}{2}, \quad I = \frac{2}{k\Delta}\sin\frac{k\Delta}{2}, \quad T = e^{ik\Delta},$$

Δ — длина ребра куба, $k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}$. Нумерация позиций в (13.21) соответствует нумерации граней кубического МАБ (рис. 13.11*в*),

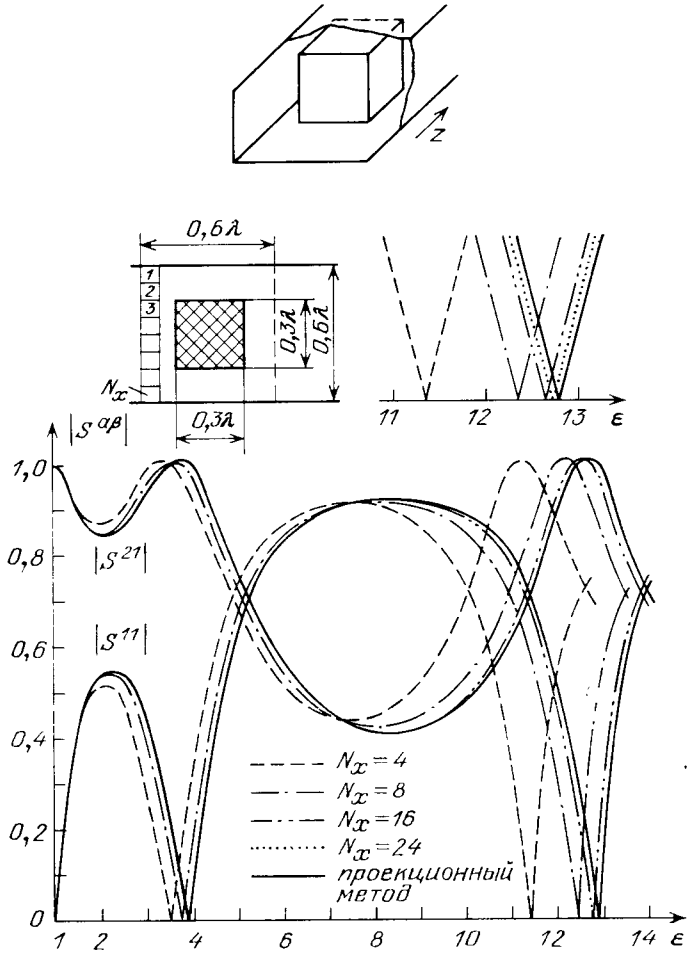


Рис. 13.12

причем сначала перечисляются волны первой, а затем — второй поляризации: сплошные и штриховые линии векторов $\mathbf{e}_{p(i)}$ ($p = 1, 2$; $i = 1, 2, \ldots, 6$).

Для двумерных задач вместо (13.21) получается матрица рассеяния только четвертого порядка.

Приведем лишь один пример применения метода МАБ [И.10] (из первой публикации по реализации метода, 1977 г.). Рассматривается дифракция основной волны H_{10} прямоугольного волновода на диэлектрическом параллелепипеде полной высоты (рис. 13.12), проницаемость которого варьировалась. Количество МАБ менялось в значительных пределах. Интересно, что даже всего при четырех МАБ в поперечном сечении волновода ($N_x = 4$) получаемые результаты сохраняют смысл, что было бы невозможно, например, в случае применения конечно-разностного метода. При $N_x > 16$ МАБ-модель и высокого порядка проекционная модель дают практически одинаковые результаты.

13.2.4. Системы автоматизированного проектирования устройств СВЧ. В современной практике математические модели электродинамических объектов, например, устройств техники СВЧ, объединяются в специально организованные системы взаимодействующих ЭВМ-программ. Так строятся *системы автоматизированного проектирования* (САПР) устройств СВЧ [И.11].

Существующие САПР устройств СВЧ в значительной степени используют различные упрощенные эвристические средства моделирования, но по мере развития ЭВМ все большее практическое значение приобретают строгие электродинамические методы моделирования.

В САПР неизбежно применение принципа декомпозиции сложного объекта на относительно простые автономные блоки. Блоки эти унифицируются и называются *базовыми элементами* (БЭ). Ядро САПР составляет *библиотека базовых элементов* (ББ), т. е. совокупность программ, реализующих их математические модели (а также выполняющих некоторые иные функции). Модель сложного устройства в целом формируется *компилятором рекомпозиции* (КР). Основная роль этой программы — нахождение матрицы рассеяния устройства в целом по матрицам рассеяния базовых элементов, потенциально содержащихся в ББ.

Схема, поясняющая функционирование САПР устройств СВЧ, показана на рис. 13.13. Ввод исходной информации осуществляется при помощи *формализованного задания* (ФЗ), которое составляется на специальном проблемно-ориентированном языке, т. е. посредством системы символов, разработанной для данной САПР. Обычно при этом считаются известными общая структура и состав БЭ проектируемого объекта. Не определены только их параметры, т. е. геометрические размеры, параметры сред и т. п. Исходная разработка структуры проектируемого устройства, называемая *структурным синтезом*, как правило, еще не может быть автоматизирована. В ФЗ содержится также ряд директив, определяющих режим проектирования, включая выбор параметров программ БЭ (например, объемы базисов для проекционных моделей и типы разбиения областей, построение сеток и т. п.— для дискретизационных).

САПР предусматривает и отказ от моделирования, когда параметры структуры известны заранее и введены посредством ФЗ. Тогда входная информация отсылается в систему проектирования конструкции (ПК); последняя производит автоматизированный выпуск

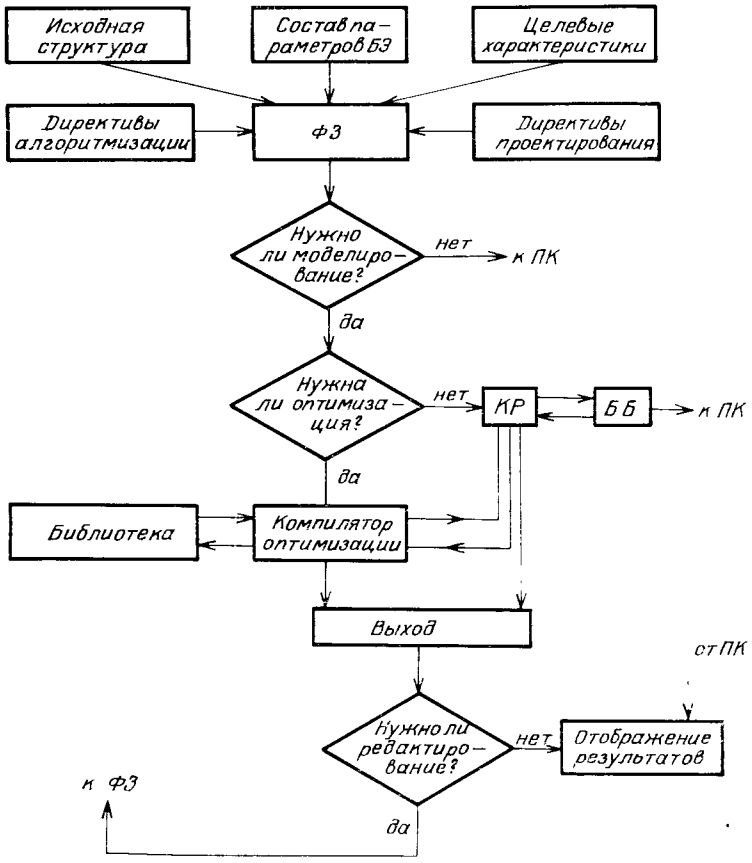


Рис. 13.13

чертежей или, например, такой технологически ориентированной информации, которая непосредственно используется для управления производственным процессом; изготовляются, например, фотошаблоны для ИС СВЧ.

В режиме анализа данные ФЗ поступают в КР. Эта программа при информационном обмене с ББ формирует математическую модель исходного объекта. Вычисляются и выводятся для контроля необходимые технические характеристики, например, частотные зависимости элементов матрицы рассеяния. Если они оказываются неудовлетворительными, то производится редактирование ФЗ, после

чего анализ повторяется. Такой процесс называют *режимом диалога* с системой, а также *эвристическим синтезом* объекта. Проектирование завершается обращением к ПК.

В ряде случаев возможен полностью автоматизированный синтез на основе использования включенных в САПР алгоритмов оптимизации. Тогда исходными данными являются целевые характеристики, содержащиеся в ФЗ. При помощи направленного поиска на множестве решений задачи анализа объекта синтезируется оптимальная конструкция: выработанная информация отсылается в ПК для воспроизведения.

На современном уровне режим автоматизированного синтеза реализуется только при весьма упрощенном моделировании; при этом может оказаться приемлемым требуемое машинное время. Что касается режима диалога, то его привлекательность состоит в возможности использовать неформализуемый опыт инженера.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Объяснить, почему в представлении поля типа (12.1) коэффициенты при $\mathbf{E}_n$ и $\mathbf{H}_n$ обязательно одинаковы, а в (12.2) — различны?

2. Объяснить различие проекционных и дискретизационных методов. Почему метод МАБ является и дискретизационным, и проекционным?

3. Внутрь прямоугольного резонатора помещен диэлектрический параллелепипед (рис. 13.14*а*). Выписать элементы матриц $\hat{Э}$, $\hat{M}$ и $\hat{\Omega}$ в (12.24) и тем

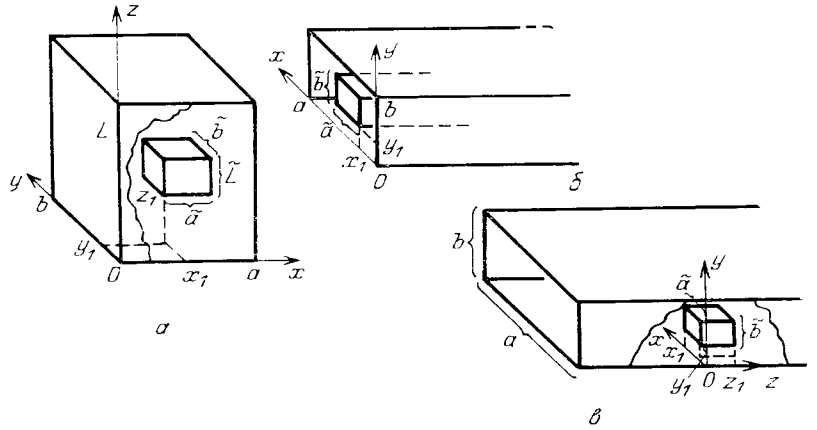


Рис. 13.14

самым подготовить для программирования задачу о собственных колебаниях резонатора с диэлектрическим телом.

4. Выполнить аналогичные действия в случае задачи о регулярном волноводе с диэлектрическим стержнем (рис. 13.14*б*) с целью алгоритмизации задачи о собственных волнах такого волновода.

5. Подготовить для программирования задачу о нахождении матрицы Y (и затем S) в случае волновода с диэлектрическим включением, показанного на рис. 13.14*в*.

6. Подготовить для программирования одну из задач о волноводных диафрагмах, показанных на рис. 13.15*а, б*.

7. При помощи рекомпозиционных формул найти матрицу рассеяния в следующих случаях: а) прямоугольный волновод на некотором участке заполнен

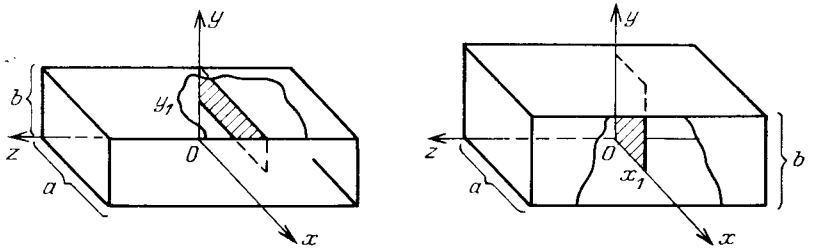


Рис. 13.15

диэлектриком (между плоскостями $z = 0$ и $z = l$); б) тот же волновод перегорожен идеально проводящей плоскостью, матрица рассеяния находится на расстоянии l от перегородки.

ЧАСТЬ 5

ОСОБЕННОСТИ ПОЛЕЙ В РАЗЛИЧНЫХ СРЕДАХ. РАДИОВОЛНЫ В ПРИРОДНЫХ УСЛОВИЯХ

Глава 14

ПОЛЯ И ЗАРЯЖЕННЫЕ ЧАСТИЦЫ. МОДЕЛИ СРЕД

§ 14.1. Стационарные поля

14.1.1. Электростатическая модель диэлектрика (А). В п. 1.3.2 было дано общее представление о процессах поляризации и намагничивания. Напомним, что взаимодействие электромагнитного поля с веществом в макроскопической электродинамике определяет различие векторов **D** и **E**, **B** и **H**. Оно характеризуется существованием векторов поляризованности и намагниченности **P** и **M**, входящих в соотношения (1.70).

Микроскопические процессы в веществе сложны и разнообразны. Разумеется, они требуют трактовки с позиций квантовой физики. Но и классические представления сохраняют ценность для понимания основных черт этих процессов.

С точки зрения электростатики, поляризация диэлектрика есть изменение состояния некоторой системы диполей; в п. 2.2.4 такая концепция уже обсуждалась на простом примере. Вернемся к электростатической модели диэлектрика.

Заряды внутри атомов (ионов) и молекул, которые не могут перемещаться на макроскопически заметные расстояния, называются *связанными*. Поскольку в электростатике входят в рассмотрение только идеальные (лишенные электропроводности) диэлектрики, то можно сказать, что они представляют собой электрически нейтральные (см. п. 2.2.1) системы связанных зарядов. Молекулы некоторых типов в силу симметрии распределения заряда не обладают дипольным моментом в отсутствие внешнего электрического поля, но под влиянием поля приобретают его; это схематически пояснено на рис. 14.1*а*. Диэлектрик в таком случае называют *неполярным*. В отличие от этого каждая молекула *полярного* диэлектрика с самого начала обладает некоторым моментом $\mathbf{p}_0$. При этом во внешнем электростатическом поле — гораздо легче, чем деформация — происходит переориентация молекул (рис. 14.1*б*). В обоих случаях результирующий момент молекулы есть

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \Delta\mathbf{p}, \tag{14.1}$$

где $\Delta\mathbf{p} \| \mathbf{E}$, но $\mathbf{p}_0 \neq 0$ только в случае полярного диэлектрика. В практически широких пределах дополнительный дипольный момент $\Delta\mathbf{p}$

пропорционален напряженности внешнего поля, т. е. $\Delta\mathbf{p} = \alpha\mathbf{E}$. Поэтому говорят, что деформирующая или ориентирующая сила поля уравновешивается как бы силой упругости. Таким образом, содержащиеся в макроскопической области ΔV молекулы будем рассматривать как систему диполей, которая обладает моментом

$$\mathbf{p}_{\Delta V} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_{0i} + N\alpha\mathbf{E} = N\alpha\mathbf{E}, \qquad (14.2)$$

где N — число молекул. Здесь предполагается, что в случае полярного диэлектрика сумма начальных моментов $\mathbf{p}_{0i}$ обращается в нуль в силу хаотичности ориентации молекул.

Относя момент $\mathbf{p}_{\Delta V}$ к объему ΔV и переходя к пределу (при известных допущениях, см. п. 1.1.1), получим *плотность электрического момента* поляризованного диэлектрика в некоторой точке:

$$\breve{\mathbf{P}} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\mathbf{p}_{\Delta V}}{\Delta V} = \alpha N' \mathbf{E}, \qquad (14.3)$$

где $N' = dN/dV$ есть количество молекул в единице объема.

Какой смысл имеет вектор $\breve{\mathbf{P}}$ (14.3)? Обратимся к п. 2.2.4. Там на простом примере было показано, что плотность электрического

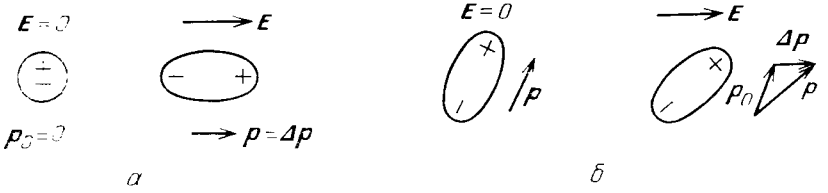


Рис. 14.1

момента есть вектор электрической поляризации P (2.61). Таким образом, $\breve{\mathbf{P}} = \mathbf{P}$. Сопоставляя (14.3) и (1.72), видим, что $\chi^3 = \alpha N'/\varepsilon_0$.

Можно также получить

$$\operatorname{div}\mathbf{P} = -\rho_{\text{св}}, \qquad (14.4)$$

где $\rho_{\text{св}}$ — плотность связанных зарядов диэлектрика.

Дополним рассуждения из п. 2.2.4 следующим более общим анализом.

ВЫВОД. Пусть в однородный диэлектрик, относительная проницаемость которого есть ε, внесено некоторое распределение заряда с плотностью ρ. Воспользовавшись формулой (2.28), мы можем вычислить электростатический потенциал в произвольной точке $M(\mathbf{r})$:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dv'. \qquad (14.5)$$

Но $\varphi(\mathbf{r})$ можно найти и другим путем. Рассматривая диэлектрик как систему связанных зарядов в вакууме, запишем:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_0(\mathbf{r}) + \varphi_{\text{д}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dv' + \varphi_{\text{д}}(\mathbf{r}), \qquad (14.6)$$

где $\varphi_0(\mathbf{r})$ — потенциал, создаваемый заданным распределением заряда в вакууме, а $\varphi_{\text{д}}(\mathbf{r})$ — потенциал системы диполей.

При вычислении $\varphi_{\text{д}}(\mathbf{r})$ учтем, что согласно (14.3) каждый элемент среды $\Delta V'$ обладает моментом $\mathbf{p}' = \breve{\mathbf{P}}(\mathbf{r}')\Delta V'$ и создает потенциал $\Delta\varphi_{\text{д}}(\mathbf{r})$, который легко определить, отправляясь от формулы (2.46). В последней надо лишь учесть перенос начала координат в точку $Q(\mathbf{r}')$. Запишем:

$$\Delta\varphi_{\text{д}}(\mathbf{r}) = \frac{\breve{\mathbf{P}}(\mathbf{r}')\,\mathbf{r}_{0q}}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\Delta V'$$

и, далее,

$$\varphi_{\text{д}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\breve{\mathbf{P}}(\mathbf{r}')\,\mathbf{r}_{0q}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\,dv'. \qquad (14.7)$$

Здесь, как и в (14.5) и (14.6), интегрирование распространяется на всю среду.

Подынтегральное выражение в (14.7) преобразуем при помощи формулы (1.25), учитывая, что

$$\frac{\mathbf{r}_{0q}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} = \operatorname{grad}'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

(равенство следует из (1.28) и (2.2)). Затем применяется теорема Остроградского — Гаусса (1.33). Таким образом, имеем

$$\varphi_{\text{д}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\oint_S \frac{\breve{\mathbf{P}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,ds' - \int_V \frac{\operatorname{div}'\breve{\mathbf{P}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dv'\right]. \qquad (14.8)$$

А поскольку поверхность S здесь надо рассматривать как отнесенную в бесконечность границу (которую удобно считать сферической), то поверхностный интеграл обращается в нуль (см. § 2.4). В результате из (14.6) и (14.8) получаем

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') - \operatorname{div}'\breve{\mathbf{P}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dv'. \qquad (14.9)$$

Теперь можно сопоставить два различных представления одного и того же потенциала (14.5) и (14.9). Мы видим, что

$$\rho/\varepsilon = \rho - \operatorname{div}\breve{\mathbf{P}}.$$

Привлекая (1.51), (1.67) и (1.70), получаем

$$\operatorname{div}\mathbf{P} = \operatorname{div}\breve{\mathbf{P}}. \qquad (14.10)$$

Это значит, что плотность электрического момента поляризованного диэлектрика $\tilde{\mathbf{P}}$ и поляризованность (электрическая поляризация) $\mathbf{P}$, введенная в п. 1.3.2, совпадают с точностью до аддитивной соленоидальной величины, которая несущественна. Мы отождествляем $\tilde{\mathbf{P}}$ и $\mathbf{P}$.

Наконец, отметим, что по смыслу выражения потенциала (2.28) величину $\rho - \operatorname{div}\mathbf{P}$, стоящую в числителе подынтегрального выражения (14.9), надо истолковать как плотность полного заряда в вакууме. Кроме заданного заряда, распределенного с плотностью ρ, там имеются еще связанные заряды дипольной модели диэлектрика, которым припишем плотность $\rho_{св}$. Как видно, эта величина равна $-\operatorname{div}\mathbf{P}$, что приводит к формуле (14.4). ■

В заключение отметим, что для (14.4) интегральным аналогом является равенство

$$\oint_S \mathbf{P}\,d\mathbf{s} = -q_{св} \tag{14.11}$$

(см. вывод (1.55) из (1.51) в п. 1.2.1). Пусть S в (14.11) — поверхность некоторого диэлектрического тела V, расположенного в вакууме, так что вне этого объема $\mathbf{P} = 0$ и $\rho_{св} = 0$. Тогда из (14.11) следует

$$\mathbf{P}\mathbf{v}_0 = -\xi_{св}. \tag{14.12}$$

Действительно, надо лишь повторить вывод граничного условия (1.83) из (1.55). Напомним, что соотношение (14.12) ранее уже было получено в частном варианте в виде формулы (2.60).

14.1.2. Движение частиц в стационарных полях (А). Согласно законам классической механики ускорение $d^2\mathbf{r}/dt^2$ материальной точки с массой m под действием силы $\mathbf{F}$ есть $\mathbf{F}/m$. Таким образом, для частицы с зарядом q согласно (1.45) можно написать следующее уравнение движения в электромагнитном поле:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{q}{m}\left\{\mathbf{E} + \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \mathbf{B}\right]\right\}. \tag{14.13}$$

Уравнение сохраняет смысл при относительно малых, нерелятивистских скоростях ($|d\mathbf{r}/dt| \ll c$). Вообще говоря, уравнение движения (14.13) следует рассматривать вместе с уравнениями Максвелла, так как поле, действующее на частицу, само зависит от ее движения: соответствующий сторонний ток возбуждает поле.

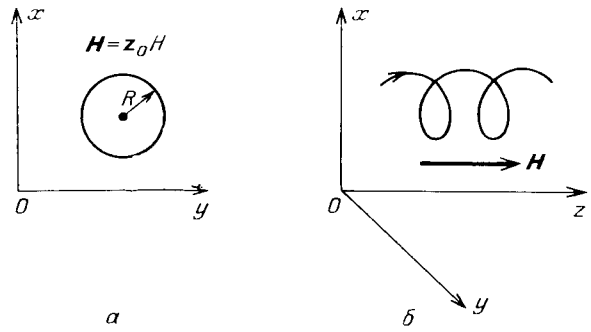
Пользуясь уравнением (14.13), легко анализировать движение частиц в приближении заданного стационарного поля, что является допустимым при нерелятивистских скоростях. Можно, например, рассматривать движение в электрическом поле ($\mathbf{B} = 0$) или магнитном ($\mathbf{E} = 0$).

Пример 1. Пусть $\mathbf{E} = 0$ и $\mathbf{B} = \mathbf{z}_0\mu_0 H$, а начальное положение и скорость частицы характеризуются векторами $\mathbf{r}(0)$ и $\mathbf{r}'(0)$.

Учитывая заданные условия в правой части (14.13), перепишем это уравнение в координатной форме:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu_0\frac{q}{m}H\frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \mu_0\frac{q}{m}H\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0. \tag{14.14}$$

Из первых двух уравнений (14.14) исключаем компоненты скорости $r'_x = dx/dt$



а *б*

Рис. 14.2

и (в другом варианте) $r'_y = dy/dt$. При этом получаются следующие два уравнения второго порядка относительно r'_x и r'_y:

$$\frac{d^2r'_x}{dt^2} + \Omega^2 r'_x = 0, \qquad \frac{d^2r'_y}{dt^2} + \Omega^2 r'_y = 0. \tag{14.15}$$

Здесь введено обозначение:

$$\Omega = \mu_0\frac{q}{m}H. \tag{14.16}$$

Как известно, общие решения уравнений (14.15) имеют вид

$$r'_x = A\cos\Omega t + B\sin\Omega t, \qquad r'_y = C\cos\Omega t + D\sin\Omega t. \tag{14.17}$$

При подстановке (14.17) в (14.14) выясняется, что $C = B$ и $D = -A$, а из (14.17): $A = r'_x(0)$ и $C = r'_y(0)$. Поэтому придадим решениям (14.17) следующую форму:

$$\frac{dx}{dt} = v_\perp\cos(\Omega t - \varphi_0), \qquad \frac{dy}{dt} = -v_\perp\sin(\Omega t - \varphi_0), \tag{14.18}$$

где $v_\perp = \sqrt{[r'_x(0)]^2 + [r'_y(0)]^2}$ — абсолютное значение скорости в плоскости $x0y$ и $\varphi_0 = \operatorname{arctg}[r'_y(0)/r'_x(0)]$.

В результате интегрирования (14.18), а также третьего уравнения из (14.14) получаем

$$x = \frac{v_\perp}{\Omega}\sin(\Omega t - \varphi_0) + \frac{v_\perp}{\Omega}\sin\varphi_0 + x(0) \tag{14.19}$$

$$y = \frac{v_\perp}{\Omega}\cos(\Omega t - \varphi_0) - \frac{v_\perp}{\Omega}\cos\varphi_0 + y(0) \qquad z = r'_z(0)\,t + z(0), \quad \text{где } r'_z = dz/dt.$$

Из первых двух уравнений (14.19) легко получить

$$\left[x - \frac{v_\perp}{\Omega}\sin\varphi_0 - x(0)\right]^2 + \left[y + \frac{v_\perp}{\Omega}\cos\varphi_0 - y(0)\right]^2 = \left(\frac{v_\perp}{\Omega}\right)^2. \qquad (14.20)$$

Это уравнение *окружности* радиуса $R = v_\perp/\Omega$. Если $r_z'(0) = 0$, то частица движется в плоскости $z = z(0)$ по данной окружности с круговой частотой Ω (14.16), как показано на рис. 14.2*а*. Если же $r_z'(0) \neq 0$, то это будет движение по *винтовой линии* (рис. 14.2*б*). ■

Итак, под влиянием лоренцевой силы заряженные частицы «закручиваются» постоянным магнитным полем в перпендикулярной ему плоскости. Далее, наряду с магнитным полем введем в рассмотрение постоянное электрическое поле.

Пример 2. Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{y}_0 E$ и $\mathbf{B} = z_0\mu_0 H$; как и раньше, начальные условия заданы векторами $\mathbf{r}(0)$ и $\mathbf{r}'(0)$.

Теперь вместо (14.14) имеем

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \Omega\frac{dy}{dt} = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \Omega\frac{dx}{dt} - \frac{q}{m}E = 0, \qquad (14.21)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0,$$

где использовано обозначение (14.16). Исключая $r_y' = dy/dt$, получаем относительно $r_x' = dx/dt$

$$\frac{d^2r_x'}{dt^2} + \Omega^2 r_x' = \Omega\frac{q}{m}E. \qquad (14.22)$$

Отсюда

$$r_x' = A\cos\Omega t + B\sin\Omega t + \frac{1}{\Omega}\frac{q}{m}E \qquad (14.23)$$

(правая часть построена как сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного). Привлекая первое и третье уравнения из (14.21), находим

$$r_y' = -A\sin\Omega t + B\cos\Omega t, \quad r_z' \equiv dz/dt = r_z'(0). \qquad (14.24)$$

Интегрирование уравнений (14.23) и (14.24) дает [1])

$$x = \frac{v_\perp}{\Omega}\sin(\Omega t - \varphi_0) + \frac{v_\perp}{\Omega}\sin\varphi_0 + \frac{E}{\mu_0 H}t + x(0),$$

$$y = \frac{v_\perp}{\Omega}\cos(\Omega t - \varphi_0) - \frac{v_\perp}{\Omega}\cos\varphi_0 + y(0), \qquad (14.25)$$

$$z = r_z'(0)\,t + z(0).$$

[1]) Здесь $v_\perp$ и φ_0 связаны с A и B, как в предыдущем примере (начальная скорость в плоскости $x0y$ есть $\mathbf{v}_\perp + \mathbf{x}_0 E/\mu_0 H$).

Вдоль оси z, как и в предыдущем примере, происходит лишь равномерное движение. Пусть $r_z'(0) = 0$. Рассматривая первые два уравнения (14.25), отметим, что это параметрические уравнения циклоиды. Движение в плоскости

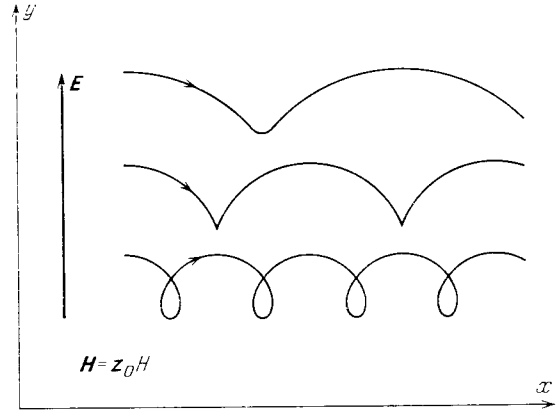


Рис. 14.3

$x0y$ совершается по *циклоиде* (рис. 14.3). Из 14.25) нетрудно получить:

$$\left[x - \frac{v_\perp}{\Omega}\sin\varphi_0 - x(0) - \frac{E}{\mu_0 H}t\right]^2 + \left[y + \frac{v_\perp}{\Omega}\cos\varphi_0 - y(0)\right]^2 = \left(\frac{v_\perp}{\Omega}\right)^2. \qquad (14.26)$$

Можно представить себе, что частица движется по окружности радиуса $R = v_\perp/\Omega$ с круговой скоростью Ω, но центр этой окружности смещается вдоль оси x с постоянной скоростью $E/\mu_0 H$. ■

14.1.3. Уравнение движения намагниченности (Б). Подобно тому как поляризованность $\mathbf{P}$ есть плотность электрического момента среды (см. п. 2.2.4 и п. 14.1.1), намагниченность $\mathbf{M}$ — плотность магнитного момента. Происхождение магнитного момента материальных частиц имеет простое классическое объяснение: орбитальные движения электронов в атомах и их спины можно истолковать как круговые токи, которые проявляют себя как магнитные диполи.

Напомним, что замкнутому току соответствует магнитный момент, определяемый формулой (2.98). Отождествляя в (2.98) и (1.48) орты $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{z}_0$, получаем следующее выражение момента силы $\mathbf{K}$, действующего на магнитный диполь в поле $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{K} = [\mathbf{m}, \mathbf{H}]. \qquad (14.27)$$

Для частицы, обладающей магнитным моментом $\mathbf{m}$, можно записать следующее соотношение

$$\mathbf{m} = \gamma\mathbf{L}, \qquad (14.28)$$

где $\mathbf{L}$ — момент количества движения, а γ — постоянная. В частности, для спина электрона $\gamma = -2{,}21 \cdot 10^5\ (А/м)^{-1}\ с^{-1}$. На основании

известного закона классической механики

$$\mathbf{K} = d\mathbf{L}/dt \tag{14.29}$$

с учетом (14.27), (14.28), получаем *уравнение движения магнитного момента* рассматриваемой частицы в поле $\mathbf{H}$ (рис. 14.4*а*)

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = \gamma\,[\mathbf{m}, \mathbf{H}]. \tag{14.30}$$

По своему смыслу вектор $d\mathbf{m}/dt$ должен быть направлен, как приращение $\Delta\mathbf{m} = \mathbf{m}(t+\Delta t) - \mathbf{m}(t)$ при $\Delta t \to 0$. Из (14.30) видно, что производная $d\mathbf{m}/dt$ перпендикулярна плоскости, в которой лежат векторы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{H}$. Поэтому каждое бесконечно малое приращение вектора $\mathbf{m}$ оказывается касательным к окружности, показанной на рис. 14.4*а*. Это значит, что при фиксированном начале конец магнитной стрелки $\mathbf{m}$ движется по данной окружности; подобным образом смещается ось волчка в гравитационном поле. Рассмотренное движение называется ***прецессией.***

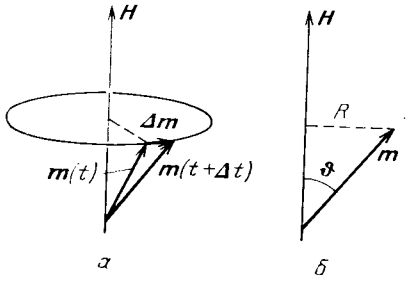


Рис. 14.4

Легко установить, что в этом движении длина вектора $\mathbf{m}$ не меняется. Действительно, из (14.30) имеем:

$$\mathbf{m}\frac{d\mathbf{m}}{dt} = \gamma\mathbf{m}\,[\mathbf{m}, \mathbf{H}] \equiv 0,$$

т. е.

$$d(\mathbf{m}^2)/dt = 0. \tag{14.31}$$

Постоянным остается угол ϑ (рис. 14.4*б*) и линейная скорость конца стрелки $v = |d\mathbf{m}/dt| = |\gamma\,[\mathbf{m}, \mathbf{H}]| = |\gamma m H \sin\vartheta|$. При этом абсолютное значение угловой скорости Ω есть $\Omega = v/R$, где $R = m\sin\vartheta$. Поэтому

$$\boldsymbol{\Omega} = -\gamma\mathbf{H}. \tag{14.32}$$

При $\gamma < 0$ направление вращения составляет правовинтовую систему с вектором $\mathbf{H}$.

От уравнения движения магнитного момента частицы (14.25) непосредственно переходим к уравнению движения намагниченности среды:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \gamma[\mathbf{M}, \mathbf{H}]. \tag{14.33}$$

При этом (ср. п. 14.1.1) вектор $\mathbf{M}$ отождествляется с $\widetilde{\mathbf{M}} = N'\mathbf{m}$.

На практике вместо (14.33) приходится использовать несколько более сложные уравнения, учитывающие также потери энергии в

среде. Широко известно *уравнение Ландау — Лифшица*

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \gamma\,[\mathbf{M}, \mathbf{H}] - \eta\mu_0\frac{1}{M^2}[\mathbf{M}, [\mathbf{M}, \mathbf{H}]], \tag{14.34}$$

содержащее по сравнению с (14.33) так называемый диссипативный член. Легко убедиться, что этот член влияет на амплитуду прецессии, не изменяя величины $\mathbf{M}$. Параметр $\eta > 0$ можно рассматривать, как экспериментально определяемый параметр среды.

§ 14.2. Гармонические колебания (А)

14.2.1. Простейшая модель плазмы. *Плазма*, т. е. ионизованный электрически нейтральный газ, в дальнейшем (гл. 15) будет интересовать нас как среда, в которой распространяются радиоволны. Пусть задано некоторое гармонически колеблющееся электромагнитное поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$. Предстоит описать плазму, введя в рассмотрение ее диэлектрическую проницаемость.

Плазма предстает как система электронов, ионов и нейтральных молекул; в первом приближении их соударения не учитываются. Под влиянием поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ все заряженные частицы совершают гармонические колебания. Поэтому наряду с комплексными амплитудами векторов поля $\dot{\mathbf{E}}_m$, $\dot{\mathbf{H}}_m$ будет также фигурировать комплексная амплитуда $\mathbf{r}_m$ смещения частицы. Движение частицы можно описать посредством уравнения (14.13), где лоренцевой силой пренебрегают, поскольку отношение $|[d\mathbf{r}/dt, \mathbf{B}]|$ к $\mathbf{E}$ равно v/c. В комплексных амплитудах это уравнение принимает вид:

$$-\omega^2\dot{\mathbf{r}}_m = \frac{q}{m}\dot{\mathbf{E}}_m. \tag{14.35}$$

Отсюда находится $\dot{\mathbf{r}}_m$.

Далее выразим комплексную амплитуду электрического момента $\dot{\mathbf{p}}_{m\Delta V}$ системы N различных частиц плазмы, находящихся в объеме ΔV. Воспользовавшись второй формулой (2.49) и следующим из (14.35) выражением $\dot{\mathbf{r}}_m$, пишем:

$$\dot{\mathbf{p}}_{m\Delta V} = \sum_{i=1}^{N} q_i\dot{\mathbf{r}}_{mi} = -\frac{\dot{\mathbf{E}}_m}{\omega^2}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i^2}{m_i}. \tag{14.36}$$

При этом допустимо сохранить только те члены суммы, которые соответствуют электронам: вклад отброшенных членов невелик из-за большой массы ионов. Все суммируемые члены оказываются одинаковыми, и мы получаем:

$$\dot{\mathbf{p}}_{m\Delta V} = -\frac{e^2 N_\ni}{\omega^2 m}\dot{\mathbf{E}}_m, \tag{14.37}$$

где m и e — масса и заряд электрона, а $N_э$ — число электронов в объеме ΔV.

Переходя к пределу, как в (14.3), найдем комплексную амплитуду вектора поляризованности среды:

$$\dot{\mathbf{P}}_m = -\frac{e^2N'}{\omega^2 m}\dot{\mathbf{E}}_m, \tag{14.38}$$

где N' — число электронов в единице объема. Теперь на основании (1.72) и (1.73) сразу находим электрическую восприимчивость $\chi^э$ и относительную диэлектрическую проницаемость ε плазмы:

$$\chi^э = -e^2N'/\varepsilon_0\omega^2 m,\ \varepsilon = 1 - e^2N'/\varepsilon_0\omega^2 m. \tag{14.39}$$

Нередко пишут также:

$$\varepsilon = 1 - (\omega_p/\omega)^2, \tag{14.40}$$

где $\omega_p = |e|\sqrt{N'/\varepsilon_0 m}$ называется *плазменной частотой*, или

$$\varepsilon = 1 - 80{,}6N'/f^2. \tag{14.41}$$

В последней формуле частота f выражена в герцах, если N' — количество электронов, приходящихся на 1 $м^3$ (либо f измеряется в $кГц$, а число электронов берется в 1 $см^3$).

Мы видим, что в построенной модели плазмы диэлектрическая проницаемость вещественна. Следовательно, рассмотренная система колеблющихся частиц в среднем не отбирает энергии поля. Примечательно, что ε может быть отрицательной величиной.

14.2.2. Поглощающая плазма. Произведем уточнение построенной модели плазмы. При столкновении электронов с нейтральными молекулами и ионами происходит, можно сказать, потеря импульса электронами. Это вызывает поглощение энергии электромагнитного поля. Будем считать, что электрон, движущийся со скоростью $d\mathbf{r}/dt$, полностью передает при столкновении свой импульс $md\mathbf{r}/dt$ некоторой массивной частице. Если среднее число соударений электронов с тяжелыми частицами за единицу времени есть ν, то в уравнение (14.13) надо ввести дополнительный член $\nu m\, d\mathbf{r}/dt$, посредством которого учитывается соответствующее изменение импульса в единицу времени. Поэтому в комплексных амплитудах вместо (14.35) теперь будем иметь:

$$-\omega^2\dot{\mathbf{r}}_m + i\omega\nu\dot{\mathbf{r}}_m = \frac{q}{m}\dot{\mathbf{E}}_m. \tag{14.42}$$

Определяя прежним способом поляризованность среды, выразим $\mathbf{r}_m$ не из (14.35), а из (14.42). Это дает:

$$\dot{\mathbf{P}}_m = -\frac{e^2N'}{\omega m}\frac{1}{\omega - i\nu}\dot{\mathbf{E}}_m. \tag{14.43}$$

Таким образом, вместо (14.39) теперь:

$$\chi^э = -\frac{e^2N'}{\varepsilon_0\omega m}\frac{1}{\omega - i\nu},\quad \varepsilon = 1 - \frac{e^2N'}{\varepsilon_0\omega m}\frac{1}{\omega - i\nu}. \tag{14.44}$$

Из (14.44) следует, что комплексная диэлектрическая проницаемость плазмы $\varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon''$ имеет следующие действительную и мнимую части:

$$\varepsilon' = 1 - \frac{e^2N'}{\varepsilon_0 m(\omega^2 + \nu^2)},\qquad \varepsilon'' = \frac{e^2N'\nu}{\varepsilon_0 m\omega(\omega^2 + \nu^2)}. \tag{14.45}$$

Поскольку $\varepsilon'' > 0$, то среда, действительно, является поглощающей. Можно положить $\varepsilon'' = \sigma/\omega\varepsilon_0$ (ср. (3.33)) и выразить проводимость плазмы:

$$\sigma = e^2N'\nu/m(\omega^2 + \nu^2). \tag{14.46}$$

14.2.3. Модель диэлектрика. Напоминаем, что при обсуждении статической модели диэлектрика (см. п. 14.1.1) связанные заряды рассматривались как частицы, на которые действует не только поле, но и пропорциональная смещению «восстанавливающая» сила, подобная силе упругости. Действие ее на частицу можно учесть, введя в правую часть уравнения (14.13) член $-\beta\mathbf{r}/m$, где $\beta > 0$. Переходя к уравнению (14.42), перенесем соответствующую комплексную амплитуду $-\beta\dot{\mathbf{r}}_m/m$ в левую часть равенства:

$$-\omega^2\dot{\mathbf{r}}_m + i\omega\nu\dot{\mathbf{r}}_m + \frac{\beta}{m}\dot{\mathbf{r}}_m = \frac{q}{m}\dot{\mathbf{E}}_m. \tag{14.47}$$

Полученное уравнение лежит в основе модели неполярного диэлектрика. Параметр ν в данном случае, разумеется, уже не имеет смысла частоты соударений электрона с тяжелыми частицами. Однако и при рассмотрении поляризации диэлектрика введение члена, пропорционального скорости, необходимо: он описывает некоторое условное «трение», ведущее к потере энергии.

Из (14.47) получим комплексную амплитуду смещения $\dot{\mathbf{r}}_m$ и, как в пп. 14.2.1, 14.2.2, перейдем к выражению поляризованности:

$$\dot{\mathbf{P}}_m = -\frac{e^2N'}{m}\frac{1}{\omega^2 - \beta/m - i\omega\nu}\dot{\mathbf{E}}_m. \tag{14.48}$$

Отсюда согласно (1.72), (1.73):

$$\chi^э = -\frac{e^2N'}{\varepsilon_0 m}\frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 - i\omega\nu},\qquad \varepsilon = 1 - \frac{e^2N'/\varepsilon_0 m}{\omega^2 - \omega_0^2 - i\omega\nu}, \tag{14.49}$$

где введено обозначение $\omega_0^2 = \beta/m$.

Существенной особенностью построенной динамической модели диэлектрика является ее резонансный характер. Очевидно, ω_0 есть собственная частота среды. Резонанс наблюдается при совпадении

частоты электромагнитного процесса ω с ω_0. На рис. 14.5 показаны кривые, построенные на основании (14.49). Это *кривая дисперсии*, отображающая частотную зависимость $\varepsilon'(\omega)-1$, и *кривая абсорбции* (поглощения), которая отображает функцию $\varepsilon''(\omega)$. Под *нормальной дисперсией* понимают возрастание ε' с частотой. В области резонанса — между максимумом и минимумом функции $\varepsilon'(\omega)$ — лежит участок *аномальной дисперсии*.

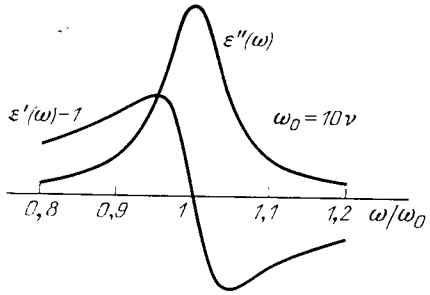


Рис. 14.5

Рассмотренная модель является весьма упрощенной. Однако в случае газов (при малой плотности частиц), когда взаимодействие диполей еще существенно не меняет среднюю действующую силу, она более удовлетворительна; заметим, что e в (14.49) это, вообще говоря, не заряд электрона. Ввиду ограниченности классических представлений модель выявляет только одну резонансную частоту среды. В действительности каждая молекула среды — система с бесконечным спектром собственных частот; с позиций квантовой физики модель диэлектрика может быть уточнена.

В заключение заметим, что выражение χ^3 (14.49) по своей сути сходно с формулами типа (11.54), представляющими члены рядов (11.53) (см. также (11.62)). Уточнение модели диэлектрика означает переход к аналогичному ряду.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Решить уравнение (14.15) для случая частицы в заданном электростатическом поле $\mathbf{E} = \mathbf{x}_0 E$ при начальных условиях $\mathbf{r}(0) = 0$, $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{x}_0 v_0$.

2. Получить траекторию частицы согласно (14.21), если $\mathbf{r}(0) = 0$ и $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{x}_0 v_0$.

3. Как влияет соотношение электрического и магнитного полей на движение частицы во втором примере п. 14.1.2?

4. Как изменится характер прецессии вектора $\mathbf{M}$ в результате введения диссипативного члена согласно уравнению Ландау — Лифшица?

5. Сравнить распространение T-волны в непоглощающей плазме и одной из волн полого волновода. С каким параметром теории волноводов можно сопоставить плазменную частоту?

6. Написать приближенные выражения комплексной диэлектрической проницаемости плазмы в случаях $\omega \gg \nu$ и $\omega \ll \nu$.

7. Как затухает распространяющаяся в плазме T-волна? Написать выражение коэффициента затухания.

8. Рассмотреть изменение фазовой и групповой скоростей T-волны, распространяющейся в диэлектрике, с частотой $f = 1$ Гц при нормальной и аномальдисперсии (см. рис. 14.5).

9. Пользуясь справочными данными, проверить числовой коэффициент в формуле (14.41).

Глава 15

РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

§ 15.1. Общие представления (А)

15.1.1. Радиоволны. Говоря об электромагнитных волнах, используемых в радиотехнике, употребляют термин *радиоволны*. В широком смысле радиоволнами являются всевозможные волновые процессы в аппаратуре (например, в волноводных устройствах, интегральных схемах СВЧ и пр.), в линиях передачи и, наконец, в природных условиях, в среде, разделяющей приемную и передающую антенны. Приемник и передатчик, можно сказать, соединены внеаппаратурной линией передачи, *радиолинией*. В узком смысле слова под радиоволнами понимают электромагнитные волновые процессы на таких радиолиниях, которые называют также естественными радиотрассами, радиотрактами и пр. В то же время радиолинией иногда называют и всю совокупность средств передачи информации в радиосистеме.

Различают следующие основные диапазоны радиоволн:

сверхдлинные волны (СДВ): $\lambda = 10 \div 100$ км ($f = 3 \div 3 \cdot 10$ кГц);

длинные волны (ДВ): $\lambda = 1 \div 10$ км ($f = 3 \cdot 10 \div 3 \cdot 10^2$ кГц);

средние волны (СВ): $\lambda = 100$ м $\div 1$ км ($f = 3 \cdot 10^2 \div 3 \cdot 10^3$ кГц);

короткие волны (КВ): $\lambda = 10 \div 100$ м ($f = 3 \div 3 \cdot 10$ МГц);

ультракороткие волны (УКВ): $\lambda = 0{,}1$ мм $\div 10$ м ($f = 3 \cdot 10$ МГц $\div 3 \cdot 10^3$ ГГц).

Разумеется, мыслимы как более длинные, так и более короткие радиоволны. Освоение все более коротких волн происходило по мере развития средств генерации соответствующих электромагнитных колебаний. Уже более четверти века назад в результате изобретения оптических квантовых генераторов, лазеров, стали доступны когерентные электромагнитные колебания, соответствующие оптическому спектру. Техника располагает, таким образом, радиоволнами оптического диапазона, в котором различают следующие поддиапазоны:

инфракрасная область: $\lambda = 7{,}5 \cdot 10^{-4} \div 10^{-1}$ мм ($f = 3 \cdot 10^3 \div 4 \cdot 10^5$ ГГц);

видимый свет: $\lambda = 4 \cdot 10^{-4} \div 7{,}5 \cdot 10^{-4}$ мм ($f = 4 \cdot 10^5 \div 7{,}5 \cdot 10^5$ ГГц);

ультрафиолетовая область: $\lambda = 10^{-4} \div 4 \cdot 10^{-4}$ мм ($f = 7{,}5 \cdot 10^5 \div 3 \cdot 10^6$ ГГц).

В дополнение к этому приведем также сведения о классификации радиоволн в соответствии с международным Регламентом радиосвязи, установленным МККР (Международный консультативный комитет по радио). Ниже в табл. 15.1 приведены соответствующие полосы частот (см., например, [Е.4]). Таким образом, полосам 4, 5, 6, 7 отвечают СДВ, ДВ, СВ и КВ, а полосам $8 \div 12$ — УКВ.

Таблица 15.1

Полосы частот по номенклатуре МККР

№	Обозначение частот	Границы частот	Соответствующее наименование волн
4	ОНЧ (очень низкие)	3÷30 кГц	Мириаметровые
5	НЧ (низкие)	30÷300 кГц	Километровые
6	СЧ (средние)	300÷3000 кГц	Гектометровые
7	ВЧ (высокие)	3÷30 МГц	Декаметровые
8	ОВЧ (очень высокие)	30÷300 Мгц	Метровые
9	УВЧ (ультравысокие)	300÷3000 Мгц	Дециметровые
10	СВЧ (сверхвысокие)	3÷30 ГГц	Сантиметровые
11	КВЧ (крайне высокие)	30÷300 ГГц	Миллиметровые
12	—	300÷3000 ГГц	Децимиллиметровые

Каждому диапазону радиоволн свойственны характерные особенности распространения в природных условиях, о чем будет говориться ниже.

15.1.2. Роль антенн. При рассмотрении радиолиний необходимо учитывать свойства антенн. В простейшем идеализированном случае приемную и передающую антенны можно считать точечными объектами, которые расположены в свободном пространстве. Если бы передающая антенна излучала равномерно во всех направлениях, то создаваемый ею на расстоянии r поток энергии должен был бы иметь плотность

$$\overline{\Pi}_0(\mathbf{r}) = \overline{P}_A/4\pi r^2, \qquad (15.1)$$

так как в этом случае $\overline{P}_A = \overline{\Pi}_0 S$, где S — сферическая поверхность, из центра которой происходит излучение. Реальные антенны излучают неравномерно, что можно учесть, введя так называемый *коэффициент направленности действия* $D(\vartheta, \alpha)$ в соответствии с определением (9.33). Поэтому вместо (15.1) имеем:

$$\overline{\Pi}(r, \vartheta, \alpha) = D_A(\vartheta, \alpha)\overline{P}_A/4\pi r^2, \qquad (15.2)$$

где имеется в виду плотность потока энергии в некоторой точке с координатами r, ϑ, α. Локально поле излучения можно рассматривать как плоскую волну и, следовательно (см. п. 5.5.1),

$$\overline{\Pi}(r, \vartheta, \alpha) = E_m^2(r, \vartheta, \alpha)/2W. \qquad (15.3)$$

Из (15.2) и (15.3) получаем формулу, выражающую напряженность электрического поля в рассматриваемой точке:

$$E_m(r, \vartheta, \alpha) = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{D_A(\vartheta, \alpha)\overline{P}_A W}{2\pi}} = \frac{1}{r}\sqrt{60 D_A(\vartheta, \alpha)\overline{P}_A} \qquad (15.4)$$

(для свободного пространства $W = 120\pi$ Ом, (4.29)). Нередко формулу (15.4) записывают относительно эффективного значения напряженности, которое меньше амплитудного в $\sqrt{2}$ раз.

Теперь мы можем говорить о радиолинии в целом, полагая, что A и B — точки локализации передающей и, соответственно, приемной антенн (рис. 15.1). Напряженность электрического поля в точке приема B определяется по формуле (15.4). Но можно перейти и к мощности, отбираемой приемной антенной, которую обозначим P_B.

Локально плоская волна падает на приемную антенну в направлении, которое в ее системе координат характеризуется углами ϑ', α' (рис. 15.1). Плотность потока энергии есть $\overline{\Pi}(r, \vartheta, \alpha)$ (15.2). Запишем:

$$\overline{P}_B = \overline{\Pi}(r, \vartheta, \alpha) S_B(\vartheta', \alpha') \qquad (15.5)$$

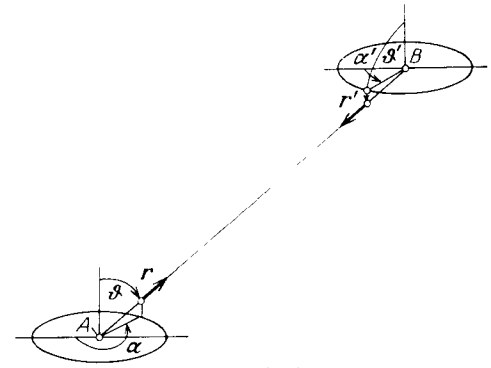


Рис. 15.1

(линия, соединяющая точки A и B, имеет угловые координаты ϑ, α в одной системе и ϑ', α' — в другой). Коэффициент $S_B(\vartheta', \alpha')$, зависящий только от типа антенны (при данных ϑ', α' и заданной поляризации волны), называется *эффективной поверхностью* приемной антенны. В курсах антенн доказывается (см., например, [В.5]), что эффективная поверхность антенны S и ее коэффициент направленности действия D связаны соотношением:

$$D = 4\pi S/\lambda^2 \qquad (15.6)$$

(аналогичная формула (10.23) была получена в связи с представлением об идеальной поверхностной антенне). Подставляя (15.2) в (15.5) и заменяя $S_B(\vartheta', \alpha')$ в соответствии с (15.6) на $\lambda^2 D(\vartheta', \alpha')/4\pi$, получаем следующую формулу

$$\overline{P}_B = \frac{D_A(\vartheta, \alpha) D_B(\vartheta', \alpha')\lambda^2}{(4\pi r)^2}\overline{P}_A, \qquad (15.7)$$

которая характеризует передачу энергии для радиолинии в свободном пространстве; такую радиолинию условно будем называть идеальной.

Формула (15.7) имеет весьма ограниченное применение; она, например, пригодна в случае не слишком протяженных радиолиний космос — космос. Но нередко используют формулу:

$$\overline{P}_B = F^2(\mathbf{r})\frac{D_A(\vartheta, \alpha) D_B(\vartheta', \alpha')\lambda^2}{(4\pi r)^2}\overline{P}_A. \qquad (15.8)$$

Функция $F(\mathbf{r})$, квадрат которой фигурирует в (15.8), называется *множителем ослабления*.

Таким путем формально учитываются потери энергии в различных реальных радиолиниях.

В инженерной практике формулу (15.8) обычно логарифмируют, выражая все величины в *дБ*.

15.1.3. Основные факторы распространения радиоволн. Ввиду разнообразия, сложности и изменчивости природных условий анализ распространения радиоволн порождает трудные задачи. Радиоволны излучаются и принимаются антеннами в относительной близости Земли, реже одна или обе антенны радиолинии находятся в космосе. Околоземное пространство неоднородно. Поверхность Земли и атмосфера оказывают решающее влияние на формирование электромагнитных волновых процессов. Представим себе сначала, что в силу направленности действия передающей антенны A (рис. 15.2*а*)

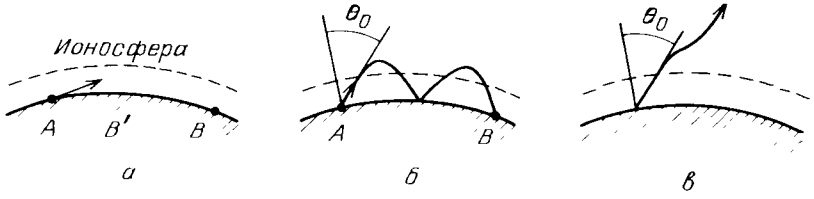


Рис. 15.2

излучение происходит под малыми углами к горизонту. В этом случае характер волнового процесса существенно определяется свойствами почвы (или морской поверхности). В результате поглощения, вызываемого действием материальной среды, поле убывает с расстоянием гораздо быстрее, чем в свободном пространстве. Но особенности строения атмосферы в данном случае могут и не сказываться, и передача энергии происходит так, как если бы атмосфера вообще отсутствовала. Такого рода волновой процесс называют *земной волной*.

Но радиопередача из A в B при определенных условиях может быть с выгодой осуществлена иным путем, посредством так называемой *ионосферной волны*. *Ионосферой* называют область атмосферы, нижняя граница которой лежит на высоте около 60 км. Разреженный газ этой области ионизован, причем степень ионизации ионосферной плазмы сначала возрастает с высотой (в так называемой внутренней ионосфере) и затем убывает, а как известно (см. п. 14.2.1), с ростом концентрации свободных электронов N' уменьшается диэлектрическая проницаемость среды; о существовании потерь пока можно не говорить. Таким образом, внутренняя ионосфера — среда с вертикально падающим коэффициентом преломления.

Излучение антенны A, представляющее собой вблизи нижней границы ионосферы локально плоскую волну, можно охарактеризовать при помощи луча, приходящего под некоторым углом θ_0 (рис. 15.2). Луч этот претерпевает *рефракцию* (см. п. 5.5.3) и может вернуться к Земле, как показано на рис. 15.2*б*, причем рефракция в ионосфере может несколько раз чередоваться с отражением от земной поверхности. Характер искривления луча нетрудно понять, исходя из формулы (5.120), учитывая, что во внутренней ионосфере $dn/dz < 0$. При многократном переотражении от ионосферы и Земли радиоволны распространяются на огромные расстояния при сравнительно малом поглощении. Роль ионосферы весьма значительна: она образует нечто вроде природного зеркала. Но для достаточно коротких волн (именно для диапазона УКВ) ионосфера уже не играет роли отражателя. Из формул (14.39) видно, что при данной концентрации N' с ростом частоты диэлектрическая проницаемость плазмы все ближе к единице. Если луч «не успевает» искривиться во внутренней ионосфере настолько, чтобы повернуть к Земле, то он уходит во внешнюю ионосферу (рис. 15.2*в*), где концентрация N' постепенно падает. Это обстоятельство также играет положительную роль, поскольку именно благодаря отмеченной «прозрачности» ионосферы оказывается возможной радиосвязь с космическими объектами, а также радиоастрономия.

Нижние слои атмосферы, в свою очередь, оказывают некоторое влияние на распространение радиоволн. В так называемой *тропосфере*, верхняя граница которой лежит на высоте порядка 15 км, сосредоточено около 80 % всей массы воздуха. В тропосфере происходит сравнительно слабая рефракция, заметная на больших расстояниях. Существенную роль, как мы увидим, играют случайные неоднородности тропосферы.

Мы обсудили лишь общие и главные особенности природных условий, определяющих характер распространения радиоволн. Проследим, как они проявляются в разных диапазонах радиоволн.

Для таких диапазонов как СДВ и ДВ все виды почв (и, тем более, водные среды) выступают как проводники. Земная поверхность отражает эти волны без значительного поглощения. Сверхдлинные и длинные волны неглубоко проникают в ионосферу. При малых частотах изменение диэлектрической проницаемости плазмы в зависимости от концентрации электронов является резким (см. п. 14.2.1), так что нижняя граница ионосферы выражена более четко. Говорят, что длинные волны распространяются между двумя хорошо отражающими поверхностями, как в волноводе.

Средние волны сильнее поглощаются почвой и глубже проникают в ионосферу. Для объяснения особенностей их распространения надо рассматривать суточный режим ионосферы.

В диапазоне КВ земная волна при распространении быстро поглощается: почва проявляет себя как несовершенный (поглощающий) диэлектрик. В ионосферу волны проникают глубоко. Путем

многократных возвращений из ионосферы и отражений от земной поверхности короткие волны покрывают практически любые расстояния, относительно мало затухая.

Сопоставляя связь на длинных и коротких волнах, надо учитывать, что в первом случае передающие антенны, представляющие собой огромные сооружения, все же остаются малыми по сравнению с длиной волны. Они имеют небольшой к. п. д. и обладают слабой направленностью действия. В этом смысле на коротких волнах положение резко улучшается. Дальняя связь осуществляется при помощи направленных антенн; мощности передатчиков относительно малы. Однако изменчивость ионосферы приводит к неустойчивости коротковолновой радиосвязи.

Характеризуя диапазон УКВ, следует в первую очередь принять во внимание, что здесь ионосфера уже не обладает способностью возвращать рефрагирующий луч к Земле. Типично использование распространения УКВ лишь в пределах прямой видимости (трасса AB', рис. 15.2*а*) и для связи с космическими объектами.

Систематические и случайные изменения свойств природных сред оказывают сильное влияние на работу радиолиний. Свойства ионосферы зависят от солнечной активности, испытывая суточные, сезонные и более медленные изменения. Тепловые режимы воздушной массы определяют свойства тропосферы. Случайные изменения, флуктуации свойственны в той или иной мере всем радиолиниям. Одно из проявлений этого — «замирания» передаваемых сигналов, случайные амплитудные вариации. При измерениях сигналов производят усреднение результатов. Случайные изменения, разумеется, ведут к искажениям сигналов. Следует, однако, иметь в виду и полезную роль флуктуаций в виде пространственных образований в тропосфере и ионосфере. Рассеяние на этих неоднородностях обусловливает распространение УКВ за пределы прямой видимости.

§ 15.2. Геометрическая оптика и теория дифракции при анализе распространения радиоволн

15.2.1. О возможностях постановки электродинамической задачи (А). В принципе, задача о распространении радиоволн в природных условиях есть задача электродинамики, которая ставится для уравнений Максвелла. Но даже, если отвлечься от изменчивости природных условий, остается исключительное разнообразие материальных сред и границ отдельных образований; соответствующую информацию просто невозможно учесть при постановке электродинамической задачи в полной мере. Возникает вопрос, какого рода идеализации при постановке задачи являются допустимыми. Можно поставить и другой вопрос: какие упрощения придется ввести, чтобы задача могла быть решена строго?

В строгой постановке задачи Земля заменяется однородным шаром в однородной или даже радиально-неоднородной среде; при этом

находят электромагнитное поле заданных источников, формализующих антенну. Представляет интерес и *плоская модель*, в которой рассматриваются заданные источники вблизи границы разнородных полупространств. Задачи эти не просты; возникающие математические трудности преодолевались поколениями специалистов; достаточно сказать, что этими вопросами занимались такие выдающиеся физики-теоретики, как А. Зоммерфельд и наш соотечественник В. А. Фок [Г.6, 7]. Изложение этого круга идей в данном курсе потребовало бы неправомерно большого объема.

Расстояния между передающими и приемными антеннами обычно во много раз превышают длину волны. Поэтому при рассмотрении радиолиний стараются применять представления оптики. На

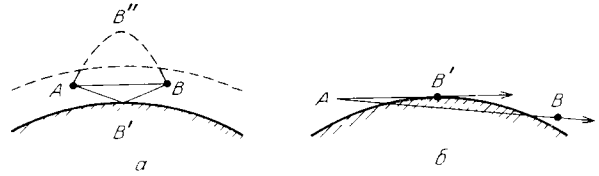


Рис. 15.3

рис. 15.3*а* схематически показана радиолиния над земной поверхностью. Лучевая схема означает, что поле в точке приема B рассматривается как наложение, вообще говоря, трех волновых процессов: прямой волны — луч AB, отраженной от Земли — луч $AB'B$ и пришедшей из ионосферы — луч $AB''B$. Насколько удовлетворительна такая схема?

Пусть существует только земная волна (луч $AB''B$ отсутствует). Ясно, что окрестность точки B' должна представлять собой достаточно гладкую площадку. Если, например, в этом районе расположены горы, здания, деревья и т. п., размеры которых не малы в сравнении с длиной волны, то каждый такой предмет порождает сложное поле дифракции. Понятно также, что приемная антенна B может лежать в области тени (рис. 15.3*б*). С точки зрения геометрической оптики поле в B должно быть равно нулю. Но правильную информацию может дать только решение задачи дифракции. Электромагнитные волны в известной мере огибают выпуклость Земли — тем больше, чем длиннее волна. Поэтому в начале века — до выяснения роли ионосферы — считалось, например, что короткие волны непригодны для дальней связи.

Заметим, что действие предмета, затеняющего радиотрассу, например, горного хребта (рис. 15.4*а*), можно уподобить влиянию края экрана в задаче дифракции на отверстии (см. п. 10.3.2). В этом приближении распределение поля за препятствием показано на рис. 15.4*б*. Интересно, что вблизи края геометрической тени имеется область усиления поля: первый дифракционный максимум. Обсуждавшаяся схема анализа препятствия была упрощенной; кроме

прямых волн в общем случае рассматриваются также волны, переотраженные земной поверхностью.

В заключение надо сказать, что подход геометрической оптики на рис. 15.3*а*, нуждается в дополнительном обосновании, которое будет проведено в п. 15.2.3. Оказывается, для прямого луча AB можно

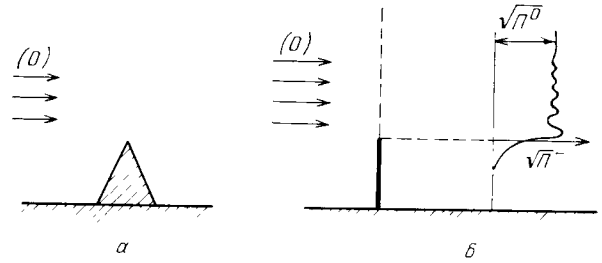


Рис. 15.4

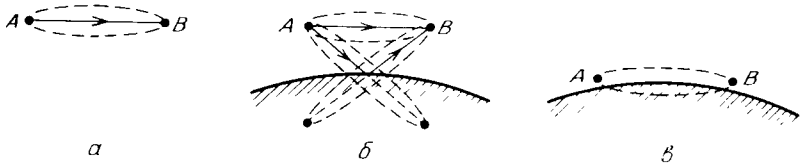


Рис. 15.5

построить эллипсоидальную зону (рис. 15.5*а*), вне которой пространство, практически, не влияет на формирование соответствующего поля в точке B. Ее называют областью, существенной для формирования поля, или — кратко — *доминантной областью*. Чем короче волна, тем доминантная область уже. Построение доминантной области отвечает на вопрос о размерах достаточно гладкой площадки в окрестности точки отражения B', при которых подход геометрической оптики применим (рис. 15.5*б*), а также о необходимой высоте поднятия антенн. Если она недостаточна, так что доминантная область пересекает земную поверхность (рис. 15.5*в*), такой подход оказывается, строго говоря, неприменимым.

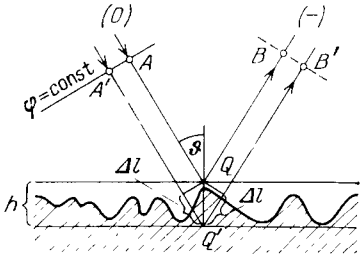


Рис. 15.6

15.2.2. Оценка неровностей земной поверхности (А). Пусть плоская волна падает на поверхность раздела сред сложной формы, отклоняющуюся от плоскости не более, чем на высоту (глубину) h (рис. 15.6). Это — задача дифракции. Не решая ее, можно попытаться оценить, насколько поле рассеяния отличается от плоской

волны, которая отражалась бы плоской границей (при отсутствии неровностей).

Можно ожидать, что малые элементы неровной поверхности действуют подобно элементам Гюйгенса, фаза которых определяется падающей волной. Рассмотрим разность фаз двух лучей, как бы отраженных от верхнего и нижнего уровней неровной поверхности. Эта величина $\Delta\varphi$ равна различию оптических путей $A'Q'B'$ и AQB. Как видно из рис. 15.6,

$$\Delta\varphi = 2k\Delta l = \frac{4\pi h}{\lambda}\cos\vartheta. \qquad (15.9)$$

Если $\Delta\varphi \approx 0$, что будет при $h \ll \lambda$, то точки B и B' можно считать синфазными, а это значит, что поле рассеяния можно рассматривать как плоскую волну: неровности границы не влияют на процесс. Считают, что пренебрежение неровностями в какой-то мере оправдано вплоть до фазовых отклонений $\Delta\varphi$ порядка $\pi/2$. Согласно (15.9) этому соответствует высота неровностей

$$h < \lambda/8\cos\vartheta. \qquad (15.10)$$

Чем ближе направление падающей волны к «скользящему» ($\vartheta \to 90°$), тем большая высота неровностей допустима в соответствии с неравенством (15.10), которое называют *критерием Рэлея*.

В диапазонах длинных и средних волн лесистую местность или даже населенный пункт можно рассматривать как ровную поверхность, характеризуемую некоторым коэффициентом отражения, который может быть определен экспериментально. Но, например, для сантиметровых волн отдельный камень или растение есть самостоятельный объект дифракции.

Измерение свойств различных почв, морской воды в масштабах географических регионов и исследование эквивалентных электродинамических параметров (например, коэффициентов отражения) различных видов местности проводится в широких масштабах во всем мире. Эти данные публикуются в специальной литературе и используются при проектировании радиолиний.

15.2.3. Доминантная область радиолинии (Б). Чтобы выяснить, какая область пространства существенна при формировании поля излучения источника A в точке B, используем задачу о дифракции волны на отверстии в экране (см. § 10.3). На трассе можно мысленно разместить экран с отверстием и увеличивать отверстие до тех пор, пока влияние экрана на поле в точке B перестанет сказываться. Тогда экранируется только несущественная часть поля. Перемещая экран с отверстием вдоль трассы, мы убедимся в том, что размер отверстия (при одной и той же степени малости влияния экрана) оказывается наибольшим на середине трассы, а по мере приближения экрана к точкам A и B уменьшается.

Собственно говоря, о невлияющем экране уже говорилось в § 10.3, но там исследовалась дифракция плоской волны, а нас бу-

дет интересовать волна сферическая (рис. 15.7*а*). Можно сказать, что задачу дифракции не придется решать заново, достаточно будет внести в полученные ранее результаты некоторые коррективы.

Итак, сферическая волна, распространяющаяся из точки A (передающая антенна), индицируется в точке B (приемная антенна).

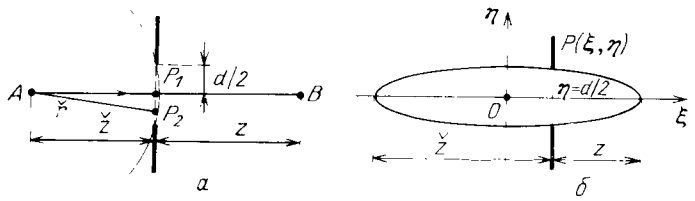


Рис. 15.7

Если точка A достаточно далека от экрана, амплитуду сферической волны в плоскости отверстия можно считать постоянной, но необходимо учесть непостоянство фазы. Обозначая $AP_2 = \breve{r}$ и $AP_1 = \breve{z}$ (кратчайшее расстояние), имеем: $\breve{r} = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + \breve{z}^2}$, где x' и y' — поперечные координаты точки P_2. Очевидно (ср. (10.27)), $\breve{r} = \breve{z} + \frac{(x')^2+(y')^2}{2\breve{z}} + \cdots$ Теперь для нахождения поля дифракции сферической волны на отверстии достаточно ввести лишь очень небольшие изменения в формулы из § 10.3. Действительно, под интегралом (10.12) должен дополнительно присутствовать множитель

$$e^{-ik\breve{r}} = e^{-ik\breve{z}} \exp\left[-ik\frac{(x')^2+(y')^2}{2\breve{z}}\right],$$

отражающий изменение фазы падающей волны в отверстии. Таким образом, теперь вместо (10.28):

$$\dot{\mathbf{E}}_m^- = \mathbf{x}_0 \frac{ik\dot{E}_m(0)}{2\pi}\frac{e^{-ik(z+\breve{z})}}{z} \times$$

$$\times \int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2} \exp\left\{-ik\left[\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{2z} + \frac{(x')^2+(y')^2}{2\breve{z}}\right]\right\} dx'\,dy'. \quad (15.11)$$

Поскольку точка наблюдения B имеет координаты $x=0$, $y=0$, показатель экспоненты под знаком интеграла принимает вид $-ik\frac{(x')^2+(y')^2}{2}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{\breve{z}}\right)$. Интеграл, как и в 10.3, распадается на два идентичных по форме (по x' и y'); один из них:

$$\int_{-a/2}^{a/2} \exp\left[-ik\frac{(x')^2}{2}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{\breve{z}}\right)\right] dx' = \int_{-a/2}^{a/2} \exp\left[-ik\frac{(x')^2}{2z\breve{z}/(z+\breve{z})}\right] dx'.$$

В сравнении со случаем дифракции плоской волны, когда член $1/\breve{z}$ в показателе экспоненты отсутствует, различие свелось к тому, что вместо z теперь фигурирует величина $z\breve{z}/(z+\breve{z})$. Таким образом, для нахождения поля дифракции $\dot{\mathbf{E}}_m^-$ в точке B надо лишь внести очевидные изменения в результаты § 10.3.

Для наших целей достаточно получить новое выражение дифракционного параметра, а для этого в формуле (10.32) надо заменить z на $z\breve{z}/(z+\breve{z})$, что дает

$$\breve{d} = \frac{d}{\sqrt{\lambda z\breve{z}/(z+\breve{z})}}. \quad (15.12)$$

Из п. 10.3.2 известно, что при $d \gg 1$ поле в средней точке за экраном оказывается таким, как если бы экрана не было. Поэтому, положив в (15.11) $\breve{d} = C \gg 1$, мы получаем условие, что на поле в точке B (см. рис. 15.7*а*) не повлияло экранирование. Взяв некоторое допустимое значение C, получаем

$$d = C\sqrt{\lambda\frac{z\breve{z}}{z+\breve{z}}}. \quad (15.13)$$

Это выражение размера отверстия в экране, при котором экранирование можно считать несущественным. Как видно, этот размер зависит от положения экрана на трассе.

Чтобы осмыслить результат, отметим, что $z+\breve{z}$ — это расстояние $AB = \Delta$ между передающей и приемной антеннами. Введем декартову систему координат ξ, η (рис. 15.7*б*) с началом на середине этого расстояния. Пусть $P(\xi, \eta)$ — точка на краю отверстия. Учитывая, что $\breve{z} = \Delta/2 + \xi$, $z = \Delta/2 - \xi$ и $d = 2\eta$, сделаем соответствующие подстановки в (15.13) и после преобразований получим уравнение

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1, \qquad a = \frac{\Delta}{2}, \qquad b = \frac{C}{4}\sqrt{\lambda\Delta}. \quad (15.14)$$

Это уравнение эллипса, представляющего собой геометрическое место краевых точек отверстия в невлияющем экране, который перемещается вдоль трассы. Это означает, что продольное сечение доминантной области радиолинии ограничено эллипсом (рис. 15.7*б*). Ввиду осевой симметрии всей системы доминантная область есть эллипсоид вращения. Его малая полуось b уменьшается с длиной волны λ; при $\lambda \to 0$ эллипсоид вырождается в отрезок прямой.

Обсудим вопрос с иных позиций. В п. 10.3.3 было введено представление о зонах Френеля. Эти зоны можно выделить и на сферическом фронте волны с центром в точке A (рис. 15.8). Их границами являются окружности, описываемые на сфере радиальным отрезком $r = z + n\lambda/2$ ($n = 1, 2, \ldots$) с началом в точке B. Пусть $\breve{r}$ и r — расстояния от A и, соответственно, от B до края отверстия

в экране, которое вырезает n зон Френеля. Тогда

$$\breve{r}+r=\breve{z}+z+n\lambda/2. \qquad (15.15)$$

Поскольку величина справа постоянна, при продольном перемещении экрана краевая точка его отверстия скользит по эллипсу, фокусы которого лежат в точках A и B.

Для сопоставления с предыдущим используем следующие приближенные равенства:

$$\breve{r}=\sqrt{\breve{z}^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}\approx\breve{z}+\frac{1}{2\breve{z}}\left(\frac{d}{2}\right)^2,\qquad r=\sqrt{z^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}\approx z+\frac{1}{2z}\left(\frac{d}{2}\right)^2.$$

Подставляя это в (15.15), получаем:

$$n\lambda=(d/2)^2(1/\breve{z}+1/z)$$

и, следовательно,

$$d=2\sqrt{n}\sqrt{\lambda\frac{z\breve{z}}{z+\breve{z}}}. \qquad (15.16)$$

При обозначении $C=2\sqrt{n}$ это соотношение повторяет (15.13). Напомним (см. п. 10.3.3), что экран с отверстием можно считать невлияющим, когда число зон Френеля, укладывающихся в нем, велико.

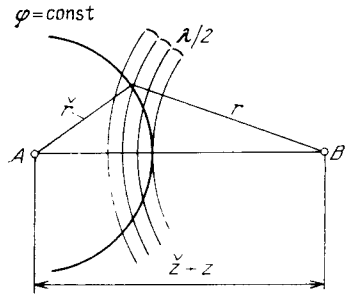


Рис. 15.8

Иногда определяют доминантную область, исходя из $n=1$ ($C=2$). По смыслу проведенных рассуждений это неверно. В заключение заметим, что в двух вариантах построения доминантной области расстояние между антеннами Δ совпадает то с большой осью эллипса, то с расстоянием между его фокусами (рассуждения не были вполне эквивалентными). Это различие, однако, не имеет никакого значения, так как, во-первых, экран не может быть очень близок к точкам A и B, а во-вторых, имеются в виду весьма вытянутые эллипсы: $a\gg b$.

§ 15.3. Земные радиоволны (А)

15.3.1. Лучевая модель радиолинии. Рассматривая некоторую радиолинию, функционирующую при отсутствии влияния ионосферы, будем исходить из лучевого представления на рис. 15.3*а*, согласно которому поле в точке B находится как наложение двух волн, одна из которых соответствует лучу AB, а другая — лучу $AB'B$. Такая *лучевая модель* (другое название — *отражательная трактовка*) может быть применена, если антенны расположены на линии прямой видимости и достаточно высоко подняты. При строгом выполнении второго условия доминантная область должна лежать над земной поверхностью (см. рис. 15.5*а*). В большинстве случаев практики это недостижимо. Действительно, при едва допустимом $C=6$ (т. е. $n=9$ в (15.16)) для малой оси (поперечника) эллипса доминантной области получаем: $2b=3\sqrt{\lambda\Delta}$. Таким образом, например, при $\Delta=10^4\lambda$ находим: $b=150\lambda$. Такова должна быть приблизительно высота антенн, что трудно достижимо уже на метровых волнах. На практике лучевую модель применяют и в случае невыполнения рассматривавшегося условия. Считается, что для ориентировочных расчетов лучевая модель пригодна, когда высота расположения антенн превышает длину волны. Разумеется, вычисляемая в точке приема напряженность поля может оказаться существенно завышенной.

Детализируем лучевую модель радиолинии, полагая соответствующий участок земной поверхности плоским (рис. 15.9). Надо сложить в точке B поля прямой и отраженной волн. При этом

$$\dot{\mathbf{E}}_m=\mathbf{e}_{01}\sqrt{60D(\vartheta_1,\alpha)\overline{P}}e^{-i(kr_1-\varphi)}/r_1+\mathbf{e}_{02}\rho\sqrt{60D(\vartheta_2,\alpha)\overline{P}}e^{-i(kr_2-\varphi)}/r_2. \qquad (15.17)$$

Действительно, первый член соответствует выражению (15.4). При этом введен орт $\mathbf{e}_{01}$ (на рис. 15.9 он показан в варианте параллельной поляризации) и фазовый множитель; начальная фаза φ в дальнейшем несущественна. Второй член требует дополнительного пояснения. Отраженную волну можно трактовать как излученную отраженным источником A', причем амплитуда волны получается при умножении на коэффициент ρ, определяемый по формулам Френеля (5.42), (5.43); очевидно, что при этом $r_2=r_2'+r_2''$. Формула (15.17) реализует лучевую модель радиолинии.

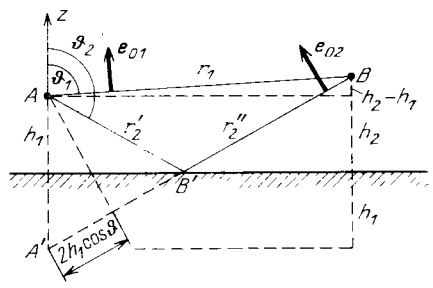


Рис. 15.9

Поскольку обычно $h_1\ll r_1$ и $h_2\ll r_1$, отрезки r_1, r_2' и r_2'' почти параллельны. Поэтому орты $\mathbf{e}_{01}$ и $\mathbf{e}_{02}$ будем считать идентичными (при перпендикулярной поляризации это верно в строгом смысле). Полагая $\vartheta_2\approx\vartheta_1=\vartheta$, не будем различать величины $D(\vartheta_1,\alpha)$ и $D(\vartheta_2,\alpha)$. При этом также $r_2\approx r_1+2h_1\cos\vartheta_1=r+2h_1\cos\vartheta$ (индекс 1 при r и ϑ опущен). В знаменателе второго члена (15.17) отождествим r_2 и $r_1=r$. Теперь выражение (15.17) дает:

$$\dot{\mathbf{E}}_m=\mathbf{e}_0\sqrt{60D(\vartheta,\alpha)\overline{P}}e^{-i(kr-\varphi)}\frac{1}{r}(1+\rho e^{-i2kh_1\cos\vartheta}). \qquad (15.18)$$

Далее, учтем, что при пологом падении ($\vartheta\approx90°$) независимо от характера почвы и вида поляризации $\rho\approx-1$. В этом легко убедиться, взяв формулы Френеля для $\rho_\perp$ и $\rho_\parallel$ и положив в них

$\varphi = 90°$. Таким образом, полагая $\rho = -1$, имеем

$$1 + \rho e^{-i2kh_1\cos\vartheta} = i2e^{-ikh_1\cos\vartheta}\sin(kh_1\cos\vartheta)$$

и из (15.18) получаем

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{e}_0 2\sqrt{60D(\vartheta, \alpha)\overline{P}}\frac{1}{r}|\sin(kh_1\cos\vartheta)|, \qquad (15.19)$$

а так как $\cos\vartheta \ll 1$, то можно написать:

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{e}_0 2\sqrt{60D(\vartheta, \alpha)\overline{P}}\frac{1}{r}kh_1\cos\vartheta. \qquad (15.20)$$

Наконец, учтем, что в предшествующих действиях вместо $\cos\vartheta$ более правильно брать среднее арифметическое $\cos\vartheta_1$ и $\cos\vartheta'$, где ϑ' — угол $AA'B$ на рис. 15.9. Это значит, в (15.20) делается замена:

$$\cos\vartheta \to \frac{\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta'}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{h_2 - h_1}{r_1} + \frac{h_2 + h_1}{r_2}\right) \approx \frac{h_2}{r}.$$

В результате находим так называемую *формулу Введенского*:

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{e}_0 2\sqrt{60D(\vartheta, \alpha)\overline{P}}k\frac{h_1h_2}{r^2}, \qquad (15.21)$$

согласно которой напряженность поля в месте приема пропорциональна произведению высот передающей и приемной антенн. Интересно, что формула Введенского в явном виде показывает рост ослабления поля с расстоянием в результате действия земной поверхности при пологом падении. Поле убывает, как $1/r^2$ вместо $1/r$ в свободном пространстве. Дело в том, что складываемые в точке B волны почти противофазны, поскольку взято $\rho = -1$ и $r_2 \approx r_1$ (при $r_2 = r_1$ поле бы полностью уничтожалось).

Сделаем несколько замечаний о формулах (15.17)—(15.21), которые называют *интерференционными*, так как они описывают интерференцию двух волновых процессов. При переходе от (15.17) к (15.18) обычно предполагается, что передающая антенна — слабонаправленная; в противном случае значения D для близких направлений ϑ_1 и ϑ_2 могут значительно различаться. Далее, приближение $\rho = -1$ при перпендикулярной поляризации лучше, чем при параллельной. В случае идеально проводящей границы выполняется точное равенство $\rho_\perp = -1$, тогда как $\rho_\parallel = +1$; формула (15.19) в последнем случае совершенно неверна. Разумеется, даже при отражении от морской поверхности мы далеки от случая идеально проводящей среды. Однако при этом формулы (15.19)—(15.21) для параллельной поляризации оказываются достоверными, когда падение волны на отражающую поверхность является существенно более пологим. Это легко проверить, сопоставляя формулы Френеля (5.42) и (5.43) при малых W_2, когда также мал угол падения φ.

Если не выполняются соотношения $h_1 \ll r_1$ и $h_2 \ll r_1$, то разность хода лучей r_2 и r_1 уже нельзя определять, как это делалось при

переходе к формуле (15.18). На относительно малых расстояниях r_1 фазовый сдвиг может оставаться большим, в результате чего зависимость поля в точке B от расстояния между антеннами имеет

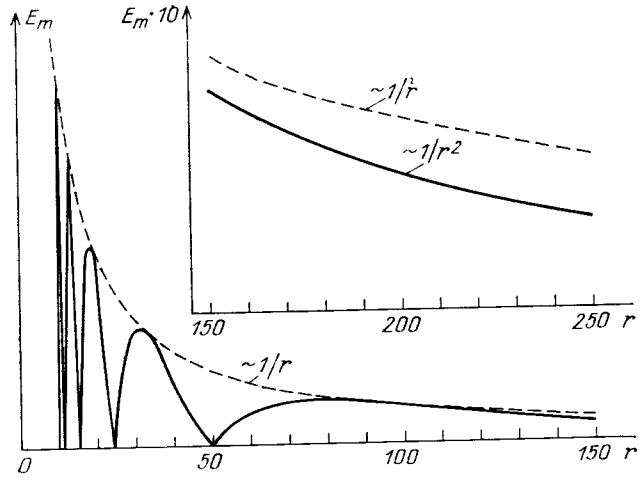


Рис. 15.10

ряд интерференционных «провалов» (рис. 15.10). С ростом расстояния оптические пути прямого и отраженного лучей сближаются, так что, начиная с какого-то момента, фазовый сдвиг мало отличается от значения 180° (обусловленного коэффициентом отражения $\rho = -1$) и все более приближается к нему. Мы определили области применимости формулы Введенского: поле убывает, как $1/r^2$. Заметим, что огибающая кривой (рис. 15.10) в соответствии с (15.17) изменяется, как $1/r$.

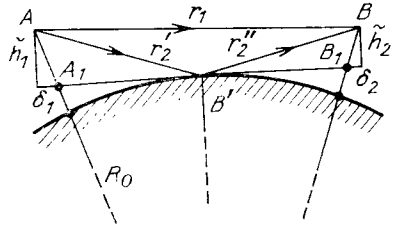


Рис. 15.11

Остается обсудить, как в лучевой модели учитывается сферичность Земли. Это поясняется на рис. 15.11, из которого видно, что роль высот антенн теперь играют приведенные высоты $\tilde{h}_1$ и $\tilde{h}_2$. Если углы $A0B'$ и $B'0B$ невелики (это типично), то $\tilde{h}_1 \approx h_1 - \delta_1$ и $\tilde{h}_2 \approx h_2 - \delta_2$, где δ_1 и δ_2 — высоты точек, находящихся на расстоянии прямой видимости $A_1B_1 = r_0$. Как видно из рис. 15.11,

$$r_0 = \sqrt{(R_0 + \delta_1)^2 - R_0^2} + \sqrt{(R_0 + \delta_2)^2 - R_0^2} \approx \sqrt{2R_0}(\sqrt{\delta_1} + \sqrt{\delta_2}), \qquad (15.22)$$

где $R_0 = 6370$ км — радиус Земли.

15.3.2. Применение неэлементарных моделей. Лучевая модель радиолинии становится, в строгом смысле, неприменимой, если доминантная область не лежит целиком над земной поверхностью. В относительно простом случае антенны A и B находятся в пределах прямой видимости, причем участок земной поверхности на трассе близок к плоскому. Когда антенны расположены непосредственно у Земли (их высоты значительно меньше длины волны), лучевая модель теряет всякий смысл и применяется строгий электродинамический подход (см. п. 15.2.1), при котором, однако, вместо земной поверхности вводят бесконечную плоскую границу, разделяющую два разнородных полупространства. Этот подход, разрабатывавшийся еще А. Зоммерфельдом [Г.6], потребовал усилий многих специалистов для преодоления вычислительных трудностей. Приведем лишь окончательные результаты в форме, используемой в инженерной практике.

Пусть некоторая передающая антенна A находится в непосредственной близости Земли. Для определения напряженности поля в точке B применяется формула

$$E_m = \sqrt{120 D \bar{P}}\,\frac{1}{r}\,F, \qquad (15.23)$$

которая отличается от (15.4) лишь множителем $\sqrt{2}F$, где F — множитель ослабления (см. п. 15.1.2), а коэффициент $\sqrt{2}$ означает удвоение потока энергии при той же мощности в сравнении со случаем излучения в свободное пространство. Нетрудно сообразить, что такое удвоение будет иметь место, если, например, диполь Герца вместо свободного пространства расположить вблизи идеально проводящей плоскости и ориентировать ортогонально.

Равенство (15.23) вместе с системой правил определения F называют *формулой Шулейкина — Ван-дер-Поля*. На практике F находится посредством кривых Берроуза [1]) (рис. 15.12), где по оси абсцисс откладывается значение параметра ζ, зависящего от расстояния r между антеннами, находящимися вблизи Земли, и комплексной диэлектрической проницаемости ε среды, соответствующей участку Земли на трассе. В типичном случае, когда передающая антенна может рассматриваться, как наложение вертикальных диполей Герца (вертикальная поляризация),

$$\zeta = 2\pi\,\frac{r}{\lambda}\left|\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon^2}\right|, \qquad (15.24)$$

а D в (15.23) есть коэффициент направленности антенны в свободном пространстве. Определив ζ, находят F при помощи указанного графика (рис. 15.12) или — приближенно — по формуле

$$F \approx \frac{4 + 0{,}3\zeta}{4 + \zeta + 0{,}3\zeta^2}. \qquad (15.25)$$

[1]) *Burrows C. R., Gray M. C.* // Proc. IRE.— 1941.— V. 29.— P. 16.

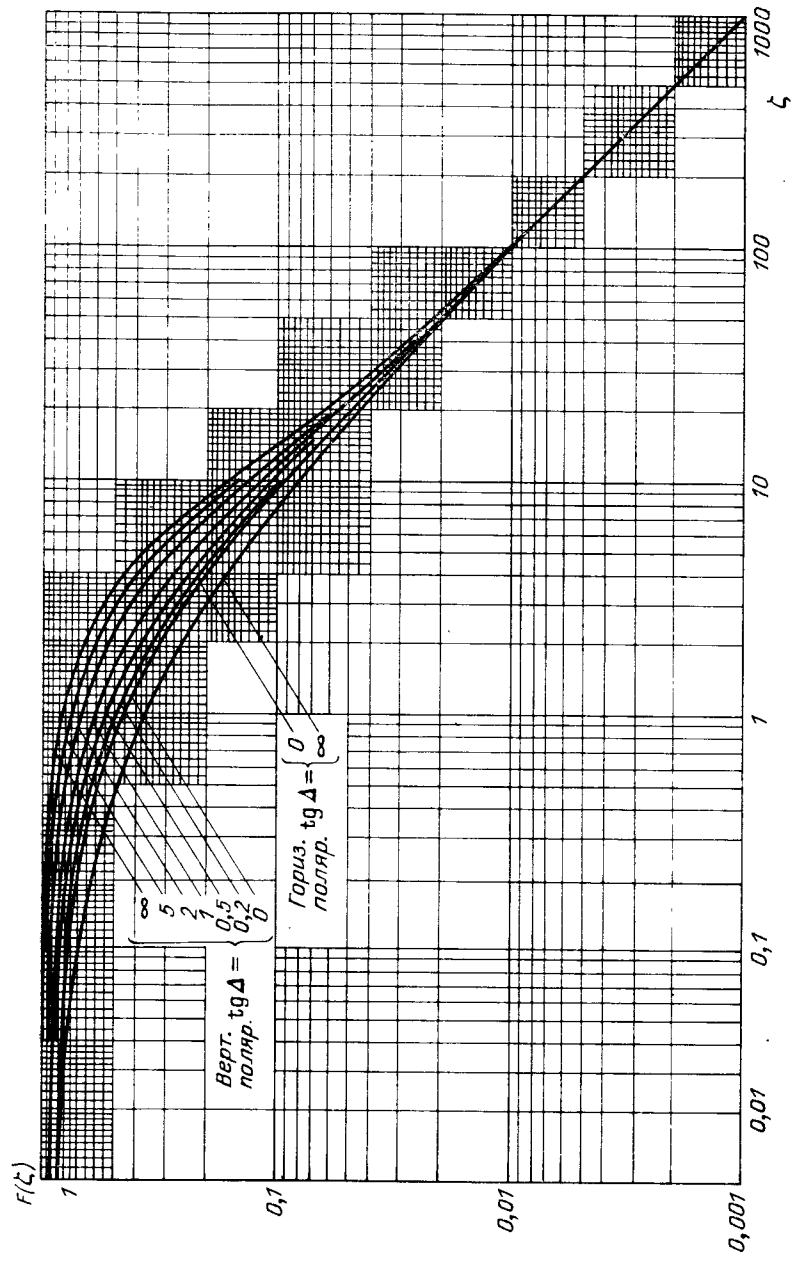


Рис. 15.12

Формулу Шулейкина — Вап-дер-Поля (15.23) применяют и при горизонтальной ориентации токов антенны (горизонтальная поляризация). В этом случае

$$\zeta = 2\pi \frac{r}{\lambda} \left| \frac{1}{\varepsilon - 1} \right|. \qquad (15.26)$$

Трактовка величины D в этом случае оказывается непростой, и мы на этом не останавливаемся; интерес представляет уже вычисление F.

Для применения рассмотренного подхода должна быть обеспечена возможность охарактеризовать всю среду на трассе при помощи достоверного значения ε. При уменьшении длины волны это,

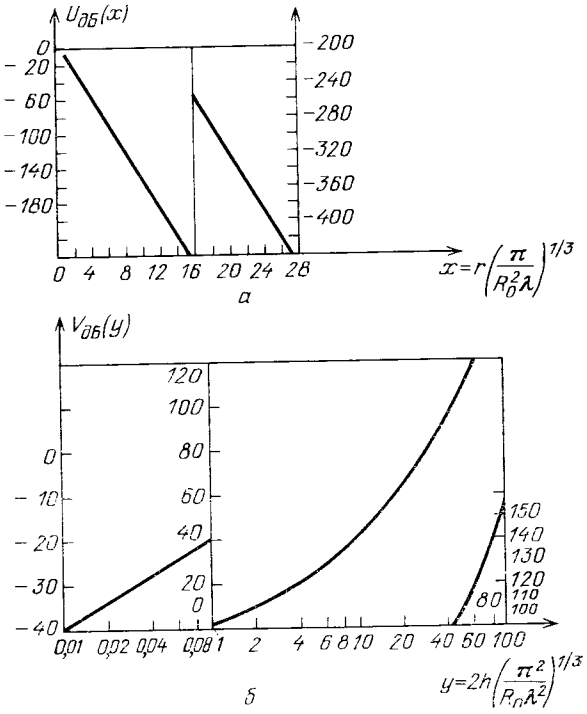


Рис. 15.13

как известно (см. п. 15.2.2), становится затруднительным уже из-за неровности земной поверхности.

Радиолинии, на которых приемная антенна лежит в области тени (см. рис. 15.3б), оцениваются при помощи математических моделей, базирующихся на решении сложной дифракционной задачи; в эту проблематику важный вклад внес В. А. Фок [Г.7]. Ограничимся записью множителя ослабления для подстановки в (15.23)

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}} U\left(\frac{r}{R_0}\sqrt[3]{\frac{\pi R_0}{\lambda}}\right) V\left(\frac{2h_1}{R_0}\sqrt[3]{\frac{\pi^2 R_0^2}{\lambda^2}}\right) V\left(\frac{2h_2}{R_0}\sqrt[3]{\frac{\pi^2 R_0^2}{\lambda^2}}\right), \qquad (15.27)$$

которая, не претендуя на высокую достоверность (параметры среды в (15.27) вообще не фигурируют), пригодна для ориентировочных оценок поля в области тени. Сомножители находятся при помощи графиков, приведенных на рис. 15.13 [Е.5].

В заключение рассмотрим несложный вопрос о характере типичного электромагнитного поля вблизи земной поверхности, полагая, что оптическая плотность почвы (водной среды) достаточна

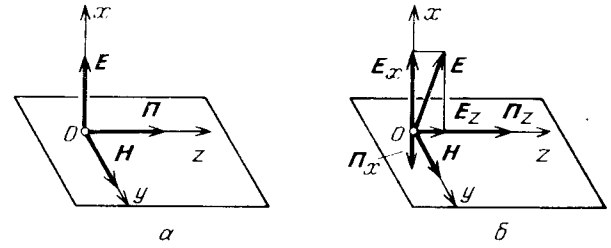


Рис. 15.14

для применения граничного условия Леонтовича. Волна имеет вертикальную поляризацию: вектор $\mathbf{E}$ перпендикулярен земной поверхности. Над Землей (локально) поле близко к плоской волне вида (рис. 15.14а):

$$\dot{\mathbf{E}}_m = \mathbf{x}_0 A e^{-ikz}, \quad \dot{\mathbf{H}}_m = \mathbf{y}_0 (A/W) e^{-ikz}. \qquad (15.28)$$

Рассматривая эти формулы в качестве начального приближения поля над Землей ($x \geqslant 0$), будем считать, что $\dot{\mathbf{H}}_m$ не нуждается в уточнении. Пользуясь граничным условием Леонтовича (5.93), видим, что на земной поверхности существует тангенциальная электрическая компонента:

$$\dot{\mathbf{E}}_{m\tau} = W_{\text{пр}} [\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{H}}_m] = \mathbf{z}_0 \frac{W_{\text{пр}}}{W} A e^{-ikz}. \qquad (15.29)$$

Она является *продольной* (рис. 15.14б). Эта компонента относительно мала, поскольку $|W_{\text{пр}}| \ll W$ и сдвинута по фазе относительно E_x. Результирующий вектор близок к $\mathbf{x}_0 E_x$. Точнее говоря, он описывает сильно вытянутый эллипс в продольной плоскости.

§ 15.4. Влияние тропосферы (А)

15.4.1. Общие свойства тропосферы. В п. 15.1.3 уже говорилось о *тропосфере*, как о нижней области атмосферы, вмещающей около 80 % всей массы воздуха. Температура воздуха, который нагревается земной поверхностью, падает с высотой и стабилизируется там,

где принято различать верхнюю границу тропосферы. Это высота $10 \div 12$ км в умеренных широтах; в полярных широтах она падает, а в экваториальных — увеличивается. Диэлектрическая проницаемость увлажненного воздуха тропосферы весьма близка к единице. У земной поверхности в среднем $n = \sqrt{\varepsilon} = 1{,}000325$, а с высотой коэффициент преломления n в нормальных условиях все более приближается к единице, уменьшаясь вместе с плотностью воздуха. Это показано на рис. 15.15, где представлена зависимость так называемого *индекса преломления* $N = (n-1)\cdot 10^6$ от высоты. Это идеализированный закон изменения N [Е.1]. В результате конвекции воздушная масса тропосферы находится в движении; изменения влажности, а также температурного режима обусловливают в первую очередь плавные изменения показанного на рис. 15.15 профиля индекса преломления. При специфических распределениях температуры и влажности возможно и нарастание N с высотой. Существенны локальные — мелкомасштабные — изменения плотности воздуха, а следовательно, и параметра N, которые имеют флуктуационный характер. Роль этих неоднородностей, а также осадков и свойств газовой среды тропосферы мы обсудим в п. 15.4.3. Сначала же рассмотрим тропосферу как среду с плавно меняющимися свойствами.

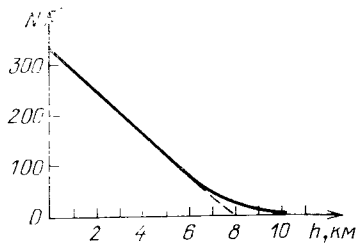


Рис. 15.15

15.4.2. Тропосферная рефракция. В условиях применимости лучевой модели радиолинии (в первую очередь, на УКВ) распространение радиоволн в тропосфере как слабо неоднородной среде естественно истолковывать, используя понятие *рефракции*, искривления лучей (см. п. 5.5.3). При этом обычно применяется формула (5.120).

Обратимся к рис. 15.16*а*, на котором штриховой линией показано направление луча в среде, принимаемой за однородную. Поскольку для нормального состояния тропосферы $dn/dz < 0$, то $R > 0$: искривление луча происходит в сторону Земли (сплошная линия на рис. 15.16*а*). В результате увеличивается расстояние прямой видимости, что можно истолковать как кажущееся возрастание радиуса Земли. Воображаемая картина представлена на рис. 15.16*б*;

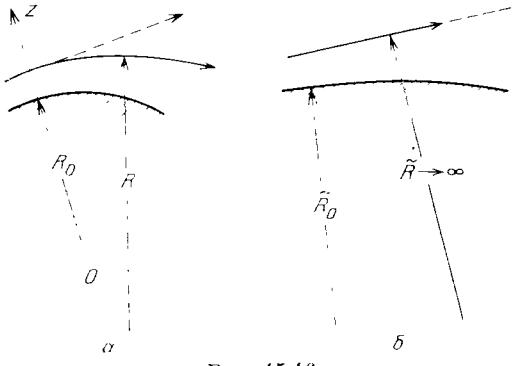


Рис. 15.16

кажущийся радиус земного шара $\tilde{R}_0$ больше действительного его радиуса R_0, а среда вблизи Земли однородна ($n = 1$), так что луч — прямой. Условием эквивалентности лучевых картин на рис. 15.16*а* и рис. 15.16*б* будем считать равенство

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} = \frac{1}{R} - \frac{1}{\tilde{R}_0}. \tag{15.30}$$

Разности слева и справа выражают относительную кривизну луча и контура земной поверхности. Поскольку $\tilde{R} \to \infty$, то из (15.30) следует:

$$\tilde{R}_0 = \frac{R_0}{1 - R_0/R}. \tag{15.31}$$

Получив таким путем выражение *эквивалентного радиуса* земного шара при рефракции, мы можем исключить радиус кривизны луча R посредством формулы (5.120). Взяв $\vartheta_0 = 90°$, получаем:

$$\tilde{R}_0 = \frac{R_0}{1 + \frac{1}{n}\frac{dn}{dz}R_0} = \frac{R_0}{1 + R_0\frac{dn}{dz}}. \tag{15.32}$$

Отсюда при $R_0 = 6370$ км и $dn/dz = -4\cdot 10^{-5}$ км$^{-1}$ (это соответствует линейному участку кривой на рис. 15.15) получаем, что $\tilde{R}_0 \approx \approx 8500$ км. Подставляя $\tilde{R}_0$ вместо R_0 в различные формулы, учитывающие кривизну земной поверхности, можно оценивать влияние тропосферы на распространение радиоволн. Так, например, на основе (15.22) легко прийти к выводу, что при нормальном состоянии тропосферы расстояние прямой видимости увеличивается приблизительно на 15 %.

Обсудим различные типы тропосферной рефракции — реальные и гипотетические, отвечающие мыслимым состояниям тропосферы. При $dn/dz > 0$ рефракция называется *отрицательной*; луч уклоняется от земной поверхности, а расстояние прямой видимости уменьшается (рис. 15.17*а*). Если $dn/dz = 0$, рефракция отсутствует, луч остается прямым (рис. 15.17*б*). Уже обсуждавшаяся рефракция, наблюдаемая при $dn/dz < 0$, называется *положительной* (рис. 15.17*в*). Можно представить себе и так называемую ***критическую*** рефракцию, при которой луч совпадает с дугой окружности, концентрической земному шару (рис. 15.17*г*); трудно ожидать, что условие реализации критической рефракции может быть выполнено на трассах большой протяженности, а тем более — привести к кругосветному распространению радиоволны. Упомянутое условие выводится при помощи формулы (5.120): требуется, чтобы производная dn/dz была равна величине $dn/dz|_{кр} \approx -1{,}57\cdot 10^{-4}$ км$^{-1}$. В случае, если $dn/dz < < dn/dz|_{кр}$, будет иметь место *сверхрефракция* (рис. 15.17*д*), когда луч возвращается к Земле; отразившись от земной поверхности, он может вновь испытать сверхрефракцию в тропосфере. Если это про-

исходит многократно, говорят об образовании *тропосферного волновода* (рис. 15.17*е*).

Хотя различные отклонения от нормального распределения плотности тропосферы имеют местный и нерегулярный характер, их нельзя не принимать во внимание. Давно производятся исследования

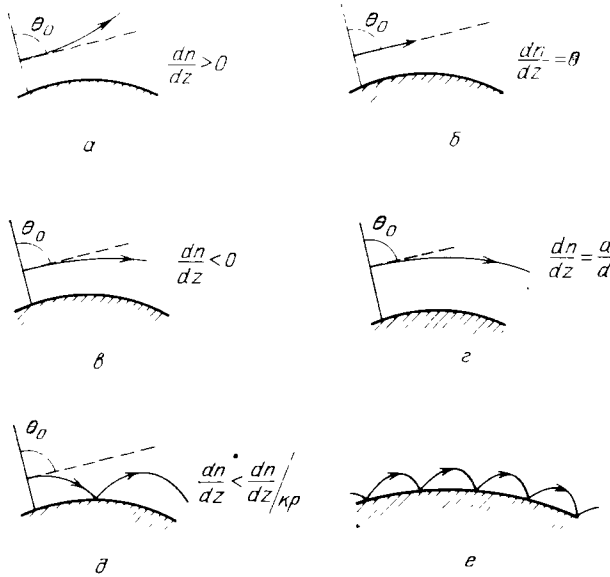


Рис. 15.17

метеорологических условий, способствующих образованию тропосферных волноводов. Последние, в принципе, могут быть использованы для передачи УКВ на дальние расстояния, однако по этому поводу существуют разные точки зрения.

15.4.3. Рассеяние и поглощение радиоволн в тропосфере. Тропосфера подвержена разным изменениям случайного характера, причем турбулентные движения воздуха вызывают многочисленные локальные изменения его плотности, а следовательно, и оптической плотности среды. Каждое такое образование есть, в сущности, объект дифракции волн, *переизлучатель*. Разумеется, колебания диэлектрической проницаемости среды настолько малы, что только наложение огромного количества полей, рассеянных отдельными образованиями, может привести к заметному эффекту. Полагают, что значительную роль играет рассеяние радиоволн на неоднородностях слоистого типа. Теория тропосферного рассеяния базируется на статистических принципах. Она еще не может считаться вполне разработанной. В существовании процессов рассеяния радиоволн в тропосфере, которыми нельзя пренебречь, убеждаются в первую очередь наблюдения. Давно уже отмечено, что в диапазоне УКВ

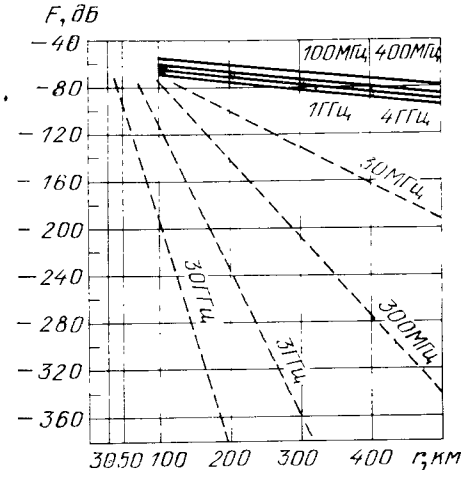


Рис. 15.18

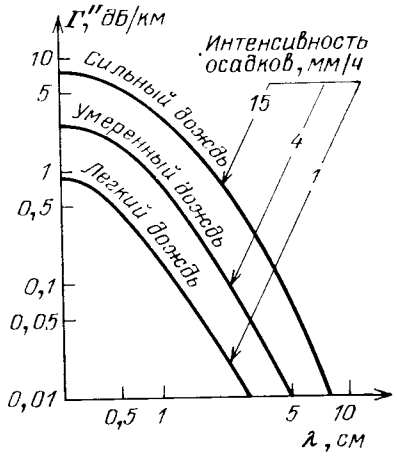


Рис. 15.19

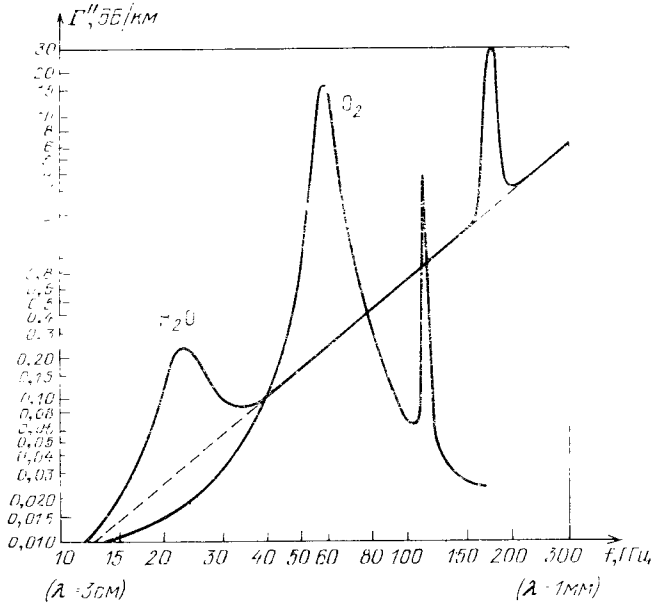


Рис. 15.20

измерения средней напряженности поля в области тени систематически дают значительно более высокие значения, чем можно ожидать на основании дифракционной теории для стабильной среды. Это демонстрируется на рис. 15.18 [Е.7], где экспериментально найденные значения множителя ослабления F показаны сплошными линиями, а результаты указанных расчетов — штриховыми. Хотя поле тропосферного рассеяния испытывает резкие случайные колебания — *замирания*,— наличие этого поля дает основание говорить о дальнем распространении УКВ. Специальные системы связи, использующие тропосферное рассеяние, обеспечивают радиопередачу на расстояния в многие сотни километров.

По мере уменьшения длины волны, уже начиная с $\lambda \approx 10$ см, все более заметно проявляется действие осадков. В сантиметровом диапазоне волн капли дождя — весьма существенные объекты дифракции. В системе капель рассеяние многократно: поле рассеяния каждого объекта дифрагирует на других. Появляется дополнительное поглощение, но и непоглощенное поле рассеяния отнимает энергию у распространяющейся волны, вызывая излучение в стороны. На рис. 15.19 представлены кривые, характеризующие затухание радиоволн в зависимости от интенсивности осадков [Е.5]; они получены путем измерений. Как и следовало ожидать, затухание возрастает с уменьшением длины волны.

В п. 14.2.3 кратко обсуждалась сущность резонансного поглощения в диэлектрической среде. Частотная характеристика коэффициента затухания радиоволн в тропосфере, обусловленного молекулярным поглощением в воздухе с примесью водяных паров (10 г/м^3), представлена на рис. 15.20 [Е.5].

Проблема прозрачности тропосферы весьма важна при использовании оптических волн. В частности, ввиду молекулярного поглощения здесь можно выделить лишь ряд *окон прозрачности*, к которым относится и участок спектра $0{,}4 \div 0{,}8$ мкм, содержащий область видимого света.

§ 15.5. Радиоволны в ионосфере (А)

15.5.1. Общие свойства ионосферы. Начиная с высоты около $50 \div 60$ км, существенно проявляется ионизация атмосферной среды. Это нижняя граница так называемой *ионосферы*. Степень ионизации характеризуют числом свободных электронов N' в единице объема среды (см. п. 14.2.1). Величина N' достигает максимума на высоте $250 \div 400$ км. Ионосферу, лежащую ниже этого уровня, называют внутренней, а лежащую выше — внешней. Последняя вплоть до высоты порядка радиуса земного шара может оказывать заметное влияние на распространение радиоволн.

Основной причиной ионизации атмосферы является ультрафиолетовое и рентгеновское излучение Солнца (в диапазоне волн короче 0,1 мкм); известно, что на эту часть спектра приходится довольно малая доля солнечного излучения. Более длинноволновое излучение (с меньшей энергией квантов), можно сказать, не в состоянии произвести требуемую работу ионизации. Вторым по значению фактором ионизации являются корпускулярные потоки, также в основном солнечного происхождения. Плотность энергии ионизирующего потока, приходящего к Земле, по мере проникновения в атмосферу падает в результате поглощения. Плотность же газа по мере приближения к Земле возрастает. Поэтому-то электронная концентрация N' как функция высоты имеет максимум: на некоторой высоте ионизация наиболее интенсивна.

Ввиду многообразия и сложности физических процессов в околоземном пространстве действительная структура ионосферы отнюдь не исчерпывается этим простым описанием. В ионосфере различают три основные области, обозначаемые буквами D, E и F; их называют также *слоями*, а при детальном рассмотрении фигурирует и более тонкая структура ионосферы, в частности, выделяют области F_1 и F_2. На рис. 15.21 представлено несколько идеализированное распределение электронной концентрации N' (в см$^{-3}$) в ионосфере с высотой [Е.9] (см. также [Е.1]). Днем степень ионизации значительно выше; в ночное время слои F_1 и F_2 не имеют резкой границы, а нижняя граница ионосферы поднимается до высоты около 100 км, причем исчезает область D. В зависимости от степени солнечной активности (11-летний цикл), сезона и времени суток это распределение варьируется. Пределы изменения высоты максимума электронной концентрации и максимального значения N' на рис. 15.21 показаны крестом стрелок. Указаны также основные факторы ионизации для областей D, E и F (вертикальные стрелки); символы L_α и L_β — обозначения линий серии Лаймана спектра водорода. В табл. 15.2 приведены некоторые подробности структуры ионосферы [Е.8]. Слой E_1, согласно существующим данным, в дневное время имеется во все сезоны на всем земном шаре, а слой E_2 — только в некоторых местах. Так называемые

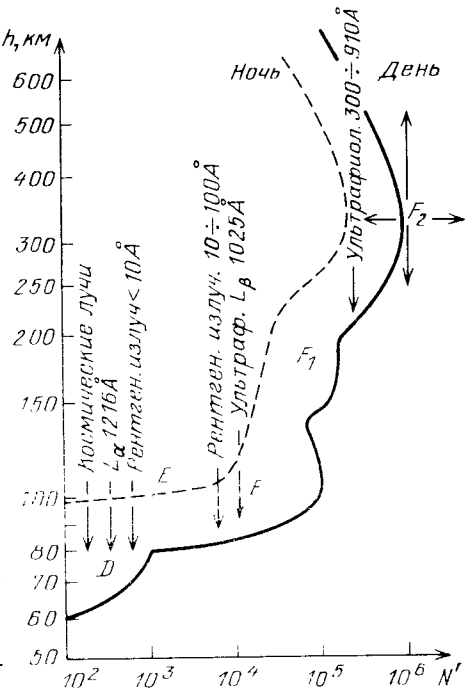


Рис. 15.21

спорадические слои E_s состоят из образований небольшой горизонтальной протяженности (десятки километров); появление этих образований подчинено сложным закономерностям. В области F часто нет четкого выделения слоев F_1 и F_2. Вообще слой F наиболее нерегулярен и подвержен влиянию магнитного поля Земли. Некоторые исследователи считают необходимым выделять так называемый слой $F_{1\frac{1}{2}}$. Следует также иметь в виду, что ионосфера обладает нерегулярной тонкой структурой; речь идет о локальных вариациях электронной концентрации случайного характера.

Для характеристики ионосферы в целом весьма существенно, что имеют место крупномасштабные нерегулярные явления. При

Таблица 15.2

Строение ионосферы

Область ионосферы	Высота, км	Слой	Приблизительная высота, км	N', м$^{-1}$ *)
D	50÷90	C	65	$\sim 10^8$
		D	75÷80	$\sim 10^9$
E	90÷120—140	E_1	110	$\sim 10^{11}$
		E_2		
		E_s	100	?
F	120÷140 и выше	F_2, $F_{1\frac{1}{2}}$,	200	$\sim 2\cdot 10^{11}$
		F_2	250	$\sim 10^{12}$

*) Примечание: N' соответствует дневному времени.

магнитных бурях, возникающих в результате вторжения в ионосферу корпускулярных потоков, вызываемых вспышками на Солнце, происходит резкое изменение режима области F. По меньшей мере можно говорить о сильном уменьшении электронной концентрации и увеличении высоты ее максимума. Влияние магнитных бурь сильнее в полярных зонах. Другого рода вспышки на Солнце — хромосферные — характерны весьма значительным усилением ультрафиолетового и рентгеновского излучения. В результате глубокого проникновения излучения происходит резкое повышение ионизации в области D.

15.5.2. Ионосферная рефракция. Об особой роли ионосферы, выступающей как «природное зеркало», уже говорилось выше в п. 15.1.3. Рассматривая рефракцию в ионосфере, будем исходить из общих результатов, обсуждавшихся в пп. 5.5.3—5.5.4 и 14.2.1.

Обратимся к рис. 15.22*а*, на котором показано, как падающий под углом θ_0 на нижнюю границу ионосферы луч искривляется в ней. Пусть на некотором уровне мгновенное направление луча характеризуется углом ϑ, а среда — коэффициентом преломления n. Тогда

$$n_0 \sin\theta_0 = n \sin\vartheta, \qquad (15.33)$$

где $n_0 = 1$ — коэффициент преломления воздушной среды, которую можно считать однородной (соответственно этому падающий луч — прямой). Равенство (15.33) прямо следует из (5.130); еще проще прийти к нему, рассматривая дискретную модель среды (см. рис. 5.29*а*). Действительно, записывая второй закон Снеллиуса для

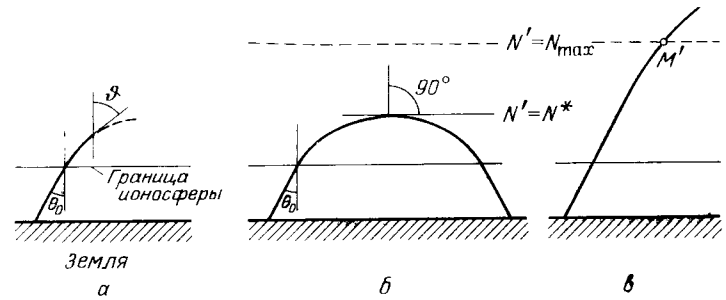


Рис. 15.22

каждой из границ, убеждаемся, что все величины $n_i \sin\vartheta_i$ равны между собой.

Итак, мы первых порах не будем также учитывать потери в ионосферной плазме и действие магнитного поля Земли. Подставляя в (15.33) в качестве n согласно (14.40), (14.41) величину $\sqrt{\varepsilon} = \sqrt{1-(\omega_p/\omega)^2} = \sqrt{1-80{,}6N'/f^2}$, получаем:

$$\sin\theta_0 = \sqrt{1-80{,}6N'/f^2}\,\sin\vartheta. \qquad (15.34)$$

Равенство (15.34) может быть выполнено, только если подкоренное выражение положительно. Последнее с ростом высоты должно уменьшаться во внутренней ионосфере (пока N' растет) и увеличиваться во внешней (где N' падает). Таким образом, во внутренней ионосфере угол ϑ будет возрастать. Общий характер лучевой траектории зависит от того, «успеет» ли он увеличиться до 90°, т. е. существует ли (для данных θ_0 и f) достаточно высокая концентрация $N' = N^*$, при которой будет выполнено равенство

$$\sin\theta_0 = \sqrt{1-80{,}6N^*/f^2}, \qquad (15.35)$$

получаемое при $\vartheta = 90°$ из (15.34). Если $N^* < N'_{max}$, то условие (15.35) будет выполнено (на какой-то высоте) и луч достигнет точки поворота (рис. 15.22*б*); дальнейшая — нисходящая — часть траектории симметрична первоначальной. Заметим, что в точке поворота реализуется предельный случай полного отражения. Если же $N^* > N'_{max}$, то в ионосфере не найдется уровня, на котором $N' = N^*$. Равенство (15.36) уже не может быть выполнено (при данных θ_0 и f). Луч будет уклоняться к Земле вплоть до уровня

$N' = N'_{\max}$, а при переходе во внешнюю ионосферу начнет уклоняться от Земли (рис. 15.22*в*) и в конечном счете уйдет за атмосферу.

Условие поворота луча к Земле (15.35) легко привести к форме:

$$\cos\theta_0 = \omega_p(N^*)/\omega \approx 9\sqrt{N^*}/f. \qquad (15.36)$$

Пусть угол θ_0 задан, а частота f варьируется. Как из (15.35), так и из (15.36) ясно видно, что всегда найдется достаточно низкая частота, при которой луч повернет к Земле (соответствующая величина N^* выбирается из интервала $(0, N'_{\max})$). Легко понять, что существует предельный угол падения луча на границу ионосферы $\theta_{0\,\text{пр}}$, определяемый с учетом сферичности Земли (рис. 15.23):

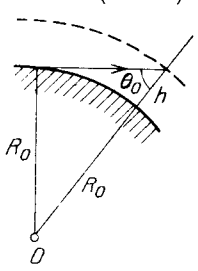


Рис. 15.23

$$\cos\theta_{0\,\text{пр}} = \sqrt{(2R_0 + h)\,h}/(R_0 + h). \qquad (15.37)$$

Это минимальное значение функции $\cos\theta_0$ для земной радиолинии. Таким образом, из (15.36) и (15.37) следует, что существует наибольшая возможная частота в условиях земной радиолинии, использующей ионосферные волны:

$$f_{\max\text{пр}} \approx 9\sqrt{N'_{\max}}\,(R_0 + h)/\sqrt{(2R_0 + h)\,h}, \qquad (15.38)$$

где h — высота нижней границы ионосферы (рис. 15.23). Эта частота лежит приблизительно на границе КВ и УКВ диапазонов:

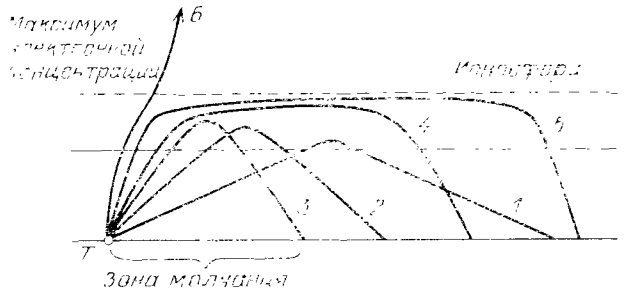


Рис. 15.24

в годы наибольшей солнечной активности она сдвигается в область ОВЧ (метровые волны).

Поскольку для поворота луча к Земле на более длинных волнах нужны меньшие электронные концентрации, то чем длиннее волна, тем менее глубоко луч (и поле) проникает в ионосферу. При фиксированной частоте глубина проникновения луча тем больше, чем меньше угол θ_0. На рис. 15.24 показана серия лучевых траекторий [Е.8], соответствующих различным углам θ_0 при фиксированной частоте f: величина θ_0 убывает в порядке возрастания номера траектории. Интересно, что расстояние между начальной и конечной точками луча (длина радиолинии) сначала падает, но при дальнейшем убывании θ_0 снова возрастает. Существует некоторая минимально возможная длина. Поэтому вводят понятие *зоны молчания* (*мертвой зоны*). Для радиолиний, использующих только ионосферные волны, это круг, в центре которого — передающая антенна, а радиус равен указанной минимально возможной длине.

Наш анализ, как уже отмечалось, является упрощенным. От плоской модели ионосферы можно перейти к сферической, но мы этого делать не будем. Потери энергии при распространении радиоволн в ионосфере будут рассмотрены ниже в п. 15.5.3. Что касается влияния магнитного поля Земли, то о нем будет говориться в гл. 16: мы увидим, что плазма в магнитном поле обладает анизотропией, которую в той или иной мере надо принимать во внимание и при рассмотрении ионосферных волн.

Заметим также, что применение лучевой трактовки требует ряда оговорок. Во-первых, мы не имеем права говорить о сколь угодно низких частотах: геометрические размеры (например, высота ионосферы) должны во много раз превосходить длину волны. Во-вторых, лучевой подход теряет смысл, если свойства среды значительно изменяются на расстояниях порядка длины волны. Когда диэлектрическая проницаемость приближается к нулю, длина волны в среде сильно увеличивается. В этом случае строгий электродинамический анализ необходим. Тем не менее, изложенная выше простая теория правильно передает основные черты процесса при распространении радиоволн в ионосфере.

15.5.3. Дисперсия и поглощение радиоволн. Интересно, что в пренебрежении потерями дисперсия электромагнитной T-волны, распространяющейся в плазме, имеет характер волноводной дисперсии. Ввиду (14.40) волновое число T-волны есть

$$k = k_0\sqrt{1 - (f_p/f)^2}, \qquad f_p = \omega_p/2\pi, \qquad (15.39)$$

где $k_0 = \omega/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = \omega/c$. Такой же вид согласно (6.21) имеет выражение постоянной распространения E- или H-волны полого волновода: плазменная частота в (15.39) играет роль критической частоты, входящей в (6.21). Поэтому выражения фазовой и групповой скоростей T-волны в плазме получаются из (6.23), (6.24) при замене $f_{\text{кр}} \to f_p$, $v \to c$. При $f < f_p$ рассматриваемая идеализированная T-волна в плазме испытывает такое же превращение, как волноводная волна при $f < f_{\text{кр}}$: поле экспоненциально затухает без переноса энергии.

Чтобы выразить волновое число T-волны в плазме без пренебрежения потерями, используем формулы (4.42) и внесем в них $\mathbf{k} = (\omega/c)\sqrt{\varepsilon'\mu'}$ (4.38) и $\operatorname{tg}\Delta = \varepsilon''/\varepsilon'$, где $\mu' = 1$, а ε' и ε'' даются их

выражениями (14.45). Это дает

$$k' = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2+\nu^2}\right)\left[1+\sqrt{1+\frac{\nu^2\omega_p^4}{\omega^2\left(\omega^2+\nu^2-\omega_p^2\right)^2}}\right]}, \tag{15.40}$$

$$k'' = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2+\nu^2}\right)\left[-1+\sqrt{1+\frac{\nu^2\omega_p^4}{\omega^2\left(\omega^2+\nu^2-\omega_p^2\right)^2}}\right]},$$

где $\omega_p^2 = N'e^2/\varepsilon_0 m$, как в (14.40).

Если $\operatorname{tg}\Delta \ll 1$, т. е. плазма может рассматриваться как несовершенный диэлектрик, то

$$k' \approx \frac{\omega}{c}\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2+\nu^2}}, \quad k'' \approx \frac{1}{2c}\frac{\nu\omega_p^2}{\sqrt{\left(\omega^2+\nu^2\right)\left(\omega^2+\nu^2-\omega_p^2\right)}}. \tag{15.41}$$

Эти выражения можно получить, отправляясь от формул (15.40). Пусть также $\omega \gg \nu$. Тогда из (15.41) следует

$$k' \approx \frac{\omega}{c}\sqrt{1-\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}, \quad k'' \approx \frac{1}{2c}\frac{\nu\omega_p^2}{\omega\sqrt{\omega^2-\omega_p^2}}, \tag{15.42}$$

и если, кроме того, $\omega \gg \omega_p$, то получается следующая формула для коэффициента затухания:

$$k'' \approx \frac{1}{2c}\nu\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 = A\frac{\nu N'}{f^2}, \tag{15.43}$$

где $A = e^2/8\pi^2\varepsilon_0 mc$. Эта формула обычно применяется для оценок затухания в диапазоне КВ. Согласно (15.43) коэффициент затухания k'' обратно пропорционален квадрату частоты и прямо пропорционален произведению $\nu N'$. Из рис. 15.25 [Е.8] видно, что хотя электронная концентрация N' быстро растет с высотой во внутренней ионосфере, частота соударений ν с еще большей скоростью падает, что связано с уменьшением плотности среды. В результате произведение $\nu N'$, а с ним и k'', значительно уменьшается с высотой. Наиболее поглощающей является область D.

Возвращаясь к формулам (15.41), замечаем, что при достаточно больших ν величина k'' с ростом ν уменьшается. Если $\nu^2 \gg \omega^2$, то из (15.41) следует:

$$k'' \approx \frac{1}{2\varepsilon}\frac{1}{\nu}\omega_p^2 = 4\pi^2 A\frac{N'}{\nu}, \tag{15.44}$$

где A то же, что и в (15.43).

При небольших электронных концентрациях и низких частотах ($\omega_p \ll \nu$, $\omega \ll \nu$) из (14.45)

$$\operatorname{tg}\Delta \approx \omega_p^2/\omega\nu. \tag{15.45}$$

Если в то же время $\omega_p^2 \gg \omega\nu$, плазма проявляет себя как проводник. Тогда ввиду (4.47)

$$\left.\begin{matrix}k'\\k''\end{matrix}\right\} \approx \frac{\omega_p}{c}\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}. \tag{15.46}$$

В заключение подчеркнем, что все обсуждавшиеся результаты основываются на элементарной теории столкновений электронов

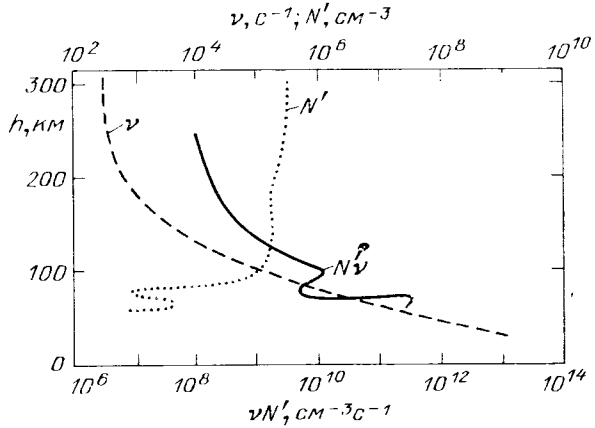


Рис. 15.25

плазмы с тяжелыми частицами (см. п. 14.2.2). Преодоление допущенных упрощений требует уже значительного усложнения теории (см., например, [Д.12]).

§ 15.6. Диапазонные особенности распространения радиоволн и работа радиолиний (А)

15.6.1. Вводные замечания. Сверхдлинные и длинные волны. Общие черты распространения радиоволн в природных условиях уже обсуждались в п. 15.1.3. Теперь — после изучения роли земной поверхности, тропосферы и ионосферы в § 15.2—15.5 — можно сосредоточить внимание на диапазонных особенностях распространения радиоволн и связанных с этим вопросах работы радиолиний.

Для электромагнитных полей, соответствующих диапазонам СДВ и ДВ, различные виды почв, а тем более все водные среды выступают как проводники. Справедливость сделанного утверждения может нарушаться лишь вблизи границы диапазона СВ для сухих почв (см. табл. 1.2). Но, например, для сухой почвы с $\varepsilon = 4$ и $\sigma = 10^{-3}$ См/м при $f = 10$ кГц находим: $\operatorname{tg}\Delta \approx 45$, что уже вполне отвечает критерию проводника.

Добавим, что на СДВ и СВ земная поверхность оценивается как наиболее гладкая. Поскольку это граница проводника, магнитное

поле вблизи нее близко к тангенциальному, а электрическое — к нормальному. Волновое сопротивление проводящей среды мало по модулю, так что невелико поглощение при отражении. Поэтому так называемая земная волна слабо затухает и может использоваться для связи на расстояниях даже порядка 3000 км. Поскольку передающая и приемная антенны находятся непосредственно вблизи земной поверхности, естественной оказывается вертикальная поляризация волны (параллельная поляризация, п. 5.2.2). Поэтому одной из типичных антенн является вертикальная металлическая башня, близкая по своему действию к элементарному электрическому излучателю (§ 9.2), так как размеры антенны, разумеется, малы по сравнению с длиной волны.

Ионосферные волны тоже поглощаются слабо, потому что в ионосфере проходит относительно небольшая часть трассы. Ведь, как было показано в п. 15.5.2, чем ниже частота, тем (при прочих равных условиях) меньше электронная концентрация $N' = N^*$, необходимая для поворота луча к Земле. Высота поворота с уменьшением частоты падает и на СДВ — СВ оказывается близкой к высоте нижней границы ионосферы. Днем отражение происходит от границы области D, а ночью (когда последняя отсутствует) — от границы области E.

Можно сказать, что область пространства, в которой распространяются рассматриваемые волны, есть сферический слой, лежащий между земной поверхностью и нижней границей ионосферы; обе границы в значительной степени осуществляют энергетическую изоляцию. Передающая антенна в точке A (рис. 15.26$а$), в сущности, возбуждает электродинамическую структуру, подобную полому резонатору, размеры которого даже на СДВ весьма велики по сравнению с длиной волны, а добротность низка, поскольку «через оболочку» все же уходит заметный поток энергии (потери в Земле и ионосфере). Движение энергии происходит, как в сферическом аналоге плоского полого волновода (см. п. 5.3.2). Если задаться некоторыми постоянными параметрами обеих сферических границ атмосферного слоя (внутреннюю среду можно при этом считать однородной и даже принять за вакуум), то можно получить строгое электродинамическое решение задачи типа (11.53). На этой основе анализируют распространение СДВ и СВ, используя представление о возбуждении различных типов волн сферического слоя. Наглядны лучевые схемы. Анализ показывает, что лучи, выходящие из точки A, сходятся в точке антипода B (рис. 15.26$а$), где должна возрасти напряженность поля.

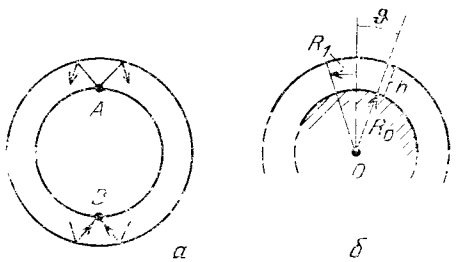


Рис. 15.26

Обсудим этот эффект антипода в предположении, что обе сферические границы являются идеально изолирующими. Тогда вся энергия, излучаемая антенной A, проходит через конический пояс (рис. 15.26$а$, $б$), площадь которого S может быть достаточно точно вычислена, как произведение высоты h границы ионосферы на среднюю длину пояса $2\pi R_1 = 2\pi(R_0 + h/2)\sin\vartheta \approx 2\pi R_0 h \sin\vartheta$ (рис. 15.26$б$). Если поток энергии в слое равномерен по высоте, то, исходя из заданной мощности антенны $\overline{P}_A$, имеем $\overline{P}_A = \overline{\Pi} S = E_m^2 S/2W$. Отсюда находим напряженность поля в точке приема, характеризуемой углом ϑ:

$$E_m \approx \sqrt{120\overline{P}_A/R_0 h \sin\vartheta} \qquad (15.47)$$

(на близких расстояниях от антенны A выражение теряет смысл). Согласно (15.47) напряженность поля в точке антипода B ($\vartheta = 180°$) должна быть бесконечной. В действительности в точке B можно ожидать возрастания поля несколько менее, чем на порядок, по сравнению с величиной, наблюдаемой в близкой зоне.

В практике расчета радиолиний СДВ и СВ используется эмпирического происхождения формула Остина

$$E_m = \sqrt{\frac{18\overline{P}_A D_A \vartheta}{\sin\vartheta}}\,\frac{10^2}{r}\exp\left(-\frac{0{,}0014}{\lambda^{0{,}6}}r\right). \qquad (15.48)$$

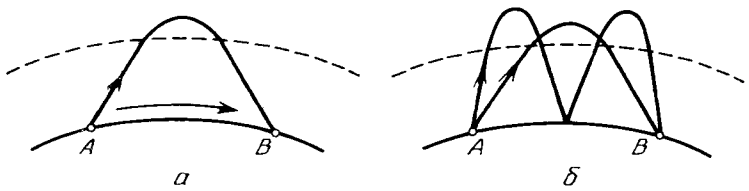
Здесь угол ϑ отсчитывается, как показано на рис. 15.26$б$; r и λ выражены в км; мощность, излучаемая антенной, $\overline{P}_A$ — в кВт, напряженность поля в месте приема E_m — в мВ/м. Формулой Остина пользуются до расстояний $16\,000 \div 18\,000$ км при расчете радиолиний, функционирующих в дневные часы и проходящих над морем и сушей (в последнем случае, начиная с расстояний $2000 \div 3000$ км). При расчетах напряженности поля земной волны до расстояний порядка 500 км применяется формула Шулейкина — Ван-дер-Поля (график Берроуза, см. рис. 15.12); начиная с таких расстояний, земная волна существенно слабее ионосферной. Тропосфера практически не оказывает влияния на распространение СДВ и ДВ.

Впервые в истории рассматриваемые волны использовались для трансатлантической связи (частоты $15 \div 50$ кГц).

Радиолинии на СДВ и ДВ характеризуются высоким уровнем грозовых помех. Антенные сооружения имеют громадные размеры, оставаясь малыми по сравнению с длиной волны, они весьма дороги, направленность излучения невелика, узка полоса частот. В то же время связь устойчива по отношению к ионосферным возмущениям; зона действия передатчика плавно — без резких колебаний поля — охватывает огромные пространства. Международными соглашениями предусматривается применение СДВ и ДВ, главным образом, для радионавигации и радиовещания. Отметим также, что с понижением частоты увеличивается глубина проникновения поля

в проводящие среды. Поэтому СДВ имеют преимущество при реализации радиолиний под водой (связь с подводными лодками и пр.). Некоторые особенности распространения СДВ, связанные с действием земного магнетизма, будут затронуты в гл. 16.

15.6.2. Средние волны. По мере увеличения частоты условия распространения радиоволн изменяются настолько, что для диапазона СВ характерными оказываются уже иные особенности. Из-за большего поглощения в почве радиолинии СВ, использующие земную волну, могут иметь протяженность лишь порядка 1000 км. Что касается ионосферной волны, то она способна отразиться лишь при электронной концентрации, свойственной слою E. Поэтому днем, когда существует более низкий слой D, волна проходит через него и практически полностью поглощается. Ночью же поглощение соответственно гораздо меньше, и радиолиния может работать на ионосферной волне; ее протяженность при этом весьма значительно возрастает. Существенно, что ночью в точку приема B могут прийти одновременно земная и ионосферная волны (рис. 15.27*а*) или, например, две ионосферные волны (рис. 15.27*б*). Поскольку состояние ионосферы подвержено постоянным изменениям (а участок



а *б*

Рис. 15.27

трассы в ионосфере по сравнению с ДВ может быть значителен), фаза проходящей волны будет заметно изменяться со временем. По этой причине в обоих отмеченных случаях интерференция волн приводит то к ослаблению, то к усилению поля в месте приема. С этими *замираниями* (другое их название — *фединг*) борются, стараясь уменьшить излучение передающей антенны под большими углами к горизонту (малые θ_0), чтобы подавить возбуждение ионосферной волны. Тогда увеличивается так называемая зона уверенного приема (земной волны).

Средние волны используются, главным образом, в радиовещании; имеются и радионавигационные системы на СВ. Типичная дальность радиолиний соответствует применению земной волны.

Приведем эмпирическую формулу [Е.1] для напряженности поля в месте приема средневолновой радиолинии, полученную в результате длительных наблюдений в условиях европейского радиовещания:

$$E_m = (10\,233 r^{-1/2}) \sqrt{2 \bar{P}_A D_A} \exp(-8{,}94 \cdot 10^{-4} \lambda^{-0{,}26}) \qquad (15.49)$$

(обозначения те же, что и в (15.48)).

15.6.3. Короткие волны. Для коротких волн почва ведет себя как несовершенный диэлектрик, и они глубоко проникают в ионосферу. Первое приводит к сильному поглощению земной волны, которая оказывается пригодной для радиосвязи лишь на десятки километров. Основной практический интерес представляют ионосферные волны, причем типичные электронные концентрации, соответствующие повороту луча к Земле, лежат в области F; области D и E в основном обусловливают поглощение волны. В п. 15.5.2 говорилось о зоне молчания, круговой области, внутри которой невозможен прием ионосферных радиоволн. В более точном смысле зоной молчания называют кольцевую область, внутренний радиус которой соответствует дальности приема земной волны в диапазоне КВ. Таким образом, это зона, в которой уже не принимается земная волна, но еще не может быть использована волна ионосферная. Другим характерным эффектом, свойственным диапазону КВ, является *кругосветное эхо* — наложение на принимаемый сигнал другого, который создается волной, обошедшей земной шар путем многократных отражений от ионосферы и Земли (в прямом или обратном направлении). Время запаздывания при однократном обходе земного шара составляет около 0,13 с.

На коротких волнах впервые в практике радиосвязи были реализованы остронаправленные антенны, позволяющие экономно расходовать энергию при двусторонней связи. Наличие таких антенн и относительная малость поглощения КВ при рефракции в ионосфере и отражении от Земли (в типичных условиях) делают короткие волны весьма подходящими для дальней радиосвязи. Интересно, что значение коротких волн было понято под влиянием радиолюбительской практики.

Основу понимания главных закономерностей распространения КВ, определяющих выбор рабочих частот, составляют простые соображения, рассматривавшиеся в п. 15.5.2. Со стороны высоких частот ограничение этого диапазона приблизительно соответствует прекращению поворота ионосферной волны к Земле в дневное время. Наиболее короткая волна, для которой такой поворот еще происходит, оценивается по формуле

$$f_{\max}(\theta_0) \approx 9 \sqrt{N'_{\max}} / \cos\theta_0, \qquad (15.50)$$

следующей из (15.36). В практике радиосвязи соответствующая частота называется *максимально применимой частотой* (МПЧ). Так называемая оптимальная рабочая частота (ОРЧ) лежит ниже МПЧ на $15 \div 30$ %. Некоторое снижение частоты вызвано необходимостью стабилизировать условие поворота луча. Поскольку затухание волны растет обратно пропорционально квадрату частоты (см. п. 15.5.3), снижение частоты нежелательно. Существует понятие *наименьшей применимой частоты* (НПЧ), т. е. частоты, при которой для данной мощности передатчика напряженность поля в месте приема оказывается на грани требуемой нормы. При расчете

радиолиний диапазона КВ используются графики суточного изменения МПЧ и НПЧ, составляемые при помощи различных полуэмпирических правил на основании данных измерений, осуществляемых так называемыми ионосферными станциями. Пример такого графика приведен на рис. 15.28 [Е.2]. Что касается ионосферных станций, то производимой на них стандартной операцией является вертикальное зондирование. Присылая в зенит ($\theta_0 = 0$) волну той или иной частоты, устанавливают, на какой высоте происходит отражение.

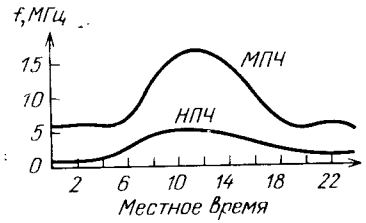


Рис. 15.28

Напомним, что электронная концентрация в области F, где при типичных условиях происходит поворот луча на КВ, существенно меняется от дня к ночи и сезонно, не говоря уже о разного рода несистематических возмущениях. Днем — при более высокой электронной концентрации — МПЧ повышается, почью — снижается. Поэтому существуют так называемые *дневные* и *ночные* волны. Это поддиапазоны $10 \div 25$ м и $35 \div 100$ м соответственно, рекомендуемые для связи в зависимости от времени суток.

Относительно стабильный режим ионосферы, как уже отмечалось в п. 15.5.1, нарушается время от времени под влиянием процессов на Солнце. Действие интенсивных корпускулярных потоков, приходящих от Солнца, приводит к сильному изменению структуры и падению электронной концентрации области F, к ее «разрушению», в результате чего рефракция коротких волн к Земле становится невозможной и радиолиния перестает действовать. Такие возмущения ионосферы, сопровождаемые магнитными бурями, наиболее сильны в полярных областях, куда преимущественно попадают корпускулярные потоки, направляемые магнитным полем Земли. Другой вид нарушения коротковолновой связи — внезапное поглощение из-за возникновения повышенной ионизации в области D под влиянием хромосферных вспышек на Солнце.

Для диапазона КВ типичны интерференционные замирания, вызываемые наложением нескольких относительно независимо распространяющихся волн, несущих принимаемый сигнал. Одна из причин — приход в место приема волн, претерпевших разное число отражений от атмосферы (см. выше п. 15.6.2). Можно также говорить об изменяющейся во времени фокусировке (дефокусировке) параксиального пучка лучей в ионосфере в результате неравномерного изменения ее свойств. Другие причины мы обсудим после выяснения роли магнитного поля Земли в гл. 16. Отметим, что при высокой солнечной активности лучевые траектории могут быть значительно сложнее обсуждавшихся. В частности, область E (и даже D) может вызвать поворот или преломление луча (изменение траектории при прохождении слоя насквозь). Некоторые типы траекторий, возникающих при участии слоев F и E (E_s), показаны на рис. 15.29 [Е.8]; надо иметь в виду, что это не действительные траектории, а качественные схемы.

Нестабильность ионосферы, необходимость учета потерь и дисперсии волн, проходящих через нее, а также иные факторы обусловливают ряд трудностей на пути расчета КВ радиолиний. В инженерной практике обычно используются полуэмпирические методы.

15.6.4. Ультракороткие волны. В годы максимума солнечной активности рефракция в ионосфере приводит к отражению волн, выходящих за пределы диапазона КВ (например, около 6 м). Можно также отметить отражение метровых волн от спорадического слоя E_s, обладающего высокой концентрацией, но образующегося нерегулярно. За этим исключением всему диапазону УКВ присуще то качество, что рефракция в ионосфере не приводит к возвращению луча.

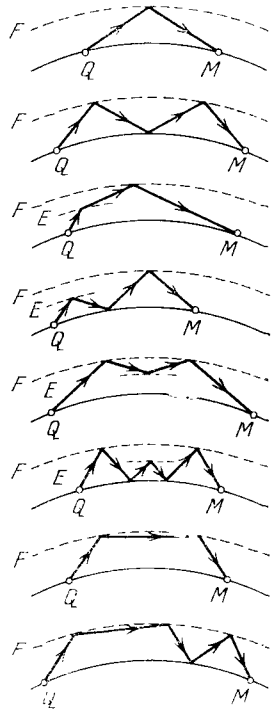


Рис. 15.29

В силу сказанного обычные радиолинии на УКВ действуют в пределах прямой видимости; для увеличения дальности радиосвязи антенны поднимают над земной поверхностью. Если последняя является достаточно гладкой, то радиолиния часто принадлежит к типу, рассматривавшемуся в п. 15.3.1 на основе лучевой трактовки. При этом часто применяется формула Введенского (15.21). В случае остронаправленных антенн, как уже отмечалось в п. 15.3.1, нужно использовать более общую формулу (15.17). Впрочем, если такие антенны подняты достаточно высоко, отражение от земной поверхности окажется пренебрежимо малым. Тогда напряженность поля в месте приема может быть найдена при помощи (15.4). При необходимости учитывается сферичность Земли (см. п. 15.3.1, 15.3.2) и тропосферная рефракция (см. п. 15.4.2).

Чем короче волна, тем менее относительно гладкой оказывается земная поверхность. Но даже в тех случаях, когда критерий гладкости (15.10) нарушается, нередко пользуются представлением об эффективном коэффициенте отражения от поверхности. Однако типичны случаи, когда этот подход непригоден даже для очень грубых оценок. Таковы условия распространения УКВ в пределах города. Иногда в подобных условиях учитывают действие отдельных «препятствий», оказывающихся в доминантной области (см. п. 15.2.1).

Типично применение УКВ на радиорелейных линиях, протяженность которых многократно превышает расстояние прямой види-

мости; в пределах этого расстояния находится каждая пара приемопередающих радиорелейных станций.

Практический интерес представляют также различные типы дальнего распространения УКВ. Именно в этом диапазоне реализуются возможности существенного влияния нерегулярных тропосферных явлений (п. 15.4.3). Весьма значительное превышение расстояния прямой видимости возможно в результате сверхрефракции, в особенности как следствие процессов рассеяния. В тропосферных радиорелейных линиях связи приемопередающие станции находятся на расстояниях сотен километров. Дальнее распространение УКВ может быть обусловлено рассеянием на случайных неоднородностях ионосферы, а также на ионизированных областях, образующихся при вхождении в атмосферу метеоров («следы» метеоров) и при полярных сияниях. Существуют весьма протяженные линии, использующие эти явления (свыше 1000 км).

15.6.5. О космической радиосвязи. Диапазон УКВ ввиду прозрачности для этих волн ионосферы используется в системах космической связи. Нужно сделать оговорку, что связь с космическими объектами, находящимися в пределах внутренней ионосферы, возможна и в диапазоне КВ. Не перечисляя многочисленные функции космических радиолиний, отметим, что, по крайней мере, следует различать радиолинии, связывающие Землю и космический объект (искусственный спутник Земли или Луны, космический корабль, направляющийся к планетам и пр.), космические объекты между собой и, наконец, используемые для связи между земными объектами. Существует также проблематика местной связи при освоении Луны и планет.

Космические радиолинии могут быть беспрецедентно протяженными, простираясь на многие миллионы километров. Поэтому, хотя поглощение в межпланетной среде весьма невелико в расчете на единицу длины, оно, в принципе, подлежит оценке.

Действие атмосферы Земли приводит к искривлению выходящего через нее луча. Теория рефракции позволяет оценивать направление выходящего луча.

Отдельную проблему составляет исследование влияния плазменного окружения космического объекта, входящего в плотные слои атмосферы, или плазменной области, появляющейся при наличии факела ракеты. Эти явления приводят к нарушению связи.

Связь в неземных условиях может иметь различные особенности. Так, например, отсутствие у Луны атмосферы затрудняет проблему связи между лунными объектами, лежащими за пределами прямой видимости. Известно предложение использовать в этом случае ретранслятор на Земле.

Проблематика распространения радиоволн в космосе (см., например, [Е.12, Е.13]) важна не только в рамках проектирования радиосистем, но и для научных исследований: радиоастрономии, радиолокации планет и пр.

Все большее значение приобретают спутниковая связь и вещание. Радиолинии, использующие ретрансляцию через ИСЗ, имеют ряд особенностей. В частности, в результате движения ИСЗ относительно наземной станции сказывается эффект Доплера — смещение частоты, меняющееся на трассе; это приводит к искажению спектра сигнала. Вопросы проектирования спутниковых радиолиний рассмотрены в специальных руководствах [Е.14].

15.6.6. О помехах при работе радиолиний и электромагнитной совместимости. Через приемную антенну на вход радиоаппаратуры вместе с полезным сигналом неизбежно поступают посторонние электромагнитные воздействия. Это помехи радиолинии, вносящие вклад в полную мощность шумов $P_ш$. Отношение мощности полезного сигнала $P_с$ к $P_ш$ для разных радиолиний должно удовлетворять соответствующим нормативным требованиям.

Существуют индустриальные помехи — радиоизлучение различных электроустановок, включая бытовые; атмосферные — грозовые — помехи; шумы космического происхождения; шумы, обусловленные атмосферой и земной поверхностью. Наконец, важна проблематика взаимных помех при работе радиолиний.

Борьба с индустриальными помехами производится путем размещения приемных пунктов вне больших городов; принимаются также разные меры с целью уменьшить уровень этих помех. При наличии остронаправленных антенн (главным образом, на СВЧ) индустриальные помехи несущественны.

Атмосферные помехи тем слабее, чем выше частота. Они особенно заметны в диапазонах СДВ и ДВ — также еще потому, что в этих диапазонах могут применяться лишь антенны, обладающие слабой направленностью. Грозы особенно часты в тропических областях; однако надо иметь в виду, что мешающее влияние грозового излучения в указанных диапазонах может сказываться на расстояниях сотен и тысяч километров.

Рассматривая шумы космического происхождения, различают фон радиоизлучения Галактики и излучение дискретных источников, которыми являются Солнце, планеты и звезды. Отмечается также излучение содержащегося в космическом пространстве водорода на волне $\lambda = 21$ см.

Земная поверхность создает тепловое излучение, влияние которого уменьшает применение остронаправленных антенн. Излучение атмосферы имеет резонансный характер; его частотное распределение характеризует график поглощения на рис. 15.20. На СВЧ атмосферные шумы резко преобладают над остальными помехами радиолиний.

Роль взаимных помех радиолиний возрастает вместе с развитием радиоэлектронных средств в мире. Использование тех или иных полос частот различными службами регламентируется международными соглашениями. При проектировании радиосистем первостепенное значение приобретает обеспечение их электромагнит-

ной совместимости (ЭМС) с другими существующими и планируемыми системами. Современные транспортные и другие объекты насыщены радиоэлектронной аппаратурой, размещенной в ограниченном объеме. Это остро ставит вопросы ЭМС. Проблематика ЭМС разрабатывается экспериментальными и теоретическими средствами.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти требуемую мощность передатчика $\overline{P}_A$ при следующих условиях: $\overline{P}_B = 10^{-12}$ Вт, $D_A = 50$ дБ, $D_B = 50$ дБ, $F = -20$ дБ, $r = 10$ км, $\lambda = 3$ см.
2. Пользуясь таблицей 1.2, сделать оценки: а) пределов изменения $\operatorname{tg}\Delta$ для разных природных сред на границах диапазонов волн; б) значений глубины проникновения Δ^0 для морской воды при тех же частотах.
3. Для каких диапазонов волн поверхность современного города согласно критерию Рэлея может считаться ровной? Пусть угол лежит в пределах $0 \div 80°$.
4. Пользуясь спиралью Корню, исследовать влияние экрана на прямую передачу энергии, когда сторона квадратного отверстия равна диаметру десятой зоны Френеля.
5. Взяв значение параметра C в формуле (15.13), соответствующее десяти зонам Френеля, найти наибольший поперечный размер доминантной области при протяженности радиолинии $\Delta = 100$ км и длине волны $\lambda = 3$ м.
6. Два вертикально ориентированных диполя Герца расположены на высоте $h_1 = h_2 = 10$ м; $\lambda = 3$ см. При какой протяженности радиолинии допустимо применение лучевой модели, если задано $C = 6$ в (15.13)?
7. В условиях предыдущего примера выяснить, пользуясь спиралью Корню, до каких расстояний можно использовать лучевую модель, если ошибка по напряженности поля в месте приема может иметь порядок 50 %.
8. Передающая антенна имеет вид вертикальной мачты высотой $h = 50$ м, $\lambda = 500$ м. Принимая ее за диполь Герца, вычислить напряженность поля на расстоянии $r = 150$ км при $\overline{P}_A = 100$ Вт. Использовать формулу Шулейкина — Ван-дер-Поля (график Берроуза).
9. На основе формулы (15.27) и соответствующих графиков выяснить, как изменяется поле излучения в области тени в зависимости от длины волны.
10. Вывести условие критической рефракции.
11. Пусть $\theta^0 = 45°$. Пользуясь графиком на рис. 15.21, определить высоту поворота луча в дневное и ночное время на границах диапазонов волн.
12. Какова кратчайшая волна, пригодная для связи между земными объектами ночью и днем согласно графику на рис. 15.21?
13. Найти коэффициент затухания волны в плазме при параметрах, соответствующих высоте 300 км согласно графику на рис. 15.25, и $\lambda = 20$ м.
14. Насколько уменьшается расстояние прямой видимости на Луне по сравнению с земным? Учесть рефракцию в земной атмосфере.

Глава 16
ПОЛЯ В АНИЗОТРОПНЫХ, АКТИВНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

§ 16.1. Анизотропия и гиротропия (А)

16.1.1. О природе анизотропии. Об анизотропных средах говорилось в п. 1.3.5. Было отмечено, что свойства среды — электрические или магнитные — могут зависеть от направления. При этом параметры материальных уравнений (1.67)—(1.69) следует рассматривать как матрицы вида (1.9). Так, анизотропный диэлектрик

описывается при помощи тензора диэлектрической проницаемости ε, и материальное уравнение (1.67) в координатной записи принимает вид

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}. \tag{16.1}$$

Анизотропию могут проявлять *кристаллические* среды, характерным свойством которых является упорядоченность строения. Рассмотрим, подобно тому, как это делалось в п. 14.1.1, систему поляризуемых частиц. Пусть выделен макроскопически малый объем ΔV, содержащий достаточно большое количество частиц (рис. 16.1).

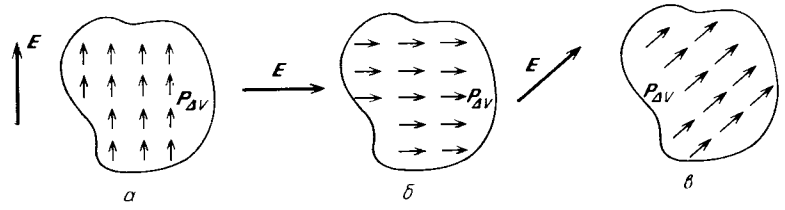


Рис. 16.1

Если допустить, что при заданном внешнем поле среднее значение $\mathbf{E}$ в любой точке зависит только от плотности частиц, то при всех направлениях поля объем ΔV приобретает один и тот же по абсолютному значению момент $\mathbf{p}_{\Delta V}$, который каждый раз параллелен $\mathbf{E}$ (ср. (*а*), (*б*), (*в*)). Среда проявляет себя как изотропная.

Но при определенных типах упорядочения частиц их поляризация зависит от направления внешнего поля. Пусть (рис. 16.2) в

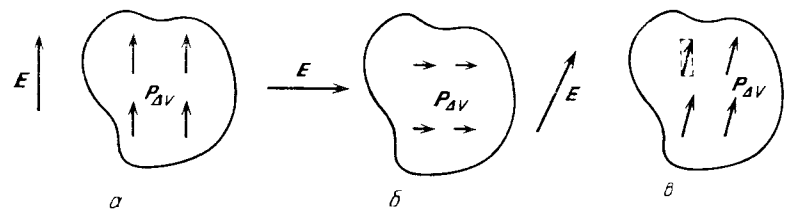


Рис. 16.2

двух случаях (*а*) и (*б*) под влиянием внешнего поля возникают параллельные ему, но разные по абсолютной величине электрические моменты $\mathbf{p}_{\Delta V}$ (они обозначены стрелками разной длины). Очевидно, что в третьем случае (*в*) векторы $\mathbf{p}_{\Delta V}$ и $\mathbf{E}$ уже не параллельны. Это анизотропия. В качестве простейшей причины ее происхождения можно представить себе, что в одном направлении (рис. 16.2*а*) частицы следуют чаще, чем в другом (рис. 16.2*б*). При

должном расположении координатных осей x, y, z тензор диэлектрической проницаемости будет диагональным:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}. \tag{16.2}$$

Если структура характеризуется только одним выделенным направлением, с которым совмещена ось z, то в (16.2) $\varepsilon_x = \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$. Среда называется в таком случае одноосной.

В § 6.3 рассматривались периодические структуры, свойства которых изменяются в одном направлении. Простое обобщение приводит к представлению о структурах трехмерно-периодических; такова, например, система шаров, дисков и т. п., распределенных в пространстве через равные промежутки в трех ортогональных направлениях. Если в электродинамической задаче все три периода подобной структуры значительно меньше длины волны, то ее можно рассматривать подобно сплошной среде; внутреннее поле усредняется. Каждая макроскопическая частица под влиянием приложенного поля может действовать подобно диполю; в п. 2.2.6 отмечалось дипольное действие шара. Мы приходим к представлению об искусственном диэлектрике. Последний будет анизотропным даже в случае шаровых элементов, если пространственные периоды различны.

16.1.2. Гиротропия намагниченной плазмы. Если в задаче о плазме в переменном электромагнитном поле (см. пп. 14.2.1, 14.2.2) ввести еще постоянное магнитное поле $\mathbf{H}_0 = \mathbf{z}_0 H_0$, то на заряженные частицы будет также действовать лоренцева сила. Это приведет к характерной анизотропии среды, которая будет описываться уже не скалярной диэлектрической проницаемостью вида (14.44), а тензором

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_T & -i\beta & 0 \\ i\beta & \varepsilon_T & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_L \end{pmatrix}, \tag{16.3}$$

где

$$\varepsilon_T = 1 - \frac{\omega_p^2 (\omega - i\nu)}{\omega [(\omega - i\nu)^2 - \Omega^2]}, \qquad \beta = \frac{\omega_p^2 \Omega}{\omega [(\omega - i\nu)^2 - \Omega^2]}, \quad \varepsilon_L = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega (\omega - i\nu)}, \tag{16.4}$$

причем

$$\omega_p = \frac{e^2 N'}{\varepsilon_0 m}, \quad \Omega = \mu_0 \frac{|e|}{m} H_0. \tag{16.5}$$

Анизотропия, при которой тензор ε имеет вид (16.3), называется *гиротропией*. Смысл термина будет понятен, после того как в 16.2 мы рассмотрим волновые процессы в гиротропных средах.

ВЫВОД. Возвращаясь к уравнению движения (14.42), введем в дополнение к силе $q\dot{\mathbf{E}}_m$ действующую в данном случае на частицу лоренцеву силу $q[\mathbf{v}, \mathbf{B}_0] = q[i\omega \mathbf{r}_m, \mathbf{z}_0 \mu_0 H_0]$. Это дает:

$$\omega (\omega - i\nu) \dot{\mathbf{r}}_m + i\omega \frac{q}{m} \mu_0 H_0 [\dot{\mathbf{r}}_m, \mathbf{z}_0] = -\frac{q}{m} \dot{\mathbf{E}}_m. \tag{16.6}$$

Поляризованность $\mathbf{P}$ определим, как это делалось в п. 14.2.1 при получении формулы (14.38), учитывая только электроны. Тогда $\dot{\mathbf{P}}_m = N' e \dot{\mathbf{r}}_m$ ($q = e$). Поэтому из (16.6) следует:

$$\omega (\omega - i\nu) \dot{\mathbf{P}}_m - i\omega\Omega [\dot{\mathbf{P}}_m, \mathbf{z}_0] = -\varepsilon_0 \omega_p^2 \dot{\mathbf{E}}_m, \tag{16.7}$$

где использованы обозначения (16.5). В координатной форме имеем:

$$\begin{aligned} \omega (\omega - i\nu) \dot{P}_{mx} - i\omega\Omega \dot{P}_{my} &= -\varepsilon_0 \omega_p^2 \dot{E}_{mx}, \\ i\omega\Omega \dot{P}_{mx} + \omega (\omega - i\nu) \dot{P}_{my} &= -\varepsilon_0 \omega_p^2 \dot{E}_{my}, \\ \omega (\omega - i\nu) \dot{P}_{mz} &= -\varepsilon_0 \omega_p^2 \dot{E}_{mz}. \end{aligned} \tag{16.8}$$

Решая эту систему, выражаем компоненты вектора $\dot{\mathbf{P}}_m$:

$$\begin{aligned} \dot{P}_{mx} &= \frac{-\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega [(\omega - i\nu)^2 - \Omega^2]} [(\omega - i\nu) \dot{E}_{mx} + i\Omega \dot{E}_{my}], \\ \dot{P}_{my} &= \frac{-\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega [(\omega - i\nu)^2 - \Omega^2]} [-i\Omega \dot{E}_{mx} + (\omega - i\nu) \dot{E}_{my}], \\ \dot{P}_{mz} &= \frac{-\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega (\omega - i\nu)} \dot{E}_{mz}. \end{aligned} \tag{16.9}$$

Мы получили развернутую запись соотношения $\dot{\mathbf{P}}_m = \varepsilon_0 \chi^3 \dot{\mathbf{E}}_m$ (1.72), где χ^3 — тензор электрической восприимчивости (см. также п. 14.1.1). Как видно, среда анизотропна. Выписав из (16.9) коэффициенты при компонентах вектора $\dot{\mathbf{E}}_m$, мы получим элементы тензора χ^3, а поскольку $\varepsilon = I + \chi^3$ (I — единичный тензор), можно сразу получить и тензор диэлектрической проницаемости. Это приводит к формулам (16.3), (16.4). ■

Нетрудно понять, почему плазма в постоянном магнитном поле оказывается гиротропной. Если напряженность переменного электрического поля $\mathbf{E}$, а с ней и скорость электрона $\mathbf{v}$, имеет проекцию на плоскость, перпендикулярную вектору $\mathbf{B}_0$ постоянного поля, то электрон «закручивается» в этой плоскости (см. п. 14.1.2). Поэтому кроме параллельных $\mathbf{E}$ компонент $\mathbf{P}$ и $\mathbf{D}$ появляются и перпендикулярные компоненты, лежащие в квадратуре.

Возвращаясь к формулам (16.3) и (16.4), отметим, во-первых, что вдоль направления постоянного «подмагничивания» (ось z)

плазма сохраняет прежние свойства: ε_L в (16.4) совпадает с ε из (14.44). Во-вторых, формулы (16.4) свидетельствуют о резонансном характере процесса в намагниченной плазме. В идеализированном случае отсутствия поглощения ($\nu = 0$) при $\omega \to \Omega$ компоненты тензора $\varepsilon_\perp$ и $i\beta$ (16.4) неограниченно возрастают; взяв $\nu \neq 0$, легко заметить, что этот *гиромагнитный резонанс* несколько сдвигается и компоненты тензора диэлектрической проницаемости остаются ограниченными. Величина Ω есть не что иное, как круговая частота вращения электронов в постоянном магнитном поле (см. п. 14.1.2); она называется *гироскопической частотой.*

В заключение заметим, что ввиду пренебрежения влиянием ионов при выводе тензора ε полученные формулы (16.4) в той или иной мере утрачивают достоверность вблизи гироскопических частот $\Omega' = \mu_0 |e| H_0/m'$, где m' — масса иона (предполагается одновалентность); $\Omega' \ll \Omega$, поскольку $m' \gg m$.

16.1.3. Гиротропия намагниченного феррита. Магнетикам свойственна гиротропия, обусловленная прецессией вектора $\mathbf{M}$ в постоянном магнитном поле (см. п. 14.1.3). Так называемые *ферриты*, обладая ферромагнитными свойствами, по характеру диэлектрических потерь могут быть отнесены к диэлектрикам: $\operatorname{tg}\Delta \ll 1$. Они, таким образом, в отличие от ферромагнитных металлов «прозрачны» для электромагнитного поля. Поэтому гиротропия ферритов, проявляющаяся в диапазоне СВЧ, нашла многочисленные технические применения.

Пусть феррит намагничен, так что внутреннее постоянное поле характеризуется векторами $\mathbf{H}_0 = \mathbf{z}_0 H_0$ и $\mathbf{M}_0 = \mathbf{z}_0 M_0$. При этом по отношению к переменному полю среда будет выступать как анизотропный магнетик с комплексной проницаемостью в виде тензора

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_T & -i\alpha & 0 \\ i\alpha & \mu_T & 0 \\ 0 & 0 & \mu_L \end{pmatrix}. \tag{16.10}$$

где

$$\mu_T = 1 - \frac{\Omega |\gamma| M_0 \mu_0^{-1}}{\omega^2 - \Omega^2}, \quad \alpha = \frac{\omega |\gamma| M_0 \mu_0^{-1}}{\omega^2 - \Omega^2}, \quad \mu_L = 1, \tag{16.11}$$

причем

$$\Omega = |\gamma| H_0 \tag{16.12}$$

есть *собственная частота прецессии* (см. п. 14.1.3), если потерями можно пренебречь; об учете потерь будет сказано ниже.

ВЫВОД. Взяв уравнение движения намагниченности (14.33), отметим сначала, что в случае постоянного поля его левая часть обращается в нуль, а следовательно $[\mathbf{M}, \mathbf{H}] = 0$, т. е. векторы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{H}$ параллельны — среда изотропна. Пусть теперь $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}(t)$ и $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}(t)$, где нулевыми индексами отмечены постоянные

составляющие. Внося это в (14.33), получаем:

$$\frac{d\mathbf{M}(t)}{dt} = \gamma\{[\mathbf{M}_0, \mathbf{H}(t)] + [\mathbf{M}(t), \mathbf{H}_0] + [\mathbf{M}_0, \mathbf{H}_0] + [\mathbf{M}(t), \mathbf{H}(t)]\}. \tag{16.13}$$

Если, как это часто бывает, $|\mathbf{M}(t)| \ll |\mathbf{M}_0|$ и $|\mathbf{H}(t)| \ll |\mathbf{H}_0|$, то квадратичным членом $[\mathbf{M}(t), \mathbf{H}(t)]$ можно пренебречь, и уравнение (16.13) оказывается линеаризованным относительно переменной

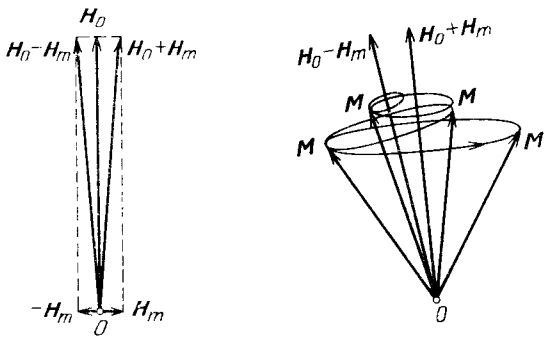


Рис. 16.3

составляющей. Рассматривая гармонические колебания, применим метод комплексных амплитуд, что означает замену: $\mathbf{M}(t) \to \dot{\mathbf{M}}_m e^{i\omega t}$ и $\mathbf{H}(t) \to \dot{\mathbf{H}}_m e^{i\omega t}$. Тогда из (16.13) следует:

$$[\mathbf{M}_0, \mathbf{H}_0] = 0, \quad i\omega\dot{\mathbf{M}}_m = \gamma\{[\mathbf{M}_0, \dot{\mathbf{H}}_m] + [\dot{\mathbf{M}}_m, \mathbf{H}_0]\}. \tag{16.14}$$

Взяв $\mathbf{M}_0 = \mathbf{z}_0 M_0$, $\mathbf{H}_0 = \mathbf{z}_0 H_0$ и представляя второе равенство в координатной форме, записываем:

$$\begin{aligned} i\omega\dot{M}_{mx} - \gamma H_0 \dot{M}_{my} &= -\gamma M_0 \dot{H}_{my}, \\ \gamma H_0 \dot{M}_{mx} + i\omega\dot{M}_{my} &= \gamma M_0 \dot{H}_{mx}, \\ i\omega\dot{M}_{mz} &= 0. \end{aligned} \tag{16.15}$$

($\gamma < 0$, компоненты вектора $\dot{\mathbf{M}}_m$ перенесены влево). Решая эту систему уравнений, получаем:

$$\begin{aligned} \dot{M}_{mx} &= \frac{|\gamma| M_0}{\omega^2 - \Omega^2}(-\Omega\dot{H}_{mx} - i\omega\dot{H}_{my}), \\ \dot{M}_{my} &= \frac{|\gamma| M_0}{\omega^2 - \Omega^2}(i\omega\dot{H}_{mx} - \Omega\dot{H}_{my}), \\ \dot{M}_{mz} &= 0, \end{aligned} \tag{16.16}$$

где применено обозначение (14.32); вместо вектора $\boldsymbol{\Omega}$ использован его модуль Ω.

Получена координатная запись соотношения $\dot{\mathbf{M}}_m = \mu_0 \chi^{\text{м}} \dot{\mathbf{H}}_m$ (1.72), в котором магнитная восприимчивость $\chi^{\text{м}}$ есть тензор. Из (16.16) нетрудно выписать элементы $\chi^{\text{м}}$ и получить тензор магнитной проницаемости $\mu = I + \chi^{\text{м}}$. Это приводит к формулам (16.10), (16.11). ■

Итак, тензор магнитной проницаемости феррита μ (16.10), как оказалось, имеет такую же структуру, как тензор диэлектрической проницаемости плазмы ε (16.3). Обе среды гиротропны; в 16.2 будет показано, что волновые процессы в обоих случаях аналогичны.

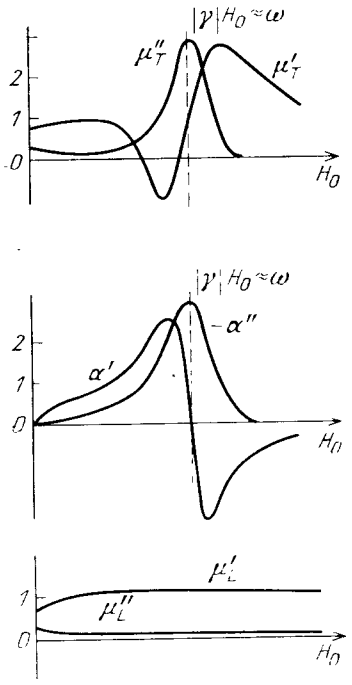


Рис. 16.4

Осмысливая причину гиротропии намагниченного феррита, надо иметь в виду, что постоянное магнитное поле создает выделенное направление, около которого происходит прецессия вектора $\mathbf{M}$. Приближение ω к собственной частоте прецессии Ω обусловливает *ферромагнитный резонанс* среды. Поскольку в выражениях (16.11) не учтены потери, $\mu_\perp$ и α при резонансе обращаются в бесконечность. В упрощенном представлении совпадение частот ω и Ω означает, что прецессионное движение $\mathbf{M}$ совершает один цикл синхронно с «качанием» результирующего вектора $\mathbf{H}$ из положения $\mathbf{H}_0 - \mathbf{H}_m$ в положение $\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_m$ (рис. 16.3). Поскольку $\mathbf{H}$ задает мгновенную ось прецессии, ее радиус возрастает.

Изложенная теория является идеализированной уже в силу допущенной линеаризации уравнения (16.13). Учет потерь можно было бы произвести, взяв вместо (14.33) уравнение Ландау — Лифшица (14.34); соответствующие формулы можно найти в специальной литературе [Д.5 — Д.7]. Но и этого для практических целей недостаточно. Для определения компонент тензора μ реального феррита используются специальные измерения. Величины μ_T, α и μ_L в силу существования потерь комплексны: $\mu_T = \mu_T' - i\mu_T''$, $\alpha = \alpha' - i\alpha''$, $\mu_L = \mu_L' - i\mu_L''$. На рис. 16.4 показан характер зависимостей этих величин от напряженности постоянного поля $\mathbf{H}_0$, получаемых путем измерений.

Заметим, что для учета поглощения можно ввести понятие собственной комплексной частоты прецессии $\dot{\Omega} = \Omega' + i\Omega''$ (ср. п. 3.2.3 и п. 11.1.4). При этом в формулах (16.11) делается подстановка $\Omega \to \dot{\Omega}$. В случае достаточно узкой резонансной кривой (зависимость μ_T' или α'' на рис. 16.4) полагают $\Omega' = \Omega$ и $\Omega'' = \Delta\Omega = \Delta H_0 |\gamma|$, где ΔH_0 полуширина резонансной кривой, понимаемая так же, как в п. 11.1.4.

§ 16.2. Поля и волны в гиротропных средах

16.2.1. Запись уравнений Максвелла (А). Для исследования различных свободных электромагнитных полей в гиротропных средах, являющихся решениями однородных уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_m = i\omega\varepsilon_0\varepsilon\dot{\mathbf{E}}_m, \quad \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_m = -i\omega\mu_0\mu\dot{\mathbf{H}}_m \tag{16.17}$$

произведем подробную запись этих уравнений в декартовых координатах.

Сначала возьмем случай магнетика (феррита), который в постоянном магнитном поле $\mathbf{H}_0 = \mathbf{z}_0 H_0$ для поля переменного проявляет себя как гиротропная среда, характеризуемая тензором μ вида (16.10). Таким образом, в (16.17) магнитная проницаемость μ есть указанный тензор, а диэлектрическая проницаемость ε — скаляр. Поэтому уравнения (16.17) принимают следующую форму:

$$\frac{\dot{H}_{mz}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{H}_{my}}{\partial z} = i\omega\varepsilon_0\varepsilon\dot{E}_{mx}, \qquad \frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{E}_{my}}{\partial z} = -i\omega\mu_0(\mu_T\dot{H}_{mx} - i\alpha\dot{H}_{my}),$$

$$\frac{\partial \dot{H}_{mx}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial x} = i\omega\varepsilon_0\varepsilon\dot{E}_{my}, \qquad \frac{\partial \dot{E}_{mx}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial x} = -i\omega\mu_0(i\alpha\dot{H}_{mx} + \mu_T\dot{H}_{my}), \tag{16.18}$$

$$\frac{\partial \dot{H}_{my}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_{mx}}{\partial y} = i\omega\varepsilon_0\varepsilon\dot{E}_{mz}, \qquad \frac{\partial \dot{E}_{my}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_{mx}}{\partial y} = -i\omega\mu_0\mu_L\dot{H}_{mz}.$$

В случае подобным же образом намагниченной плазмы ($\mathbf{H}_0 = \mathbf{z}_0 H_0$) μ — скаляр, а ε — тензор вида (16.3), так что теперь получаем:

$$\frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{H}_{my}}{\partial z} = i\omega\varepsilon_0(\varepsilon_T\dot{E}_{mx} - i\beta\dot{E}_{my}), \qquad \frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{E}_{my}}{\partial z} = -i\omega\mu_0\mu\dot{H}_{mx},$$

$$\frac{\partial \dot{H}_{mx}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial x} = i\omega\varepsilon_0(i\beta\dot{E}_{mx} + \varepsilon_T\dot{E}_{my}), \qquad \frac{\partial \dot{E}_{mx}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial x} = -i\omega\mu_0\mu\dot{H}_{my}, \tag{16.19}$$

$$\frac{\partial \dot{H}_{my}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_{mx}}{\partial y} = i\omega\varepsilon_0\varepsilon_L\dot{E}_{mz}, \qquad \frac{\partial \dot{E}_{my}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_{mx}}{\partial y} = -i\omega\mu_0\mu\dot{H}_{mz}.$$

Системы уравнений (16.18) и (16.19) переходят друг в друга при следующей замене величин:

$$\begin{gathered}\varepsilon_0\varepsilon \rightleftarrows \mu_0\mu \quad \text{(скаляры)},\\ \mu_0\mu_T \rightleftarrows \varepsilon_0\varepsilon_T, \quad \mu_0\alpha \rightleftarrows \varepsilon_0\beta, \quad \mu_0\mu_L \rightleftarrows \varepsilon_0\varepsilon_L,\\ \dot{\mathbf{E}}_m \to -\dot{\mathbf{H}}_m, \quad \dot{\mathbf{H}}_m \to \dot{\mathbf{E}}_m.\end{gathered} \tag{16.20}$$

Записанные соотношения обобщают *принцип двойственности* для однородных уравнений Максвелла (3.79) на гиротропные среды.

Существование правил замены (16.20) означает, что нет необходимости отдельно находить решения систем уравнений (16.18) и (16.19). Можно, например, производить все операции только с системой (16.18), т. е. искать поля в гиротропном магнетике. Применяя к готовым решениям системы (16.18) соотношения (16.20), мы получим решения системы (16.19), т. е. найдем поля в гиротропной плазме.

16.2.2. **Продольные волны. Эффект Фарадея (А).** Начнем с рассмотрения волн в гиротропном магнетике, распространяющихся вдоль направления постоянного намагничивания — по оси z.

Как и в изотропных средах (см. п. 4.1.2), будем рассматривать поля, зависящие только от координаты z. Из последних строчек уравнений (16.18) видно, что в этом случае $\dot{E}_{mz}=0$ и $\dot{H}_{mz}=0$, т. е. однородные волны оказываются T-волнами. Будем искать решение уравнений (16.18) в форме

$$\dot{\mathbf{E}}_m=(\mathbf{x}_0\dot{\mathscr{E}}_x+\mathbf{y}_0\dot{\mathscr{E}}_y)e^{-i\Gamma z}, \quad \dot{\mathbf{H}}_m=(\mathbf{x}_0\dot{\mathscr{H}}_x+\mathbf{y}_0\dot{\mathscr{H}}_z)e^{-i\Gamma z}, \tag{16.21}$$

где $\dot{\mathscr{E}}_x$, $\dot{\mathscr{E}}_y$, $\dot{\mathscr{H}}_x$, $\dot{\mathscr{H}}_y$ — константы и Γ — неизвестная пока постоянная распространения. При подстановке (16.21) в (16.18) получаем

$$\begin{aligned}\Gamma\dot{\mathscr{H}}_x&=-\omega\varepsilon_0\varepsilon\dot{\mathscr{E}}_y, \quad \Gamma\dot{\mathscr{E}}_y=-\omega\mu_0(\mu_T\dot{\mathscr{H}}_x-i\alpha\dot{\mathscr{H}}_y),\\ \Gamma\dot{\mathscr{H}}_y&=\omega\varepsilon_0\varepsilon\dot{\mathscr{E}}_x, \quad \Gamma\dot{\mathscr{E}}_x=\omega\mu_0(i\alpha\dot{\mathscr{H}}_x+\mu_T\dot{\mathscr{H}}_y).\end{aligned} \tag{16.22}$$

Исключим отсюда $\dot{\mathscr{E}}_x$ и $\dot{\mathscr{E}}_y$. Это дает два равенства:

$$\begin{aligned}\left(\Gamma^2-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu_T\right)\dot{\mathscr{H}}_y&=\ \ i\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\alpha\dot{\mathscr{H}}_x,\\ \left(\Gamma^2-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu_T\right)\dot{\mathscr{H}}_x&=-i\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\alpha\dot{\mathscr{H}}_y.\end{aligned} \tag{16.23}$$

Если теперь перемножить левые и соответственно правые части обеих строчек, то получается следующее уравнение относительно Γ:

$$\left(\Gamma^2-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu_T\right)^2=\frac{\omega^4}{c^4}\varepsilon^2\alpha^2. \tag{16.24}$$

При извлечении корня слева и справа нужно учесть, что знаки

могут быть как одинаковы, так и различны. Поэтому

$$\Gamma^2=\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\mu_T\pm\alpha). \tag{16.25}$$

Это значит, что возможны значения $\Gamma=\pm\Gamma^+$ и $\Gamma=\pm\Gamma^-$, где

$$\Gamma^+=\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon(\mu_T+\alpha)}, \quad \Gamma^-=\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon(\mu_T-\alpha)}, \tag{16.26}$$

а следовательно, существуют два типа продольных волн, которые могут распространяться в прямом и обратном направлениях.

Если подставить (16.25) в (16.23), то выясняется, что при $\Gamma^2=(\Gamma^+)^2$ и $\Gamma^2=(\Gamma^-)^2$ соответственно

$$\dot{\mathscr{H}}_y=i\dot{\mathscr{H}}_x, \quad \dot{\mathscr{H}}_y=-i\dot{\mathscr{H}}_x. \tag{16.27}$$

Мы видим, таким образом, что каждая из волн имеет круговую поляризацию. Для волн, распространяющихся вдоль оси z, индекс плюс в (16.26) отвечает правой круговой поляризации, а индекс минус — левой (ср. п. 4.2.1).

Выпишем комплексные амплитуды векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ рассматриваемых волн; на основании (16.21), (16.26) и (16.22) имеем:

волна $\dfrac{\text{правой}}{\text{левой}}$ круговой поляризации в направлении z

$$\dot{\mathbf{H}}_m=A(\mathbf{x}_0\pm i\mathbf{y}_0)e^{-i\Gamma^\pm z}, \quad \dot{\mathbf{E}}_m^\pm=AW^\pm(\pm i\mathbf{x}_0-\mathbf{y}_0)e^{-i\Gamma^\pm z}, \tag{16.28}$$

волна $\dfrac{\text{правой}}{\text{левой}}$ круговой поляризации в направлении $-z$

$$\dot{\mathbf{H}}_m^\mp=A(\mathbf{x}_0\mp i\mathbf{y}_0)e^{+i\Gamma^\mp z}, \quad \dot{\mathbf{E}}_m^\mp AW^\mp(\pm i\mathbf{x}_0+\mathbf{y}_0)e^{+i\Gamma^\mp z} \tag{16.29}$$

(A — неопределенный коэффициент); при этом

$$W^\pm=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}\sqrt{(\mu_T\pm\alpha)/\varepsilon}. \tag{16.30}$$

Особый интерес представляет случай, когда волны обеих круговых поляризаций существуют одновременно. Рассматривая наложение двух таких волн с одинаковыми амплитудными коэффициентами A, распространяющихся вдоль оси z, на основании (16.28) получаем:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{H}}_m(z)=\dot{\mathbf{H}}_m^-(z)+\dot{\mathbf{H}}_m^-(z)&=A\left[\mathbf{x}_0\left(e^{-i\Gamma^- z}+e^{-i\Gamma^- z}\right)+\right.\\ &\left.+i\mathbf{y}_0\left(e^{-i\Gamma^+ z}-e^{-i\Gamma^- z}\right)\right]=2Ae^{-i\frac{\Gamma^++\Gamma^-}{2}z}\left(\mathbf{x}_0\cos\frac{\Gamma^+-\Gamma^-}{2}z+\right.\\ &\left.+\mathbf{y}_0\sin\frac{\Gamma^+-\Gamma^-}{2}z\right).\end{aligned} \tag{16.31}$$

Обсудим это выражение. Взяв плоскость $z=0$, имеем: $\dot{\mathbf{H}}_m(0)=\mathbf{x}_0 2A$ (рис. 16.5$а$), а на расстоянии $z=l$ вектор $\mathbf{H}_m=\mathbf{H}_m(l)$, как

видно из (16.31), повернут (при вещественных Γ^+ и Γ^-) на угол

$$\vartheta = \frac{\Gamma^+ - \Gamma^-}{2} l \qquad (16.32)$$

(рис. 16.5*б*). Направление вектора **H**, оставаясь фиксированным в каждой плоскости $z = \text{const}$, изменяется по мере распространения рассматриваемой совокупности волн. Вектор **H** поворачивается.

Причина этого поворота поясняется на рис. 16.6. Как при $z = 0$, так и при

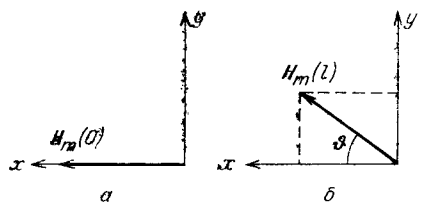


Рис. 16.5

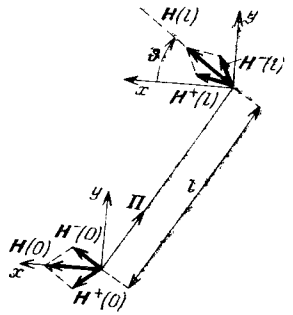


Рис. 16.6

$z = l$ складываются вращающиеся навстречу векторы $\mathbf{H}^+$ и $\mathbf{H}^-$. Они принадлежат волнам, распространяющимся с разными фазовыми скоростями ω/Γ^+ и ω/Γ^- (если нет потерь). Поэтому при прохождении пути l векторы $\mathbf{H}^+$ и $\mathbf{H}^-$ приобретут разные фазы (повернутся на неодинаковые углы). Окажется повернутым и результирующий вектор **H**.

Несколько упрощая, можно сказать, что в обсуждаемом случае распространяется волна, плоскость поляризации которой поворачивается при распространении (это тем вернее, чем ближе волновые сопротивления W^+ и W^-). Вращение плоскости поляризации называется *эффектом Фарадея*. Сам термин гиротропные среды (т. е. вращающие) связан с существованием этого эффекта.

Как видно из (16.33), при эффекте Фарадея определенный смысл имеют полусумма и полуразность постоянных распространения (16.26)

$$\Gamma_\Phi = (\Gamma^+ + \Gamma^-)/2, \quad R = (\Gamma^+ - \Gamma^-)/2. \qquad (16.33)$$

При отсутствии потерь величина R выражает угол поворота плоскости поляризации на единицу расстояния и называется *постоянной Фарадея*. Величина Γ_Φ играет роль постоянной распространения.

Эффект Фарадея необратим. Величина α (16.11) меняет знак при изменении направления постоянного намагничивания. Поэтому изменит знак и постоянная Фарадея. Это значит, что поворот плоскости поляризации при распространении волны в направлении z

не может быть компенсирован при обратном распространении (например, при отражении волны). Поворот увеличится.

Наконец, перейдем к рассмотрению продольных волн в намагниченной плазме — среде, характеризуемой тензором диэлектрической проницаемости (16.3). Как уже указывалось в п. 16.2.1, нет необходимости заново производить аналогичные выкладки. Достаточно применить принцип двойственности в форме (16.20).

Отправляясь от формул (16.26), (16.28)—(16.30), мы можем утверждать, что в намагниченной плазме могут распространяться следующие волны круговой поляризации:

волна $\frac{\text{правой}}{\text{левой}}$ круговой поляризации в направлении

$$\dot{\mathbf{E}}_m^{\pm} = A(\mathbf{x}_0 \pm i\mathbf{y}_0)\, e^{-i\Gamma^{\pm} z}, \quad \dot{\mathbf{H}}_m^{\pm} = -\frac{A}{W^{\pm}}(\pm i\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0)\, e^{-i\Gamma^{\pm} z}, \qquad (16.34)$$

волна $\frac{\text{правой}}{\text{левой}}$ круговой поляризации в направлении

$$\dot{\mathbf{E}}_m^{\mp} = A(\mathbf{x}_0 \mp i\mathbf{y}_0)\, e^{+i\Gamma^{\mp} z}, \quad \dot{\mathbf{H}}_m^{\mp} = -\frac{A}{W^{\mp}}(\pm i\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}_0)\, e^{+i\Gamma^{\mp} z}, \qquad (16.35)$$

где

$$\Gamma^{\pm} = \frac{\omega}{c}\sqrt{(\varepsilon_T \pm \beta)\,\mu}, \qquad (16.36)$$

$$W^{\pm} = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}\,\sqrt{\mu/(\varepsilon_T \pm \beta)}. \qquad (16.37)$$

В гиротропной плазме также наблюдается эффект Фарадея. Сохраняют справедливость формулы (16.33), в которые теперь подставляем постоянные распространения (16.36).

16.2.3. **Поперечные волны. Двойное преломление (А).** Будем рассматривать плоские однородные волны, распространяющиеся в гиротропном магнетике перпендикулярно к направлению постоянного намагничивания z. Все поперечные направления равноправны, и мы можем в качестве направления распространения выбрать ось x. Тогда все комплексные амплитуды будут функциями координаты x вида $\exp(-i\Gamma x)$, где Γ — не известная пока постоянная распространения; от координат y и z поле не зависит.

Учитывая сказанное, конкретизируем систему уравнений (16.18). При этом будем использовать обозначения: $\dot{\mathbf{E}}_{mx} = \dot{\mathcal{E}}_{mx} e^{-i\Gamma x}$, $\dot{\mathbf{H}}_{mx} = \dot{\mathcal{H}}_{mx} e^{-i\Gamma x}$ и т. д. В результате получаем:

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{\mathcal{E}}_x, & 0 &= \mu_T \dot{\mathcal{H}}_x - i\alpha \dot{\mathcal{H}}_y, \\ \Gamma \dot{\mathcal{H}}_z &= \omega\varepsilon_0\varepsilon \dot{\mathcal{E}}_y, & -\Gamma \dot{\mathcal{E}}_z &= \omega\mu_0 (i\alpha \dot{\mathcal{H}}_x + \mu_T \dot{\mathcal{H}}_y), \\ -\Gamma \dot{\mathcal{H}}_y &= \omega\varepsilon_0\varepsilon \dot{\mathcal{E}}_z, & \Gamma \dot{\mathcal{E}}_y &= \omega\mu_0\mu_z \dot{\mathcal{H}}_z. \end{aligned} \qquad (16.38)$$

Нетрудно заметить, что эти шесть уравнений образуют две независимые системы. Одна из них включает вторую строку первого

столбца и последнюю — второго. Действительно, только эти два уравнения содержат неизвестные $\mathscr{E}_y$ и $\mathscr{H}_z$. Перемножая их левые и соответственно правые части, получаем следующее уравнение относительно постоянной распространения:

$$\Gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu_L. \tag{16.39}$$

Нетрудно выписать следующее решение рассматриваемой системы уравнений:

$$\dot{\mathbf{E}}_m = \mathbf{y}_0 A e^{-i\Gamma_{об}x}, \quad \dot{\mathbf{H}}_m = \mathbf{z}_0 \frac{A}{W_{об}} e^{-i\Gamma_{об}x}, \tag{16.40}$$

где

$$\Gamma_{об} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu_L}, \quad W_{об} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\sqrt{\frac{\mu_L}{\varepsilon}}. \tag{16.41}$$

Это так называемая *обыкновенная* волна, распространяющаяся вдоль оси x. Действительно, речь идет о T-волне простейшего вида.

Оставшиеся в (16.38) четыре уравнения составляют вторую независимую систему. Из них находим

$$\Gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\frac{\mu_T^2 - \alpha^2}{\mu_T} \tag{16.42}$$

и выражаем поле:

$$\dot{\mathbf{E}}_m = \mathbf{z}_0 A e^{-i\Gamma_{нб}x}, \quad \dot{\mathbf{H}}_m = -\frac{A}{W_{нб}}\left(\mathbf{y}_0 + \mathbf{x}_0\frac{i\alpha}{\mu_T}\right)e^{-i\Gamma_{нб}x}, \tag{16.43}$$

где

$$\Gamma_{нб} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\frac{\mu_T^2 - \alpha^2}{\mu_T}} \quad W_{нб} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\sqrt{\frac{\mu_T^2 - \alpha^2}{\varepsilon\mu_T}}. \tag{16.44}$$

Эта распространяющаяся вдоль оси x волна называется *необыкновенной*. Как видно, она является H-волной, так как имеет продольную магнитную компоненту H_x.

Отметим, что в случае обыкновенной волны в гиротропном магнетике вектор $\mathbf{H}$ коллинеарен направлению постоянного намагничивания, а в случае необыкновенной волны — вектор $\mathbf{E}$.

В качестве примера, показывающего роль этих волн, рассмотрим так называемое *двойное преломление* на границе с гиротропным магнетиком. Пусть он занимает полупространство заштрихованное на рис. 16.7, а постоянное магнитное поле $\mathbf{H}_0$, обусловливающее гиротропию, направлено перпендикулярно плоскости чертежа. Поляризация падающей волны (луч *1*), которая распространяется в изотропном полупространстве, произвольна. Разлагая ее на волны перпендикулярной и параллельной поляризации (см. п. 5.2.2), видим, что в одном случае вектор $\mathbf{E}$, а в другом — вектор $\mathbf{H}$ коллинеарны

$\mathbf{H}_0$. Это значит, что одна из выделенных падающих волн способна возбудить в гиротропной среде только необыкновенную, а другая — обыкновенную волну. Так как фазовые скорости последних различны, то соответствующие преломленные лучи не совпадают. Их направления нетрудно найти, используя второй закон Снеллиуса (5.14):

$$\frac{\sin\vartheta_{об}}{\sin\varphi} = \frac{n_1}{n_{об}} \quad \frac{\sin\vartheta_{нб}}{\sin\varphi} = \frac{n_1}{n_{нб}} \tag{16.45}$$

(предполагается, что потери отсутствуют). Показателями преломления $n_{об}$ и $n_{нб}$, разумеется, будут величины $\Gamma_{об}/(\omega/c)$ и $\Gamma_{нб}/(\omega/c)$. В случае гиротропного магнетика $n_{об} = \sqrt{\varepsilon\mu_L}$ и $n_{нб} = \sqrt{\varepsilon(\mu_T^2 - \alpha^2)/\mu_T}$.

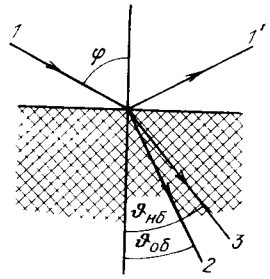


Рис. 16.7

Переходя к случаю гиротропной плазмы, ограничимся, как в п. 16.2.2, применением принципа двойственности (16.20) к уже полученным результатам (16.40) — (16.44). Таким образом,

$$\dot{\mathbf{E}}_m = \mathbf{z}_0 A W_{об} e^{-i\Gamma_{об}x}, \quad \dot{\mathbf{H}}_m = -\mathbf{y}_0 A e^{-i\Gamma_{об}x}, \tag{16.46}$$

где

$$\Gamma_{об} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_L\mu}, \quad W_{об} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_L}} \tag{16.47}$$

(обыкновенная волна) и

$$\dot{\mathbf{E}}_m = -AW_{нб}\left(\mathbf{y}_0 + \mathbf{x}_0\frac{i\beta}{\varepsilon_T}\right)e^{-i\Gamma_{нб}x}, \quad \dot{\mathbf{H}}_m = -\mathbf{z}_0 A e^{-i\Gamma_{нб}x}, \tag{16.48}$$

где

$$\Gamma_{нб} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\varepsilon_T^2 - \beta^2}{\varepsilon_T}\mu}, \quad W_{нб} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\sqrt{\frac{\varepsilon_T\mu}{\varepsilon_T^2 - \beta^2}} \tag{16.49}$$

(необыкновенная волна).

В случае гиротропной плазмы при уже обсуждавшихся обстоятельствах также будет наблюдаться двойное преломление. Вектор $\mathbf{H}_0$, как и ранее, должен быть перпендикулярен плоскости падения волны. Формулы (16.45) сохраняют силу; теперь $n_{об} = \sqrt{\varepsilon_L\mu}$ и $n_{нб} = \sqrt{\mu(\varepsilon_T^2 - \beta^2)/\varepsilon_T}$. Надо только иметь в виду, что в данном случае обыкновенная волна имеет электрическую компоненту, коллинеарную $\mathbf{H}_0$, а необыкновенная волна — магнитную. Соответствующими компонентами падающей волны порождаются две преломленные.

16.2.4. Гиротропия ионосферы (А). Вследствие влияния магнитного поля Земли плазма ионосферы представляет собой гиротропную среду, диэлектрическая проницаемость которой описывается

формулами (16.3), (16.4). Величина H_0 в среднем имеет значение около 40 А/м, так что частота гиромагнитного резонанса (16.5) $F = \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{\mu_0 |e| H_0}{2\pi m}$ оказывается около 1,4 Мгц. Гироскопические частоты ионов весьма низки. Например, для ионов атомарного кислорода $F' = \Omega'/2\pi \approx 54$ Гц. Поэтому пренебрежение влиянием ионов при выводе формул (16.3), (16.4) для большинства случаев допустимо.

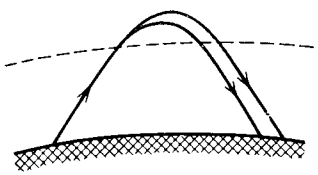


Рис. 16.8

Учет гиротропии ведет к существенно более сложной картине процессов распространения радиоволн в ионосфере. При сколько-нибудь полном рассмотрении надо было бы учитывать изменение величины и направления поля Земли на радиотрассе, а также ряд иных факторов. Ограничимся обсуждением упрощенной задачи.

Пусть радиоволна приходит к границе ионосферы, распространяясь перпендикулярно $\mathbf{H}_0$; вектор $\mathbf{E}$ ориентирован относительно $\mathbf{H}_0$ произвольным образом. Тогда падающая волна порождает в гиротропной плазме обыкновенную и необыкновенную волны (см. п. 16.2.3): рефрагирующий луч «расщепляется», как показано на рис. 16.8. Ясно, что условия поворота обыкновенного и необыкновенного лучей различны, поскольку неодинаковы соответствующие показатели преломления. Подставляя в (15.33) в качестве n соответствующие величины, для $n_0 = 1$ и $\vartheta = 90°$ получаем:

$$\sin\theta_0 = \begin{cases} n_{об} = \sqrt{\varepsilon_L}, \\ n_{нб} = \sqrt{(\varepsilon_T^2 - \beta^2)/\varepsilon_T}, \end{cases} \tag{16.50}$$

где, как и в п. 15.5.2, пренебрегаем потерями.

Поскольку согласно (16.4) ε_L не отличается от ε изотропной плазмы, детализация первой строчки (16.50) приведет к уже известной формуле (15.35). Что касается необыкновенной волны, то детализация второй строчки (16.50) при помощи (16.4) при $\nu = 0$ дает

$$\sin\theta_0 = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\,\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_p^2 - \Omega^2}}. \tag{16.51}$$

Задаваясь тем или иным значением угла падения θ_0, отсюда при подстановке выражения ω_p через N' (16.5) можно найти значение электронной концентрации ($N' = N^*$), которое соответствует повороту необыкновенного луча.

Рассмотрим, далее, условия распространения радиоволн вдоль направления магнитного поля Земли. Согласно (16.36) с учетом

(16.4) при $\nu = 0$ получаем:

$$\Gamma^{\pm} = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \Omega)}}. \tag{16.52}$$

Как видно из (16.52), при достаточно низких частотах постоянная распространения левополяризованной волны Γ^- будет оставаться вещественной. Поэтому, если при падении радиоволны на границу ионосферы порождаются продольные волны, то одна из них, распространяясь вдоль магнитного поля Земли, может пройти через ионосферу.

Одно из явлений, к объяснению которого можно подойти, отправляясь от этого факта,— это так называемые *свистящие атмосферики*. В диапазоне СДВ (главным образом, на частотах $1 \div 10$ кГц) наблюдаются сигналы, порождаемые грозовыми разрядами, которые в звуковом канале приемника вызывают свист с ощутимо возрастающей частотой. Такие сигналы распространяются из одного полушария Земли в другое вдоль силовых линий магнитного поля Земли.

В заключение заметим, что упрощенный анализ распространения радиоволн в ионосфере, в котором влияние земного магнетизма не учитывается (см. § 15.5), дает — в основных чертах — достаточно достоверную картину. В то же время из-за сложности исходных условий точный учет влияния гиротропии ионосферы при расчете радиолиний невозможен. На практике это влияние выступает как источник дополнительных замираний. Если, например, в диапазоне КВ волна, распространяясь в слое F, проходит значительный участок трассы вдоль магнитного поля Земли, то в силу эффекта Фарадея плоскость ее поляризации поворачивается. А так как из-за нестабильности ионосферы угол поворота не остается постоянным, меняется уровень принимаемого сигнала, поскольку приемная антенна (например, типа диполя Герца) чувствительна к поляризации падающей волны.

16.2.5. О применении ферритов в радиотехнике СВЧ. Намагниченные ферриты, являющиеся гиротропными магнетиками, весьма широко применяются в волноводных и иных устройствах СВЧ. Принципы их построения многообразны, они подробно рассмотрены в ряде монографий [Д.5 — Д.7]. Электродинамические задачи, к которым приводит анализ этих устройств, сложны и требуют применения методов, рассматривавшихся в гл. 12.

Интересно отметить, что существует волноводный аналог эффекта Фарадея, открытием которого, по-видимому, и было положено начало применению намагниченных ферритов в технике СВЧ [1]). Если в круглый волновод поместить аксиально-симметричный ферритовый элемент (рис. 16.9) и приложить продольное постоянное магнитное поле H_0, то приходящая слева основная волна H_{11}, струк-

[1]) *Hogan C. L.* // Bell System Techn. Journ.— 1952.— V. 31, № 1.— P. 1.

тура которой в сечении S_1 (рис. 16.9*б*) показана на рис. 16.9*а*, окажется повернутой на некоторый угол ϑ; структура в сечении S_2 показана на рис. 16.9*в*. Сущность явления заключается в том, что гиротропный элемент по-разному действует на поля, вращающиеся в противоположных направлениях. Падающую волну H_{11} с азимутально фиксированной структурой, как известно (см. п. 7.2.2), можно разложить на две такие вращающиеся по азимуту волны.

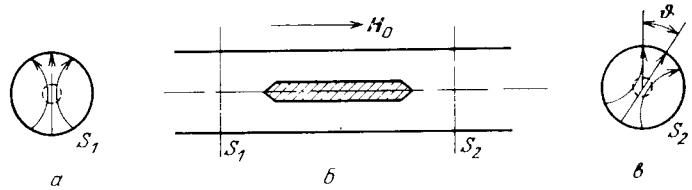


Рис. 16.9

При прохождении участка волновода с гиротропным элементом эти волны приобретут разные фазовые сдвиги, так что их наложение образует повернутую структуру.

Разумеется, это упрощенное объяснение. Задача дифракции волны H_{11} на гиротропном элементе может быть решена лишь методами, опирающимися на ЭВМ (см. гл. 12). Поле на участке волновода с ферритом не исчерпывается структурой H_{11}. Но существенно, что каждая вращающаяся составляющая падающей волны H_{11} возбуждает на участке с ферритом также вращающееся поле, причем на оси волновода поляризация будет круговой. Между тем, из п. 16.2.2 можно сделать вывод, что при круговой поляризации в плоскости, перпендикулярной направлению намагничивания, гиротропный магнетик проявляет себя как среда с магнитной проницаемостью $\mu_T \pm \alpha$, где знак зависит от направления вращения. Это и определяет различие фазовых сдвигов, о котором говорилось выше.

Фарадеевская ячейка на круглом волноводе (см. рис. 16.9) используется на практике, хотя и значительно реже, чем различные элементы, построенные на основе прямоугольного волновода. Отличительным свойством волноводных элементов с применением ферритов является их управляемость: меняя намагничивающее поле, можно влиять на волновой процесс. Весьма существенна необратимость волновых процессов при наличии гиротропных сред. Можно, например, строить волноводные элементы, осуществляющие передачу энергии, главным образом, в одном направлении, это так называемые *вентили*.

Возвращаясь к рис. 16.9, отметим, что в силу необратимости эффекта Фарадея волна H_{11}, отразившаяся от какого-нибудь препятствия справа от сечения S_2, при обратном прохождении ячейки испытает поворот на угол ϑ в прежнем направлении, так что по

отношению к ориентации падающей волны (рис. 16.9*а*) поворот составит 2ϑ. Если $\vartheta = 45°$, то отраженная волна придет к S_1 с ортогональной ориентацией. Она «развязана» по отношению к волне падающей. Можно, например внести в волновод вблизи сечения S_1 продольную поглощающую пластинку, которая будет действовать только на отраженную волну (будучи параллельной ее вектору **E**); тогда фарадеевская ячейка превратится в вентиль.

Обсудим также проявление эффекта Фарадея в резонаторе, построенном на основе круглого волновода и содержащего коаксиальный продольно намагниченный ферритовый стержень (рис. 16.10*а*).

Пусть сначала феррит размагничен. Будем рассматривать тип колебаний H_{111} с фиксированной азимутальной ориентацией, который

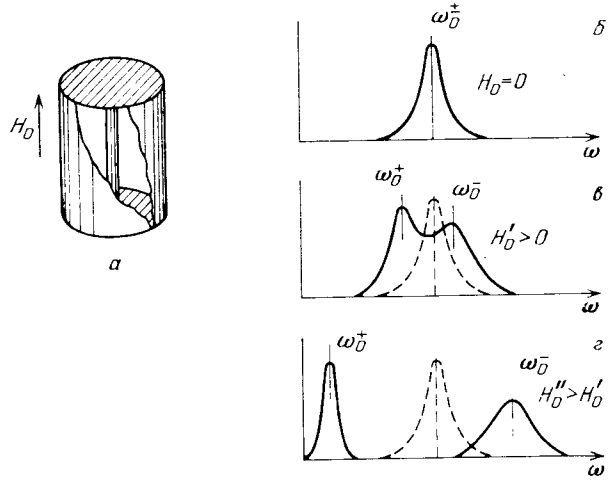


Рис. 16.10

лишь незначительно возмущен присутствием тонкого ферритового цилиндра. На обе вращающиеся составляющие этого типа колебаний (с азимутальными зависимостями $\exp(-i\alpha)$ и $\exp i\alpha$) стержень действует одинаково. Эти колебания остаются вырожденными; можно сказать, что соответствующие резонансные кривые «неразделимы» (рис. 16.10*б*). С приложением постоянного поля $\mathbf{H}_0$ феррит по-разному возмущает противоположно вращающиеся типы колебаний. В случае достаточно тонкого стержня можно считать, что в одном случае его эквивалентная магнитная проницаемость есть $\mu_T + \alpha$, а в другом $\mu_T - \alpha$. Собственная частота одного вращающегося типа колебаний увеличивается, а другого — уменьшается. Наблюдаемая резонансная кривая сначала становится двугорбой (рис. 16.10*в*), а при дальнейшем увеличении поля $\mathbf{H}_0$ собственные частоты могут быть разнесены значительно (рис. 16.10*г*). При этом кривая, соответствующая типу колебаний с правой круговой поляризацией на оси, не только сдвигается в сторону низких частот

($\alpha' > 0$), но и сужается в результате повышения добротности ($\alpha'' < 0$). Другая же кривая смещается в сторону высоких частот и расширяется.

16.2.6. Некоторые свойства полей в гиротропных средах (Б). Обсуждая в п. 3.4.2 принцип взаимности, мы ограничились изотропными средами. В случае среды анизотропной все выводы останутся в силе, если выполняются соотношения:

$$\mu\dot{\mathbf{H}}_{m2}\dot{\mathbf{H}}_{m1} - \mu\dot{\mathbf{H}}_{m1}\dot{\mathbf{H}}_{m2} = 0, \qquad \varepsilon\dot{\mathbf{E}}_{m2}\dot{\mathbf{E}}_{m1} - \varepsilon\dot{\mathbf{E}}_{m1}\dot{\mathbf{E}}_{m2} = 0. \quad (16.53)$$

Легко убедиться в том, что для этого тензоры μ и ε должны быть *симметрическими*, т. е. такими, что $\mu_{xy} = \mu_{yx}$, $\mu_{yz} = \mu_{zy}$ и т. д. (равны элементы, симметрично расположенные относительно главной диагонали). Гиротропные среды этому условию не удовлетворяют. В частности, для гиротропного магнетика $\mu_{xy} = -\mu_{yx} = -i\alpha$. Поэтому

$$\mu\dot{\mathbf{H}}_{m2}\dot{\mathbf{H}}_{m1} - \mu\dot{\mathbf{H}}_{m1}\dot{\mathbf{H}}_{m2} = \\ = i2\alpha\,(\dot{H}_{m2x}\dot{H}_{m1y} - \dot{H}_{m2y}\dot{H}_{m1x}) = i2\alpha\,[\dot{\mathbf{H}}_{m2}, \dot{\mathbf{H}}_{m1}]_z. \quad (16.54)$$

Правая часть обращается в нуль только в том случае, если в рассматриваемом классе полей компоненты вектора $\dot{\mathbf{H}}_m$ в плоскости, перпендикулярной направлению постоянного намагничивания параллельны (либо отсутствуют).

Общие энергетические соотношения, полученные в п. 3.3.2, в случае гиротропных сред нуждаются лишь в очевидном обобщении. Основное уравнение баланса (3.55) сохраняет силу. Далее нужно так же, как и в п. 3.3.2, произвести разделение вещественных и мнимых частей. При этом, например, получим

$$\overline{P}_{\text{п}} = \frac{\omega}{2}\,\mathrm{Im}\int_V (\varepsilon_0\varepsilon^*\dot{\mathbf{E}}_m^*\dot{\mathbf{E}}_m - \mu_0\mu\dot{\mathbf{H}}_m\dot{\mathbf{H}}_m^*)\,dv, \quad (16.55)$$

что при изотропии переходит в (3.59).

Говорят, что тензоры μ и ε некоторой анизотропной среды являются *эрмитовыми*, если $\mu_{xy} = \mu_{yx}^*$, $\mu_{yz} = \mu_{zy}^*$, $\mu_{zx} = \mu_{xz}^*$, а диагональные компоненты μ_{xx}, μ_{yy}, μ_{zz} вещественны (для эрмитовых матриц выполняется соотношение типа (11.3)). Для эрмитовых μ и ε подынтегральное выражение в (16.55) обращается в нуль, что означает отсутствие потерь.

Действительно,

$$\mu\dot{\mathbf{H}}_m\dot{\mathbf{H}}_m^* = \mu_{xx}\dot{H}_{mx}^2 + \mu_{yy}\dot{H}_{my}^2 + \mu_{zz}\dot{H}_{mz}^2 + \mu_{xy}\dot{H}_{mx}\dot{H}_{my}^* + \mu_{yx}\dot{H}_{my}\dot{H}_{mx}^* + \\ + \mu_{yz}\dot{H}_{my}\dot{H}_{mz}^* + \mu_{zy}\dot{H}_{mz}\dot{H}_{my}^* + \mu_{xz}\dot{H}_{mx}\dot{H}_{mz}^* + \mu_{zx}\dot{H}_{mz}\dot{H}_{mx}^*.$$

При эрмитовости μ первые три члена суммы вещественны, а остальные образуют вещественные пары, например,

$$\mu_{xy}\dot{H}_{mx}\dot{H}_{my}^* + \mu_{yx}\dot{H}_{my}\dot{H}_{mx}^* = 2\,\mathrm{Re}\,(\mu_{xy}\dot{H}_{mx}\dot{H}_{my}^*).$$

Аналогично раскрывается $\varepsilon^*\dot{\mathbf{E}}_m\dot{\mathbf{E}}_m^*$.

Возвращаясь к формулам (16.3) и (16.10), видим, что тензоры проницаемостей гиротропных сред, на самом деле, являются эрмитовыми при отсутствии потерь. В случае намагниченного феррита потери с самого начала не учитывались; согласно (16.11) $\mu_{xx} = \mu_{yy} = \mu_T$ и $\mu_{zz} = \mu_L$ вещественны, а $\mu_{xy} = \mu_{yx}^* = -i\alpha$. Что касается намагниченной плазмы, то аналогичные соотношения получаются при $\nu = 0$.

§ 16.3. Активные среды (А)

16.3.1. Общие представления. Активной, или регенеративной, будем называть среду, которая в противоположность поглощающей среде отдает энергию электромагнитному полю. Такого рода баланс энергии неизбежно связан с действием сторонних факторов. Однако в данном случае нельзя говорить о заданных $\dot{\mathbf{E}}^{\text{ст}}$ или $\dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}$, поскольку признаком активной среды является отклик на некоторое электромагнитное поле: сторонние процессы не являются независимыми, они совершаются под действием поля, которому отдают свою энергию. В п. 3.3.2 уже отмечалось, что при гармонических колебаниях (или для гармонических составляющих более сложной временной зависимости) активные среды описываются, как и поглощающие, посредством комплексных проницаемостей ε и μ, но с мнимыми частями другого знака: $\varepsilon'' < 0$ и $\mu'' < 0$.

Понятие активной среды удобно тем, что дает единое средство формализации всевозможных регенеративных факторов, выступающих в задачах прикладной электродинамики. Их многообразие велико. Для построения усилителей и генераторов используются макроскопические движения частиц в полях (электроника) и микроскопические эффекты (квантовая электроника). Большое значение приобрело параметрическое усиление и возбуждение колебаний в радиотехнике СВЧ. Интересно, что значение этого круга процессов было понято еще в начале 30-х годов [Г.1, с. 189].

Для построения теории активных сред, применяемых в разнообразных полупроводниковых приборах, а также в квантовых усилителях и генераторах (мазерах), оптических квантовых генераторах (лазерах) и др. необходимо рассматривать внутренние процессы в веществе (см., например, [Д.8, Д.13, Д.14]). Но коль скоро микроскопическая теория построена и на ее основании найдены комплексные проницаемости ε и μ, среда становится объектом макроскопической электродинамики.

16.3.2. Об электромагнитных полях. Для исследования полей в активных средах не требуется специальных методов. Более того, на основании уже полученных решений ряда электродинамических задач можно ввести в рассмотрение активные среды и выяснить, какие новые свойства приобретают электромагнитные поля. В качестве простейшего примера возьмем случай плоской однородной электромагнитной волны.

Формально оказываются справедливыми все соотношения, полученные в п. 4.1.4 при рассмотрении волн в поглощающей среде, но поскольку теперь $\varepsilon'' < 0$ и (или) $\mu'' < 0$, то ввиду (3.38) $\operatorname{tg}\Delta < 0$ и (или) $\operatorname{tg}\Delta^{\text{м}} < 0$ (при $\varepsilon' > 0$ и $\mu' > 0$). Поэтому в (4.38) может оказаться отрицательной величина k''. Если же $k'' < 0$ при $k' > 0$, вместо (4.40) получаем:

$$\mathbf{E} = \mathbf{x}_0 A e^{|k''|z}\cos(\omega t - k'z + \varphi),$$
$$\mathbf{H} = \mathbf{y}_0 \frac{A}{|W|} e^{|k''|z}\cos(\omega t - k'z + \varphi - \varphi_W). \qquad (16.56)$$

Это уже не затухающая волна, как в п. 4.1.4, а возрастающая, усиливаемая средой (рис. 16.11). Величину $|k''|$ при $k'' < 0$ можно называть коэффициентом усиления (в отличие от $k'' > 0$, называемого коэффициентом затухания, см. п. 4.0.2). Отношение $E_m(z+l)/E_m(z) = e^{|k''|l}$ показывает, во сколько раз увеличивается амплитуда волны на расстоянии l. Усилением волны называют величину $G = |k''|l$, измеряемую в *неперах* или — после умножения на $20\lg e$ — в *децибелах* (ср. п. 4.0.2).

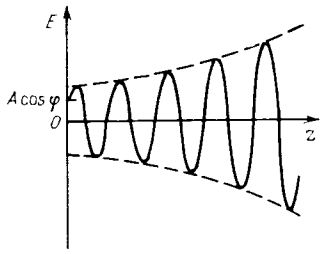


Рис. 16.11

Безграничная активная среда, разумеется, физически нереализуема. Но в технике используются различные усилители бегущей волны, построенные на основе отрезка той или иной направляющей структуры с активной средой. В случае полого волновода, полностью заполненного активной средой, для вычисления постоянной распространения можно было бы воспользоваться способом, рассмотренным в п. 6.4.3. Разумеется, реальная структура кроме активной среды содержит и поглощающую (в случае полого волновода поглощает металлическая оболочка). Поэтому, оценивая отношение амплитуд волны на выходе и входе отрезка структуры, запишем:

$$E_m(z+l)/E_m(z) = \exp(-\Gamma_1'' + |\Gamma_2''|)\,l, \qquad (16.57)$$

где $\Gamma_1'' > 0$ — коэффициент затухания, обусловленный поглощением, а $|\Gamma_2''|$ — коэффициент усиления волны активной средой.

Активность среды всегда обусловлена действием какого-то внешнего источника, генератора накачки. Соответственно этому $|\Gamma_2''|$ в (16.57) есть монотонно возрастающая от нуля функция $|\Gamma_2''(P_{\text{н}})|$, где $P_{\text{н}}$ — мощность накачки. Как видно из (16.57), при $P_{\text{н}} = 0$ будет происходить затухание волны. Только при некотором значении $P_{\text{н}} = P_{\text{н}}^*$ — поглощение окажется скомпенсированным: $-\Gamma_1'' + |\Gamma_2''| = 0$; волна пройдет без затухания. Усиление же имеет место при $P_{\text{н}} > P_{\text{н}}^*$.

Рассмотрим, далее, включенный в волноводный тракт полый резонатор с активной средой (рис. 16.12*а*). При резонансе амплитуда внутреннего поля $\mathbf{E}_m$ пропорциональна добротности резонатора Q и, разумеется, амплитуде падающей (слева) волны E_{m1}, возбуждающей резонатор (см. п. 11.1.3), т. е. $E_m = K_1 Q E_{m1}$, где K_1 — некоторый коэффициент пропорциональности. Амплитуда волны на выходе E_{m2}, возбуждаемой в волноводе полем резонатора через отверстие, в свою очередь, пропорциональна этой величине: $E_{m2} = K_1 K_2 Q E_{m1}$ (введен еще один коэффициент пропорциональности K_2). Пусть записанное соотношение относится к пассивному режиму, когда $P_{\text{н}} = 0$ (генератор накачки отключен). Если же $P_{\text{н}} \neq 0$, добротность и выходной сигнал изменятся, что можно обозначить $\tilde{E}_{m2} = K_1 K_2 \tilde{Q} E_{m1}$. Поскольку коэффициенты K_1, K_2 можно считать неизменными, получаем

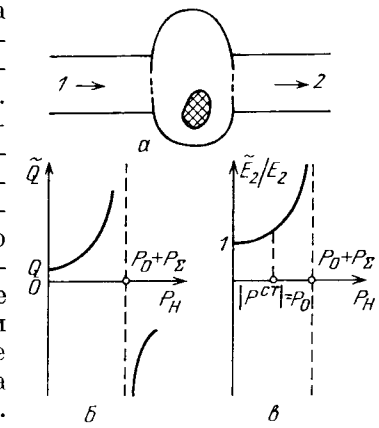


Рис. 16.12

$$\tilde{E}_{m2}/E_{m2} = \tilde{Q}/Q. \qquad (16.58)$$

Мы получили выражение *относительного коэффициента усиления* в тракте.

Пусть P_0 — мощность потерь внутри резонатора, P_Σ — мощность излучения из резонатора в присоединенные волноводы, и $P^{\text{ст}} < 0$ — мощность, отдаваемая полю резонатора активной средой. Тогда согласно п. 8.1.3

$$Q = \frac{\omega W}{P_0 + P_\Sigma}, \qquad \tilde{Q} = \frac{\omega W}{P_0 + P_\Sigma - |P^{\text{ст}}|} \qquad (16.59)$$

и, следовательно,

$$\frac{\tilde{E}_{m2}}{E_{m2}} = \frac{1}{1 - |P^{\text{ст}}|/(P_0 + P_\Sigma)}. \qquad (16.60)$$

Величину $|P^{\text{ст}}|$ выразим через мощность накачки $P_{\text{н}}$, введя к. п. д. этого процесса: $|P^{\text{ст}}| = \eta(P_{\text{н}})P_{\text{н}}$. С ростом $P_{\text{н}}$ добротность

резонатора $\tilde{Q}$ (16.59) неограниченно возрастает, пока $|P^{ст}|$ приближается к величине P_0+P_Σ (рис. 16.12*б*). Коэффициент усиления при этом становится бесконечным, т. е. выходной сигнал существует при исчезающе малом входном. Это *порог возбуждения* системы, начинающей работать как генератор. График относительного коэффициента усиления представлен на рис. 16.12*в*. В качестве усилителя резонатор функционирует, начиная с момента компенсации внутренних потерь: $|P^{ст}|=P_0$.

§ 16.4. Нелинейные среды (А)

16.4.1. О ферромагнетиках и сегнетоэлектриках. Нелинейность большинства распространенных сред проявляется только в сравнительно сильных полях (см. п. 1.3.5), редко встречающихся в технике. Однако давно известны и нелинейные явления, наблюдаемые при значениях **E** и **H**, которые типичны для практики. Таковы в первую очередь явления *ферромагнетизма*; нелинейность ферромагнетиков учитывалась еще в XIX веке при проектировании электрических машин. Ферромагнетикам формально аналогичны сегнетоэлектрики: существует сходство зависимостей **B**(**H**) в первом случае и **D**(**E**) — во втором. Существенно нелинейной является зависимость **j**(**E**) для частиц в вакууме и в случае плазмы. Нелинейные элементы, как известно, необходимы при построении радиоаппаратуры. Наконец, отметим, что в результате появления мощных лазеров стали доступными беспрецедентно сильные электромагнитные поля в оптическом диапазоне и расширился круг наблюдаемых нелинейных электромагнитных явлений, имеющих волновой характер. Возникла нелинейная оптика.

Возвращаясь к ферромагнетикам, отметим, что для них характерна самопроизвольная намагниченность (см. п. 1.3.6). При построении модели среды в виде совокупности магнитных диполей (см. пп. 14.1.1, 14.1.3) в данном случае приходится вводить сильные внутренние ориентирующие факторы, сущность которых получает объяснение лишь с позиций квантовой физики. Под действием этих факторов диполи должны ориентироваться параллельно, и это действительно происходит внутри очень малых, но макроскопических областей, называемых доменами. Последние — если иметь в виду поликристаллическое вещество — образуют хаотическую структуру. Является ли при этом вещество в среднем намагниченным, зависит от его «предыстории».

Если в исходном состоянии ферромагнетик размагничен (равна нулю средняя самопроизвольная намагниченность $\mathbf{M}_0$), то с приложением магнитного поля средняя индукция **B** в зависимости от **H** будет меняться, как показано на рис. 16.13*а*. Домены деформируются с тенденцией превратиться в один-единственный домен, в котором вектор намагниченности параллелен напряженности поля — насыщение. Интересно, что скачкообразность этого процесса может

быть замечена экспериментально (*скачки Баркгаузена*); на рис. 16.13*а* схематически представлен участок кривой $B(H)$ в увеличенном масштабе.

Кривая намагничивания $B(H)$ (рис. 16.13*а*) демонстрирует существенную нелинейность процесса, но еще не говорит о зависимости наблюдаемого состояния от предшествующих. Пусть, намагничивая ферромагнетик (кривая *1* на рис. 16.13*б*), мы получаем индукцию B_1 при напряженности H_1: точка $P(H_1, B_1)$. Если

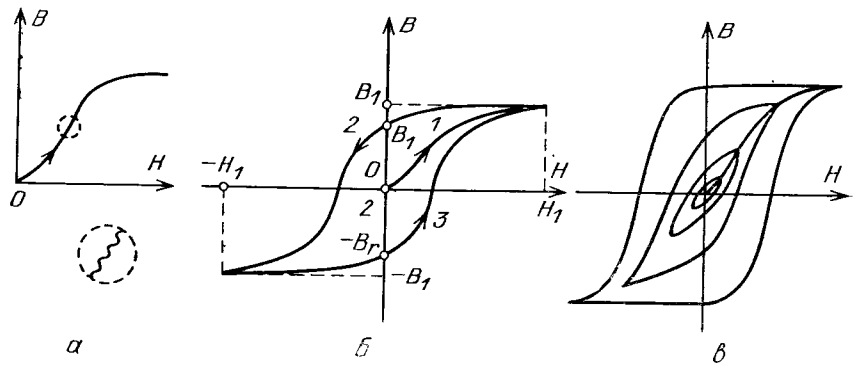


Рис. 16.13

теперь уменьшать H, то это не приведет к возвращению в прежнее состояние (начало координат). Ход изменения B будет соответствовать движению по кривой *2*, так что при $H=0$ будет $B=B_r$ — остаточная индукция.

Дальнейшее движение по кривой *2* отвечает изменению знака (направления) напряженности поля при прохождении через нуль. При $H=-H_1$ мы придем в точку $P'(-H_1, -B_1)$, которая симметрична $P(H_1, B_1)$ относительно начала координат, а изменив здесь направление H, будем уже двигаться по кривой *3* и, снова пройдя через нуль, вернемся в $P(H_1, B_1)$. При этом оказывается описанной замкнутая кривая, называемая *петлей гистерезиса*.

Если, прилагая поле к размагниченному ферромагнетику, остановиться не в точке $P(H_1, B_1)$, а «раньше» — при меньшем значении H, то можно пройти другую петлю гистерезиса, которая будет лежать внутри первой. Ряд таких частных петель показан на рис. 16.13*в*. При очень малых полях петли гистерезиса вырождаются в отрезки прямой начального участка на кривой намагничивания (и ее продолжения в область отрицательных H); в этой области процесс обратим.

Рассмотрим изменение состояния ферромагнетика с энергетических позиций. Согласно п. 1.5.3 бесконечно малое приращение

энергии магнитного поля в объеме V можно выразить в виде

$$dW^{\text{м}} = \int_V \mathbf{H}\, d\mathbf{B}\, dv. \tag{16.61}$$

Поэтому следующее равенство

$$W_2^{\text{м}} - W_1^{\text{м}} = \int_V \int_{B_1}^{B_2} \mathbf{H}\, d\mathbf{B}\, dv \tag{16.62}$$

выражает изменение энергии при переходе от состояния $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{B}_1$ к $\mathbf{H}_2$, $\mathbf{B}_2$. При циклическом перемагничивании ферромагнетика, совершив один обход петли гистерезиса, получим:

$$\Delta W^{\text{м}} = \int_V \oint \mathbf{H}\, d\mathbf{B}\, dv, \tag{16.63}$$

где контурный интеграл есть не что иное, как площадь петли гистерезиса на графике зависимости $B(H)$. Таким образом, возвращение в первоначальное состояние достигается ценой потери энергии $\Delta W^{\text{м}}$. Эти потери энергии на перемагничивание связаны с деформацией доменной структуры.

Если поле гармонически колеблется, петля гистерезиса обходится за каждый период колебаний. Потери оказываются пропорциональными площади петли и частоте процесса. Надо отметить, что сам характер петли гистерезиса зависит от быстроты перемагничивания, т. е. от частоты колебаний.

Подчеркнем, что хотя рассмотренный выше процесс намагничивания ферромагнетика имеет резко нелинейный характер, гистерезис — явление, которое может заключаться всего лишь в запаздывании линейного процесса. В рамках метода комплексных амплитуд при этом имеем: $\dot{\mathbf{B}}_m = \mu_0 \mu \dot{\mathbf{H}}_m$, где $\mu = |\mu| \exp(-i\Delta^{\text{м}})$ (ср. п. 3.2.1). Это значит, что при $\mathbf{H} = \mathbf{H}_m \cos \omega t$ магнитная индукция есть $\mathbf{B} = \mu_0 |\mu| \mathbf{H}_m \cos(\omega t - \Delta^{\text{м}})$. Легко убедиться, что график $B(H)$ цикличен (кривая имеет вид эллипса), т. е. имеется гистерезис. Вычисляя интеграл (16.63), учтем, что $d\mathbf{B} = -\mu_0 |\mu| \omega \mathbf{H}_m \sin(\omega t - \Delta^{\text{м}}) dt$. Поэтому

$$\overline{P}_{\text{п}}^{\text{м}} = \frac{\Delta W_{\text{т}}^{\text{м}}}{T} = -\frac{\omega \mu_0 |\mu|}{T} \int_V H_m^2 \int_0^T \cos \omega t \sin(\omega t - \Delta^{\text{м}})\, dt\, dv =$$

$$= \frac{\omega \mu_0 |\mu| \sin \Delta^{\text{м}}}{2} \int_V H_m^2\, dv = \frac{\omega \mu_0 \mu''}{2} \int_V H_m^2\, dv. \tag{16.64}$$

Получено выражение мощности магнитных потерь, дающее то же значение, что и формула (3.59) (см. также аналогичный вывод в п. 3.3.3).

В заключение сделаем замечание о сегнетоэлектриках. Это диэлектрические среды, процессы поляризации которых довольно сложны [Д.4] и, в сущности, несопоставимы с намагничиванием ферромагнетиков. Тем не менее, можно говорить о сходстве макроскопических характеристик: зависимость $\mathbf{D}(\mathbf{E})$ для сегнетоэлектриков близка к типу зависимости $\mathbf{B}(\mathbf{H})$, показанному на рис. 16.13.

16.4.2. Формализация нелинейных процессов при слабых полях. Общего вида нелинейные зависимости $\mathbf{D}(\mathbf{E})$, $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ и $\mathbf{j}(\mathbf{E})$ допускают простое представление в случае слабых полей или переменных составляющих этих полей. Рассмотрим в качестве примера изотропный диэлектрик, характеризуемый зависимостью $D(E)$. Разлагая эту функцию в ряд Тэйлора в окрестности точки $E = E_0$, ограничимся начальными членами:

$$D(E) = D(E_0) + \left.\frac{dD}{dE}\right|_{E=E_0} (E - E_0) + \ldots, \tag{16.65}$$

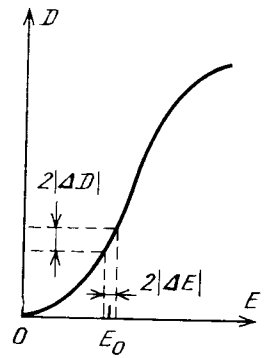


Рис. 16.14

что допустимо при достаточно малых приращениях $E - E_0$. Как видно, в этом приближении приращения $\Delta E = E - E_0$ и $\Delta D = D(E) - D(E_0)$ связаны линейной зависимостью. Произведена локальная *линеаризация* зависимости $D(E)$ (рис. 16.14).

Пусть при данной постоянной составляющей $E_0 = \text{const}$ приращение E меняется гармонически: $\Delta E = E_m \cos \omega t$. Тогда также $\Delta D = D_m \cos \omega t$ (в этом приближении процесс безынерционен) и из (16.65) следует:

$$D_m = \varepsilon_0 \varepsilon_{\text{д}}(E_0) E_m, \quad \varepsilon_{\text{д}}(E_0) = \frac{1}{\varepsilon_0} \left.\frac{dD}{dE}\right|_{E=E_0}. \tag{16.66}$$

Играющая роль относительной диэлектрической проницаемости величина $\varepsilon_{\text{д}}$, постоянная при выбранном E_0, называется *дифференциальной*. Подобным же образом производится линеаризация зависимостей $B(H)$ и $j(E)$; при этом вводятся дифференциальные параметры $\mu_{\text{д}}$ и $\sigma_{\text{д}}$.

Линеаризация отнюдь не всегда допустима, поскольку даже в случае слабых полей основной интерес может представлять отклонение от линейной зависимости. Продолжая рассматривать изотропный диэлектрик, примем во внимание, что согласно (1.70) $\mathbf{D}(\mathbf{E}) = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}(\mathbf{E})$. Исходя из разложения $P(E)$ в ряд Тэйлора в окрестности E_0, запишем:

$$\boldsymbol{\Delta P = P^{\text{л}} + P^{\text{нл}}}, \tag{16.67}$$

где $\Delta P = P(E) - P(E_0)$, а слагаемые справа имеют вид:

$$P^{\text{л}} = \varepsilon_0 \chi_{\text{д}}^{\text{э}} \Delta E \quad \text{и} \quad P^{\text{нл}} = \varepsilon_0 (\chi_1^{\text{э}} \Delta E + \chi_2^{\text{э}} \Delta E^2 + \ldots) = \varepsilon_0 \chi_{\text{нл}}^{\text{э}} \Delta E, \tag{16.68}$$

причем

$$\chi^{э}_{л} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{dP}{dE}\Big|_{E=E_0}, \qquad \chi^{э}_{n} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{(n+1)!}\frac{d^{n+1}P}{dE^{n+1}}\Big|_{E=E_0} \tag{16.69}$$

(отметим, что $1 + \chi^{э}_{л} = \varepsilon_{л}$).

Далее положим $\Delta E = E_m \cos(\omega t + \varphi)$, или согласно (3.8) $\Delta E = (\dot{E}_m e^{i\omega t} + \dot{E}^*_m e^{-i\omega t})/2$. Внося это в (16.68), легко убедиться, что $P^{нл}$ предстает как ряд, члены которого изменяются по закону $\exp(\pm in\omega t)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Обозначим их $\dot{P}^{нл}(\pm n\omega t) = \dot{P}^{нл}_m(\pm n\omega t)\exp(\pm in\omega t)$. Тогда

$$\begin{aligned}
\dot{P}^{нл}_m(0) &= \varepsilon_0[\chi^{э}(\omega-\omega)\dot{E}_m\dot{E}^*_m + \chi^{э}(\omega+\omega-\omega-\omega)\dot{E}^2_m\dot{E}^{*2}_m + \ldots],\\
P^{нл}_m(+\omega) &= \varepsilon_0[\chi^{э}(\omega+\omega-\omega)\dot{E}^2_m\dot{E}^*_m + \\
&\qquad + \chi^{э}(\omega+\omega+\omega-\omega-\omega)\dot{E}^3_m\dot{E}^{*2}_m + \ldots],\\
\dot{P}^{нл}_m(+2\omega) &= \varepsilon_0[\chi^{э}(\omega+\omega)\dot{E}^2_m + \chi^{э}(\omega+\omega+\omega-\omega)\dot{E}^3_m\dot{E}^*_m + \ldots]
\end{aligned} \tag{16.70}$$

и т. д., где постоянные коэффициенты $\chi^{э}(\omega\ldots)$ просто связаны с различными $\chi^{э}_n$ из (16.68).

Вследствие нелинейности закона $\mathbf{P}(\mathbf{E})$ гармонические колебания $\mathbf{E}$ с частотой ω порождают (в общем случае) постоянную составляющую и колебания со всевозможными кратными частотами вектора поляризованности $\mathbf{P}$. Чтобы найти составляющую частоты $n\omega$, надо сложить $\dot{\mathbf{P}}^{нл}_m(n\omega)$ и $\dot{\mathbf{P}}^{нл}_m(-n\omega)$.

Можно было взять ΔE в виде наложения нескольких частотных составляющих: $\Delta E = E_{mp}\cos(\omega_p t + \varphi) + E_{mq}\cos(\omega_q t + \psi) + \ldots$ Как видно, при подстановке ΔE в (16.68) получится разложение $P^{нл}$, содержащее компоненты $\dot{P}^{нл}(\pm k\omega_p \pm n\omega_q \pm \ldots)$. Соответствующие комплексные амплитуды $\dot{P}^{нл}_m(\pm k\omega_p \pm n\omega_q \pm \ldots)$ можно выразить как в (16.70). Говорят, что поляризованность содержит составляющие различных комбинационных частот.

Наконец, перейдем к записи уравнений электродинамики и представлению их решений в случае изотропного нелинейного диэлектрика. Пусть в данном случае $E_0 = 0$. Материальные уравнения имеют вид:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon_{л}\mathbf{E} + \mathbf{P}^{нл}, \qquad \mathbf{B} = \mu_0\mu\mathbf{H}, \tag{16.71}$$

где использованы соотношения (16.67)—(16.69). Уравнения Максвелла, таким образом, можно записать в виде:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \varepsilon_0\varepsilon_{л}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{P}^{нл}}{\partial t} + \mathbf{j}, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\mu_0\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}, \tag{16.72}$$

где $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} + \mathbf{j}^{ст}$.

В случае, если источник совершает гармонические колебания с частотой ω, поле содержит все кратные гармоники. Поэтому, взяв $\mathbf{j}^{ст} = \mathbf{j}^{ст}_m\cos(\omega t + \varphi) = (\mathbf{j}^{ст}_m e^{i\omega t} + \mathbf{j}^{ст*}_m e^{-i\omega t})/2$, разложим $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t)$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}(t)$ и $\mathbf{P}^{нл} = \mathbf{P}^{нл}(t)$ в ряды Фурье типа (3.17):

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\dot{\mathbf{E}}_m(n\omega)\,e^{in\omega t}, \qquad \mathbf{H} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\dot{\mathbf{H}}_m(n\omega)\,e^{in\omega t},\\
\mathbf{P}^{нл} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\dot{\mathbf{P}}^{нл}_m(n\omega)\,e^{in\omega t}.
\end{aligned} \tag{16.73}$$

Подставляя (16.73) в (16.72), получаем следующую бесконечную систему уравнений:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_m(n\omega) &= in\omega[\varepsilon_0\varepsilon_{л}(n\omega)\dot{\mathbf{E}}_m(n\omega) + \dot{\mathbf{P}}^{нл}_m(n\omega)] + \dot{\mathbf{j}}^{ст}_m(n\omega),\\
\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}_m(n\omega) &= -in\omega\mu_0\mu\dot{\mathbf{H}}_m(n\omega),\\
&\qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots
\end{aligned} \tag{16.74}$$

где $\varepsilon_{л}(n\omega) = \varepsilon_{л} - i\sigma/\varepsilon_0 n\omega$ и $\dot{\mathbf{j}}^{ст}_m(n\omega) = 0$ для всех n кроме $n = \pm 1$ причем $\dot{\mathbf{j}}^{ст}_m(\omega) = \dot{\mathbf{j}}^{ст}_m/2$ и $\dot{\mathbf{j}}^{ст}_m(-\omega) = \dot{\mathbf{j}}^{ст*}_m/2$.

Если бы среда была линейной, то все пары уравнений Максвелла в (16.74), соответствующие отдельным гармоникам, были независимы. Но присутствие функций $\dot{\mathbf{P}}^{нл}_m(n\omega)$ делает их связанными, так как каждая из этих гармоник зависит от серии гармоник $\mathbf{E}_m(n\omega)$. Действительно, подобно (16.70)

$$\begin{aligned}
\dot{P}^{нл}_m(\omega) &= \varepsilon_0[\chi^{э}(2\omega-\omega)\dot{E}_m(2\omega)\dot{E}_m(-\omega) + \\
&\quad + \chi^{э}(3\omega-2\omega)\dot{E}_m(3\omega)\dot{E}_m(-2\omega) + \ldots\\
&\quad \ldots + \chi^{э}(\omega+\omega-\omega)\dot{E}^2_m(\omega)\,\dot{E}_m(-\omega) + \ldots],\\
\dot{P}^{нл}_m(2\omega) &= \varepsilon_0[\chi^{э}(\omega+\omega)\dot{E}^2_m(\omega) + \chi^{э}(3\omega-\omega)\dot{E}_m(3\omega)\dot{E}_m(-\omega) + \ldots\\
&\quad \ldots + \chi^{э}(\omega+\omega+\omega-\omega)\dot{E}^3_m(\omega)\dot{E}_m(-\omega) + \ldots]
\end{aligned} \tag{16.75}$$

и т. д.

При оценке отдельных нелинейных эффектов оказывается возможным оставлять лишь несколько уравнений в системе (16.74). Такие «укороченные» системы используются, например, в нелинейной оптике.

В частности, если компонента $\dot{\mathbf{P}}^{нл}_m(\omega)$ относительно мала, ею можно пренебречь, анализируя первую гармонику векторов поля; тогда соответствующая пара уравнений из (16.74) (при $n = 1$)

оказывается независимой:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_m(\omega) &= i\omega\varepsilon_0\varepsilon_{\text{л}}(\omega)\dot{\mathbf{E}}_m(\omega) + \dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}_m(\omega), \\ \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_m(\omega) &= -i\omega\mu_0\mu\dot{\mathbf{H}}_m(\omega). \end{aligned} \tag{16.76}$$

При исследовании второй гармоники в определенных условиях можно не учитывать влияния высших. Тогда во второй строке (16.75) остается лишь первый член, так что из (16.74) при $n=2$ получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_m(2\omega) &= i2\omega\varepsilon_0\varepsilon_{\text{л}}(2\omega)\dot{\mathbf{E}}_m(2\omega) + \\ &\quad + i2\omega\varepsilon_0\chi^{\text{л}}(\omega+\omega)\dot{\mathbf{E}}_m(\omega)\dot{E}_m(\omega), \\ \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_m(2\omega) &= -i2\omega\mu_0\mu\dot{\mathbf{H}}_m(2\omega), \end{aligned} \tag{16.77}$$

где $\dot{\mathbf{E}}_m(\omega)$ — решение уравнений (16.76).

Таким образом, мы получаем приближенный подход для нахождения второй гармоники, порождаемой в нелинейной среде заданным полем первой гармоники. Аналогично рассматривается и возбуждение комбинационных частот.

16.4.3. О нелинейных явлениях в плазме. Будем рассматривать поле в плазме, которое при ее разрежении ($N' \to 0$) все более приближается к плоской однородной волне в вакууме вида

$$\mathbf{E} = \mathbf{x}_0 A\cos(\omega t - kz), \qquad \mathbf{H} = \mathbf{y}_0 \frac{A}{W}\cos(\omega t - kz) \tag{16.78}$$

($k = k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, $W = W_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$). Формулы (16.78) будут играть роль начального приближения к решению.

В отличие от обсуждения свойств плазмы в § 14.2 и п. 16.1.2 учтем теперь влияние лоренцевой силы, обусловленной переменным магнитным полем. Выражая лоренцеву силу $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mu_0[d\mathbf{r}/dt.\ \mathbf{H}])$, подставляем сюда $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ из (16.78). В отличие от (14.47) имеем

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \nu\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{q}{m}\left\{\mathbf{x}_0 E + \frac{1}{c}\left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \mathbf{y}_0 E\right]\right\}. \tag{16.79}$$

Здесь $E = A\cos(\omega t - kz)$ и $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$; мы не имеем права, как в § 14.2, переходить к методу комплексных амплитуд, исключая временну́ю зависимость, поскольку уравнение нелинейно.

Действительно, переходя к координатной форме при $\nu = 0$, находим

$$\frac{q}{m}E - \frac{q}{m}\frac{1}{c}\frac{dz}{dt}E = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad 0 = \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad \frac{q}{m}\frac{1}{c}\frac{dx}{dt}E = \frac{d^2z}{dt^2}. \tag{16.80}$$

Нелинейность заключена в произведениях компонент скорости $v_z = dz/dt$ и $v_x = dx/dt$ на E. Так как $v \ll c$ (иначе нельзя использовать законы классической механики), то соответствующие члены в (16.80) весьма невелики и в первом — линейном — приближении могут быть отброшены. Тогда (16.80) становится (при переходе к комплексной форме записи) просто частной формой (14.35). При этом

$$y = 0, \quad z = 0, \quad x = -\frac{q}{m\omega^2}A\cos(\omega t - kz) \tag{16.81}$$

и, следовательно,

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^{\text{л}} = -\mathbf{x}_0\frac{e^2N'}{m\omega^2}A\cos(\omega t - kz) = -\frac{eN'}{m\omega^2}\mathbf{E} \tag{16.82}$$

($q = e$); это же следует из (14.38). Далее можно было бы, как и в п. 14.2.1, найти диэлектрическую проницаемость плазмы (теперь мы бы назвали ее $\varepsilon_{\text{л}}$) и от начального приближения (16.78) перейти к первому приближению, заменив ε_0 на $\varepsilon_0\varepsilon_{\text{л}}$.

Но наша задача состоит в том, чтобы получить следующее приближение, найдя нелинейную поправку. С этой целью подставим (16.81) в третье из уравнений (16.80). Учитывая также (16.78), получаем

$$\frac{1}{2}\left(\frac{e}{m}\right)^2\frac{A^2}{\omega c}\sin(2\omega t - 2kz) = \frac{d^2z}{dt^2}, \quad q = e, \tag{16.83}$$

откуда

$$z = -\frac{A^2}{8\omega^3 c}\left(\frac{e}{m}\right)^2\sin(2\omega t - 2kz). \tag{16.84}$$

Таким образом, вследствие нелинейности плазмы, обусловленной действием лоренцевой силы, возникает продольное колебательное движение частиц с удвоенной частотой. Соответствующая составляющая вектора поляризованности находится умножением z (16.84) на $\mathbf{z}_0 eN'$:

$$\mathbf{P}^{\text{нл}} = -\mathbf{z}_0\frac{N'e^3A^2}{8\omega^3m^2c}\sin(2\omega t - 2kz). \tag{16.85}$$

Найденная компонента вектора поляризованности ортогональна напряженности электрического поля. Поэтому для перехода к представлению типа (16.70) понадобилось бы некоторое обобщение: восприимчивость имеет тензорный характер — нелинейность влечет за собой анизотропию.

Существует еще целый ряд факторов, обусловливающих нелинейность плазмы. В частности, значение ν зависит от средней энергии электронов. Если, например, мощность радиоволны, распространяющейся в ионосфере, настолько велика, что скорости электронов, находящихся под ее воздействием, не малы в сравнении со средней тепловой скоростью, то, можно сказать, что волна вызывает разогрев ионосферной плазмы, которым нельзя пренебречь. Комплексная диэлектрическая проницаемость плазмы, зависящая от ν, оказывается функцией амплитуды поля. При прочих равных условиях эта нелинейность должна возрастать с уменьше-

нием частоты (согласно (14.38) $\dot{\mathbf{v}}_m = -ie\dot{\mathbf{E}}_m/m\omega$), но на СДВ и ДВ поле лишь незначительно проникает в ионосферу, и отмеченный тип нелинейности проявляется, главным образом, в диапазоне СВ. Если мощная волна несет некоторый сигнал, то соответственно этому сигналу оказывается промодулированной частота столкновений ν. Это может повлиять на распространяющуюся здесь же слабую волну таким образом, что она воспримет указанную модуляцию. Такая кросс-модуляция называется *люксембург-горьковским эффектом.*

Возможно и самовоздействие мощной волны; волна, так сказать, изменяет свойства среды на своей трассе, а среда, в свою очередь, влияет на структуру волны (интерпретация несколько упрощенная). В результате самовоздействия может, в частности, порождаться вторая гармоника несущей.

16.4.4. О нелинейной оптике. Уже отмечалось (см. п. 16.4.1), что в сильных волновых полях, создаваемых мощными лазерами, начинает проявляться нелинейность сред. Этой проблематикой занимается нелинейная оптика (см., например, [Д.10, Д.11]).

Один из эффектов нелинейной оптики — порождение средой высших гармоник. Соответствующие электродинамические задачи обычно решаются в приближении заданного поля (см. п. 16.4.2). Можно, например, рассмотреть задачу о наклонном падении плоской однородной волны из линейного полупространства на границу с нелинейным. Исследуя при этом порождение второй гармоники, приходят к выводу (см., например, [Д.11]), что процесс характеризуется лучевой схемой (рис. 16.15), на которой кроме обычных трех лучей, соответствующих падающей, отраженной и прошедшей волнам, имеются еще два луча, которые обозначены символами $(-)_{2\omega}$, $(+)_{2\omega}$. Они отвечают порождаемым в обеих средах волнам на второй гармонике. Чтобы охарактеризовать направления этих лучей, запишем соотношения:

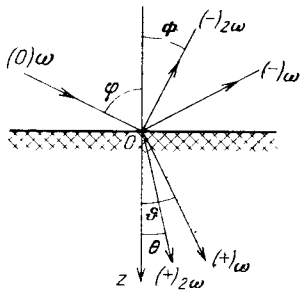


Рис. 16.15

$$\frac{\sin\Theta}{\sin\vartheta} = \sqrt{\frac{\varepsilon_л(\omega)}{\varepsilon_л(2\omega)}}, \qquad \frac{\sin\Phi}{\sin\vartheta} = \sqrt{\frac{\varepsilon_л(2\omega)}{\varepsilon_1(2\omega)}} \tag{16.86}$$

(магнитные проницаемости сред одинаковы). Формулы (16.86) дополняют обычные законы Снеллиуса. Вместе с соответствующими аналогами формул Френеля они были получены в начале 60-х годов [1]).

Важное значение имеет представление о самовоздействии некоторого волнового процесса, распространяющегося в нелинейной среде (этот термин уже использовался в п. 16.4.3). При распространении через жидкость или газ волны, создаваемой мощным лазером, учитывают нелинейность поляризации среды, вызываемую целым рядом факторов. Помимо поведения электронов в сильном электромагнитном поле существенно механическое воздействие поля на вещество: возникает давление, пропорциональное средней мощности волны, в результате чего в областях сгущения увеличивается диэлектрическая проницаемость. Часто приближенно полагают с учетом всех факторов, что

$$\varepsilon = 1 + \alpha\overline{E^2}, \quad \alpha > 0. \tag{16.87}$$

При распространении резко неоднородной волны — луча лазера,— можно сказать, увеличивается оптическая плотность среды в области сильного поля. Иными словами, в определенных условиях волновому процессу сопутствует образование канала, направляющего его энергию — нечто вроде диэлектрического волновода. Это называется *самоканализацией.* Если этот канал сужается, происходит так называемая *самофокусировка.*

УПРАЖНЕНИЯ

1. Воспользовавшись результатами из п. 2.2.6, показать, что для искусственного диэлектрика в виде системы металлических шаров радиуса R, равномерно распределенных в пространстве с плотностью N' (число шаров на единицу объема), справедлива следующая квазистатическая оценка диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon = 1 + 4\pi N' R^3. \tag{16.88}$$

2. Как изменится формула (16.88) при замене металлических шаров диэлектрическими?

3. Найти гироскопическую частоту электронов в магнитном поле Земли, полагая $H_0 = 40$ А/м.

4. Найти частоту ферромагнитного резонанса при условии, что для феррита $H_0 = 3\cdot 10^4$ А/м.

5. Исходя из формул (16.10) и (16.11), детализировать выражение постоянной Фарадея для плазмы, взяв $\nu = 0$.

6. Как соотносятся направления и скорости вращения векторов поля волн правой и левой круговой поляризации в гиротропном магнетике с одной стороны и прецессирующего вектора $\mathbf{M}$ — с другой?

7. Какой смысл имеет отрицательная добротность резонатора?

8. Найти соответствие между коэффициентами $\chi^3(\omega\ldots)$ и χ^3_n из (16.70) и (16.68), соответственно.

[1]) *Bloembergen N., Pershan P. S.* // Phys. Rev.— 1962.— V. 128.— P. 606.

ПРИЛОЖЕНИЕ

О ГРАФИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЯХ, ПОЛУЧЕННЫХ ПРИ ПОМОЩИ ЭВМ

В книге имеется целая серия изображений, полностью воспроизведенных при помощи ЭВМ с управляемым графопостроителем. Это, в первую очередь, картины силовых линий разных полей (при заданных зарядах или токах, в полых и диэлектрических волноводах, при излучении диполя Герца и пр.), а также графические характеристики дифракционных процессов (в частности, дифракции Френеля), процессов возбуждения полых структур и различные иные изображения. Все машинные рисунки отмечены символом ЭВМ.

Программы расчета функциональных зависимостей, решения систем дифференциальных уравнений силовых линий и пр. были составлены на языке ФОРТРАН. Программы графического воспроизведения зависимостей и символов написаны с использованием ГРАФОРа.

Благодаря разнообразию, подробности и точности машинных изображений, по-видимому, рождается новое качество подачи материала по курсу электродинамики. На наш взгляд, дело не только в том, что графические образы легко воспринимаются и запоминаются. Важна еще большая информативность машинных изображений в отличие от широко распространенных схематических рисунков, не только неподробных и неточных, но часто также неверных в некоторых деталях. Это можно сказать о большинстве ранее публиковавшихся картин силовых линий.

Немаловажен также эстетический элемент: машинные изображения не только «просто красивы», но позволяют в разнообразии форм ощутить общность, гармонию полей, волновых процессов.

Наконец, следующее замечание. Все картины силовых линий построены для соленоидальных или гармонических (за исключением нескольких точек) полей. Таким образом, $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$. Но на плоском чертеже показывается разрез поля, и в этой плоскости уже $\operatorname{div}_{\perp} \mathbf{F} \neq 0$ (оператор двумерный). Поэтому, вообще говоря, в плоскости чертежа густота силовых линий не может быть согласована с интенсивностью поля (см. п. 1.0.4); это выполнимо в пространстве. Разумеется, для двумерных полей (не зависящих от одной координаты) указанная трудность снимается. В качестве примера можно сопоставить рис. 2.7*а* и рис. 2.8*а*. Во втором случае (заряженные нити) все силовые линии лежат параллельно плоскости чертежа. Поэтому их густота на плоскости чертежа отражает распределение интенсивности поля в пространстве. В первом же случае (когда заряды — точечные) правильное распределение интенсивности отражается лишь пространственной картиной силовых линий, а на рис. 2.8*а* наблюдается кажущееся увеличение поля в направлении, перпендикулярном оси зарядов. Желая выяснить величину поля, надо каждый раз подсчитывать число силовых линий, выходящих через элемент ортогональной поверхности в пространстве, а не через отрезок линии в плоскости чертежа.

Заметим, что на рис. 7.9 магнитные силовые линии в плоскости $x0z$ своей густотой правильно отражают интенсивность поля, поскольку оно не зависит от y. В других случаях (например, на рис. 7.7) это качество не сохраняется, однако линии построены так, что по оси z интенсивность передана правильно.

Для численного интегрирования уравнений силовых линий, следующих из (1.16), использовался метод Рунге — Кутта второго порядка. Выбор шага производился в зависимости от предшествующей стадии процесса. Для устранения бесконечностей применялась выполняемая программой замена координат.

Заметим, что применение равномерного (достаточно малого) шага неэффективно из-за резкого возрастания времени.

Построение силовых линий в разных случаях имеет свои особенности. Например, для заряженных нитей линии равномерно выводятся из окружности, охватывающей малую окрестность одного заряда, и приходят к другим зарядам практически равномерно (в малых окрестностях). В случае точечных зарядов этого не происходит из-за трехмерности поля.

В варианте цилиндра, возмущающего параллельное поле, линии равномерно выводятся из отдаленной эквипотенциали.

В случае двух нитей тока густоту линий определяло значение Δ, которое задавало величину потока вектора H через элемент прямой, соединяющей нити, через который выходит одна линия. Аналогичные приемы использовались и в других задачах.

Для диполя Герца учитывалось, что элементарная площадка, к которой надо относить число электрических линий растет пропорционально r. Поэтому при $\vartheta = 90°$ через отрезок Δr вычислялся поток вектора $r\mathrm{E}_{\vartheta}$.

В случае прямоугольного волновода для согласования картин линий в двух продольных сечениях было необходимо выводить линии по единому закону вдоль z. Отметим, что интегрирование уравнений силовых линий здесь может быть произведено в явном виде.

Особо следует отметить случай полосковой структуры (см. рис. 7.32). Здесь решению уравнений силовых линий предшествовало решение гораздо более сложной задачи численного нахождения электромагнитного поля (во всех остальных случаях поле задавалось известными формулами).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ [1])

А. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

1. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества.— М.: Наука, 1989.
2. *Стрэттон Дж. А.* Теория электромагнетизма: Пер. с англ./Под ред. С. М. Рытова.— М.: Гостехиздат, 1948.
3. *Зоммерфельд А.* Электродинамика: Пер. с нем./Под ред. С. А. Элькинда.— М.: ИЛ, 1958.

Б. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА ДЛЯ ФИЗИКОВ

1. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Электричество и магнетизм: Пер. с англ./Под ред. Я. А. Смородинского.— М.: Мир, 1966.— Т. 5.
2. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Электродинамика: Пер. с англ./Под ред. Я. А. Смородинского.— М.: Мир, 1966.— Т. 6.
3. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика: Пер. с англ./Под ред. Э. Л. Бурштейна.— М.: Мир, 1965.
4. *Пановский В., Филипс М.* Классическая электродинамика: Пер. с англ./Под ред. С. П. Каницы.— М.: Физматгиз, 1963.

В. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА ДЛЯ РАДИОТЕХНИКОВ И РАДИОФИЗИКОВ

1. *Рамо С., Уиннери Дж.* Поля и волны в современной радиотехнике: Пер. с англ./Под ред. Ю. Б. Кобзарева.— М.: Гостехиздат, 1950.
2. *Вайнштейн Л. А.* Электромагнитные волны.— М.: Радио и связь, 1988.
3. *Никольский В. В.* Теория электромагнитного поля.— М.: Высшая школа, 1964.
4. *Каценеленбаум Б. З.* Высокочастотная электродинамика.— М.: Наука, 1966.
5. *Никольский В. В.* Антенны.— М.: Связь, 1966.
6. *Никольский В. В.* Электродинамика и распространение радиоволн.— М.: Наука, 1978.
7. *Вольман В. И., Пименов Ю. В.* Техническая электродинамика.— М.: Связь, 1971.
8. *Марков Г. Т., Петров Б. М., Грудинская Г. П.* Электродинамика и распространение радиоволн.— М.: Сов. радио, 1979.

Г. ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

1. *Мандельштам Л. И.* Полное собрание трудов.— М.: Изд-во АН СССР, 1955.— Т. 4.
2. *Зоммерфельд А.* Оптика: Пер. с нем./Под ред. М. Л. Ельяшевича.— М.: ИЛ, 1953.
3. *Горелик Г. С.* Колебания и волны.— М.: Гостехиздат, 1950.
4. *Потехин А. И.* Некоторые задачи дифракции электромагнитных волн.— М.: Сов. радио, 1948.

[1]) Не ставилось целью дать полный список литературы последних лет. Указываются только некоторые рекомендуемые и цитируемые книги.

5. *Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции: Пер. с нем./ Под ред. Г. Д. Малюжинца.— М.: Мир, 1964.
6. *Зоммерфельд А.* Дифференциальные уравнения в частных производных физики: Пер. с нем./Под ред. А. Н. Тихонова.— М.: ИЛ, 1950.
7. *Фок В. А.* Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн.— М.: Сов. радио, 1970.
8. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики: Пер. с англ./Под ред. Г. П. Мотулевич.— М.: Наука, 1970.

Д. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА СРЕД И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

1. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Физика сплошных сред: Пер. с англ./Под ред. Я. А. Смородинского.— М.: Мир, 1966.— Т. 7.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред.— 2-е изд.— М.: Гостехиздат, 1982.
3. *Хиппель А. Р.* Диэлектрики и волны: Пер. с англ./Под ред. Н. Г. Дроздова.— М.: ИЛ, 1960.
4. *Киттель Ч.* Введение в физику твердого тела: Пер. с англ.— М.: Наука, 1978.
5. *Гуревич А. Г.* Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках.— М.: Наука, 1973.
6. *Лакс Б., Баттон К.* Сверхвысокочастотные ферриты и ферромагнетики: Пер. с англ./Под ред. А. Г. Гуревича.— М.: Мир, 1965.
7. *Микаэлян А. Л.* Теория и применение ферритов на сверхвысоких частотах.— М.: Госэнергоиздат, 1963.
8. *Файн В. М., Ханин Я. И.* Квантовая радиофизика.— М.: Сов. радио, 1965.
9. *Лоудон Р.* Квантовая теория света: Пер. с англ./Под ред. Г. В. Скроцкого.— М.: Мир, 1976.
10. *Ахманов С. А., Хохлов В. В.* Проблемы нелинейной оптики.— М.: Изд-во ВИНИТИ, 1964.
11. *Бломберген Н.* Нелинейная оптика: Пер. с англ./Под ред. С. А. Ахманова и Р. В. Хохлова.— М.: Мир, 1966.
12. *Гинзбург В. Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме.— М.: Наука, 1967.
13. СВЧ полупроводниковые приборы и их применение: Пер. с англ./Под ред. В. С. Эткина.— М.: Мир, 1972.
14. *Ярив А.* Введение в оптическую электронику: Пер. с англ./Под ред. О. В. Богданкевича.— М.: Высшая школа, 1983.
15. *Туров Е. А.* Материальные уравнения электродинамики.— М.: Наука, 1983.

Е. РАДИОВОЛНЫ В ПРИРОДНЫХ УСЛОВИЯХ

1. *Долуханов М. П.* Распространение радиоволн.— М.: Связь, 1972.
2. *Грудинская Г. П.* Распространение радиоволн.— М.: Высшая школа, 1975.
3. *Введенский Б. А., Аренберг А. Г.* Вопросы распространения ультракоротких волн.— М.: Сов. радио, 1948.
4. Использование радиоспектра: Пер. с англ./Под ред. М. С. Гуревича.— М.: Связь, 1971.
5. Распространение ультракоротких волн: Пер. с англ./Под ред. Б. А. Шиллерова.— М.: Сов. радио, 1954.
6. *Калинин А. И., Черенкова Е. Л.* Распространение радиоволн и работа радиолиний.— М.: Связь, 1971.
7. *Долуханов М. П.* Дальнее распространение ультракоротких волн.— М.: Связьиздат, 1962.
8. *Дэвис К.* Радиоволны в ионосфере: Пер. с англ./Под ред. А. А. Корчака.— М.: Мир, 1973.

9. *Николе М.* Аэрономия: Пер. с англ./Под ред. М. Полоснова.— М.: Мир, 1973.
10. *Альперт Я. Л., Гинзбург В. Л., Фейнберг Е. Л.* Распространение радиоволн.— М.: Гостехиздат, 1953.
11. *Черенкова Е. Л., Чернышев О. В.* Распространение радиоволн.— М.: Радио и связь, 1984.
12. *Гершман Б. Н., Ерухимов Л. М., Яшин Ю. Я.* Волновые явления в ионосфере и космической плазме.— М.: Наука, 1984.
13. *Яковлев О. И.* Распространение радиоволн в космосе. М.: Наука, 1985.
14. Справочник по спутниковой связи и вещанию./Под ред. Л. Я. Кантора.— М.: Радио и связь, 1983.

Ж. НАПРАВЛЯЮЩИЕ СТРУКТУРЫ И РЕЗОНАТОРЫ

1. *Кисунько Г. В.* Электродинамика полых систем.— Ленинград: Изд-во ВКАС, 1949.
2. *Гуревич А. Г.* Полые резонаторы и волноводы.— М.: Сов. радио, 1952.
3. *Силин Р. А., Сазонов В. П.* Замедляющие системы.— М.: Сов. радио, 1966.
4. *Вайнштейн Л. А.* Открытые резонаторы и открытые волноводы.— М.: Сов. радио, 1966.
5. *Маркузе Д.* Оптические волноводы.— М.: Мир, 1974.
6. *Михалевский В. С.* Элементы теории сверхвысокочастотных замедляющих систем.— Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского ун-та, 1964.
7. *Унгер Х.-Г.* Планарные и волоконные оптические волноводы: Пер. с англ./ Под ред. В. В. Шевченко.— М.: Мир, 1980.
8. *Григорьев А. Д., Янкевич В. Б.* Резонаторы и резонаторные замедляющие системы СВЧ.— М.: Радио и связь, 1984.

З. ИСТОРИЯ НАУКИ

1. *Кузнецов Б. Г.* Развитие физических идей от Галилея до Эйнштейна в свете современной науки.— М.: Наука, 1966.
2. *Григорьян А. Т., Вяльцев А. Н.* Генрих Герц.— М.: Наука, 1968.
3. *Дуков В. М.* Электродинамика.— М.: Высшая школа, 1975.

И. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

1. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1977.
2. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике.— М.: Наука, 1970.
3. *Никольский В. В.* Вариационные методы для внутренних задач электродинамики.— М.: Наука, 1967.
4. *Васильев Е. Н.* Возбуждение тел вращения — М.: Радио и связь, 1987.— 272 с.
5. Вычислительные методы в электродинамике/Под ред. Р. Митры: Пер. с англ./Под ред. Э. Л. Бурштейна.— М.: Мир, 1977.
6. *Стренг Г.* Линейная алгебра и ее применения: Пер. с англ./Под ред. Г. И. Марчука.— М.: Мир, 1980.
7. *Самарский А. А.* Теория разностных схем.— М.: Наука, 1977.
8. *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория методов конечных элементов: Пер. с англ./ Под ред. Г. И. Марчука.— М.: Мир, 1977.
9. *Марчук Г. И., Агошков В. И.* Введение в проекционно-сеточные методы.— М.: Наука, 1981.
10. *Никольский В. В., Никольская Т. И.* Декомпозиционный подход к задачам электродинамики.— М.: Наука, 1983.
11. Автоматизированное проектирование устройств СВЧ/Под ред. В. В. Никольского.— М.: Радио и связь, 1982.
12. *Кочин Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного всчисления.— М.: Изд-во АН СССР, 1961.

13. *Тарасов И. Е.* Векторный анализ и начала тензорного исчисления.— М.: Высшая школа, 1966.
14. *Никольский В. В.* Математический аппарат электродинамики.— М.: Изд-во МИРЭА, 1973.

К. СПРАВОЧНИКИ

1. *Янке Е., Эмдэ Ф., Леш Ф.* Специальные функции: Пер. с нем./Под ред. Л. И. Седова.— М.: Наука, 1977.
2. *Кэй Дж., Лэби Т.* Таблицы физических и химических констант: Пер. с англ./Под ред. К. П. Яковлева.— М.: Физматгиз, 1962.
3. Справочник по волноводам: Пер. с англ./Под ред. Я. Н. Фельда.— М.: Сов. радио, 1952.

Учебное пособие

НИКОЛЬСКИЙ Вячеслав Владимирович
НИКОЛЬСКАЯ Татьяна Ивановна

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

Заведующий редакцией *Н. А. Носова*
Редактор *Т. Г. Борисова*
Художественный редактор *Г. М. Коровина*
Технический редактор *С. Я. Шкляр*
Корректоры *Т. С. Вайсберг, Л. С. Сомова*

ИВ № 12847

Сдано в набор 10.07.88. Подписано к печати 26.04.89. Формат 60×90/16. Бумага книжно-журнальная. Гарнитура обыкновенная новая. Печать высокая. Усл. печ. л. 34. Усл. кр.-отт. 34. Уч.-изд. л. 35,62. Тираж 23 850 экз. Заказ № 265. Цена 1 р. 50 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Четвертая типография издательства «Наука»
630077 г. Новосибирск 77, Станиславского, 25