Л. Д. ГОЛЬДШТЕЙН, Н. В. ЗЕРНОВ

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ И ВОЛНЫ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «СОВЕТСКОЕ РАДИО»
МОСКВА — 1971

УДК 621.371

Гольдштейн Л. Д., Зернов Н. В. **Электромагнитные поля и волны.** Изд. 2-е, перераб. и дополненное. М. Изд-во «Советское радио», 1971, 664 стр., т. 14000 экз., ц. 2 р. 25 к.

Излагаются основы теории электромагнитного поля. Главное внимание уделяется рассмотрению быстропеременных полей и анализу свойств радиотехнических элементов, теория которых базируется на уравнениях электродинамики (например, волноводов, объемных резонаторов и т. п.). Рассматриваются также вопросы взаимодействия электромагнитного поля с веществом, составляющие теоретическую основу квантовой электроники.

Книга предназначена для аспирантов и инженеров, работающих в области прикладной электродинамики, она может быть также использована как учебное пособие для студентов вузов радиотехнических специальностей.

325 рис., библ. 21 назв.

Предисловие ко 2-му изданию

Подготовка второго издания книги «Электромагнитные поля и волны» велась в то время, когда Льва Давидовича Гольдштейна уже не было в живых. Однако идеи, положенные в основу нового издания, были разработаны нами совместно.

В соответствии с нашей общей точкой зрения книга была дополнена вопросами взаимодействия электромагнитного поля с микрочастицами. Изучение этих вопросов, как известно, приобретает сейчас весьма большое значение, ибо они составляют теоретическую основу явлений, используемых в квантовой электронике.

В книгу введена также глава, посвященная распространению электромагнитных волн в гиротропных средах, и сделаны некоторые другие дополнения. Главы, входящие в первое издание, подверглись частичной переработке. На протяжении всей книги теперь применяется единая система единиц СИ взамен нескольких систем, использованных в первом издании.

По просьбе автора § 4 гл. I,, § 11 гл. IV, § 10—13 гл. VI и гл. VII были написаны И. И. Ногиным.

Рецензирование рукописи было проведено А. Л. Драбкиным, П. Я. Уфимцевым и В. А. Солнцевым. Ими сделан ряд ценных замечаний, которые учтены при подготовке рукописи к изданию.

Отдельные разделы рукописи были прочитаны Е. К. Аухимовичем, В. Л. Зузенко, В. Г. Карповым, А. Г. Кисловым, Т. И. Левченко и В. С. Стригиным. Их замечания и советы также способствовали улучшению книги.

Всем названным товарища м я выражаю глубокую благодарность.

Н. В. Зернов

Из предисловия к 1-му изданию

Книга предназначена служить учебным пособием по электродинамике для студентов радиотехнических втузов. Это определило объем книги и характер изложения отдельных разделов теории электричества.

Основное внимание в книге уделено теории быстропеременных полей: излучению электромагнитных волн, распространению их в направляющих системах (линиях и волноводах), электромагнитным колебаниям в резонаторах.

Вместе с тем авторы преследовали цель дать систематическое изложение теории электромагнитного поля, так чтобы учащийся мог, пользуясь книгой как основным учебным пособием, изучить теорию электричества, начиная от элементарных законов Кулона, Ома, Фарадея, вплоть до теории быстропеременных полей...

Авторы

Список обозначений и единиц измерений применяемых величин (в системе СИ)

l — длина, метр (*м*)
m — масса, килограмм (*кг*)
t — время, секунда (*сек*)
$\bar{F}$ — сила, Ньютон (*н*)
$\bar{r}$ — радиус-вектор (*м*)
$\bar{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности
q — электрический заряд, кулон (*к*)
U — потенциал, вольт (*в*)
C — электрическая емкость, фарада (*ф*)
ε — диэлектрическая проницаемость (*ф/м*)
ε' — относительная диэлектрическая проницаемость
$\vec{\vec{\varepsilon}}$ — тензор диэлектрической проницаемости (*ф/м*)
$\varepsilon_к$ — комплексная диэлектрическая проницаемость (*ф/м*)
$\bar{E}$ — напряженность электрического поля (*в/м*)
$\bar{D}$ — электрическая индукция ($к/м^2$)
$\bar{P}^e$ — электрическая поляризация ($к/м^2$)
$\bar{d}$ — электрический момент ($к \cdot м$)
ρ — объемная плотность электрического заряда ($к/м^3$)
σ — поверхностная плотность электрического заряда ($к/м^2$)
A — работа, джоуль (*дж*)
W — энергия (*дж*)
w — объемная плотность энергии ($дж/м^3$)
I — электрический ток, ампер (*а*)
$\bar{j}$ — плотность электрического тока ($а/м^2$)
$\bar{j}_s$ — поверхностная плотность электрического тока (*а/м*)
G — проводимость, сименс (*сим*)
g — удельная проводимость (*сим/м*)
$\bar{j}_{см}$ — плотность тока смещения ($а/м^2$)
$\bar{j}_{ст}$ — плотность стороннего электрического тока ($а/м^2$)
R — сопротивление (*ом*)
P — мощность, ватт (*вт*)
P_0 — мощность, выделяемая в единице объема ($вт/м^3$)

$\overline{H}$ — напряженность магнитного поля (*а/м*)

Φ — магнитный поток, вебер (*вб*)

$\overline{B}$ — магнитная индукция, тесла (*тл, вб/м*^{2})

$\overline{P}_м$ — магнитная поляризация (*тл, вб/м*^{2})

L и $M_{вз}$ — индуктивность и взаимная индуктивность, генри (*гн*)

μ — магнитная проницаемость (*гн/м*)

μ' — относительная магнитная проницаемость

$\overrightarrow{\underleftarrow{\mu}}$ — тензор магнитной проницаемости (*гн/м*)

$q_м$ — магнитный заряд (магнитная масса) (*вб*)

$\rho_м$ — объемная плотность магнитной массы (*вб/м*^{3})

$I_м$ — магнитный ток (*в*)

$\overline{j}_м$ — плотность магнитного тока (*в/м*^{2})

$\overline{M}$ — магнитный момент (*вб.м*)

$\overline{\Pi}$ — вектор Пойнтинга (*вт/м*^{2})

ω — угловая частота, радиан/секунда (*рад/сек*)

f — частота, герц (*гц*)

λ — длина волны (*м*)

$\overline{k}$ — волновой вектор (1/*м*)

k — волновое число (1/*м*)

α — коэффициент затухания (в пространстве) непер/метр (*неп/м*); α (*неп/м*) $= 0{,}115\ \alpha$ (*дб/м*)

α — коэффициент затухания (во времени) (*неп/сек*)

β — фазовая постоянная (1/*м*)

γ — постоянная распространения (1/*м*)

$v_ф$ — фазовая скорость (*м/сек*)

$v_{гр}$ — групповая скорость (*м/сек*)

Z_o — волновое сопротивление среды (*ом*)

Z_S — поверхностное сопротивление проводника (*ом*)

δ — глубина проникновения поля (тока) в проводник (*м*)

$Z_{вх}$ — входное сопротивление источника поля (антенны) (*ом*)

R_Σ — сопротивление излучения (*ом*)

Ω — телесный угол, стерадиан (*стер*)

$\Phi(\theta, \varphi)$ — характеристика направленности антенны по мощности (*вт/стер*)

$f_{кр}$ — критическая частота (*гц*)

$\lambda_{кр}$ — критическая длина волны (*м*)

f_{mnp} — собственная частота резонатора (*гц*)

λ_{mnp} — собственная длина волны резонатора (*м*)

Q — добротность резонатора

$h = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ *дж·сек* — постоянная Планка

$\overline{p}$ — импульс частицы (*кг·м/сек*)

$\hat{L}$ — обозначение оператора

$\hat{H}$ — оператор полной энергии

ψ — волновая функция (в квантовой теории)

$\overline{L}$ — момент количества движения ($кг \cdot м^2/сек$)

P_{mn} — вероятность квантового перехода

p_{mn} — вероятность квантового перехода за единицу времени ($1/сек$)

ω_{mn} — угловая частота квантового перехода ($рад/сек$)

$e_0 = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ $К$ — абсолютная величина заряда электрона

$m_0 = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ $кг$ — масса электрона

d_{nm} — матричный элемент электрического дипольного момента частицы ($к \cdot м$)

$\overline{M}_{nm}$ — матричный элемент магнитного дипольного момента частицы ($вб.м$)

$\Omega_к$ — ширина частотной характеристики квантового перехода ($рад/сек$)

$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ $дж/град$ — постоянная Больцмана

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Все физические величины могут быть разделены на скалярные и векторные. Первые полностью определяются заданием их численной величины, выраженной в некоторой системе единиц. Примерами таких величин являются: масса тела, температура, плотность, мощность, энергия, ток, напряжение и т. д. Примерами векторных величин являются: сила, скорость, плотность потока и т. д. Легко понять, что судить о тех явлениях, которые вызовет действие силы на какое-либо тело, можно только, зная как величину, так и направление этой силы.

Физические величины как векторные, так и скалярные, являясь характеристиками материи или ее проявлений, суть функции пространственных координат и времени. Это записывается так: $a = f(x, y, z, t)$ или $\bar{a} = \bar{f}(x, y, z, t)$, где f — знак функциональной зависимости; a и $\bar{a}$ — соответственно исследуемые скаляр и вектор; x, y, z — пространственные координаты, определяющие положение точки наблюдения, т. е. той точки пространства, в которой рассматривается величина a или $\bar{a}$; t — время.

В случае, когда пространственные координаты фиксированы, мы имеем дело с величинами, являющимися функцией лишь одной переменной — времени t.

Точно так же в отдельных случаях нас могут интересовать только пространственные закономерности, т. е. зависимости рассматриваемых величин a или $\bar{a}$ от трех пространственных координат. Здесь уместно сделать следующее замечание. Пространственные координаты могут быть выбраны различно. Читателю должны быть хорошо известны такие системы координат, как прямоугольная, сферическая, цилиндрическая и т. д. Очевидно, что если a или $\bar{a}$ является физической величиной, то ее значение не должно зависеть

от выбора системы координат, другими словами, величина a или $\bar{a}$ должна оставаться неизменной при произвольном выборе системы координат. Величины, не меняющие своего значения при преобразовании координат, называются инвариантами*). Примерами инвариантов являются такие величины, как объем тела, запас энергии и т. п.

Не все математические величины, вводимые при рассмотрении какого-либо явления, являются инвариантными по отношению к преобразованию координат. Достаточно привести примеры таких величин, как проекция силы на координатные оси, расстояние до начала координат и т. п.

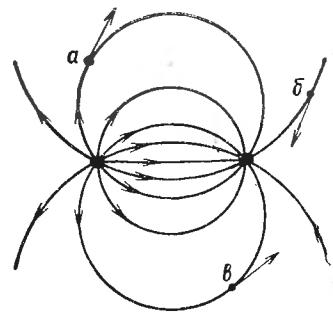


Рис. 1.1. Электрическое поле двух разноименных зарядов.

Инвариантность понятий, более сложных, чем в приведенных выше примерах, не всегда очевидна. Иногда та или иная величина является инвариантной только по отношению к определенным типам преобразования координат.

Все величины, являющиеся функциями положения в пространстве, или, как мы будем часто говорить, функциями точки, могут иметь значения, отличные от нуля в ограниченной части пространства. Эта часть пространства называется полем данной величины. В частности, полем данной величины может быть и все бесконечное мировое пространство.

Очевидно, можно различать поля вектора $\bar{a}$ или векторные поля и поля скаляра a или скалярные поля**). Примеры таких полей известны читателю из курса физики (поле тяготения, электрическое и магнитное поля и др.).

Векторные поля удобно изображать в виде силовых линий. Силовая линия определяется как линия, касательная в каждой точке которой совпадает с направлением вектора в данной точке. Из приведенного определения непосредственно вытекает способ составления уравнения силовой линии.

---

*) Как следует из теории относительности, физические величины не инвариантны по отношению к преобразованиям пространственных координатных систем, движущихся друг относительно друга. Для сохранения инвариантности, а значит, и физического смысла величин при переходе от условно покоящейся к движущейся системе координат, надо вместе с пространственными координатами преобразовать и отсчет времени.

**) Приведенное выше определение поля не следует отождествлять с понятием о физическом поле, представляющем собой одну из форм материи (см. гл. V).

Пусть a_x, a_y и a_z — проекции вектора поля на координатные оси, а dx, dy, dz — элементы длины ds силовой линии. Тогда, очевидно, $dx/a_x = dy/a_y = dz/a_z$. Интегрируя эту систему дифференциальных уравнений, где a_x, a_y, a_z суть известные функции координат, можно получить аналитическое выражение для уравнения силовой линии.

На рис. 1.1 показан пример изображения векторного поля силовыми линиями. В отдельных точках рисунка показаны направления вектора поля в этих точках.

При построении силового поля удобно характеризовать численное значение вектора в данной точке густотой силовых линий. При этом величину вектора $\vec{a}$ определяют числом силовых линий, приходящихся в данной точке поля на единицу площади, перпендикулярной к силовым линиям.

1. Закон Кулона

В основе электростатики, т. е. теории электричества, находящегося в покое, лежит экспериментальный закон взаимодействия двух наэлектризованных тел.

Количественная формулировка закона взаимодействия двух наэлектризованных тел была опубликована французским ученым Шарлем Августином Кулоном в 1785 году, и этот закон носит его имя. Однако надо иметь в виду, что в действительности закон Кулона представляет собой результат многочисленных экспериментальных исследований, произведенных на протяжении десятилетий целой плеядой ученых. Среди этих ученых особенно большая роль принадлежит величайшему исследователю и мыслителю Михаилу Васильевичу Ломоносову, а также его другу и товарищу Рихману, члену Петербургской Академии наук Эпинусу и др.

«Сыскать подлинную электрической силы причину и составить точную ее теорию» — так 25 ноября 1753 года сформулировал М. В. Ломоносов задачу. Совместно с Рихманом Ломоносов построил первый в мире электроизмерительный прибор — «электрический указатель или электрический гномон», который был описан ими в статье «Об указателе электрическом и его употреблении при опытах электрических как натурою, так и искусством произведенных»*). Только благодаря наличию такого измерительного прибора и других, позднее построенных по его принципу, стало возможным количественно сформулировать так называемый закон Кулона. Не останавливаясь на описании опытов по проверке этого закона, хорошо известных из элементарного курса физики, мы напомним лишь его формулировку.

---

*) Данилевский В. В. «Русская техника», изд. второе, Лениздат, 1949 г.

Два точечных электрических заряда q_1 и q_2, находящиеся в точках *1* и *2*, взаимодействуют друг с другом с силой, направленной по прямой, соединяющей эти заряды; величина силы взаимодействия пропорциональна величинам зарядов (количеству электричества в каждом из них), обратно пропорциональна квадрату расстояния между зарядами и зависит от свойств среды, в которой они находятся.

Математически закон Кулона записывается в следующем виде:

$$\bar{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon r^3}\bar{r}_{12};\quad \bar{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon r^3}\bar{r}_{21}, \tag{1.1}$$

где q_1 и q_2 — величины каждого из зарядов; r — расстояние между зарядами, $\bar{r}_{12}$ и $\bar{r}_{21}$ — векторы, численно равные расстоянию r и направленные по прямой, соединяющей заряды: первый — от точки 1 к точке 2, второй — от точки 2 к точке 1; $\bar{F}_{12}$ — есть сила, приложенная ко второму заряду; $\bar{F}_{21}$ — обратная ей по направлению и равная по величине сила, приложенная к первому заряду. Коэффициент ε учитывает роль среды и носит название диэлектрической проницаемости. Как показывает опыт, во всех средах сила взаимодействия между электрическими зарядами меньше, чем в вакууме, поэтому абсолютную диэлектрическую проницаемость удобно представить в виде произведения двух величин

$$\varepsilon = \varepsilon' \varepsilon_0,$$

где ε_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума.

Величина ε_0 получила название электрической постоянной. В системе СИ значение $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9}$ *ф/м*. Безразмерная величина ε' носит наименование относительной диэлектрической проницаемости среды. Она показывает, во сколько раз сила взаимодействия между электрическими зарядами в данной среде меньше, чем в вакууме. В табл. 1 приведены значения относительной диэлектрической проницаемости для некоторых веществ, применяемых в радиотехнике.

Свойства среды могут либо изменяться по определенному закону от точки к точке, либо в каждой точке оставаться неизменными. В первом случае диэлектрическая проницаемость является некоторой функцией координат. Подобную среду называют неоднородной. Во втором случае диэлектрическая проницаемость от координат не зависит и о такой среде говорят, что она однородна.

Среды, физические свойства которых в окрестности любой точки одинаковы по всем направлениям, называются изотропными. Диэлектрическая проницаемость изотропных сред — величина скалярная. Наряду с ними, существуют анизотропные среды, рассмотрению которых посвящена гл. VII.

Таблица 1

Вещество	ε'
Вакуум	1
Воздух 0°С	1,0006
Вода дистиллированная	81,1
Бакелит	3—5
Стекло	5—10
Слюда	5—6
Фарфор	5—6,8
Плавленый кварц	3,5—4,1
Микалекс	5,7—5,9
Полистирол	2,5
Тефлон	2,1
Тибар	$\sim 10^4$

2. Напряженность поля

Один или множество зарядов, расположенных произвольным образом в некотором объеме, вызывают в пространстве появление электрического поля. Последнее характеризуется тем, что если мы внесем в некоторую точку пространства пробный «точечный» заряд, то на этот заряд действует сила, равная равнодействующей всех сил, которые он испытывает от всех имеющихся зарядов. Электрическое поле принято характеризовать напряженностью. Под напряженностью электрического поля понимается сила, отнесенная к единице пробного положительного заряда q'. При этом предполагается, что внесение пробного заряда не нарушает взаимного расположения зарядов, создавших поле. Условимся в дальнейшем называть точками истока те точки пространства, в которых находятся источники поля (в случае электрического поля — заряды, создавшие поле), и точками наблюдения — те точки пространства, в которых мы исследуем поле (измеряем напряженность поля, внося пробный заряд). Условимся также считать положительным направлением радиуса-вектора направление вектора от точки истока к точке наблюдения.

Пусть в рассматриваемом пространстве имеется только один точечный заряд q, находящийся в точке истока с координатами x_q, y_q, z_q. Этот точечный заряд создает электрическое поле. Найдем напряженность поля в точке наблюдения a с координатами x_a, y_a, z_a. Для этого мысленно внесем сюда пробный заряд q'. Этот заряд по закону Кулона испытывает силу, равную

$$\bar{F} = \frac{q \cdot q'}{4\pi\varepsilon r^3} \bar{r}, \qquad (1.2)$$

где

$$r = \sqrt{(x_a - x_q)^2 + (y_a - y_q)^2 + (z_a - z_q)^2}.$$

В соответствии с определением напряженности поля найдем

$$\bar{E} = \frac{\bar{F}}{q'} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^3}\bar{r}. \qquad (1.3)$$

Напряженность поля точечного заряда прямо пропорциональна величине заряда и обратно пропорциональна квадрату расстояния до точки наблюдения. Вектор напряженности поля совпадает с направлением радиуса-вектора, если заряд, создавший поле, положителен и обратен по направлению в случае отрицательного заряда. На рис. 1.2 показаны силовые линии поля для этих двух случаев.

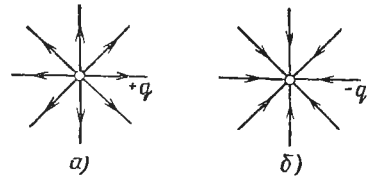


Рис. 1.2. Электрическое поле точечных зарядов $+q$ и $-q$.

Из формулы (1.3) можно сделать заключение, что при приближении точки наблюдения к точке истока напряженность поля возрастает до бесконечности. Однако это неверно. Напряженность поля, как и все иные физические характеристики поля, не может принимать бесконечных значений. Формула (1.3) ограниченно применима лишь для точечного заряда. Понятие точечного заряда условно. Всякий заряд занимает некоторый объем, линейными размерами которого можно пренебрегать и считать их нулевыми, лишь рассматривая поле в отдаленных точках наблюдения. При малых расстояниях от точки истока до точки наблюдения надо учитывать объемный характер распределения заряда. Этот случай мы рассмотрим позднее.

3. Вектор электрической индукции

Из выражения для напряженности электрического поля, приведенного в предыдущем параграфе, следует, что вектор $\bar{D}$, определенный как

$$\bar{D} = \varepsilon\bar{E} \qquad (1.4)$$

или

$$\bar{D} = \frac{q}{4\pi r^3}\bar{r}, \qquad (1.5)$$

не зависит от ε и определяется лишь величиной заряда, создавшего поле, и положением точки наблюдения. В общем случае, когда поле

создается не одним точечным зарядом, а совокупностью произвольно расположенных зарядов, вектор $\vec{D}$ будет определяться величинами и взаимным расположением зарядов относительно точки наблюдения. Введение этого вектора позволит нам получить некоторые соотношения, справедливые для любой среды независимо от значения диэлектрической проницаемости.

Вектор $\vec{D}$ носит название вектора электрической индукции. В дальнейшем поле вектора $\vec{D}$ мы также будем изображать при помощи силовых линий. Очевидно, что в однородной изотропной среде силовые линии векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ совпадают по направлению. Кроме того, диэлектрическую проницаемость большинства сред можно считать величиной постоянной, не зависящей от напряженности электрического поля. В этих средах векторы $\vec{D}$ и $\vec{E}$ пропорциональны по величине [соотношение (1.4) является линейным]. Поэтому подобные среды называются *линейными*. Исключение составляют лишь некоторые вещества, например сегнетоэлектрики, относящиеся к так называемым *нелинейным* средам.

Рассмотрим поле точечного заряда и рассчитаем общее количество силовых линий, пронизывающих некоторую сферическую поверхность радиуса r с центром в точке истока. Элементарные площадки этой сферической поверхности во всех точках перпендикулярны направлению векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$. Так как число линий на единицу такой поверхности должно соответствовать численному значению этих векторов, то нетрудно видеть, что общее число линий через сферическую поверхность равно:

для вектора $\vec{D}$

$$N = D 4\pi r^2 = \frac{q}{4\pi r^2} 4\pi r^2 = q,$$

для вектора $\vec{E}$

$$N' = E 4\pi r^2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon}.$$

Мы видим, что число силовых линий вектора $\vec{E}$ и линий вектора $\vec{D}$, или линий индукции, не зависит от радиуса сферической поверхности. Отсюда непосредственно вытекает непрерывность этих линий, ибо если бы эти линии прерывались или зарождались где-нибудь помимо точки истока, можно было бы всегда найти такие две сферические поверхности, через которые проходило бы неодинаковое число линий. Нетрудно теперь понять, что результат подсчета силовых линий ввиду их непрерывности не зависит вообще от формы поверхности, и можно утверждать, что через произвольную поверхность, окружающую электрический заряд, проходит одно и то же число линий, равное q для вектора индукции и q/ε для вектора напряженности поля. Если условиться считать положи-

тельными линии, выходящие наружу объема, ограниченного поверхностью, и соответственно отрицательными — линии, входящие внутрь объема, то, как это будет показано в § 5, полученный результат обобщается на произвольное число произвольно расположенных зарядов, а именно: число силовых линий индукции, проходящих через произвольную замкнутую поверхность, равно Σq, т. е. алгебраической сумме зарядов, находящихся внутри объема, ограниченного замкнутой поверхностью.

Преимущества введения понятия о векторе индукции выясняются при рассмотрении поля в неоднородных средах. При переходе из среды с одной диэлектрической проницаемостью в среду с другой диэлектрической проницаемостью число линий вектора $\bar{E}$ или силовых линий будет меняться. Таким образом, силовые линии уже не будут непрерывными, они смогут зарождаться не только в точках истока, но и при всяком изменении свойств среды.

В противоположность этому число линий индукции не меняется при переходе из одной среды в другую. Поэтому мы в дальнейшем будем по большей части рассчитывать общее число линий (или так называемый поток линий) индукции.

4. Электрическая поляризация

Как следует из соотношения (1.3), один и тот же заряд в средах с различной диэлектрической проницаемостью создает электрическое поле разной по величине напряженности. Кроме того, из рассуждений § 3 гл. I вытекает, что при переходе из одного вещества в другое (с другой диэлектрической проницаемостью) напряженность электрического поля будет меняться. Все это говорит о том, что характер электростатического поля определенным образом зависит от свойств окружающей среды.

Для выяснения механизма влияния диэлектрической среды на процессы в электростатическом поле рассмотрим молекулярную модель вещества.

Важнейшей отличительной чертой веществ, названных диэлектриками, является отсутствие в них свободных зарядов, т. е. зарядов, способных перемещаться на макроскопические расстояния*) и переносить электрический ток.

Часть твердых, а также все газообразные и жидкие диэлектрики имеют так называемую молекулярную структуру. Каждая молекула этих диэлектриков содержит одинаковое количество положительных и отрицательных зарядов и в целом является электрически нейтральной. Заряды, входящие в состав нейтральных молекул, мы будем называть связанными зарядами.

*) Под макроскопическими будем понимать расстояния, которые велики по сравнению с расстоянием между молекулами.

Необходимо заметить, что некоторые диэлектрики имеют ионную структуру. Они состоят из ионов, закрепленных в узлах кристаллической решетки в определенных положениях равновесия. Однако ионные кристаллические решетки могут быть разбиты на элементарные ячейки, каждая из которых содержит равное число зарядов противоположного знака и является электрически нейтральной. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать диэлектрики, построенные из нейтральных молекул, имея в виду, что все основные рассуждения можно распространять и на ионные диэлектрики. Только в этом случае под термином «нейтральная молекула» следует подразумевать элементарную ячейку кристалла, а под «связанными зарядами» — ионы, закрепленные в узлах кристаллической решетки.

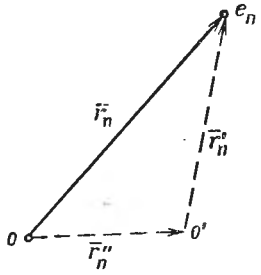


Рис. 1.3. К определению электрического момента молекулы диэлектрика.

Под воздействием сил внешнего электрического поля связанные положительные заряды молекул диэлектрика смещаются по направлению вектора $\bar{E}$, а отрицательные — в противоположную сторону. В результате этого молекула деформируется и приобретает электрический момент величиной

$$\bar{d} = \sum_n e_n \bar{r}_n, \tag{1.6}$$

где суммирование производится по всем связанным зарядам молекулы e_n, а $\bar{r}_n$ — радиус-вектор, проведенный к n-му заряду из некоторой произвольной точки 0 (рис. 1.3). Так как система зарядов остается электрически нейтральной, т. е.

$$\sum_n e_n = 0, \tag{1.7}$$

то формула (1.6) однозначно определяет вектор $\bar{d}$ независимо от выбора начальной точки. В самом деле, при перемещении начала отсчета из точки 0 в 0′ на расстояние $\bar{r}''_n$ радиус-вектор n-го заряда относительно новой точки 0′ будет равен

$$\bar{r}'_n = \bar{r}_n - \bar{r}''.$$

В этом случае для электрического момента молекулы имеем

$$\bar{d}' = \sum_n e_n \bar{r}'_n = \sum_n e_n \bar{r}_n - \bar{r}'' \sum_n e_n. \tag{1.8}$$

Формула (1.8) с учетом условия (1.7) совпадает с (1.6), т. е.

$$\bar{d}' = \bar{d}.$$

Таким образом, молекула диэлектрика, находящегося во внешнем электрическом поле, обладает некоторым электрическим моментом $\bar{d}$, определяемым формулой (1.6), и, следовательно, создает собственное электрическое поле.

Это явление получило наименование электрической поляризации. Оно и объясняет отмеченные в начале параграфа свойства электрического поля. В частности, если поместить совокупность точечных зарядов в безграничный однородный диэлектрик, то образовавшееся в результате поляризации собственное поле будет в каждой точке направлено против поля системы зарядов. Вследствие этого результирующее поле в диэлектрике будет слабее по сравнению с полем тех же зарядов в вакууме. Величина ослабления зависит от диэлектрической проницаемости среды [см. соотношение (1.3)]. Если же диэлектрическое тело имеет конечные размеры, то поляризация приведет к скачкообразному изменению напряженности электрического поля на границе раздела. В самом деле, пусть в однородное поле внесен плоскопараллельный диэлектрический слой с неограниченными размерами в направлении осей x и y (рис. 1.4). В результате поляризации на параллельных гранях слоя появятся связанные заряды, которые создадут собственное поле (см. пунктир). Направление поля связанных зарядов вне диэлектрика совпадает с направлением первичного поля, а внутри диэлектрика — противоположно ему. Таким образом, благодаря поляризации диэлектрика, напряженность результирующего поля во внутренних точках уменьшится, а во внешних — увеличится.

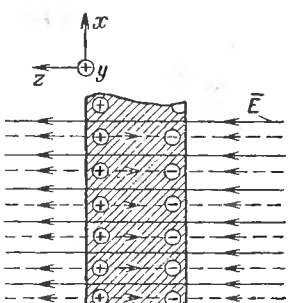


Рис. 1.4. Поляризация диэлектрика. Сплошными линиями изображены силовые линии первичного поля, пунктирными — силовые линии поля связанных зарядов.

Количественно явление поляризации принято характеризовать вектором электрической поляризации $\bar{P}^e$, который равен сумме электрических моментов молекул, находящихся в единице объема диэлектрика:

$$\bar{P}^e = \frac{\sum_{i=1}^{N} \bar{d}_i}{V}, \tag{1.9}$$

где N — число молекул в объеме V.

Электрический момент молекулы имеет размерность: заряд $\times$ $\times$ длина = кулон $\times$ метр, а сумма молекулярных моментов в единице объема — $\frac{\text{кулон} \times \text{метр}}{\text{кубический метр}} = \frac{k}{м^2}$. Отсюда видно, что вектор

электрической поляризации имеет такую же размерность, как и введенный раньше вектор электрической индукции. Это и естественно, так как вектор электрической поляризации показывает, насколько электрическая индукция в данной среде отличается от индукции в вакууме:

$$\bar{P}^e = \bar{D} - \bar{D}_0. \tag{1.10}$$

Для дальнейших рассуждений формулу (1.10) с учетом (1.4) представим в виде

$$\bar{P}^e = \varepsilon \bar{E} - \varepsilon_0 \bar{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\bar{E} = (\varepsilon' - 1)\varepsilon_0 \bar{E} = \varkappa_e \varepsilon_0 \bar{E}. \tag{1.11}$$

Безразмерный коэффициент

$$\varkappa_e = \varepsilon' - 1 \tag{1.12}$$

носит наименование электрической восприимчивости среды и зависит только от ее свойств.

Для линейных сред, как это следует из формулы (1.12) и определения, данного в § 1 гл. I, $\varkappa_e$ является величиной постоянной, не зависящей от напряженности поля $\bar{E}$.

В изотропных средах вследствие того, что электрическая восприимчивость — скалярная величина, вектор электрической поляризации совпадает по направлению с вектором напряженности. Физически это объясняется тем, что при поляризации диэлектрика положительные заряды смещаются по направлению вектора напряженности поля, а моменты эквивалентных молекулам диполей направлены от отрицательных зарядов к положительным. Следовательно, момент единицы объема (т. е. вектор $\bar{P}^e$), определяемый соотношением (1.9), имеет одинаковое с вектором $\bar{E}$ направление.

Наконец, из формулы (1.12) и табл. 1 видно, что $\varkappa_e$ является величиной положительной и изменяется от весьма малых величин у газов (для воздуха $\varkappa_e = 0{,}0006$) до десятков единиц у жидкостей (дистиллированная вода имеет $\varkappa_e = 80{,}1$).

В проведенных выше рассуждениях мы полагали, что молекулы приобретают электрический момент (поляризуются) только под воздействием внешнего поля. В диэлектриках этого вида внешнему полю, стремящемуся деформировать молекулу, противодействуют молекулярные силы. Последние, подобно силам упругости, в достаточно широких пределах пропорциональны смещению связанных зарядов. Кроме того, величина противодействующих сил в первом приближении не зависит от температуры диэлектрика. Отсюда и электрическая восприимчивость таких диэлектриков также является величиной, не зависящей от температуры.

Однако существует группа диэлектриков (например, газы: SO_2; H_2S, жидкости: вода, нитробензол и др.), молекулы которых обладают определенным электрическим моментом даже в отсутствии

внешнего поля. Механизм поляризации этих диэлектриков несколько отличается от описанного выше. Здесь внешнее поле не деформирует (или почти не деформирует) молекулу, а стремится повернуть так, чтобы ее электрический момент совпадал с направлением вектора $\overline{E}$. Силами же, противодействующими упорядоченному установлению моментов молекул (т. е. поляризации), является их тепловое движение. Естественно, при возрастании температуры деполяризующие силы возрастают, и электрическая восприимчивость подобных диэлектриков будет иметь резко выраженную температурную зависимость.

В заключение отметим, что введенные в предыдущих параграфах векторы напряженности поля $\overline{E}$ и электрической индукции $\overline{D}$ полностью характеризуют собой электростатическое поле в любой среде. Несмотря на это, введение вектора электрической поляризации $\overline{P}^e$ оказывается целесообразным, так как он дает возможность полнее уяснить влияние среды на процессы в электрическом поле.

5. Поток вектора индукции. Теорема Гаусса — Остроградского

Введенное нами в § 3 понятие потока требует уточнения. Предварительно введем понятие о векторе-площадке.

Рассмотрим бесконечно малую площадку (рис. 1.5). Очевидно, что при исследовании ряда физических задач задание только численного значения площадки является недостаточным. Так, например, для расчета давления ветра на эту площадку или количества воды, протекающего через нее, надо знать не только величину площадки, но и ее ориентацию в пространстве. Таким образом, площадку надо задать как ее величиной, так и направлением или, другими словами, ее надо определить как векторную величину. Мы условимся под вектором-площадкой понимать вектор, направленный перпендикулярно площадке и численно равный величине площадки. Выбор положительного направления такого вектора является условным. В ряде случаев, однако, полезно будет связать направление вектора-площадки с направлением обхода площадки. Условимся выбранному положительному направлению вектора-площадки сопоставлять такое положительное направление обхода площадки, при котором направление вектора-площадки и направление обхода связаны так же, как вращательное перемещение рукоятки связано с по-

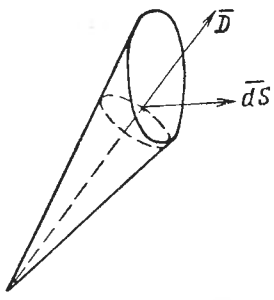


Рис. 1.5. Поток вектора через элементарную площадку.

ступательным перемещением штопора с правой нарезкой. Таким образом, выбрав направление обхода произвольно, мы уже выбрали тем самым и направление вектора-площадки, и наоборот.

В других случаях за направление вектора-площадки принимают направление нормали к заданной поверхности, внешней по отношению к рассматриваемой области, и т. п.

Пусть теперь имеется произвольная конечная поверхность. Разбивая ее на бесконечно малые площадки, мы каждую из них можем задать в виде вектора.

Перейдем к точному определению понятия потока вектора через поверхность. Назовем потоком вектора $\overline{D}$ через площадку $\overline{dS}$ (рис. 1.5) произведение численных значений векторов $\overline{D}$ и $\overline{dS}$ на косинус угла между ними. Подобного рода произведения часто встречаются в различных задачах и имеют специальное наименование скалярного произведения векторов: $\overline{D} \cdot \overline{dS}$*).

Таким образом,

$$\overline{D} \cdot \overline{dS} = D \cdot dS \cos(\overline{D}, \overline{dS}).$$

Нетрудно видеть, что название «поток вектора» для данного математического действия вполне уместно. В самом деле, если вектор $\overline{D}$ изображает собой вектор скорости в потоке жидкости, то приведенное выше скалярное произведение равняется количеству жидкости, протекающей через площадку в единицу времени. Точно так же мы можем убедиться в том, что приведенное выражение определяет число силовых линий, пронизывающих площадку, ибо согласно сделанному выше утверждению число линий на единицу площади перпендикулярной к ним плоскости равно численному значению вектора, а $dS \cos(\overline{D}, \overline{dS})$ есть проекция площадки $\overline{dS}$ на направление вектора $\overline{D}$.

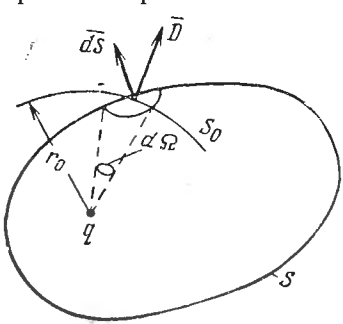


Рис. 1.6. К выводу равенства Гаусса — Остроградского.

Пусть теперь имеется замкнутая поверхность S произвольной формы (рис. 1.6), окружающая точечный заряд q. Поток вектора $\overline{D}$ через площадку $\overline{dS}$ равен:

$$dN = \overline{D}\,\overline{dS} = D\,dS\cos(\overline{D}, \overline{dS}) = q\frac{dS\cos(\overline{D}, \overline{dS})}{4\pi r^2} = q\frac{d\Omega}{4\pi}. \qquad (1.13)$$

*) Так, например, работа силы $\overline{F}$ на пути l равна $\overline{F}\,\overline{l}$.

Здесь $d\Omega$ — элементарный телесный угол, под которым видна площадка dS, рассматриваемая из точки расположения заряда, а $\overline{dS}$ совпадает по направлению с внешней нормалью к S. Заметим, что мерой телесного угла $d\Omega$ является отношение элемента сферической поверхности dS_0 к квадрату ее радиуса, причем $dS_0 = dS\cos(\overline{D}, \overline{dS})$.

Полный поток вектора через замкнутую поверхность определится как

$$N = \int_S \overline{D}\,\overline{dS},$$

где $\int_S$ означает двойной интеграл, взятый по поверхности S. В соответствии с равенством (1.13) получаем

$$N = \frac{1}{4\pi}\int q d\Omega = q,$$

так как сумма телесных углов вокруг точки q равна 4π.

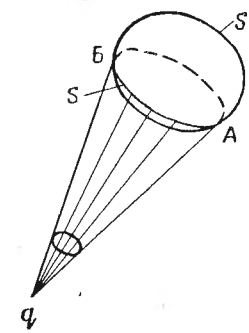


Рис. 1.7. Заряд q находится вне объема, ограниченного поверхностью S.

Если бы замкнутая поверхность S не содержала внутри себя заряда (рис. 1.7), то при обходе поверхности от точки A до точки $Б$ (по стороне поверхности, обращенной к заряду) значение телесного угла возрастало бы, а затем при движении от точки $Б$ до точки A (по противоположной стороне поверхности) падало бы, и при возвращении в точку A общий телесный угол был бы равен нулю.

Теперь мы можем легко обобщить полученный результат на любое число зарядов. Пусть в объеме, ограниченном поверхностью S, имеется множество точечных зарядов $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

На основании принципа суперпозиции пишем, что

$$\overline{D} = \overline{D}_1 + \overline{D}_2 + \ldots + \overline{D}_n,$$

где $\overline{D}_1, \overline{D}_2, \ldots, \overline{D}_n$ — векторы индукции, созданные в рассматриваемой точке зарядами $q_1, q_2, \ldots, q_n$ соответственно. Поэтому поток вектора индукции через поверхность S равен

$$N = \int_S \overline{D}\,\overline{dS} = \int_S \overline{D}_1\,\overline{dS} + \int_S \overline{D}_2\,\overline{dS} + \ldots + \int_S \overline{D}_n\,\overline{dS}.$$

Но каждый член суммы, в соответствии с полученным ранее результатом, равен q_i, где $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Таким образом,

$$N = \int_S \overline{D}\,\overline{dS} = q_1 + q_2 + \ldots + q_n = \sum_{i=1}^{n} q_i. \qquad (1.14)$$

Это равенство мы будем называть равенством Гаусса — Остроградского. Равенство Гаусса — Остроградского утверждает, что поток вектора индукции через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, находящихся внутри объема, ограниченного поверхностью. Эту сумму при любом распределении зарядов мы будем обозначать Σq. Таким образом, каждый заряд является источником силовых линий вектора $\overline{D}$ или, как принято говорить, их истоком или стоком.

6. Применение равенства Гаусса — Остроградского к расчету электрических полей

Равенство Гаусса — Остроградского дает возможность непосредственно рассчитать напряженность поля в тех случаях, когда благодаря симметрии можно считать, что поток линий индукции равномерно распределен по некоторой поверхности.

Число таких задач, естественно, очень ограничено и исчерпывается приводимыми ниже примерами.

Поле заряженной сферы

Пусть сфера радиуса a (рис. 1.8) заряжена электричеством, равномерно распределенным вдоль ее поверхности с поверхностной плотностью $\sigma = \frac{q}{4\pi a^2}$. Найдем напряженность поля в точках вне и внутри сферы.

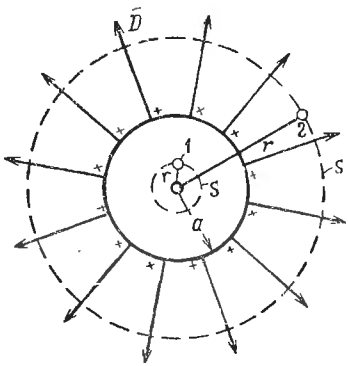


Рис. 1.8. К определению поля заряженной сферы.

Пунктиром показаны вспомогательные поверхности, проходящие через точки наблюдения *1* и *2*. Стрелками изображены силовые линии поля.

Проведем через точку наблюдения сферическую поверхность S радиуса r (см. рис. 1.8). Согласно равенству Гаусса — Остроградского имеем

$$\int_S \overline{D}\,\overline{dS} = \sum q.$$

Вследствие симметрии задачи вектор $\vec{D}$ должен быть направлен по нормали к сфере и иметь одно и то же значение во всех точках сферической поверхности.

Таким образом,

$$\int_S \overline{D}\, \overline{dS} = D \int_S dS = D 4\pi r^2 = \sum q$$

или

$$D = \frac{\sum q}{4\pi r^2}.$$

Если точка наблюдения лежит внутри заряженной сферы (точка *1* на рис. 1.8, $r < a$), то внутри сферы радиуса r зарядов нет, $\sum q = 0$ и соответственно

$$D = \varepsilon E = 0.$$

Для точек наблюдения, лежащих вне заряженной сферы (точка *2* на рис. 1.8), поверхность S объемлет сферу радиуса a и, таким образом, охватывает заряды. В этом случае

$$\sum q = q = \sigma 4\pi a^2,$$

$$D = \varepsilon E = \frac{q}{4\pi r^2} = \frac{a^2}{r^2}\sigma.$$

На рис. 1.9 изображен график зависимости электрической индукции D и напряженности поля E от расстояния r. Как видно из рисунка, значения векторов $\overline{D}$ и $\overline{E}$ при переходе через заряженную поверхность сферы изме-

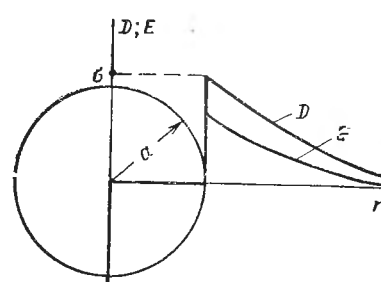


Рис. 1.9. Поле заряженной сферы.

няются скачками на величину, определяемую поверхностной плотностью электричества. Поле внутри сферы равно нулю. Во внешнем пространстве заряженная сфера действует так, как если бы весь заряд был расположен в ее центре. (Читателю рекомендуется решить аналогичную задачу для случая, когда заряд равномерно распределен по всему объему сферы).

Поле заряженного цилиндра

Пусть бесконечно длинный цилиндр с круговым сечением радиуса a равномерно заряжен электричеством с поверхностной плотностью σ. Определим напряженность поля в точке, отстоящей от оси цилидра на расстоянии ρ. Проведем через точку наблюдения (рис. 1.10) цилиндрическую поверх-

ность S_0 высотой h и дополним ее до замкнутой поверхности плоскостями S_1 и S_2.

Вследствие симметрии вектор $\overline{D}$ должен быть направлен перпендикулярно к боковой поверхности S_0 и должен быть одинаковым во всех ее точках. Таким образом, поток через площадки S_1 и S_2 равен нулю, и в соответствии с равенством Гаусса — Остроградского имеем

$$\int\limits_{S=S_0+S_1+S_2} \overline{D}\,\overline{dS} = \int\limits_{S_0} DdS = D2\pi\rho h = \sum q.$$

Заряд Σq, находящийся внутри поверхности S, распределен на цилиндре радиуса a с высотой h и равен

$$\sum q = 2\pi a h \sigma.$$

Отсюда

$$D = \frac{2\pi a h \sigma}{2\pi\rho h} = \frac{a}{\rho}\sigma.$$

Легко убедиться, что аналогично предыдущему примеру поле внутри заряженного цилиндра равно нулю.

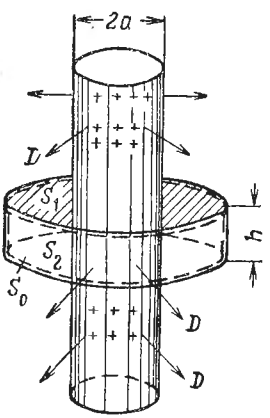


Рис. 1.10. К определению поля заряженного цилиндра.

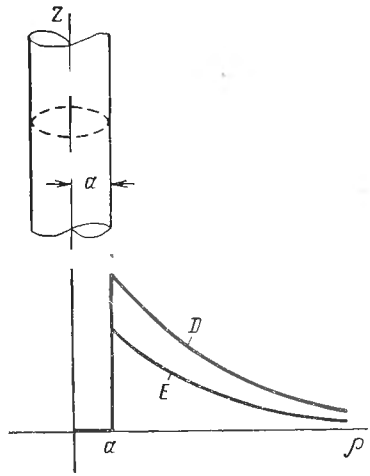


Рис. 1.11. Поле заряженного цилиндра.

На рис. 1.11 дан график зависимости величин векторов $\overline{D}$ и $\overline{E}$ от расстояния до оси цилиндра. При переходе через заряженную поверхность цилиндра вектор $\overline{D}$, так же как и в предыдущем примере, изменяется скачком на σ.

Поле заряженной плоскости

Пусть бесконечно тонкая плоскость заряжена с поверхностной плотностью σ. Для определения напряженности поля в точке наблюдения, отстоящей на расстоянии x от плоскости, построим параллелепипед, как показано на рис. 1.12.

Из соображений симметрии заключаем, что вектор $\overline{D}$ должен быть перпендикулярен к заряженной плоскости, а значит, и к торцам S_1 и S_2 параллелепипеда. Кроме того, вектор $\overline{D}$ должен, очевидно, иметь одну и ту же ве-

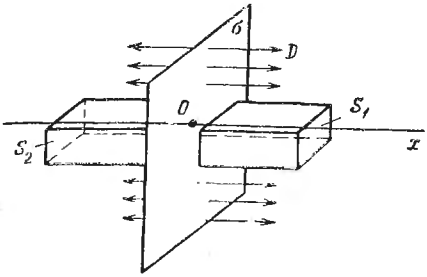


Рис. 1.12. К определению поля заряженной плоскости.

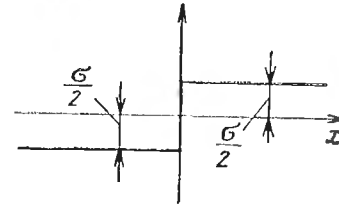


Рис. 1.13. Поле заряженной плоскости.

личину и противоположное направление по обе стороны от заряженной плоскости. Отсюда

$$\int_S \overline{D}\,\overline{dS} = D_1 S_1 + D_2 S_2 = D2S.$$

Заряд, находящийся внутри параллелепипеда, равен, очевидно,

$$\sum q = \sigma S.$$

Поэтому на основании равенства Гаусса — Остроградского имеем

$$2DS = \sigma S$$

или

$$D = \frac{\sigma}{2}.$$

На рис. 1.13 показана зависимость величины вектора $\overline{D}$ от координаты x. Поле остается постоянным во всех точках с каждой стороны заряженной плоскости, но при переходе через нее испытывает скачок, равный σ.

7. Дивергенция напряженности поля

При расчете электрических полей приходится решать одну из следующих задач:

1) расчет поля по заданному распределению зарядов (так называемая прямая задача),

2) нахождение расположения и величины зарядов по заданному полю.

Решение второй задачи предполагает, что напряженность поля или вектор индукции задан как функция координат и необходимо найти распределение зарядов также в функции координат. Ключ к решению этой второй или, как ее иногда называют, обратной за-

дачи электростатики лежит в равенстве Гаусса — Остроградского (рис. 1.14). В самом деле, предположим, что мы желаем исследовать часть пространства с целью выяснить, имеются ли в ней какие-нибудь заряды. Для этого мы можем окружить рассматриваемую часть пространства замкнутой поверхностью и, поскольку напряженность поля или вектор индукции нам заданы, мы можем рассчитать поток индукции через эту поверхность по формуле

$$N = \int_S \overline{D} \cdot \overline{dS}.$$

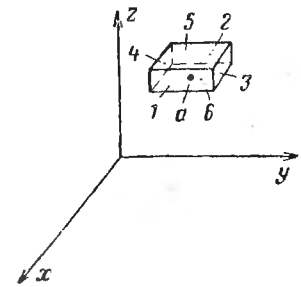


Рис. 1.14. К расчету дивергенции вектора в прямоугольной системе координат.

Отличие этого выражения от нуля укажет нам на существование зарядов в рассматриваемой части пространства. Здесь, естественно возникает следующее возражение. Равенство Гаусса — Остроградского позволяет нам лишь подсчитать алгебраическую сумму всех зарядов, находящихся внутри заданного объема. Если поток индукции оказался равным нулю, то неизвестно, означает ли это отсутствие зарядов во всех точках исследуемой части пространства, или, то, что сумма положительных и отрицательных зарядов, расположенных в разных точках этого пространства, равна нулю. Точно так же, если результат этого расчета даст некоторое значение потока, отличное от нуля, то мы сможем лишь рассчитать весь заряд внутри объема, но ничего не сможем сказать о его распределении по объему. Очевидно, все дело в том, что равенство Гаусса — Остроградского оперирует с интегральным (суммарным) эффектом, а нам необходимо иметь соотношение дифференциальное, приложимое не к объему или множеству точек, а к отдельной точке, т. е. соотношение, связывающее вектор индукции в данной точке с зарядом в данной же точке. Для получения такого соотношения можно попытаться применить равенство Гаусса — Остроградского к бесконечно малому объему.

В подобном случае подсчет потока индукции через бесконечно малую поверхность даст значение заряда в бесконечно малом (точечном) объеме.

Однако непосредственное применение равенства Гаусса — Остроградского к такому объему не приведет нас к желательным результатам, так как оказывается, что поток произвольного вектора через бесконечно малую поверхность есть также величина бесконечно малая и притом третьего порядка малости. Мы выйдем из затруднения, если введем в рассмотрение не сам поток, а его отношение к данному объему. При этом отношение бесконечно малого потока (третьего порядка малости) к бесконечно малому объему

(также третьего порядка малости) окажется величиной конечной, могущей служить мерой количества электричества в рассматриваемой точке пространства.

Предположим, что мы желаем определить наличие заряда в некоторой точке a. Поток вектора индукции через произвольную поверхность, ограничивающую объем, в котором находится точка a, равен

$$N = \int_S \overline{D}\, \overline{dS} = \sum q. \tag{1.15}$$

Алгебраическую сумму зарядов в объеме можно записать в виде объемного интеграла

$$\sum q = \int_V \rho dV, \tag{1.16}$$

где ρ — количество электричества, рассчитанное на единицу объема, а dV — элемент объема. Мы полагаем при этом, что в бесконечно малом объеме dV содержится бесконечно малое количество электричества dq и что отношение dq к dV, т. е. объемная плотность, есть величина конечная, способная принимать произвольные (включая и нулевые), но конечные значения в различных точках рассматриваемого объема.

Для получения связи между полем и зарядом в точке a будем уменьшать объем, стягивая поверхность к точке a. При этом разделим обе стороны нашего равенства (1.15) на величину самого объема. Переходя к пределу, получим

$$\lim_{V\to 0} \frac{\int_S \overline{D}\, \overline{dS}}{V} = \left.\frac{\int_V \rho dV}{V}\right|_{V\to 0}. \tag{1.17}$$

Правая часть равенства есть по определению объемная плотность электричества в рассматриваемой точке пространства; левая часть представляет собой предел отношения потока вектора через замкнутую поверхность к объему, ограниченному этой поверхностью, когда объем стремится к нулю. Эта скалярная величина является важной характеристикой поля и носит название дивергенции вектора $\overline{D}$. Таким образом,

$$\operatorname{div} \overline{D} = \lim_{V\to 0} \frac{\int_S D\, dS}{V}, \tag{1.18}$$

и в соответствии с (1.17)

$$\operatorname{div} \overline{D} = \rho. \tag{1.19}$$

Уравнение (1.19) математически обосновывает заключение, сделанное из физических соображений в § 3 гл. 1 о том, что силовые линии вектора электрической индукции начинаются и заканчиваются

соответственно на положительных и отрицательных зарядах. Другими словами, истоками вектора $\overline{D}$ являются свободные заряды с объемной плотностью ρ.

Выразим вектор $\overline{D}$ из формулы (1.10) и подставим в (1.19):

$$\operatorname{div}\left(\varepsilon_0 \overline{E} + \overline{P}^e\right) = \rho.$$

Учитывая, что

$$\operatorname{div}\left(\varepsilon_0 \overline{E} + \overline{P}^e\right) = \operatorname{div} \varepsilon_0 \overline{E} + \operatorname{div} \overline{P}^e$$

и вынося постоянную величину ε_0 за знак дивергенции, получаем

$$\operatorname{div} \overline{E} = \frac{\rho - \operatorname{div} \overline{P}^e}{\varepsilon_0}.$$

Отсюда видно, что истоками силовых линий вектора напряженности $\overline{E}$ в отличие от силовых линий вектора $\overline{D}$ являются не только свободные, но и связанные заряды с объемной плотностью

$$\rho_{\text{св}} = -\operatorname{div} \overline{P}^e.$$

Ниже мы познакомимся с методами расчета дивергенции вектора в произвольной системе координат, пока же заметим только, что, как вытекает из (1.18), дивергенция вектора есть величина, инвариантная по отношению к преобразованию координат, хотя форма ее записи в разных координатных системах различна.

В настоящем параграфе мы рассмотрим в качестве примера только расчет дивергенции в прямоугольной системе координат.

Пусть точка наблюдения a (рис. 1.14) находится внутри бесконечно малого параллелепипеда с гранями, параллельными координатным плоскостям. Рассчитаем поток вектора через поверхность параллелепипеда. Вследствие того, что сам параллелепипед бесконечно мал, интеграл от вектора $\overline{D}$ по поверхности сведется к простой сумме шести слагаемых потоков через шесть его граней. Рассчитаем сначала поток через грани *1* и *2*, перпендикулярные к оси x.

Поток через грань *1* равен $D_x^{(1)}\, dy\, dz$, где $D_x^{(1)}$ есть проекция вектора $\overline{D}$ на ось x в точке x, определяющей положение грани *1*. Аналогично, поток вектора через грань *2* равен $-D_x^{(2)}\, dy\, dz$, где $D_x^{(2)}$ есть такая же проекция вектора $\overline{D}$, но в точке $x - dx$, определяющей положение этой грани. Знак минус учитывает, что направление вектор -площадки или внешней нормали к грани *2* противоположно направлению оси x так, что $\cos(\overline{D}, \overline{x})$ отрицателен.

Общий поток через грани *1* и *2* равен

$$D_x^{(1)}\, dy\, dz - D_x^{(2)}\, dy\, dz = \left(D_x^{(1)} - D_x^{(2)}\right) dy\, dz.$$

Разность $D_x^{(1)} - D_x^{(2)}$ есть приращение функции D_x при изменении независимой переменной x на величину dx и соответственно с этим она равна

$$D_x^{(1)} - D_x^{(2)} = \frac{\partial D_x}{\partial x} dx.$$

Таким образом, поток через грани *1* и *2* равен

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} dx\, dy\, dz.$$

Аналогичные выражения мы получаем при расчете потока через грани, перпендикулярные другим осям.

Поток вектора через замкнутую поверхность бесконечно малого параллелепипеда оказывается равным

$$\left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz.$$

Как уже указывалось выше, величина потока оказалась бесконечно малой третьего порядка, но отношение этой величины к объему, или дивергенция, есть величина конечная и равная

$$\operatorname{div} \overline{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}. \qquad (1.20$$

В соответствии с (1.18) получим

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho. \qquad (1.21)$$

Равенство (1.21) есть частное выражение общего дифференциального соотношения (1.19) в прямоугольной системе координат. При помощи этого соотношения теперь просто решается упомянутая выше обратная задача электростатики, т. е. нахождение распределения зарядов по известному полю.

В самом деле, если вектор $\overline{D}$ задан, значит известны его проекции D_x, D_y, D_z на координатные оси как функции координат. И для вычисления распределения плотности зарядов, создавших заданное поле, оказывается достаточным найти сумму трех частных производных этих проекций по соответствующим переменным. В тех точках, для которых $\operatorname{div} \overline{D}$ равна нулю, зарядов нет. В точках, где $\operatorname{div} \overline{D}$ окажется положительной величиной, имеется положительный заряд с объемной плотностью, равной $\operatorname{div} \overline{D}$. Наконец, в точках, для которых $\operatorname{div} \overline{D}$ будет иметь отрицательное значение, находится отрицательный заряд, плотность которого также определена значением дивергенции.

Пусть, например, поле вектора $\overline{D}$ направлено во всех точках по радиусу и задано в виде

$$\overline{D} = k\overline{r} \quad \text{для } 0 \leqslant r \leqslant a,$$

$$\overline{D} = k\frac{a^3}{r^3}\overline{r} \quad \text{для } a \leqslant r \leqslant \infty,$$

где $\overline{r}$ есть радиус-вектор, выходящий из начала координат и численно равный r.

Найдем распределение зарядов, образовавших такое поле.

Проекции вектора $\overline{D}$ на оси x, y, z соответственно равны:

для области $0 \leqslant r \leqslant a$

$$D_x = kx;\ D_y = ky;\ D_z = kz,$$

для области $a \leqslant r < \infty$

$$D_x = k\frac{a^3 x}{r^3};\ D_y = k\frac{a^3 y}{r^3};\ D_z = k\frac{a^3 z}{r^3}.$$

Вычисляя производные $\frac{\partial D_x}{\partial x}$, $\frac{\partial D_y}{\partial y}$, $\frac{\partial D_z}{\partial z}$ и находя их сумму, получим:

для области $0 \leqslant r \leqslant a$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = \frac{\partial D_y}{\partial y} = \frac{\partial D_z}{\partial z} = k;\ \operatorname{div}\overline{D} = 3k,$$

для области $a \leqslant r < \infty$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = ka^3\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}\right);\ \frac{\partial D_y}{\partial y} = ka^3\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5}\right);$$

$$\frac{\partial D_z}{\partial z} = ka^3\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}\right);$$

$$\operatorname{div}\overline{D} = ka^3\left[\frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}\right] = 0.$$

Вычисленные значения дивергенции указывают, что во второй области плотность заряда во всех точках равна нулю, тогда как в первой области она имеет во всех точках одно и то же значение, равное $3k$.

Таким образом, заданное поле создано зарядами, распределенными с постоянной объемной плотностью $3k$ внутри сферы радиуса a.

Пользуясь понятием дивергенции, мы найдем сейчас важное интегральное соотношение, являющееся аналогом уравнения (1.14) и известное в математике под названием преобразования или тео-

ремы Гаусса — Остроградского. Рассмотрим объем V, ограниченный поверхностью S (рис. 1.15). Разобьем, как показано на рисунке, этот объем плоскостями на бесконечное число бесконечно малых параллелепипедов.

В соответствии с уравнением (1.18) для каждого из этих параллелепипедов можно написать, что

$$dN = \int \overline{D}\, dS = \operatorname{div} \overline{D}\, dV,$$

где dN — бесконечно малый поток через грани одного из параллелепипедов.

Составляя подобные выражения для всех параллелепипедов, на которые разбит объем, и суммируя, получим

$$N = \sum \int \overline{D}\, d\overline{S} = \sum \operatorname{div} \overline{D}\, dV.$$

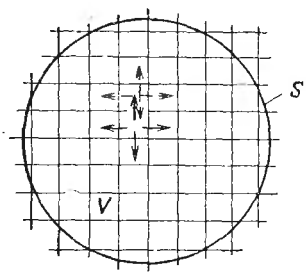


Рис. 1.15. К выводу теоремы Гаусса — Остроградского.

Правая часть равенства в пределе даст объемный интеграл от дивергенции вектора по всему объему. Что касается левой части, то при суммировании потоков через все грани, поток через каждую грань войдет дважды, и, так как внешние нормали в смежных гранях параллелепипедов направлены навстречу, эти потоки взаимно компенсируются. Таким образом, при суммировании в левой части получим поток вектора только через внешнюю поверхность, ограничивающую объем. Окончательно можно написать

$$\int_S \overline{D}\, dS = \int_V \operatorname{div} \overline{D}\, dV, \qquad (1.22)$$

где поверхностный интеграл распространен на внешнюю поверхность S, ограничивающую объем V.

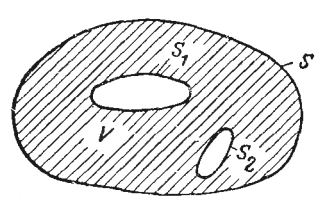


Рис. 1.16. К теореме Гаусса — Остроградского.

Теорема Гаусса — Остроградского представляет собой тождественное математическое преобразование объемного интеграла в поверхностный, справедливое для любого вектора при условии, если только векторная функция конечна и непрерывна вместе со своими первыми производными во всех точках рассматриваемого объема.

Заметим, что теорема Гаусса — Остроградского остается в силе и в тех случаях, когда объем V ограничен (рис. 1.16) несколькими поверхностями: S, S_1, S_2. В этом случае поверхностный интеграл надо распространить на все поверхности, ограничивающие объем V.

8. Работа сил электрического поля. Потенциал

Введенное в предыдущем параграфе понятие дивергенции вектора позволяет просто решать обратные задачи электростатики, но не дает возможности решить прямую задачу при произвольном распределении заряда. В самом деле, рассматривая уравнение (1.21) применительно к случаю, когда плотность ρ задана как функция координат и необходимо найти $\overline{D}$, читатель, несомненно, обратит внимание на то, что в нашем распоряжении имеется пока лишь одно уравнение, тогда как вектор $\overline{D}$ определяется тремя проекциями. Для решения задачи необходимы еще дополнительные сведения о векторе $\overline{D}$ или $\overline{E}$, кроме содержащихся в уравнении (1.21).

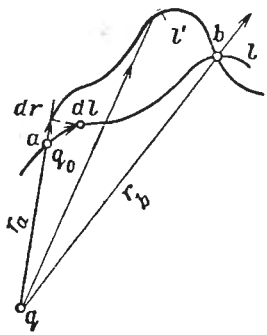


Рис. 1.17. К расчету работы электростатических сил.

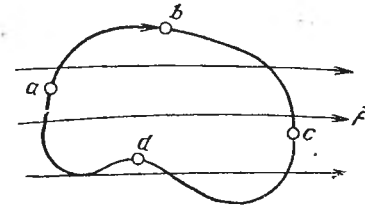


Рис. 1.18. К расчету работы электростатических сил вдоль замкнутого пути.

Для получения этих дополнительных сведений рассмотрим работу сил электрического поля. Пусть в поле точечного заряда q (рис. 1.17) перемещается по некоторой кривой l заряд q_0. Рассчитаем работу сил поля при этом перемещении. Сила, с которой заряд q действует на заряд q_0, равна

$$\overline{F} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon r^3}\,\overline{r}.$$

Таким образом, работа по перемещению заряда q_0 на отрезке dl определяется выражением

$$dA = \overline{F}\,\overline{dl} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon r^3}\,rdl\cos\left(\overline{r}\,\overline{dl}\right) = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon r^2}\,dr,$$

где dr — проекция отрезка dl на направление $\overline{r}$. Полная работа при перемещении заряда q_0 из точки a в точку b равна

$$A = \int_a^b \overline{F}\,\overline{dl} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right). \qquad (1.23)$$

Из полученного выражения вытекает важное свойство сил электрического поля, а именно: работа сил электрического поля не зависит от формы пути. Действительно, для подсчета работы достаточно знать лишь положение начальной точки (r_a) и конечной точки (r_b) пути, форма же кривой, вдоль которой перемещается заряд, не имеет значения. Работа перемещения вдоль кривой l равна работе перемещения вдоль кривой l' (рис. 1.17). Этот вывод, полученный для поля точечного заряда, легко обобщается на произвольное электрическое поле.

Силы, работа которых не зависит от формы пути, носят название консервативных сил. Электростатическое поле имеет таким образом консервативный характер. Консервативный характер поля можно выразить и иначе. Рассмотрим работу сил вдоль замкнутого пути (рис. 1.18):

$$A = \oint_l \overline{F}\,\overline{dl} = \int_{abcda} \overline{F}\,\overline{dl} = \int_{abc} \overline{F}\,\overline{dl} + \int_{cda} \overline{F}\,\overline{dl} =$$

$$= \int_{adc} \overline{F}\,\overline{dl} - \int_{abc} \overline{F}\,\overline{dl}.$$

Но на основании вышесказанного

$$\int_{abc} = \int_{adc}.$$

Таким образом,

$$A = \oint_l \overline{F}\,\overline{dl} = 0. \qquad (1.24)$$

Работа сил электрического поля по замкнутому пути равна нулю. Этот результат понятен и с энергетической точки зрения. В самом деле, если бы работа на пути abc не была равна работе на пути adc, то заряд, движущийся вдоль abc, под действием сил поля накапливал бы, ускоряясь на этом пути, больше энергии, чем ему пришлось бы возвратить полю при движении против сил поля на пути cda. Повторяя это движение непрерывно, мы получили бы непрерывное накапливание энергии в изолированной от внешних источников системе, т. е. пришли бы к противоречию с принципом сохранения энергии.

Тот факт, что работа по переносу электричества является функцией лишь положения двух точек (начальной и конечной), позволяет нам ввести новую характеристику поля — потенциал. Потенциалом или потенциальной функцией назовем такую функцию, разность значений которой в двух точках a и b равна взятой с обратным знаком работе сил электрического поля при переносе единицы количества электричества из точки b в точку a.

Так как сила, отнесенная к единице заряда, есть напряженность электрического поля, то мы имеем для потенциала следующее определение:

$$U_a - U_b = -\int_b^a \overline{E}\,\overline{dl} = \int_a^b \overline{E}\,\overline{dl}. \tag{1.25}$$

В отличие от напряженности поля, являющейся функцией точки, потенциал определен лишь разностью своих значений в двух точках. Мы можем, однако, записать

$$U_a = -\int_b^a \overline{E}\,\overline{dl} + U_b. \tag{1.26}$$

Следовательно, потенциал U_a определяется с точностью до постоянной U_b.

Значение постоянной U_b может быть выбрано произвольно. В связи с этим целесообразно ввести некоторую точку и потенциалу ее условно приписать нулевое значение. Величина потенциала в любой точке будет тогда представлять разность значений функции U в данной точке и точке условно-нулевого потенциала. Выбор точки нулевого потенциала определяется соображениями удобства.

Обычно за точку нулевого потенциала (если заряды, создающие поле, расположены в области конечных размеров) принимают точку, находящуюся в бесконечности. При инженерном анализе работы отдельных электрических устройств за нулевой потенциал часто принимают потенциал Земли, больших металлических масс, экранов и т. д.

В соответствии с выражением для разности потенциалов в поле точечного заряда будем иметь

$$U_a - U_b = \frac{q}{4\pi\varepsilon r_a} - \frac{q}{4\pi\varepsilon r_b}. \tag{1.27}$$

Полагая в бесконечности потенциал равным нулю ($U_b = 0$), получим в соответствии с (1.26), что потенциал произвольной точки a равен

$$U_a = \int_a^\infty \overline{E}\,\overline{dl} + U_\infty = \int_a^\infty \overline{E}\,\overline{dl}.$$

Таким образом, потенциал в точке a равен работе сил электрического поля при переносе единицы количества электричества из данной точки в бесконечность. Из выражения (1.27) для поля точечного заряда имеем

$$U_a = \frac{q}{4\pi\varepsilon r_a}. \tag{1.28}$$

В международной системе единиц СИ за единицу потенциала принят вольт.

Если поле создано совокупностью точечных зарядов, то

$$U_a = \int_a^\infty \overline{E}\,\overline{dl} = \int_a^\infty \overline{E}_1\,\overline{dl} + \int_a^\infty \overline{E}_2\,\overline{dl} + \ldots + \int_a^\infty \overline{E}_i\,\overline{dl} + \ldots,$$

где $\overline{E}_1, \overline{E}_2, \ldots, \overline{E}_i$ — соответственно напряженности полей, созданных в данной точке отдельными точечными зарядами $q_1, q_2, \ldots, q_i$. Согласно (1.28) и рис. 1.19 для каждого из интегралов имеем равенства:

$$\int_a^\infty \overline{E}_1\,\overline{dl} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon r_1}; \quad \int_a^\infty \overline{E}_2\,\overline{dl} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon r_2};$$

$$\int_a^\infty \overline{E}_i\,\overline{dl} = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon r_i}.$$

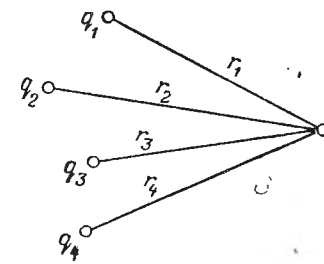


Рис. 1.19. К вычислению потенциала, созданного в точке a несколькими точечными зарядами.

Таким образом,

$$U_a = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum \frac{q_i}{r_i}. \qquad (1.29)$$

В случае, когда заряды распределены в пространстве непрерывно,

$$U_a = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\rho}{R}\,dV, \qquad (1.30)$$

здесь ρ — объемная плотность электричества; R — расстояние от точки наблюдения до произвольного элемента объема dV, а интегрирование производится по всему объему, где имеются заряды, т. е. по координатам точек источников.

Приведенное выражение изображает потенциал в виде суммы потенциалов отдельных «точечных» зарядов с количеством электричества ρdV. В отдельных случаях можно ввести понятие о распределении заряда на поверхности с поверхностной плотностью. Так можно представить себе распределение зарядов на проводниках (§ 11), когда заряды сосредоточены практически в очень тонком объемном слое. В случае поверхностного распределения зарядов общее выражение для потенциала будет иметь вид

$$U_a = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_S \frac{\sigma dS}{R}, \qquad (1.31)$$

где dS — элемент поверхности, заряженный с поверхностной плотностью σ.

9. Градиент потенциала, поверхности уровня

С введением понятия потенциала электростатическое поле векторов $\overline{E}$ и $\overline{D}$ становится одновременно полем скалярной величины U. Как очевидно из самого определения, если исключить возможность бесконечных значений вектора $\overline{E}$, потенциал является непрерывной функцией координат. Поэтому мы всегда можем представить себе непрерывное множество точек с одинаковым значением потенциала. Это непрерывное точечное множество образует некоторую поверхность уровня функции U или так называемую эквипотенциальную поверхность. Аналогами эквипотенциальных поверхностей являются поверхности равных температур, равных давлений и т. п. Легко понять, что если разность потенциалов между любой парой точек эквипотенциальной поверхности равна нулю, то из этого следует, что работа перемещения заряда вдоль этой поверхности равна нулю, а значит, эта поверхность во всех точках должна быть перпендикулярна силовым линиям. Другими словами, силовые линии поля и эквипотенциальные поверхности взаимно перпендикулярны.

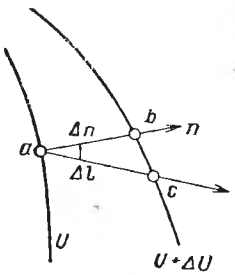


Рис. 1.20. К определению градиента потенциала.

Введем теперь новую очень важную векторную характеристику скалярного поля — градиент. Назовем *градиентом скалярной величины* (в частности, градиентом потенциала) *вектор, направленный по нормали к поверхности уровня* (к эквипотенциальной поверхности) *и численно равный изменению потенциала в данной точке поля на единицу перемещения вдоль этой нормали*. При этом положительным направлением нормали мы будем считать ее направление в сторону возрастания потенциала. При таком определении градиент потенциала можно записать в виде

$$\operatorname{grad} U = \frac{dU}{dn}\,\overline{n}, \tag{1.32}$$

где $\overline{n}$ — орт (единичный вектор) вдоль нормали.

Изменение потенциала на единицу перемещения существенно зависит от направления перемещения, и легко показать, что в направлении нормали к поверхности уровня это изменение имеет наибольшее значение. Рассмотрим для этой цели две близлежащие поверхности уровня (рис. 1.20) со значениями потенциала U и $U + \Delta U$. Пусть ΔU положительно и соответственно положительное направление нормали есть направление, указанное на рисунке.

Согласно определению величины градиента, она равна предельному значению отношения ΔU к отрезку Δn, когда последний стремится к нулю. Рассмотрим теперь изменение потенциала при перемещении по некоторому произвольному направлению l. Мы найдем величину скорости изменения U в этом направлении соответственно как предел отношения ΔU к Δl. Как видно из рис. 1.20, изменения потенциала при перемещении по направлению Δn из точки a в точку b и по направлению Δl из точки a в точку c равны (как перемещения с поверхности одного уровня на поверхность другого уровня), величины же перемещений не равны и связаны соотношением

$$\Delta n = \Delta l \cos(\overline{n\,l}).$$

Отсюда непосредственно вытекает соотношение между скоростями изменения потенциала вдоль этих направлений

$$\frac{\Delta U}{\Delta l} = \frac{\Delta U}{\Delta n} \cos(\overline{n}, \overline{l})$$

или в пределе

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{dU}{dn} \cos(\overline{n}, \overline{l}). \tag{1.33}$$

Величины $\frac{\partial U}{\partial l}$ и $\frac{dU}{dn}$ носят название производных по направлению.

Из (1.33) видно, что производная по направлению l имеет наибольшее значение, когда это направление l совпадает с нормалью n к поверхности уровня.

Таким образом, градиент потенциала есть вектор, величина и направление которого имеют величину и направление наибыстрейшего возрастания потенциала.

Легко теперь связать проекции градиента потенциала с производными по направлению. Из формулы (1.32) следует, что проекции градиента на координатные оси равны:

$$\operatorname{grad}_x U = \frac{dU}{dn} \cos(n, x);$$

$$\operatorname{grad}_y U = \frac{dU}{dn} \cos(n, y);$$

$$\operatorname{grad}_z U = \frac{dU}{dn} \cos(n, z).$$

С другой стороны, согласно (1.33)

$$\frac{dU}{dn} \cos(n, x) = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \frac{dU}{dn} \cos(n, y) = \frac{\partial U}{dy};$$

$$\frac{dU}{dn} \cos(n, z) = \frac{\partial U}{dz}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{grad}_x U = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \operatorname{grad}_y U = \frac{\partial U}{\partial y};$$

$$\operatorname{grad}_z U = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Аналогично для проекции градиента на произвольное направление l получим

$$\operatorname{grad}_l U = \frac{\partial U}{\partial l}. \tag{1.34}$$

Выражение (1.34) указывает на особое свойство градиента. Проекция градиента U на произвольное направление равна производной U по этому направлению.

Соответственно для численной величины градиента можно написать

$$|\operatorname{grad} U| = \frac{dU}{dn} = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}.$$

Так как из выражения (1.25) при $b \to a$ следует, что

$$dU = -\overline{E}\,\overline{dl}, \tag{1.35}$$

то, сравнивая выражения (1.35) и (1.34), мы найдем

$$\overline{E} = -\operatorname{grad} U. \tag{1.36}$$

Напряженность электрического поля равна взятому с обратным знаком градиенту потенциала. Это означает, что электрическое поле вектора $\overline{E}$ полностью определено одной скалярной величиной — потенциалом U.

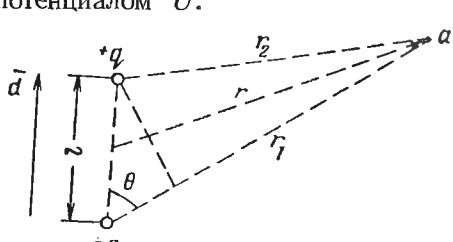


Рис. 1.21. К расчету поля электрического диполя.

В качестве примера применения изложенной теории рассмотрим пару равных по величине и противоположных по знаку точечных зарядов, расположенных на малом расстоянии l друг от друга (рис. 1.21). Подобная система получила наименование электрического диполя.

Понятие о диполе играет важную роль в теории излучения электромагнитных волн и некоторых других задачах электродинамики.

Поэтому расчет поля, создаваемого электрическим диполем, представляет определенный практический интерес.

Согласно уравнению (1.29) потенциал двух точечных зарядов

$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\,\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}.$$

Так как расстояние между зарядами мало и справедливы неравенства $r_1 \gg l$; $r_2 \gg l$, то приближенно полагаем (рис. 1.21) $r_1 r_2 \approx r^2$; $r_1 - r_2 \approx l\cos\theta$.

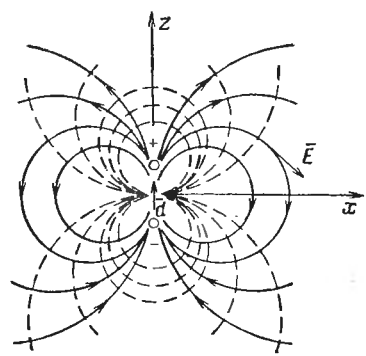


Рис. 1.22. Поле электрического диполя.

С учетом этих равенств формула для потенциала диполя упрощается

$$U = \frac{ql}{4\pi\varepsilon r^2}\cos\theta. \qquad (1.37)$$

Диполь удобно характеризовать электрическим моментом $\bar{d}$, который направлен от отрицательного к положительному заряду и имеет абсолютную величину, равную $d = ql$. Поэтому равенству (1.37) можно придать вид

$$U = \frac{d}{4\pi\varepsilon r^2}\cos\theta. \qquad (1.38)$$

Из (1.38) следует, что эквипотенциальные поверхности описываются уравнением

$$\frac{\cos\theta}{r^2} = \text{const}. \qquad (1.39)$$

На рис. 1.22 пунктиром изображено семейство эквипотенциальных поверхностей в плоскости, проходящей через ось диполя *). Так как вектор $\bar{E}$ в каждой точке пространства направлен по нормали к соответствующей эквипотенциальной поверхности, то силовые линии поля диполя имеют вид, изображенный на рисунке сплошными линиями.

*) Поле обладает симметрией относительно оси диполя.

Выражения для проекций вектора $\overline{E}$ можно найти путем подстановки (1.38) в (1.36). Записывая grad U в декартовой системе координат, получаем соотношения для проекций вектора напряженности поля:

$$E_x = -\operatorname{grad}_x U = \frac{3d}{4\pi\varepsilon} \frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}},$$
$$E_y = -\operatorname{grad}_y U = \frac{3d}{4\pi\varepsilon} \frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}, \qquad (1.40)$$
$$E_z = -\operatorname{grad}_z U = \frac{d}{4\pi\varepsilon} \frac{2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}.$$

10. Дифференциальные уравнения Пуассона и Лапласа

С помощью соотношения (1.36) можно теперь решить прямую задачу электростатики, а именно, найти поле по заданному распределению зарядов. Как уже упоминалось ранее, уравнение (1.19) и его частное выражение (1.21) непосредственно не приводили к решению этой задачи, поскольку эти уравнения связывали между собой три неизвестные проекции вектора. Однако на основании соотношений, полученных в предыдущем параграфе, проекции вектора $\overline{E}$, как проекции взятого с обратным знаком градиента потенциала, равны:

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial U}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (1.21), получим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad (1.41)$$

или в общем виде, заменяя в уравнении (1.19) $\overline{E}$ на $-\operatorname{grad} U$,

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} U = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \qquad (1.42)$$

Это уравнение носит название уравнения Пуассона.

Уравнение (1.41) представляет собой частный случай уравнения (1.42) в прямоугольной декартовой системе координат. Эти уравнения связывают между собой потенциал и заряд в произвольной точке поля. Таким образом, принципиально ясен путь решения прямой задачи электростатики. Сначала решается уравнение (1.42) и находится потенциал как функция от распределений зарядов по отношению к координатам точки наблюдения, а затем по известному по-

тенциалу определяется напряженность поля как градиент потенциала с обратным знаком.

Для точек, где плотность зарядов равна нулю, уравнения (1.41) и (1.42) принимают вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0 \tag{1.43}$$

и

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} U=0. \tag{1.44}$$

Уравнение (1.43) или (1.44) называется уравнением Лапласа.

Из условия, что в точке максимума функции вторые производные ее должны быть отрицательны, а в точке минимума — положительны, вытекает в соответствии с уравнениями (1.41) и (1.44), что потенциал в пространстве, свободном от зарядов, меняется монотонно, принимая максимальные и минимальные значения соответственно в точках с положительной и отрицательной плотностями зарядов.

Уравнение Лапласа в отличие от уравнения Пуассона, казалось бы, не может дать решения прямой электростатической задачи, поскольку оно вообще не выражает связи между потенциалом и зарядом. Тем не менее уравнение Лапласа оказывается очень полезным при расчете электрических полей.

Функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа, носят название гармонических функций.

Как будет показано ниже, если для некоторого свободного от зарядов пространства известны так называемые граничные условия, например, значения потенциала на поверхностях, ограничивающих рассматриваемое пространство, то из всего класса гармонических функций можно отобрать одну- единственную, или построить совокупность функций, удовлетворяющих заданным условиям.

11. Свойства проводников в электростатическом поле

Для формальной теории электричества достаточно определить идеальный проводник как такое тело, в котором собственные электрические заряды (свободные электроны) могут двигаться с конечной скоростью при сколь угодно малом значении напряженности поля внутри проводника. Из определения идеального проводника непосредственно следует условие существования электростатического поля, а именно, электростатическое поле в пространстве, в котором имеются проводники, возможно лишь при равенстве нулю напряженности поля во всех внутренних точках проводника. Физически это означает следующее: при внесении проводника в электростатическое поле оно перестанет быть электростатическим; под действием сил поля по проводнику начнут двигаться заряды. Движение зарядов

в проводнике можно рассматривать как перераспределение положительных и отрицательных зарядов (ранее взаимно компенсировавших друг друга во всех точках нейтрального проводника), при котором положительные заряды движутся в направлении поля, а отрицательные — в направлении, противоположном направлению поля.

В результате такого перемещения на части внешней поверхности проводника, обращенной к положительным истокам электрического поля, будут скапливаться (индуцироваться) отрицательные заряды, на противоположной — положительные. Эти индуцированные заряды образуют внутри проводника собственное электрическое поле, которое (рис. 1.23) направлено против внешнего поля. Таким образом, поле, созданное внутри проводника индуцированными зарядами, ослабляет первичное поле. По мере движения индуцированных зарядов создаваемое ими поле будет все время нарастать. Нетрудно понять, что это движение будет происходить до тех пор, пока поле индуцированных зарядов не скомпенсирует первичное поле во всех точках проводника. С этого момента восстанавливается равновесие, нарушенное внесением проводника в электростатическое поле, и поле вновь становится электростатическим *).

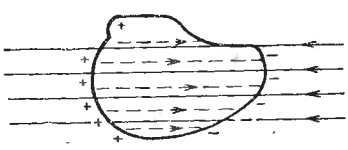


Рис. 1.23. Проводник в электростатическом поле:
Сплошными линиями показаны силовые линии первичного поля, пунктирными линиями — линии поля, создаваемого внутри проводника индуцированными зарядами

Изложенное выше условие отсутствия поля внутри проводника следует дополнить еще условием, определяющим характер поля на внешней поверхности проводника. Легко видеть, что для равновесия зарядов на поверхности проводника необходимо, чтобы составляющая напряженности поля, тангенциальная к поверхности проводника, равнялась нулю. Другими словами, напряженность поля во всех точках внешней поверхности проводника (вне проводника) может иметь лишь составляющую, перпендикулярную к проводнику.

Из изложенных выше условий равновесия зарядов в электростатическом поле при наличии в нем проводников можно вывести некоторые важные для дальнейшего следствия.

1. Если напряженность поля во всех внутренних точках проводника равна нулю, то в силу (1.19) объемная плотность количества электричества во всех внутренних точках проводника равна нулю, и мы можем допустить лишь существование поверхностных зарядов на внешней поверхности проводника.

2. Напряженность электрического поля, нормальная к проводнику в точках внешней поверхности, и поверхностная плотность

*) В действительности равновесие наступает лишь при t (время) $\to \infty$. Здесь имеется полная аналогия с асимптотическим уменьшением тока при заряде конденсатора.

электричества связаны в любой точке поверхности соотношением

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon}. \qquad (1.45)$$

В самом деле, вычислим поток вектора $\bar{D}$ через поверхность малого параллелепипеда, изображенного на рис. 1.24. Поток через шестую грань параллелепипеда, находящуюся внутри проводника, равен нулю. Если мы будем сжимать параллелепипед так, что внешняя грань *1* будет сколь угодно близка к поверхности S

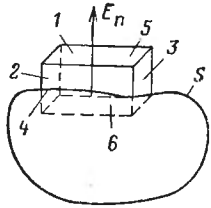


Рис. 1.24. К выводу соотношения между поверхностной плотностью электричества и напряженностью поля у внешней поверхности проводника.

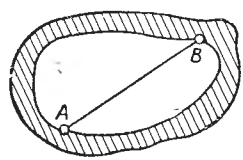


Рис. 1.25. К расчету поля внутри полости, ограниченной проводящей поверхностью.

проводника, то боковые грани уменьшаются и в пределе поток через эти грани станет равным нулю. Таким образом, полный поток через замкнутую поверхность параллелепипеда в пределе совпадает с потоком через внешнюю грань *1* и будет равен

$$dN = \varepsilon E_n \, dS.$$

С другой стороны, этот поток согласно равенству Гаусса — Остроградского (1.15) равен

$$dN = \varepsilon E_n \, dS = \sum q = \sigma dS,$$

где σ — поверхностная плотность заряда, или

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon}. \qquad (1.46)$$

3. Потенциал во всех точках проводника (включая точки на внешней поверхности) одинаков. Другими словами, поверхности проводников являются эквипотенциальными поверхностями.

4. Если проводящая поверхность ограничивает собой некоторую полость (рис. 1.25), свободную от зарядов, то напряженность поля во всех точках этой полости равна нулю, независимо от распределения зарядов вне полости. Действительно, соединим две произ-

вольные точки поверхности, ограничивающей полость, прямой AB. При перемещении по этой прямой потенциал в силу уравнения (1.44) должен изменяться монотонно (не проходя через максимальные или минимальные значения), но при этом потенциалы крайних точек пути A и B равны, как лежащие на эквипотенциальной поверхности, что возможно только при постоянстве потенциала во всех точках пути. Таким образом, во всех точках полости потенциал постоянен. Из постоянства потенциала, в силу уравнения (1.36), вытекает, что напряженность поля внутри области равна нулю. Это явление используется в технике и известно под названием электростатической защиты.

Из принципа суперпозиции непосредственно вытекает, что при наличии зарядов внутри и вне полости, поле внутри полости определяется только внутренними зарядами и совершенно не будет зависеть от внешних зарядов.

Заметим, что обратное утверждение неверно. Заряды, находящиеся внутри полости, создадут поле и вне полости. Это следует непосредственно из того, что поток через замкнутую поверхность, охватывающую проводник и лежащую всеми своими точками во внешнем пространстве, в силу равенства Гаусса — Остроградского не равен нулю. Физически влияние внутренних зарядов полости на внешнее пространство будет обусловлено наличием индуцированных (внутренними зарядами полости) зарядов на внешней поверхности проводника. Только при отведении этих зарядов с поверхности, например, с помощью заземления, получится взаимная экранировка как внутреннего пространства полости от внешнего, так и внешнего пространства от внутреннего.

12. Граничные условия в электростатическом поле

Как следует из предыдущего параграфа, при переходе от точек, лежащих на внешней поверхности проводника, к точкам, расположенным непосредственно внутри проводника, напряженность поля меняется от значения σ/ε до нуля. Проводник является, таким образом, одним частным примером системы, в которой нарушается непрерывность электростатического поля.

Непрерывность вектора $\overline{E}$ может нарушаться также из-за изменения диэлектрической проницаемости. Пусть мы имеем две среды I и II с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 (рис. 1.26). Для общности рассмотрения допустим, что на границе этих сред имеются заряды, распределенные с некоторой поверхностной плотностью σ. Рассмотрим вопрос о том, как меняется поле при переходе через границу раздела.

Для этого пересечем границу раздела некоторым контуром $ABCD$, часть которого AB находится в среде I, а часть CD в среде II.

Согласно уравнению (1.24) работа сил по произвольному замкнутому контуру, а значит, и по контуру $ABCD$, равна нулю

$$\int\limits_{ABCD} \bar{E}\,\bar{dl} = 0.$$

Для данного случая этот интеграл разбивается на интегралы по участкам AB, BC, CD и DA.

Таким образом,

$$\int\limits_{AB} \bar{E}\,\bar{dl} + \int\limits_{BC} \bar{E}\,\bar{dl} + \int\limits_{CD} \bar{E}\,\bar{dl} + \int\limits_{DA} \bar{E}\,\bar{dl} = 0.$$

Если мы будем стягивать рассматриваемый контур $ABCDA$ к поверхности раздела, то работа вдоль участков BC и DA обратится



Рис. 1.26. К доказательству непрерывности тангенциальной составляющей напряженности электрического поля.

в нуль вследствие равенства нулю путей интегрирования, и мы получим в пределе:

$$\int\limits_{AB} \bar{E}\,\bar{dl} + \int\limits_{CD} \bar{E}\,\bar{dl} = 0 \quad \text{или} \quad \int\limits_{AB} \bar{E}\,\bar{dl} = \int\limits_{DC} \bar{E}\,\bar{dl}.$$

Взяв в качестве отрезков AB и DC равные по величине отрезки такой малой длины dl, что в ее пределах напряженность поля не меняется, будем иметь

$$(\bar{E}\,\bar{dl})_1 = (\bar{E}\,\bar{dl})_2.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что

$$E_1\,dl\cos(\bar{E}_1, \bar{dl}) = E_2\,dl\cos(\bar{E}_2, \bar{dl}) \qquad (1.47)$$

или

$$E_{1\,\tau} = E_{2\,\tau}.$$

Таким образом, на любой границе, независимо от значения заряда на ней и диэлектрических постоянных ε_1 и ε_2, тангенциальные составляющие напряженности поля не терпят разрыва.

Рассмотрим теперь связь между нормальными составляющими напряженности поля. Для этого пересечем граничную поверхность параллелепипедом (рис. 1.27). Поток вектора индукции через поверхность этого параллелепипеда равен

$$\int\limits_{S} \bar{D}\,\bar{dS} = \sum q.$$

В данном случае интеграл распадается на интегралы по граням *1* и *2*, лежащим соответственно в первой и во второй средах, и по боковым граням параллелепипеда. Будем сжимать параллелепипед, приближая грани *1* и *2* к поверхности раздела. Тогда поток через боковые грани будет стремиться к нулю, и, следовательно,

$$\int_{S_1} \overline{D}\, \overline{dS} + \int_{S_2} \overline{D}\, \overline{dS} = \sum q.$$

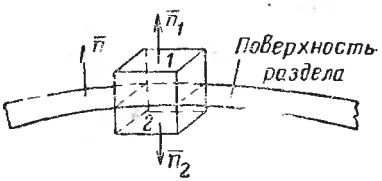


Рис. 1.27. К определению изменения нормальных составляющих поля на границе раздела двух сред.

Выбирая в качестве граней *1* и *2* равные площадки столь малой величины, что в их пределах вектор $\overline{D}$ не меняет своей величины, получим

$$\overline{D}_1\, dS_1 + \overline{D}_2\, \overline{dS}_2 = \sigma dS$$

или

$$D_{1n_1} + D_{2n_2} = \sigma,$$

где $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$ — орты нормалей к поверхностям S_1 и S_2 в первой и во второй среде, указанные на рисунке. Вводя общую для двух сред нормаль $\overline{n}$, можем переписать это равенство в виде

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma. \tag{1.48}$$

Рассмотрим два частных случая. Первый случай, когда поверхностных зарядов нет ($\sigma = 0$), а диэлектрические проницаемости ε_1 и ε_2 не одинаковы. Для этого случая получим

$$D_{1n} = D_{2n} \tag{1.49}$$

или

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}. \tag{1.50}$$

Таким образом, при переходе из одной диэлектрической среды в другую нормальные составляющие вектора индукции не терпят разрыва, а нормальные составляющие напряженности электрического поля изменяются обратно пропорционально диэлектрическим проницаемостям. Объединяя полученные условия для нормальных

и тангенциальных составляющих поля на границе двух диэлектриков, получим:

для вектора $\bar{E}$	для вектора $\bar{D}$
$E_{1\,\mathrm{tg}} = E_{2\,\mathrm{tg}}$,	$\frac{D_{1\,\mathrm{tg}}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2\,\mathrm{tg}}}{\varepsilon_2}$,
$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$.	$D_{1n} = D_{2n}$.

В другом частном случае заряженной поверхности в однородном диэлектрике ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$) в соответствии с равенствами (1.47) и (1.48) будем иметь

$$E_{1\,\mathrm{tg}} = E_{2\,\mathrm{tg}}, \tag{1.51}$$

$$E_{1n} - E_{2n} = \frac{\sigma}{\varepsilon}. \tag{1.52}$$

13. Конденсатор. Электрическая емкость

Пусть в полости, образованной проводником A (рис. 1.28), помещен проводник B. Поле внутри полости в соответствии с выводами предыдущего параграфа определяется только зарядами, находящимися внутри полости. Если на поверхности тела B находится заряд q_B, то он является единственным источником поля внутри области. При этом на внутренней поверхности тела A индуцируется заряд q_A. Величину этого заряда можно определить, применяя равенство Гаусса — Остроградского для замкнутой поверхности S, проходящей в толще внешнего проводника (рис. 1.28):

$$\int_S \bar{D}\, d\bar{S} = q_B + q_A.$$

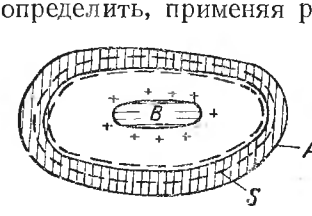


Рис. 1.28. К расчету величины заряда, индуцированного на внутренней поверхности тела.

Так как поле в проводнике отсутствует, то $\int_S \bar{D}\, d\bar{S} = 0$ и $q_B + q_A = 0$, откуда $q_A = -q_B$.

Таким образом, на внутренней поверхности проводника A индуктируется заряд q_A, равный по величине и противоположный по знаку заряду q_B.

Такая система проводников образует конденсатор. Поле внутри полости конденсатора определяется только величиной заряда $q = |q_A| = |q_B|$. Очевидно, что увеличение заряда q приведет к пропорциональному росту напряженности и потенциала поля.

Назовем емкостью конденсатора модуль отношения заряда q_A (или q_B) к разности потенциалов между проводниками A и B:

$$C = \left| \frac{q_A}{U_a - U_b} \right|. \tag{1.53}$$

Наряду с понятием емкости конденсатора применяется понятие емкости одиночного проводника. Под емкостью одиночного проводника понимается отношение заряда на его поверхности к потенциалу:

$$C = \frac{q}{U}.$$

Ясно, что эта величина имеет определенное значение только в случае уединенного проводника. При наличии в поле других проводников потенциал будет зависеть от зарядов на этих проводниках, и, таким образом, близость соседних проводников будет влиять на емкость C.

14. Энергия электростатического поля

Электрическое поле содержит некоторый запас энергии, которая может быть превращена в механическую, тепловую или какую-нибудь другую форму энергии. Так, например, если электрическое поле создано двумя заряженными плоскостями (плоский конденсатор), то противоположно заряженные поверхности будут притягиваться и при малости тормозящих сил могут соединиться. При этом соединении поле исчезнет. Очевидно, что энергия поля в данном случае будет израсходована на механическую работу перемещения заряженных плоскостей. Если эти же плоскости соединить проводником, то конденсатор будет разряжаться, и количество тепла, выделенное в соединительном проводнике, будет также равно первоначальному запасу энергии в электростатическом поле*). Чтобы определить энергию электростатического поля, рассчитаем работу, необходимую для образования этого поля. Пусть мы желаем создать поле с некоторым объемным и поверхностным распределением зарядов, характеризующимся объемной плотностью ρ, поверхностной плотностью σ, и некоторым значением потенциальной функции U**).

Будем считать, что заряды мы в наше пространство переносим из бесконечности, постепенно заряжая объем и поверхности необходимой плотностью электричества. Рассмотрим некоторый промежуточный этап, когда плотность зарядов доведена до значения $\eta\rho$ и $\eta\sigma$, где $\eta \leqslant 1$ — коэффициент, принятый одинаковым для всех точек пространства. В этом случае потенциал будет также равен ηU.

*) Потери энергии на излучение (см. гл. VIII) не учитываются.

**) Заметим, что ρ и σ могут быть различными в разных точках пространства.

Очевидно, что работа, которую надо затратить, чтобы увеличить значение η на $d\eta$, связана с переносом из бесконечности в каждый элемент объема заряда $\rho d\eta dV$ и на каждый элемент поверхности заряда $\sigma d\eta dS$.

Таким образом, в соответствии со смыслом потенциала эта работа равна

$$dW = \int_V \rho d\eta dV \eta U + \sum_{i=1}^{i=n} \int_{S_i} \sigma d\eta dS \eta U,$$

где $\sum_{i=1}^{i=n}$ означает сумму интегралов по n заряженным поверхностям.

Вся работа, которую необходимо совершить для образования поля, очевидно, может быть найдена как интеграл от написанного выше выражения, вычисляемый по η в пределах от нуля до единицы:

$$W = \int_{\eta=0}^{\eta=1} \eta d\eta \int_V \rho U dV + \sum_{i=1}^{i=n} \int_{\eta=0}^{\eta=1} \eta d\eta \int_{S_i} \sigma U dS.$$

Таким образом, для энергии поля объемных и поверхностных зарядов получим выражение

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho U dV + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2} \int_{S_i} \sigma U dS. \tag{1.54}$$

Если объемные заряды отсутствуют, а заряженные поверхности суть эквипотенциальные поверхности проводников, то выражение (1.54) приводится к виду

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} \int_{S_i} \sigma U dS = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2} U_i Q_i, \tag{1.55}$$

где Q_i — полный заряд на i-м проводнике, а U_i — потенциал.

В частности, полагая в формуле (1.55) $n = 1$, получаем для энергии одиночного проводника хорошо известную формулу

$$W = \frac{1}{2} QU = \frac{CU^2}{2}.$$

Придадим несколько иной вид соотношению, определяющему энергию системы проводников, для чего потенциал каждого из проводников представим как сумму

$$U_i = U_{0i} + U_{\text{вз } i},$$

где U_{oi} — потенциал i-го проводника в уединенном состоянии;
$U_{вз\,i}$ — потенциал, наводимый на i-й проводник всеми остальными проводниками. Тогда формула (1.55) принимает вид

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} U_{0i} Q_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} U_{вз\,i} Q_i. \qquad (1.56)$$

Последнее равенство говорит о том, что энергия системы проводников может быть представлена в виде суммы собственной энергии

$$W_с = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} U_{0i} Q_i \qquad (1.57)$$

и взаимной энергии

$$W_{вз} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} U_{вз\,i} Q_i. \qquad (1.58)$$

В ряде случаев интересно знать энергию системы точечных зарядов. Однако несовершенство представления о заряде, сосредоточенном в точке, лишает смысла понятие о собственной энергии системы точечных зарядов, так как эта энергия обращается в бесконечность в силу стремления к бесконечности $\bar{E}$ и U в точках размещения зарядов. Понятие же о взаимной энергии сохраняет свой смысл. По аналогии с равенством (1.58), взаимная энергия системы точечных зарядов определяется формулой

$$W_{вз} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} U_i q_i, \qquad (1.59)$$

где U_i — потенциал в точке размещения q_i, создаваемый всеми остальными $n - 1$ зарядами.

Рассчитаем потенциальную энергию системы точечных зарядов, находящихся во внешнем электрическом поле, или, как говорят, энергию взаимодействия системы точечных зарядов с заданным полем. Из определения потенциала (см. § 8 гл. 1) вытекает, что потенциальная энергия точечного заряда q_i, расположенного в некоторой точке с напряженностью $\bar{E}$ и потенциалом U, равна работе сил поля, которая бы совершалась при удалении заряда q_i из данной точки в бесконечность, т. е.

$$W_i = Uq_i.$$

Если же система содержит n зарядов, то ее энергия определится суммой

$$W = \sum_{i=1}^{i=n} U_i q_i, \qquad (1.60)$$

где U_i — потенциал внешнего поля в точке размещения заряда q_i.

В частном случае для электрического диполя энергия вазимодействия определится, если положить в (1.60) $n = 2$; $q_1 = -q$; $q_2 = q$:

$$W = q(U_2 - U_1).$$

С учетом (1.25) последнее равенство принимает вид

$$W = -q \int_{-l/2}^{l/2} \bar{E}\, \bar{dl},$$

где l — расстояние между зарядами q и $-q$.

Так как расстояние между зарядами диполя мало, можно считать, что напряженность в точках размещения зарядов одинакова, т. е. $\bar{E} = \text{const}$. Вынося на этом основании $\bar{E}$ за знак интеграла, получаем окончательно

$$W = -q\bar{E}\,\bar{l} = -\bar{d}\,\bar{E}. \tag{1.61}$$

Таким образом, энергия диполя во внешнем электрическом поле равна взятому с обратным знаком скалярному произведению момента диполя на напряженность внешнего электрического поля.

В заключение отметим, что полученные формулы (1.54)—(1.59), связывая энергию с зарядами, как бы локализуют эту энергию в той части пространства, которая является носителем зарядов. (В частности, по этой причине оказывается несостоятельным понятие о собственной энергии точечного заряда.) Впоследствии, однако, мы увидим, что возможно другое, более рациональное представление об энергии, согласно которому все электрическое поле является носителем этой энергии.

15. Теорема Грина и ее применение

В настоящем параграфе мы познакомимся с математическим преобразованием, известным под названием теоремы Грина и чрезвычайно полезным при различного рода исследованиях. Это преобразование можно получить непосредственно из теоремы Остроградского (1.22):

$$\int_V \operatorname{div} \bar{L}\, dV = \int_S \bar{L}\, \bar{dS}.$$

В последнем выражении $\bar{L}$ — произвольный вектор, непрерывный вместе со своей производной во всем объеме интегрирования.

Введем в рассмотрение две произвольные, но непрерывные вместе со своими двумя производными, скалярные функции ψ и θ. Образуем при помощи этих функций два вектора, а именно: $\psi \operatorname{grad} \theta$

и $\theta \operatorname{grad} \psi$. Оба эти вектора удовлетворяют условиям применимости преобразования (1.22).

Подставляя один из них, например $\psi \operatorname{grad} \theta$, в уравнение (1.22) получим

$$\int_V \operatorname{div}(\psi \operatorname{grad} \theta)\, dV = \int_S \psi \operatorname{grad} \theta\, \overline{dS}.$$

Согласно известным формулам векторного анализа, имеем

$$\operatorname{div}(\psi \operatorname{grad} \theta) = \psi \operatorname{div} \operatorname{grad} \theta + \operatorname{grad} \psi \operatorname{grad} \theta,$$

соответственно с чем получим

$$\int_V (\psi \operatorname{div} \operatorname{grad} \theta + \operatorname{grad} \psi \operatorname{g} \operatorname{grad} \theta)\, dV = \int_S \psi \frac{\partial \theta}{\partial n}\, dS. \qquad (1.62)$$

Тождество (1.62) носит название теоремы Грина в первой форме. Написав аналогичное выражение для второго из векторов $\theta \operatorname{grad} \psi$

$$\int_V (\theta \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi + \operatorname{grad} \theta \cdot \operatorname{grad} \psi)\, dV = \int_S \theta \frac{\partial \psi}{\partial n}\, dS,$$

и вычтя его из выражения (1.62), получим так называемую вторую форму теоремы Грина:

$$\int_V (\psi \operatorname{div} \operatorname{grad} \theta - \theta \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi)\, dV = \int_S \left(\psi \frac{\partial \theta}{\partial n} - \theta \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS. \qquad (1.63)$$

Покажем теперь применение этой теоремы на отдельных примерах. В качестве первого примера применим ее для доказательства принципа взаимности.

Пусть в однородном диэлектрике ($\varepsilon = \text{const}$) имеется электростатическое поле, характеризующееся некоторым распределением зарядов с плотностями ρ' и σ' и распределением потенциала U'. Пусть далее это распределение зарядов изменилось и характеризуется новыми значениями ρ'', σ'' и U''. Какова связь между первым и вторым состояниями системы? Ответ на этот вопрос дает теорема Грина.

Воспользуемся второй формой теоремы Грина (1.63). Положив $\psi = U'$ и $\theta = U''$, получим

$$\int_V (U' \operatorname{div} \operatorname{grad} U'' - U'' \operatorname{div} \operatorname{grad} U')\, dV = \int_S \left(U' \frac{\partial U''}{\partial n} - U'' \frac{\partial U'}{\partial n} \right) dS. \qquad (1.64)$$

Если в рассматриваемом объеме имеются заряженные поверхности, то при переходе через эти поверхности нормальная составляющая напряженности поля или dU/dn в соответствии с результатами § 12 гл. I терпит разрыв непрерывности, равный σ/ε, и теорема Грина неприменима. Мы можем, однако, выделить места разрыва, окружив заряженные поверхности S_σ поверхностями S_p (рис. 1.29) и взять в качестве объема интегрирования весь заштрихованный объем, уже не содержащий точек разрыва непрерывности. В этом случае правая часть тождества (1.64) должна быть распространена на внешнюю поверхность S_0 и поверхности S_p, ограничивающие объем интегрирования.

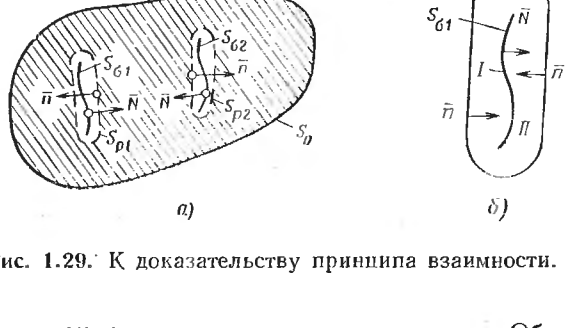


Рис. 1.29. К доказательству принципа взаимности.

Рассмотрим значения отдельных интегралов. Объемные интегралы, стоящие в левой части равенства, в соответствии с уравнением (1.42) могут быть записаны в виде

$$\int_V (U' \operatorname{div}\operatorname{grad} U'' - U'' \operatorname{div}\operatorname{grad} U')\, dV =$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon}\int_V U' \rho''\, dV + \frac{1}{\varepsilon}\int_V U'' \rho'\, dV. \qquad (1.64а)$$

Правая часть выражения (1.64) распадается на интеграл по внешней поверхности S_0 и по поверхностям S_p. Будем теперь удалять поверхность S_0 в бесконечность, а поверхности S_p стягивать к заряженным поверхностям S_σ и найдем предельные значения интегралов.

Так как для бесконечности все заряды, находящиеся в рассматриваемом объеме, могут считаться точечными, то при $S_0 \to \infty$ потенциал U будет убывать как $1/r$, а его производная $\partial U/\partial n$ — как $1/r^2$. В то же время поверхность S_0 будет расти пропорционально r^2. Таким образом, интеграл по S_0 при $S_0 \to \infty$ будет стремиться к нулю (как $1/r$).

Рассмотрим теперь предельное значение интегралов по поверхности S_p. Предположим сначала, что внутри объема V существует

лишь одна и притом незамкнутая заряженная поверхность $S_{\sigma 1}$. Введем произвольным образом направление положительной нормали к ней и обозначим ее через $\overline{N}$ (рис. 1.29, *а*). Будем стягивать вспомогательную поверхность S_{p1} к заряженной поверхности $S_{\sigma 1}$. В пределе S_{p1} совпадет с $S_{\sigma 1}$, и интегрирование по S_{p1} сведется к двукратному интегрированию по заряженной поверхности $S_{\sigma 1}$: один раз по «внутренней» (относительно нормали $\overline{N}$), а другой раз по «внешней» стороне этой поверхности, т. е.

$$\lim_{S_{p1}\to S_{\sigma 1}} \int_{S_{p1}} \left[U' \frac{dU''}{\partial n} - U'' \frac{\partial U'}{\partial n}\right] dS =$$

$$= \int_{S_{\sigma 1}} \left[U'_{\mathrm{I}} \left(\frac{\partial U''}{\partial n}\right)_{\mathrm{I}} - U''_{\mathrm{I}} \left(\frac{\partial U'}{\partial n}\right)_{\mathrm{I}}\right] dS +$$

$$+ \int_{S_{\sigma 1}} \left[U'_{\mathrm{II}} \left(\frac{\partial U''}{\partial n}\right)_{\mathrm{II}} - U''_{\mathrm{II}} \left(\frac{\partial U''}{\partial n}\right)_{\mathrm{II}}\right] dS.$$

Индексами I и II отмечены значения потенциалов и их производных, относящиеся соответственно к «внутренней» и «внешней» (относительно нормали $\overline{N}$) сторонам поверхности $S_{\sigma 1}$ (рис. 1.29, *б*). Под $\overline{n}$ понимается нормаль к вспомогательной поверхности S_{p1}, направленная в сторону заряженной поверхности $S_{\sigma 1}$. В пределе при $S_{p1}\to S_{\sigma 1}$ на «внутренней» стороне $\overline{n}$ и $\overline{N}$ будут иметь одинаковое направление. Поэтому

$$\left(\frac{\partial U'}{\partial n}\right)_{\mathrm{I}} = \left(\frac{\partial U'}{\partial N}\right)_{\mathrm{I}};$$

$$\left(\frac{\partial U''}{\partial n}\right)_{\mathrm{I}} = \left(\frac{\partial U''}{\partial N}\right)_{\mathrm{I}}.$$

На «внешней» стороне $\overline{n}$ и $\overline{N}$ имеют противоположное направление. Отсюда

$$\left(\frac{\partial U'}{\partial n}\right)_{\mathrm{II}} = -\left(\frac{\partial U'}{\partial N}\right)_{\mathrm{II}};$$

$$\left(\frac{\partial U''}{\partial n}\right)_{\mathrm{II}} = -\left(\frac{\partial U''}{\partial N}\right)_{\mathrm{II}}.$$

В силу непрерывности потенциала:

$$U'_{\mathrm{I}} = U'_{\mathrm{II}} = U'_{1};\quad U''_{\mathrm{I}} = U''_{\mathrm{II}} = U''_{1}.$$

С учетом этих замечаний предельное значение интеграла по поверхности S_{p1} имеет вид

$$\lim_{S_{p1}\to S_{\sigma 1}} \int\limits_{S_{p1}} \left[U' \frac{\partial U''}{\partial n} - U'' \frac{\partial U'}{\partial n}\right] dS =$$

$$= \int\limits_{S_{\sigma 1}} \left[U'_{\rm I}\left(\frac{\partial U''}{\partial N}\right)_{\rm I} - U''_{\rm I}\left(\frac{\partial U'}{\partial N}\right)_{\rm I} - U'_{\rm II}\left(\frac{\partial U''}{\partial N}\right)_{\rm II} +\right.$$

$$\left. + U''_{\rm II}\left(\frac{\partial U'}{\partial N}\right)_{\rm II}\right] dS = \int\limits_{S_{\sigma 1}} \left\{U'_{\rm I}\left[\left(\frac{\partial U''}{\partial N}\right)_{\rm I} - \left(\frac{\partial U''}{\partial N}\right)_{\rm II}\right] -\right.$$

$$\left. - U''_{\rm I}\left[\left(\frac{\partial U'}{\partial N}\right)_{\rm I} - \left(\frac{\partial U'}{\partial N}\right)_{\rm II}\right]\right\} dS.$$

Но согласно (1.35) и соотношений § 12 этой главы имеем: *)

$$\left(\frac{\partial U''}{\partial N}\right)_{\rm I} - \left(\frac{\partial U''}{\partial N}\right)_{\rm II} = E''_{N\,\rm II} - E''_{N\,\rm I} = \frac{\sigma''_1}{\varepsilon},$$

$$\left(\frac{\partial U'}{\partial N}\right)_{\rm I} - \left(\frac{\partial U'}{\partial N}\right)_{\rm II} = E'_{N\,\rm II} - E'_{N\,\rm I} = \frac{\sigma'_1}{\varepsilon},$$

где σ'_1 и σ''_1 — поверхностные плотности заряда поверхности $S_{\sigma 1}$ при первом и втором распределении соответственно.

Стало быть,

$$\lim_{S_{p1}\to S_{\sigma 1}} \int\limits_{S_{p1}} \left[U' \frac{\partial U''}{\partial n} - U'' \frac{\partial U'}{\partial n}\right] dS = \int\limits_{S_{\sigma 1}} \left(U'_1 \frac{\sigma''_1}{\varepsilon} - U''_1 \frac{\sigma'_1}{\varepsilon}\right) dS. \quad (1.64б)$$

Подставляя вычисленные значения интегралов из (1.64а) и (1.64б) в (1.64), окончательно получаем:

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_V U' \rho'' \, dV + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_V U'' \rho' \, dV =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{S_{\sigma 1}} U'_1 \sigma''_1 \, dS - \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{S_{\sigma 1}} U''_1 \sigma'_1 \, dS$$

или

$$\int\limits_V U' \rho'' \, dV + \int\limits_{S_{\sigma 1}} U'_1 \sigma''_1 \, dS = \int\limits_V U'' \rho' \, dV + \int\limits_{S_{\sigma 1}} U''_1 \sigma'_1 \, dS. \quad (1.65)$$

*) Заметим, что на рис. 1.29 нормаль $\overline{N}$, в отличие от рис. 1.27, направлена от стороны I в сторону II поверхности S_σ.

Если заряженных поверхностей в объеме V несколько ($S_{\sigma 1}$, $S_{\sigma 2}$, ..., $S_{\sigma i}$, ..., $S_{\sigma n}$), то уравнение (1.65) следует переписать в виде

$$\int_V U' \rho'' dV + \sum_{i=1}^{i=n} \int_{S_{\sigma i}} U_i' \sigma_i'' dS_i = \int_V U'' \rho' dV + \sum_{i=1}^{i=n} \int_{S_{\sigma i}} U_i'' \sigma_i' dS_i, \quad (1.66)$$

где знак $\sum_{i=1}^{i=n}$ означает сумму интегралов по всем заряженным поверхностям.

Уравнение (1.66) является математической формулировкой принципа взаимности для электростатики.

В частном случае, когда объемные заряды отсутствуют, а заряженными поверхностями являются проводники, уравнение (1.66) упростится и примет вид

$$\sum_{i=1}^{i=n} U_i' \int_{S_i} \sigma_i'' dS_i = \sum_{i=1}^{i=n} U_i'' \int_{S_i} \sigma_i' dS_i \quad (1.67)$$

или, так как $\int_S \sigma dS = Q$ есть заряд проводника,

$$\sum_{i=1}^{i=n} U_i' Q_i'' = \sum_{i=1}^{i=n} U_i'' Q_i'. \quad (1.68)$$

В случае двух проводников ($n=2$)

$$U_1' Q_1'' + U_2' Q_2'' = U_1'' Q_1' + U_2'' Q_2'.$$

Полагая, что эти проводники образуют конденсатор, т. е.

$$Q_1 = -Q_2 = Q,$$

получим

$$Q'' (U_1 - U_2)' = Q' (U_1 - U_2)''$$

или

$$\frac{Q'}{(U_1 - U_2)'} = \frac{Q''}{(U_1 - U_2)''} = C.$$

Величина C — емкость конденсатора, таким образом, не зависит от величины заряда Q, что впрочем достаточно очевидно.

Из теоремы взаимности в формулировке (1.68) мы получим важное следствие, если положим в (1.68), что

$$Q_2' = Q_3' = Q_4' = Q_5' = \ldots = 0,$$

$$Q_1'' = Q_3'' = Q_4'' = \ldots = 0,$$

$$Q_1' = Q_2'' = Q,$$

В этом случае уравнение (1.68) дает

$$U_2' = U_1''.$$

Таким образом, потенциал, наводимый на проводнике II зарядом Q проводника I, равен потенциалу, наводимому на проводнике I таким же зарядом, находящимся на проводнике II.

16. Распределение энергии в электростатическом поле

Выражение для энергии электрического поля (1.54) можно преобразовать так, чтобы представить ее не как функцию зарядов, а как функцию напряженности поля. Воспользуемся для этого формулой Грина в первой форме (1.62), выбрав в качестве функций ψ и θ одну и ту же функцию, а именно, потенциал поля

$$\psi = \theta = U.$$

Уравнение (1.62) будет иметь вид

$$\int_V [U \operatorname{div} \operatorname{grad} U + (\operatorname{grad} U)^2]\, dV = \int_S U \frac{\partial U}{\partial n}\, dS.$$

Так как $\operatorname{div} \operatorname{grad} U = -\frac{\rho}{\varepsilon}$, а $\bar{E} = -\operatorname{grad} U$, то последнее уравнение можно переписать так:

$$\int_V -U \frac{\rho}{\varepsilon}\, dV + \int_V E^2\, dV = \int_S U \frac{\partial U}{\partial n}\, dS.$$

При наличии в поле заряженных поверхностей мы должны аналогично тому, как было сделано в предыдущем параграфе, выделить из объема эти заряженные поверхности (см. рис. 1.29). Тогда

$$-\int_V U \frac{\rho}{\varepsilon}\, dV + \int_V E^2\, dV = \int_{S_0} U \frac{\partial U}{\partial n}\, dS + \sum \int_{S_p} U \frac{\partial U}{\partial n}\, dS.$$

Повторяя все рассуждения предыдущего параграфа, получим для предельных значений интеграла, взятого по внешней поверх-

ности S_0 при ее удалении в бесконечность, нуль, а для поверхностей S_p при их приближении к заряженным поверхностям S_σ значение

$$\lim_{S_p \to S_\sigma} \int_{S_p} U \frac{\partial U}{\partial n} dS = \int_{S_\sigma} U \frac{\sigma}{\varepsilon} dS.$$

После подстановки найденных интегралов в правую часть уравнения будем иметь

$$\int_V \rho U dV + \sum \int_{S_\sigma} \sigma U dS = \int_V \varepsilon E^2 dV.$$

Но левая часть полученного равенства, деленная на 2, есть уже известное нам выражение энергии (1.54). Таким образом,

$$W = \int_V \frac{\varepsilon E^2}{2} dV = \int_V \frac{\bar{E}\bar{D}}{2} dV. \qquad (1.69)$$

В выражении (1.69) энергия представлена в виде объемного интеграла, распространенного на все пространство, где имеется электростатическое поле. Отсюда вытекает, что энергия электрического поля распределена в пространстве с объемной плотностью w_E, равной

$$w_E = \frac{\varepsilon E^2}{2} = \frac{\bar{E}\bar{D}}{2}. \qquad (1.70)$$

Равенство (1.69), таким образом, утверждает, что носителем энергии являются не заряды [как это вытекало из равенства (1.54)], а электростатическое поле. Если при расчете энергии по (1.54) мы интегрируем по областям, где имеются заряды, и в них как бы сосредоточена энергия, то в (1.69) мы интегрируем по пространству поля вне зависимости от распределения самих зарядов.

Выражения (1.54) и (1.69), естественно, дают при расчете один и тот же результат, и поэтому никаким опытом, поставленным в рамках электростатики, нельзя ответить на вопрос о том, где же в действительности сосредоточена энергия: в поле или в зарядах?

На этот вопрос мы получим ответ лишь при рассмотрении процессов не статических, а меняющихся во времени, хотя с точки зрения диалектического материализма очевидно a priori, что представление о нахождении энергии лишь в каких-то отдельных точках пространства неверно. Философски верным может быть лишь представление о том, что все пространство заполнено материей в форме электростатического поля. Электростатическое поле есть, таким образом, не математический прием для описания взаимодействия электрических зарядов, а материальная субстанция, существующая в пространстве (и во времени*)) и наделенная, как и всякая материя, определенным запасом энергии.

*) Всякое электрическое поле, вообще говоря, меняется во времени.

где

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \text{ и } \rho=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Решение уравнения станет, однако, однозначным, если мы наложим на нашу задачу дополнительные, так называемые граничные условия. Этими условиями являются значения зарядов или величины потенциалов проводящих поверхностей, так или иначе ограничивающих пространство поля.

Рассмотрим вначале первый случай. Пусть заданы потенциалы всех проводников, находящихся в поле. Тогда можно утверждать, что из всего множества функций, удовлетворяющих уравнению Лапласа, существует одна и только одна функция, которая принимает заданные значения на проводящих поверхностях. Для доказательства предположим противное. Пусть существуют две функции U_1 и U_2, такие что

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} U_1=0 \text{ и } \operatorname{div}\operatorname{grad} U_2=0,$$

причем на поверхности k-го проводника удовлетворяются условия:

$$(U_1)_{\text{пров}}=U_k; \quad (U_2)_{\text{пров}}=U_k.$$

Составим разностную функцию

$$U^*=U_1-U_2.$$

Очевидно, U^* должна удовлетворять условиям:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} U^*=0 \text{ и } (U^*)_{\text{пров}}=0. \tag{2.1}$$

Выясним, какая функция обладает такими свойствами, т. е. удовлетворяет уравнению Лапласа и обращается в нуль на всех проводящих поверхностях. Для этого воспользуемся формулой Грина в первой форме (1.62) и положим в ней, что $\theta=\psi=U^*$. Тогда получим:

$$\int_V [U^*\operatorname{div}\operatorname{grad} U^*+(\operatorname{grad} U^*)^2]\,dV=\int_S U^*\frac{\partial U^*}{\partial n}\,dS,$$

или в силу (2.1)

$$\int_V (\operatorname{grad} U^*)^2\,dV=\int_S U^*\frac{\partial U^*}{\partial n}\,dS. \tag{2.2}$$

Повторяя рассуждения, приведенные в § 15 гл. 1, заключаем, что поверхностный интеграл в правой части равенства необходимо распространить на внешнюю поверхность S_0 и все поверхности S_p, ограничивающие поверхности проводников (см. рис. 1.29). При устремлении поверхности S_0 в бесконечность интеграл по этой поверхности обратится в нуль по соображениям, приведенным в § 15 гл.1. Интегралы по поверхностям S_p при их приближении к поверхностям проводников также обратятся в нуль, так как в силу непрерывности потенциала *) значение функции U^* на них будет сколь угодно мало отличаться от значения этой функции на проводниках, где по условию она равна нулю. Таким образом, интеграл правой части уравнения обращается тождественно в нуль.

Отсюда

$$\int (\operatorname{grad} U^*)^2\,dV=0. \tag{2.3}$$

*) При переходе через заряженные поверхности терпит разрыв лишь $\partial U/\partial n$, потенциал U остается непрерывным.

Под интегралом выражения (2.3) стоит существенно положительная величина, откуда следует, что

$$\text{grad } U^* = 0, \quad U^* = \text{const}.$$

Так как в бесконечности U^* должно обращаться в нуль, то, очевидно, во всем пространстве U^* равно нулю.

Таким образом, не существует двух различных функций U_1 и U_2, удовлетворяющих уравнению Лапласа и поставленным граничным условиям.

Рассмотрим случай, когда заданы не потенциалы проводников, а их полные заряды

$$q_k = \int\limits_{S_k} \sigma dS$$

(S_k — поверхность k-го проводника).

Положим теперь, что существует два различных распределения потенциалов U_1 и U_2 и соответствующие им распределения поверхностных плотностей электричества σ_1 и σ_2 на проводниках такие, что

$$\text{div grad } U_1 = 0 \text{ и } \text{div grad } U_2 = 0$$

и

$$\int\limits_{S_k} \sigma_1 \, dS = \int\limits_{S_k} \sigma_2 \, dS = q_k.$$

Тогда разностная фуикция $U^* = U_1 - U_2$ и соответствующая ей разностная поверхностная плотность электричества σ^* должны удовлетворять условиям:

$$\text{div grad } U^* = 0 \text{ и } \int\limits_{S_k} \sigma^* \, dS = 0.$$

Пользуясь тем же приемом, что и выше, мы вновь придем к уравнению (2.2), в котором интеграл по внешней поверхности при ее стремлении к бесконечности обратится в нуль, интегралы же по поверхностям S_p при их стягивании к поверхностям проводников будут иметь вид

$$U^* \int\limits_{S_p} \frac{\partial U^*}{\partial n} \, dS = \frac{U^*}{\varepsilon} \int\limits_{S_p} \sigma^* \, dS,$$

где неизвестное значение потенциала U^* вынесено за знак интеграла, так как оно сколь угодно мало отличается от постоянного потенциала проводников.

Так как по условию

$$\int\limits_{S_{\text{пров}}} \sigma^* \, dS = 0,$$

то мы вновь приходим к выводу об однозначности решения задачи.

Таким образом, мы доказали однозначность решения уравнения Лапласа в двух случаях, а именно, когда заданы потенциалы или заряды на проводниках. Легко убедиться, что однозначность решения имеет место и при смешанном задании граничных условий, т. е., когда на части проводников заданы потенциалы, а на другой части — заряды.

2. Криволинейные ортогональные координаты

Решение уравнений Лапласа и Пуассона требует задания граничных условий. Эти граничные условия выражаются аналитически наиболее просто в том случае, когда форма граничных поверхностей соответствует форме координатных поверхностей.

Поэтому выбранная система координат должна быть адекватна исследуемой задаче. Так, при расчете поля между плоскостями удобна, очевидно, прямоугольная система координат Декарта. В случае изучения поля с осевой симметрией преимущества имеет цилиндрическая система координат, в случае симметрии относительно центра — сферическая и т. д. Необходимо поэтому уметь составлять основные уравнения электрического поля в любой системе координат. В дальнейшем мы ограничимся лишь рассмотрением ортогональных координатных систем.

Назовем обобщенными криволинейными координатами текущей точки пространства три переменные ξ, η, ζ, которые являются взаимно однозначными и непрерывными функциями прямоугольных координат x, y, z, так что

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \xi(x, y, z), \\ \eta &= \eta(x, y, z), \\ \zeta &= \zeta(x, y, z). \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

Поскольку эти функции по условию однозначны, величины ξ, η и ζ определяют положение точки точно так же, как и координаты x, y, z. Однозначность функций геометрически означает, что если задать этим функциям некоторые постоянные значения:

$$\begin{aligned} &\xi(x, y, z) = \xi_1, \quad \xi(x, y, z) = \xi_2, \quad \xi(x, y, z) = \xi_3; \\ &\eta(x, y, z) = \eta_1, \quad \eta(x, y, z) = \eta_2, \quad \eta(x, y, z) = \eta_3; \\ &\zeta(x, y, z) = \zeta_1, \quad \zeta(x, y, z) = \zeta_2, \quad \zeta(x, y, z) = \zeta_3, \end{aligned}$$

то поверхности ξ_1, ξ_2 и ξ_3 не пересекаются между собой. То же относится к поверхностям η_1, η_2, η_3 и поверхностям ζ_1, ζ_2, ζ_3. В то же время любая из поверхностей ξ или ζ пересекается с любой из поверхностей η и т. п.

Поверхности $\xi(x, y, z) = \text{const}$, $\eta(x, y, z) = \text{const}$ и $\zeta(x, y, z) = \text{const}$ называются координатными поверхностями.

Координатные поверхности $\xi(x, y, z) = \text{const}$ и $\eta(x, y, z) = \text{const}$, пересекаясь, определяют собой некоторую, вообще говоря кривую линию, вдоль которой меняется лишь величина ζ. Эта линия соответственно называется координатной линией ζ. Аналогично определяются координатная линия ξ как пересечение поверхностей $\eta(x, y, z) = \text{const}$ и $\zeta(x, y, z) = \text{const}$ и координатная линия η как пересечение поверхностей $\xi(x, y, z) = \text{const}$ и $\zeta(x, y, z) = \text{const}$. Координатные линии пересекаются друг

с другом под некоторым углом, определяемым характером выбранных функций (2.4). В дальнейшем, как уже указывалось, мы будем оперировать лишь с такими функциональными зависимостями, которые дают координатные линии, пересекающиеся под прямым углом.

В криволинейной системе координат следует различать приращение координаты и величину соответствующего смещения вдоль координатной линии. Если координата ξ изменилась на $d\xi$, то перемещение вдоль координатной линии ξ будет равно

$$dl_\xi = h_\xi \, d\xi,$$

где h_ξ зависит от вида координатных линий.

Действительно, элемент координатной кривой dl_ξ можно записать как

$$dl_\xi = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}, \qquad (2.5)$$

где dx, dy, dz — изменения координат x, y, z, соответствующие изменению ξ ($\eta = \text{const}$; $\zeta = \text{const}$), причем

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi; \quad dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi; \quad dz = \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi.$$

Подставляя эти значения в выражение (2.5), получим

$$dl_\xi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2} \, d\xi.$$

Отсюда для h_ξ будем иметь

$$h_\xi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2}. \qquad (2.6)$$

Аналогично можно написать, что

$$h_\eta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2} \text{ и}$$

$$h_\zeta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \zeta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right)^2}.$$

Элемент длины произвольной кривой dl может быть представлен как геометрическая сумма ортогональных отрезков dl_ξ; dl_η; dl_ζ. Таким образом,

$$dl = \sqrt{dl_\xi^2 + dl_\eta^2 + dl_\zeta^2} = \sqrt{h_\xi^2 \, d\xi^2 + h_\eta^2 \, d\eta^2 + h_\zeta^2 \, d\zeta^2}. \qquad (2.7а)$$

Элемент координатной поверхности будет, очевидно, равен

$$dS_\xi = h_\eta h_\zeta \, d\eta d\zeta; \quad dS_\eta = h_\zeta h_\xi \, d\zeta d\xi; \quad dS_\zeta = h_\xi h_\eta \, d\xi \, d\eta. \qquad (2.7б)$$

и, наконец, элемент объема

$$dV = h_\xi h_\eta h_\zeta \, d\xi d\eta d\zeta. \tag{2.7в}$$

Для каждой системы координат обычно вводится совокупность единичных (базисных) векторов $\bar{i}_\xi$, $\bar{i}_\eta$, $\bar{i}_\zeta$, направленных по касательным к координатным линиям в сторону возрастания ξ, η и ζ (рис. 2.1).

Выразим теперь введенные в гл. I дифференциальные операторы градиент и дивергенция в криволинейных ортогональных координатах.

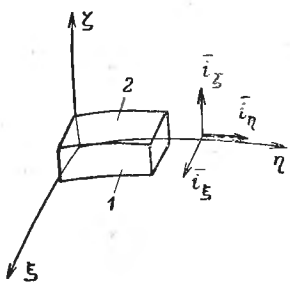


Рис. 2.1. К расчету дивергенции в криволинейной системе координат.

Проекция градиента функции U на любое направление есть изменение функции U в этом направлении. Поэтому

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{grad}_\xi U &= \frac{\partial U}{\partial l_\xi} = \frac{1}{h_\xi}\frac{\partial U}{\partial \xi}, \\ \operatorname{grad}_\eta U &= \frac{\partial U}{\partial l_\eta} = \frac{1}{h_\eta}\frac{\partial U}{\partial \eta}, \\ \operatorname{grad}_\zeta U &= \frac{\partial U}{\partial l_\zeta} = \frac{1}{h_\zeta}\frac{\partial U}{\partial \zeta}. \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

Дивергенция вектора $\bar{A}$ определяется формулой

$$\operatorname{div} \bar{A} = \lim \left| \frac{\int\limits_S \bar{A}\, d\bar{S}}{\Delta V} \right|_{\Delta V \to 0}.$$

Для подсчета потока вектора $\bar{A}$ строим у исследуемой точки (ξ, η, ζ) параллелепипед (рис. 2.1) с криволинейными ребрами, совпадающими с координатными линиями.

Поток через грани *1* и *2* параллелепипеда, перпендикулярные оси ξ, равен

$$(A_\xi \, dl_\eta \, dl_\zeta)_1 - (A_\xi \, dl_\eta \, dl_\zeta)_2,$$

где знаком минус перед вторым членом учитывается направление внешней нормали к грани *2*, противоположное положительному направлению оси ξ.

Так как выражение, написанное для потока через две грани, представляет собой приращение функции $A_\xi\, dl_\eta\, dl_\zeta$ при изменении переменной ξ, то, учитывая, что

$$dl_\eta = h_\eta\, d\eta \text{ и } dl_\zeta = h_\zeta\, d\zeta,$$

получим

$$(A_\xi\, dl_\eta\, dl_\zeta)_1 - (A_\xi\, dl_\eta\, dl_\zeta)_2 = \frac{\partial}{\partial \xi}(A_\xi\, h_\eta\, h_\zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Коэффициенты h_η и h_ζ нельзя выносить за знак производной, так как они являются функциями координат (ξ, η, ζ).

Составляя аналогичные выражения для потока через другие две пары граней и складывая их, будем иметь

$$\int_S \overline{A}\, \overline{dS} = \left[\frac{\partial}{\partial \xi}(A_\xi\, h_\eta\, h_\zeta) + \frac{\partial}{\partial \eta}(A_\eta\, h_\xi\, h_\zeta) + \frac{\partial}{\partial \zeta}(A_\zeta\, h_\xi\, h_\eta)\right] d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Разделив это выражение на объем параллелепипеда

$$dV = h_\xi\, h_\eta\, h_\zeta\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

получим выражение для $\operatorname{div} \overline{A}$ в криволинейной системе координат

$$\operatorname{div} \overline{A} = \frac{1}{h_\xi\, h_\eta\, h_\zeta}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}(A_\xi\, h_\eta\, h_\zeta) + \frac{\partial}{\partial \eta}(A_\eta\, h_\zeta\, h_\xi) + \frac{\partial}{\partial \zeta}(A_\zeta\, h_\xi\, h_\eta)\right]. \quad (2.9)$$

Подставляя в выражение (2.9) вместо $\overline{A}$ значение $\operatorname{grad} U$ из уравнения (2.8), найдем выражения для Лапласиана:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} U = \frac{1}{h_\xi\, h_\eta\, h_\zeta}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{h_\eta\, h_\zeta}{h_\xi}\frac{\partial U}{\partial \xi}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{h_\zeta\, h_\xi}{h_\eta}\frac{\partial U}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{h_\xi\, h_\eta}{h_\zeta}\frac{\partial U}{\partial \zeta}\right)\right]. \quad (2.10)$$

Применим выражения (2.8)—(2.10) к цилиндрической и сферической системам координат.

Цилиндрическая система координат

Координатными поверхностями цилиндрической системы (рис. 2.2) являются:

$\xi = \rho = \text{const}$ — поверхность круглого цилиндра*);

$\eta = \varphi = \text{const}$ — полуплоскость, проходящая через ось z;

$\zeta = z = \text{const}$ — плоскость, перпендикулярная оси z.

*) Координату ρ не следует путать с объемной плотностью заряда.

Очевидно, что в данном случае

$$dl_\xi = d\rho \quad \text{и} \quad h_\rho = 1,$$

$$dl_\eta = \rho d\varphi \quad \text{и} \quad h_\eta = \rho,$$

$$dl_\zeta = dz \quad \text{и} \quad h_\zeta = 1.$$

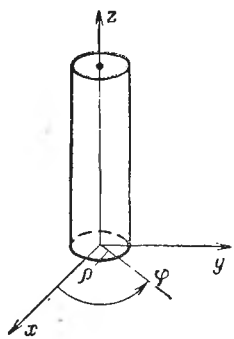


Рис. 2.2. Цилиндрическая система координат.

Подставляя эти выражения в уравнения (2.8)—(2.10), получим:

$$\operatorname{grad} U = \bar{i}_\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} + \bar{i}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \bar{i}_z \frac{\partial U}{\partial z}, \tag{2.11}$$

$$\operatorname{div} \bar{A} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} A_\varphi\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \tag{2.12}$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \tag{2.13}$$

Сферическая система координат

Координатными поверхностями сферической системы (рис. 2.3) являются: $\xi = r = \text{const}$ — поверхность сферы; $\eta = \theta = \text{const}$ — поверхность конуса; $\zeta = \varphi = \text{const}$ — меридиональная полуплоскость. Из соотношений $dl_\xi = dr$, $dl_\eta = r\,d\vartheta$, $dl_\zeta = r \sin\theta\, d\varphi$, следует, что $h_\xi = 1$; $h_\eta = r$; $h_\zeta = r \sin\theta$.

от x, поэтому, сохраняя в уравнении Лапласа (1.44) только первое слагаемое, получим

$$\frac{d^2U}{dx^2}=0.$$

Решение этого уравнения будет иметь вид

$$U=C_1x+C_2.$$

Произвольные постоянные определяются из граничных условий:

$$U=0 \quad \text{при} \quad x=0,$$
$$U=U_0 \quad \text{при} \quad x=d.$$

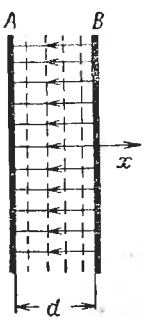


Рис. 2.4. Поле плоского конденсатора.

В соответствии с этим имеем

$$C_2=0, \quad C_1d=U_0,$$

откуда

$$C_1=\frac{U_0}{d}.$$

Таким образом,

$$U=C_1x+C_2=\frac{U_0}{d}x. \tag{2.17}$$

Потенциал изменяется линейно с изменением x. Это решение удовлетворяет уравнению Лапласа и граничным условиям. Поэтому оно является единственным.

Напряженность поля определяется как градиент потенциала:

$$\vec{E}=-\operatorname{grad}U=-\vec{i}_x\frac{dU}{dx},$$
$$E=-\frac{U_0}{d}. \tag{2.18}$$

Напряженность поля постоянна во всех точках поля и направлена в сторону, противоположную оси x (при $U_0>0$).

Учитывая, что у поверхности проводника

$$E_n=\frac{\sigma}{\varepsilon},$$

имеем для пластины A

$$\frac{U_0}{d}=-\frac{\sigma_A}{\varepsilon}; \quad \sigma_A=-\frac{U_0\varepsilon}{d}$$

и для пластины B

$$-\frac{U}{d}=\frac{\sigma_B}{\varepsilon}; \quad \sigma_B=\frac{U_0\varepsilon}{d}.$$

Заряд распределен на пластинах равномерно.

Общий заряд на площадке величиной S равен

$$q = \sigma S = \frac{U_0 S \varepsilon}{d}.$$

В соответствии с (1.53) для емкости плоского конденсатора с площадью S (не учитывая искажающего влияния краев) получим

$$C = \frac{q}{U_0} = \frac{\varepsilon S}{d}. \tag{2.19}$$

Поле заряженной сферы

Рассмотрим поле, созданное заряженной проводящей сферой радиуса a. Потенциал сферы будем считать равным U_0. Для этой задачи естественно использовать уравнение Лапласа в сферической системе координат.

Ввиду симметрии задачи потенциал является функцией только радиуса r. Сохраняя в выражении (2.16) только член, содержащий производные по r, получим:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dU}{dr}\right) = 0,$$

откуда

$$r^2\, dU/dr = C_1, \quad dU/dr = C_1/r^2, \quad U = -C_1/r + C_2.$$

В качестве граничных условий, определяющих постоянные C_1 и C_2, примем, что

при $r \to \infty$ функция $U = 0$,

при $r = a$, т. е. на данной сфере, $U = U_0$.

Отсюда получаем

$$C_2 = 0, \qquad -C_1 = U_0 a.$$

Подставляя значения постоянных в найденное решение, имеем

$$U = U_0 \frac{a}{r}. \tag{2.20}$$

Соответственно, напряженность поля

$$\left.\begin{aligned} \overline{E} &= -\operatorname{grad} U = -\overline{i}_r \frac{dU}{dr}; \\ E &= \frac{U_0}{r^2} a. \end{aligned}\right\} \tag{2.21}$$

Этот результат, естественно, совпадает с результатом расчета, полученным при помощи равенства Гаусса — Остроградского (§ 6, гл. I).

Действительно, на основании соотношения (1.46) получим

$$\sigma = E\varepsilon|_{r=a} = \frac{U_0\varepsilon}{a}.$$

Следовательно, весь заряд, находящийся на поверхности сферы, равен

$$q = 4\pi a^2\sigma = \frac{U_0\,\varepsilon}{a}\,4\pi a^2 = 4\pi\,\varepsilon a U_0,$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2} = \frac{U_0}{r^2}\,a.$$

Для емкости сферы отсюда имеем

$$C = \frac{q}{U_0} = 4\pi\varepsilon a. \tag{2.22}$$

Поле двух концентрических сфер

Пусть две концентрические проводящие сферы, имеющие радиусы a и b (рис. 2.5), заряжены соответственно до потенциалов U_a и $U_b = 0$. Пространство между сферами заполнено однородной средой с диэлектрической проницаемостью ε.

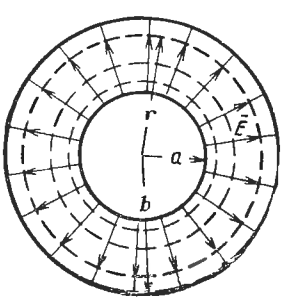


Рис. 2.5. Поле сферического конденсатора.

Для всех точек этой среды справедливо уравнение Лапласа, справедливо и его решение, найденное в предыдущем примере:

$$U = \frac{C_1}{r} + C_2.$$

Отличие от предыдущего заключается лишь в значениях произвольных постоянных, которые надо выбрать в соответствии с граничными условиями данной задачи.

Так как при $r = a$ потенциал $U = U_a$ и при $r = b$ $U = U_b = 0$, то $C_1/a + C_2 = U_a$ и $C_1/b + C_2 = 0$, откуда

$$C_1 = \frac{ab}{b-a}U_a, \qquad C_2 = -a\,\frac{U_a}{b-a}.$$

Подставляя найденные значения постоянных, получим

$$U = \frac{U_a}{r}\,\frac{ab}{b-a} - \frac{aU_a}{b-a}. \tag{2.23}$$

Напряженность поля

$$\vec{E} = -\vec{i}_r \frac{dU}{dr}; \qquad E = \frac{U_a}{r^2} \frac{ab}{b-a}. \tag{2.24}$$

Поверхностные плотности зарядов на внутренней и внешней сферах равны:

$$\sigma_a = \varepsilon E|_{r=a} = \frac{\varepsilon U_a}{a} \frac{b}{b-a},$$

$$\sigma_b = -\varepsilon E|_{r=b} = -\frac{\varepsilon U_a}{b} \frac{a}{b-a}.$$

Полные заряды q_a и q_b на внутренней и внешней сферах равны по величине

$$|q_a| = |q_b| = |\sigma_a| 4\pi a^2 = |\sigma_b| 4\pi b^2 = 4\pi\varepsilon \left| U_a \frac{ab}{b-a} \right|.$$

Отсюда для емкости сферического конденсатора находим

$$C = \frac{q_a}{U_a} = 4\pi\varepsilon \frac{ab}{b-a}. \tag{2.25}$$

Поле заряженного круглого цилиндра

Предположим, что круглый проводящий цилиндр бесконечной длины и радиуса a находится в однородной диэлектрической среде и заряжен до потенциала U_0. В этой задаче удобно пользоваться уравнением Лапласа, составленным в цилиндрической системе координат [см. (2.13)]. По условиям задачи потенциал не зависит ни от φ, ни от z. Сохраняя в (2.13) только производные по ρ, получим

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dU}{d\rho} \right) = 0,$$

откуда

$$\rho \frac{dU}{d\rho} = C_1,$$

$$U = C_1 \ln \rho + C_2.$$

Для определения двух произвольных постоянных достаточно было бы наложить граничные условия на поверхности цилиндра и в бесконечности. Однако, как легко видеть из полученного выражения, в рассматриваемом частном примере бесконечно длинного цилиндра невозможно определить произвольную постоянную C_2, ибо при условии $U|_{\rho\to\infty} = 0$ она обращается в бесконечность.

Напряженность поля

$$\overline{E} = -\bar{i}_\rho \frac{dU}{d\rho} = \bar{i}_\rho \frac{C_1}{\rho},$$

у поверхности цилиндра

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon}.$$

Поэтому

$$\sigma = \varepsilon E|_{\rho=a} = \frac{C_1}{a}\,\varepsilon,$$

откуда $C_1 = \frac{a\sigma}{\varepsilon}$. Вводя погонную плотность заряда $\tau = 2\pi\sigma a$, получим

$$C_1 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}.$$

Таким образом,

$$U = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln\rho + C_2. \qquad (2.26)$$

Поле двух коаксиальных цилиндров

Пусть имеются два бесконечно длинных коаксиальных цилиндра с радиусами a и b (рис. 2.6), заряженных соответственно до потенциалов U_a и $U_b = 0$. В этом случае остается в силе решение уравнения Лапласа, полученное в предыдущем примере. Необходимо лишь заново определить произвольные постоянные в соответствии с новыми граничными условиями, а именно: $C_1 \ln a + C_2 = U_a$, $C_1 \ln b + C_2 = 0$, откуда

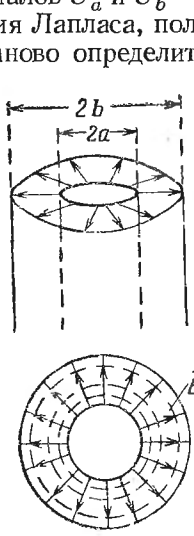


Рис. 2.6. Поле коаксиальной линии.

$$C_1 = \frac{U_a}{\ln\frac{a}{b}},$$

$$C_2 = -C_1 \ln b = -\frac{U_a \ln b}{\ln\frac{a}{b}}.$$

Напряженность поля

$$\overline{E} = -\operatorname{grad} U = -\bar{i}_\rho \frac{C_1}{\rho} = -\bar{i}_\rho \frac{U_a}{\ln\frac{a}{b}} \frac{1}{\rho} =$$

$$= \bar{i}_\rho \frac{U_a}{\ln\frac{b}{a}} \frac{1}{\rho}. \qquad (2.27)$$

Вектор $\bar{E}$, стало быть, направлен по радиусу, если $U_a > 0$.

Значения поверхностных плотностей электричества в точках $\rho = a$ и $\rho = b$ равны:

$$\sigma_a = \varepsilon \frac{U_a}{\ln \frac{b}{a}} \frac{1}{a}, \qquad \sigma_b = -\varepsilon \frac{U_a}{\ln \frac{b}{a}} \frac{1}{b}.$$

Заряды, приходящиеся на единицу длины цилиндра,

$$\tau_a = \sigma_a 2\pi a = 2\pi\varepsilon \frac{U_a}{\ln \frac{b}{a}},$$

$$\tau_b = \sigma_b 2\pi b = -2\pi\varepsilon \frac{U_b}{\ln \frac{b}{a}}.$$

Соответственно для погонной емкости двух коаксиальных цилиндров получим

$$C = \frac{\tau_a}{U_a} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln \frac{b}{a}}. \tag{2.28}$$

Поле двух параллельных цилиндров с несовпадающими осями

В данном примере мы ограничимся рассмотрением бесконечно тонких (линейных) проводов, имеющих конечные погонные плотности электричества, а именно τ и $-\tau$.

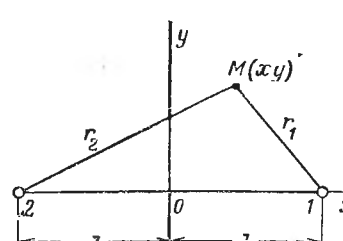


Рис. 2.7. К расчету поля двух параллельных бесконечно тонких проводов.

В этом случае потенциал в любой точке пространства найдется наложением потенциалов от первого и второго проводов с учетом их знаков. Согласно рис. 2.7 и выражению для потенциала одиночного провода имеем

$$U = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln r_1 - \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln r_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_1}{r_2}. \tag{2.29}$$

Из полученного соотношения следует, что все точки, лежащие на кривой $\frac{r_1}{r_2} = \text{const}$, имеют один и тот же потенциал.

Однако известно, что геометрическим местом точек с постоянным отношением расстояний до двух фиксированных точек является окружность. Таким образом, эквипотенциальные кривые в плоскости чертежа суть окружности. Силовые линии поля должны быть перпендикулярны к эквипотенциальным линиям и, стало быть, также представляют собой семейство окружностей.

Найдем уравнение эквипотенциальной окружности, соответствующей некоторому постоянному значению:

$$\frac{r_1}{r_2} = k.$$

Обозначая расстояние между проводами через $2l$ и выбирая систему координат, как показано на рис. 2.7, получим

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\sqrt{(x-l)^2+y^2}}{\sqrt{(x+l)^2+y^2}} = k.$$

Возведя в квадрат обе части последнего равенства и производя элементарные преобразования, будем иметь

$$x^2+y^2-2l\frac{1+k^2}{1-k^2}x = -l^2.$$

Прибавляя к левой и правой частям $\left(l(1+k^2)/(1-k^2)\right)^2$, получим

$$\left(x-\frac{1+k^2}{1-k^2}l\right)^2+y^2 = \left(\frac{2kl}{1-k^2}\right)^2.$$

Это и есть уравнение окружности с центром в точке

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{1+k^2}{1-k^2}l \quad \text{и} \quad y_0 = 0 \\ r_0 &= \frac{2k}{1-k^2}l. \end{aligned}\right\} \tag{2.30}$$

и радиусом

Все точки найденной окружности имеют значение потенциала, равное

$$U = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_1}{r_2} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln k.$$

4. Поле двух параллельных цилиндрических проводов конечного радиуса с несовпадающими осями

Непосредственное применение уравнения Лапласа для расчета поля двух параллельных цилиндров с несовпадающими осями и с заданными потенциалами вызывает некоторые затруднения, так как здесь требуется ввести специальную систему координат, в которой поверхности обоих цилиндров совпадали бы с координатными поверхностями *).

Легко понять также, что в данном случае нельзя рассчитать поле как результат суперпозиции полей двух одиночных цилиндров, найденных в предыдущем параграфе (поле заряженного круглого цилиндра), так как там предполагалось равномерное распределение зарядов по поверхности цилиндра, что в данном случае не имеет места. Благодаря взаимному притяжению зарядов разных знаков, заряды будут иметь наибольшую плотность на обращенных друг к другу участках проводников.

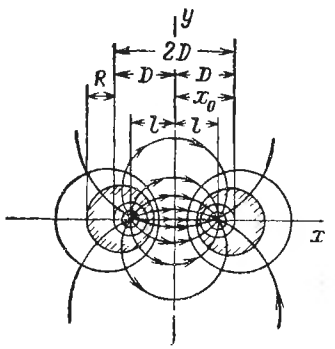


Рис. 2.8. Поле двух параллельных цилиндров конечного радиуса.

Мы можем, однако, использовать результаты, полученные в предыдущем параграфе для поля двух бесконечно тонких проводов. Действительно, было показано, что эти провода создают поля, эквипотенциальными поверхностями которых являются цилиндрические поверхности. Если выбрать положение этих бесконечно тонких проводов так, чтобы две эквипотенциальные поверхности созданного ими поля совпали с поверхностями проводов конечного радиуса (рис. 2.8) и имели бы потенциалы, равные заданным значениям потенциалов проводов, то в силу теоремы единственности можно утверждать, что найденное поле совпадает с полем, созданным заряженными цилиндрами конечного радиуса. Действительно, это поле удовлетворяет всем требованиям, а именно уравнению Лапласа и граничным условиям.

Таким образом, задача свелась к нахождению положения линейных проводов, эквивалентных проводам конечного радиуса. Эти линейные провода мы будем в дальнейшем именовать «осями влияния».

Для координат центра и радиуса эквипотенциальной цилиндрической поверхности в случае двух заряженных осей (2.30) мы имеем

$$x_0 = \frac{1+k^2}{1-k^2}\,l \quad \text{и} \quad r_0 = \frac{2k}{1-k^2}\,l,$$

где l — координата оси влияния.

Обозначая координаты осей проводов в нашей задаче (рис. 2.8) через $\pm D$, радиус проводов через R, получим:

$$D = \frac{1+k^2}{1-k^2}\,l \quad \text{и} \quad R = \frac{2k}{1-k^2}\,l,$$

откуда находим l:

$$l = \sqrt{D^2 - R^2}\,. \tag{2.31}$$

На рис. 2.8 показаны положение осей влияния и картина силовых линий.

*) Очевидно, что в случае применения цилиндрической системы координат можно совместить с координатной поверхностью $\rho = \text{const}$ лишь одну из цилиндрических поверхностей рис. 2.8.

В случае, если провода имеют различные радиусы R_1 и R_2 (рис. 2.6), они будут расположены несимметрично относительно оси y (ось нулевого потенциала). Обозначая расстояния от оси y до осей проводов через D_1 и D_2, получим на основании (2.30):

$$l = \sqrt{D_1^2 - R_1^2}, \quad l = \sqrt{D_2^2 - R_2^2} \quad \text{или} \quad D_2^2 - D_1^2 = R_2^2 - R_1^2.$$

Но

$$D_2 + D_1 = D,$$

где D — расстояние между центрами проводов. Значит,

$$D_2 - D_1 = \frac{R_2^2 - R_1^2}{D},$$

откуда

$$D_2 = \frac{D^2 + R_2^2 - R_1^2}{2D}, \qquad D_1 = \frac{D^2 + R_1^2 - R_2^2}{2D}.$$

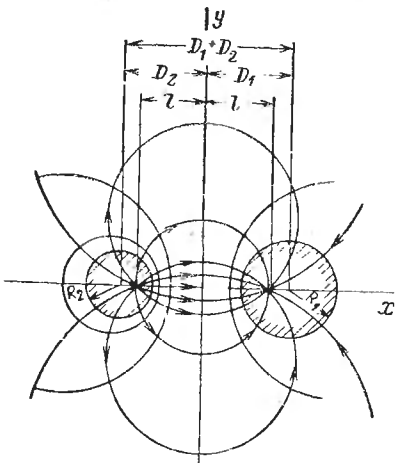


Рис. 2.9. Поле двух параллельных проводов неодинаковых радиусов.

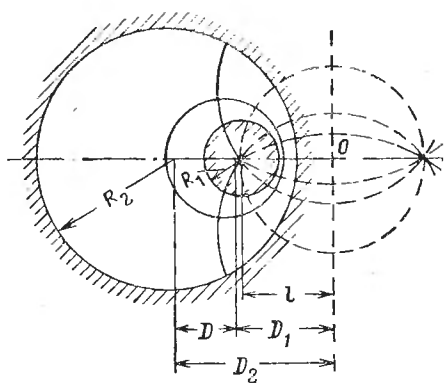


Рис. 2.10. Поле двухпроводного эксцентрического кабеля.

Если один провод находится внутри другого (рис. 2. 10), то

$$D = D_2 - D_1.$$

В этом случае соответственно имеем

$$D_2 = \frac{D^2 + R_2^2 - R_1^2}{2D}; \qquad D_1 = \frac{D^2 + R_1^2 - R_2^2}{2D}.$$

Таким образом, задача о поле проводов конечного радиуса сводится к задаче о поле двух линейных проводов.

5. Решение уравнения Лапласа для трехмерного электрического поля

В примерах расчета поля, рассмотренных в предыдущих параграфах, задача прямо или косвенно сводилась к решению уравнения Лапласа для потенциала, зависящего только от одной переменной. Рассмотрим теперь вопрос о решении уравнения Лапласа в общем случае, когда потенциал является функцией нескольких переменных.

Практически никогда не удается сразу найти такую функцию, которая удовлетворила бы как уравнению Лапласа, так и граничным условиям. Поэтому пользуются принципом композиции решения, суть которого заключается в следующем. Уравнение Лапласа, как и всякое уравнение в частных производных, имеет множество решений. Другими словами, существует обширный класс функций, удовлетворяющий этому уравнению. Все эти решения являются частными решениями уравнения Лапласа. Обычно эти частные решения являются функциями одного или нескольких параметров, В некоторых особо благоприятных случаях может оказаться возможным, выбрав эти параметры, построить частное решение, которое удовлетворяет граничным условиям. В таких случаях на основании теоремы о единственности решения уравнения Лапласа можно утверждать, что это решение истинное. Однако в большинстве случаев простым выбором параметров частного решения не удается удовлетворить всем граничным условиям. Тогда остается путь композиции решения, т. е. составления общего решения как суммы частных решений.

Так как уравнение Лапласа является линейным дифференциальным уравнением, то сумма частных решений будет также решением этого уравнения. Поэтому, если удастся подобрать частные решения так, чтобы их сумма в целом удовлетворяла всем граничным условиям задачи (хотя каждое частное решение в отдельности этим условиям может не удовлетворять) и если эта сумма выражается конечным числом членов или сходящимся бесконечным рядом, то тем самым задача считается решенной.

Рассмотренный метод имеет свое начало в работах русского математика Даниила Бернулли. Впоследствии он был детально разработан Фурье и носит имя последнего.

Согласно этому методу решение уравнения Лапласа записывается в такой системе координат (ξ, η, ζ), чтобы граничные поверхности совпадали с координатными поверхностями.

Частное решение этого уравнения

$$U_p = F_i(\xi, \eta, \zeta),$$

являющееся функцией трех переменных, пытаются найти в виде произведения трех функций, каждая из которых является функцией только одной переменной.

Другими словами, ищут $F_i(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ в виде

$$U_p = F_i(\xi,\ \eta,\ \zeta) = \Xi(\xi)\, H(\eta)\, Z(\zeta),$$

где $\Xi(\xi)$ — функция переменной ξ; $H(\eta)$ — функция переменной η; $Z(\zeta)$ — функция переменной ζ.

Для каждой из этих функций получаются обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка, решение которых зависит обычно от некоторого параметра K и, кроме того, содержит произвольные постоянные C.

Таким образом, получается частное решение в виде

$$U_p = \Xi(\xi,\ K_\xi,\ C_\xi)\, H(\eta,\ K_\eta,\ C_\eta) \cdot Z(\zeta,\ K_\zeta,\ C_\zeta),$$

где параметры K и постоянные C можно варьировать с целью удовлетворить граничным условиям задачи.

Как уже указывалось выше, обычно это не удается и приходится составлять более сложное решение, представляющее сумму частных решений данного вида. В дальнейших параграфах этот метод поясняется на отдельных примерах.

6. Решение уравнения Лапласа в прямоугольной системе координат

Уравнение Лапласа в прямоугольных координатах (x, y, z) имеет вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Ищем частное решение этого уравнения $U_p(x,\ y,\ z)$ в виде произведения трех функций

$$U_p(x,\ y,\ z) = X(x)\, Y(y)\, Z(z). \tag{2.32}$$

Подставляя (2.32) в исходное уравнение, получим

$$\frac{d^2X}{dx^2} YZ + \frac{d^2Y}{dy^2} XZ + \frac{d^2Z}{dz^2} XY = 0, \tag{2.33}$$

или, разделив это равенство на XYZ,

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = 0. \tag{2.34}$$

Левая часть уравнения (2.34) может обращаться в нуль в том и только в том случае, если каждое из слагаемых в отдельности есть величина постоянная.

Действительно, равенство (2.34) имеет вид

$$F_1(x) + F_2(y) + F_3(z) = 0,$$

откуда, дифференцируя, например по x, получим

$$F_1'(x) = 0$$

или

$$F_1(x) = \text{const}.$$

Таким образом, уравнение (2.34) распадается на три обыкновенных дифференциальных уравнения вида:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -k_x^2, \qquad \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -k_y^2, \qquad \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -k_z^2, \tag{2.35}$$

где $-k_x^2$, $-k_y^2$, $-k_z^2$ — постоянные величины, связанные между собой очевидным равенством*)

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0. \tag{2.36}$$

Уравнения (2.35) могут быть переписаны следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2X}{dx^2} + k_x^2 X = 0, \\ \frac{d^2X}{dy^2} + k_y^2 Y = 0, \\ \frac{d^2Z}{dz^2} + k_z^2 Z = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.37}$$

Все они являются хорошо известными обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка, решение которых может быть записано в виде:

$$\left.\begin{aligned} X = A_1 \cos k_x x + A_2 \sin k_x x, \\ Y = B_1 \cos k_y y + B_2 \sin k_y y, \\ Z = C_1 \cos k_z z + C_2 \sin k_z z. \end{aligned}\right\} \tag{2.38}$$

Заметим, что в силу равенства (2.36), если k_x^2, k_y^2 и k_z^2 — вещественные числа, то хотя бы одно из них должно быть отрицательным. Предположим, например, что $k_x^2 > 0$ и $k_y^2 > 0$, тогда $k_z^2 < 0$ и, стало быть, k_z — мнимое число.

В этом случае решение для Z удобно представить не как тригонометрическую функцию мнимого аргумента k_z, а как гиперболическую функцию соответствующего вещественного аргумента.

Введя

$$k_z = \sqrt{-k_x^2 - k_y^2} = i\sqrt{k_x^2 + k_y^2} = ik,$$

---

*) Знак минус введен для получения решения в виде тригонометрической функции и принципиального значения не имеет.

получим

$$Z = C_1 \cos(ikz) + C_2 \sin(ikz) = C_1 \operatorname{ch} kz + C_2' \operatorname{sh} kz,$$

где $C_2' = iC_2$.

Таким образом, частные решения будут представляться в виде произведения тригонометрических и гиперболических синусов и косинусов.

При составлении частного решения мы можем выбрать постоянные интегрирования и два из параметров k_x, k_y, k_z так, чтобы удовлетворить, хотя бы частично, граничным условиям задачи.

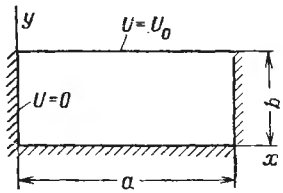


Рис. 2.11. Прямоугольный бесконечный желоб.

Рассмотрим пример. Пусть требуется найти поле бесконечно протяженного вдоль оси z заземленного желоба (рис. 2.11), крышка которого изолирована от корпуса и имеет потенциал $U = U_0$.

В соответствии с задачей потенциал не зависит от z, поэтому в решении (2.38) функция Z должна быть постоянной. Для этого, очевидно, необходимо, чтобы

$$k_z = 0.$$

Тогда частное решение для $U_p(x, y)$ примет вид

$$U_p(x, y) = [A_1 \cos k_x x + A_2 \sin k_x x] \cdot [B_1 \cos k_y y + B_2 \sin k_y y],$$

где согласно (2.36)

$$k_x^2 + k_y^2 = 0. \tag{2.39}$$

Граничные условия для функции U следующие:

$$\begin{aligned} &1)\ x = 0, \quad U = 0, \\ &2)\ x = a, \quad U = 0, \\ &3)\ y = 0, \quad U = 0, \\ &4)\ y = b, \quad U = U_0. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Чтобы удовлетворить первому и третьему из этих условий, достаточно положить

$$A_1 = B_1 = 0,$$

после чего частное решение примет вид

$$U_p(x, y) = A_p \sin k_x x \sin k_y y. \tag{2.41}$$

Нам осталось удовлетворить второму и четвертому граничным условиям (2.40).

Очевидно, второе условие (2.40) будет удовлетворено, если $\sin k_x a = 0$, откуда $k_x a = p\pi$, где p — произвольное целое число.

Таким образом, мы можем придавать k_x различные, но не любые значения, а именно, k_x должно быть кратно $\frac{\pi}{a}$:

$$k_x = p\frac{\pi}{a}.$$

В силу (2.36) выбор k_x однозначно определяет k_y:

$$k_y = \sqrt{-k_x^2} = ip\frac{\pi}{a}.$$

В результате частное решение принимает вид

$$U_p(x, y) = A_p \sin p\frac{\pi x}{a} \operatorname{sh} p\frac{\pi y}{a}. \qquad (2.42)$$

В решении (2.42), которое удовлетворяет первому, второму и третьему граничным условиям (2.40), возможен произвольный выбор целого числа p. Однако легко видеть, что каким бы это целое число ни выбрать, нам не удастся удовлетворить четвертому граничному условию.

Действительно, это условие требует, чтобы при $y = b$ для всех x, лежащих в интервале от 0 до a, за исключением $x = 0$ и $x = a$, потенциал оставался постоянным, равным U_0, тогда как решение (2.42) для $y = b$ дает:

$$U_p|_{y=b} = A_p \operatorname{sh} p\frac{\pi}{a} b \sin p\frac{\pi}{a} x = \\ = \text{const} \sin p\frac{\pi}{a} x. \qquad (2.43)$$

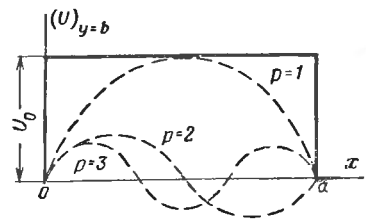


Рис. 2.12. К расчету поля прямоугольного желоба.

На рис. 2.12 показаны необходимый закон изменения потенциала (сплошная линия прямоугольной формы) и то распределение потенциала, которое дается частным решением при различных значениях p (пунктирные кривые). Однако из рис. 2.12 видно, что можно взять сумму частных решений с различными p и A_p так, чтобы эта сумма на интервале $0 < x < a$ при $y = b$ давала требуемый закон постоянства потенциала. Для этого достаточно заданную функцию $U|_{y=b} = U_0$ разложить в ряд Фурье и, приравняв отдельные слагаемые ее правой части выражению (2.43), определить значение соответствующих «амплитуд» A_p и «частот» p.

Прямоугольного вида кривая (рис. 2.12) при разложении в ряд Фурье дает:

$$U|_{y=b} = \frac{4U_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin\left[\frac{(2k-1)\pi x}{a}\right]. \qquad (2.44)$$

Отсюда вытекает, что для выполнения граничных условий на крышке желоба в равенстве (2.43) необходимо взять только нечетные значения p:

$$p = 2k-1,$$

а амплитуды A_p выбрать таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$A_p \operatorname{sh} p \frac{\pi}{a} b = 4 \frac{U_0}{\pi p}$$

или

$$A_p = \frac{4U_0}{\pi p \operatorname{sh} p \dfrac{\pi}{a} b}.$$

Подставляя найденное значение A_p в частное решение (2.42) и взяв сумму по всем нечетным p, получим в качестве решения нашей задачи функцию

$$U = \frac{4U_0}{\pi} \sum_{p} \frac{1}{p \operatorname{sh} p \dfrac{\pi}{a} b} \sin p \frac{\pi x}{a} \operatorname{sh} p \frac{\pi y}{a}, \qquad (2.45)$$

где $p = 2k - 1$, и суммирование ведется по всем целым значениям k. В ряде случаев для приближенного расчета может оказаться достаточным вычислить всего два-три члена этой суммы.

7. Решение уравнения Лапласа в цилиндрической системе координат

В цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) уравнение Лапласа записывается в следующем виде:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Ищем частное решение этого уравнения $U_p(\rho, \varphi, z)$ в виде произведения трех функций

$$U_p(\rho, \varphi, z) = R(\rho)\, \Phi(\varphi)\, Z(z). \qquad (2.46)$$

Подставляя (2.46) в исходное уравнение, получим

$$\Phi Z \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dR}{d\rho}\right)+\frac{RZ}{\rho^2}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+R\Phi\frac{d^2Z}{dz^2}=0$$

или, разделив на $R\Phi Z$:

$$\frac{1}{\rho R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dR}{d\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=0. \tag{2.47}$$

Это равенство может удовлетворяться лишь в том случае, когда величина $\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}$ не зависит от φ, а $\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}$ не зависит от z. В самом деле, если, например, последнее слагаемое в (2.47) зависит от z, то левая часть равенства не может обращаться в нуль для всех значений z, ибо остальные слагаемые при разных z остаются постоянными. Аналогичные рассуждения убеждают нас, что второе слагаемое в (2.47) не зависит от φ.

Таким образом, мы можем написать, что

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}&=+k^2,\\ \frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}&=-m^2,\end{aligned}\right\} \tag{2.48}$$

где k и m — произвольные постоянные числа.

Подставляя (2.48) в уравнение (2.47), получим дифференциальное уравнение для функции R:

$$\frac{1}{\rho R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dR}{d\rho}\right)-\frac{m^2}{\rho^2}+k^2=0. \tag{2.49}$$

Уравнения (2.48) для Z и Φ суть обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка. Перепишем их в виде:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2Z}{dz^2}-k^2Z&=0,\\ \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+m^2\Phi&=0.\end{aligned}\right\} \tag{2.50}$$

Решение этих уравнений*) можно представить так:

$$Z=B_1\operatorname{ch}kz+B_2\operatorname{sh}kz, \tag{2.51}$$

$$\Phi=A_1\cos m\varphi+A_2\sin m\varphi. \tag{2.52}$$

*) Мы получили решение для Z в виде суммы гиперболических, а не тригонометрических функций, потому что ввели знак плюс в правую часть уравнения (2.48).

Рассмотрим теперь уравнение (2.49) для функции R.

Умножая все члены уравнения на R и выполняя дифференцирование, получим:

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}+\left(k^2-\frac{m^2}{\rho^2}\right)R=0. \tag{2.53}$$

Уравнение (2.53) является дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами. Решение этого уравнения не выражается через известные элементарные функции, а приводит к специальным функциям — функциям Бесселя m-го порядка. Смысл последнего названия заключается в том, что для различных значений m решением уравнения будут являться различные функции, т. е. разные значения m определяют собой разные дифференциальные уравнения и, следовательно, различные по характеру решения. Что касается величины k, то, как легко видеть, эта величина при заданном значении m не меняет характера уравнения.

Разделив все члены уравнения (2.53) на k^2 и введя новую независимую переменную $x=k\rho$, мы приведем (2.53) к виду:

$$\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dR}{dx}+\left(1-\frac{m^2}{x^2}\right)R=0. \tag{2.54}$$

Это уравнение называется уравнением Бесселя.

Постоянная m, входящая в уравнение (2.54) и определяющая закон изменения поля вдоль радиуса, входит также в решение (2.52), которое устанавливает зависимость потенциала поля от угла φ.

Из выражения (2.52) вытекает, что m может быть только целым числом. Действительно, если предположить, что m есть число дробное, то

$$\cos m(\varphi+2\pi)\neq\cos m\varphi,$$
$$\sin m(\varphi+2\pi)\neq\sin m\varphi.$$

В таком случае потенциал точки был бы многозначной функцией угла φ.

Заметим, наконец, что для случая, когда поле обладает осевой симметрией, т. е. не зависит от угла φ, следует положить

$$m=0,$$

и зависимость потенциала от радиуса будет определяться бесселевой функцией нулевого порядка.

8. Решение дифференциального уравнения Бесселя

Для любого фиксированного m уравнение Бесселя является дифференциальным уравнением второго порядка.*)

Как всякое линейное дифференциальное уравнение, содержащее в качестве наивысшей производной вторую производную, это уравнение имеет два независимых частных решения.

Первое частное решение уравнения Бесселя называют функцией Бесселя m-го порядка или цилиндрической функцией первого рода. Эта функция обозначается $J_m(x)$.

Второе частное решение называют цилиндрической функцией m-го порядка второго рода или функцией Неймана. Ее обозначают $N_m(x)$. Общее решение уравнения Бесселя (2.54) имеет вид

$$R=C_1J_m(x)+C_2N_m(x), \tag{2.55}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, определяемые из граничных условий.

---

*) «Порядок уравнения» определяется наивысшим порядком входящей в уравнение производной.

Функции Бесселя и Неймана имеют многочисленные применения в технике и в частности в радиотехнике. Эти функции табулированы и для них имеются соответствующие графики.

При решении ряда задач становится очевидной глубокая аналогия между функциями Бесселя и хорошо известными тригонометрическими функциями. Рассмотрим в виде примера уравнение Бесселя при $m = 0$ и сравним его с дифференциальным уравнением, решением которого являются известные тригонометрические функции.

Дифференциальное уравнение для тригонометрических функций

Интересующее нас дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$\frac{d^2R}{dx^2} + R = 0.$$

Уравнение Бесселя

Для $m = 0$ уравнение (2.54) имеет вид

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR}{dx} + R = 0.$$

Положим, что нам неизвестен вид функций, являющихся решением этих дифференциальных уравнений. Тогда мы можем попытаться искать решения в виде степенного ряда

$$R = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots \qquad (2.56)$$

Подставляя это выражение в дифференциальное уравнение и объединяя члены при одинаковых степенях x, получим:

$$R = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots$$

$$\frac{d^2R}{dx^2} = 1\cdot 2a_2 + 2\cdot 3a_3x + 3\cdot 4a_4x^2 + 4\cdot 5a_5x^3 + \ldots$$

$$\frac{d^2R}{dx^2} + R = (a_0 + 1\cdot 2a_2) + (a_1 + 2\cdot 3a_3)x + (a_2 + 3\cdot 4a_4)x^2 + (a_3 + 4\cdot 5a_5)x^3 + \ldots = 0.$$

$$R = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots$$

$$\frac{1}{x}\frac{dR}{dx} = \frac{a_1}{x} + 2a_2 + 3a_3x + 4a_4x^2 + \ldots$$

$$\frac{d^2R}{dx^2} = 2a_2 + 2\cdot 3a_3x + 3\cdot 4a_4x^2 + 4\cdot 5a_5x^3 + \ldots$$

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR}{dx} + R = \frac{a_1}{x} + (a_0 + 2^2a_2) + (a_1 + 3^2a_3)x + (a_2 + 4^2a_4)x^2 + \ldots = 0.$$

Эти равенства могут быть удовлетворены при любом x лишь в том случае, если обращаются в нуль коэффициенты при всех степенях x. Таким образом,

$$a_0 + 1\cdot 2a_2 = 0;$$
$$a_1 + 2\cdot 3a_3 = 0;$$
$$a_2 + 3\cdot 4a_4 = 0;$$
$$a_3 + 4\cdot 5a_5 = 0;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_0 + 2^2a_2 = 0;$$
$$a_1 = 0;$$
$$a_2 + 4^2a_4 = 0;$$
$$a_1 + 3^2a_3 = 0;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Полученные соотношения позволяют вычислить все коэффициенты при четных степенях x через a_0:

$$a_2 = -\frac{a_0}{2!},$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{3 \cdot 4} = \frac{a_0}{4!},$$

. . . . . .

Соответственно коэффициенты при нечетных степенях x определяются через a_1:

$$a_3 = -\frac{a_1}{3!},$$

$$a_5 = -\frac{a_3}{4 \cdot 5} = \frac{a_1}{5!},$$

. . . . . .

Подставляя найденные значения коэффициентов в (2.56), получим:

$$R = a_0\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right] + a_1\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right].$$

Выражения, стоящие в скобках, представляют собой функции, являющиеся частными решениями дифференциального уравнения. Рассматривая полученные выражения, мы видим, что эти ряды есть тригонометрические функции:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

Таким образом, общее решение будет:

$$R = a_0 \cos x + a_1 \sin x.$$

Полученные соотношения позволяют вычислить все коэффициенты при четных степенях x через a_0:

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2},$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4^2} = \frac{a_0}{2^2 \cdot 4^2},$$

. . . . . .

Все коэффициенты при нечетных степенях x обращаются в нуль:

$$a_1 = a_3 = \ldots = 0.$$

$$R = a_0\left[1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \ldots\right].$$

Выражение, стоящее в скобках, представляет собой функцию, являющуюся решением дифференциального уравнения Бесселя нулевого порядка. Полученный ряд называют функцией Бесселя нулевого порядка $J_0(x)$:

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \ldots$$

Функция Бесселя $J_0(x)$, таким образом, играет ту же роль в решении уравнения Бесселя, что и функция $\cos x$ в решении дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Попытка найти решение уравнения Бесселя нулевого порядка в виде степенного ряда, расположенного по целым степеням x, приводит лишь к одному частному решению $J_0(x)$.

Второе независимое частное решение следует искать другим способом. Однако мы этого делать не будем, и только отметим, что второе частное решение, или так называемая функция Неймана $N_0(x)$ при $x = 0$ обращается в бесконечность. Поэтому в ряде задач, где поле на оси ($x = 0$) должно оста-

ваться конечным, функция Неймана не удовлетворяет граничным условиям и, следовательно, должна исключаться из решения.

На рис. 2.13 и 2.14 показаны графики функций Бесселя и Неймана для различных целых значений m.

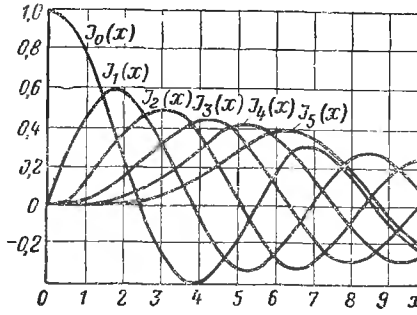


Рис. 2.13. Функции Бесселя для различных целых значений индекса «m».

Не останавливаясь на выводе, поскольку он аналогичен сделанному выше, приведем выражение для бесселевой функции целого порядка m в виде степенного ряда:

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}}{k!\,(k+m)!}, \qquad (2.57)$$

где факториал нуля принят равным единице.

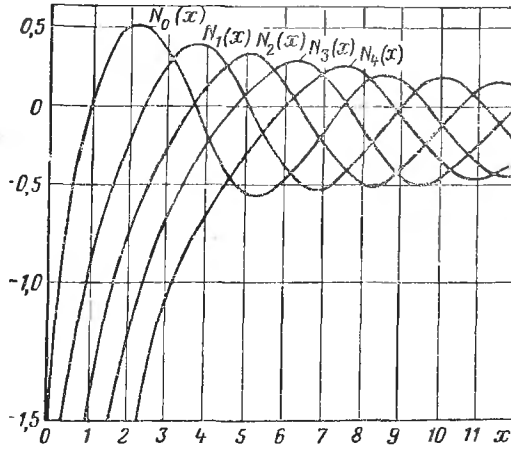


Рис. 2.14. Функции Неймана для различных целых значений индекса «m».

Выпишем равенство (2.57) в развернутом виде для $m = 0$:

$$J_0(x) = 1 - \frac{(x/2)^2}{(1!)^2} + \frac{(x/2)^4}{(2!)^2} - \frac{(x/2)^6}{(3!)^2} + \ldots,$$

для $m = 1$

$$J_1(x) = \frac{x/2}{0!\,1!} - \frac{(x/2)^3}{1!\,2!} + \frac{(x/2)^5}{2!\,3!} - \frac{(x/2)^7}{3!\,4!}$$

и для произвольного m

$$J_m(x) = \frac{(x/2)^m}{m!} - \frac{(x/2)^{2+m}}{1!\,(m+1)!} + \frac{(x/2)^{4+m}}{2!(m+2)!} - \ldots \qquad (2.58)$$

Функции Неймана любого нецелого порядка могут быть представлены через функции Бесселя так:

$$N_m(x) = \frac{J_m(x)\cos m\pi - J_{-m}(x)}{\sin m\pi}. \qquad (2.59)$$

Перечислим свойства функций Бесселя и Неймана, которые полезно помнить.

1. Функция Бесселя нулевого порядка равна единице, когда аргумент функции равен нулю:

$$J_0(0) = 1.$$

2. Функция Бесселя не нулевого, но целого порядка обращается в нуль, когда аргумент равен нулю:

$$J_m(0) = 0.$$

3. Функции Неймана всех порядков обращаются в минус бесконечность, когда аргумент равен нулю:

$$N_m(0) = -\infty.$$

4. Функции Бесселя четного порядка представляют собой четные функции аргумента, а функции Бесселя нечетного порядка — нечетные функции аргумента:

$$J_m(-x) = (-1)^m J_m(x).$$

Кроме того, полезными являются следующие приближенные формулы для функций Бесселя и Неймана, справедливые для малых и больших значений аргумента.

Для $x \ll 1$ (при $m \geqslant 1$)

$$\left.\begin{aligned} J_m(x) &= \frac{x^m}{2^m m!}, \\ N_m(x) &= \frac{-2^m (m-1)!}{\pi x^m}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.60)$$

Для $x \gg 1$

$$\left.\begin{aligned} J_m(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - m\frac{\pi}{2}\right), \\ N_m(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4} - m\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (2.61)$$

Мы видим, что для больших значений аргумента графики функций Бесселя и Неймана имеют вид затухающих синусоидальных функций с амплитудой, убывающей обратно пропорционально $\sqrt{x}$.

При применении бесселевых функций к решению конкретных задач нам часто будут необходимы значения корней этих функций, т. е. те значения x, которые обращают функцию в нуль. Мы будем обозначать эти корни символами ν_{mn}, где m — порядок функции Бесселя, а n — номер корня.

Как видно из графиков на рис. 2.13, 2.14, корни функций Бесселя в отличие от корней тригонометрических функций отстоят друг от друга на разных интервалах *).

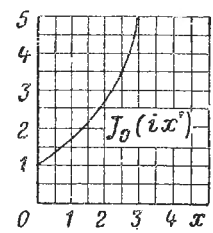


Рис. 2.15. График функции $J_0(ix')$.

Заметим, однако, что, как следует из асимптотических выражений (2.61), для больших значений аргумента эти корни отстоят друг от друга на равных интервалах, причем их значения в соответствии с (2.61) получаются из выражения

$$x-\frac{\pi}{4}-m\frac{\pi}{2}=(2n-1)\frac{\pi}{2},$$

откуда

$$x=\nu_{mn}=\left(\frac{m}{2}+n-\frac{1}{4}\right)\pi.$$

До сих пор мы предполагали, что аргумент бесселевой функции является вещественным числом. Однако в ряде задач x может оказаться числом мнимым или комплексным.

Пусть x является мнимым числом:

$$x=ix'.$$

Для функций Бесселя от мнимого аргумента принято следующее обозначение:

$$J_m(ix')=I_m(x').$$

Как видно из выражения (2.58), функция

$$J_0(ix')=I_0(x)$$

не имеет нулей. График этой функции показан на рис. 2.15.

В заключение приведем без доказательств некоторые формулы дифференцирования и интегрирования цилиндрических функций.

---

*) Значения нескольких корней функций Бесселя приводятся в табл. 4 гл. X.

В приводимых ниже формулах $Z_m(x)$ обозначает либо функцию Бесселя, либо функцию Неймана:

$$\left.\begin{aligned} &Z_0'(x) = -Z_1(x), \\ &Z_1'(x) = Z_0(x) - \frac{1}{x} Z_1(x), \\ &Z_m'(x) = \frac{1}{2}[Z_{m-1}(x) - Z_{m+1}(x)], \\ &\frac{d}{dx}[x^m Z_m(x)] = x^m Z_{m-1}(x), \\ &\frac{d}{dx}[x^{-m} Z_m(x)] = -x^{-m} Z_{m+1}(x); \end{aligned}\right\} \tag{2.62}$$

$$\left.\begin{aligned} &\int Z_1(x)\,dx = -Z_0(x), \\ &\int x^m Z_{m-1}(x)\,dx = x^m Z_m(x), \\ &\int x^{-m} Z_{m+1}(x)\,dx = -x^{-m} Z_m(x); \end{aligned}\right\} \tag{2.63}$$

$$\left.\begin{aligned} &\int x Z_m(\alpha x) Z_m(\beta x)\,dx = \frac{x}{\alpha^2 - \beta^2}[\beta Z_m(\alpha x) Z_{m-1}(\beta x) - \\ &\qquad - \alpha Z_{m-1}(\alpha x) Z_m(\beta x)], \quad (\alpha \neq \beta), \\ &\int x J_m^2(\alpha x)\,dx = \frac{x^2}{2}\left\{[J_m'(\alpha x)]^2 + \left(1 - \frac{m^2}{\alpha^2 x^2}\right) J_m^2(\alpha x)\right\} = \\ &\qquad = \frac{x^2}{2}\left[-J_{m+1}(\alpha x) J_{m-1}(\alpha x) + J_m^2(\alpha x)\right]; \end{aligned}\right\} \tag{2.64}$$

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty J_m(x)\,dx = 1, \\ &\int_0^\infty \frac{J_m(\alpha x)}{x}\,dx = \frac{1}{m}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}\right\} \tag{2.65}$$

9. Ортогональность бесселевых функций и ряды Фурье — Бесселя

При композиции решения уравнения Лапласа, удовлетворяющего граничным условиям, приходится разлагать значение функции на границе в ряд по другим функциям, полученным, как частные решения уравнения Лапласа. Так, например, в § 6 гл. II при решении задачи о распределении потенциала внутри прямоугольного желоба требовалось разложить функцию потенциала на границе в ряд Фурье по тригонометрическим функциям, через которые выражались частные решения. При решении уравнения Лапласа

в цилиндрической системе координат для получения решения, удовлетворяющего граничным условиям, может оказаться необходимым разложить заданную функцию в ряд по функциям Бесселя.

Разложение произвольной функции в ряд Фурье основано на свойстве ортогональности тригонометрических функций.

Условие ортогональности тригонометрических функций с периодом 2π записывается так:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin kx \sin px\,dx = \begin{cases} 0, & p \neq k, \\ 1, & p = k; \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos kx \cos px\,dx = \begin{cases} 0, & p \neq k, \\ 1, & p = k; \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \cos px\,dx = 0.$$

Заменой переменной $x = x' \frac{\pi}{l}$ можно написать условия ортогональности функций для произвольного периода $2l$:

$$\frac{1}{l}\int_0^{2l} \sin k \frac{\pi}{l} x' \sin p \frac{\pi}{l} x'\,dx' = \begin{cases} 0, & p \neq k, \\ 1, & p = k; \end{cases}$$

$$\frac{1}{l}\int_0^{2l} \cos k \frac{\pi}{l} x' \cos p \frac{\pi}{l} x'\,dx' = \begin{cases} 0, & p \neq k, \\ 1, & p = k, \end{cases}$$

$$\int_0^{2l} \sin k \frac{\pi}{l} x' \cos p \frac{\pi}{l} x'\,dx' = 0.$$

Аналогичным свойством ортогональности обладают бесселевы функции. Рассмотрение интегралов (2.64) показывает, что если положить α и β равными $\varkappa_{mp}/a$ и $\varkappa_{mk}/a$, где $\varkappa_{mp}$ и $\varkappa_{mk}$ — p-й и k-й корень функции Бесселя m-го порядка, то при

$$0 \leqslant x \leqslant a \quad \text{и} \quad \varkappa_{mp} \neq \varkappa_{mk}$$

первый из интегралов (2.64) дает

$$\int_0^a x J_m\left(\frac{\varkappa_{mp}}{a} x\right) J_m\left(\frac{\varkappa_{mk}}{a} x\right) dx = 0. \qquad (2.66)$$

Если $\varkappa_{mp} = \varkappa_{mk}$, то второй из интегралов (2.64), вычисляемый для тех же пределов, будет равен

$$\int_0^a x J_m^2\left(\frac{\varkappa_{mp}}{a}x\right) dx = \frac{a^2}{2}\left[J_m'(\varkappa_{mp})\right]^2. \tag{2.67}$$

Соотношения (2.66) и (2.67) подобны условиям ортогональности тригонометрических функций. Отличие заключается лишь в том, что под интеграл, кроме произведения функций, входит еще множителем x. Этот множитель принято называть весом. Таким образом, бесселевы функции ортогональны с весом x.

На основании доказанного свойства ортогональности бесселевых функций любую функцию, кусочно гладкую на интервале от нуля до a, можно представить в виде ряда бесселевых функций:

$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} A_p J_m\left(\varkappa_{mp}\frac{x}{a}\right). \tag{2.68}$$

Этот ряд носит название ряда Фурье — Бесселя.

Для того чтобы определить коэффициент разложения A_k с фиксированным значением $p = k$, умножим обе стороны равенства (2.68) на функцию $x J_m\left(\varkappa_{mk}\frac{x}{a}\right)$ и проинтегрируем в пределах от 0 до a:

$$\int_0^a xf(x) J_m\left(\varkappa_{mk}\frac{x}{a}\right) dx = \int_0^a x J_m\left(\varkappa_{mk}\frac{x}{a}\right) \sum_{p=1}^{\infty} A_p J_m\left(\varkappa_{mp}\frac{x}{a}\right) dx.$$

На основании (2.66) интегралы от всех слагаемых справа обратятся в нуль, за исключением одного слагаемого при $p = k$.

Используя (2.67), получим

$$\int_0^a xf(x) J_m\left(\varkappa_{mk}\frac{x}{a}\right) dx = \frac{a^2}{2} A_k \left[J_m'(\varkappa_{mk})\right]^2,$$

откуда

$$A_k = \frac{2}{a^2\left[J_m'(\varkappa_{mk})\right]^2}\int_0^a xf(x) J_m\left(\varkappa_{mk}\frac{x}{a}\right) dx. \tag{2.69}$$

10. Пример решения уравнения Лапласа в цилиндрической системе координат

В виде примера, иллюстрирующего применение результатов, полученных в предыдущих параграфах, рассмотрим следующую задачу.

Требуется найти распределение потенциала в круглом заземленном цилиндре (рис. 2.16), если верхняя крышка цилиндра изолирована и имеет потенциал $U = U_0$.

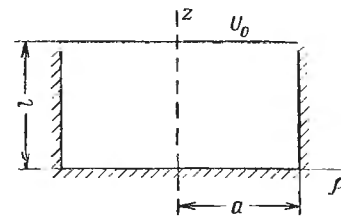


Рис. 2.16. Цилиндр круглого сечения.

Решая уравнение Лапласа в цилиндрической системе координат, мы приходим (см. § 7 гл. II) к следующим частным решениям для функций Z, Φ и R [формулы (2.51), (2.52) и (2.55)]:

$$Z = B_1 \operatorname{ch} kz + B_2 \operatorname{sh} kz,$$

$$\Phi = A_1 \cos m\varphi + A_2 \sin m\varphi,$$

$$R = C_1 J_m(x) + C_2 N_m(x),$$

где $x = k\rho$.

Вследствие симметрии задачи потенциал не зависит от угла φ, и индекс m следует положить равным нулю. Тогда для частного решения $U_p(\rho, \varphi, z) = R\Phi Z$ получим

$$U_p(\rho, z) = [B_1 \operatorname{ch} kz + B_2 \operatorname{sh} kz]\,[C_1 J_0(k\rho) + C_2 N_0(k\rho)]. \quad (2.70)$$

Так как потенциал должен иметь конечное значение во всех точках области и в том числе на оси ($\rho = 0$), а функция Неймана не остается конечной при нулевом значении аргумента, то полагаем $C_2 = 0$.

Кроме того, в соответствии с обозначениями, приведенными на рис. 2.16, мы имеем следующие граничные условия:

$$\left.\begin{aligned} U &= 0 \quad \text{при } z = 0, \\ U &= 0 \quad \text{при } \rho = a, \\ U &= U_0 \text{ при } z = l. \end{aligned}\right\} \quad (2.71)$$

Удовлетворяя первому граничному условию, приравняем B_1 нулю. Теперь решение (2.70) имеет вид

$$U_p(\rho, z) = C \operatorname{sh}(kz) J_0(k\rho).$$

Для того чтобы удовлетворить второму условию (2.71), необходимо, чтобы $J_0(ka)$ обращалось в нуль. Отсюда следует, что ka

должен быть равен одному из корней бесселевой функции нулевого порядка; обозначая

$$ka = \varkappa_{0p},$$

где $\varkappa_{0p}$ есть p-й корень функции $J_0(x)$, получим

$$U_p(\rho, z) = C_p \operatorname{sh}\left(\frac{\varkappa_{0p}}{a} z\right) J_0\left(\frac{\varkappa_{0p}}{a}\rho\right). \tag{2.72}$$

Частное решение (2.72), однако, как легко видеть, не удовлетворяет третьему граничному условию (2.71).

Действительно, согласно (2.72) при $z = l$ имеем:

$$U_p(\rho, l) = C_p \operatorname{sh}\left(\frac{\varkappa_{0p}}{a} l\right) J_0\left(\frac{\varkappa_{0p}}{a}\rho\right) = \text{const}\, J_0\left(\frac{\varkappa_{0p}}{a}\rho\right).$$

При $z = l$, т. е. вдоль крышки цилиндра, полученная функция потенциала не остается постоянной, а меняется по закону функции Бесселя.

На рис. 2.17 сплошной линией изображено необходимое распределение потенциала вдоль крышки цилиндра. Пунктирные линии показывают изменения потенциала, даваемые частными решениями (2.72) при различных корнях бесселевых функций.

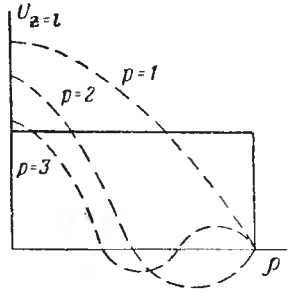


Рис. 2.17. Распределение потенциала вдоль радиуса цилиндра при $z = l$.

Аналогично примеру, рассмотренному в § 6 гл. II, можно построить нужное нам решение в виде суммы частных решений вида (2.72)

$$U(\rho, z) = \sum_{p=1}^{\infty} C_p \operatorname{sh}\left(\frac{\varkappa_{0p}}{a} z\right) J_0\left(\frac{\varkappa_{0p}}{a}\rho\right). \tag{2.73}$$

В этом решении коэффициенты C_p надо выбрать так, чтобы при $z = l$ выражение

$$U(\rho, z) = \sum_{p=1}^{\infty} C_p \operatorname{sh}\left(\frac{\varkappa_{0p}}{a} l\right) J_0\left(\frac{\varkappa_{0p}}{a}\rho\right)$$

совпало бы с разложением функции, изображенной на рис. 2.17 сплошной линией, в ряд Фурье — Бесселя (2.68), т. е.

$$C_p \operatorname{sh}\frac{\varkappa_{0p}}{a} l = A_p, \tag{2.74}$$

где A_p — коэффициент разложения, определяемый по формуле (2.69).

Подставляя в (2.69) вместо $f(\rho) = U_0$, получим:

$$A_p = \frac{2U_0}{a^2\left[J_1^2(\varkappa_{0p})\right]} \int_0^a x J_0\left(\varkappa_{0p}\frac{x}{a}\right) dx$$

или на основании второй формулы (2.63) (для $m = 1$)

$$A_p = \frac{2U_0}{a^2\left[J_1^2(\varkappa_{0p})\right]} \frac{a^2}{\varkappa_{0p}} J_1(\varkappa_{0p}) = \frac{2U_0}{\varkappa_{0p} J_1(\varkappa_{0p})},$$

после чего из (2.74) находим

$$C_p = \frac{2U_0}{\varkappa_{0p} J_1(\varkappa_{0p})} \frac{1}{\operatorname{sh}\left(\frac{\varkappa_{0p}}{a} l\right)}. \tag{2.75}$$

Подставляя найденное значение C_p в разложение (2.73), получаем полное решение в виде

$$U(\rho, z) = 2U_0 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\varkappa_{0p} J_1(\varkappa_{0p}) \operatorname{sh}\left(\frac{\varkappa_{0p}}{a} l\right)} \operatorname{sh}\left(\frac{\varkappa_{0p}}{a} z\right) J_0\left(\frac{\varkappa_{0p}}{a} \rho\right).$$

11. Решение уравнения Лапласа в сферической системе координат

Напишем уравнение Лапласа в сферической системе координат

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial U}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} = 0.$$

Будем искать его частное решение в виде

$$U = R(r) F(\theta, \varphi).$$

Поступая так же, как и при разделении переменных в случае (2.46)—(2.48), получим следующие два уравнения:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) = k^2 R, \tag{2.76}$$

$$\sin\theta \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{dF}{d\theta}\right) + \frac{d^2 F}{d\varphi^2} + k^2 F \sin^2\theta = 0. \tag{2.77}$$

Полагая теперь, что $F(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ и подставляя $\Theta\Phi$ в (2.77), получим:

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -m^2\Phi, \tag{2.78}$$

$$\sin\Theta \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta}\right) + (k^2\sin^2\Theta - m^2)\Theta = 0. \tag{2.79}$$

Уравнение (2.78) приводит к уже известному решению

$$\Phi = A_1 \cos m\varphi + A_2 \sin m\varphi.$$

В дальнейшем нас будет интересовать лишь случай поля, симметричного относительно оси, т. е. не зависящего от угла φ ($m = 0$).

Уравнение (2.79) для $m = 0$ будет:

$$\sin\theta \frac{d}{d\Theta}\left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta}\right) + k^2 \Theta \sin^2\theta = 0. \qquad (2.80)$$

Во многих физических задачах величина k^2 должна быть вещественным числом и может быть представлена как произведение $k^2 = n\ (n+1)$, где n — положительное целое число. Решение дифференциального уравнения (2.80) в этом случае имеет вид специальной функции, которую называют полиномом Лежандра порядка n и обозначают как

$$P_n(\cos\theta).$$

Полином Лежандра является лишь одним частным решением уравнения (2.80), однако этого решения оказывается достаточным для ряда задач, так как второе частное решение обращается в бесконечность при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$.

Мы рассмотрим вопрос о полиномах Лежандра в следующем параграфе, а сейчас займемся нахождением решения уравнения (2.76), которое перепишем в виде

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) - n(n+1) R = 0. \qquad (2.81)$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что этому уравнению удовлетворяют функции вида r^n и $r^{-(n+1)}$.

Таким образом, общее решение уравнения (2.81) будет:

$$R = C_1 r^n + C_2 r^{-(n+1)}. \qquad (2.82)$$

Первое слагаемое решения (2.82) обращается в бесконечность при $r \to \infty$. Второе слагаемое соответственно обращается в бесконечность при $r = 0$. Поэтому в зависимости от того, входит ли в исследуемую область поля начало координат ($r = 0$), или бесконечно удаленная точка ($r \to \infty$), необходимо будет соответственно положить C_2 или C_1 равным нулю.

Подводя итог всему изложенному, мы видим, что частное решение уравнения Лапласа в сферических координатах в случае поля, симметричного относительно оси (независимого от угла φ), может быть представлено в виде:

$$U(r, \theta) = [C_1 r^n + C_2 r^{-(n+1)}] P_n(\cos\theta). \qquad (2.83)$$

Для области, не включающей в себя бесконечно удаленную точку, если потенциал в начале координат не должен обращаться в бесконечность,

$$U(r, \theta) = C_1 r^n P_n(\cos\theta), \tag{2.84}$$

а для области, не включающей в себя начало координат, но имеющей точку $r \to \infty$,

$$U(r, \theta) = C_2 r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta). \tag{2.85}$$

12. Полиномы Лежандра

Найдем решение дифференциального уравнения (2.80):

$$\sin\theta \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta}\right) + n(n+1)\Theta\sin^2\theta = 0.$$

Введя обозначение $x = \cos\theta$ и учитывая, что

$$\frac{d\Theta}{d\theta} = \frac{d\Theta}{dx}\frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta\frac{d\Theta}{dx} = -\sqrt{1-x^2}\frac{d\Theta}{dx},$$

после подстановки в (2.80) получим

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x\frac{d\Theta}{dx} + n(n+1)\Theta = 0. \tag{2.86}$$

Уравнение (2.86) носит название дифференциального уравнения Лежандра.

В теории дифференциальных уравнений доказывается, что это уравнение имеет конечные и непрерывные решения в заданном интервале $0 \leqslant \Theta \leqslant \pi$ только в том случае, если n является положительным целым числом (включая нуль).

Подобно тому, как это делалось при нахождении решения уравнения Бесселя, ищем решение уравнения (2.86) в виде степенного ряда:

$$\Theta = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

или

$$\Theta = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \tag{2.87}$$

Подставляя (2.87) в уравнение (2.86) и собирая подобные члены, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \{(k+1)(k+2)a_{k+2} + (n-k)(n+k+1)a_k\} x^k = 0. \tag{2.88}$$

Это равенство тождественно обращается в нуль для любого значения x, если сумма коэффициентов при любой степени x равна нулю:

$$(k+1)(k+2)a_{k+2} + (n-k)(n+k+1)a_k = 0. \tag{2.89}$$

Соотношение (2.89) позволяет нам вычислить все коэффициенты суммы (2.87).

Положив в (2.89) k равным n, получим: $a_{n+2} = 0$. Положив в (2.89) $k = n+2$, получим $a_{n+4} = 0$.

Последовательно продолжая эту операцию, найдем, что

$$a_{n+2}=a_{n+4}=a_{n+6}=\ldots=0. \tag{2.90}$$

Возьмем теперь $k=n-2$, тогда из (2.89) получим:

$$\begin{aligned} a_{n-2}&=\frac{-n(n-1)}{2(2n-1)}\,a_n;\\ a_{n-4}&=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}\,a_n \quad \text{и т. д.} \end{aligned} \tag{2.91}$$

По формуле (2.91) мы определим для n четного все четные коэффициенты от a_{n-2} до a_0, а при n нечетном — все нечетные коэффициенты от a_{n-2} до a_1.

Заметим, наконец, что выбрав один из коэффициентов, а именно, коэффициент $a_{n+1}=0$, мы в силу соотношения (2.89) получим

$$a_{n+1}=a_{n+3}=a_{n+5}=\ldots=0. \tag{2.92}$$

Таким образом, из (2.90) и (2.92) следует, что можно построить решение уравнения Лежандра в виде степенного ряда, состоящего из конечного числа членов, или полинома порядка n.

Это частное решение на основании (2.91) имеет вид:

$$\Theta=a_n\left\{x^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\,x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}\,x^{n-4}+\ldots\right\}. \tag{2.93}$$

Оказывается удобным выбрать коэффициент a_n равным

$$a_n=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots n}.$$

Определенная таким образом функция носит название полинома Лежандра n-го порядка и обозначается $P_n(x)$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} P_n(x)=\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}&\left\{x^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\,x^{n-2}+\right.\\ &\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}\,x^{n-4}+\ldots\right\}. \end{aligned} \tag{2.94}$$

Можно показать, что выражение (2.94) может быть представлено в виде

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n. \tag{2.95}$$

Из (2.94) получаем значения полиномов Лежандра первых четырех порядков:

$$\left.\begin{aligned} P_0(x)&=1,\\ P_1(x)&=x,\\ P_2(x)&=\frac{1}{2}(3x^2-1),\\ P_3(x)&=\frac{1}{2}(5x^3-3x) \end{aligned}\right\} \tag{2.96}$$

или, возвращаясь к обозначению $x = \cos\theta$:

$$\left.\begin{aligned} P_0(\cos\theta) &= 1, \\ P_1(\cos\theta) &= \cos\theta, \\ P_2(\cos\theta) &= \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1), \\ P_3(\cos\theta) &= \frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta). \end{aligned}\right\} \qquad (2.97)$$

На рис. 2.18 показаны графики полиномов Лежандра разных порядков.

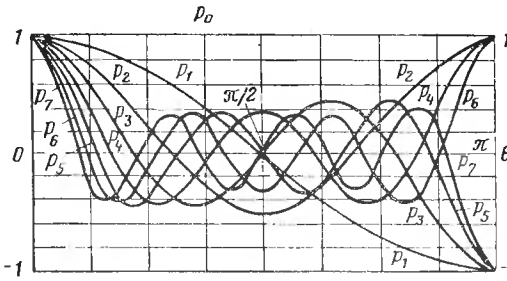


Рис. 2.18. Графики полиномов Лежандра разных порядков.

Из выражений (2.96) видим, что четные полиномы Лежандра являются четными функциями, а нечетные — нечетными функциями x.

Заметим, что для $x = 1$

$$P_n(1) = 1.$$

Из других полезных соотношений отметим:
для n нечетного

$$P_n(0) = 0,$$

для n четного

$$P_n(0) = (-1)^{n/2}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots n},$$

и для любого n

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x).$$

Можно доказать, что полиномы Лежандра ортогональны на интервале $[0, \pi]$ с весом $\sin\theta$. Это условие ортогональности записывается в виде:

$$\int_0^{\pi} P_n(\cos\theta)\, P_m(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta = 0 \quad (m \neq n),$$

$$\int_0^{\pi} P_n^2(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta = \frac{2}{2n+1} \quad (m = n).$$

На основании приведенного условия ортогональности произвольная кусочно-гладкая функция $f(\theta)$ в интервале от 0 до π может быть представлена в виде ряда:

$$f(\theta) = C_0 P_0(\cos\theta) + C_1 P_1(\cos\theta) + C_2 P_2(\cos\theta) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\cos\theta), \tag{2.98}$$

где C_n определяется следующей формулой:

$$C_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta. \tag{2.99}$$

В заключение приведем важное для ряда задач разложение величины, обратной расстоянию между двумя точками, в ряд по полиномам Лежандра.

Пусть две точки отстоят от начала координат на расстояниях a и b; причем $b > a$, и пусть угол между радиусами-векторами, проведенными из начала координат в точки a и b, равен θ.

Тогда

$$\frac{1}{R} = (a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)^{-1/2} = \frac{1}{b}\left(1 + \frac{a^2 - 2ab\cos\theta}{b^2}\right)^{-1/2}.$$

Если $b > a$, то это выражение можно разложить по формуле бинома в ряд

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{b}\left[1 - \frac{1}{2}\,\frac{a^2 - 2ab\cos\theta}{b^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\left(\frac{a^2 - 2ab\cos\theta}{b^2}\right)^2 + \ldots\right].$$

Группируя члены по возрастающим степеням $\frac{a}{b}$, получим

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{b}\left[1 + \frac{a}{b}\cos\theta + \left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{3\cos\theta - 1}{2} + \left(\frac{a}{b}\right)^3 \frac{5\cos^3\theta - 3\cos\theta}{2} + \ldots\right].$$

Коэффициенты при $(a/b)^n$ оказываются совпадающими в точности со значениями $P_n(\cos\theta)$ в (2.97).

Таким образом,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{b}\left[P_0(\cos\theta) + \left(\frac{a}{b}\right) P_1(\cos\theta) + \left(\frac{a}{b}\right)^2 P_2(\cos\theta) + \ldots\right]. \tag{2.100}$$

В случае если $a > b$,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{a}\left[P_0(\cos\theta) + \frac{b}{a} P_1(\cos\theta) + \left(\frac{b}{a}\right)^2 P_2(\cos\theta) + \ldots\right]. \tag{2.101}$$

13. Диэлектрический шар в однородном электрическом поле

В качестве примера использования результатов, полученных в предыдущих параграфах, рассмотрим задачу о диэлектрическом шаре, внесенном в однородное электрическое поле.

Выберем систему координат так (рис. 2.19), чтобы координатный угол φ отсчитывался в плоскости, перпендикулярной полю.

В этом случае потенциал не зависит от φ, и частное решение уравнения Лапласа в сферических координатах имеет вид (2.83)

$$U = [C_1 r^n + C_2 r^{-(n+1)}] P_n(\cos\theta).$$

Попытаемся удовлетворить нашей задаче при помощи одного частного решения (2.83) и соответствующего выбора числа n.

Предположим, что в точках, удаленных от сферы радиуса a, поле стремится к однородному параллельному полю. Поэтому, если принять, что в плоскости $\theta = \frac{\pi}{2}$ потенциал равен нулю, то при больших r функция U должна расти пропорционально z. Этому условию, как видно, удовлетворяет решение (2.83), если в нем положить $n = 1$. Тогда

$$U_1 = \left[C_1 r + \frac{C_2}{r^2}\right] \cos\theta; \quad r \geqslant a. \quad (2.102)$$

Действительно, при больших r выражение (2.102) стремится к выражению $C_1 r \cos\theta = C_1 z$.

Таким образом, решение (2.102) удовлетворяет заданным условиям на бесконечности.

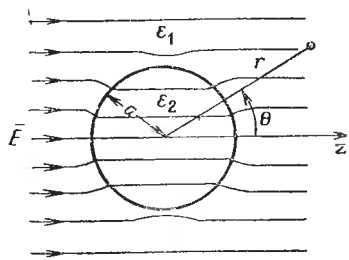


Рис. 2.19. Диэлектрический шар в однородном электрическом поле.

Для внутренней области (внутри сферы) потенциал должен оставаться конечным при $r = 0$. Поэтому для внутренней области решение следует написать в виде:

$$U_2 = C_3 r \cos\theta; \quad r \leqslant a. \quad (2.103)$$

Чтобы выражения (2.102) и (2.103) были действительно решениями задачи для внешней и внутренней областей, необходимо удовлетворить граничным условиям на поверхности сферы. Эти условия заключаются в непрерывности потенциала и нормальной составляющей вектора индукции при переходе через поверхность сферы:

$$U_1 = U_2|_{r=a} \quad \text{и} \quad \varepsilon_1 \frac{\partial U_1}{\partial r} = \varepsilon_2 \frac{\partial U_2}{\partial r}\bigg|_{r=a}.$$

Здесь ε_1 — диэлектрическая проницаемость среды во внешнем пространстве и ε_2 — диэлектрическая проницаемость шара.

Поэтому на основании (2.102) и (2.103) имеем:

$$C_1 a + \frac{C_2}{a^2} = C_3 a, \qquad C_1 - \frac{2C_2}{a^3} = C_3 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1},$$

откуда

$$C_2 = -a^3 C_1 \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\right), \qquad C_3 = \frac{3\varepsilon_1 C_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2}.$$

Подставляя найденные значения C_1, C_2 и C_3 в (2.102) и (2.103), получим:

$$U_1 = C_1\left[r - \frac{a^3}{r^2}\left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\right)\right]\cos\theta, \tag{2.104}$$

$$U_2 = \frac{3C_1\,\varepsilon_1\, r\cos\theta}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \tag{2.105}$$

На больших расстояниях от плоскости нулевого потенциала в однородном поле потенциал должен меняться как $-E_0 z = -E_0 r\cos\theta$, где E_0 — напряженность поля.

Отсюда $-C_1 = E_0$ есть напряженность внешнего поля.

Потенциал, создаваемый диэлектрическим шаром, равен $U_{\text{доп}} = U_1 + E_0 r\cos\theta$, или с учетом (2.104)

$$U_{\text{доп}} = E_0\,\frac{a^3}{r^2}\,\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\cos\theta. \tag{2.106}$$

Сравнивая последнее выражение с (1.38), нетрудно убедиться, что диэлектрический шар, помещенный в однородное поле, ведет себя как электрический диполь с моментом

$$d = 4\pi a^3\,\varepsilon_1\,\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\,E_0.$$

14. Поле двух заряженных полусфер

В качестве второго примера решения уравнения Лапласа в сферических координатах найдем распределение потенциала в поле, созданном двумя проводящими полусферами, разделенными узкой щелью (рис. 2.20) и заряженными соответственно до потенциалов U_0 и 0.

В этом случае потенциал в бесконечности должен равняться нулю, и в качестве частного решения уравнения Лапласа для внешнего пространства примем выражение (2.85):

$$U_{\text{внешн}} = \frac{C_2}{r^{n+1}}\,P_n(\cos\theta).$$

Для внутренней области (внутри сферы), содержащей начало координат, нам необходимо взять частное решение (2.84):

$$U_{\text{внутр}} = C_1 r^n P_n(\cos\theta).$$

Решения (2.84) и (2.85) удовлетворяют условиям конечности потенциала в бесконечности и в начале координат, но ни при каком значении n не могут удовлетворить условию постоянства потенциала на поверхности каждой полусферы.

На рис. 2.21 сплошной ломаной линией показан заданный закон изменения потенциала U/U_0 на поверхности сферы. Там же показаны нормированные распределения потенциала, представленные частными решениями вида (2.84) или (2.85) для разных значений n.

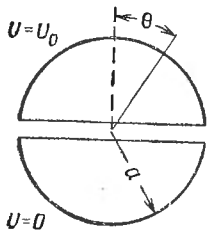


Рис. 2.20. Две проводящие полусферы, разделенные узкой щелью.

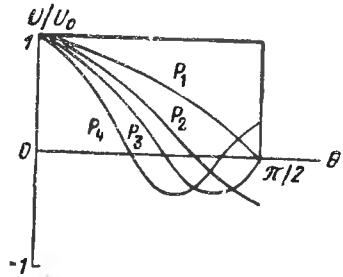


Рис. 2.21. Распределение потенциала на поверхности сферы.

Очевидно, как и в примерах, разобранных в § 6 и 10 гл. II, мы можем построить решение в виде:

$$U_{\text{внеш}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_2^{(n)}}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta), \tag{2.107}$$

$$U_{\text{внутр}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_1^{(n)} r^n P_n(\cos\theta). \tag{2.108}$$

Коэффициенты $C_1^{(n)}$ и $C_2^{(n)}$ надо выбрать так, чтобы при $r = a$ решения (2.107) и (2.108) совпали с разложением заданной функции потенциала в ряд по полиномам Лежандра:

$$U_{r=a} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\cos\theta),$$

т. е.

$$\frac{C_2^{(n)}}{a^{n+1}} = C_1^{(n)} a^n = C_n, \tag{2.109}$$

где C_n — коэффициент разложения, определяемый по формуле (2.99):

$$C_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta.$$

В соответствии с рис. 2.21 имеем:
в пределах

$$0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2} \text{ функция } f(\theta) = U_0,$$

а при $\pi/2 < \theta \leqslant \pi$ $f(\theta) = 0$.

Таким образом,

$$C_n = \frac{2n+1}{2} U_0 \int_0^{\pi/2} P_n(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta.$$

Вычисление C_n для разных n с учетом (2.97) дает

$$C_0 = \frac{U_0}{2}; \quad C_1 = \frac{3}{4} U_0; \quad C_3 = -\frac{7}{16} U_0 \text{ и т. д.}$$

Подставляя эти значения в (2.109), вычисляем соответственно значения $C_2^{(n)}$ и $C_1^{(n)}$.

Используя полученные значения в выражениях (2.107) и (2.108), находим окончательное решение в виде

$$U_{\text{внутр}} = U_0 \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{r}{a} P_1(\cos\theta) - \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{r^3}{a^3} P_3(\cos\theta) + \ldots \right],$$

$$U_{\text{внешн}} = U_0 \left[\frac{a}{2r} + \frac{3}{4} \cdot \frac{a^2}{r^2} P_1(\cos\theta) - \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a^4}{r^4} P_3(\cos\theta) + \ldots \right].$$

15. Поле заряженного кольца

Как было показано в § 11 гл. II, в случае поля, симметричного относительно некоторой оси, частное решение уравнения Лапласа имеет вид (2.83):

$$U_n(r, \theta) = \left[C_1^{(n)} r^n + C_2^{(n)} r^{-(n+1)} \right] P_n(\cos\theta).$$

Более общее решение можно представить как

$$U(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(C_1^{(n)} r^n + C_2^{(n)} r^{-(n+1)} \right) P_n(\cos\theta) \right]. \qquad (2.110)$$

Отсюда следует, что для $\theta = 0$

$$U(r, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_1^{(n)} r^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_2^{(n)}}{r^{n+1}}. \qquad (2.111)$$

Таким образом, если заданное распределение поля на некоторой оси ($\theta = 0$) может быть представлено в виде (2.111), т. е. как сходящийся ряд по целым степеням r, то поле в любой точке (не на оси) находится переходом от (2.111) к (2.110), т. е. умножением n-го члена на $P_n(\cos\theta)$.

Покажем применение этого приема на решении задачи о поле заряженного кольца радиуса a (рис. 2.22) с общим зарядом q.

Заряд бесконечно малого элемента длины кольца dl равен $dq = \frac{q}{2\pi a} dl$. Так как согласно (1.28) потенциал, создаваемый зарядом dq в точке A, будет $dU_A = \frac{dq}{4\pi\varepsilon R}$, то полный потенциал этой точки определится соотношением:

$$U_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon R} \int dq =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon R} \oint\limits_{l=2\pi a} \frac{q}{2\pi a} dl = \frac{q}{4\pi\varepsilon R}.$$

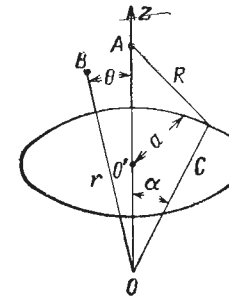


Рис. 2.22. К расчету потенциала на оси заряженного кольца (начало координат в точке 0).

Придадим этому выражению вид

$$U_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon \sqrt{c^2 + z^2 - 2cz\cos\alpha}} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon} (c^2 + z^2 - 2cz\cos\alpha)^{-1/2} \qquad (2.112)$$

и разложим его в соответствии с (2.100), (2.101) в ряд по полиномам Лежандра. Тогда:

при $r \geqslant c$

$$U_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon c} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{c}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\alpha),$$

при $r \leqslant c$

$$U_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon c} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{c}\right)^{n} P_n(\cos\alpha).$$

Соответственно потенциал в любой точке B равен:

при $r \geqslant c$

$$U_B = \frac{q}{4\pi\varepsilon c} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{c}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\alpha) P_n(\cos\theta),$$

при $r \leqslant c$

$$U_B = \frac{q}{4\pi\varepsilon c} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{c}\right)^{n} P_n(\cos\alpha) P_n(\cos\theta).$$

16. Метод электрических изображений

В этом параграфе мы познакомимся с методом электрических изображений, основанным на идее приведения сложной задачи электростатики к более простой задаче с теми же граничными условиями.

Изображение относительно плоскости

Пусть имеется бесконечная эквипотенциальная плоскость (проводник), над которой задано некоторое распределение зарядов. На рис. 2.23 показано в виде примера некоторое распределение зарядов q_1, q_2, ..., q_n. Требуется определить поле, созданное этими зарядами над плоскостью.

Непосредственное определение поля суммированием полей от отдельных зарядов, очевидно, невозможно, так как для этого надо знать распределение индуцированных зарядов на самой плоскости.

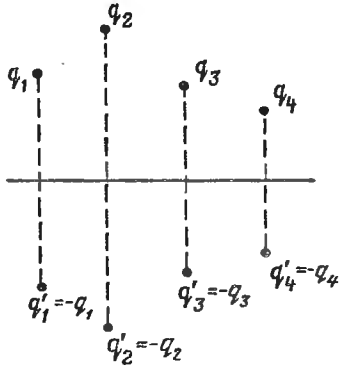


Рис. 2.23. К расчету поля зарядов над проводящей плоскостью: q_1, q_2, q_3, q_4 — истинные заряды; $-q_1$, $-q_2$, $-q_3$, $-q_4$ — электрические изображения.

Искомое поле должно удовлетворять уравнению Лапласа для всего свободного от зарядов пространства над плоскостью и удовлетворять граничным условиям, а именно: заданным значениям зарядов или потенциалов на заряженных телах и постоянству потенциала на плоскости. Значение потенциала на плоскости можно, не нарушая общности решения, положить равным нулю.

Теперь легко видеть, что если взамен индуцированных зарядов, расположенных на плоскости, ввести фиктивные заряды q'_1, q'_2, ..., q'_n, равные и обратные по знаку зарядам q_1, q_2, ..., q_n и расположенные симметрично относительно плоскости, то поле, созданное зарядами q_1, q_2, ..., q_n и фиктивными зарядами q'_1, q'_2, ..., q'_n, будет удовлетворять в верхнем полупространстве тем же гранич-

ным условиям, что и поле зарядов q_1, q_2, ..., q_n над проводящей плоскостью. Действительно, граничные условия в местах расположения зарядов q_1, ..., q_n и в бесконечности неизменны по сравнению с исходной задачей, а граничные условия на плоскости удовлетворяются вследствие симметричного расположения относительно плоскости равных и противоположных по знаку зарядов.

Введенные фиктивные заряды, позволяющие удовлетворить граничным условиям на плоскости, называются электрическими изображениями истинных зарядов.

Приведем несколько примеров расчета поля методом фиктивных зарядов или электрических изображений.

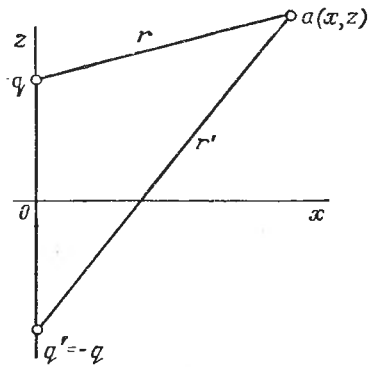


Рис. 2.24. К расчету поля точечного заряда над проводящей плоскостью.

Пример первый. Найдем поле, созданное точечным зарядом q над плоскостью, вводя в рассмотрение фиктивный заряд $q' = -q$ (рис. 2.24). Тогда потенциал от зарядов q и q' в точке наблюдения будет

$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right). \qquad (2.113)$$

Полученное выражение есть в то же время потенциал поля, созданного точечным зарядом q над плоскостью. Теперь нетрудно найти распределение зарядов на плоскости.

Для составляющей электрического поля, нормальной к плоскости, имеем

$$E_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right).$$

Замечая, что

$$r = \sqrt{x^2 + (z-h)^2}, \qquad r' = \sqrt{x^2 + (z+h)^2},$$

где h — высота расположения заряда над плоскостью,

получим:

$$E_z = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{z-h}{r^3} - \frac{z+h}{r'^3}\right). \qquad (2.114)$$

Для точек, расположенных на плоскости ($r = r'$)

$$E_z = -\frac{q}{2\pi\varepsilon}\frac{h}{r^3}.$$

Поверхностная плотность заряда, индуцированного на плоскости,

$$\sigma = \varepsilon E_z = -\frac{q}{2\pi}\frac{h}{r^3}. \qquad (2.115)$$

Таким образом, плотность индуцированного заряда убывает обратно пропорционально кубу расстояния точечного заряда q до соответствующей точки на плоскости.

Непосредственным интегрированием читатель может убедиться в том, что потенциал, созданный в произвольной точке a индуцированным зарядом найденной плотности σ, совпадает с выражением $q/4\pi\varepsilon r'$, т. е. с потенциалом от электрического изображения.

Пример второй. Найдем поле, созданное точечным зарядом, расположенным внутри угла, образованного двумя взаимно перпендикулярными проводящими плоскостями *I* и *II* (рис. 2.25). Оче-

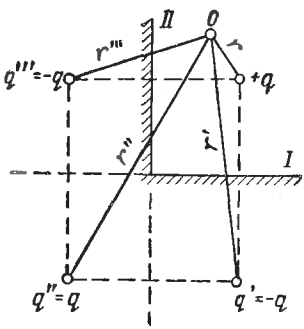


Рис. 2.25. Построение изображения заряда q во взаимно перпендикулярных плоскостях.

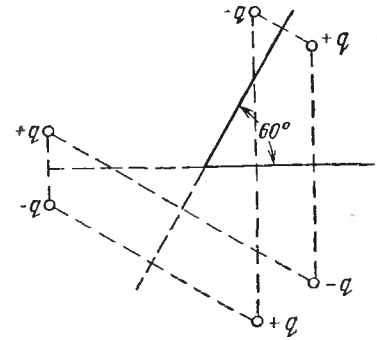


Рис. 2.26. Построение изображения заряда q в плоскостях, образующих угол 60°.

видно, что в данном случае для того, чтобы удовлетворить граничным условиям на плоскостях *I* и *II*, необходимо ввести три электрических изображения, так как введение только одного заряда q' или q''' обеспечивает выполнение граничных условий только на одной из плоскостей *I* или *II* соответственно. Одновременное же введение двух изображений (q' и q''') приводит к несимметрии трех зарядов

(q, q' и q''') относительно любой из плоскостей. Дополнительное изображение q'' приводит к симметрии зарядов относительно плоскостей I и II и обеспечивает тем самым, удовлетворение граничным условиям. Таким образом, потенциал в точке должен быть определен как

$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} - \frac{1}{r'''}\right].$$

Нетрудно понять, что в том случае, когда угол между плоскостями отличается от $\pi/2$, но равен 2π, деленному на целое четное число n, задача решается введением $n-1$ зеркальных изображений. На рис. 2.26 показан в виде примера случай, когда угол между плоскостями составляет 60°.

В случае, когда n не является целым четным числом, граничным условиям можно удовлетворить, только вводя бесконечное число изображений, так как пунктирный многоугольник, аналогичный многоугольнику рис. 2.26, при таком n никогда не замкнется.

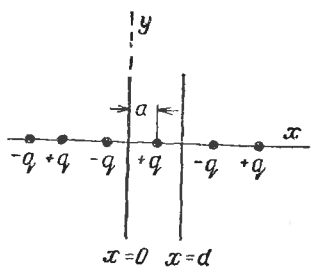


Рис. 2.27. Построение изображений в случае двух проводящих плоскостей.

Пример третий. Найдем поле, созданное точечным зарядом, расположенным между двумя параллельными проводящими плоскостями. Пусть плоскости расположены в точках $x = 0$ и $x = d$. Точечный заряд q находится в точке $x = a$ (рис. 2.27).

Последовательно строя изображения относительно правой и левой плоскостей, убедимся, что задача сводится к бесконечному числу изображений.

Действительно, вводя изображение $-q$ в точке $x = -a$, мы удовлетворяем условию нулевого потенциала на плоскости $x = 0$. Для выполнения граничных условий на плоскости $x = d$ необходимо ввести заряд $-q$ в точку $x = 2d - a$ и заряд $+q$ — в точку $x = 2d + a$. Введение этих зарядов нарушило теперь граничные условия на плоскости $x = 0$ и для их восстановления необходимо ввести заряды: q в точку $x = -(2d - a)$ и $-q$ в точку $x = -(2d + a)$. Но теперь нарушились граничные условия относительно плоскости $x = d$ и необходимо ввести новые изображения и т. д. Продолжая этот процесс до бесконечности, получим следующее распределение зарядов.

Положительные заряды расположены в точках $x = a \pm 2dn$, где n — целое число.

Отрицательные заряды расположены в точках $x = -a \pm 2dn$, где n — целое число.

Потенциал в произвольной точке (x_0, y_0), расположенной между плоскостями, равен

$$U=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\left[\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{1}{\sqrt{y_0^2+(x_0-a+2dn)^2}}-\right.$$
$$\left.-\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{1}{\sqrt{y_0^2+(x_0+a+2dn)^2}}\right].$$

Пример четвертый. Найдем поле бесконечно длинного провода над проводящей плоскостью. Пусть провод расположен на высоте h, и радиус провода равен a. Вводя электрическое изображение провода, приводим нашу задачу к задаче о двух проводах, рассмотренной уже в § 4 гл. II. Заметим, что, так как разность потенциалов между проводом и плоскостью равна половине разности потенциалов между проводом и его изображением, емкость провода, расположенного на высоте h относительно земли, равна удвоенной емкости двух проводов, отстоящих друг от друга на расстоянии $2h$.

Изображение относительно сферы

Пусть имеется заряд q, расположенный в точке A на расстоянии z_A от центра заземленной проводящей сферы радиуса a (рис. 2.28). Для того чтобы найти поле, созданное во внешнем по отношению к сфере пространстве зарядом q и зарядами, индуцированными на поверхности сферы, можно воспользоваться методом электрических

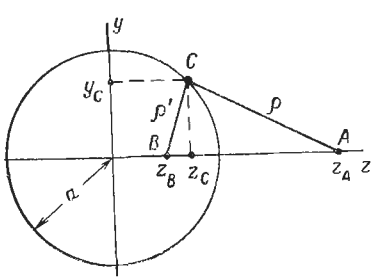


Рис. 2.28. Изображение заряда относительно сферы.

изображений. Как и в случае плоскости, влияние индуцированных зарядов можно учесть, введя фиктивный заряд q' на некотором расстоянии z_B от центра сферы (точка B). Этот заряд q', или электрическое изображение заряда q относительно сферы, должен обеспечить нулевое значение потенциала на поверхности сферы. Определим величину и координату заряда q'.

Потенциал, создаваемый в точке C зарядом q и его изображением, равен

$$U_C = \frac{q}{4\pi\varepsilon\rho} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon\rho'}. \tag{2.116}$$

Для выполнения равенства $U_C = 0$ необходимо, чтобы

$$\frac{q}{\rho} = -\frac{q'}{\rho'} = \text{const}$$

или

$$-\frac{q}{q'} = \frac{\rho}{\rho'} = \text{const}. \tag{2.117}$$

Из рис. 2.28 видно, что

$$\frac{\rho}{\rho'} = \sqrt{\frac{y_C^2 + (z_A - z_C)^2}{y_C^2 + (z_C - z_B)^2}} = \sqrt{\frac{a^2 - 2z_A z_C + z_A^2}{a^2 - 2z_B z_C + z_B^2}}. \tag{2.118}$$

Это отношение будет величиной постоянной, если

$$\frac{d}{dz_C}\left(\frac{\rho}{\rho'}\right) = 0.$$

Подставляя значение $\frac{\rho}{\rho'}$ из (2.118) и дифференцируя по z_C, находим

$$-2z_A\left(a^2 - 2z_B z_C + z_B^2\right) + 2z_B\left(a^2 - 2z_A z_C + z_A^2\right) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$z_B = \frac{a^2}{z_A}. \tag{2.119}$$

Из (2.118) с учетом (2.119) получим:

$$\frac{\rho}{\rho'} = \sqrt{\frac{z_A z_B - 2z_A z_C + z_A^2}{z_A z_B - 2z_B z_C + z_B^2}} = \sqrt{\frac{z_A}{z_B}}.$$

Отсюда на основании (2.117) имеем

$$-\frac{q}{q'} = \sqrt{\frac{z_A}{z_B}} = \frac{z_A}{a}. \tag{2.120}$$

Таким образом, условие равенства нулю потенциала на поверхности сферы окажется выполненным, если на расстоянии $z_B = \frac{a^2}{z_A}$ от ее центра поместить вспомогательный заряд $q' = -q\frac{a}{z_A}$.

Потенциал, созданный зарядом q и сферой, теперь можно определить как потенциал заряда q и его зеркального изображения q':

$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+z_A^2-2z_A r\cos\theta}} - \frac{a}{\sqrt{z_A^2 r^2+a^4-2a^2 z_A r\cos\theta}}\right]. \quad (2.121)$$

Здесь r и θ — сферические координаты точки наблюдения.

Изображение относительно сложной поверхности

Как пример применения результатов рассмотренных простых случаев к более сложным рассмотрим задачу о поле точечного заряда q над проводящей поверхностью сложной формы (рис. 2.29). Эта поверхность образована пересечением двух взаимно перпендикуляр-



Рис. 2.29. Изображение заряда относительно поверхности сложной формы.

ных плоскостей с поверхностью сферы. Как легко понять, в этом случае для удовлетворения граничных условий достаточно ввести семь фиктивных зарядов, три из которых расположены симметрично относительно плоскостей и равны по величине заряду q, а четыре — равны по величине $q(a/r)$ и расположены в точках, отстоящих от центра на расстоянии a^2/r, где a — радиус сферы и r — расстояние от заряда q до центра сферы. (Знаки всех этих зарядов указаны на рис. 2.29).

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

1. Электрический ток и плотность тока

Рассмотрим некоторый объем V, ограниченный поверхностью S. Предположим, что находящееся в этом объеме количество электричества Q со временем уменьшается. Тогда, утверждая, что количество электричества не может исчезнуть, мы приходим к выводу, что электричество вытекает из рассматриваемого объема через поверхность S. Равным образом, увеличение со временем количества электричества в рассматриваемом объеме, в соответствии с тем же принципом сохранения количества электричества, может происходить лишь за счет того, что электричество втекает в рассматриваемый объем через поверхность S. Ниже мы рассмотрим те условия, при которых возможен перенос электрических зарядов, а также те внешние явления (выделение тепла, образование магнитного поля), которые электрический ток вызывает.

Предварительно введем основные определения. Величиной электрического тока (или просто электрическим током) через замкнутую поверхность S назовем скорость изменения количества электричества Q в объеме V, ограниченном поверхностью S, с обратным знаком:*)

$$I = -\frac{dQ}{dt}. \tag{3.1}$$

Согласно (3.1) электрический ток положителен в том случае, когда количество электричества Q в объеме V уменьшается со временем вследствие перемещения зарядов во внешнее пространство.

Величину тока I или количество электричества, протекающее через замкнутую поверхность S в единицу времени, мы вправе рас-

*) В некоторых случаях, напротив, за величину тока принимается величина $I = dQ/dt$.

сматривать как поток вектора $\bar{j}$, т. е. поток плотности электрического тока, через эту поверхность

$$I = \int_S \bar{j}\, d\bar{S}. \tag{3.2}$$

Электрический ток есть скаляр. Плотность электрического тока есть вектор, направление которого совпадает с направлением движения электричества в данной точке, а модуль равен количеству электричества, протекающему через единицу площади, нормальной к вектору плотности тока, в единицу времени.*)

Если поверхность S разбить на участки S_1, S_2, ..., S_k, ..., S_n, то уравнение (3.2) можно написать в виде

$$I = \int_S \bar{j}\, d\bar{S} = \int_{S_1} \bar{j}\, d\bar{S} + \int_{S_2} \bar{j}\, d\bar{S} + \ldots + \int_{S_k} \bar{j}\, d\bar{S} + \ldots + \int_{S_n} \bar{j}\, d\bar{S},$$

или, вводя понятие о токе через участок поверхности

$$I_k = \int_{S_k} \bar{j}\, d\bar{S},$$

получим

$$I = I_1 + I_2 + \ldots + I_k + \ldots + I_n.$$

2. Основные законы электрического тока

Уравнение (3.1) представляет собой, по существу, закон сохранения количества электричества в интегральной форме, поскольку оно связывает поток вектора плотности электрического тока через замкнутую поверхность с изменением количества электричества во всем объеме, ограниченном этой поверхностью. Мы можем получить теперь дифференциальное выражение этого закона, относящееся к каждой отдельной точке среды, в которой течет ток.

Для этого представив общий заряд Q в объеме V в виде

$$Q = \int_V \rho\, dV,$$

где ρ — объемная плотность количества электричества, и использовав (3.2), перепишем (3.1):

$$\int_S \bar{j}\, d\bar{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho\, dV$$

*) За положительное направление тока условно принято направление движения положительных зарядов.

или, меняя местами порядок дифференцирования и интегрирования,

$$\int_S \bar{j}\, d\bar{S} = \int_V -\frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV. \tag{3.3}$$

Преобразуя поверхностный интеграл левой части на основании теоремы Гаусса—Остроградского в интеграл по объему

$$\int_S \bar{j}\, d\bar{S} = \int_V \operatorname{div} \bar{j}\, dV, \tag{3.4}$$

получим

$$\int_V \operatorname{div} \bar{j}\, dV = \int_V -\frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV. \tag{3.5}$$

Это равенство, справедливое для произвольного объема, может удовлетворяться только в том случае, если равны подынтегральные выражения.

Таким образом получаем:

$$\operatorname{div} \bar{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \tag{3.6}$$

Уравнение (3.6) является дифференциальным выражением уравнения (3.1). Согласно уравнению (3.6) истоками линий плотности тока являются те точки поля, где плотность заряда изменяется со временем. Линии вектора плотности тока, вообще говоря, незамкнуты. Они начинаются или заканчиваются в точках с переменной плотностью заряда.

Плотность электрического тока в проводящей среде связана с напряженностью электрического поля законом Ома в дифференциальной форме, согласно которому вектор плотности тока пропорционален напряженности поля в данной точке

$$\bar{j} = g\bar{E}, \tag{3.7}$$

где g — коэффициент, зависящий от свойств среды и носящий название удельной проводимости среды.

Совершенный диэлектрик — это среда, для которой проводимость g равна нулю. Хотя таким совершенным диэлектриком является только вакуум, ряд других физических сред может также с достаточным приближением рассматриваться как диэлектрик.

Рассмотрим теперь основные соотношения в случае постоянного тока.

Под постоянным током понимается ток, не меняющийся со временем. В этом случае, очевидно, объемная плотность зарядов ρ в каждой точке среды должна оставаться постоянной, так как в противном случае изменение ρ со временем вызывало бы изменение во

времени напряженности поля $\bar{E}$, а значит, на основании (3.7) и плотности тока $\bar{j}$.

Утверждение о постоянстве ρ во времени означает, что $\partial\rho/\partial t = 0$, а отсюда в силу (3.6) получаем, что для постоянного тока

$$\operatorname{div}\bar{j} = 0 \tag{3.8}$$

и на основании (3.4)

$$\int_S \bar{j}\,d\bar{S} = 0. \tag{3.9}$$

Эти уравнения носят название первого закона Кирхгофа в дифференциальной и интегральной форме соответственно.

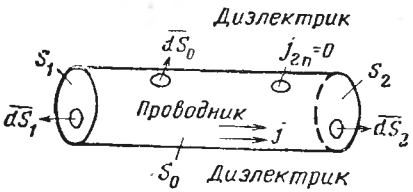


Рис. 3.1. Проводник с постоянным током.

Линии постоянного тока не имеют истоков или стоков. Другими словами, цепь постоянного тока должна быть замкнута. Уравнение (3.8) утверждает также непрерывность нормальной составляющей вектора плотности тока на границе двух сред*).

Таким образом, если в диэлектрической среде находится проводник (рис. 3.1), то из соотношения

$$j_{1n} = j_{2n}$$

и из равенства нулю тока во второй (диэлектрической) среде следует, что $j_{1n} = 0$. Следовательно, у поверхности проводника плотность тока имеет только составляющую, касательную к внешней поверхности проводника.

Применяя теперь первый закон Кирхгофа (3.9) к объему, ограниченному внешней поверхностью проводника S_0 и поверхностями двух сечений S_1 и S_2, можно записать

$$\int_{S_1} \bar{j}\,d\bar{S} + \int_{S_2} \bar{j}\,d\bar{S} + \int_{S_0} \bar{j}\,d\bar{S} = 0.$$

Или, учитывая, что нормальная составляющая плотности тока на поверхности S_0 равна нулю, получим

$$\int_{S_1} \bar{j}\,d\bar{S} + \int_{S_2} \bar{j}\,d\bar{S} = 0.$$

*) Это доказывается аналогично доказательству непрерывности нормальной составляющей вектора электрической индукции $\bar{D}$.

Так как нормали к S_1 и S_2 направлены в противоположные стороны, то вводя общую нормаль так, что

$$d\overline{S}_1 = d\overline{S},$$

$$d\overline{S}_2 = -d\overline{S},$$

имеем

$$\int\limits_{S_1} \overline{j}\, d\overline{S} = \int\limits_{S_2} \overline{j}\, d\overline{S}$$

или

$$I_1 = I_2.$$

Таким образом, величина постоянного тока, проходящего через поперечное сечение проводника, одинакова по всей его длине. Напишем для участка проводника с током закон Ома в интегральной форме.

Из уравнения (3.7) следует

$$\overline{E} = \frac{\overline{j}}{g}. \tag{3.10}$$

Умножим обе стороны равенства (3.10) скалярно на $\overline{dl}$, где dl — элемент длины проводника, а направление $\overline{dl}$ совпадает с направлением тока*):

$$\overline{E}\,\overline{dl} = j\,\frac{dl}{g}.$$

Умножая, наконец, числитель и знаменатель правой части равенства на величину площади поперечного сечения проводника S и интегрируя по длине l, получим

$$\int\limits_0^l \overline{E}\,\overline{dl} = \int\limits_0^l j\,\frac{S\,dl}{gS}$$

или при условии, что ток распределен по сечению равномерно,

$$\int\limits_0^l \overline{E}\,\overline{dl} = I\int\limits_0^l \frac{dl}{gS}. \tag{3.11}$$

В уравнении (3.11) левая часть равенства представляет собой разность потенциалов на границах участка l:

$$\int\limits_0^l \overline{E}\,\overline{dl} = U_1 - U_2. \tag{3.12}$$

*) Предполагается, что направление вектора $\overline{j}$ во всех точках поперечного сечения проводника одинаково.

Интеграл, стоящий в правой части равенства (3.11), носит название сопротивления проводника

$$R=\int_0^l \frac{dl}{gS}\,. \tag{3.13}$$

Подставляя (3.13) в (3.11), получим с учетом (3.12) интегральное выражение для закона Ома:

$$U_1-U_2=IR. \tag{3.14}$$

Следует иметь в виду, что уравнение (3.7) является универсальным соотношением, справедливым как для переменного, так и для постоянного тока, тогда как уравнение (3.14), строго говоря, относится только к цепям постоянного тока.

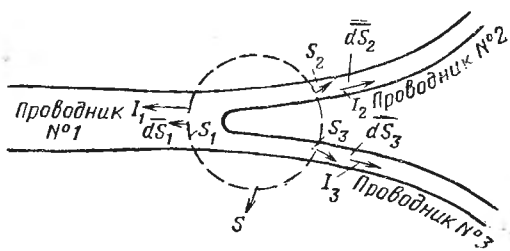


Рис. 3.2. Разветвление проводников с током.

Покажем теперь, что для разветвления проводников (рис. 3.2) алгебраическая сумма токов в узле разветвления равна нулю (1-й закон Кирхгофа). Для этого окружим узел замкнутой поверхностью S. Так как проводимость g отлична от нуля только на участках S_1, S_2 и S_3 поверхности S, то согласно (3.9) имеем

$$\int_S \bar{j}\,d\bar{S}=\int_{S_1} \bar{j}\,d\bar{S}+\int_{S_2} \bar{j}\,d\bar{S}+\int_{S_3} \bar{j}\,d\bar{S}=0$$

или

$$I_1+I_2+I_3=0.$$

Положительные направления токов указаны стрелками на рис. 3.2.

3. Сторонние электродвижущие силы

Рассмотрим теперь замкнутую цепь постоянного тока. Применяя уравнение (3.11) к замкнутой цепи, получим

$$\oint_l \overline{E}\,\overline{dl} = I \oint_l \frac{dl}{gS}.$$

Однако циркуляция напряженности электрического поля по замкнутому пути равна нулю, и так как $\oint_l \frac{dl}{gS}$, представляющий собой полное сопротивление замкнутой электрической цепи, не равен нулю, то из выше написанного равенства вытекает, что $I = 0$. Этот результат является естественным, так как постоянный (не убывающий со временем) ток, очевидно, не может поддерживаться силами электростатического поля.

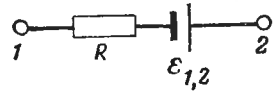


Рис. 3.3. Участок цепи, содержащий стороннюю э. д. с.

Для существования постоянного тока необходимо ввести в цепь источник сторонних сил не электростатического происхождения. Это могут быть силы теплового, химического, индукционного, ионного характера и т. п. Сторонние силы в отличие от сил электростатического поля (т. е. сил взаимодействия электрических зарядов) не являются силами потенциальными*). Если в некоторой точке цепи действует поле сторонних сил, то закон Ома для этой точки должен быть записан в виде

$$\overline{j} = g\left(\overline{E} + \overline{E}_{\text{ст}}\right), \tag{3.15}$$

где $\overline{E}_{\text{ст}}$ есть напряженность поля сторонних сил. Для участка *1—2*, содержащего сторонние силы (рис. 3.3), уравнение (3.11) изменится и примет вид

$$\int_1^2 \left(\overline{E} + \overline{E}_{\text{ст}}\right)\overline{dl} = I \int_1^2 \frac{dl}{gS}$$

или

$$U_1 - U_2 + \int_1^2 \overline{E}_{\text{ст}}\,\overline{dl} = IR. \tag{3.16}$$

---

*) Потенциальными силами или силами, имеющими потенциал, называются такие силы, которые могут быть представлены как градиент некоторой скалярной функции.

Циркуляция напряженности сторонних сил на участке *1—2* носит название сторонней электродвижущей силы этого участка и обозначается через $\mathscr{E}_{12}$:

$$\mathscr{E}_{12} = \int_1^2 \bar{E}_{ст}\, \overline{dl}.$$

Применяя уравнение (3.16) к замкнутой цепи и учитывая, что разность потенциалов $U_1 — U_2$ будет в этом случае равна нулю, получим

$$\oint \bar{E}_{ст}\, \overline{dl} = IR_0, \tag{3.17}$$

где R_0 есть полное сопротивление всей замкнутой цепи.

Уравнение (3.17) является 2-м законом Кирхгофа в интегральной форме, оно утверждает, что в замкнутой цепи сумма сторонних электродвижущих сил равна сумме падений напряжений (IR_0).

4. Работа и мощность тока

Рассмотрим участок электрической цепи в виде проводника, имеющего на концах потенциалы U_A и U_B. Путь $U_A > U_B$. Если по этому участку проходит ток, то, как известно, происходит выделение тепла. Это выделение тепла связано с переносом количества электричества Q от точки с потенциалом U_A к точке с потенциалом U_B. При таком переносе электричества совершается работа, равная

$$W = Q\,(U_A — U_B) = I\,(U_A — U_B)\,t,$$

которая и равняется по закону Джоуля — Ленца количеству выделившегося тепла.

Работа, совершенная в единицу времени, или мощность на участке AB будет

$$P = \frac{dW}{dt} = I\,(U_A — U_B) = I^2 R. \tag{3.18}$$

Если мощность, выделяемая в проводнике, распределена по объему равномерно, то для единицы объема проводника можно написать:

$$P_0 = \frac{P}{V} = \frac{I\,(U_A — U_B)}{lS} = jE,$$

где j — плотность электрического тока, равная току I, деленному на сечение проводника S, а E — напряженность поля, направленная вдоль проводника с током.

Так как напряженность поля и плотность тока совпадают по направлению, то P_0 можно написать в виде

$$P_0 = \bar{j}\,\bar{E}. \tag{3.19}$$

При помощи закона Ома (3.7) выражению (3.19) можно придать и другую форму, а именно:

$$P_0 = \frac{j^2}{g} \tag{3.20}$$

или

$$P_0 = E^2 g. \tag{3.21}$$

Интегрируя выражения (3.19), (3.20) и (3.21) по произвольному объему, получим выражение для мощности или количества тепла, выделяемого в произвольном объеме в единицу времени:

$$P = \int_V \bar{j}\bar{E}\, dV = \int_V \frac{j^2}{g}\, dV = \int_V E^2 g dV. \tag{3.22}$$

5. Аналогия между электростатическим полем и полем постоянного тока

Пусть в некотором объеме, не имеющем сторонних сил, течет постоянный электрический ток. Плотность тока в любой точке удовлетворяет закону Ома (3.7) и уравнению непрерывности тока (3.8), т. е.

$$\bar{j} = g\bar{E} \quad \text{и} \quad \operatorname{div} \bar{j} = 0.$$

Так как в рассматриваемой среде нет сторонних сил, то вектор $\bar{E}$ представляет собой напряженность потенциального электрического поля и может быть выражен как

$$\bar{E} = -\operatorname{grad} U.$$

Подставляя это значение в (3.7) и затем выражение для $\bar{j}$ в (3.8), имеем

$$\operatorname{div}(g \operatorname{grad} U) = 0.$$

Предполагая, что среда однородна, и вынося проводимость за знак дивергенции, получим

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = 0.$$

Таким образом, в однородной проводящей среде распределение потенциала удовлетворяет уравнению Лапласа. Поэтому на основании теоремы единственности решения уравнения Лапласа можно утверждать, что распределение потенциала в электростатической задаче будет при одинаковых граничных условиях совпадать с распределением потенциала в проводящей среде с током. Линии плотности электрического тока в соответствии с (3.7) будут совпадать с силовыми линиями в электростатической задаче.

Пусть, например, два электрода произвольной формы поддерживаются при потенциалах U_A и U_B (рис. 3.4). Если среда, в которой находятся эти электроды, представляет собой однородный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε или проводник с удельной проводимостью g, то можно утверждать, что потенциал в произвольной точке проводящей среды будет иметь то же значение, что и в случае диэлектрика.

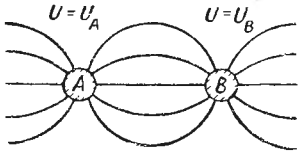


Рис. 3.4. Электростатическое или токовое поле между электродами произвольной формы.

Соответственно плотность тока на основании (3.7) может быть найдена как напряженность поля, рассчитанная для диэлектрической среды и умноженная на удельную проводимость проводящей среды.

В случае диэлектрической среды количество электричества, находящееся на электроде A (или B), на основании равенства Гаусса—Остроградского равно

$$Q = |Q_A| = |Q_B| = \int_S \varepsilon \overline{E}\, \overline{dS}, \tag{3.23}$$

где интеграл берется по поверхности электрода A или B, откуда для емкости между электродами получаем

$$C = \left| \frac{Q}{U_A - U_B} \right| = \varepsilon \left| \frac{\int_S \overline{E}\, \overline{dS}}{U_A - U_B} \right|. \tag{3.24}$$

В случае проводящей среды полный ток, вытекающий из поверхности электрода A в проводящую среду или втекающий в поверхность электрода B, равен

$$I = \int_S g\overline{E}\, \overline{dS} = g \int_S \overline{E}\, \overline{dS}, \tag{3.25}$$

где интеграл берется по поверхности одного из электродов.

Для полной проводимости среды между электродами A и B имеем

$$\frac{1}{R} = \frac{I}{U_A - U_B} = g \left| \frac{\int_S \overline{E}\, \overline{dS}}{U_A - U_B} \right|. \tag{3.26}$$

Учитывая эквивалентность электростатического и токового полей и сравнивая (3.24) и (3.26), получаем связь между емкостью C

электростатической задачи и проводимостью $1/R$ в задаче о токе в виде

$$\frac{C}{\varepsilon}=\frac{1}{Rg}. \tag{3.27}$$

Соотношение (3.27) имеет существенное значение, так как позволяет в случае необходимости заменить измерение сопротивления R измерением емкости C на эквивалентной модели.

6. Ток смещения

Как было показано во втором параграфе настоящей главы, только линии плотности постоянного тока, удовлетворяя соотношению $\operatorname{div}\bar{j}=0$, являются замкнутыми. В общем случае переменного тока линии тока незамкнуты и имеют истоки и стоки в точках с изменяющейся плотностью заряда.

Максвелл обобщил принцип непрерывности линий тока на случай переменного тока путем введения понятия о токе смещения. Плотность электрического тока в общем случае удовлетворяет уравнению (3.6):

$$\operatorname{div}\bar{j}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}.$$

На основании (1.19) объемная плотность ρ связана с вектором электрической индукции соотношением

$$\rho=\operatorname{div}\bar{D}.$$

Подставляя это значение в уравнение (3.6)

$$\operatorname{div}\bar{j}=-\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\bar{D})$$

и меняя местами порядок дифференцирования по времени и по пространственным координатам, получим

$$\operatorname{div}\left(\bar{j}+\frac{\partial\bar{D}}{\partial t}\right)=0. \tag{3.28}$$

Уравнение (3.28) утверждает, что вектор, представляющий собой сумму вектора $\bar{j}$ и вектора $\partial\bar{D}/\partial t$, непрерывен. Другими словами, вектор $\partial\bar{D}/\partial t$ дополняет вектор плотности тока до замкнутости. Максвелл ввел понятие о плотности тока смещения $\bar{j}_{\text{см}}$, понимая под ним второе слагаемое уравнения (3.28):

$$\bar{j}_{\text{см}}=\frac{\partial\bar{D}}{\partial t}=\varepsilon\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}. \tag{3.29}$$

По Максвеллу существует полный ток, плотность которого состоит из двух слагаемых: плотности тока проводимости $\bar{j}$, пропорциональной напряженности поля ($\bar{j} = g\bar{E}$), и плотности тока смещения, пропорциональной производной напряженности поля по времени ($\bar{j}_{см} = \varepsilon(\partial\bar{E}/dt)$:

$$\bar{j}_{полн} = \bar{j} + \bar{j}_{см}.$$

Таким образом, согласно (3.28)

$$\operatorname{div} \bar{j}_{полн} = 0. \tag{3.30}$$

Название «ток смещения», как указал проф. М. А. Бонч-Бруевич, неудачно, так как ток смещения существует и в вакууме — в точках, где отсутствует как течение, так и смещение каких-либо частиц. Это название связано с устаревшими и неверными представлениями Максвелла о «смещениях частиц эфира». Название «ток» для величины (3.29), пропорциональной скорости изменения напряженности поля, можно оправдать лишь тем, что, имея размерность плотности тока, $\varepsilon\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}$ дополняет плотность тока проводимости до замкнутости.

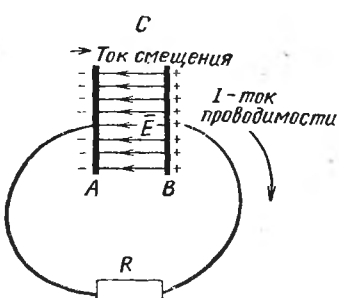


Рис. 3.5. Цепь, содержащая емкость.

Рассмотрим, например, цепь, содержащую плоский конденсатор (рис. 3.5). При заряде или разряде конденсатора в соединительном проводнике существует ток проводимости. Этот ток терпит разрыв у пластин конденсатора, так как среда между пластинами является диэлектриком ($g = 0$). Однако суммарный ток проводимости и смещения непрерывен во всей цепи. В обкладку A из соединительного провода втекает ток, состоящий из тока проводимости и тока смещения*); из обкладки A вытекает в диэлектрик ток смещения. Этот ток смещения равен

$$I_{см} = j_{см} S,$$

где S — площадь пластин.

Подставляя значение $j_{см}$ из (3.29) и учитывая (2.18), получим

$$I_{см} = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} S = \varepsilon S \frac{d}{dt}\left(\frac{U}{d}\right),$$

*) В дальнейшем мы покажем, что практически во всех случаях током смещения в проводниках можно пренебречь.

где U — напряжение или разность потенциалов плоского конденсатора, а d — расстояние между пластинами.

Вынося d за знак производной, будем иметь

$$I_{\text{см}} = \frac{\varepsilon S}{d} \frac{dU}{dt} = C \frac{dU}{dt},$$

где C — емкость конденсатора.

Полученное соотношение представляет собой хорошо известное выражение для емкостного тока через конденсатор, который равен притекающему к обкладкам конденсатора тому проводимости.

Впоследствии мы увидим, что введение понятия о токе смещения оказалось очень плодотворным, так как позволило Максвеллу сделать обобщения, в результате которых Генриху Герцу удалось теоретически предсказать и экспериментально обнаружить существование электромагнитных волн, а великому русскому ученому А. С. Попову положить начало новой отрасли техники — радиотехнике.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОСТОЯННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Из опыта известно, что отдельные сорта железа обладают магнитными свойствами, т. е. способностью притягивать кусочки железа и его сплавов. Кроме того, было замечено, что куски магнитного железа в свободно подвешенном состоянии ориентируются всегда в направлении север — юг. Эти явления послужили основанием к созданию теории магнетизма, а также к открытию магнитного поля Земли.

До начала XIX века магнетизм изучался независимо от электричества. Однако в 1820 году Эрстед, обнаружив действие электрического тока на магнитную стрелку, показал, что в пространстве, окружающем проводник с током, образуется магнитное поле. Этим опытом было положено начало совместному изучению электрических и магнитных явлений.

Необходимо заметить, что задолго до опыта Эрстеда русскими учеными высказывались мысли о единстве природы электрических и магнитных явлений. Так, 7 сентября 1758 г. на заседании Российской императорской Академии наук русский профессор физики Эпинус, ближайший помощник Ломоносова, выступил с докладом на тему «Речь о сходстве электрической и магнитной силы». Эпинус в конце своей лекции сказал: «Из сего можно заключить не только о некоем союзе и сходстве магнитной и электрической силы, но и о сокровенном их точном подобии...»

По современным представлениям магнитные явления, независимо от того, где и как они проявляются, всегда связаны с движением электрических зарядов.

Согласно электронной теории материи частицы электричества обладают инерционной массой, и поэтому для сообщения им ускорения при движении необходимо приложить силу. В результате, движущийся заряд обладает, помимо электропотенциальной энер-

гии, определяемой его положением относительно других зарядов, еще электрокинетической энергией, которая проявляется в виде энергии магнитного поля.

Так как отсутствие магнетизма как особого рода субстанции является сейчас бесспорным научным фактом и единственной причиной образования магнитного поля является движущийся электрический заряд, то естественным и наиболее логичным было бы положить в основу теории магнитного поля закон о магнитных свойствах элементарного движущегося заряда.

Однако этот путь оказывается чрезмерно сложным, и мы предпочтем ему построение теории магнитного поля, основанной на использовании понятия о фиктивной магнитной массе или фиктивном количестве магнетизма. В результате нам удастся получить ряд необходимых для дальнейшего формул без длинных математических выводов посредством простой аналогии между магнитостатическими и электростатическими явлениями.

Основанием для этой аналогии могут служить следующие хорошо известные экспериментальные факты.

1. Ряд материалов, находясь в подвешенном состоянии, устанавливается в направлении север — юг. Эти материалы носят название магнитов. Конец магнита, обращенный на север, называется северным или положительным полюсом магнита. Противоположный конец называется южным, или отрицательным полюсом.

2. Некоторые тела, не проявляющие магнитных свойств, могут приобрести эти свойства путем индукции, если их подвести достаточно близко к одному из полюсов магнита. При этом на конце тела, обращенном к полюсу магнита, индуцируется магнетизм противоположного знака, а на удаленном конце — магнетизм того же знака, что и у полюса магнита.

3. Если длинный тонкий магнит подвести к железным опилкам, то опилки притягиваются с наибольшей густотой вблизи концов магнита и не притягиваются у средней части магнита. Отсюда следует, что магнетизм как бы сосредоточен в области концов магнита. Если магнит достаточно тонкий по сравнению с его длиной, то можно считать магнетизм как бы сосредоточенным в конечных точках магнита. Подобное намагниченное тело на больших расстояниях ведет себя как магнитный диполь.

4. Если взять два тонких и очень длинных (теоретически бесконечно длинных магнита), то их взаимодействие сведется к взаимодействию обращенных друг к другу «точечных» полюсов.

Опыт показывает, что взаимодействие таких точечных магнитных масс подчиняется тому же закону (Кулона), что и взаимодействие точечных электрических зарядов.

При сравнении магнитостатики и электростатики надо, однако, учитывать, что положительный и отрицательный магнетизм раздельно не существует и что всякое деление магнита на части приводит к образованию новых магнитов, каждый из которых имеет магне-

тизм обоих знаков. Поэтому особо удобным оказывается введение понятия о магнитных диполях, которые по своей структуре аналогичны диполям электрическим и характеризуются магнитным моментом

$$\overline{M} = q_м \overline{l}.$$

Хотя здесь величина $q_м$ формально и выступает как магнитный заряд, однако по изложенным выше причинам это понятие имеет смысл лишь в рамках дипольной модели.

В заключение заметим, что отсутствие в природе изолированных магнитных зарядов означает невозможность реального существования магнитного тока, подобного электрическому току.

1. Основные законы магнетизма

Ниже мы приводим без особых пояснений ряд основных соотношений теории магнитного поля, получающихся путем простой аналогии с электростатикой.

Для удобства сравнения на левой стороне страницы написаны известные законы электростатики, а на правой стороне — аналогичные им законы магнитостатики.

Основные соотношения электростатики

Два электрических точечных заряда взаимодействуют с силой

$$\overline{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon r^3}\,\overline{r}.$$

Коэффициент ε учитывает роль среды и носит название диэлектрической проницаемости среды.

В системе СИ диэлектрическая проницаемость вакуума принимается равной $\frac{1}{36\pi}\,10^{-9}\,\frac{ф}{м}$ (электрическая постоянная).

Электрическое поле характеризуется напряженностью поля $\overline{E}$, определяемой как сила, отнесенная к единице пробного заряда

$$\overline{E} = \frac{\overline{F}}{q}.$$

Основные соотношения магнитостатики

Две точечные магнитные массы (два бесконечно длинных и тонких магнита) взаимодействуют с силой

$$\overline{F} = \frac{q_{м1}\, q_{м2}}{4\pi\mu r^3}\,\overline{r}.$$

Коэффициент μ учитывает роль среды и носит название магнитной проницаемости.

В системе СИ магнитная проницаемость вакуума принимается равной $4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{гн}{м}$ (магнитная постоянная).

Магнитное поле характеризуется напряженностью поля $\overline{H}$, определяемой как сила, отнесенная к единице пробной магнитной массы

$$\overline{H} = \frac{\overline{F}}{q_м}.$$

Напряженность поля точечного заряда

$$\overline{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^3}\overline{r}.$$

Наряду с вектором $\overline{E}$ вводится вектор электрической индукции $\overline{D}$:

$$\overline{D}=\varepsilon\overline{E}.$$

Поток вектора электрической индукции через произвольную замкнутую поверхность равен

$$N=\int_S \overline{D}\,\overline{dS}=\sum q$$

(равенство Гаусса-Остроградского), где $\sum q$—алгебраическая сумма электрических зарядов внутри объема, ограниченного поверхностью S.

Дифференциальная форма этого равенства

$$\operatorname{div}\overline{D}=\rho.$$

Линии электрической индукции начинаются и кончаются на зарядах.

На границе двух разнородных сред (различные ε) выполняются следующие условия для нормальных составляющих вектора $\overline{D}$:

$$D_{1n}=D_{2n}$$

(если на границе отсутствуют поверхностные заряды) и

$$E_{1\,\mathrm{tg}}=E_{2\,\mathrm{tg}}$$

для тангенциальных составляющих вектора $\overline{E}$.

Первое равенство вытекает из непрерывности линий индукции (в отсутствии поверхностных зарядов).

Второе равенство следует из независимости работы сил от пути.

Напряженность поля точечной магнитной массы

$$\overline{H}=\frac{q_{\mathrm{м}}}{4\pi\mu r^3}\overline{r}. \qquad (4.1)$$

Наряду с вектором $\overline{H}$ вводится вектор магнитной индукции $\overline{B}$:

$$\overline{B}=\mu\overline{H}. \qquad (4.2)$$

Поток вектора магнитной индукции через произвольную замкнутую поверхность равен

$$\Phi=\int_S \overline{B}\,\overline{dS}=\sum q_{\mathrm{м}}=0,$$

где $\sum q_{\mathrm{м}}$—алгебраическая сумма магнитных зарядов внутри объема, ограниченного поверхностью S, всегда равная нулю (так как не существует изолированных магнитных масс одного знака).

Дифференциальная форма этого равенства

$$\operatorname{div}\overline{B}=0. \qquad (4.3)$$

Линии магнитной индукции носят соленоидальный характер, они не имеют ни начала, ни конца, т. е. либо замкнуты, либо уходят в бесконечность.

На границе двух разнородных сред (различные μ) выполняются следующие условия для нормальных составляющих вектора $\overline{B}$:

$$B_{1n}=B_{2n} \qquad (4.4)$$

и

$$H_{1\,\mathrm{tg}}=H_{2\,\mathrm{tg}} \qquad (4.5)$$

для тангенциальных составляющих вектора $\overline{H}$.

Первое равенство вытекает из непрерывности линий индукции.

Второе равенство следует из независимости работы сил от пути.

Энергия электрического поля равна

$$W = \int_V \frac{\varepsilon E^2}{2}\, dV = \int_V \frac{\bar{E}\,\bar{D}}{2}\, dV,$$

объемный интеграл распространяется на все пространство, где существует электрическое поле.

Энергия магнитного поля равна

$$W = \int_V \frac{\mu H^2}{2}\, dV = \int_V \frac{\bar{H}\,\bar{B}}{2}\, dV, \quad (4.6)$$

объемный интеграл распространяется на все пространство, где существует магнитное поле.

По характеру зависимости μ от напряженности магнитного поля и координат все среды разделяются на линейные и нелинейные, однородные и неоднородные, изотропные и анизотропные. Причем определения этих сред совпадают с теми, которые были приведены в § 1 и 3 гл. I применительно к диэлектрической среде.

2. Магнитное поле постоянного тока

Как уже указывалось выше, электрический ток, проходящий по проводнику, образует в окружающем его пространстве магнитное поле. Напряженность этого поля пропорциональна величине электрического тока и зависит от формы проводника, по которому течет ток, или в общем случае от распределения тока в пространстве.

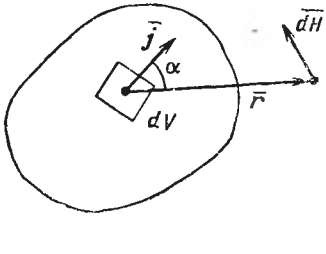


Рис. 4.1. Напряженность поля элемента тока. Вектор $d\bar{H}$ направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\bar{j}$ и $\bar{r}$.

В основу теории магнитного поля тока мы положим так называемый закон Био-Савара для напряженности магнитного поля $d\bar{H}$, создаваемого током плотности $\bar{j}$, текущим в элементарном объеме проводника dV (рис. 4.1). Этот закон выражается следующим образом:

$$d\bar{H} = \frac{\bar{j} \times \bar{r}}{4\pi r^3}\, dV, \quad (4.7)$$

где $\bar{j} \times \bar{r}$ — векторное произведение вектора плотности тока $\bar{j}$ и радиуса-вектора $\bar{r}$, проведенного из точки истока (элемента объема dV, по которому течет ток) в точку наблюдения.

Как известно из векторного анализа, под векторным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ понимается вектор, величина которого равна произведению модулей векторов на синус угла между ними

и направление которого, перпендикулярное к плоскости векторов сомножителей, совпадает с направлением поступательного перемещения правовинтового штопора, вращаемого от направления первого сомножителя ко второму на наименьший угол.

На рис. 4.1 направление вектора $\overline{dH}$ показано стрелкой. Величина вектора $\overline{dH}$ равна

$$dH = j \frac{\sin \alpha}{4\pi r^2} dV, \tag{4.8}$$

где α — угол между направлением вектора плотности тока и радиусом-вектором.

Таким образом, закон Био-Савара, выражаемый равенством (4.8), утверждает, что элемент тока создает магнитное поле, напряженность которого пропорциональна плотности тока, обратно пропорциональна квадрату расстояния r и, кроме того, зависит от направления, характеризуемого углом α. Напряженность поля имеет максимальное значение во всех точках плоскости, проходящей через элемент тока и перпендикулярной к оси тока, и равна нулю во всех точках на оси тока.

В отличие от закона Кулона, который может быть проверен экспериментально с любой степенью точности, определяемой приближением взаимодействующих тел к «точечным», закон (4.7) для магнитного поля элемента постоянного тока не допускает непосредственной экспериментальной проверки из-за невозможности создать постоянный ток в отдельном изолированном элементе объема, так как постоянный ток может существовать лишь в замкнутой цепи.

Однако доказательство законности равенства (4.7) может быть сделано на основании экспериментальной проверки следствий, которые из него получаются. Формулировка равенства (4.7) предполагает, что оно может быть использовано для расчета поля реальных токов, текущих в замкнутой цепи, путем интегрирования равенства (4.7) по всему объему проводника с током.

Таким образом, напряженность поля, созданного током, текущим по проводнику произвольной формы, равна

$$\bar{H} = \int_V \frac{\bar{j} \times \bar{r}}{4\pi r^3} dV, \tag{4.9}$$

где интегрирование распространяется на весь объем проводника.

Во многих технических задачах обычно оказывается допустимым не учитывать распределение тока по сечению и заменять провода конечного сеченния линейными проводами с током I, равным

$$I = \int_S \bar{j}\, \overline{dS},$$

где S — поперечное сечение проводника.

В этих случаях равенства (4.7) и (4.9) упрощаются и принимают вид

$$d\bar{H} = I\frac{\overline{dl}\times\bar{r}}{4\pi r^3}, \tag{4.10}$$

$$\bar{H} = \int_l I\frac{\overline{dl}\times\bar{r}}{4\pi r^3}, \tag{4.11}$$

где dl — элемент длины проводника, а интеграл распространяется на всю длину проводника с током.

3. Теорема о циркуляции напряженности магнитного поля

Возьмем произвольную замкнутую кривую и вычислим интеграл $\oint_l \bar{H}\overline{dl}$ по этой кривой. Этот интеграл носит название циркуляции вектора $\bar{H}$ по кривой l. Очевидно, что он выражает собой величину работы, которую совершают силы поля при перемещении единицы магнитной массы по замкнутому пути l.

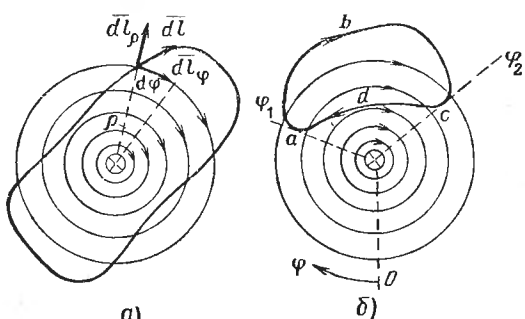


Рис. 4.2. К вычислению напряженности магнитного поля прямолинейного тока.

Подобный интеграл от напряженности электростатического поля, как известно (см. § 8 гл. I), равен нулю. Точно так же обращается в нуль циркуляция напряженности магнитного поля по замкнутому пути в поле постоянных магнитов (в магнитостатическом поле). В магнитном поле электрического тока величина этого интеграла зависит от того, охватывается ли проводник с током контуром интегрирования.

Рассмотрим, например, поле прямолинейного тока (рис. 4.2, *а*). Пусть контур l, имеющий произвольную форму, охватывает провод с током.

Перемещение $\overline{dl}$ можно разбить на два слагаемых: $\overline{dl}_\varphi$ по касательной к силовой линии, являющейся в рассматриваемом случае окружностью с центром на оси тока, и $\overline{dl}_\rho$ по нормали к силовой линии или к вектору $\overline{H}$.

Тогда, очевидно,

$$\overline{H}\,\overline{dl} = \overline{H}\left(\overline{dl}_\rho + \overline{dl}_\varphi\right) = H dl_\varphi.$$

Но $dl_\varphi = \rho d\varphi$, а $H = \frac{I}{2\pi\rho}$ *),

так что

$$\overline{H}\,\overline{dl} = \frac{I}{2\pi} d\varphi,$$

откуда

$$\oint_l \overline{H}\,\overline{dl} = I. \tag{4.12}$$

Если контур l не охватывает контура с током (рис. 4.2,*б*), то

$$\oint_l \overline{H}\,\overline{dl} = \int_{abc} \overline{H}\,\overline{dl} + \int_{cda} \overline{H}\,\overline{dl}.$$

Но

$$\int_{abc} \overline{H}\,\overline{dl} = \frac{I}{2\pi}(\varphi_2 - \varphi_1),$$

а

$$\int_{cda} \overline{H}\,\overline{dl} = \frac{I}{2\pi}(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Следовательно, в этом случае

$$\oint_l \overline{H}\,\overline{dl} = 0.$$

Соотношение (4.12) имеет общий характер и не ограничивается рассмотренным здесь частным случаем поля прямолинейного тока.

В общем случае, когда контур интегрирования охватывает несколько проводников произвольной формы, несущих ток и I_1, I_2, I_3, ... (рис. 4.3), соотношение (4.12) записывается в виде

$$\oint_l \overline{H}\,\overline{dl} = \sum I, \tag{4.13}$$

---

*) Приведенная формула легко выводится из закона Био-Савара.

где ΣI представляет собой алгебраическую сумму токов, охваченных контуром.*) Так, для случая, показанного на рис. 4.3, $\sum I = I_1 - I_2 + I_3$.

Соотношение (4.13) носит название теоремы о циркуляции напряженности магнитного поля.

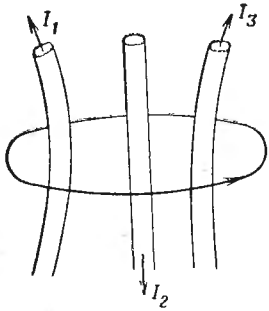


Рис. 4.3. Циркуляция вдоль контура, охватывающего несколько проводников с токами различного направления.

Согласно этой теореме циркуляция напряженности магнитного поля по замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов, пронизывающих поверхность, ограниченную контуром.

Из теоремы о циркуляции вектора $\overline{H}$ и условия (4.3), как будет показано ниже, вытекает в виде следствия закон Био-Савара.

В теории магнитного поля тока соотношение (4.13) играет ту же роль, что и равенство Гаусса — Остроградского в теории электростатического поля.

Ниже рассматриваются примеры применения теоремы о циркуляции вектора $\overline{H}$ к расчету магнитного поля тока.

Поле тока круглого цилиндра

Пусть по цилиндрическому проводу радиуса a течет постоянный ток I. Найдем напряженность поля в произвольной точке, отстоящей на расстоянии ρ от оси провода. Из симметрии задачи очевидно, что напряженность магнитного поля одинакова во всех точках, равноудаленных от оси, и направлена по касательной к окружности с центром на оси провода. Выбирая в качестве контура l силовую линию магнитного поля (рис. 4.4), получим для циркуляции вектора $\overline{H}$ из (4.13)

$$\oint_l \overline{H}\,\overline{dl} = H \oint_l dl = 2\pi\rho H = \sum I,$$

*) Положительные знаки в этой сумме имеют токи, направление которых составляет правовинтовую систему с направлением обхода контура, и отрицательные знаки — токи противоположного направления.

откуда

$$H = \frac{\Sigma I}{2\pi\rho}.$$

В случае, если точка наблюдения находится вне провода ($\rho > a$), ΣI есть полный ток I, текущий по проводнику, и

$$H_{\text{внешн}} = \frac{I}{2\pi\rho}. \tag{4.14}$$

Это значение H совпадает с приведенным ранее для осевого тока.

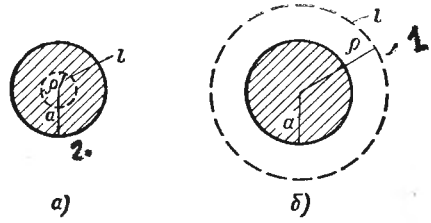


Рис. 4.4. К расчету поля круглого цилиндра.

Если точка наблюдения находится внутри проводника ($\rho < a$), то ΣI представляет собой ток, текущий внутри круга с площадью $\pi\rho^2$, и равняется

$$\sum I = j\pi\rho^2 = \frac{I\rho^2}{a^2},$$

где j — плотность тока, равная $I/\pi a^2$.

Соответственно для напряженности поля $H_{\text{внутр}}$ внутри провода получим

$$H_{\text{внутр}} = \frac{I\rho}{2\pi a^2}. \tag{4.15}$$

На рис. 4.5 приведен график зависимости напряженности поля от расстояния для рассмотренного примера.

Как видно из формул (4.14) и (4.15) и из рис. 4.5, напряженность поля, равная нулю на оси провода, внутри проводника растет пропорционально расстоянию ρ от оси, а во внешнем пространстве убывает обратно пропорционально расстоянию ρ.

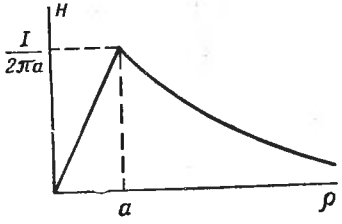


Рис. 4.5. Напряженность магнитного поля круглого цилиндра:
ρ — расстояние от оси цилиндра до точки наблюдения.

При переходе через поверхность раздела проводник — диэлектрик напряженность магнитного поля не терпит разрыва непрерывности в полном соответствии с непрерывностью тангенциальной составляющей вектора $\overline{H}$ (4.5).

Заметим, что если проводник A с током окружен металлическим цилиндром B без тока (рис. 4.6), то, как следует из (4.13), напряженность поля внутри этого цилиндра или вне его будет определяться той же формулой

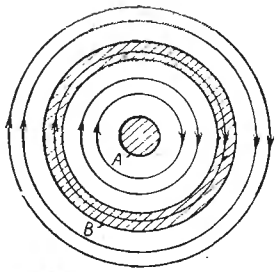


Рис. 4.6. Провод внутри цилиндрического экрана.

(4.14), что и в случае отсутствия цилиндра. Однако поле внутри цилиндра, имея ту же напряженность, что и в случае вакуума, будет иметь индукцию, превышающую индукцию вакуума в μ' раз, где μ' — относительная магнитная проницаемость материала цилиндра.

Поле коаксиального кабеля

Рассмотрим коаксиальный кабель, образованный двумя цилиндрическими проводниками: внутренним проводником радиуса a, по которому ток I течет за плоскость рисунка, и внешним проводником радиуса b, по которому ток I течет в противоположном направлении (рис. 4.7).

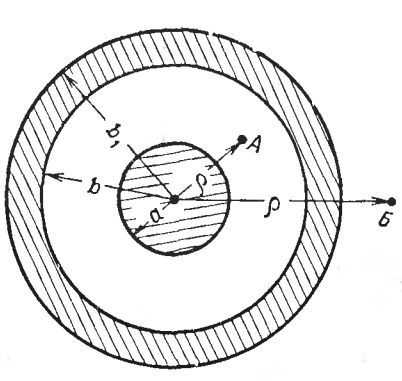


Рис. 4.7. К расчету поля коаксиального кабеля.

Если точка наблюдения A находится в пространстве между внешней поверхностью внутреннего проводника и внутренней поверхностью внешнего проводника ($a \leqslant \rho \leqslant b$), то к нахождению значения $\bar{H}$ в этой точке приложимы все рассуждения, приведшие к формуле (4.14), т. е. поле в этой точке будет определяться лишь

током внутреннего проводника. Ток внешнего проводника не охватывается контуром l и не влияет на величину циркуляции вектора.

Если точка наблюдения $Б$ находится вне коаксиального кабеля, т. е. $\rho > b_1$, то, проведя через точку наблюдения окружность радиуса ρ, получаем, что для этой окружности согласно (4.13)

$$\oint \overline{H} d\overline{l} = \sum I = (I - I) = 0,$$

так как внутри контура текут два равных тока в противоположном направлении.

Из соображений симметрии вектор $\overline{H}$ должен быть одинаков во всех точках окружности интегрирования, а из равенства интеграла нулю следует, что $\overline{H} = 0$.

Таким образом, поле концентрического кабеля целиком сосредоточено внутри области, ограниченной внутренним и внешним проводниками.

Поле внутри этой области определяется током внутреннего проводника и равно

$$H = \frac{I}{2\pi\rho}. \tag{4.16}$$

В непосредственной близости к поверхности внутреннего проводника (т. е. при $\rho = a$)

$$H = \frac{I}{2\pi a},$$

или, вводя величину I_S — ток на единицу длины контура сечения проводника равную,

$$I_{S1} = \frac{I}{2\pi a},$$

получим

$$H|_{\rho=a} = I_{S1}.$$

Аналогично для поля у внутренней поверхности внешнего проводника (при $\rho = b$) найдем

$$H = \frac{I}{2\pi b}.$$

Так как

$$I_{S2} = \frac{I}{2\pi b},$$

то

$$H|_{\rho=b} = I_{S2}.$$

Поле полой цилиндрической трубки

Если ток течет по полой трубке (рис. 4.8), то рассуждениями, совершенно аналогичными тем, которые были приведены в предыдущих примерах, получим, что поле вне трубки

$$H_{\text{внешн}} = \frac{I}{2\pi\rho}.$$

Поле внутри трубки равно нулю. Равенство нулю поля внутри трубки можно доказать, рассматривая поле в точке A как геометрическую сумму

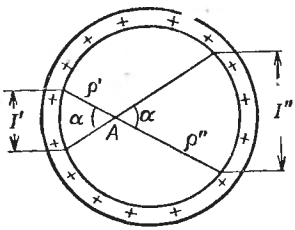


Рис. 4.8. К расчету поля внутри полой трубки.

полей отдельных токов, текущих по образующим цилиндра. Два тока I' и I'', равные

$$I' = I_S \rho' \alpha,$$

$$I'' = I_S \rho'' \alpha,$$

где $\alpha \to 0$, создадут в точке A поля H' и H'', направленные в противоположные стороны. Напряженности этих полей равны между собой, так как

$$\frac{H''}{H'} = \frac{I''}{I'} \frac{\rho'}{\rho''} = 1.$$

Разбивая таким образом ток в цилиндре на сумму токов, подобных показанным на рисунке, придем к выводу, что $H_{\text{результ}} = 0$.

Поле между двумя токонесущими плоскостями

Пусть по двум бесконечным плоским проводникам (рис. 4.9, *а*) текут токи, направленные перпендикулярно плоскости рисунка, причем величины токов одинаковы, а знаки их противоположны*). Магнитное поле этих токов можно найти как сумму полей $\overline{H'}$ и $\overline{H''}$, создаваемых верхним и нижним проводниками по отдельности.

Так как проводники имеют бесконечную протяженность, векторы $\overline{H'}$ и $\overline{H''}$ будут параллельны ограничивающим их плоскостям, как показано на рис. 4.9, *а* стрелками.

---

*) Плотности токов здесь также считаются одинаковыми.

Определим сначала поле $\overline{H}'$. Применяя теорему (4.13) к контуру l', расположенному симметрично относительно уединенного верхнего проводника (рис. 4.9, *б*), будем иметь

$$\oint_{l'} \overline{H}' \, \overline{dl} = I_S \, \Delta l,$$

где I_S — величина тока на единицу ширины сечения проводника; Δl — сторона контура, параллельная силовым линиям магнитного поля. Отсюда

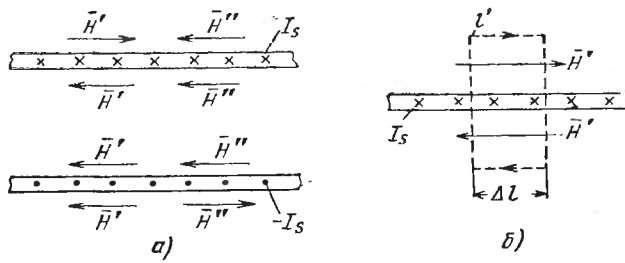


Рис. 4.9. К расчету поля между параллельными плоскостями.

получаем $H' = I_S/2$. Следовательно, напряженность H' в пространстве, окружающем проводник, не зависит от расстояния до его поверхности. Аналогичным путем можно показать, что $H'' = -I_S/2$.

Складывая поля H' и H'' с учетом их направлений, будем иметь: в промежутке между проводниками

$$H = I_S,$$

и в остальной части пространства (вне проводников)

$$H = 0.$$

4. Ротор вектора. Теорема Стокса

Как уже указывалось, теорема о циркуляции напряженности $\overline{H}$ имеет то же значение для магнитного поля, что и теорема Гаусса — Остроградского для электростатического поля. Действительно, теорема Гаусса — Остроградского характеризует зависимость между интегралом от нормальной составляющей вектора $\overline{E}$ по замкнутой поверхности и суммарным зарядом, находящимся в объеме, ограниченном этой поверхностью. Аналогично теорема о циркуляции представляет собой зависимость между интегралом от тангенциальной составляющей вектора $\overline{H}$ по замкнутой кривой и суммарным током, протекающим через поверхность, ограниченную этой кривой. Обе эти зависимости носят интегральный характер и позволяют по значению E на замкнутой поверхности или H на замкнутом контуре найти суммарный заряд в объеме или суммарный ток через поверхность.

Для того чтобы по заданному полю можно было найти распределение зарядов или токов, т. е. их значения в каждой точке поля, необходимо иметь вместо интегральных соотношений — дифференциальные.

В электростатике переход к дифференциальной форме теоремы Гаусса — Остроградского потребовал введения особой дифференциальной операции над вектором — дивергенции вектора. Аналогично, для получения дифференциальной формы теоремы о циркуляции необходимо ввести новую дифференциальную операцию над вектором, носящую название ротора или вихря вектора.

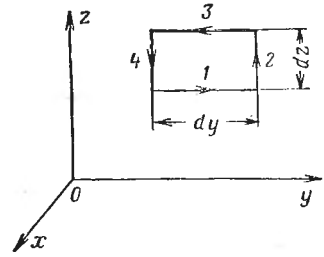


Рис. 4.10. К расчету $\mathrm{rot}_x \overline{A}$.

Дивергенция вектора представляла собой дифференциальную операцию над вектором, образующую скаляр.

Ротор вектора или вихрь есть дифференциальная операция над вектором, образующая новый вектор.

Мы определим ротор вектора $\overline{A}$ как такой вектор $\overline{B}$, проекция которого на нормаль к произвольной плоскости равна пределу отношения циркуляции вектора $\overline{A}$ по контуру, лежащему в этой плоскости, к площади, ограниченной контуром, когда эта площадь стремится к нулю.

Таким образом, запись

$$\overline{B} = \mathrm{rot}\, \overline{A}$$

означает, что

$$B_n = \mathrm{rot}_n A = \lim_{S \to 0} \left| \frac{\oint \overline{A}\, \overline{dl}}{S} \right|, \qquad (4.17)$$

где n есть нормаль к площади S, образующая с направлением обхода контура правовинтовую систему.

Ротор вектора, как и ранее введенные дифференциальные операции — градиент скаляра или дивергенция вектора, является величиной инвариантной по отношению к выбору системы пространственных координат.

Вычислим значение ротора вектора в прямоугольной системе координат.

Пусть имеется поле вектора $\overline{A}$. Построим возле некоторой точки, в которой мы желаем вычислить ротор вектора $\overline{A}$, прямоугольник (рис. 4.10), лежащий в одной из координатных плоскостей, например, в плоскости yz. Пусть стороны этого прямоугольника параллельны координатным осям y и z. По определению ротора (4.17) для того, чтобы найти проекцию ротора вектора $\overline{A}$ на ось x, надо вычислить

циркуляцию вектора $\overline{A}$ по контуру прямоугольника (обходя его в направлении, соответствующем правовинтовой системе по отношению к оси x) и, разделив эту величину на площадь прямоугольника, найти предельное значение, когда площадь стягивается к точке наблюдения.

Точно так же, как и при вычислении дивергенции вектора, мы непосредственно получим нужное предельное значение, если выберем стороны прямоугольника бесконечно малыми и равными соответственно dy и dz.

Пронумеровав стороны, как показано на рис. 4.10, и обозначив через A_y и A_z проекции вектора на оси y и z, получим

$$\int_x \overline{A}\,\overline{dl} = (A_{y1} - A_{y3})\,dy + (A_{z2} - A_{z4})\,dz,$$

где значок x под интегралом означает, что циркуляция вычислялась в плоскости, перпендикулярной оси x, а цифры у проекций векторов указывают, какой стороне они соответствуют. $A_{y1} - A_{y3}$ есть разность значений функций A_y в точках, соответствующих значениям аргумента z и $z + dz$:

$$A_{y1} - A_{y3} = -\frac{\partial A_y}{\partial z}\,dz.$$

Точно так же $A_{z2} - A_{z4}$ есть разность значений функций A_z в точках, соответствующих значению аргумента $y + dy$ и y:

$$A_{z2} - A_{z4} = \frac{\partial A_z}{\partial y}\,dy.$$

Подставляя эти значения разностей функций в исходный интеграл, будем иметь:

$$\int_x \overline{A}\,\overline{dl} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) dy\,dz.$$

Разделив это выражение на площадь, получим выражение для проекции ротора на ось x:

$$\mathrm{rot}_x \overline{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}. \tag{4.18}$$

Аналогично вычисляя циркуляцию по прямоугольникам, расположенным в плоскостях, перпендикулярных осям y и z, находим выражения для остальных проекций ротора:

$$\mathrm{rot}_y \overline{A} = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \tag{4.19}$$

$$\mathrm{rot}_z \overline{A} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \tag{4.20}$$

По известным выражениям для проекций ротора можно определить сам ротор как геометрическую сумму его трех проекций. Вводя орты $\bar{i}_x$, $\bar{i}_y$, $\bar{i}_z$ координатных осей, получим

$$\operatorname{rot} \bar{A} = \bar{i}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \bar{i}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \bar{i}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right). \quad (4.21)$$

Рассмотрим теперь выражение для ротора в произвольной ортогональной криволинейной системе координат ξ, η, ζ.

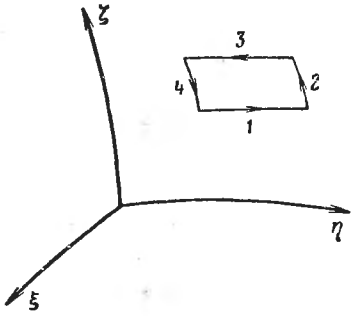


Рис. 4.11. К расчету $\operatorname{rot}_\xi \bar{A}$.

На рис. 4.11 изображен криволинейный прямоугольник на поверхности, перпендикулярной оси ξ. Аналогично предыдущему имеем:

$$\int_\xi \bar{A}\, d\bar{l} = [(A_\eta h_\eta)_1 - (A_\eta h_\eta)_3]\, d\eta + [(A_\zeta h_\zeta)_2 - (A_\zeta h_\zeta)_4]\, d\zeta,$$

где при переходе от стороны *1* к стороне *3* и от стороны *2* к стороне *4* меняются значения не только составляющих вектора, но и размеры самих сторон или соответственно значения масштабных коэффициентов h_η и h_ζ.

Поэтому для разностей, заключенных в квадратные скобки, имеем:

$$(A_\eta h_\eta)_1 - (A_\eta h_\eta)_3 = -\frac{\partial}{\partial \zeta} (A_\eta h_\eta)\, d\zeta,$$

$$(A_\zeta h_\zeta)_2 - (A_\zeta h_\zeta)_4 = \frac{\partial}{\partial \eta} (A_\zeta h_\zeta)\, d\eta.$$

После подстановки в выражение для циркуляции вектора получим:

$$\int_\xi \bar{A}\, d\bar{l} = \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (A_\zeta h_\zeta) - \frac{\partial}{\partial \zeta} (A_\eta h_\eta) \right] d\eta\, d\zeta.$$

Разделив это выражение на площадь криволинейного прямоугольника, равную $h_\eta h_\zeta d_\eta d\zeta$, получим для проекции ротора на ось ξ:

$$\operatorname{rot}_\xi \overline{A} = \frac{1}{h_\eta h_\zeta}\left[\frac{\partial}{\partial \eta}(A_\zeta h_\zeta) - \frac{\partial}{\partial \zeta}(A_\eta h_\eta)\right] \tag{4.22}$$

и аналогично для других проекций:

$$\operatorname{rot}_\eta \overline{A} = \frac{1}{h_\zeta h_\xi}\left[\frac{\partial}{\partial \zeta}(A_\xi h_\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi}(A_\zeta h_\zeta)\right]; \tag{4.23}$$

$$\operatorname{rot}_\zeta \overline{A} = \frac{1}{h_\xi h_\eta}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}(A_\eta h_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta}(A_\xi h_\xi)\right]. \tag{4.24}$$

Пользуясь формулами (4.22)—(4.24), напишем выражения для проекции ротора в сферической и цилиндрической системах координат.

Сферическая система координат. В этом случае координаты $\xi = r$; $\eta = \theta$; $\zeta = \varphi$, масштабные коэффициенты $h_\xi = 1$; $h_\eta = r$; $h_\zeta = r\sin\theta$ и уравнения (4.22)—(4.24) принимают вид:

$$\operatorname{rot}_r \overline{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right],$$

$$\operatorname{rot}_\theta \overline{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta\, A_\varphi)\right],$$

$$\operatorname{rot}_\varphi \overline{A} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right].$$

Цилиндрическая система координат. Теперь $\xi = \rho$; $h = \varphi$; $\zeta = z$, масштабные коэффициенты $h_\xi = 1$; $h_\eta = \rho$; $h_\zeta = 1$ и

$$\operatorname{rot}_\rho \overline{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot}_\varphi \overline{A} = \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho},$$

$$\operatorname{rot}_z \overline{A} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\varphi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right].$$

Помимо трех основных дифференциальных операций: градиента, дивергенции и ротора нам будут встречаться и другие действия, представляющие собой дифференциальные операции более высоких порядков.

Полезно запомнить следующие формулы, справедливость которых можно проверить простой подстановкой:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} U = 0 \tag{4.25}$$

[проверяется подстановкой в уравнение (4.21) значений проекции градиента U] и

$$\operatorname{div}\operatorname{rot} \overline{A} = 0 \tag{4.26}$$

[проверяется подстановкой в уравнение (1.20) значений проекций ротора из (4.21)].

Другие формулы векторного анализа будут даны ниже. Остановимся пока на рассмотрении содержания формул (4.25) и (4.26).

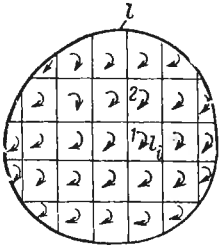


Рис. 4.12. К доказательству теоремы Стокса.

Формула (4.25) утверждает отсутствие вихрей в потенциальном поле, что тождественно равенству нулю циркуляции потенциального вектора по замкнутому пути или независимости циркуляции этого вектора от формы пути.

Формула (4.26), не столь очевидная, как предыдущая, утверждает, что поле вихря произвольного вектора носит соленоидальный характер, т. е. линии вихря являются либо замкнутыми линиями, либо уходят в бесконечность.

Перейдем теперь к выводу важной теоремы векторного анализа, известной под названием теоремы Стокса. Эта теорема связывает поверхностный интеграл с интегралом по замкнутому контуру и в этом смысле аналогична теореме Гаусса — Остроградского, которая связывала объемный интеграл с интегралом по замкнутой поверхности.

Для вывода теоремы Стокса рассмотрим в поле вектора $\overline{A}$ произвольную поверхность S (рис. 4.12), ограниченную контуром l. Разобьем эту поверхность произвольным образом на сетку из бесконечного числа бесконечно малых площадок. Для любой из этих площадок на основании (4.17) можно написать:

$$\oint_{l_i} \overline{A}\, d\overline{l}_i = \operatorname{rot}_n \overline{A}\, dS, \tag{4.27}$$

где dS — бесконечно малая площадка, охваченная контуром l_i.

Заметим, что правая часть равенства представляет собой скалярное произведение вектора rot $\overline{A}$ на вектор-площадку $d\overline{S}$ и яв-

ляется таким образом потоком ротора вектора A через площадку dS:

$$\mathrm{rot}_n \overline{A}\, dS = \mathrm{rot}\, \overline{A}\, \overline{dS}.$$

Если теперь последовательно написать равенства (4.27) для всех элементарных площадок и сложить все эти выражения, то сумма правых частей дает интеграл, распространенный на всю площадь S, в виде

$$\int_S \mathrm{rot}\, \overline{A}\, \overline{dS}.$$

При суммировании левых частей равенств (4.27) по всем площадкам следует учесть, что интегралы по всем смежным сторонам войдут в сумму два раза и притом с различными знаками. Так, например, смежная сторона площадок *1* и *2* в циркуляции по контуру площадки *1* при движении по часовой стрелке будет пройдена слева направо, а в циркуляции по контуру площадки *2* эта же сторона будет пройдена справа налево.

Следовательно, в результате суммирования интегралы по всем внутренним сторонам контуров l_i обратятся в нуль. Не обратятся в нуль только интегралы по внешним сторонам, которые в совокупности дадут

$$\oint_l \overline{A}\, \overline{dl},$$

где l — внешний контур, ограничивающий поверхность.

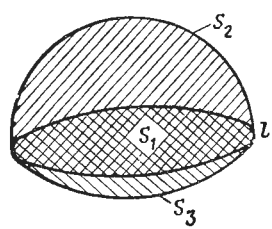


Рис. 4.13. Три произвольные поверхности, опирающиеся на один и тот же контур l.

Таким образом, суммирование равенств типа (4.27) по всем площадкам поверхности S приводит к выражению

$$\oint_l \overline{A}\, \overline{dl} = \int_S \mathrm{rot}\, \overline{A}\, \overline{dS}. \qquad (4.28)$$

Это равенство носит название теоремы Стокса. Согласно теореме Стокса циркуляция вектора по произвольному замкнутому контуру равна потоку его ротора через поверхность, ограниченную этим контуром.

Заметим, что из (4.28) вытекает как следствие, что поток ротора через поверхность S зависит лишь от формы и положения контура l, ограничивающего эту поверхность, и не зависит от ее формы. На рис. 4.13 приведены в виде примера три различные поверхности, через которые поток ротора будет одним и тем же.

5. Дифференциальные уравнения магнитного поля постоянного тока

Рассмотрим произвольный контур l в магнитном поле постоянного тока. Согласно (4.13)

$$\oint_l \overline{H}\,\overline{dl} = \sum I.$$

В этом выражении ΣI представляет собой алгебраическую сумму токов, текущих внутри контура. Если контур l стягивает некоторую поверхность S, то все эти токи протекают через поверхность S. Поэтому ΣI можно представить как интеграл от плотности тока через поверхность S:

$$\sum I = \int_S \overline{j}\,\overline{dS}$$

и уравнение (4.13) перепишется в виде

$$\oint_l \overline{H}\,\overline{dl} = \int_S \overline{j}\,\overline{dS}. \tag{4.29}$$

Левую часть равенства (4.29) по теореме Стокса можно преобразовать

$$\oint_l \overline{H}\,\overline{dl} = \int_S \operatorname{rot}\overline{H}\,dS,$$

что после подстановки в (4.29) дает

$$\int_S \operatorname{rot}\overline{H}\,\overline{dS} = \int_S \overline{j}\,\overline{dS}. \tag{4.30}$$

Так как равенство (4.30) должно выполняться для произвольной поверхности S, то из него вытекает равенство подынтегральных выражений:

$$\operatorname{rot}\overline{H} = \overline{j}. \tag{4.31}$$

Уравнение (4.31) представляет собой дифференциальное выражение теоремы о циркуляции (4.13). Согласно (4.31) вихрем или ротором магнитного поля является плотность тока.

Заметим, что уравнение (4.31) связывает в магнитном поле плотность тока с напряженностью $\overline{H}$ аналогично тому, как уравнение (1.19) связывало напряженность электрического поля с плотностью объемных зарядов.

С помощью уравнения (4.31) не представляет труда решить так называемую обратную задачу, т. е. найти распределение токов по заданному полю. Для этого необходимо лишь вычислить производные, определяющие значение ротора, и тем самым определить величину ротора для любой точки поля. Решение прямой задачи, т. е. задачи о нахождении поля вектора $\overline{H}$ по заданному распределению токов, требует решения системы трех дифференциальных уравнений, записанных в форме векторного уравнения (4.31). К этой системе можно присоединить еще уравнение для вектора индукции (4.3). Таким образом, полная система дифференциальных уравнений, определяющих магнитное поле постоянного тока, будет иметь вид:

$$\operatorname{rot} \overline{H} = \overline{j}, \qquad \operatorname{div} \mu \overline{H} = 0.$$

6. Символический вектор ∇ и некоторые формулы векторного анализа

Для упрощения записи векторных операций, а также для получения мнемонических приемов написания различных формул векторного анализа, удобно ввести символический вектор «набла», определяемый как

$$\nabla = \overline{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \overline{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \overline{i}_z \frac{\partial}{\partial z}. \tag{4.32}$$

Вводя подобное обозначение, условимся во всех промежуточных действиях с участием «набла» производить вычисления таким образом, как если бы $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$ имели смысл числовых выражений проекций вектора на соответствующие оси. Однако после получения окончательного результата следует «вспомнить», что в действительности $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$ не числа, а лишь символы дифференцирования.

Поясним изложенное на ряде примеров.

Умножение ∇ на скаляр U

Умножение вектора на скаляр означает умножение всех проекций вектора на величину скаляра.

Рассматривая $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ и $\partial/\partial z$ как проекции вектора, получим

$$\nabla U = \overline{i}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \overline{i}_y \frac{\partial U}{\partial y} + \overline{i}_z \frac{\partial U}{\partial z}. \tag{4.33}$$

В результате вычисления получилось выражение (4.33), в котором мы, истолковывая $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ и $\partial/\partial z$ как знаки дифференцирования, узнаем выражение для градиента скаляра.

Так что

$$\nabla U = \operatorname{grad} U.$$

Скалярное умножение вектора ∇ *на вектор* $\bar{a}$

Как известно, скалярное произведение двух векторов есть скалярная величина, которая может быть выражена в виде суммы произведений проекций векторов на соответствующие координатные оси.

Проекциями вектора ∇ являются $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ и $\partial/\partial z$, а проекциями вектора $\bar{a}$ — величины a_x, a_y и a_z. Поэтому

$$\nabla\bar{a} = \frac{\partial a_x}{\partial y} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \tag{4.34}$$

или

$$\nabla\,\bar{a} = \operatorname{div}\bar{a}.$$

Векторное умножение вектора ∇ *на вектор* $\bar{a}$

Из векторной алгебры известно, что векторное произведение двух векторов $\bar{b}$ и $\bar{a}$ образует новый вектор $\bar{c} = \bar{b} \times \bar{a}$, проекции которого вычисляются по формулам:

$$c_x = b_y a_z - b_z a_y; \quad c_y = b_x a_x - b_z a_z;$$
$$c_z = b_x a_y - b_y a_x,$$

так что

$$\bar{c} = \bar{i}_x (b_y a_z - b_z a_y) + \bar{i}_y (b_z a_x - b_x a_z) + \bar{i}_z (b_x a_y - b_y a_x).$$

Заменяя значения проекций $\bar{b}$ на проекции вектора ∇, получим

$$\nabla \times \bar{a} = \bar{i}_x \left(\frac{\partial}{\partial y} a_z - \frac{\partial}{\partial z} a_y \right) + \bar{i}_y \left(\frac{\partial}{\partial z} a_x - \frac{\partial}{\partial x} a_z \right) +$$
$$+ \bar{i}_z \left(\frac{\partial}{\partial x} a_y - \frac{\partial}{\partial y} a_x \right). \tag{4.35}$$

Сравнивая (4.35) с формулами (4.21), видим, что правая часть (4.35) есть выражение $\operatorname{rot}\bar{a}$.

Таким образом,

$$\nabla \times \bar{a} = \operatorname{rot}\bar{a}.$$

Заметим, что rot $\bar{a}$ можно записать в виде определителя:

$$\operatorname{rot}\bar{a}=\begin{vmatrix} x & \bar{i}_y & \bar{i}_z \\ \nabla_x & \nabla_y & \nabla_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}, \tag{4.36}$$

где

$$\nabla_x=\frac{\partial}{\partial x}; \qquad \nabla_y=\frac{\partial}{\partial y}; \qquad \nabla_z=\frac{\partial}{\partial z}.$$

В общем случае произвольной ортогональной системы координат:

$$\operatorname{rot}\bar{a}=\begin{vmatrix} \dfrac{\bar{i}_\xi}{h_\eta h_\zeta} & \dfrac{\bar{i}_\eta}{h_\zeta h_\xi} & \dfrac{\bar{i}_\zeta}{h_\xi h_\eta} \\ \dfrac{\partial}{\partial\xi} & \dfrac{\partial}{\partial\eta} & \dfrac{\partial}{\partial\zeta} \\ h_\xi a_\xi & h_\eta a_\eta & h_\zeta a_\zeta \end{vmatrix}. \tag{4.37}$$

При помощи вектора ∇ легко запоминаются многие формулы векторного анализа.

1. Выражение rot grad U, записанное при помощи ∇, будет

$$\nabla\times(\nabla U).$$

Толкуя ∇ как реальный вектор, приходим к выводу, что вектор ∇U должен быть направлен вдоль вектора ∇ (так как от умножения вектора на скаляр направление вектора не меняется). Поэтому вышенаписанное выражение есть векторное произведение двух одинаково направленных векторов, и, значит,

$$\nabla\times(\nabla U)=\operatorname{rot}\operatorname{grad}U=0.$$

Мы получили формулу (4.25) чисто мнемоническими приемами, не имеющими ничего общего со строгим математическим доказательством, но тем не менее приводящими к правильному результату.

2. Выражение div rot $\bar{a}$, записанное при помощи ∇, будет

$$\nabla(\nabla\times\bar{a}).$$

Но векторное произведение $\nabla\times\bar{a}$ должно быть перпендикулярно к вектору ∇, а скалярное произведение вектора ∇ на вектор, перпендикулярный к нему, равно нулю. Значит,

$$\nabla(\nabla\times\bar{a})=\operatorname{div}\operatorname{rot}\bar{a}=0.$$

Мы получили уже известную формулу (4.26).

3. Основываясь на формуле векторной алгебры

$$\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})=\bar{b}(\bar{a}\,\bar{c})-(\bar{a}\,\bar{b})\,\bar{c}$$

и заменяя векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ на вектор ∇, получим

$$\nabla\times(\nabla\times\bar{c})=\nabla(\nabla\bar{c})-(\nabla\nabla)\,\bar{c},$$

или

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\bar{c}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{c}-\nabla^2\bar{c}. \tag{4.38}$$

В формуле (4.38) употреблено обозначение $\nabla^2\bar{c}$, которое в развернутом виде будет иметь вид

$$\nabla^2\bar{c}=\frac{\partial^2\bar{c}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\bar{c}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\bar{c}}{\partial z^2}. \tag{4.39}$$

4. Рассмотрим выражение $\nabla(\varphi\psi)$, где φ и ψ — скалярные функции пространственных координат. Учитывая, что ∇ есть оператор дифференцирования, и пользуясь правилами дифференцирования произведения функций, получим

$$\left.\begin{aligned}&\nabla(\varphi\psi)=\varphi\nabla\psi+\psi\nabla\varphi\\ \text{или}\qquad&\\ &\operatorname{grad}(\varphi\psi)=\varphi\operatorname{grad}\psi+\psi\operatorname{grad}\varphi.\end{aligned}\right\} \tag{4.40}$$

5. Аналогично

$$\left.\begin{aligned}&\nabla(\varphi\bar{a})=\varphi\nabla\bar{a}+\bar{a}\nabla\varphi\\ \text{или}\qquad&\\ &\operatorname{div}(\varphi\bar{a})=\varphi\operatorname{div}\bar{a}+\bar{a}\operatorname{grad}\varphi.\end{aligned}\right\} \tag{4.41}$$

6. В заключение рассмотрим выражение $\nabla(a\times b)$. Применяя правила дифференцирования сложных функций соответственно порядку расположения сомножителей в скалярно-векторном произведении, получим

$$\nabla(\bar{a}\times\bar{b})=\bar{b}(\nabla\times\bar{a})+\bar{a}(\bar{b}\times\nabla)$$

или, заменяя лишенное смысла выражение $\bar{b}\times\nabla$ на $-\nabla\times\bar{b}$, получим

$$\left.\begin{aligned}&\nabla(\bar{a}\times b)=\bar{b}(\nabla\times\bar{a})-\bar{a}(\nabla\times\bar{b})\\ \text{или}\qquad&\\ &\operatorname{div}(\bar{a}\times\bar{b})=\bar{b}\operatorname{rot}\bar{a}-\bar{a}\operatorname{rot}\bar{b}.\end{aligned}\right\} \tag{4.42}$$

7. Уравнения Максвелла для стационарных полей и их решение

В данном параграфе мы рассмотрим совместно вопрос об уравнениях электростатики и магнитного поля постоянного тока. Такое совместное рассмотрение целесообразно как по соображениям удобства сравнения характера основных уравнений для этих полей и метода их решения, так и по соображениям подготовки читателя к материалу следующей главы, касающейся законов переменного электромагнитного поля.

Электростатическое поле

В § 7 гл. I было выведено основное уравнение, связывающее напряженность электрического поля с плотностью объемного заряда в каждой точке

$$\operatorname{div} \varepsilon \overline{E} = \rho.$$

Кроме того, так как вектор $\overline{E}$ является потенциальным вектором, т. е. для произвольного замкнутого контура $\oint \overline{E}\, \overline{dl} = 0$, то на основании (4.28) имеем

$$\operatorname{rot} \overline{E} = 0.$$

Приведенные выше уравнения образуют совместную систему дифференциальных уравнений, полностью характеризующих электростатическое поле.

Будем называть эти уравнения уравнениями Максвелла для электростатического поля*).

Уравнения Максвелла могут быть положены в основу теории электрического поля.

Первое из приведенных выше уравнений определяет электростатическое поле как поле истоков.

Истоками поля являются электрические заряды, на которые «опираются» силовые линии электрического поля.

Второе из приведенных выше уравнений говорит об отсутствии вихрей в электростатическом поле.

Рассматривая уравнения Максвелла как основные (исходные) уравнения теории электростатического поля,

Магнитное поле

В § 5 настоящей главы было выведено основное уравнение, связывающее напряженность магнитного поля с плотностью электрического тока в каждой точке

$$\operatorname{rot} \overline{H} = \overline{j}.$$

Кроме того, так как вектор $\overline{B} = \mu \overline{H}$ является соленоидальным вектором, т. е. отсутствуют истинные магнитные заряды, то

$$\operatorname{div} \mu \overline{H} = 0.$$

Приведенные выше уравнения образуют совместно систему дифференциальных уравнений, полностью характеризующих магнитное поле.

Будем называть эти уравнения уравнениями Максвелла для магнитного поля постоянного тока*).

Уравнения Максвелла могут быть положены в основу теории магнитного поля постоянного тока.

Первое из приведенных выше уравнений определяет магнитное поле тока как поле вихрей.

Вихрями поля являются электрические токи, вокруг которых образуются силовые линии магнитного поля.

Второе из приведенных выше уравнений говорит об отсутствии истоков в магнитном поле (или об отсутствии магнитных зарядов).

Рассматривая уравнения Максвелла как основные (исходные) уравнения магнитного поля постоянного

*) Приведенные здесь уравнения есть частный случай более общих уравнений Максвелла для переменных электромагнитных полей (см. гл. V).

мы видим, что обратная задача электростатики, т. е. нахождение источников (зарядов) по заданному полю, проста и сводится к вычислению производных, определяющих дивергенцию вектора $\overline{E}$, а прямая задача нахождения поля по истокам (зарядам) сводится к решению системы дифференциальных уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot}\overline{E}=0, \qquad (A)$$

$$\operatorname{div}\overline{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}. \qquad (B)$$

Рассмотрим вопрос о решении этой системы уравнений.

Так как $\operatorname{rot}\operatorname{grad}U=0$, то из уравнения (А) вектор $\overline{E}$ можно представить как градиент скалярной функции:

$$\overline{E}=-\operatorname{grad}U. \qquad (1.36)$$

Таким образом, задача о нахождении вектора $\overline{E}$ сводится к задаче о нахождении скалярной функции U, которую мы называем потенциалом электрического поля.

Подставляя (1.36) в уравнение (В), получаем

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}U=-\frac{\rho}{\varepsilon}$$

или

$$\nabla^2 U=-\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

тока, мы видим, что обратная задача магнитостатики, т. е. нахождение вихрей (токов) по заданному полю, проста и сводится к вычислению производных, определяющих ротор вектора $\overline{H}$, а прямая задача нахождения поля по вихрям (токам) сводится к решению системы дифференциальных уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot}\overline{H}=\overline{j}, \qquad (A')$$

$$\operatorname{div}\mu\overline{H}=0. \qquad (B')$$

Рассмотрим вопрос о решении этой системы уравнений.

В силу тождества $\operatorname{div}\operatorname{rot}\overline{A}=0$ из уравнения (В′) вектор $\mu\overline{H}$ можно представить как ротор некоторого вектора $\overline{A}$:

$$\mu\overline{H}=\operatorname{rot}\overline{A}. \qquad (4.43)$$

Таким образом, задача о нахождении вектора $\overline{H}$ сводится к задаче о нахождении вспомогательного вектора $\overline{A}$, который мы (по аналогии с решением электростатической задачи) называем вектор-потенциалом магнитного поля.

Однако равенство (4.43) не определяет вектор $\overline{A}$ однозначно, так как для того чтобы задать поле вектора, надо задать не только его вихри, но и его истоки. Поскольку вектор $\overline{A}$ имеет для нас вспомогательное значение и нам необходимо лишь знание его вихрей (4.43), то истоки вектора можно задать произвольно. Нам удобно будет положить, что

$$\operatorname{div}\overline{A}=0. \qquad (4.44)$$

Подставляя (4.43) в уравнение (А′), получаем

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\overline{A}=\mu\overline{j}$$

или, на основании равенства

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\overline{A}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\overline{A}-\nabla^2 A,$$

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\overline{A}-\nabla^2\overline{A}=\mu\overline{j}.$$

Учитывая (4.44), получим

$$\nabla^2\overline{A}=-\mu\overline{j}. \qquad (4.45)$$

Таким образом, для определения потенциала в функции от зарядов необходимо решить уравнение Пуассона. Решение этого уравнения для безграничного пространства дает

$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\limits_V\frac{\rho}{R}\,dV.$$

Здесь R — расстояние от элемента объема dV с координатами x_q, y_q и z_q до точки наблюдения с координатами x_a, y_a и z_a.

Интегрирование ведется по координатам x_q, y_q, z_q объема, заполненного зарядами, так что потенциал оказывается лишь функцией координат точки наблюдения.

На основании соотношения (1.36) имеем

$$\overline{E}=-\operatorname{grad}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\limits_V\frac{\rho}{R}\,dV\right).$$

Уравнение (4.45) представляет собой векторное уравнение, эквивалентное системе трех скалярных уравнений

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2 A_x&=-\mu j_x,\\ \nabla^2 A_y&=-\mu j_y,\\ \nabla^2 A_z&=-\mu j_z,\end{aligned}\right\}\qquad(4.46)$$

где A_x, A_y, A_z и j_x, j_y, j_z — проекции вектор-потенциала и вектора плотности тока на координатные оси.

Каждое из уравнений (4.46) совершенно аналогично уравнению для потенциала электростатического поля, откуда, пользуясь решением электростатической задачи, непосредственно получим:

$$\left.\begin{aligned}A_x&=\frac{\mu}{4\pi}\int\limits_V\frac{j_x}{R}\,dV,\\ A_y&=\frac{\mu}{4\pi}\int\limits_V\frac{j_y}{R}\,dV,\\ A_z&=\frac{\mu}{4\pi}\int\limits_V\frac{j_z}{R}\,dV,\end{aligned}\right\}\qquad(4.47)$$

где интегрирование ведется по координатам объема, заполненного токами, так что проекции вектор-потенциала являются функциями только координат точки наблюдения.

Система уравнений (4.47) может быть записана в виде одного векторного уравнения

$$\overline{A}=\frac{\mu}{4\pi}\int\limits_V\frac{\overline{j}}{R}\,dV.\qquad(4.48)$$

На основании соотношения (4.43) имеем

$$\overline{H}=\operatorname{rot}\left(\frac{1}{4\pi}\int\limits_V\frac{\overline{j}}{R}\,dV\right).\qquad(4.49)$$

Полученное выражение представляет собой решение системы уравнений (A) и (B) или уравнений Максвелла для электростатического поля. Заметим, что так как градиент вычисляется по координатам точек наблюдения, то в полученном решении можно операции вычисления градиента и интегрирования поменять местами. Учитывая, кроме того, что ρ не зависит от координат точек наблюдения, получим

$$\overline{E} = -\int_V \frac{\rho}{4\pi\varepsilon} \operatorname{grad}\left(\frac{1}{R}\right) dV.$$

Но

$$\operatorname{grad}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\overline{R}}{R^3}, \quad *)$$

так что

$$\overline{E} = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\rho\overline{R}}{\varepsilon R^3} dV.$$

В случае точечного заряда

$$\overline{E} = \frac{\overline{r}}{4\pi\varepsilon r^3}\int_V \rho dV = q\frac{\overline{r}}{4\pi\,\varepsilon r^3}$$

(здесь $R = r$).

Таким образом, закон Кулона для поля точечного заряда вытекает как следствие из уравнений Максвелла для электростатики.

Полученное выражение представляет собой решение системы уравнений (A′) и (B′) или уравнений Максвелла для магнитного поля постоянного тока. Заметим, что так как ротор вычисляется по координатам точек наблюдения, то в полученном решении можно операции вычисления ротора и интегрирования поменять местами

$$\overline{H} = \frac{1}{4\pi}\int_V \operatorname{rot}\left(\frac{\overline{j}}{R}\right) dV.$$

Но

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\overline{j}}{R}\right) = \frac{1}{R}\operatorname{rot}\overline{j} + \left[\operatorname{grad}\left(\frac{1}{R}\right)\overline{j}\right].$$

Так как $\overline{j}$ от координат точек наблюдения не зависит, то $\operatorname{rot}\overline{j} = 0$. Подставляя значение

$$\operatorname{grad}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\overline{R}}{R^3}, \quad *)$$

получим окончательно

$$\overline{H} = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\overline{j}\times\overline{R}}{R^3} dV$$

или для элементарного объема с током

$$d\overline{H} = \frac{\overline{j}\times\overline{r}}{4\pi r^3} dV$$

(здесь $R = r$).

Таким образом закон Био-Савара вытекает как следствие из уравнений Максвелла для магнитного поля постоянного тока.

8. Применение вектор-потенциала для расчета магнитного поля постоянного тока

В предыдущем параграфе было показано, что напряженность магнитного поля может быть вычислена при помощи вспомогатель-

*) Вычисляется по правилам дифференцирования сложных функций

$$\operatorname{grad}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{1}{R^2}\operatorname{grad} R = -\frac{\overline{R}}{R^3}.$$

ного вектора — вектор-потенциала, который согласно (4.48) равен:

$$\overline{A}=\frac{\mu}{4\pi}\int\limits_V\frac{\overline{j}}{R}\,dV.$$

В большинстве технических задач при расчете поля можно приближенно считать, что точка наблюдения существенно удалена от различных точек поперечного сечения проводника. В этом случае можно исходить из линейного распределения тока и вычислять вектор-потенциал по формуле

$$\overline{A}=\frac{\mu}{4\pi}\int\limits_l\frac{I\,\overline{dl}}{R}, \tag{4.50}$$

где интеграл берется по всей длине проводника.

Приведем примеры расчета поля при помощи вектор-потенциала.

Поле двухпроводной линии

Рассчитаем магнитное поле, образованное бесконечно длинной двухпроводной линией из параллельных проводов, отстоящих друг от друга на расстоянии d (рис. 4.14). Вектор-потенциал, созданный в точке наблюдения элементом провода dl, равен $\frac{\mu}{4\pi}I\frac{\overline{dl}}{R}$ и имеет

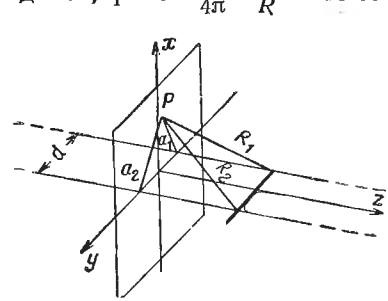


Рис. 4.14. К расчету поля двухпроводной линии.

направление элемента $\overline{dl}$. Так как все элементы провода расположены вдоль одной прямой (оси z), то полный вектор-потенциал имеет лишь одну составляющую

$$A_z=\frac{\mu}{4\pi}I\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)dz=\frac{\mu}{4\pi}I\times$$

$$\times\left\{\int\limits_0^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{a_1^2+z^2}}-\int\limits_0^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{a_2^2+z^2}}\right\},$$

где a_1 и a_2 — расстояния от точки наблюдения P до точек пересечения проводов с плоскостью xy.

Вычисляя интегралы, получим

$$A_z = \frac{\mu}{2\pi} I \left| \ln \frac{a_1 + z}{a_2 + z} \right|_0^\infty = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{a_2}{a_1}. \tag{4.51}$$

Уравнение (4.51) показывает, что поверхностями равных значений вектор-потенциала являются поверхности круглого цилиндра, совпадающие с эквипотенциальными поверхностями для электростатической задачи (см. § 3 гл. II). По вычисленным значениям вектор-потенциала на основании (4.43) находим проекции вектора $\overline{H}$:

$$H_x = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right);$$

$$H_y = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right);$$

$$H_z = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

или, так как $A_x = A_y = 0$,

$$H_x = \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial y}; \quad H_y = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial x}; \quad H_z = 0.$$

Подставляя значение A_z из (4.51) и учитывая, что

$$a_1 = \sqrt{x^2 + \left(\frac{d}{2} + y \right)^2} \quad \text{и} \quad a_2 = \sqrt{x^2 + \left(\frac{d}{2} - y \right)^2},$$

получим

$$H_x = \frac{I}{2\pi} \left(\frac{y - \frac{d}{2}}{a_2^2} - \frac{y + \frac{d}{2}}{a_1^2} \right), \tag{4.52}$$

$$H_y = -\frac{I}{2\pi} x \left(\frac{1}{a_2^2} - \frac{1}{a_1^2} \right). \tag{4.53}$$

Поле кругового витка. Магнитный диполь

Рассчитаем поле в произвольной точке P, созданное круговым витком радиуса a (рис. 4.15). Пусть точка наблюдения лежит в плоскости xOz, от которой производится отсчет угла φ. Различные элементы $\overline{dl}$ кругового витка создадут в точке наблюдения разнонаправленные слагаемые вектор-потенциала. Для упрощения рас-

чета рассмотрим попарно элементы тока, равноудаленные по дуге φ от плоскости xOz. Каждый из этих элементов можно разложить на две составляющие: $\overline{dl_2}$ в плоскости, параллельной xOz, и $\overline{dl_1}$, перпендикулярную к плоскости xOz.

На рис. 4.15, *б* видно, что

$$dl_1 = dl\cos\varphi \quad \text{и} \quad dl_2 = dl\sin\varphi.$$

Элементы $\overline{dl_2}$ в точках φ и $-\varphi$ имеют разные знаки и создаваемые ими составляющие вектор-потенциала взаимно компенсируются.

Элементы $\overline{dl_1}$ с координатами φ и $-\varphi$ создадут в точке наблюдения равные значения вектор-потенциала, направленные перпенди-

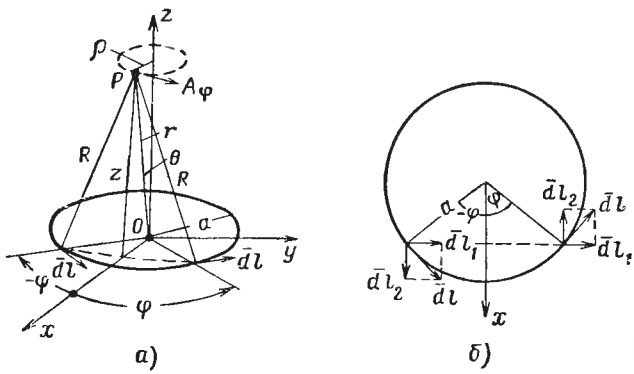


Рис. 4.15. К расчету поля, созданного круговым током:
а — плоскость витка перпендикулярна к плоскости рисунка;
б — плоскость витка совпадает с плоскостью рисунка.

кулярно плоскости xOz или по касательной к координатной линии φ. Поэтому в точке наблюдения вектор-потенциал имеет лишь одну составляющую A_φ, которая равна

$$A_\varphi = \frac{\mu I}{4\pi} \oint_l \frac{dl_1}{R}.$$

Но из рис. 4.15, *а* видно, что

$$R = \sqrt{a^2 + \rho^2 + z^2 - 2a\rho\cos\varphi},$$

а из рис. 4.15, *б* следует, что

$$dl_1 = dl\cos\varphi = a\cos\varphi d\varphi,$$

тогда

$$A_\varphi = \frac{\mu I}{4\pi} \int_0^{\pi} \frac{a\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{a^2 + \rho^2 + z^2 - 2a\rho\cos\varphi}}.$$

Вычисление этого интеграла представляет собой весьма сложную задачу. Поэтому мы ограничимся рассмотрением наиболее простого и в то же время интересного случая, когда выполняется неравенство

$$a^2 \ll r^2 = \rho^2 + z^2,$$

т. е. когда размеры витка достаточно малы по сравнению с расстоянием до точки наблюдения. Пренебрегая величиной a^2 в знаменателе подынтегрального выражения, перепишем его в виде:

$$\sqrt{a^2+\rho^2+z^2-2a\rho\cos\varphi} \approx \sqrt{\rho^2+z^2-2a\rho\cos\varphi} \approx$$
$$\approx \sqrt{\rho^2+z^2}\left(1-\frac{a\rho}{\rho^2+z^2}\cos\varphi\right).$$

Затем, учитывая, что для сферической системы координат

$$r=\sqrt{\rho^2+z^2},\ \rho = r\sin\theta,$$

получим

$$A_\varphi \approx \frac{\mu I_a}{2\pi r}\int_0^\pi \frac{\cos\varphi d\varphi}{1-\frac{a\rho}{r^2}\cos\varphi} \approx \frac{\mu I_a}{2\pi r}\int_0^\pi \cos\varphi\left(1+\frac{a\rho}{r^2}\cos\varphi\right)d\varphi,$$

или, так как

$$\int_0^\pi \cos\varphi d\varphi = 0,\ \text{а}\ \int_0^\pi \cos^2\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2},$$

окончательно имеем

$$A_\varphi = \frac{\mu I}{4r^3}a^2\rho = \frac{\mu I a^2}{4r^2}\sin\theta. \qquad (4.54)$$

Для определения напряженности магнитного поля витка развернем векторное равенство (4.43) в сферических координатах:

$$H_r = \frac{1}{\mu}\operatorname{rot}_r \bar{A} = \frac{1}{\mu r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\varphi),$$
$$H_\theta = \frac{1}{\mu}\operatorname{rot}_\theta \bar{A} = -\frac{1}{\mu r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta A_\varphi),$$
$$H_\varphi = \frac{1}{\mu}\operatorname{rot}_\varphi \bar{A} = 0.$$

Подставляя из (4.54) значение вектор-потенциала и выполняя дифференциальные операции, получаем:

$$\left.\begin{aligned} H_r &= \frac{Ia^2}{2r^3}\cos\theta, \\ H_\theta &= \frac{Ia^2}{4r^3}\sin\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (4.55)$$

Сравним магнитное поле витка малых размеров с полем электрического диполя.

Виток с током

Введем понятие о магнитном моменте витка по формуле

$$\bar{M} = I\mu\bar{S}, \qquad (4.56)$$

где $\bar{S}$ — вектор, направленный по нормали к плоскости витка и образующий с током I правовитковую систему (рис. 4.16,а). Величина вектора $\bar{S}$ равна площади витка, т. е. $S = \pi a^2$.

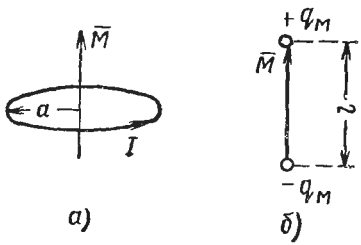


Рис. 4.16. К определению магнитных моментов витка с током (*а*) и магнитного диполя (*б*)

Электрический диполь

Для определения проекций вектора $\bar{E}$ поля электрического диполя на орты сферической системы координат подставим (1.38) в (1.36), предварительно выразив grad U по формуле (2.14).

Преобразуя (4.56) с учетом (4.56), имеем:

$$\left.\begin{aligned} H_r &= \frac{M}{2\pi\mu r^3}\cos\theta; \\ H_\theta &= \frac{M}{4\pi\mu r^3}\sin\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (4.57а)$$

После выполнения дифференциальных операций получим:

$$\left.\begin{aligned} E_r &= \frac{d}{2\pi\varepsilon r^3}\cos\theta; \\ E_\theta &= \frac{d}{4\pi\varepsilon r^3}\sin\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (4.57б)$$

Тождественность выражений (4.57 а) и (4.57 б) говорит о том, что круговой виток бесконечно-малых размеров создает такое же поле, какое создала бы пара точечных магнитных зарядов противоположного знака, помещенных на бесконечно-малом расстоянии друг от друга. Иными словами, рассматриваемый виток с током эквивалентен помещенному в начале координат ($z = 0$) магнитному диполю с моментом, направленным по оси z (рис. 4.16, *б*).

Последнее обстоятельство дает возможность по известным соотношениям для электрического диполя написать аналогичные соотношения, справедливые для магнитного диполя. В частности, по аналогии с (1.61) можно написать формулу для энергии взаимодей-

ствия магнитного диполя с внешним магнитным полем напряженности $\bar{H}$:

$$W = -\bar{M}\bar{H}. \tag{4.58}$$

Полученные в этом параграфе результаты позволят в дальнейшем пояснить магнитные свойства вещества как следствие круговых микроскопических токов, образованных движением заряженных частиц материи.

9. Собственная и взаимная индуктивность

Рассмотрим два замкнутых контура l_1 и l_2 произвольной формы и произвольно расположенные друг относительно друга (рис. 4.17). Если по контуру l_1 течет ток I_1, то образуется магнитное поле, силовые линии которого пронизывают как контур l_1, так и контур l_2.

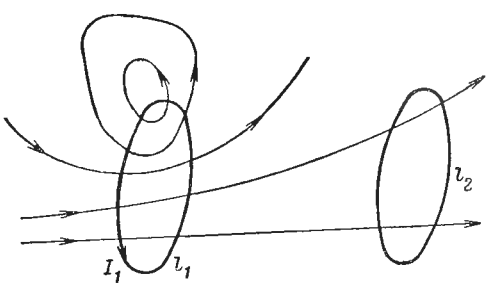


Рис. 4.17. К определению индуктивности и взаимной индуктивности. Случай, когда ток течет только в контуре l_1.

Магнитный поток Φ_{11}, проходящий внутри контура l_1, пропорционален току*)

$$\Phi_{11} = L_1 I_1, \tag{4.59}$$

где коэффициент пропорциональности L_1, зависящий от формы контура и магнитной проницаемости среды, носит название индуктивности контура.

Магнитный поток Φ_{21}, пронизывающий контур l_2 и вызванный током первого контура, будет также пропорционален току I_1;

$$\Phi_{21} = M_{21} I_1, \tag{4.60}$$

где коэффициент пропорциональности M_{21} зависит от формы обоих контуров, от их взаимного расположения и магнитной проницаемости среды.

Аналогично, если ток I_2 течет по контуру l_2, а в контуре l_1 ток отсутствует, то

*) Пропорциональность нарушается в присутствии ферромагнитных материалов.

$$\Phi_{22} = L_2 I_2,$$
$$\Phi_{12} = M_{12} I_2.$$

Коэффициенты M_{21} и M_{12} носят название взаимных индуктивностей.

В общем случае, когда текут оба тока I_1 и I_2, потоки, создаваемые этими токами, складываются так, что результирующий магнитный поток Φ_1 через первый контур

$$\Phi_1 = L_1 I_1 + M_{12} I_2 \tag{4.61}$$

и результирующий поток Φ_2 через второй контур

$$\Phi_2 = L_2 I_2 + M_{21} I_1. \tag{4.62}$$

При расчете потока через контур положительное направление нормали выбирается таким, чтобы оно создавало вместе с направлением тока в этом контуре правовинтовую систему. При этом потоки Φ_{11} и Φ_{22}, а соответственно и индуктивности контуров L_1 и L_2 будут иметь всегда положительное значение. Потоки Φ_{12} и Φ_{21} и соответственно взаимные индуктивности M_{12} и M_{21} могут быть как положительными, так и отрицательными в зависимости от направления токов в контурах l_1 и l_2.

Перейдем теперь к выводу общих формул для расчета собственных и взаимных индуктивностей.

Поток, создаваемый внутри контура l_2 током контура l_1,

$$\Phi_{21} = \int_{S_2} \mu \bar{H}_1 \, \overline{dS_2},$$

где S_2 — произвольная поверхность, ограниченная контуром l_2, а $\bar{H}_1$ — напряженность поля, созданная током I_1 в точках поверхности S_2. Так как $\mu \bar{H}_1 = \operatorname{rot} \bar{A}_1$, где A_1— вектор-потенциал от тока первого контура, то на основании теоремы Стокса имеем

$$\bar{\Phi}_{21} = \int_{l_2} \bar{A}_1 \, \overline{dl}_2. \tag{4.63}$$

Согласно (4.50)

$$\bar{A}_1 = \frac{\mu}{4\pi} \int_{l_1} \frac{I_1 \overline{dl}_1}{R}.$$

Подставляем значение $\bar{A}_1$ в (4.63)

$$\Phi_{21} = \frac{\mu I_1}{4\pi} \int_{l_1} \int_{l_2} \frac{\overline{dl}_1 \, \overline{dl}_2}{R},$$

откуда для

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1}$$

получим

$$M_{21} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{l_1} \int_{l_2} \frac{\overline{dl_1}\, \overline{dl_2}}{R}, \tag{4.64}$$

В формуле (4.64) R есть расстояние между произвольными элементами dl_1 и dl_2 первого и второго контуров.

Как видно из (4.64), в выражении для взаимной индуктивности координаты точек первого и второго контуров входят симметрично, откуда следует, что

$$M_{21} = M_{12} = M_{\text{вз}} \tag{4.65}$$

и

$$\frac{\Phi_{21}}{\Phi_{12}} = \frac{I_1}{I_2}. \tag{4.66}$$

Соотношение (4.65) или (4.66) выражает принцип взаимности для двух контуров, связанных магнитным потоком. Согласно (4.66) ток I_1 вызывает такой же поток через контур l_2, какой равный ему ток I_2 в ы з ы в а е т в контуре l_1. Это соотношение аналогично принципу взаимности, установленному в § 15 гл. I для электростатики.

При расчете индуктивности одного из контуров мы поступаем так же, как при выводе формулы (4.64). В этом случае элементы $\overline{dl_1}$ и $\overline{dl_2}$ принадлежат одному и тому же контуру. Обозначая их соответственно через $\overline{dl}$ и $\overline{dl'}$, получим

$$L = \frac{\mu}{4\pi} \int_{l} \int_{l'} \frac{\overline{dl}\, \overline{dl'}}{R}, \tag{4.67}$$

где R есть расстояние между двумя элементами одного и того же контура. Заметим, однако, что формула (4.67) недостаточно строга, так как допущение линейности тока незаконно в случае, когда контуры l_1 и l_2 совпадают и элемент dl' может быть сколь угодно близок к элементу $\overline{dl}$.

Поэтому при расчете индуктивности следует перейти от линейных токов к объемному распределению плотности токов.

Соответственно формула для расчета индуктивности будет

$$L = \frac{\mu}{4\pi I^2} \int_{V} \int_{V'} \frac{\overline{j}\overline{j}'\, dV\, dV'}{R}, \tag{4.68}$$

где $\overline{j}$ и $\overline{j}'$ — плотности тока в различных элементах объема dV и dV' одного и того же проводника.

10. Энергия магнитного поля тока

Энергия магнитного поля согласно (4.6) равна

$$W = \int_V \frac{\overline{H}\overline{B}}{2}\, dV.$$

Если магнитное поле создано током I, то выражение (4.6) является функцией этого тока.

Так как согласно (4.43) $\overline{B} = \operatorname{rot} \overline{A}$, то $\overline{H}\overline{B} = \overline{H} \operatorname{rot} \overline{A}$ или по (4.42) $\overline{H}\overline{B} = \overline{H} \operatorname{rot} \overline{A} = \operatorname{div} (\overline{A} \times \overline{H}) + \overline{A} \operatorname{rot} \overline{H}$.

Подставляя $\overline{H}\overline{B}$ в (4.6), получим

$$W = \frac{1}{2} \int_V \operatorname{div} (\overline{A} \times \overline{H})\, dV + \frac{1}{2} \int_V \overline{A} \operatorname{rot} \overline{H}\, dV.$$

Первый интеграл на основании теоремы Остроградского преобразуется в интеграл по поверхности сферы S_r радиуса r, ограничивающей объем. Так как интеграл распространен на все бесконечное пространство, то для первого из слагаемых на основании (1.22) получим

$$\int_V \operatorname{div} (\overline{A} \times \overline{H}) dV = \int_{S_r \to \infty} (\overline{A} \times \overline{H})\, \overline{dS}.$$

В случае токов, текущих в объеме V' конечных размеров, вектор-потенциал $\overline{A}$ на поверхности S_r при $r \to \infty$ убывает как $1/r$ [см. (4.50)], а вектор $\overline{H}$ — как $1/r^2$. Так как S_r при этом растет пропорционально r^2, то интеграл стремится к нулю как $1/r$.

Таким образом,

$$W = \frac{1}{2} \int_V \overline{A} \operatorname{rot} \overline{H}\, dV.$$

Выражая $\overline{A}$ и $\operatorname{rot} \overline{H}$ через токи в объеме V' по формулам (4.48) и (4.31):

$$\overline{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\overline{j}'}{R}\, dV', \qquad \operatorname{rot} \overline{H} = \overline{j},$$

получим

$$W = \frac{\mu}{8\pi} \int_{V'} \int_{V'} \frac{\overline{j}\overline{j}'\, dV dV'}{R} \tag{4.69}$$

или с учетом (4.68):

$$W = \frac{LI^2}{2}. \tag{4.70}$$

Уравнение (4.70) связывает энергию магнитного поля с индуктивностью проводника и величиной тока.

В качестве примера рассчитаем погонную индуктивность коаксиального кабеля (см. рис. 4.7). При этом сделаем допущение о том, что вся энергия сосредоточена в области, лежащей между внешней поверхностью внутреннего проводника и внутренней поверхностью внешнего проводника. Поле в этой области, как это следует из (4.14), определится соотношением

$$H = \frac{I}{2\pi\rho},$$

а энергия

$$W = \frac{1}{2}\int_V \mu H^2\, dV = \frac{1}{2}\int_a^b\int_0^{2\pi} \frac{\mu I^2}{4\pi^2\rho^2}\rho d\rho d\varphi =$$

$$= \frac{\mu I^2}{4\pi}\int_a^b \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\mu I^2}{4\pi}\ln\frac{b}{a}. \qquad (4.71)$$

Сопоставляя (4.75) с (4.70), получим для погонной индуктивности кабеля

$$L' = \frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{b}{a}. \qquad (4.72)$$

Это выражение, хотя и является приближенным, вполне пригодно для инженерных расчетов.

Рассмотрим теперь выражение для энергии в случае, когда напряженность поля $\bar{H}$ есть сумма полей $\bar{H}_1$ и $\bar{H}_2$, созданных токами I_1 и I_2, текущими в разных проводниках. В этом случае

$$\bar{H} = \bar{H}_1 + \bar{H}_2,$$

$$\bar{H}\bar{B} = \mu(\bar{H}_1 + \bar{H}_2)(\bar{H}_1 + \bar{H}_2) = \mu H_1^2 + \mu H_2^2 + 2\mu\bar{H}_1\bar{H}_2.$$

Подставляя предыдущее выражение в (4.6), получим для энергии системы токов

$$W = \frac{1}{2}\int_V \mu H_1^2\, dV + \frac{1}{2}\int_V \mu H_2^2\, dV + \int_V \mu\bar{H}_1\bar{H}_2\, dV = W_1 + W_2 + W_{12}. \qquad (4.73)$$

Первые два слагаемых выражают собой собственную энергию токов I_1 и I_2 и могут быть представлены в виде (4.70). Остается рассмотреть третий интеграл в уравнении (4.73).

Выражая $\mu\bar{H}_1$ через вектор-потенциал

$$\mu\bar{H}_1 = \operatorname{rot}\bar{A}_1,$$

получим

$$\mu\bar{H}_1\bar{H}_2 = \bar{H}_2\operatorname{rot}A_1 = \operatorname{div}(\bar{A}_1\times\bar{H}_2) + \bar{A}_1\operatorname{rot}\bar{H}_2.$$

Подставляя $\mu\bar{H}_1\bar{H}_2$ в выражение для W_{12} и производя преобразования, аналогичные приведенным выше при выводе формулы (4.69), получим

$$W_{12}=\int_V \mu\bar{H}_1\bar{H}_2\,dV=\int_V \bar{A}_1\,\mathrm{rot}\,\bar{H}_2\,dV.$$

После замены обозначения dV на dV_2 и подстановки

$$\mathrm{rot}\,\bar{H}_2=\bar{j}_2 \quad \text{и} \quad \bar{A}_1=\frac{\mu}{4\pi}\int_{V_1}\frac{\bar{j}_1\,dV_1}{R},$$

получим

$$W_{12}=\frac{\mu}{4\pi}\int_{V_1}\int_{V_2}\frac{\bar{j}_1\bar{j}_2}{R}\,dV_1\,dV_2, \tag{4.74}$$

где V_1 и V_2 — объемы проводников с токами $\bar{j}_1$ и $\bar{j}_2$.
Это выражение для случая линейных токов имеет вид

$$W_{12}=\frac{\mu}{4\pi}I_1I_2\int_{l_1}\int_{l_2}\frac{d\bar{l}_1\,d\bar{l}_2}{R}$$

или согласно (4.64), (4.65)

$$W_{12}=M_{\text{в}}I_1I_2. \tag{4.75}$$

Таким образом, полная энергия системы из двух электрических цепей с токами I_1 и I_2 равна

$$W=\frac{L_1I_1^2}{2}+\frac{L_2I_2^2}{2}+M_{\text{в}}I_1I_2. \tag{4.76}$$

11. Намагничивающиеся среды

Характер магнитного поля, создаваемого как постоянными магнитами, так и электрическими токами, в значительной степени зависит от свойств окружающей среды. Известно, например, что при внесении различных материальных тел в пространство между двумя проводниками с током сила их взаимодействия изменяется. При переходе границы раздела двух сред с различными значениями магнитной проницаемости в общем случае меняется число силовых линий магнитного поля. Все эти свойства обусловлены намагничиванием веществ.

Явление намагничивания в определенной мере аналогично электрической поляризации диэлектриков, поэтому для выяснения его физической сущности вновь обратимся к молекулярной структуре веществ.

В любом проводнике или диэлектрике, имеющем ионную структуру или состоящем из нейтральных молекул, внутри отдельных ионов или молекул имеет место орбитальное движение электронов вокруг ядер атомов. Вращающийся относительно ядра электрон соответствует микроскопическому круговому току I, который согласно (4.56) эквивалентен элементарному магнитному диполю с моментом

$$\overline{M} = \mu I \overline{S}, \tag{4.77}$$

где $\overline{S}$ — векторная площадь орбиты электрона.

Этот момент мы будем называть орбитальным магнитным моментом электрона.

Наряду с орбитальным моментом, электрон обладает спиновым магнитным моментом, связанным с вращением электрона вокруг собственной оси*). Однако магнитное поле, обусловленное спином электрона, очевидно, тоже может быть сведено к полю микроскопических токов, каким-то образом распределенных в пространстве. Поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что электрон эквивалентен элементарному магнитному диполю с моментом $\overline{M}$, который в конечном итоге обусловлен наличием микроскопических токов.

По характеру процессов при намагничивании различают три вида веществ: диамагнетики, парамагнетики и ферромагнетики.

К диамагнетикам относятся вещества, у которых магнитные моменты элементарных диполей (моменты электронов) в отсутствие внешнего магнитного поля ориентированы произвольно. Вследствие этого их магнитные поля взаимно компенсируются и молекулы (ионы) в целом не проявляют магнитных свойств. Под воздействием внешнего магнитного поля элементарные диполи занимают положения, при которых направление их моментов $\overline{M}$, близко к направлению вектора напряженности внешнего поля. Каждая молекула приобретает магнитный момент $\overline{M}'$, который определяется как геометрическая сумма моментов элементарных диполей:

$$\overline{M}' = \sum_n \overline{M}_n. \tag{4.78}$$

Таким образом, молекулы диамагнетика становятся магнитнополярными, а их моменты, так же как и моменты элементарных диполей, совпадают с направлением внешнего магнитного поля. В этом заключается процесс намагничивания диамагнитных веществ.

Если частицы диамагнитных веществ приобретают магнитный момент лишь под воздействием внешнего магнитного поля, то частицы (т. е. атомы и молекулы) парамагнитных веществ обладают собственным магнитным моментом даже при отсутствии внешнего поля

---

*) Подробнее об этом см. в § 12 гл. XIV.

(магнитно-полярные молекулы)*). Однако в обычном состоянии эти вещества, так же как и диамагнетики, не проявляют магнитных свойств из-за хаотической ориентации моментов молекул (атомов). Намагничивание парамагнетиков объясняется тем, что под действием сил внешнего поля магнитно-полярные частицы поворачиваются и их моменты ориентируются в соответствующем направлении.

Как в диамагнитных, так и в парамагнитных веществах намагничивание исчезает с исчезновением внешнего поля.

Наконец, третью, особую группу веществ составляют ферромагнетики. Как и в парамагнитных веществах, их намагничивание вызывается упорядочением ориентации магнитных моментов атомов. Однако намагничивание ферромагнетиков сопровождается целым рядом весьма сложных явлений, таких, как остаточный магнетизм, самопроизвольное (спонтанное) намагничивание и др. Особенности намагничивания ферромагнитных веществ обусловлены тем, что между соседними атомами существуют значительные силы взаимодействия, природа которых объяснима лишь в рамках квантовой теории.

Каждый атом ферромагнетика находится в сильном магнитном поле («молекулярном поле») смежных с ним атомов. В этих условиях энергия атома, эквивалентного магнитному диполю согласно (4.58) зависит от ориентации его момента по отношению к молекулярному полю. Причем энергия имеет тем меньшее значение, чем ближе момент атома совпадает с направлением молекулярного поля. Стремясь к положению, при котором энергия минимальна, атомы, таким образом, имеют тенденцию ориентироваться в одном и том же направлении. Эта способность атомов должна, казалось бы, приводить к самопроизвольному (спонтанному) намагничиванию ферромагнетиков. Между тем, в обычном состоянии большинство представителей ферромагнитных веществ (например, железо) не проявляет магнитных свойств. Объяснить это можно тем, что ферромагнитные вещества распадаются на ряд микроскопически малых автономных областей (области Вейсса), каждая из которых по изложенным выше причинам самопроизвольно намагничена до определенного состояния**). Однако в отсутствие внешних воздействий направление намагничивания областей Вейсса различно, и средний магнитный момент всего тела оказывается равным нулю. При наложении внешнего магнитного поля ориентация моментов таких областей упорядочивается. В результате происходит намагничивание ферромагнетика, частично остающееся даже после исчезновения внешнего магнитного поля. Остаточное намагничивание сохраняется до тех пор, пока на тело не начнут действовать новые фак-

*) Исследования показывают, что природа пара- и ферромагнетизма обусловлена главным образом спиновым магнитным моментом электронов.

**) С механизмом возникновения областей Вейсса или, как их иногда называют, доменов, можно познакомиться, например, в [16].

торы, такие как нагревание, магнитное поле обратного направления и т. п.

Таким образом, под воздействием внешнего магнитного поля в любом веществе образуется внутреннее поле, вызванное в конечном счете микроскопическими токами. Это внутреннее поле, взаимодействуя с внешним полем, изменяет его.

Количественно часть поля, обусловленную наличием вещества, принято характеризовать вектором магнитной поляризации, который по аналогии с вектором электрической поляризации, определяется как векторная сумма магнитных моментов молекул в единице объема вещества

$$\overline{P}^{\text{м}} = \sum \overline{M}'. \tag{4.79}$$

Вектор магнитной поляризации показывает насколько магнитная индукция в данной среде отличается от индукции в вакууме, т. е.

$$\overline{P}^{\text{м}} = \overline{B} - \mu_0 \overline{H} = \mu \overline{H} - \mu_0 \overline{H}. \tag{4.80}$$

Введем магнитную восприимчивость среды по формуле

$$\varkappa_{\text{м}} = \mu' - 1 \tag{4.81}$$

и придадим выражению (4.80) иной вид

$$\overline{P}^{\text{м}} = \varkappa_{\text{м}} \mu_0 \overline{H}. \tag{4.82}$$

В отличие от электрической восприимчивости величина $\varkappa_{\text{м}}$ может быть как положительной, так и отрицательной.

Так, например, диамагнетики обладают отрицательной восприимчивостью (для них $\mu' < 1$, а $\varkappa_{\text{м}} < 0$), т. е. направление вектора намагничивания у них противоположно направлению вектора напряженности намагничивающего поля. Так же как и электрическая восприимчивость диэлектриков, состоящих из нейтральных молекул, магнитная восприимчивость диамагнетиков практически не зависит от температуры.

Напротив, восприимчивость парамагнитных тел имеет положительное значение ($\mu' > 1$, $\varkappa_{\text{м}} > 0$) — в них вектор намагничивания совпадает по направлению с вектором напряженности внешнего поля. Магнитная восприимчивость парамагнетиков уменьшается при возрастании температуры. В этом отношении они подобны диэлектрикам, состоящим из полярных молекул.

Для диамагнитных и парамагнитных веществ магнитная восприимчивость не зависит от напряженности намагничивающего поля. Векторы $\overline{P}^{\text{м}}$ и $\overline{H}$ (а также $\overline{B}$ и $\overline{H}$) связаны между собой линейной зависимостью. Поэтому диамагнетики и парамагнетики относятся к линейным средам.

Численные значения магнитной восприимчивости для диамагнетиков и парамагнетиков очень малы. Например, для кислорода, ко-

торый является парамагнетиком, $\varkappa_м = 2{,}26 \cdot 10^{-5}$ (при $t = 18°$ С), а для азота, относящегося к диамагнетикам, $\varkappa_м = -8{,}8 \cdot 10^{-8}$. Стало быть, в большинстве случаев намагничиванием этих сред можно пренебрегать и считать $\varkappa_м \approx 0$ ($\mu' \approx 1$).

Восприимчивость ферромагнитных материалов при достаточно сильных внешних магнитных полях является большой положительной величиной*). Для них зависимость $P^м = f(H)$ имеет вид петли гистерезиса (рис. 4.18). Поэтому величина вектора $\overline{P}^м$ определяется не только напряженностью приложенного в настоящий момент поля, но и предшествующей историей данного образца ферромагне-

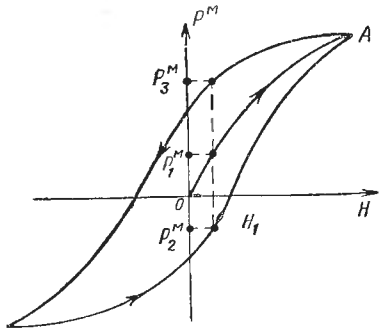


Рис. 4.18. График зависимости магнитной поляризации ферромагнетика от напряженности внешнего поля.

тика. Так, например, если ферромагнетик ранее не находился в магнитном поле, то при напряженности внешнего поля H_1 величина вектора магнитной поляризации определяется кривой первоначального намагничивания (участок OA) и будет равна $P_1^м$. Если же образец уже подвергался воздействию магнитного поля, то модуль вектора $\overline{P}^м$ в зависимости от величины и направления предшествующего поля может оказаться равным либо $P_2^м$, либо $P_3^м$.

Хотя в ферромагнетиках $\overline{P}^м$ и $\overline{H}$ связаны между собой нелинейной и неоднозначной зависимостью, формально для них можно сохранить соотношение типа (4.82). Однако следует иметь в виду, что магнитная восприимчивость ферромагнетиков сложным образом зависит от напряженности внешнего поля, от предыстории данного образца и целого ряда других факторов (способа термообработки, малейших химических примесей и т. п.). Поэтому $\varkappa^м$ в каждом конкретном случае должна определяться по кривой $P^м = f(H)$ в точке, соответствующей значению напряженности внешнего магнитного поля.

*) В слабых намагничивающих полях моменты областей Вейсса лишь немного отклоняются в сторону внешнего поля и при исчезновении его вновь возвращаются в исходное состояние. Поэтому в слабых полях поведение ферромагнетиков аналогично поведению парамагнетиков.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПЕРЕМЕННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Основные законы переменного электромагнитного поля были сформулированы Фарадеем и Максвеллом в результате глубокого анализа богатого экспериментального материала, накопленного в течение последних десятилетий XVIII века и первых десятилетий XIX века. Этот анализ привел Фарадея и Максвелла к замене теории дальнодействия теорией близкодействия. Фарадей и Максвелл стихийно пошли по материалистическому пути, отказавшись от представлений о взаимодействии зарядов и токов в «пустой» среде.

Вместо «пустой» среды было введено понятие об электромагнитном поле. Однако Фарадей и Максвелл не смогли представить многообразия возможных форм проявления материи и постарались придать электромагнитному полю механическую природу, рассматривая электромагнитные процессы как упругие возмущения в гипотетической среде — «эфире». Механическая теория «эфира», естественно, оказалась несостоятельной, и в настоящее время термин «эфир» может рассматриваться лишь как синоним понятия о пространстве, заполненном электромагнитным полем.

К счастью, теория электромагнитного поля, сформулированная в 1864 году Максвеллом в виде так называемых уравнений Максвелла, вовсе не нуждается в концепции упругого эфира, так как никакие параметры эфира в эти уравнения не входят.

Уравнения Максвелла суммировали не только весь экспериментальный материал, касающийся взаимодействия постоянных во времени электрических зарядов и токов. В результате признания роли промежуточной среды в процессах взаимодействия токов и зарядов Максвелл пришел к ряду гениальных обобщений и смог сформулировать уравнения переменных электромагнитных полей, для которых сколько-нибудь значительные экспериментальные данные еще отсутствовали.

Уравнения Максвелла для переменных электромагнитных полей являются обобщением уравнений, приведенных в § 8 гл. IV, и являются выражением основных законов электромагнитного поля подобно законам Ньютона в механике.

1. Первое уравнение Максвелла

Первое уравнение Максвелла для переменного поля является обобщением уравнения

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{j}, \tag{A}$$

связывающего напряженность магнитного поля и плотность постоянного электрического тока.

Рассмотрим вопрос о применимости этого равенства к полю переменных токов. Можно было бы сделать предположение, что законы постоянных полей должны быть справедливы для мгновенных значений переменных полей и что в каждый отдельный момент времени значения переменного тока проводимости и напряженности магнитного поля связаны написанным выше соотношением (A).

Однако такое предположение несправедливо, ибо оно противоречит закону сохранения количества электричества. Действительно, из уравнения (A) на основании формулы векторного анализа $\operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{a} = 0$ вытекает, что дивергенция правой части равенства (A) равна нулю, т. е. $\operatorname{div} \bar{j} = 0$.

Между тем, это условие выполняется лишь в частном случае постоянного тока. Для переменных токов закон сохранения количества электричества приводит к требованию, чтобы

$$\operatorname{div} \bar{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \tag{B}$$

Уравнение (A) и равенство (B) находятся в очевидном противоречии друг с другом. Не подвергая сомнению закон сохранения количества электричества, мы должны признать несправедливость уравнения (A) для переменного поля.

Максвелл высказал предположение о том, как надо «исправить» это уравнение для переменных полей. По Максвеллу следует в правую часть уравнения (A) вместо плотности тока проводимости поставить плотность полного тока, переписав, таким образом, уравнение (A) в виде

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{j}_{\text{полн}},$$

где $\bar{j}_{\text{полн}}$ есть сумма векторов плотностей токов проводимости и смещения.

Так как по (3.29) $\operatorname{div} \bar{j}_{\text{полн}} = 0$, то это «исправленное» уравнение находится в согласии с законом сохранения количества электричества.

Раскрывая значение тока смещения (§ 6 гл. III), получим первое уравнение Максвелла для переменных полей в виде*)

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \bar{j} + \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}. \tag{5.1}$$

Физический смысл гипотезы Максвелла сводится к предположению, что ток смещения или меняющееся во времени электрическое поле образует магнитное поле наравне с током проводимости.

Выражая плотность тока проводимости через напряженность поля и удельную электропроводность среды, можно написать уравнение Максвелла в виде

$$\operatorname{rot} \bar{H} = g\bar{E} + \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}. \tag{5.2}$$

Если среда является совершенным диэлектриком ($g = 0$), то

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}. \tag{5.3}$$

Первое уравнение Максвелла связывает между собой напряженность электрического и магнитного полей в каждой точке пространства.

Поскольку вихрь вектора представляет собой операцию дифференцирования по пространственным координатам, первое уравнение Максвелла связывает между собой изменение магнитного поля в пространстве с изменением электрического поля во времени. Эта связь может быть выражена в наиболее сжатой форме векторным уравнением (5.2) или в развернутом виде совокупностью дифференциальных уравнений для проекций векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$.

Для прямоугольной системы координат эти уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= gE_x + \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}, \\
\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= gE_y + \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}, \\
\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= gE_z + \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Зависимость магнитного поля от меняющегося во времени электрического поля можно выразить не только в дифференциальной, но и в интегральной форме.

---

*) Мы полагаем, что величины ε, μ и g не изменяются во времени.

Умножая обе стороны уравнения (5.1) скалярно на вектор-площадку $\overline{dS}$ и интегрируя по произвольной поверхности S, получим

$$\int_S \operatorname{rot} \overline{H}\, \overline{dS} = \int_S \overline{j} \overline{dS} + \int_S \varepsilon \frac{\partial \overline{E}}{\partial t}\, \overline{dS}. \qquad (5.5).$$

Преобразуя левую часть равенства по теореме Стокса (4.21) в циркуляцию вектора $\overline{H}$ по контуру l и учитывая, что $\int_S \overline{j}\, dS$ есть сум-

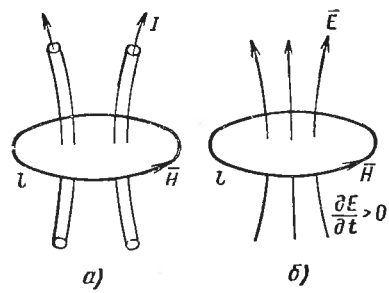


Рис. 5.1. К определению вихрей переменного магнитного поля: *а*—контур l охватывает проводники с током; *б*—контур l охватывает переменное электрнческое поле.

марный ток проводимости I, протекающий через поверхность S, а $\int_S \varepsilon \frac{\partial \overline{E}}{\partial t}\, \overline{dS}$ есть суммарный ток смещения $I_{см}$ через поверхность S, будем иметь

$$\oint_l \overline{H}\, \overline{dl} = I + I_{см} = I_{полн}. \qquad (5.6)$$

Уравнение (5.6), являющееся обобщением теоремы (4.11) о циркуляции вектора $\overline{H}$, называется з а к о н о м п о л н о г о т о к а.

Замкнутые магнитные силовые линии согласно первому уравнению Максвелла, или закону полного тока, охватывают собой ток, который может быть либо током проводимости (рис. 5.1, *а*), либо током смещения (рис. 5.1. *б*), либо их суммой. Меняя местами порядок дифференцирования и интегрирования в выражении для тока смещения через поверхность S, получим

$$I_{см} = \int_S \varepsilon \frac{\partial \overline{E}}{\partial t}\, \overline{dS} = \frac{d}{dt} \int_S \varepsilon \overline{E}\, \overline{dS}$$

или, так как $\int_S \varepsilon \overline{E} \overline{dS}$ есть поток N вектора электрической индукции,

$$I_{см} = \frac{dN}{dt}.$$

Подставляя значение $I_{см}$ в (5.6), получим другую форму записи закона полного тока:

$$\oint_l \overline{H}\,\overline{dl} = I + \frac{dN}{dt}. \tag{5.7}$$

В постоянном магнитном поле циркуляция вектора $\overline{H}$ по замкнутому контуру обращалась в нуль, если контур не охватывал собой тока проводимости. В переменном электромагнитном поле циркуляция вектора $\overline{H}$ по замкнутому контуру отлична от нуля, независимо от наличия тока проводимости через поверхность, ограниченную контуром. Эта величина обращается в нуль только в том частном случае, когда контур не охватывает тока проводимости и, кроме того, суммарный поток N через площадь контура остается неизменным во времени.

2. Второе уравнение Максвелла

Второе уравнение Максвелла является обобщением закона электромагнитной индукции Фарадея.

По Фарадею, если через поверхность S, ограниченную проводящим контуром l, проходит меняющийся по времени магнитный поток, то в контуре возникает электродвижущая сила индукции

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Эту электродвижущую силу можно рассматривать как циркуляцию вектора напряженности электрического поля по контуру проводника, так что

$$\oint_l \overline{E}\,\overline{dl} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

или

$$\oint_l \overline{E}\,\overline{dl} = -\frac{d}{dt}\int_S \overline{B}\,\overline{dS}.$$

Меняя порядок дифференцирования и интегрирования в правой части равенства, получим

$$\oint_l \overline{E}\,\overline{dl} = -\int_S \frac{\partial \overline{B}}{\partial t}\,\overline{dS}. \tag{5.8}$$

Таким образом, явление электромагнитной индукции заключается в том, что при изменении со временем магнитного поля, пронизывающего поверхность, ограниченную проводящим контуром,

в проводнике возникает электрическое поле, циркуляция напряженности которого по контуру проводника (э. д. с.) равна взятой с обратным знаком скорости изменения магнитного потока во времени.

Обобщение закона электромагнитной индукции по Максвеллу заключается в отказе от ограничения, наложеного на него словами «проводящий контур».

Согласно Максвеллу соотношение (5.8) выполняется для всякого контура независимо от того, является ли этот контур проводящим или произвольно выбранным в диэлектрической среде.

Физический смысл максвелловой обобщенной формулировки закона электромагнитной индукции заключается, следовательно, в утверждении, что меняющееся во времени магнитное поле вызывает (независимо от параметров среды) электрическое поле и притом такое, что для всякого произвольно выбранного контура циркуляция вектора напряженности этого поля равна взятой с обратным знаком скорости изменения магнитного потока через поверхность, ограниченную этим контуром.

Уравнение (5.8), выражающее связь между электрическим и магнитным полем в любой среде, можно представить в дифференциальной форме. Для этого применим к левой части (5.8) теорему Стокса

$$\oint_l \bar{E}\, d\bar{l} = \int_S \operatorname{rot} \bar{E}\, d\bar{S}.$$

Тогда из (5.8) получим

$$\oint_S \operatorname{rot} \bar{E}\, d\bar{S} = \int_S -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\, d\bar{S}.$$

Это соотношение может выполняться для произвольной поверхности S лишь при равенстве подынтегральных выражений.

Таким образом,

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}. \qquad (5.9)$$

Уравнение (5.9), являющееся дифференциальной формой обобщенного закона электромагнитной индукции (5.8), носит название второго уравнения Максвелла.

Согласно второму уравнению Максвелла электрическое поле, созданное меняющимся во времени магнитным полем, имеет в отличие от поля электрических зарядов вихревой характер. Вихрем электрического поля является скорость изменения во времени вектора магнитной индукции, взятая с обратным знаком.

Таким образом, наряду с электрическими силовыми линиями, «опирающимися» на заряды, могут существовать замкнутые элект-

рические линии. Эти замкнутые линии охватывают собой вихри (рис. 5.2) в виде переменного магнитного поля.

Векторная запись (5.9) второго уравнения Максвелла эквивалентна системе дифференциальных уравнений в частных производных для проекций векторов поля. В прямоугольной системе координат будем иметь:

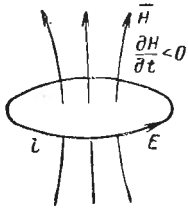


Рис. 5.2. К определению вихрей переменного электрического поля.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}&=-\mu\frac{\partial H_x}{\partial t},\\ \frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}&=-\mu\frac{\partial H_y}{\partial t},\\ \frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}&=-\mu\frac{\partial H_z}{\partial t}.\end{aligned}\right\}\qquad(5.10)$$

Следовательно, второе уравнение Максвелла устанавливает зависимость между изменением напряженности магнитного поля во времени и изменением электрического поля в пространстве.

3. Полная система уравнений Максвелла

Полная система уравнений электромагнитного поля образуется из рассмотренных в § 1 и 2 этой главы первого и второго уравнений Максвелла, определяющих значения вихрей магнитного и электрического полей, а также из уравнений (1.19) и (4.3), определяющих значения источников электрического и магнитного полей.

Полная система уравнений электромагнитного поля в дифференциальной и интегральной форме приведена ниже.

Если параметры среды ε, μ и g не зависят от напряженностей поля $\bar{E}$ и $\bar{H}$, эта система будет линейной.

Уравнения Максвелла описывают электромагнитное поле как форму материи, характеризуемую явлениями, возникающими в пространстве при наличии электрических токов и зарядов.

Уравнения электромагнитного поля в дифференциальной форме	Уравнения электромагнитного поля в интегральной форме	Физическое содержание уравнений электромагнитного поля
	Закон полного тока	
$\operatorname{rot}\bar{H}=\bar{j}+\varepsilon\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}$, (I)	$\oint_l \bar{H}\,d\bar{l}=I+\frac{dN}{dt}$ (I′)	Токи смещения поля наравне с токами проводимости образуют магнитное поле

Продолжение

Уравнения электромагнитного поля в дифференциальной форме	Уравнения электромагнитного поля в интегральной форме	Физическое содержание уравнений электромагнитного поля
		и являются вихрями этого поля. Закон изменения электрического поля во времени определяет закон распределения магнитного поля в пространстве.
Обобщенный закон электромагнитной индукции		
$\operatorname{rot} \bar{E} = -\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}$, (II)	$\oint_l E dl = -\frac{d\Phi}{dt}$ (II′)	Переменное магнитное поле образует вихревое электрическое поле, вихрями которого является скорость изменения магнитной индукции во времени, взятая с обратным знаком. Закон изменения магнитного поля во времени определяет закон распределения электрического поля в пространстве.
$\operatorname{div} \varepsilon \bar{E} = \rho$ (III)	$\int_S \varepsilon \bar{E}\, d\bar{S} = \sum q$ (III′)	Электрическое поле может иметь истоки. Истоками электрического поля являются электрические заряды.
$\operatorname{div} \mu \bar{H} = 0$ (IV)	$\int_S \mu \bar{H}\, d\bar{S} = 0$ (IV′)	Магнитное поле не имеет истоков. В природе свободные магнитные заряды (массы) отсутствуют.

Эти уравнения не только устанавливают взаимосвязь электрических токов и зарядов с полем, но и определяют свойства самого поля.

Электромагнитное поле согласно теории Максвелла представляет собой совокупность взаимосвязанных электрического и магнитного полей. Следовательно, электромагнитное поле есть форма материи,

объективно вне нас существующей во времени и в пространстве, а электрическое и магнитное поля суть две характеристики этого единого комплекса.

Только в частном случае статических полей, когда $\partial\bar{E}/dt = \partial\bar{H}/\partial t = 0$, единая система уравнений Максвелла распадается на две независимые системы уравнений:

а) электрического поля

$$\operatorname{rot}\bar{E} = 0, \qquad \operatorname{div}\varepsilon\bar{E} = \rho,$$

б) магнитного поля

$$\operatorname{rot}\bar{H} = \bar{j}, \qquad \operatorname{div}\mu\bar{H} = 0.$$

Однако надо иметь в виду, что статические поля следует рассматривать лишь как предельный случай электромагнитного поля, настолько медленно меняющегося во времени, что с одной из характеристик его можно не считаться. Так, например, через длительное время после начала зарядки конденсатора электрическое поле нарастает настолько медленно, что магнитным полем можно пренебречь. Точно так же в цепи с индуктивностью через длительное время после включения источника постоянного тока магнитное поле нарастает настолько медленно, что можно пренебречь электрическим полем*).

Электромагнитное поле как форма материи не может оставаться в покое, а находится в состоянии движения. Ниже будет показано, что из уравнений Максвелла вытекает важный вывод о волновом характере электромагнитного поля. Согласно этому выводу в свободном пространстве поле распространяется в виде электромагнитной волны.

Знаменательно, что скорость распространения электромагнитной волны, вычисленная для среды с параметрами ε_0, μ_0, совпала с экспериментально определенной скоростью света. На основании этого было установлено, что свет есть не что иное, как электромагнитная волна — факт хорошо известный в настоящее время, но совершенно неожиданный для физиков XIX века.

Вывод о движущемся характере электромагнитного поля, определение скорости этого движения, а также ряд других следствий, вытекающих из уравнений Максвелла и касающихся волнового характера электромагнитного поля, предсказанного теоретически задолго до экспериментов Генриха Герца и гениального изобретения радио А. С. Поповым, убедительно показывает, что может дать теория, построенная на глубоком анализе экспериментального материала и исходящая из материалистических принципов сохранения

*) Напряженности полей $\bar{E}$ и $\bar{H}$, как утверждает теория относительности, при переходе от одной системы отсчета к другой, движущейся относительно первой, изменяются. Характер этого изменения таков, что если в начальной системе отсчета поле было чисто электростатическим или магнитостатическим, то в новой системе отсчета имеется и электрическое и магнитное поля.

количества электричества и признания материальной природы среды, в которой взаимодействуют токи и заряды.

Теория электромагнитного поля после опытов Генриха Герца и доказательства существования светового давления русским физиком П. Н. Лебедевым получила общее признание. Эта теория весьма полно описывает широкий круг явлений, изучаемых в радиотехнике и электронике. Однако, само собой разумеется, она не является всеобъемлющей. Существует ряд явлений, не укладывающихся в рамки теории Максвелла (см. об этом в гл. XIV).

Раздел современной физики, посвященный изучению переменных электромагнитных полей, получил наименование электродинамики.

4. Теорема Умова — Пойнтинга о сохранении энергии в электромагнитном поле

Электромагнитное поле, как и любой другой вид материи, обладает энергией. В произвольном объеме V электромагнитного поля сосредоточен запас энергии, равный

$$W = \int_V \left(\frac{\bar{E}\bar{D}}{2} + \frac{\bar{H}\bar{B}}{2} \right) dV = \int_V \left(\frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dV. \qquad (5.11)$$

С изменением электрического и магнитного полей во времени объемная плотность электрической энергии $\varepsilon E^2/2$ и объемная плотность магнитной энергии $\mu H^2/2$ меняются. Для того чтобы выяснить, что делается с общим запасом энергии, найдем из уравнений Максвелла значения производных $\partial\bar{E}/\partial t$ и $\partial\bar{H}/\partial t$.

Из уравнений (I) и (II) § 3 настоящей главы имеем

$$\varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \operatorname{rot} \bar{H} - \bar{j};$$

$$\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \bar{E}.$$

Умножая первое из написанных равенств скалярно на $\bar{E}$, а второе на $\bar{H}$ и складывая, получим

$$\varepsilon \bar{E} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \mu \bar{H} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = \bar{E} \operatorname{rot} \bar{H} - \bar{H} \operatorname{rot} \bar{E} - \bar{j}\bar{E}. \qquad (5.12)$$

Но

$$\overline{E}\,\frac{\partial \overline{E}}{\partial t}=\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}\,(\overline{E}^2)=\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}\,(E^2),$$

$$\overline{H}\,\frac{\partial \overline{H}}{\partial t}=\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}\,(\overline{H}^2)=\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}\,(H^2),$$

и согласно (4.35)

$$\overline{E}\,\mathrm{rot}\,\overline{H}-\overline{H}\,\mathrm{rot}\,\overline{E}=-\mathrm{div}\,(\overline{E}\times\overline{H}).$$

Поэтому уравнение (5.12) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon E^2}{2}+\frac{\mu H^2}{2}\right)=-\mathrm{div}\,(\overline{E}\times\overline{H})-\overline{j}\overline{E}$$

или, интегрируя по объему и меняя знаки на обратные, будем иметь

$$-\frac{d}{dt}\int\limits_V\left(\frac{\varepsilon E^2}{2}+\frac{\mu H^2}{2}\right)dV=$$

$$=\int\limits_V\mathrm{div}\,(\overline{E}\times\overline{H})\,dV+\int\limits_V\overline{j}\overline{E}\,dV. \qquad (5.13)$$

Используя теорему Гаусса—Остроградского, преобразуем первый интеграл правой части (5.13) в интеграл по поверхности S, ограничивающей рассматриваемый объем:

$$\int\limits_V\mathrm{div}\,(\overline{E}\times\overline{H})\,dV=\int\limits_S(\overline{E}\times\overline{H})\,\overline{dS}.$$

Тогда, обозначая

$$\overline{E}\times\overline{H}=\overline{\Pi}, \qquad (5.14)$$

получим

$$-\frac{d}{dt}\int\limits_V\left(\frac{\varepsilon E^2}{2}+\frac{\mu H^2}{2}\right)dV=\int\limits_V\overline{j}\overline{E}\,dV+\int\limits_S\overline{\Pi}\,\overline{dS}. \qquad (5.15)$$

Уравнение (5.15) выражает собой закон сохранения энергии в электромагнитном поле. Рассмотрим его физическое содержание. Левая часть уравнения представляет собой скорость изменения во времени полного запаса электромагнитной энергии в рассматриваемом объеме с обратным знаком ($-dW/dt$). Первый член правой части есть по (3.17) количество тепла Q, выделяющегося в проводящих частях объема V за единицу времени. Поэтому (5.15) можно сокращенно записать в виде

$$-\frac{dW}{dt}=Q+\int\limits_S\overline{\Pi}\,\overline{dS}. \qquad (5.16)$$

Второе слагаемое в правой части равенства (5.15) или (5.16) представляет собой поток вектора через поверхность, ограничивающую объем. Вектор $\overline{\Pi}$ и есть, стало быть, плотность потока энергии, протекающего через поверхность S в единицу времени*).

Согласно определению вектора $\overline{\Pi}$ (5.14), энергия электромагнитного поля в каждой точке движется по нормали к плоскости, образованной векторами $\overline{E}$ и $\overline{H}$ (рис. 5.3), в сторону, совпадающую с поступательным перемещением правовинтового штопора, вращаемого от вектора $\overline{E}$ к вектору $\overline{H}$ на наименьший угол.

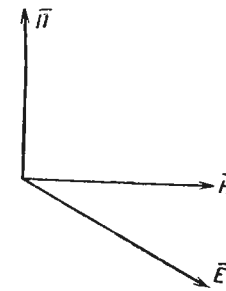


Рис. 5.3. Взаимная ориентация векторов $\overline{E}$, $\overline{H}$ и $\overline{\Pi}$.

Количество энергии, протекающей через единичный участок этой плоскости в единицу времени, равно

$$\Pi = EH \sin(\overline{E}, \overline{H}) \ вт/м^2,$$

где E выражена в вольтах/метр и H — в амперах/метр.

Уравнение (5.16), как вытекает из изложенного, утверждает, что изменение запаса электромагнитной энергии в произвольном объеме обусловлено, во-первых, превращением части ее в тепло (при конечной проводимости среды) и, во-вторых, движением энергии в пространстве через поверхность, ограничивающую объем.

Рассматриваемое уравнение имеет наименование теоремы Умова — Пойнтинга. Это наименование дано в честь известного русского ученого Н. А. Умова, впервые поставившего и исследовавшего вопрос о потоках энергии любого вида в различных средах, и в честь английского физика Пойнтинга, исследовавшего эти же вопросы применительно к электромагнитному полю.

Вектор $\overline{\Pi}$ получил название вектора Пойнтинга.

Рассмотрим теперь отдельные частные случаи движения энергии.

---

*) Из (5.15) или (5.16) вытекает, что $\int_S \overline{\Pi}\, d\overline{S}$ есть поток энергии за единицу времени через всю поверхность. Отсюда, однако, еще не следует утверждение, что $\overline{\Pi}$ есть плотность потока в каждой точке. Действительно, если составить вектор $\overline{\Pi}' = \overline{\Pi} + \operatorname{rot} \overline{c}$, где $\overline{c}$ — произвольный вектор, то $\int_S \overline{\Pi}'\, d\overline{S} = \int_S \overline{\Pi}\, dS$, так как поток ротора вектора через замкнутую поверхность равен нулю. Следовательно, векторы $\overline{\Pi}$ и $\overline{\Pi}'$ с одинаковым правом можно было бы считать векторами плотности потока энергии за единицу времени. Однако утверждение, что $\overline{\Pi}$ есть вектор плотности потока энергии вытекает из теории относительности.

1. Пусть $\frac{dW}{dt} < 0$, т. е. запас электромагнитной энергии со временем убывает, и $\left|\frac{dW}{dt}\right| > Q$. В этом случае

$$\int_S \overline{\Pi}\, d\overline{S} > 0.$$

Положительное значение потока вектора Пойнтинга означает, что энергия вытекает из объема. Следовательно, в объеме V энергия частично превращается в тепло, а остаток ее «излучается» во внешнее пространство (рис. 5.4).

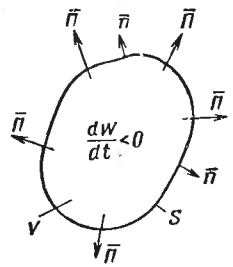


Рис. 5.4. Возможные направления вектора Пойнтинга при убывании энергии в объеме V.

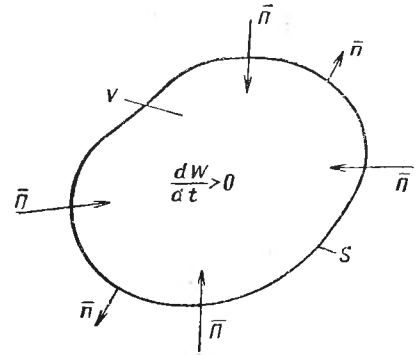


Рис. 5.5. Возможные направления вектора Пойнтинга при увеличении энергии в объеме V.

2. $\frac{dW}{dt} > 0$. Запас энергии электромагнитного поля в рассматриваемом объеме возрастает. Тогда по (5.16)

$$-\int_S \overline{\Pi}\, d\overline{S} = Q + \frac{dW}{dt} > 0,$$

и, стало быть, $\int_S \overline{\Pi}\, d\overline{S} < 0$. Отрицательное значение потока указывает на то, что энергия втекает внутрь объема (рис. 5.5). В этом случае втекающий поток частично покрывает тепловые потери внутри объема, а остаток увеличивает запас энергии электромагнитного поля в объеме.

Приведем несколько примеров, иллюстрирующих применение теоремы Умова — Пойнтинга (5.16).

1. Рассмотрим проводник с током (рис. 5.6). Вектор напряженности магнитного поля $\overline{H}$ у проводника направлен по касательной к его поверхности. Вектор $\overline{E}$ имеет нормальную $\overline{E}_n$ и касательную $\overline{E}_{tg}$ составляющие, причем последняя направлена так же, как ток. Поэтому для вектора $\overline{\Pi}$ у поверхности проводника можно написать:

$$\overline{\Pi} = \overline{E} \times \overline{H} = (\overline{E}_n \times \overline{H}) + (\overline{E}_{tg} \times \overline{H}).$$

Вектор Пойнтинга разбивается на два вектора $\overline{\Pi}_1$ и $\overline{\Pi}_2$, из которых $\overline{\Pi}_1 = \overline{E}_n \times \overline{H}$ направлен вдоль проводника и определяет величину энергии, переносимой вдоль проводника, а $\overline{\Pi}_2 = \overline{E}_{tg} \times \overline{H}$ направлен в глубь проводника и определяет величину энергии электромагнитного поля, входящей внутрь проводника. Эта часть энергии в случае постоянного тока целиком превращается в тепло.

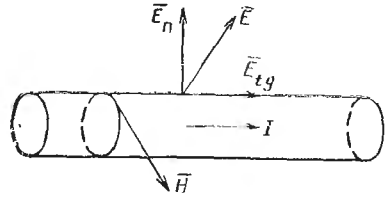


Рис. 5.6. Поле на поверхности проводника с током.

Таким образом, энергия, переносимая вдоль провода, определяется нормальной составляющей вектора $\overline{E}$ у поверхности проводника, а энергия, входящая внутрь провода (потери) — тангенциальной составляющей вектора $\overline{E}$ у поверхности проводника.

Подсчитаем теперь поток энергии, входящей в проводник на участке длиной l. Пусть проводник имеет форму круглого цилиндра с радиусом a, и по проводнику течет постоянный ток I. На рис. 5.7 показано направление векторов $\overline{E}_{tg}$, $\overline{H}$ и $\overline{\Pi}_2$ у поверхности провода. Так как $\overline{E}_{tg}$ и $\overline{H}$ перпендикулярны друг к другу, касательны к поверхности провода и имеют, кроме того, одинаковые значения во всех точках проводящей поверхности, то для потока мощности, втекающей внутрь проводника, имеем

$$P = \int_S (\overline{E} \times \overline{H})\, \overline{dS} = E_{tg} H \int_S dS =$$

$$= E_{tg} H 2\pi a l.$$

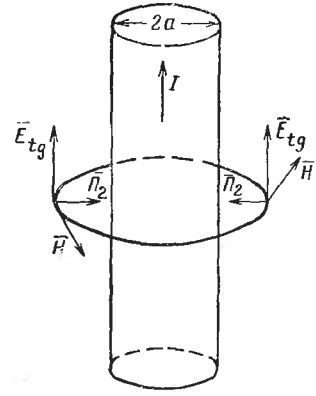


Рис. 5.7. Движение энергии внутри проводника с током.

Здесь S — поверхность проводника.

Так как $E_{tg} = j/g$, где j — плотность тока, текущего по проводнику, а H у поверхности проводника равна $H = I/2\pi a$, то

$$P = \frac{j}{g} \frac{I}{2\pi a} 2\pi a l = j \frac{Il}{g}.$$

Заменяя плотность тока j на величину $I/\pi a^2$, получим

$$P = I^2 \frac{l}{g\pi a^2} = I^2 R.$$

Поток электромагнитной энергии, вошедший внутрь провода, равен количеству тепла, выделенного по закону Джоуля — Ленца.

2. В качестве второго примера рассмотрим передачу энергии вдоль линии постоянного тока. На рис. 5.8, *а* показана схематически линия передачи энергии, а на рис. 5.8, *б* — структура поля в плоскости, перпендикулярной проводам. На рис. 5.8, *а* слева изображен источник тока с электродвижущей силой $\mathscr{E}$, справа — потребитель энергии — сопротивление R.

Если сопротивление соединительной линии равно нулю, то у поверхности проводов напряженность электрического поля имеет

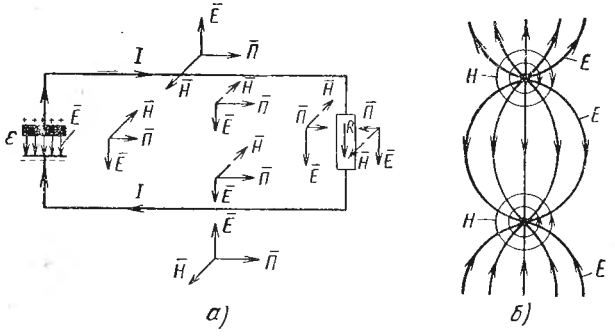


Рис. 5.8. Движение энергии вдоль линии постоянного тока: *а* — схема линии; *б* — силовые линии поля в поперечном сечении.

только нормальную составляющую. У потребителя R, наоборот, основной составляющей электрического поля является тангенциальная составляющая $\overline{E}_{\text{tg}}$.

Рассматривая направление векторов $\overline{E}$ и $\overline{H}$ вблизи верхнего и нижнего проводов, легко убедиться, что независимо от направления тока в проводе и выбора положения точки наблюдения у проводника (сверху или снизу от него), вектор Пойнтинга направлен слева направо, т. е. от генератора к нагрузке. В проводнике ток может течь как от генератора к нагрузке (верхний провод), так и от нагрузки к генератору (нижний провод), но энергия течет во всех точках пространства в одном направлении — от генератора к нагрузке.

Заметим, что энергия течет к нагрузке в диэлектрической среде — в пространстве, окружающем провод, но отнюдь не в самих проводах. Более того, энергия, вошедшая в провод (если он имеет конечное сопротивление), уже не передается, а целиком превращается в тепло. Роль проводящей линии передачи заключается не в том, чтобы служить трубами, внутри которых течет энергия, а в том, чтобы определить направление движения энергии в окружающей диэлектрической среде. Провода являются лишь направляющей осью в движении энергии.

Определим теперь характер движения энергии вблизи нагрузки R и источника энергии. У поверхности R, как видно из рис. 5.8, *а*, вектор Пойнтинга направлен к нагрузке. Таким образом, энергия из окружающей среды со всех сторон поступает внутрь нагрузки и превращается, как было показано в первом примере, в тепло. У источника направление тока, а значит, и магнитного поля, по сравнению с нагрузкой изменяется на обратное, вектор же $\overline{E}$ «идет» от положительного полюса к отрицательному. В результате вектор Пойнтинга будет направлен от источника во внешнюю среду.

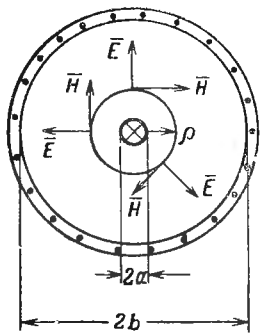


Рис. 5.9. К движению энергии в коаксиальном кабеле.

Из рассмотренной элементарной картины наглядно вытекает сущность процесса передачи энергии вдоль линии постоянного тока. Энергия источника тока, превращаясь в электрическую энергию сторонних сил, выходит из источника в виде электромагнитной энергии. Последняя движется во всей диэлектрической среде, окружающей провода соединительной линии, придерживаясь направления проводов. При этом некоторая часть энергии входит внутрь проводов и расходуется на нагревание. Дошедшая до конца линии энергия входит внутрь нагрузки и превращается в тепло. Хотя, как указано выше, передаваемая вдоль линии энергия движется во всем пространстве, однако наибольшая ее плотность имеет место в точках непосредственной близости к поверхности проводов, где интенсивность электрического и магнитного полей наиболее значительна.

Для количественной иллюстрации рассмотрим случай передачи энергии внутри коаксиального кабеля (рис. 5.9), где все расчетные соотношения наиболее просты.

В этом случае вся энергия течет в диэлектрической среде между внутренним и внешним цилиндрическими проводами кабеля. Вне кабеля, как было показано в § 4 гл. IV, магнитное поле равно нулю, а значит, равен нулю и вектор Пойнтинга.

В точке, находящейся внутри кабеля и отстоящей от оси на расстоянии ρ, где $a \leqslant \rho \leqslant b$, напряженности электрического и магнитного полей (см. § 5 гл. I и § 4 гл. IV) соответственно равны:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\rho} \quad \text{и} \quad H = \frac{I}{2\pi\rho}.$$

Здесь I — ток в кабеле (его внутреннем проводе), а τ — линейная плотность заряда.

Так как векторы $\overline{E}$ и $\overline{H}$ взаимно перпендикулярны, то вектор Пойнтинга равен

$$\Pi = EH = \frac{\tau I}{\varepsilon 4\pi^2\rho^2}.$$

Вектор $\overline{\Pi}$ направлен параллельно оси кабеля. Поэтому для определения передаваемой по кабелю мощности P достаточно умножить Π на элемент площади поперечного сечения $\rho d\rho d\varphi$ и проинтегрировать по всему сечению между внутренним и внешним проводами кабеля. В соответствии с изложенным получим:

$$P = \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{\tau I}{\varepsilon 4\pi^2 \rho^2} \rho \, d\rho \, d\varphi = \frac{\tau I}{\varepsilon 4\pi^2} 2\pi \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\tau I}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{b}{a}.$$

Выражая заряд на единицу длины через разность потенциалов (напряжение) на кабеле U и емкость на единицу длины C, получим

$$P = \frac{I}{2\pi\varepsilon} CU \ln \frac{b}{a}.$$

Подставляя значение емкости C цилиндрического конденсатора на единицу длины

$$C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)},$$

будем иметь

$$P = UI,$$

т. е. мощность, переносимая электромагнитным полем, движущимся в диэлектрике вдоль линии передачи, равна произведению тока на напряжение в линии.

Для мощности, переносимой через часть сечения кабеля, ограниченную радиусами a и ρ, находим

$$P_\rho = \int_0^{2\pi} \int_a^\rho \frac{\tau I}{\varepsilon 4\pi^2 \rho^2} \rho \, d\rho \, d\varphi = IU \frac{\ln(\rho/a)}{\ln b/a}.$$

Таким образом,

$$\frac{P_\rho}{P} = \frac{\ln \rho/a}{\ln b/a}.$$

Так, например, если $a = 0{,}1$ *см* и $b = 10$ *см*, то при $\rho = 1$ *см*

$$\frac{P_\rho}{P} = \frac{\ln 10}{\ln 100} = \frac{1}{2}.$$

Другими словами, вблизи внутреннего провода через площадь, составляющую приблизительно лишь 1/100 от общей площади сечения кабеля, проходит 50% всей переносимой по кабелю мощности.

5. Уравнения Максвелла и теорема Умова — Пойнтинга в комплексном виде

В этом параграфе мы приведем уравнения Максвелла, а также некоторые другие соотношения для электромагнитного поля, меняющегося во времени по гармоническому закону.

Гармонические (или, точнее, почти гармонические) колебания, как известно, имеют широкое применение в радиотехнике. Следует также указать, что многие негармонические процессы при теоретическом анализе могут быть представлены с помощью рядов или интегралов Фурье в виде суперпозиции гармонических колебаний. Поэтому изучение гармонических процессов и, в частности, монохроматического электромагнитного поля весьма полезно для практики.

Для анализа гармонических колебаний удобно использовать символический метод. Согласно правилам символического метода любая гармонически изменяющаяся величина $a(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi)$, где A_m — амплитуда, ω — угловая частота и φ — начальная фаза колебаний, должна быть заменена комплексной функцией $a_к(t) = A_m e^{i(\omega t + \varphi)}$, над которой и совершаются последующие математические операции.

Функция $a_к(t)$, называемая текущим или мгновенным комплексом, обычно записывается в виде

$$a_к(t) = A_m e^{i(\omega t + \varphi)} = A_m e^{i\varphi} e^{i\omega t} = \dot{A} e^{i\omega t}.$$

Здесь $\dot{A}$ — не зависящая от времени комплексная амплитуда, т. е. комплексное число, модуль и аргумент которого равны амплитуде и начальной фазе вещественной функции, описывающей гармонические колебания.

Так как всякого рода линейные операции (сложение, вычитание, дифференцирование, интегрирование и т. п.) над вещественной и мнимой частями комплексной величины производятся раздельно, указанная замена приводит к правильному результату, если от конечных комплексных функций с множителем $e^{i\omega t}$ вновь перейти к соответствующим синусоидальным функциям, т. е. вычислить вещественную часть получающейся комплексной величины. Разумеется, все это будет справедливо при условии, что рассматриваются только линейные соотношения.

Итак, меняющееся во времени по гармоническому закону электромагнитное поле может быть представлено комплексными векторными функциями:

$$\overline{E}_к = \dot{\overline{E}}(x, y, z) e^{i\omega t}, \tag{5.17}$$

$$\overline{H}_к = \dot{\overline{H}}(x, y, z) e^{i\omega t}, \tag{5.18}$$

где $\overline{E}(x, y, z)$ и $\overline{H}(x, y, z)$ — независящие от времени комплексные функции, называемые комплексными векторными амплитудами напряженностей электрического и магнитного полей. Ясно, что векторные амплитуды являются функциями координат точки наблюдения в пространстве.

Истинные (мгновенные) значения векторов поля при этом будут равны

$$\overline{E} = \mathrm{Re}\,(\overline{E}_{\kappa}) \quad \text{и} \quad \overline{H} = \mathrm{Re}\,(\overline{H}_{\kappa}).$$

Здесь знак Re означает вещественную часть соответствующей комплексной функции.

Как следует из (5.17) и (5.18), производные функции $\overline{E}_{\kappa}$ и $\overline{H}_{\kappa}$ по времени определяются выражениями:

$$\frac{\partial \overline{E}_{\kappa}}{\partial t} = i\omega \dot{\overline{E}}\,(x, y, z)\,e^{i\omega t} = i\omega \overline{E}_{\kappa}, \tag{5.19}$$

$$\frac{\partial \overline{H}_{\kappa}}{\partial t} = i\omega \dot{\overline{H}}\,(x, y, z)\,e^{i\omega t} = i\omega \overline{H}_{\kappa}. \tag{5.20}$$

Подставляя значения $\overline{E}_{\kappa}$, $\overline{H}_{\kappa}$, $\partial \overline{E}_{\kappa}/\partial t$ и $\partial \overline{H}_{\kappa}/\partial t$ в уравнения (I—IV) § 3 этой главы, получим систему уравнений Максвелла для монохроматических полей в комплексном виде:

$$\mathrm{rot}\,\overline{H}_{\kappa} = \overline{j}_{\kappa} + i\omega\varepsilon\overline{E}_{\kappa}, \tag{I}$$

$$\mathrm{rot}\,\overline{E}_{\kappa} = -i\omega\mu\overline{H}_{\kappa}, \tag{II}$$

$$\mathrm{div}\,(\varepsilon\overline{E}_{\kappa}) = \rho_{\kappa}, \tag{III}$$

$$\mathrm{div}\,(\mu\overline{H}_{\kappa}) = 0. \tag{IV}$$

Такой же вид имеют уравнения для комплексных амплитуд напряженностей поля, которые можно получить из предыдущих уравнений путем сокращения их на общий множитель $e^{i\omega t}$.

Введение в уравнения Максвелла комплексных величин, естественно, основано на линейности этих уравнений. Однако в выражениях для энергии электромагнитного поля (которые, конечно, уже являются нелинейными функциями векторов $\overline{E}$ и $\overline{H}$) использовать подобные приемы нельзя. Так, например, в формуле $w_E = \varepsilon E^2/2$ величину E^2 нельзя непосредственно заменить на E_{κ}^2, а затем вычислить вещественную часть получающейся комплексной функции, ибо

$$E^2 = \overline{E}\overline{E} = \mathrm{Re}\,(\overline{E}_{\kappa})\,\mathrm{Re}\,(\overline{E}_{\kappa}) \neq \mathrm{Re}\,(E_{\kappa}^2).$$

Равным образом,

$$H^2 = \mathrm{Re}\,(\overline{H}_{\kappa})\,\mathrm{Re}\,(\overline{H}_{\kappa}) \neq \mathrm{Re}\,(H_{\kappa}^2).$$

С практической точки зрения мгновенные значения плотности (или потока) энергии поля в режиме гармонических колебаний не представляют существенного интереса. Более важно в этом случае знать средние значения подобных величин.

Как известно, среднее значение переменной $A\ (t)$ за период времени T определяется выражением

$$A_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T A(t)\, dt.$$

Если $A_{1\text{к}}$ и $A_{2\text{к}}$ — некоторые комплексные функции времени, то среднее значение произведения их вещественных частей

$$[\operatorname{Re}(A_{1\text{к}}) \operatorname{Re}(A_{2\text{к}})]_{\text{ср}} = \frac{1}{4T} \int_0^T (A_{1\text{к}} + A_{1\text{к}}^*)(A_{2\text{к}} + A_{2\text{к}}^*)\, dt =$$

$$= \frac{1}{4T} \int_0^T (A_{1\text{к}} A_{2\text{к}} + A_{1\text{к}}^* A_{2\text{к}} + A_{1\text{к}} A_{2\text{к}}^* + A_{1\text{к}}^* A_{2\text{к}}^*)\, dt,$$

где знак * означает величину, комплексно-сопряженную с данной. При выводе последнего равенства мы использовали известное соотношение

$$\operatorname{Re}(A_{1\text{к}}) = \frac{A_{1\text{к}} + A_{1\text{к}}^*}{2},$$

которое, конечно, справедливо и для векторных величин.

Пусть

$$A_{1\text{к}} = \dot{A}_1 e^{i\omega t} \quad \text{и} \quad A_{2\text{к}} = \dot{A}_2 e^{i\omega t}.$$

Тогда нетрудно показать, что

$$[\operatorname{Re}(A_{1\text{к}}) \operatorname{Re}(A_{2\text{к}})]_{\text{ср}} = \frac{1}{4} (A_{1\text{к}} A_{2\text{к}}^* + A_{1\text{к}}^* A_{2\text{к}}).$$

Но

$$A_{1\text{к}} A_{2\text{к}}^* = \dot{A}_1 \dot{A}_2^* \quad \text{и} \quad A_{1\text{к}}^* A_{2\text{к}} = \dot{A}_1^* \dot{A}_2.$$

Если

$$\dot{A}_1 = \alpha_1 + i\beta_1 \quad \text{и} \quad \dot{A}_2 = \alpha_2 + i\beta_2,$$

то

$$[\operatorname{Re}(A_{1\text{к}}) \operatorname{Re}(A_{2\text{к}})]_{\text{ср}} = \frac{1}{2} (\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\dot{A}_1 \dot{A}_2^*). \quad (5.21)$$

Используя приведенную формулу, можно написать выражение для среднего значения вектора Пойнтинга $\overline{\Pi}_{\text{ср}}$. По определению,

$$\overline{\Pi}_{\text{ср}} = \frac{1}{T}\int_0^T (\overline{E}\times\overline{H})\,dt = \left[\operatorname{Re}(\overline{E}_{\text{к}})\operatorname{Re}(\overline{H}_{\text{к}})\right]_{\text{ср}}.$$

Следовательно, на основании (5.21)

$$\overline{\Pi}_{\text{ср}} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left[\dot{\overline{E}}\times\dot{\overline{H}}^*\right]. \tag{5.22}$$

Таким образом, среднее значение вектора Пойнтинга $\overline{\Pi}_{\text{ср}}$ в гармоническом электромагнитном поле равно вещественной части комплексного вектора:

$$\dot{\overline{\Pi}} = \frac{1}{2}\left(\dot{\overline{E}}\times\dot{\overline{H}}^*\right). \tag{5.23}$$

который носит название комплексного вектора Пойнтинга.

Вычислим теперь среднюю плотность электрической и магнитной энергии в электромагнитном поле. Так как мгновенная плотность электрической энергии

$$w_E(t) = \frac{1}{2}\varepsilon E^2,$$

то

$$(w_E)_{\text{ср}} = \frac{1}{2}\varepsilon\left[\operatorname{Re}(\overline{E}_{\text{к}})\operatorname{Re}(\overline{E}_{\text{к}})\right]_{\text{ср}} = \frac{1}{4}\varepsilon\operatorname{Re}\left(\dot{\overline{E}}\,\dot{\overline{E}}^*\right).$$

Но произведение

$$\dot{\overline{E}}\dot{\overline{E}}^* = (\overline{E}_a + i\overline{E}_r)(\overline{E}_a - i\overline{E}_r) = E_a^2 + E_r^2 = |\overline{E}|^2$$

есть чисто вещественная величина ($|\dot{\overline{E}}|$ — модуль вектора $\dot{\overline{E}}$, а $\overline{E}_a$ и $\overline{E}_r$ — вещественная и мнимая составляющие его)*). Следовательно,

$$(w_E)_{\text{ср}} = \frac{1}{4}\varepsilon|\dot{\overline{E}}|^2. \tag{5.24}$$

Аналогично можно показать, что средняя плотность магнитной энергии

$$(w_{\text{м}})_{\text{ср}} = \frac{1}{4}\mu|\dot{\overline{H}}|^2. \tag{5.25}$$

Средняя мощность потерь в единице объема на нагревание

$$(P_0)_{\text{ср}} = \left(\frac{j^2}{g}\right)_{\text{ср}} = \frac{1}{g}\left[\operatorname{Re}(\overline{j}_{\text{к}})\operatorname{Re}(\overline{j}_{\text{к}})\right]_{\text{ср}} = \frac{1}{2}\frac{|\dot{\overline{j}}|^2}{g}. \tag{5.26}$$

*) В общем случае $|\dot{\overline{E}}|$ не является амплитудой напряженности поля.

Чтобы получить соотношения, связывающие средние значения энергий в электромагнитном поле, составим уравнение, сопряженное первому уравнению Максвелла для комплексных амплитуд

$$\operatorname{rot} \dot{\overline{H}}^* = \dot{\overline{j}}^* - i\omega\varepsilon\dot{\overline{E}}^*. \tag{5.27}$$

Умножим теперь обе части второго уравнения Максвелла скалярно на $\dot{\overline{H}}^*$, обе части уравнения (5.27) скалярно на $\dot{\overline{E}}$ и вычтем из первого результата последний. Учитывая, что

$$\dot{\overline{H}}^* \operatorname{rot} \dot{\overline{E}} - \dot{\overline{E}} \operatorname{rot} \dot{\overline{H}}^* = \operatorname{div} \left[\dot{\overline{E}} \times \dot{\overline{H}}^*\right],$$

получим

$$\operatorname{div} \dot{\overline{\Pi}} = -\frac{1}{2} \dot{\overline{j}}^* \dot{\overline{E}} - i\omega \left(\frac{\mu \dot{\overline{H}} \dot{\overline{H}}^* - \varepsilon \dot{\overline{E}} \dot{\overline{E}}^*}{2} \right).$$

Последнее равенство можно написать в интегральной форме:

$$\int_S \dot{\overline{\Pi}}\, \overline{dS} = -\frac{1}{2} \int_V \dot{\overline{j}}^* \dot{\overline{E}}\, dV - i\omega \int_V \left(\frac{\mu \dot{\overline{H}} \dot{\overline{H}}^*}{2} - \frac{\varepsilon \dot{\overline{E}} \dot{\overline{E}}^*}{2} \right) dV, \tag{5.28}$$

где S — поверхность, ограничивающая область V.

Если в объеме V имеется источник сторонней напряженности поля $\overline{E}_{ст}$, то согласно закону Ома $\dot{\overline{j}} = g(\dot{\overline{E}} + \overline{E}_{ст})$. В этом случае выражение (5.28) легко привести к виду

$$\frac{1}{2} \int_V \dot{\overline{j}}^* \dot{\overline{E}}_{ст}\, dV = \frac{1}{2} \int_V \frac{\dot{\overline{j}} \dot{\overline{j}}^*}{g}\, dV + \\ + i2\omega \int_V \frac{\mu \dot{\overline{H}} \dot{\overline{H}}^* - \varepsilon \dot{\overline{E}} \dot{\overline{E}}^*}{4}\, dV + \int_S \dot{\overline{\Pi}}\, \overline{dS}. \tag{5.29}$$

Полученное равенство носит название теоремы Умова—Пойнтинга в комплексном виде.

Приравнивая вещественные и мнимые части в (5.29), будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_V \dot{\overline{j}}^* \dot{\overline{E}}_{ст}\, dV &= \frac{1}{2} \int_V \frac{|\dot{\overline{j}}|^2}{g}\, dV + \operatorname{Re} \int_S \dot{\overline{\Pi}}\, \overline{dS}, \\ \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_V \dot{\overline{j}}^* \dot{\overline{E}}_{ст}\, dV &= i2\omega \int_V \frac{\mu |\dot{\overline{H}}|^2 - \varepsilon |\dot{\overline{E}}|^2}{4}\, dV + \operatorname{Im} \int_S \dot{\overline{\Pi}}\, \overline{dS}. \end{aligned}\right\} \tag{5.30}$$

Здесь Im — знак мнимой части соответствующей величины.

Рассмотрим физический смысл найденных выражений. Легко видеть, что в правой части первого равенства (5.30) мы имеем сумму средней мощности тепловых потерь

$$P_{\text{т}} = Q_{\text{ср}} = \frac{1}{2} \int_V \frac{|\dot{\bar{j}}|^2}{g} dV$$

в объеме V и средней мощности, уходящей из объема через поверхность S

$$P = \operatorname{Re} \int_S \dot{\bar{\Pi}} d\bar{S} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S (\dot{\bar{E}} \times \dot{\bar{H}}^*) \, d\bar{S}. \tag{5.31}$$

Обе эти величины в конечном счете определяют для объема V потери, которые в соответствии с законом сохранения энергии должны быть восполнены источниками стороннего поля. Следовательно, величина $\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_V \dot{\bar{j}}^* \dot{\bar{E}}_{\text{ст}} dV$, стоящая в левой части равенства, определяет среднюю (активную) мощность, отдаваемую источниками поля в объеме V.

Во втором равенстве (5.30) слева мы имеем величину $\frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_V \dot{\bar{j}}^* \dot{\bar{E}}_{\text{ст}} dV$, которая по аналогии с теорией электрических цепей носит название реактивной мощности источника (и здесь, конечно, речь идет о среднем значении мощности). Эта мощность, как вытекает из (5.30), равна сумме двух членов:

$$2\omega W_{\text{э}} \text{ и } \operatorname{Im} \int_S \dot{\bar{\Pi}} \, d\bar{S},$$

где

$$W_{\text{э}} = \frac{1}{4} \int_V (\mu |\dot{\bar{H}}|^2 - \varepsilon |\dot{\bar{E}}|^2) \, dV$$

есть разность средних значений магнитной и электрической энергии в объеме, а $\operatorname{Im} \int_S \dot{\bar{\Pi}} d\bar{S}$ — среднее значение реактивной мощности, проходящей через поверхность S.

Выведем в заключение формулу для расчета средней мощности P, проходящей через поверхность S. Если ξ и η — ортогональные координаты на S, а орты $\bar{i}_\xi$, $\bar{i}_\eta$ и $\bar{n}$ образуют в пространстве правовинтовую систему, то, используя правило скалярно-векторного

перемножения векторов, нетрудно показать, что подынтегральное выражение в (5.31) равно

$$[\dot{\bar{E}} \times \dot{\bar{H}}^*]\bar{n} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ E_\xi & E_\eta & E_n \\ \dot{H}^*_\xi & \dot{H}^*_\eta & \dot{H}^*_n \end{vmatrix} = \dot{E}_\xi \dot{H}^*_\eta - \dot{E}_\eta \dot{H}^*_\xi, \tag{5.32}$$

где $\dot{E}_\xi$, $\dot{E}_\eta$; $\dot{H}^*_\xi$ и $\dot{H}^*_\eta$ — проекции векторов $\dot{\bar{E}}$ и $\dot{\bar{H}}^*$, касательные к поверхности S, а $\dot{E}_n$ и $\dot{H}^*_n$ — проекции тех же векторов, нормальные к S. Следовательно,

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S (\dot{E}_\xi \dot{H}^*_\eta - \dot{E}_\eta \dot{H}^*_\xi)\, dS. \tag{5.33}$$

6. Единственность решения уравнений Максвелла

Изучению отдельных частных вопросов теории электромагнитных колебаний целесообразно предпослать ознакомление с некоторыми общими положениями электродинамики.

Рассмотрим сначала теорему о единственности решения уравнений Максвелла. Эта теорема отвечает на вопрос: какие условия необходимы и достаточны для того, чтобы получить единственное (а значит, существующее при данных условиях на опыте) решение задачи?

Важность теоремы единственности очевидна, ибо она, во-первых, позволяет правильно сформулировать отдельные частные задачи и, во-вторых, служит основанием для уверенности в том, что найденное решение вследствие его единственности — истинно.

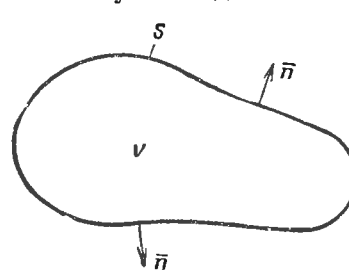


Рис. 5.10. К доказательству теоремы единственности.

Пусть мы имеем область V, ограниченную поверхностью S (рис. 5.10), причем в этой области определены источники сторонней напряженности поля $\bar{E}_{ст}$. (Источники, разумеется, могут также находиться и вне рассматриваемой области).

Теорема единственности утверждает, что электромагнитное поле в любой момент времени $t \geqslant t_0$ в любой точке объема V определяется уравнениями Максвелла при заданных источниках однозначно, если в каждой точке объема V даны начальные значения векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ (т. е. $\bar{E}(x, y, z, t_0) = \bar{E}_0$, $H(x, y, z, t_0) = H_0$, где $\bar{E}_0$ и $\bar{H}_0$ — известные функции координат) и если известны гра-

ничные значения касательных проекций одного из векторов ($\overline{E}$ или $\overline{H}$) в точках поверхности S для любого момента времени $t \geqslant t_0$.

Для доказательства теоремы предположим, что в области V, содержащей известные источники поля $\overline{E}_{ст}(x, y, z, t)$, существуют два решения уравнений Максвелла, удовлетворяющие одинаковым начальным и граничным условиям.

Обозначим поля, соответствующие этим решениям, через $\overline{E}_1$, $\overline{H}_1$ и $\overline{E}_2$, $\overline{H}_2$. Нетрудно видеть, что разность указанных решений

$$\overline{E}' = \overline{E}_1 - \overline{E}_2; \quad \overline{H}' = \overline{H}_1 - \overline{H}_2$$

удовлетворяет уравнениям Максвелла, не содержащим источников, а также нулевым начальным и граничным условиям:

$$\overline{E}'(x, y, z, t_0) = 0; \quad \overline{H}'(x, y, z, t_0) = 0$$

и $\overline{E}'_{tg} = 0$ или $\overline{H}'_{tg} = 0$ на поверхности S. Здесь $\overline{E}'_{tg}$ и $\overline{H}'_{tg}$ — составляющие векторов $\overline{E}'$ и $\overline{H}'$, касательные к граничной поверхности.

Если ввести в рассмотрение орт $\overline{n}$, направленный вдоль внешней нормали к поверхности S (рис. 5.10), то на поверхности S будем иметь:

$$\overline{E}' \times \overline{n} = (\overline{E}'_n + \overline{E}'_{tg}) \times \overline{n} = \overline{E}'_{tg} \times \overline{n} = 0,$$

$$\overline{H}' \times \overline{n} = (\overline{H}'_n + \overline{H}'_{tg}) \times \overline{n} = \overline{H}'_{tg} \times \overline{n} = 0.$$

Следовательно, нулевые начальные и граничные условия для полей $\overline{E}'$ и $\overline{H}'$ могут быть переписаны в виде:

$$\left.\begin{aligned} &\overline{E}'(x, y, z, t_0) = \overline{H}'(x, y, z, t_0) = 0, \\ &\overline{E}' \times \overline{n} = 0 \text{ или } \overline{H}' \times \overline{n} = 0 \text{ на } S. \end{aligned}\right\} \tag{5.34}$$

Применим теперь к полю $\overline{E}'$, $\overline{H}'$ теорему Умова — Пойнтинга (5.15), полагая что $\overline{j}' = g\,\overline{E}'$. Эта теорема может быть записана так:

$$\frac{d}{dt}\int_V \frac{\varepsilon E'^2 + \mu H'^2}{2}\, dV = -\int_V gE'^2\, dV - \int_S (\overline{E}' \times \overline{H}')\, \overline{n}\, dS. \tag{5.35}$$

Учитывая, что векторно-скалярное произведение

$$(\overline{E}' \times \overline{H}')\, \overline{n} = \overline{E}'(\overline{H}' \times \overline{n}) = -\overline{H}'(\overline{E}' \times \overline{n}),$$

а также принимая во внимание граничные условия (5.34), получим

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \frac{\mu H'^2+\varepsilon E'^2}{2}\,dV = -\int\limits_V gE'^2\,dV. \qquad (5.36)$$

Совершенно очевидно, что правая часть в выражении (5.36) всегда меньше нуля (или равна нулю), так как проводимость среды g и квадрат напряженности электрического поля всегда положительны (или равны нулю). Следовательно, условие (5.36) будет удовлетворено лишь в том случае, когда функция

$$W_1(t) = \int\limits_V \frac{\mu H'^2+\varepsilon E'^2}{2}\,dV$$

монотонно убывает во времени $\left(\text{ибо только при этом предложении } \frac{dW_1}{dt} \leqslant 0\right)$. Но при $t=t_0$ согласно начальным условиям (5.34) энергия поля $W_1(t_0)=0$.

Так как энергия электромагнитного поля не может быть отрицательной, равенство (5.36) будет справедливо лишь при условии, что функция $W_1(t)=0$ для любого $t \geqslant t_0$. Последнее возможно, если $\bar{E}'$ и $\bar{H}'$ равны нулю в каждой точке области V при $t \geqslant t_0$. Следовательно, $\bar{E}_1=\bar{E}_2=\bar{E}$, $\bar{H}_1=\bar{H}_2=\bar{H}$, что и доказывает единственность решения.

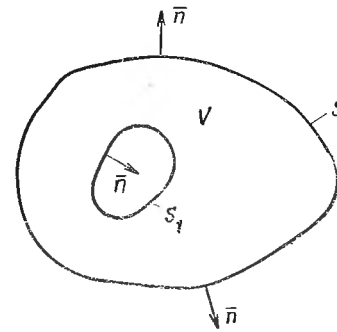


Рис. 5.11. К доказательству теоремы единственности для области, ограниченной поверхностями S_1 и S_2.

Совершенно аналогично теорема доказывается для случая, когда область V ограничена несколькими поверхностями (рис. 5.11).

Изложенные рассуждения относятся к так называемым внутренним задачам. Они характеризуются тем, что электромагнитное поле определяется во внутренней области, имеющей конечные размеры. Наряду с ними существуют внешние задачи. Для таких задач областью определения поля и его источников является все внешнее пространство, окружающее исходную поверхность с заданными на ней граничными условиями. При рассмотрении внешних задач обычно полагают, что пространство извне тоже ограничено замкнутой поверхностью, но эта поверхность находится на бесконечно больших расстояниях от внутренней поверхности и источников. Так, например, если на рис. 5.11 предположить, что внешняя по-

верхность S_2 удалена на бесконечность, то получится внешняя задача для области, ограниченной изнутри поверхностью S_1.

Рассмотрим теорему единственности для внешней задачи.

Пусть V есть область, ограниченная изнутри поверхностью S, а извне — поверхностью сферы бесконечно большого радиуса S_r, $r \to \infty$. В этом случае теорема Умова — Пойнтинга для поля $\overline{E}'$, $\overline{H}'$ запишется в виде

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \frac{\mu H'^2 + \varepsilon E'^2}{2}\, dV = -\int\limits_V gE'^2\, dV - \int\limits_S (\overline{E}' \times \overline{H}')\, \overline{n} dS - \\ - \int\limits_{S_r} (\overline{E}' \times \overline{H}')\, \overline{n} dS. \tag{5.37}$$

Проведенные выше рассуждения полностью применимы и к равенству (5.37) при условии, что

$$\int\limits_{S_r} (\overline{E}' \times \overline{H}')\, \overline{n} dS \to 0, \qquad r \to 0. \tag{5.38}$$

Но это условие, очевидно, будет выполнено, если полагать, что поле во внешнем пространстве распространяется от источников с конечной скоростью и что поверхность S_r при любом $t \geqslant t_0$ лежит вне той области, которую заняло поле к заданному моменту времени.

Таким образом, для единственности решения внешней задачи, кроме рассмотренных уже начальных и граничных условий, приходится вводить дополнительные условия, определяющие поведение поля в бесконечно удаленных точках. Согласно изложенному, электромагнитное поле во внешней области должно «уходить» от источника в пространство. Иными словами, оно должно удовлетворять на бесконечности принципу излучения.

Рассмотрим в заключение условия единственности решения уравнений Максвелла в установившемся режиме гармонических колебаний. В этом случае говорить о начальных условиях, очевидно, нет смысла, ибо закон изменения поля нам известен на всем временно́м интервале от $-\infty$ до $+\infty$. Для единственности решения уравнений Максвелла теперь необходимо, чтобы векторы поля удовлетворяли только граничным условиям, задаваемым, как обычно, в виде касательных составляющих вектора $\overline{E}$ или вектора $\overline{H}$ на границе области.

В самом деле, повторяя рассуждения, аналогичные предыдущим, мы вновь придем к соотношению (5.36), из которого следует, что

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \frac{\mu H'^2 + \varepsilon E'^2}{2}\, dV \leqslant 0.$$

Но это условие для периодически меняющихся полей в среде с конечной проводимостью ($g \neq 0$) может быть выполнено, если $E' = H' = 0$, что в сущности и требовалось доказать.

Если среда, заполняющая область V, потерь не имеет ($g = 0$), то может оказаться, что решение внутренней задачи в режиме гармонических колебаний становится неоднозначным. Принципиально это возможно при условии, что разностное поле в области V отлично от нуля, а энергия его не меняется во времени. С такой ситуацией мы встретимся, например, при изучении собственных колебаний в объемных резонаторах без потерь (см. гл. XII). Однако в подобных случаях можно полагать, что среда имеет очень малую, но все же отличную от нуля проводимость, и тогда условия единственности решения будут снова выполняться.

Аналогичным приемом пользуются и при анализе единственности решения внешних задач. В дальнейшем мы увидим, что в установившемся режиме амплитуды поля, распространяющегося от источников в среде с конечной проводимостью, убывают в радиальных направлениях по закону $\frac{1}{r} e^{-\alpha r}$ (где α — некоторая постоянная). Поэтому подынтегральное выражение в (5.38) при $r \to \infty$ будет стремиться к нулю как $\frac{1}{r^2} e^{-2\alpha r}$, и интеграл (5.38), несмотря на то, что S_r с увеличением радиуса сферы возрастает пропорционально r^2, в пределе дает нуль. Но тогда из соотношения (5.37) вытекает, что, как и в предыдущем случае, $E' = H' = 0$.

Задачи по расчету электромагнитного поля в заданной области при известных начальных и граничных условиях обычно называют краевыми или граничными задачами электродинамики.

7. Принцип взаимности

Известно, что электромагнитное поле возникает в пространстве при наличии меняющихся во времени электрических токов и зарядов. Последние возбуждаются в проводящих элементах специального устройства — антенны, так же как и постоянный ток в электрической цепи, под действием сторонних сил поля.

Если антенна находится в пространстве, частично или полностью заполненном проводящей средой, то помимо тока в антенне будет существовать еще ток в тех точках, где проводимость среды отлична от нуля. Последний наводится там электромагнитным полем антенны. Согласно закону Ома вектор плотности наводимого тока $\overline{j} = g\overline{E}$, где $\overline{E}$ есть функция, определяемая из уравнений Максвелла и, следовательно, до решения их остающаяся неизвестной.

Электрические токи, возбуждаемые непосредственно в антенне, в отличие от наводимых часто оказываются известными с той или иной степенью точности заранее. Эти токи называются с т о р о н н и м и и обозначаются буквой $\overline{j}_{ст}$ (или $I_{ст}$). Их-то вместе с электрическими зарядами на антенне и следует считать источниками электромагнитного поля при решении уравнений Максвелла *).

Необходимо отметить, что в режиме гармонических колебаний электрические заряды вообще можно не рассматривать, так как из уравнения непрерывности $\operatorname{div}\overline{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ следует, что комплексная амплитуда плотности заряда однозначно связана с комплексной амплитудой плотности тока

$$\dot{\rho} = \frac{i}{\omega}\operatorname{div}\dot{\overline{j}}.$$

Для такого режима можно говорить, что источником электромагнитного поля является сторонний ток.

Таким образом, вектор плотности электрического тока в общем случае имеет вид

$$\overline{j} = \overline{j}_{ст} + \overline{j}' = \overline{j}_{ст} + g\overline{E}.$$

Пусть в каждой точке области V определены электромагнитные поля $\overline{E}_1$, $\overline{H}_1$ и $\overline{E}_2$, $\overline{H}_2$, создаваемые не зависящими друг от друга сторонними токами $\overline{j}_{1ст}$ и $\overline{j}_{2ст}$.

В установившемся режиме напряженности первого и второго полей удовлетворяют уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\dot{\overline{H}}_1 &= \dot{\overline{j}}_{1ст} + (g + i\omega\varepsilon)\dot{\overline{E}}_1, \\ \operatorname{rot}\dot{\overline{E}}_1 &= -i\omega\mu\dot{\overline{H}}_1; \end{aligned}\right\} \tag{5.39}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\dot{\overline{H}}_2 &= \dot{\overline{j}}_{2ст} + (g + i\omega\varepsilon)\dot{\overline{E}}_2, \\ \operatorname{rot}\dot{\overline{E}}_2 &= -i\omega\mu\dot{\overline{H}}_2. \end{aligned}\right\} \tag{5.40}$$

Умножим первое уравнение системы (5.39) скалярно на $\overline{E}_2$, второе уравнение системы (5.40) — на $\overline{H}_1$ и вычтем из полученного второго равенства первое. В результате, учитывая, что

$$\operatorname{div}[\overline{A}\times\overline{B}] = \overline{B}\operatorname{rot}\overline{A} - \overline{A}\operatorname{rot}\overline{B},$$

будем иметь

$$\operatorname{div}[\dot{\overline{E}}_2\times\dot{\overline{H}}_1] = -\dot{\overline{j}}_{1ст}\dot{\overline{E}}_2 - i\omega\mu\dot{\overline{H}}_1\dot{\overline{H}}_2 - (g + i\omega\varepsilon)\dot{\overline{E}}_1\dot{\overline{E}}_2. \tag{5.41}$$

*) Более подробно о способах задания источников см. в § 1 гл. VIII.

Проделывая аналогичные операции с первым уравнением системы (5.40) и вторым уравнением системы (5.39), находим:

$$\operatorname{div}[\dot{\bar{E}}_1 \times \dot{\bar{H}}_2] = -\dot{\bar{j}}_{2\text{ст}}\dot{\bar{E}}_1 - i\omega\mu\dot{\bar{H}}_1\dot{\bar{H}}_2 - (g + i\omega\varepsilon)\dot{\bar{E}}_1\dot{\bar{E}}_2. \quad (5.42)$$

Вычтем теперь равенство (5.41) из равенства (5.42). В результате получим выражение

$$\operatorname{div}\{(\dot{\bar{E}}_1 \times \dot{\bar{H}}_2) - (\dot{\bar{E}}_2 \times \dot{\bar{H}}_1)\} = \dot{\bar{j}}_{1\text{ст}}\dot{\bar{E}}_2 - \dot{\bar{j}}_{2\text{ст}}\dot{\bar{E}}_1, \quad (5.43)$$

связывающее между собой векторы $\bar{E}_1, \bar{H}_1$ и $\bar{E}_2, \bar{H}_2$. Это выражение носит название леммы Лоренца в дифференциальной форме.

Из равенства (5.43) нетрудно получить лемму Лоренца в интегральной форме. Для этого достаточно обе части (5.43) умножить на dV и проинтегрировать по объему V, ограниченному поверхностью S. В результате, используя теорему Гаусса — Остроградского, будем иметь:

$$\int_S [(\dot{\bar{E}}_1 \times \dot{\bar{H}}_2) - (\dot{\bar{E}}_2 \times \dot{\bar{H}}_1)]\,\overline{dS} = \int_V (\dot{\bar{j}}_{1\text{ст}}\dot{\bar{E}}_2 - \dot{\bar{j}}_{2\text{ст}}\dot{\bar{E}}_1)\,dV. \quad (5.44)$$

Предположим, что источники полей находятся в безграничном однородном пространстве. В этом случае под областью V следует понимать область, ограниченную поверхностью сферы бесконечно большого радиуса. Тогда в левой части равенства (5.44) мы будем иметь поверхностный интеграл

$$\int_{S_r} [(\dot{\bar{E}}_1 \times \dot{\bar{H}}_2) - (\dot{\bar{E}}_2 \times \dot{\bar{H}}_1)]\,\overline{dS}$$

при $r \to \infty$, где r — радиус сферы.

Для полей, удовлетворяющих принципу излучения на бесконечности, такой интеграл обращается в нуль. К этому результату мы можем, например, прийти, полагая, что рассматриваемая среда обладает конечной проводимостью (см. аналогичные рассуждения в предыдущем параграфе).

Следовательно, выражение (5.44) с учетом изложенного принимает вид

$$\int_V (\dot{\bar{j}}_{1\text{ст}}\dot{\bar{E}}_2 - \dot{\bar{j}}_{2\text{ст}}\dot{\bar{E}}_1)\,dV = 0. \quad (5.45)$$

Если токи $\dot{\bar{j}}_{1\text{ст}}$ определены в области V_1, а токи $\dot{\bar{j}}_{2\text{ст}}$ — в области V_2, причем эти области в пространстве не пересекаются (рис. 5.12), то равенство (5.45) можно переписать так:

$$\int_{V_1} \dot{\bar{j}}_{1\text{ст}}\dot{\bar{E}}_2 dV = \int_{V_2} \dot{\bar{j}}_{2\text{ст}}\dot{\bar{E}}_1\,dV. \quad (5.46)$$

Последнее соотношение представляет собой аналитическую формулировку принципа (теоремы) взаимности для поля в свободном пространстве.

Пусть области V_1 и V_2 одинаковы, а токи $\bar{j}_{1ст}$ и $\bar{j}_{2ст}$ соответственно равны между собой. Тогда из равенства (5.46) получается, что поле $\bar{E}_1$, создаваемое током $\bar{j}_{1ст}$, в точках области V_2 будет совпадать с полем $\bar{E}_2$ тока $\bar{j}_{2ст}$ в точках области V_1. А это означает, что условия передачи поля из области V_1 в область V_2 и обратно из V_2 в V_1 совершенно одинаковы. Разумеется, этот вывод будет справедлив лишь для изотропных сред, свойства которых не зависят от направления.

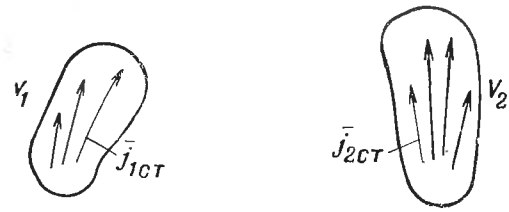


Рис. 5.12. К рассмотрению принципа взаимности.

Предположим, что в изотропном пространстве имеются: источник поля — антенна и прибор, измеряющий напряженность поля. Если антенну и прибор поменять местами, не нарушая их взаимной ориентации, то на основании принципа взаимности мы можем утверждать, что показания прибора как в первом, так и во втором положении его останутся неизменными.

8. Перестановочная двойственность уравнений Максвелла

Электромагнитное поле, как уже отмечалось, возбуждается в пространстве электрическими токами и зарядами. Однако в некоторых случаях удобно полагать, что источниками поля являются фиктивные (т. е. не существующие в действительности) магнитные токи и магнитные массы. Возможность замены электрических источников магнитными основывается на том, что фиктивные магнитные токи и массы формально создают в пространстве электромагнитное поле, совпадающее с полем соответствующих им реальных электрических источников. В этом смысле совокупность фиктивных магнитных токов и масс будет эквивалентна некоторой совокупности реальных электрических токов и зарядов. (Напомним, что аналогичный прием мы уже рассматривали в теории постоянного магнитного поля при анализе поля витка с постоянным током.)

Для расчета полей, создаваемых магнитными источниками, в уравнения Максвелла вместо электрических токов и зарядов необходимо ввести магнитные величины.

Напишем уравнения Максвелла для поля магнитных источников в среде с нулевой проводимостью ($g = 0$).

В отсутствие переменного электрического тока вихри магнитного поля определяются уравнением

$$\operatorname{rot} \overline{H} = \varepsilon \frac{\partial \overline{E}}{\partial t}. \tag{5.47}$$

Наличие магнитных источников внешне не отразится на форме этого уравнения.

Что же касается истоков магнитного поля, то теперь они будут характеризоваться выражением

$$\operatorname{div} \mu \overline{H} = \operatorname{div} \overline{B} = \rho_{\text{м}}, \tag{5.48}$$

где $\rho_{\text{м}}$ — объемная плотность магнитных масс.

Для истоков электрического поля имеем

$$\operatorname{div} \varepsilon \overline{E} = \operatorname{div} \overline{D} = 0, \tag{5.49}$$

так как по условию электрические заряды в пространстве отсутствуют.

Рассмотрим, наконец, вихри электрического поля. Очевидно, теперь в правую часть уравнения $\operatorname{rot} \overline{E} = -\mu \frac{\partial \overline{H}}{\partial t}$, по аналогии с первым уравнением Максвелла при наличии электрических токов, необходимо ввести вектор плотности магнитных токов $\overline{j}_{\text{м}}$. С учетом последнего можно написать:

$$\operatorname{rot} \overline{E} = -\overline{j}_{\text{м}} - \mu \frac{\partial \overline{H}}{\partial t}. \tag{5.50}$$

Вектор плотности магнитного тока введен сюда со знаком «минус». В этом случае уравнение непрерывности для магнитных величин по виду становится аналогичным обычному уравнению непрерывности. В самом деле, из уравнения (5.50) следует, что

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \overline{E} = -\operatorname{div} \overline{j}_{\text{м}} - \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \overline{B}) = 0.$$

Подставляя сюда значения $\operatorname{div} \overline{B}$ из (5.48), будем иметь

$$\operatorname{div} \overline{j}_{\text{м}} = -\frac{\partial \rho_{\text{м}}}{\partial t}. \tag{5.51}$$

(Ср. полученное выражение с уравнением (3.6)).

Итак, совокупность выражений (5.47)—(5.50) образует полную систему уравнений Максвелла, определяющую поле переменных во времени магнитных источников.

Сравним эту систему с обычными уравнениями Максвелла, содержащими электрические токи и заряды. Для удобства рассуждений запишем их совместно, в виде двух столбцов:

Электрические источники	Магнитные источники
$\operatorname{rot} \overline{H} = \overline{j} + \varepsilon \frac{\partial \overline{E}}{\partial t}$,	$\operatorname{rot} \overline{H} = \varepsilon \frac{\partial \overline{E}}{\partial t}$,
$\operatorname{rot} \overline{E} = -\mu \frac{\partial \overline{H}}{\partial t}$,	$\operatorname{rot} \overline{E} = -\overline{j}_{\text{м}} - \mu \frac{\partial \overline{H}}{\partial t}$, (5.52)
$\operatorname{div} \overline{D} = \rho$,	$\operatorname{div} \overline{D} = 0$,
$\operatorname{div} \overline{B} = 0$.	$\operatorname{div} \overline{B} = \rho_{\text{м}}$.

Легко заметить, что правую систему можно получить из левой, если в каждом уравнении последней вектор $\overline{H}$ заменить вектором $\overline{E}$, вектор $\overline{E}$ — вектором $\overline{H}$, значения ε и μ заменить на $-\mu$ и $-\varepsilon$, а величины $\overline{j}$ и ρ — на $-\overline{j}_{\text{м}}$ и $-\rho_{\text{м}}$ соответственно. Стало быть, при перестановках

$$\overline{E} \rightleftarrows \overline{H},\ \varepsilon \rightleftarrows -\mu,\ \overline{j} \rightleftarrows -\overline{j}_{\text{м}} \text{ и } \rho \rightleftarrows -\rho_{\text{м}} \tag{5.53}$$

левая система уравнений превращается в правую, и наоборот.

Отмеченное свойство получило наименование *перестановочной двойственности* уравнений Максвелла.

Предположим, что нам известно решение задачи в области V для поля, созданного электрическими источниками. Если теперь в этом решении совершить перестановку типа (5.53), то новые значения векторов $\overline{E}$ и $\overline{H}$ будут удовлетворять уже уравнениям Максвелла с магнитными источниками, распределенными в пространстве аналогично электрическим. Найденное таким путем решение уравнений (5.52), естественно, удовлетворяет на граничной поверхности S новым граничным условиям, получающимся из прежних посредством тех же перестановок. Если, к примеру, в предыдущем случае на некоторой части поверхности S была равна нулю касательная составляющая $\overline{E}$, то теперь здесь должна обращаться в нуль касательная составляющая $\overline{H}$ и т. п.

Таким образом, рассмотренное выше свойство уравнений Максвелла позволяет распространить известные решения некоторых задач на класс двойственных им в смысле перестановок (5.53).

Советский ученый А. А. Пистолькорс на основе принципа перестановочной двойственности разработал теорию так называемых

плоских диффракционных антенн (см. § 9 гл. VIII). Предложенный им метод решения электродинамических задач в полупространстве с плоской граничной поверхностью получил наименование принципа двойственности. Впоследствии этот принцип в несколько иной форме был также сформулирован советскими учеными М. А. Леонтовичем и Я. Н. Фельдом.

9. Уравнения Максвелла в ортогональных криволинейных координатах

При решении электродинамических задач приходится применять различные системы координат. Поэтому целесообразно иметь универсальные выражения, представляющие уравнения Максвелла в обобщенной ортогональной системе координат ξ, η, ζ_ξ с метрическими (масштабными) коэффициентами h_ξ, h_η и h_ζ.

Используя формулы rot и div векторных величин в ортогональных криволинейных координатах, нетрудно показать, что уравнения Максвелла сводятся к системе восьми дифференциальных уравнений в частных производных для скалярных проекций векторов поля:

$$\frac{1}{h_\eta h_\zeta}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}(h_\zeta E_\zeta)-\frac{\partial}{\partial\zeta}(h_\eta E_\eta)\right]+\frac{\partial B_\xi}{\partial t}=0;$$

$$\frac{1}{h_\zeta h_\xi}\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}(h_\xi E_\xi)-\frac{\partial}{\partial\xi}(h_\zeta E_\zeta)\right]+\frac{\partial B_\eta}{\partial t}=0;$$

$$\frac{1}{h_\xi h_\eta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(h_\eta E_\eta)-\frac{\partial}{\partial\eta}(h_\xi E_\xi)\right]+\frac{\partial B_\zeta}{\partial t}=0;$$

$$\frac{1}{h_\eta h_\zeta}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}(h_\zeta H_\zeta)-\frac{\partial}{\partial\zeta}(h_\eta H_\eta)\right]-\frac{\partial D_\xi}{\partial t}=j_\xi;$$

$$\frac{1}{h_\zeta h_\xi}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(h_\xi H_\xi)-\frac{\partial}{\partial\xi}(h_\zeta H_\zeta)\right]-\frac{\partial D_\eta}{\partial t}=j_\eta;$$

$$\frac{1}{h_\xi h_\eta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(h_\eta H_\eta)-\frac{\partial}{\partial\eta}(h_\xi H_\xi)\right]-\frac{\partial D_\zeta}{\partial t}=j_\zeta;$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(h_\eta h_\zeta D_\xi)+\frac{\partial}{\partial\eta}(h_\zeta h_\xi D_\eta)+\frac{\partial}{\partial\zeta}(h_\xi h_\eta D_\zeta)=h_\xi h_\eta h_\zeta\rho;$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(h_\eta h_\zeta B_\xi)+\frac{\partial}{\partial\eta}(h_\zeta h_\xi B_\eta)+\frac{\partial}{\partial\zeta}(h_\xi h_\eta B_\zeta)=0.$$

К сожалению, в общем случае такую систему невозможно привести к совокупности уравнений, в каждое из которых входила бы только одна неизвестная величина. Поэтому при рассмотрении конкретных задач необходимо учитывать особенности соответствующих систем координат и, исходя из них, искать наиболее простые способы решения уравнений.

ПЛОСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Процесс образования, или возбуждения, электромагнитного поля соответствующими источниками (излучателями) рассматривается в восьмой главе. Если, отвлекаясь от источников, создавших поле, просто исходить из его существования, то можно, пользуясь уравнениями Максвелла для пространства, свободного от источников, исследовать общие свойства такого поля.

Содержанием настоящей главы явится изучение свойств электромагнитного поля простейшей структуры, когда векторы $\overline{E}$ и $\overline{H}$ являются функциями времени и только одной пространственной декартовой координаты. Будет показано, что такое электромагнитное поле имеет характер так называемых плоских электромагнитных волн. Хотя создать такие поля ни один реальный источник не может, тем не менее изучение этих полей имеет огромное теоретическое и практическое значение по следующим соображениям.

1. Теория распространения плоских волн в математическом отношении гораздо проще теории распространения других типов волн. В то же время качественный характер закономерностей для различных типов волн одинаков; более того, некоторые соотношения, полученные для плоских волн, и в количественном отношении также оказываются справедливыми для волн с другой формой волновой поверхности.

2. В большинстве случаев на практике наблюдателя интересует движение не всей волновой поверхности, а лишь относительно небольшого ее участка. На значительных расстояниях от излучателя небольшой участок сферической или цилиндрической поверхности является приближенно плоским, и поэтому результаты исследования распространения плоских волн должны соответствовать с достаточной точностью законам распространения малого участка волн другого вида.

1. Основные соотношения для плоской электромагнитной волны в однородном диэлектрике

Уравнения Максвелла для однородной диэлектрической среды, свободной от сторонних токов и зарядов, имеют вид:

$$\operatorname{rot}\overline{H} = \varepsilon\frac{\partial\overline{E}}{\partial t}, \tag{I}$$

$$\operatorname{rot}\overline{E} = -\mu\frac{\partial\overline{H}}{\partial t}, \tag{II}$$

$$\operatorname{div}\overline{E} = 0, \tag{III}$$

$$\operatorname{div}\overline{H} = 0. \tag{IV}$$

Предположим, что векторы $\overline{E}$ и $\overline{H}$ являются функциями только времени и одной из декартовых координат, например координаты z. Тогда, используя прямоугольную систему координат и учитывая, что $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$, получим для проекции векторов $\overline{E}$ и $\overline{H}$ из уравнений (I) и (II):

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon\frac{\partial E_x}{\partial t}, \tag{6.1а}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon\frac{\partial E_y}{\partial t}, \tag{6.1б}$$

$$\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial t} = 0, \tag{6.1в}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu\frac{\partial H_x}{\partial t}, \tag{6.2а}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu\frac{\partial H_y}{\partial t}, \tag{6.2б}$$

$$\mu\frac{\partial H_z}{\partial t} = 0, \tag{6.2в}$$

и из уравнений (III) и (IV)

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \tag{6.3а}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial z} = 0. \tag{6.3б}$$

Из уравнений (6.1в) и (6.3а) следует, что E_z не зависит ни от времени, ни от пространственных координат. Естественно, что такое поле не существует. Поэтому $E_z = 0$. Точно так же из уравнений (6.2в) и (6.3б) следует, что $H_z = 0$. Таким образом, электромагнитное поле имеет лишь составляющие, перпендикулярные оси z.

Рассмотрим уравнения (6.1а) и (6.1б) и соответственно (6.2а) и (6.2б) для этих составляющих. Легко понять, что система уравнений Максвелла распадается на две независимые системы А и Б, а именно:

Система А

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon\frac{\partial E_x}{\partial t} &= -\frac{\partial H_y}{\partial z},\\ \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -\mu\frac{\partial H_y}{\partial t},\end{aligned}\right\}$$

Система Б

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon\frac{\partial E_y}{\partial t} &= \frac{\partial H_x}{\partial z},\\ \frac{\partial E_y}{\partial z} &= \mu\frac{\partial H_x}{\partial t}.\end{aligned}\right\}$$

Уравнения системы А связывают составляющие E_x и H_y, тогда как уравнения системы Б связывают составляющие E_y и H_x электромагнитного поля. Таким образом, мы можем утверждать, что взаимно связанными являются лишь взаимно перпендикулярные составляющие E и H. Иными словами, системы А и Б описывают два независимых друг от друга поля, в каждом из которых электрический E и магнитный H векторы взаимно перпендикулярны.

Для дальнейшего анализа сохраним лишь систему А:

$$\varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{\partial H_y}{\partial z},$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}.$$

Чтобы иметь уравнение, содержащее только одну из функций (E_x), продифференцируем первое уравнение системы по t и подставим в правую часть значение $\partial H_y/\partial t$ из второго уравнения, после чего получим

$$\varepsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}.$$

Умножив обе части равенства на μ и обозначая

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

будем иметь

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0. \tag{6.4}$$

Уравнение (6.4) известно под названием волнового уравнения.

Вводя обозначение

$$\xi = \frac{z}{v},$$

получим

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0.$$

Решением этого уравнения является произвольная функция $F_1(t-\xi)$ или $F_2(t+\xi)$, так как обе эти функции имеют равные вторые производные по t и по ξ.

Таким образом,

$$E_x = F_1(t-\xi) + F_2(t+\xi)$$

или, учитывая, что $\xi = \frac{z}{v}$,

$$E_x = F_1\left(t - \frac{z}{v}\right) + F_2\left(t + \frac{z}{v}\right) \tag{6.5}$$

Каждое из двух частных решений, входящих в (6.5), представляет собой так называемую волновую функцию или волну. В самом деле, рассмотрим первое частное решение $F_1(t - z/v)$.

Возьмем на оси z две произвольные точки z_2 и z_1, и пусть $z_2 > z_1$. Значения функции F_1 в точках z_1 и z_2 в один и тот же момент различны, а именно: $F_1(t - z_1/v)$ и $F_1(t - z_2/v)$.

Однако легко видеть, что если взять значение функции $F_1(t - z/v)$ в точке z_1 в момент t_1, а в точке z_2 в другой момент времени t_2, то t_2 можно выбрать таким образом, чтобы значение функции в точке z_2 в момент t_2 равнялось значению функции в точке z_1 в момент t_1. Для этого необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$t_2 - \frac{z_2}{v} = t_1 - \frac{z_1}{v}$$

или

$$t_2 - t_1 = \frac{z_2 - z_1}{v}.$$

Если $z_2 > z_1$, то $t_2 > t_1$.

Из полученного равенства следует, что значение, которое функция F_1 имеет в произвольной точке z_1 в произвольный момент времени t_1, повторяется в более удаленной точке z_2 позднее через промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$, пропорциональный расстоянию $\Delta z = z_2 - z_1$ между этими точками, т. е. значения функции F_1 как бы движутся (распространяются) в положительном направлении оси z со скоростью

$$v = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{6.6}$$

Это свойство функции служит основанием для названия ее волновой функцией или волной.

Поверхность, на которой волновая функция в заданный момент времени принимает одинаковые значения, называется волновой поверхностью. Ясно, что эта поверхность совпадает с поверхностью равных значений аргумента, или фазы волновой функции.

В нашем случае уравнение волновой поверхности имеет вид $t = z/v = \text{const}$, откуда вытекает, что эта поверхность представляет собой плоскость $z = \text{const}$, движущуюся вдоль оси z со скоростью v. Такая волна носит название плоской волны.

Переходя к рассмотрению второго частного решения в (6.5), а именно $F_2(t + z/v)$, видим, что оно отличается от первого лишь знаком слагаемого z/v, откуда следует, что второе частное решение также представляет собой плоскую волну, движущуюся со скоростью v, но уже в отрицательном направлении оси z.

Чтобы решить систему уравнений А относительно H_y, продифференцируем второе уравнение по t. Подставив значение $\partial E_x/\partial t$ из первого уравнения, получим выражение для H_y, аналогичное E_x:

$$H_y = \Psi_1\left(t-\frac{z}{v}\right)+\Psi_2\left(t+\frac{z}{v}\right), \tag{6.7}$$

где Ψ_1 и Ψ_2 — произвольные функции.

Для нахождения связи между функциями F и Ψ подставим (6.5) и (6.7) в первое уравнение системы А. В результате будем иметь

$$\varepsilon F_1'\left(t-\frac{z}{v}\right)+\varepsilon F_2'\left(t+\frac{z}{v}\right)=\frac{1}{v}\Psi_1'\left(t-\frac{z}{v}\right)-\frac{1}{v}\Psi_2'\left(t+\frac{z}{v}\right).$$

Так как это равенство должно выполняться при любых значениях t и z, очевидно, можно положить, что:

$$\varepsilon F_1\left(t-\frac{z}{v}\right)=\frac{1}{v}\Psi_1\left(t-\frac{z}{v}\right),$$

$$\varepsilon F_2\left(t+\frac{z}{v}\right)=-\frac{1}{v}\Psi_2\left(t+\frac{z}{v}\right),$$

откуда

$$\Psi_1\left(t-\frac{z}{v}\right)=v\varepsilon F_1\left(t-\frac{z}{v}\right)=\frac{1}{Z_0}F_1\left(t-\frac{z}{v}\right),$$

где $Z_0=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$.

Точно так же

$$\Psi_2\left(t+\frac{z}{v}\right)=-\frac{1}{Z_0}F_2\left(t+\frac{z}{v}\right).$$

Следовательно, общие выражения для проекций векторов электрического и магнитного полей принимают вид:

$$E_x=F_1\left(t-\frac{z}{v}\right)+F_2\left(t+\frac{z}{v}\right),$$

$$H_y=\frac{1}{Z_0}F_1\left(t-\frac{z}{v}\right)-\frac{1}{Z_0}F_2\left(t+\frac{z}{v}\right). \tag{6.8}$$

Таким образом, решение уравнений Максвелла для случая, когда $\overline{E}$ и $\overline{H}$ зависят лишь от одной декартовой координаты z, представляет собой наложение двух плоских волн, движущихся в противоположных направлениях оси z со скоростью v. В вакууме или воздухе

$$\varepsilon=\varepsilon_0=\frac{1}{36\pi}10^{-9}\ ф/м;\quad \mu=\mu_0=4\pi 10^{-7}\ гн/м,$$

и скорость распространения волн будет равна $v = c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = 3 \cdot 10^8$ *м/сек*. Для среды с произвольными ε и μ из формулы (6.6) имеем

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon'\mu'}}.$$

Каждая из рассматриваемых волн является электромагнитной волной поперечного типа, так как электрический и магнитный векторы их лежат в плоскостях, перпендикулярных оси распространения z. Составляющие E_z и H_z вдоль направления распространения равны нулю.

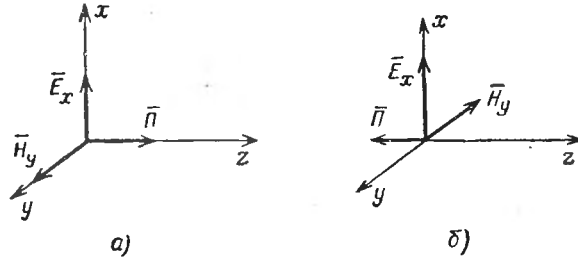


Рис. 6.1. Ориентация векторов в плоской волне:
а — прямая волна; *б* — обратная волна.

Первые слагаемые в выражениях (6.8) описывают электромагнитную волну, движущуюся в положительном направлении оси, или так называемую прямую волну. Вторые слагаемые в (6.8) описывают электромагнитную волну, движущуюся в отрицательном направлении оси, или так называемую обратную волну.

Из (6.8) следует, что составляющие электрического и магнитного полей прямой и обратной волн пропорциональны друг другу и связаны соотношением

$$\frac{E \text{ прямой волны}}{H \text{ прямой волны}} = -\frac{E \text{ обратной волны}}{H \text{ обратной волны}} = Z_0, \qquad (6.9)$$

где $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ — величина, имеющая размерность сопротивления, и называемая волновым сопротивлением среды.

Из уравнения (6.9) вытекает, что как для прямой, так и для обратной волны количества энергии, запасенной в электрическом и магнитном полях, равны друг другу. Действительно,

$$\mu \frac{H^2}{2} = \mu \frac{E^2}{2Z_0} = \varepsilon \frac{E^2}{2}. \qquad (6.10)$$

На рис. 6.1, *а* и 6.1, *б* показана ориентация векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$, а также вектора Пойнтинга для прямой и обратной волн. Как видно,

знак минус перед отношением E/H в (6.9) для обратной волны имеет определенный физический смысл: он показывает, что вектор Пойнтинга здесь направлен в сторону, противоположную оси z.

Покажем теперь, что скорость движения энергии $v_{эн}$ совпадает по величине со значением скорости движения волновой поверхности v.

Если прямая волна распространяется в направлении оси z, то за промежуток времени dt через участок S плоскости, перпендикулярной оси z, пройдет количество энергии dW, равное ее величине, заключенной в параллелепипеде длиной $v_{эн}\,dt$ и сечением S, т. е.

$$dW = \left(\frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2}\right) v_{эн}\,dtS.$$

или учитывая (6.10),

$$dW = \varepsilon E^2 v_{эн}\,dtS. \tag{6.11}$$

С другой стороны, эту величину можно вычислить при помощи вектора Пойнтинга

$$dW = \Pi S dt = EHSdt = E^2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,Sdt. \tag{6.12}$$

Приравнивая выражения (6.11) и (6.12), получим

$$v_{эн} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = v.$$

Хотя общее решение системы уравнений А представляется в виде наложения двух волн — прямой и обратной, во многих случаях имеет место только одна прямая волна, движущаяся от источника излучения. Обратная волна может существовать, например, тогда, когда среда, в которой находится источник поля, ограничена. Появление обратной волны в этом случае вызвано возмущениями (отражениями), возникающими на границе среды. Следует заметить, что вместо терминов «прямая» и «обратная» волны часто применяют термины «падающая» и «отраженная» волны.

Рассмотрим частный случай прямой (падающей) волны, когда электромагнитное поле в точке $z = 0$ меняется во времени по гармоническому закону $\cos\,\omega t$ или в символическом изображении по закону $e^{i\omega t}$.

Тогда в соответствии с (6.8) в произвольной точке z поле представляется в виде:

$$E = E_{пад\,m}\cos\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) = E_{пад\,m}\cos(\omega t - kz),$$

$$H = \frac{E_{пад\,m}}{Z_0}\cos\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) = \frac{E_{пад\,m}}{Z_0}\cos(\omega t - kz),$$

или в символическом изображении:

$$E_к = \dot{E}_{пад}\, e^{-ikz} e^{i\omega t}, \tag{6.13}$$

$$H_к = \frac{\dot{E}_{пад}}{Z_0} e^{-ikz} e^{i\omega t}, \tag{6.14}$$

где

$$k = \frac{\omega}{v} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}.$$

Из выражений (6.13), (6.14) видно, что в любой фиксированной точке z составляющие поля имеют независящие от z амплитуды $E_{пад}$ и $H_{пад} = E_{пад}/Z_0$ и различные фазы. С увеличением z имеет место отставание фазы на величину, равную kz.

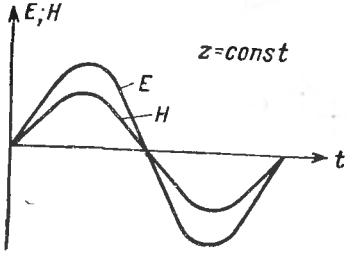


Рис. 6.2. Зависимость от времени составляющих E и H электромагнитного поля в фиксированной точке z.

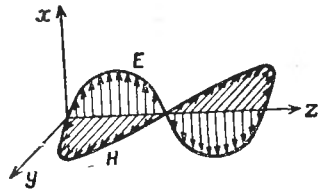


Рис. 6.3. Изменение составляющих E и H электромагнитного поля вдоль оси z в фиксированный момент времени.

Поэтому коэффициент k называют фазовым множителем или коэффициентом фазы. Так как величина $k = \omega/v = 2\pi/\lambda$, где λ — длина волны, определяемая как расстояние, на котором фаза меняется на 2π, то k называется еще и волновым числом.

На рис. 6.2 показана зависимость составляющих поля E и H от времени в фиксированной точке z, а на рис. 6.3 — зависимость E и H от z в фиксированный момент времени. В последующие моменты времени распределение вдоль оси z будет меняться так, как если бы кривые на рис. 6.3 перемещались вдоль положительного направления оси z со скоростью v.

Электромагнитная волна, определяемая выражениями (6.13), (6.14), как известно, носит название бегущей волны.

2. Комплексная диэлектрическая проницаемость среды

В природе идеальных диэлектриков не существует, и всякая среда обладает некоторой проводимостью.

Разделение сред на проводники, полупроводники и диэлектрики может быть произведено по относительным значениям тока прово-

димости $\overline{j} = g\overline{E}$ и тока смещения $\overline{j}_{см} = \varepsilon \frac{\partial \overline{E}}{\partial t}$. Если ток проводимости значительно превышает ток смещения, т. е.

$$\left| gE \right| \gg \left| \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \right|,$$

то такую среду следует считать проводником. Наоборот, если ток смещения значительно больше тока проводимости, т. е.

$$\left| \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \right| \gg \left| gE \right|,$$

то такая среда представляет собой диэлектрик.

В промежуточных случаях, когда токи проводимости и смещения имеют величину одного порядка, мы будем называть среду полупроводником.

Легко видеть, что соотношение между значениями тока проводимости и тока смещения определяется не только параметрами среды g и ε, но существенно зависит от того, насколько быстро электрическое поле меняется во времени.

Рассмотрим случай, когда электромагнитное поле меняется во времени по гармоническому закону.

С этой целью напишем первое уравнение Максвелла для комплексных амплитуд векторов $\overline{E}$ и $\overline{H}$ в точках, где нет сторонних источников:

$$\operatorname{rot} \dot{\overline{H}} = (g + i\omega\varepsilon)\, \dot{\overline{E}}. \tag{6.15}$$

Перепишем далее (6.15) так:

$$\operatorname{rot} \dot{\overline{H}} = i\omega \left(\varepsilon - i \frac{g}{\omega} \right) \dot{\overline{E}}$$

и введем обозначение

$$\varepsilon_к = \varepsilon - i \frac{g}{\omega}. \tag{6.16}$$

Тогда вместо (6.15) будем иметь

$$\operatorname{rot} \dot{\overline{H}} = i\omega\varepsilon_к \dot{\overline{E}}. \tag{6.15а}$$

Полученное уравнение позволяет рассматривать любую среду как «диэлектрик» с комплексной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_к$.

Соотношение значений вещественной части ε и мнимой части g/ω комплексной диэлектрической проницаемости $\varepsilon_к$ данной среды позволяет определить, является ли эта среда проводником, диэлектриком или полупроводником.

Среда может считаться проводником, если $g \gg \varepsilon\omega$, и диэлектриком, если $g \ll \varepsilon\omega$.

Для каждой реальной среды мы можем определить значение граничной частоты $\omega_{гр}$, при которой амплитуды токов проводимости и смещения равны между собой

$$\omega_{гр} = \frac{g}{\varepsilon}.$$

На высоких частотах ($\omega \gg \omega_{гр}$) в среде преобладающую роль играют токи смещения. Стало быть, среду можно рассматривать как диэлектрик.

Для низких частот $\omega \ll \omega_{гр}$ в среде преобладают токи проводимости; и теперь уже среду можно рассматривать как проводник.

Вычислим значения $\omega_{гр}$ для некоторых случаев.

Металл. Рассмотрим в виде примера медь. Проводимость меди $g = 57 \cdot 10^6$ *сим/м*. Диэлектрическую проницаемость металлов измерить очень трудно и точных данных для нее нет. Однако можно утверждать, что она того же порядка, что и диэлектрическая проницаемость воздуха. Мы можем положить, что

$$\varepsilon_{меди} = (1 \div 10)\,\varepsilon_0.$$

Тогда даже при $\varepsilon_{меди} = 10\varepsilon_0 = \frac{10}{36\pi} 10^{-9}$ *ф/м* получим

$$f_{гр} = \frac{\omega_{гр}}{2\pi} = \frac{57 \cdot 10^6}{\frac{10}{36\pi} 10^{-9}} \approx 10^{17}\ гц,$$

что соответствует длине волны в воздухе $\lambda_0 = \frac{3 \cdot 10^8}{10^{17}} = 3 \cdot 10^{-9}\ м$.

В настоящее время наивысшие из применяемых в радиотехнике частот достигают значений 10^{14} *гц* (световые колебания). Таким образом, для радиотехнического спектра частот в металлах токи проводимости в тысячу и больше раз превышают токи смещения. Однако для диапазона ультрафиолетовых волн токами смещения в металлах пренебречь уже нельзя.

Почва. Проводимость сухой почвы имеет значение в пределах

$$g = 10^{-4} \div 10^{-5}\ сим/м,$$

а диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon = (2 \div 5)\,\varepsilon_0.$$

Принимая средние значения

$$g = 5 \cdot 10^{-5}\ сим/м \text{ и } \varepsilon = 3\varepsilon_0 = \frac{1}{12\pi} 10^{-9}\ ф/м,$$

получим для сухой почвы

$$f_{\text{гр}} = \frac{\omega_{\text{гр}}}{2\pi} = 3 \cdot 10^5 \text{ гц},$$

что соответствует

$$\lambda_0 = \frac{3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^5} = 1\,000 \text{м}.$$

Для влажной почвы можно принять

$$g = 5 \cdot 10^{-3} \text{ сим/м} \text{ и } \varepsilon = 10\varepsilon_0.$$

В этом случае получим $f_{\text{гр}} \approx 10^7$ гц, что соответствует $\lambda_0 = 30$ м.

Вода. Для пресной воды примем

$$g = 10^{-3} \text{ сим/м} \text{ и } \varepsilon = 80\varepsilon_0.$$

Это дает $f_{\text{гр}} \approx 2 \cdot 10^5$ гц или $\lambda_0 = 300$ м.

Для морской воды

$$g \approx 4 \text{ сим/м} \text{ и } \varepsilon = 80\varepsilon_0,$$

следовательно,

$$f_{\text{гр}} = 9 \cdot 10^8 \text{ гц} \text{ и } \lambda_0 = 33 \text{ см}.$$

В заключение приведем систему уравнений Максвелла для комплексных амплитуд $\dot{\bar{E}}$ и $\dot{\bar{H}}$ электромагнитного поля в точках, где нет сторонних токов и зарядов:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{rot} \dot{\bar{H}} = (g + i\omega\varepsilon)\,\dot{\bar{E}} = i\omega\varepsilon_{\text{к}}\,\dot{\bar{E}}, \\ &\operatorname{rot} \dot{\bar{E}} = -i\omega\mu\dot{\bar{H}}, \\ &\operatorname{div} \dot{\bar{E}} = 0, \ \operatorname{div} \dot{\bar{H}} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.17}$$

Последние два уравнения в этой системе являются следствием первого и второго уравнений, и, стало быть, их можно не рассматривать.

Заметим, что для полей, гармонически меняющихся во времени, магнитная проницаемость среды при наличии так называемых «магнитных» потерь, тоже может стать комплексной величиной. В этом случае μ во втором уравнении системы (6.17) следует заменить на $\mu_{\text{к}} = \mu' - i\,\mu''$, где μ' и μ'' — вещественная и мнимая составляющие магнитной проницаемости.

3. Плоские волны в однородной среде с конечной проводимостью

Из уравнений Максвелла (6.17) непосредственно вытекает, что гармонические электромагнитные процессы в любой среде условно можно рассматривать как процессы в «диэлектрике» с комплексной диэлектрической проницаемостью (6.16).

Мы можем поэтому установить законы распространения плоских волн в среде с конечной проводимостью, используя результаты, полученные в § 1 настоящей главы для волны в идеальном диэлектрике, заменив лишь вещественную диэлектрическую проницаемость ε на комплексную диэлектрическую проницаемость $\varepsilon_к$.

Ниже на левой стороне страницы приводятся основные соотношения для плоской волны в чисто диэлектрической среде, а на правой стороне страницы — те же соотношения для среды с конечным значением g.

Волна в диэлектрике

Для гармонической волны, бегущей в положительном направлении оси z:

$$E_к = \dot{E}_{пад}\, e^{-ikz} e^{i\omega t},$$

$$H_к = \frac{\dot{E}_{пад}}{Z_0} e^{-ikz} e^{i\omega t},$$

где

$$k = \frac{\omega}{v} = \omega \sqrt{\varepsilon\mu},$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}.$$

Волна в среде с конечной проводимостью

Для гармонической волны, бегущей в положительном направлении оси z:

$$E_к = \dot{E}_{пад}\, e^{-ik' z} e^{i\omega t}, \qquad (6.18)$$

$$H_к = \frac{\dot{E}_{пад}}{Z_0'} e^{-ik' z} e^{i\omega t}, \qquad (6.19)$$

где

$$k' = \frac{\omega}{v'} = \omega \sqrt{\varepsilon_к \mu},$$

$$Z_0' = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_к}}.$$

Штрихи над величинами k, v и Z_0 означают, что эти величины являются комплексными.

Выясним, какой физический смысл имеет комплексная величина k'? Для ответа на этот вопрос представим k' в виде

$$k' = \beta - i\alpha, \qquad (6.20)$$

где β и α — вещественные числа. После подстановки в (6.18) получим

$$E_к = \dot{E}_{пад}\, e^{-\alpha z} e^{-i\beta z} e^{i\omega t}. \qquad (6.21)$$

Выражение (6.21) есть запись в символической форме гармонической волны, имеющей амплитуду $E_{пад}\, e^{-\alpha z}$ и фазовый множитель β.

В обычной записи (6.21) принимает вид

$$E = E_{\text{пад}m}\, e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z).$$

Таким образом, комплексный характер величины k' означает, что электромагнитная волна, двигаясь вдоль оси z, не остается постоянной по амплитуде. Амплитуда волны убывает вдоль направления распространения по экспоненциальному закону. Этот результат является естественным, поскольку наличие проводимости в среде означает, что электромагнитная энергия, несомая волной, частично рассеивается в виде тепла.

Комплексный фазовый множитель (6.20) полностью характеризует движение волны. Вещественная часть β в (6.20) имеет тот же смысл, что и фазовый множитель k при движении волны в диэлектрике: она определяет собой скорость движения волновой поверхности

$$v_{\text{ф}} = \frac{\omega}{\beta}. \tag{6.22}$$

Эта скорость получила наименование фазовой скорости. Мнимая часть α комплексного фазового множителя определяет собой убывание амплитуды волны и носит название коэффициента затухания *).

Комплексное волновое сопротивление Z_0', связывающее амплитуды напряженности электрического и магнитного полей, может быть представлено в виде

$$Z_0' = Z_0\, e^{i\varphi}, \tag{6.23}$$

где Z_0 — модуль, а φ — аргумент комплексного волнового сопротивления.

Подставляя (6.23) и (6.20) в (6.19), получим, что

$$H_{\text{к}} = \frac{\dot{E}_{\text{пад}}}{Z_0}\, e^{-\alpha z}\, e^{-i\beta z}\, e^{i(\omega t - \varphi)}$$

или для мгновенных значений

$$H = \frac{E_{\text{пад}m}}{Z_0}\, e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \varphi). \tag{6.24}$$

Как видно из (6.24), амплитуда напряженности магнитного поля пропорциональна амплитуде напряженности электрического поля

$$\frac{E_{\text{пад}\,m}}{H_{\text{пад}\,m}} = \frac{E_{\text{пад}\,m} e^{-\alpha z}}{\frac{E_{\text{пад}\,m}}{Z_0} e^{-\alpha z}} = Z_0.$$

*) Не следует смешивать коэффициент затухания α, характеризующий пространственное убывание амплитуды, с коэффициентом затухания, характеризующим затухающие процессы во времени.

Во времени напряженности электрического и магнитного полей сдвинуты по фазе на угол, равный аргументу комплексного волнового сопротивления.

Найдем теперь значения коэффициента затухания α, фазового множителя β, фазовой скорости $v_ф$, а также значения модуля и аргумента комплексного волнового сопротивления Z_0'.

Для определения β и α имеем

$$\omega \sqrt{\varepsilon_к \mu} = \beta - i\alpha = \omega \sqrt{\left(\varepsilon - i\frac{g}{\omega}\right)\mu}.$$

Возводя обе стороны последнего равенства в квадрат и приравнивая вещественные и мнимые части, получим:

$$\beta^2 - \alpha^2 = \omega^2 \varepsilon\mu, \tag{6.25}$$

$$2\beta\alpha = \omega g \mu. \tag{6.26}$$

С другой стороны, приравнивая квадраты модулей того же равенства, будем иметь

$$\beta^2 + \alpha^2 = \omega^2 \mu \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{g^2}{\omega^2}}. \tag{6.27}$$

Складывая и вычитая выражения (6.25) и (6.27), находим, что

$$\beta^2 = \omega^2 \varepsilon\mu \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{g^2}{\varepsilon^2\omega^2}}\right], \tag{6.28}$$

$$\alpha^2 = \omega^2 \varepsilon\mu \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{g^2}{\varepsilon^2\omega^2}}\right]. \tag{6.29}$$

Для фазовой скорости $v_ф$ из выражения (6.26) имеем

$$v_ф = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\alpha}{\mu g}. \tag{6.30}$$

Далее, волновое сопротивление среды равно

$$Z_0' = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{\mu\omega}{k'} = \frac{\mu\omega}{\beta - i\alpha}.$$

Представляя $Z_0' = Z_0 e^{i\varphi}$, на основании (6.27), (6.28) и (6.29) имеем:

$$Z_0 = \frac{\omega\mu}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}} = \sqrt{\frac{\mu^2}{\varepsilon^2 + \frac{g^2}{\omega^2}}}, \tag{6.31}$$

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha}{\beta} = \operatorname{arc\,tg}\left[\sqrt{\frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{g^2}{\varepsilon^2\omega^2}}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{g^2}{\varepsilon^2\omega^2}}}}\right]. \quad (6.32)$$

Рассмотрим два частных случая.

1. Пусть среда представляет собой реальный диэлектрик, так что $\frac{g}{\omega\varepsilon} \ll 1$.

Тогда из формул (6.28)—(6.32) получим

$$\alpha^2 = \omega^2\varepsilon\mu\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{g^2}{2\varepsilon^2\omega^2}\right)\right] \approx \frac{g^2\mu}{4\varepsilon} \quad (6.28а)$$

или

$$\beta \approx \omega\sqrt{\varepsilon\mu},$$

$$\alpha \approx \frac{g}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \quad (6.29а)$$

$$v_\phi = \frac{2\alpha}{\mu g} \approx \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = v. \quad (6.30а)$$

Волновое сопротивление

$$Z_0 \approx \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (6.31а)$$

$$\varphi \approx 0. \quad (6.32а)$$

Таким образом, в среде с малой проводимостью приближенный расчет волнового сопротивления, фазового множителя и фазовой скорости дает те же результаты, что и для диэлектрика без потерь.

Затухание не зависит от частоты и пропорционально как проводимости среды, так и волновому сопротивлению.

2. Среда является проводником, т. е. $\frac{g}{\omega\varepsilon} \gg 1$.

В этом случае из формул (6.28)—(6.32), получим:

$$\beta \approx \sqrt{\frac{\omega g\mu}{2}}, \quad (6,28б)$$

$$\alpha \approx \sqrt{\frac{\omega g\mu}{2}}, \quad (6.29б)$$

$$v_\phi = \frac{2\alpha}{\mu g} \approx \sqrt{\frac{2\omega}{\mu g}}, \quad (6.30б)$$

$$Z_0 \approx \sqrt{\frac{\omega\mu}{g}}, \quad (6.31б)$$

$$\varphi \approx \operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}. \quad (6.32б)$$

В хорошо проводящей среде фазовый множитель и коэффициент затухания численно равны друг другу.

Как видно из полученных формул, затухание волны в этом случае относительно велико, особенно на высоких частотах. Фазовая скорость очень мала. Соответственно малым получается и значение длины волны

$$\lambda = \frac{v_\Phi}{f}.$$

Для проводящей среды характерна также малая величина волнового сопротивления. Это указывает на то, что в проводнике преобладающее значение имеет магнитное поле.

Так как между напряженностью электрического и магнитного полей существует сдвиг фаз, равный $\pi/4$, то среднее за период значение вектора Пойнтинга равно

$$\Pi_{ср} = \frac{1}{2} E_m H_m \cos\varphi = \frac{1}{2\sqrt{2}} E_m H_m.$$

Но

$$E_m = H_m Z_0 = H_m \sqrt{\frac{\omega\mu}{g}},$$

поэтому

$$\Pi_{ср} = \frac{H_m^2}{2} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2g}}.$$

Проиллюстрируем полученные соотношения на числовом примере. Рассмотрим распространение волны в меди при частоте $f = 10^8$ *гц* (длина волны в вакууме $\lambda = 3$ *м*).

Принимая значение проводимости $g = 57 \cdot 10^6$ *сим/м* и $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ *гн/м*, получим, что

$$\alpha = \sqrt{57 \cdot 10^6 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \pi \cdot 10^8} \approx 15 \cdot 10^4 \text{ } нп/м$$

или

$$\alpha \approx 130 \cdot 10^4 \text{ } дб/м.$$

Модуль волнового сопротивления

$$Z_0 = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 10^8 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{57 \cdot 10^6}} \approx 0{,}0037 \text{ } ом$$

вместо 377 *ом* для вакуума (или воздуха).

Отношение между максимальными плотностями энергии магнитного и электрического полей равно

$$\frac{\omega_M}{\omega_E} = \frac{\mu H_m^2}{\varepsilon E_m^2} = \frac{\mu}{\varepsilon} \frac{1}{Z_0^2}.$$

Так как для меди

$$\frac{\mu}{\varepsilon} \leqslant (120\pi)^2 \ (ом)^2,$$

то в рассматриваемом примере

$$\frac{w_M}{w_E} \approx 33 \cdot 10^6,$$

т. е. практически вся энергия сосредоточена в магнитном поле.

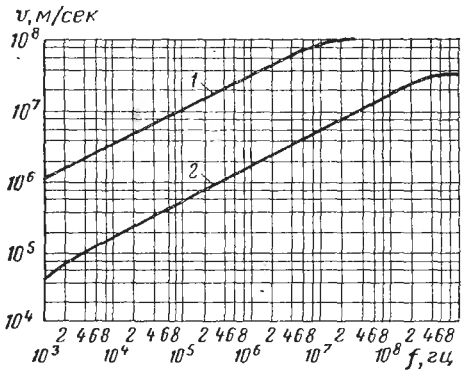


Рис. 6.4. Зависимость фазовой скорости волны от частоты для влажной почвы (1) и морской воды (2).

Фазовая скорость

$$v_ф = \frac{2\alpha}{\mu g} = \frac{2 \cdot 14{,}5 \cdot 10^3}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 57 \cdot 10^6} \approx 400 \ м/сек,$$

что соответствует длине волны в металле 0,04 *см*.

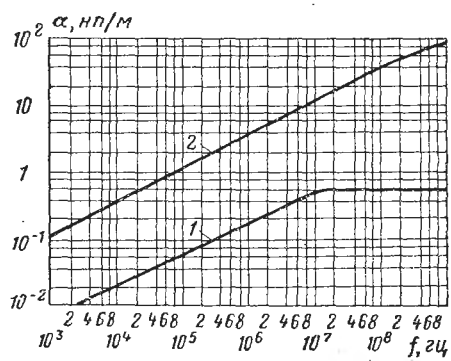


Рис. 6.5. Зависимость коэффициента затухания волны от частоты для влажной почвы (1) и морской воды (2).

В общем случае полупроводящей среды для расчета фазовой скорости, коэффициента затухания и волнового сопротивления следует пользоваться общими формулами (6.28)—(6.32).

На рис. 6.4 и 6.5 показаны зависимости фазовой скорости и коэффициента затухания от частоты. Кривые *1* характеризуют распространение волны во влажной почве, а кривые *2* — в морской воде. (В обоих случаях полагается, что $\mu = \mu_0$.)

4. Поляризация плоских волн

Электромагнитное поле с векторами $\bar{E}$ и $\bar{H}$, направление которых может быть определено в любой момент времени, называется поляризованным. Если же направление вектора $\bar{E}$, и соответственно вектора $\bar{H}$, изменяется в пространстве случайным образом, поле будет неполяризованным.

Простейшим примером поляризованного электромагнитного поля является рассмотренное выше поле плоской волны. Плоскость, проходящая через направление распространения этой волны и вектор $\bar{E}$, называется плоскостью поляризации *).

Если положение плоскости поляризации относительно некоторой неподвижной системы координат остается неизменным, плоская волна будет иметь линейную поляризацию. В этом случае вектор $\bar{E}$ всегда оказывается параллельным некоторой фиксированной оси, например оси x прямоугольной системы координат.

Однако линейная поляризация не является единственно возможной поляризацией плоской волны в режиме гармонических колебаний.

Пусть вдоль оси z распространяются две плоские волны с векторами электрического поля **):

$$\bar{E}_1 = \bar{i}_x E_1 \cos(\omega t - \beta z) \quad \text{и} \quad \bar{E}_2 = \bar{i}_y E_2 \cos(\omega t - \beta z - \varphi), \qquad (6.32)$$

где φ — угол фазового сдвига между ними. Совокупность этих волн можно рассматривать как одну плоскую волну с более сложной поляризационной структурой.

Из выражений (6.32) видно, что вектор напряженности электрического поля $\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2$ суммарной волны имеет две проекции E_x и E_y, причем в плоскости $z = 0$ (рис. 6.6)

$$E_x = E_1 \cos \omega t \quad \text{и} \quad E_y = E_2 \cos(\omega t - \varphi). \qquad (6.33)$$

Выясним, как ведет себя этот вектор во времени. Учитывая, что $\frac{E_x}{E_1} = \cos \omega t$ и $\frac{E_y}{E_2} = \cos \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \sin \varphi$, будем иметь:

$$\frac{E_x^2}{E_1^2} + \frac{E_y^2}{E_2^2} - 2\frac{E_x E_y}{E_1 E_2} \cos \varphi = \sin^2 \varphi. \qquad (6.34)$$

---

*) Заметим, что поле плоской волны может быть и неполяризованным

**) Индекс m у амплитуд E_{1m} и E_{2m} опущен.

Полученное равенство представляет собой уравнение эллипса, повернутого относительно координат x и y на некоторый угол (рис. 6.7). Этот эллипс является геометрическим местом точек, в которых находится конец вектора $\overline{E}$ в различные моменты времени. Иными словами, эллипс (6.34) есть годограф вектора $\overline{E}$ в плоскости $z = 0$ или любой другой плоскости $z = \text{const}$.

Таким образом, вектор $\overline{E}$ вращается в плоскости $z = \text{const}$, совершая полный оборот за время $T = 2\pi/\omega$. При этом соответственно меняется и его величина.



Рис. 6.6. Вектор напряженности электрического поля суммарной волны в плоскости $z = 0$.



Рис. 6.7. К определению волны с эллиптической поляризацией.

Аналогичный вывод можно сделать и о векторе $\overline{H}$, ибо он в любой момент времени должен быть перпендикулярен вектору $\overline{E}$.

Электромагнитная волна подобного типа носит наименование *волны с эллиптической поляризацией или эллиптически поляризованной волны*, а эллипс, описываемый концом вектора $\overline{E}$, называется *эллипсом поляризации*. Согласно изложенному плоскость поляризации такой волны непрерывно вращается в пространстве, причем направление вращения зависит от знака угла φ.

Различают волны с правым и левым направлениями вращения. В первом случае плоскость поляризации и векторы поля относительно наблюдателя, смотрящего по направлению распространения волны, вращаются по часовой стрелке, а во втором — в обратном направлении.

Рассмотрим возможные частные случаи поляризации плоской волны, вытекающие из уравнения (6.34).

Пусть фазовый сдвиг $\varphi = 0$. В этом случае уравнение (6.34) принимает вид:

$$\frac{E_x}{E_1} - \frac{E_y}{E_2} = 0,$$

откуда следует, что

$$E_y = \frac{E_2}{E_1} E_x; \quad -E_1 \leqslant E_x \leqslant E_1. \tag{6.35}$$

Последнее выражение представляет собой уравнение отрезка прямой (рис. 6.8, *а*).

Стало быть, при $\varphi = 0$ эллиптически поляризованная волна превращается в волну линейно-поляризованную. Угол наклона плоскости поляризации такой волны к плоскости $y = 0$, как вытекает из (6.35), равен $\psi = \operatorname{arctg}(E_2/E_1)$.

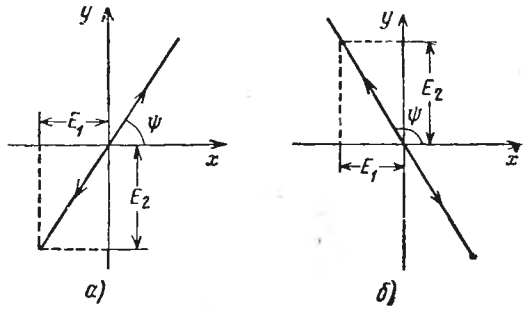


Рис. 6.8. К определению линейно-поляризованной волны.

Если фазовый сдвиг $\varphi = \pm \pi$, то волна вновь будет иметь линейную поляризацию, ибо из (6.34) получается:

$$E_y = -\frac{E_2}{E_1} E_x; \quad -E_1 \leqslant E_x \leqslant E_1. \tag{6.36}$$

Но теперь плоскость поляризации имеет уже другой угол наклона (рис. 6.8, *б*):

$$\psi = -\operatorname{arctg} \frac{E_2}{E_1}.$$

Совершенно ясно, что волну с линейной поляризацией можно рассматривать как предельный случай эллиптически поляризованной волны, имеющей эллипс поляризации с малой полуосью, равной нулю.

Предположим далее, что $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$, а $E_1 = E_2 = E$. При таких условиях уравнение (6.34) превращается в уравнение окружности

$$E_x^2 + E_y^2 = E^2, \tag{6.37}$$

и, стало быть, годографом вектора $\bar{E}$ в плоскости $z = 0$ становится окружность.

На рис. 6.9, *а* и *б* изображены графики уравнения (6.37), и указаны направления вращения вектора $\bar{E}$ при $\varphi = \pi/2$ и $\varphi = -\pi/2$.

Электромагнитная волна, характеризуемая уравнением (6.37), называется волной с круговой поляризацией. При движении этой волны вдоль оси z концы векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ описывают в пространстве винтовые линии.

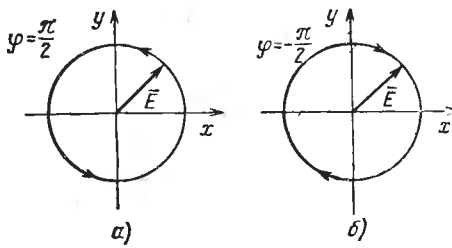


Рис. 6.9. К определению волны с круговой поляризацией.

Если фазовый угол φ, как и в предыдущем случае, равен $\pm \pi/2$, но $E_1 \neq E_2$, то уравнение (6.34) принимает вид

$$\frac{E_x^2}{E_1^2} + \frac{E_y^2}{E_2^2} = 1.$$

Таким образом, мы снова получаем эллипс. Только оси его теперь уже совпадают с осями прямоугольной системы координат.

В заключение укажем, что эллиптическую или круговую поляризацию часто называют вращающейся поляризацией. Очевидно, что волну с вращающейся поляризацией можно представить в виде совокупности двух линейно-поляризованных волн, векторы $\bar{E}$ или $\bar{H}$ которых взаимно ортогональны.

5. Граничные условия в переменном электромагнитном поле

В предыдущих параграфах рассматривались вопросы распространения плоских волн в однородной среде.

Предположим теперь, что имеются две однородные среды, разделенные граничной поверхностью S (рис. 6.10), на которой могут возникать поверхностные электрические заряды, а также поверхностные электрические токи (т. е. токи, текущие в бесконечно тонком поверхностном слое).

Распределение зарядов и токов на границе S будем характеризовать поверхностной плотностью заряда σ и вектором поверхностной плотности тока $\bar{j}_S$. Направление вектора $\bar{j}_S$ на поверх-

ности S должно совпадать с направлением движения положительных электрических зарядов в каждой точке поверхности, а величина его равна току, проходящему через линию единичной длины, проведенную на S перпендикулярно направлению движения зарядов.

Очевидно, что при различных электрических параметрах первой и второй сред истинное поле будет отличаться от того поля, которое существовало бы в однородном пространстве.

Обозначим поля в первой и второй средах $\bar{E}_1$, $\bar{H}_1$ и $\bar{E}_2$, $\bar{H}_2$ соответственно и найдем связь между ними. Методика наших рассуждений будет аналогична той, которую мы уже использовали при анализе граничных условий в электростатическом поле (см. § 12 гл. I).

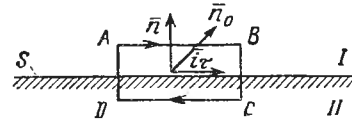


Рис. 6.10. К выводу граничных условий в электромагнитном поле.

Построим контур $ABCD$ (см. рис. 6.6), пересекающий поверхность S. Применяя к этому контуру первое и второе уравнения Максвелла в интегральной форме, получим:

$$\oint_{ABCD} \bar{H}\,d\bar{l} = I + \frac{dN}{dt}, \tag{6.38}$$

$$\oint_{ABCD} \bar{E}\,d\bar{l} = -\frac{d\Phi}{dt}; \tag{6.39}$$

здесь I, N и Φ — соответственно ток, электрический поток и магнитный поток через поверхность контура.

Если стороны AB и CD прижимать к границе S так, что площадь $ABCD$ обращается в нуль, то в пределе $N = \Phi = 0$. Однако величина I при наличии на S поверхностных токов в нуль не обращается, ибо деформированный (сжатый) контур все равно будет охватывать ток.

Пусть расстояние от точки A до точки B равно dl. Вводя далее вектор $d\bar{l} = \bar{i}_\tau\,dl$, где $\bar{i}_\tau$ — орт касательной к стороне AB сжатого контура, из уравнения Максвелла (6.38) получим:

$$(\bar{H}\,d\bar{l})_1 - (\bar{H}\,d\bar{l})_2 = \bar{j}_S\,\bar{n}_0\,dl,$$

здесь $\bar{n}_0$ — орт нормали к поверхности контура (рис.6.10).

Отсюда следует, что на поверхности S

$$(\bar{H}_1 - \bar{H}_2)\,\bar{i}_\tau = \bar{j}_S\,\bar{n}_0.$$

Но из рисунка видно, что $\bar{i}_\tau = (\bar{n}_0 \times \bar{n})$. Подставляя значение $\bar{i}_\tau$ в последнее равенство, будем иметь;

$$(\bar{H}_1 - \bar{H}_2)\,(\bar{n}_0 \times \bar{n}) = \bar{j}_S\,\bar{n}_0,$$

или

$$\bar{n} \times (\bar{H}_1 - \bar{H}_2) = \bar{j}_S. \tag{6.40}$$

Так как $\bar{n} \times \bar{H}_1 = \bar{n} \times \bar{H}_{1\tau}$ и $\bar{n} \times \bar{H}_2 = \bar{n} \times \bar{H}_{2\tau}$, то вместо (6.40) можно написать

$$\bar{n} \times (\bar{H}_{1\tau} - \bar{H}_{2\tau}) = \bar{j}_S. \tag{6.40'}$$

Таким образом, при переходе через границу S с поверхностным током касательная составляющая вектора $\bar{H}$ испытывает скачок. Величина этого скачка равна поверхностной плотности тока.

Если поверхностных токов на граничной поверхности нет, то равенство (6.40) принимает вид

$$\bar{n} \times (\bar{H}_{1\tau} - \bar{H}_{2\tau}) = 0,$$

отсюда вытекает, что

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}. \tag{6.41}$$

Во второе уравнение Максвелла электрические токи непосредственно не входят. Поэтому независимо от того, есть или нет поверхностный ток, из (6.39) получаем:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}. \tag{6.41'}$$

При наличии поверхностных электрических зарядов для нормальных составляющих векторов $\bar{E}_1$ и $\bar{E}_2$ на границе S будет выполняться соотношение, аналогичное тому, которое мы имели в электростатике

$$\varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = \sigma. \tag{6.42}$$

Если поверхностных зарядов на границе S нет, то вместо (6.42) будем иметь

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}.$$

Для нормальных составляющих векторов $\bar{H}_1$ и $\bar{H}_2$ по аналогии с предыдущим условием получим

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}. \tag{6.43}$$

Приведенные выше равенства необходимо дополнить еще соотношением, связывающим между собой нормальные составляющие токов проводимости $j_{1n} = g_1 E_{1n}$ и $j_{2n} = g_2 E_{2n}$ на поверхности S. С этой целью воспользуемся равенством $I = -dQ/dt$, где I — ток, текущий через замкнутую поверхность, и $Q = \Sigma q$ — заряд внутри объема, ограниченного данной поверхностью. Применение этого равенства к параллелепипеду, пересекающему, как обычно, границу S (см. рис. 1.24), дает следующий результат:

$$g_1 E_{1n} - g_2 E_{2n} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}. \tag{6.44}$$

Рассмотрим теперь соотношения (6.42) и (6.44) совместно. В установившемся режиме они принимают вид:

$$\varepsilon_1 \dot{E}_{1n} - \varepsilon_2 \dot{E}_{2n} = \dot{\sigma},$$

$$g_1 \dot{E}_{1n} - g_2 \dot{E}_{2n} = -i\omega\dot{\sigma}.$$

Элементарный анализ последних уравнений показывает, что при наличии нормальных составляющих тока проводимости на граничной поверхности возникает поверхностный заряд. Исключение составляет лишь случай

$$\varepsilon_1 g_2 = \varepsilon_2 g_1.$$

В заключение отметим, что в реальных условиях, когда электрические проводимости сред конечны, поверхностные электрические токи не существуют. В самом деле, наличие таких токов означает, что по бесконечно малому сечению проводника протекает конечной величины ток. А это приводит к тому, что в объеме конечных размеров расходуется бесконечно большая мощность. Ниже мы покажем, что поверхностные токи могут существовать лишь в идеальных проводниках, обладающих бесконечно большой удельной проводимостью.

Таким образом, на границе раздела реальных сред касательные составляющие векторов $\overline{E}$ и $\overline{H}$ всегда непрерывны.

6. Отражение плоских волн при нормальном падении

Рассмотрим плоскую волну, движущуюся в отрицательном направлении оси y, которая перпендикулярна к плоскости, разделяющей две среды с различными физическими параметрами (рис. 6.11).

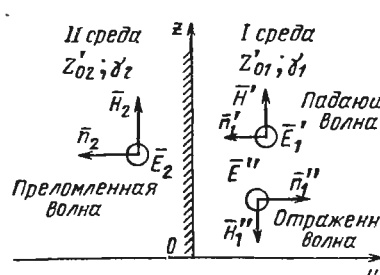


Рис. 6.11. Ориентация векторов падающей, отраженной и преломленной волн при нормальном падении.

Если бы обе среды имели одинаковые параметры, то существовала бы только падающая плоская волна. Комплексную амплитуду вектора $\overline{E}$ этой волны представим в виде

$$\dot{E}_1 = \dot{E}_{\text{пад}} e^{\gamma_1 y},$$

где $\gamma_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ есть величина, называемая постоянной распространения волны.

Выражение для $\dot{E}_1$ непосредственно получается из формулы (6.21), если в ней z заменить на y. Аналогично

$$\dot{H}_1 = \frac{\dot{E}_{\text{пад}}}{Z'_{01}} e^{\gamma_1 y}.$$

Затухание α_1, фазовый множитель β_1 и волновое сопротивление Z'_{01} определяются в общем случае по формулам (6.28), (6.29), (6.31), (6.32).

Так как параметры второй среды отличны от параметров первой, то в плоскости $y = 0$ происходит отражение, и в первой среде возникает отраженная волна, движущаяся вдоль оси y.

Результирующее поле в первой среде будет иметь вид:

$$\dot{E}_1 = \dot{E}_{\text{пад}} e^{\gamma_1 y} + \dot{E}_{\text{отр}} e^{-\gamma_1 y}, \tag{6.45}$$

$$\dot{H}_1 = \frac{\dot{E}_{\text{пад}}}{Z'_{01}} e^{\gamma_1 y} - \frac{\dot{E}_{\text{отр}}}{Z'_{01}} e^{-\gamma_1 y}. \tag{6.46}$$

Из формул (6.45) и (6.46) следует, что $E_{\text{пад}}$ и $E_{\text{отр}}$ определяют значения амплитуд падающей и отраженной волн в плоскости раздела двух сред.

Во второй среде имеется только одна преломленная (бегущая) волна, движущаяся в отрицательном направлении оси y:

$$\dot{E}_2 = \dot{E}_{\text{пр}} e^{\gamma_2 y} = \dot{E}_0 e^{\gamma_2 y}, \tag{6.47}$$

$$\dot{H}_2 = \frac{\dot{E}_{\text{пр}}}{Z'_{02}} e^{\gamma_2 y} = \frac{\dot{E}_0}{Z'_{02}} e^{\gamma_2 y} = \dot{H}_0 e^{\gamma_2 y}, \tag{6.48}$$

где $\dot{E}_0$ и $\dot{H}_0$ — комплексные амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей на границе.

Так как в рассматриваемом случае векторы $\overline{E}$ и $\overline{H}$ параллельны плоскости раздела, то в силу граничных условий (6.41) и (6.41′) имеем:

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_1\big|_{y=0} &= \dot{E}_2\big|_{y=0}, \\ \dot{H}_1\big|_{y=0} &= \dot{H}_2\big|_{y=0} \end{aligned}\right\} \tag{6.49}$$

или, как следствие (6.49),

$$\left.\frac{\dot{E}_1}{\dot{H}_1}\right|_{y=0} = \left.\frac{\dot{E}_2}{\dot{H}_2}\right|_{y=0} = Z_{02}. \tag{6.50}$$

Написанные выше уравнения совершенно аналогичны уравнениям для волн тока и напряжения в длинных линиях.

Действительно, напряжение и ток в точках первого участка длинной линии, показанной на рис. 6.12, определяются выражениями:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_{\text{пад}}\, e^{\gamma_{л1} y} + \dot{U}_{\text{отр}}\, e^{-\gamma_{л1} y},$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_{\text{пад}}}{Z_{л1}} e^{\gamma_{л1} y} - \frac{\dot{U}_{\text{отр}}}{Z_{л1}} e^{-\gamma_{л1} y},$$

где $Z_{л1}$ — волновое сопротивление первой линии и $\gamma_{л1}$ — постоянная распространения.

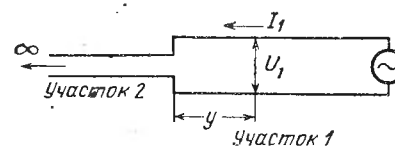


Рис. 6.12. Соединение длинных линий, эквивалентное случаю, изображенному на рис. 6.11.

Точно так же для напряжения и тока в точках второго участка линии бесконечной длины имеем

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_0\, e^{\gamma_{л2} y},$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_0}{Z_{л2}} e^{\gamma_{л2} y};$$

где $Z_{л2}$ — волновое сопротивление; $\gamma_{л2}$ — постоянная распространения второй линии.

Мы видим, таким образом, что плоскость раздела двух сред аналогична месту соединения двух длинных линий.

Чтобы найти амплитуды полей в первой и второй средах, используем граничные условия. Из (6.49) имеем:

$$\dot{E}_{\text{пад}} + \dot{E}_{\text{отр}} = \dot{E}_0,$$

$$\frac{1}{Z'_{01}}\left(\dot{E}_{\text{пад}} - \dot{E}_{\text{отр}}\right) = \frac{\dot{E}_0}{Z'_{02}},$$

откуда

$$\dot{E}_{\text{пад}} = \frac{\dot{E}_0}{2}\left(1 + \frac{Z'_{01}}{Z'_{02}}\right), \tag{6.51}$$

$$\dot{E}_{\text{отр}} = \frac{\dot{E}_0}{2}\left(1 - \frac{Z'_{01}}{Z'_{02}}\right). \tag{6.52}$$

Подставляя значения $\dot{E}_{\text{пад}}$ и $\dot{E}_{\text{отр}}$ в (6.45) и (6.46), получим:

$$\dot{E}_1 = \frac{\dot{E}_0}{2}\left(1 + \frac{Z'_{01}}{Z'_{02}}\right) e^{\gamma_1 y} + \frac{\dot{E}_0}{2}\left(1 - \frac{Z'_{01}}{Z'_{02}}\right) e^{-\gamma_1 y}, \tag{6.53}$$

$$\dot{H}_1 = \frac{\dot{E}_0}{2Z'_{01}}\left(1 + \frac{Z'_{01}}{Z'_{02}}\right) e^{\gamma_1 y} - \frac{\dot{E}_0}{2Z'_{01}}\left(1 - \frac{Z'_{01}}{Z'_{02}}\right) e^{-\gamma_1 y}. \tag{6.54}$$

равнения (6.47), (6.48), (6.53) и (6.54) дают возможность вычислить поле в любой точке пространства, если известны значения E_0 или H_0 электрического или магнитного полей на границе раздела сред.

Уравнениям (6.53) и (6.54) можно придать форму, обычную для уравнений длинной линии. Подставляя в (6.53) и (6.54)

$$e^{\gamma_1 y} = \operatorname{ch} \gamma_1 y + \operatorname{sh} \gamma_1 y \quad \text{и} \quad e^{-\gamma_1 y} = \operatorname{ch} \gamma_1 y - \operatorname{sh} \gamma_1 y$$

и группируя члены при $\operatorname{ch} \gamma_1 y$ и $\operatorname{sh} \gamma_1 y$, получим:

$$\dot{E}_1 = \dot{E}_0 \left(\operatorname{ch} \gamma_1 y + \frac{Z'_{01}}{Z'_{02}} \operatorname{sh} \gamma_1 y \right), \tag{6.55}$$

$$\dot{H}_1 = \frac{\dot{E}_0}{Z_{02}} \left(\operatorname{ch} \gamma_1 y + \frac{Z'_{02}}{Z'_{01}} \operatorname{sh} \gamma_1 y \right). \tag{6.56}$$

Введем теперь понятия о коэффициенте отражения $p_{\text{отр}}$ и о коэффициенте прохождения или преломления $p_{\text{пр}}$.

Коэффициентом отражения $p_{\text{отр}}$ назовем отношение комплексной амплитуды электрического поля отраженной волны к комплексной амплитуде электрического поля падающей волны на поверхности раздела сред:

$$p_{\text{отр}} = \frac{\dot{E}_{\text{отр}}}{\dot{E}_{\text{пад}}}$$

или, на основании (6.51) и (6.52),

$$p_{\text{отр}} = \frac{Z'_{02} - Z'_{01}}{Z'_{02} + Z'_{01}}. \tag{6.57}$$

Коэффициентом прохождения или преломления назовем отношение комплексной амплитуды электрического поля волны, прошедшей во вторую среду, к комплексной амплитуде поля падающей волны на границе раздела двух сред:

$$p_{\text{пр}} = \frac{\dot{E}_{\text{пр}}}{\dot{E}_{\text{пад}}} = \frac{\dot{E}_0}{\dot{E}_{\text{пад}}}$$

или из (6.51)

$$p_{\text{пр}} = \frac{2Z'_{02}}{Z'_{02} + Z'_{01}}. \tag{6.58}$$

Выражения (6.53) и (6.54) для составляющих электрического и магнитного полей в первой среде через коэффициент отражения можно представить в виде:

$$\dot{E}_1 = \dot{E}_{\text{пад}} e^{\gamma_1 y} (1 + p_{\text{отр}} e^{-2\gamma_1 y}), \tag{6.59}$$

$$\dot{H}_1 = \frac{\dot{E}_{\text{пад}}}{Z_{01}'} e^{\gamma_1 y} (1 - p_{\text{отр}} e^{-2\gamma_1 y}). \tag{6.60}$$

Если волновое сопротивление второй среды равно волновому сопротивлению первой среды ($Z'_{02} = Z'_{01}$), то

$$p_{\text{отр}} = 0 \quad \text{и} \quad p_{\text{пр}} = 1.$$

Отраженная волна в этом случае отсутствует, и весь поток энергии переходит из первой среды во вторую. В первой среде согласно (6.59) и (6.60) существует только прямая, падающая волна, непрерывно переходящая во вторую среду. Таким образом, чисто падающая волна может существовать не только в однородной среде, но и в различных средах, имеющих одинаковые волновые сопротивления. В подобных случаях говорят, что обе среды согласованы друг с другом.

7. Уравнение плоской волны, движущейся в произвольном направлении

В предыдущих параграфах направление движения волны совпадало с одной из координатных осей. Теперь нам необходимо составить общее уравнение, пригодное для случая, когда направление движения волны (направление луча) не совпадает ни с одной из координатных осей.

На рис. 6.13 плоская волна движется в направлении, образующем с осями координат углы, косинусы которых равны l, m и n. Обозначая через $\bar{n}_0$ орт нормали к волновой поверхности, получаем:

$$l = \cos(\bar{n}_0, x); \quad m = \cos(\bar{n}_0, y)$$
$$\text{и} \quad n = \cos(\bar{n}_0, z).$$



Рис. 6.13. К выводу уравнения волны, движущейся в произвольном направлении.

Любая составляющая вектора напряженности поля плоской волны, движущейся в направлении $\bar{n}_0$, описывается уравнением вида

$$\dot{A} = \dot{A}_0 e^{-\gamma\xi},$$

где γ — постоянная распространения среды, а ξ — расстояние от начала координат до волновой поверхности.

Введем в рассмотрение радиус-вектор, проведенный из начала координат до произвольной точки на волновой поверхности:

$$\bar{r} = \bar{i}_x x + \bar{i}_y y + \bar{i}_z z.$$

Проектируя этот вектор на направление нормали n_0, получаем

$$\xi = \bar{r}\,\bar{n}_0 = x\cos(\bar{n}_0, x) + y\cos(\bar{n}_0, y) + z\cos(\bar{n}_0, z)$$

или

$$\xi = lx + my + nz.$$

Следовательно, произвольная компонента волны может быть записана в виде

$$\dot{A} = \dot{A}_0 e^{-\gamma \bar{r}\,\bar{n}_0} \quad \text{или} \quad \dot{A} = \dot{A}_0 e^{-\gamma(lx+my+nz)}. \tag{6.61}$$

Если волна распространяется в среде без потерь, то постоянная распространения $\gamma = i\beta = ik$. В этом случае вместо (6.61) будем иметь:

$$\dot{A} = \dot{A}_0 e^{-ik\bar{n}_0\bar{r}}$$

или

$$\dot{A} = \dot{A}_0 e^{-i\bar{k}\bar{r}}, \tag{6.62}$$

где $\bar{k} = k\bar{n}_0$ — так называемый волновой вектор.

8. Отражение плоских волн при наклонном падении

В § 6 этой главы был рассмотрен случай отражения волны, движущейся по нормали к плоскости раздела двух сред. Исследуем теперь более общий случай, когда волна движется под произвольным углом к плоскости раздела.

Мы предполагаем, что падающая волна имеет линейную поляризацию. Для дальнейших рассуждений нам необходимо определить так называемую плоскость падения. Последняя представляет собой плоскость, проходящую через направление распространения волны и нормаль к плоскости раздела сред.

Анализ будем проводить для двух частных случаев:

1. Волна поляризована нормально к плоскости падения (т. е. плоскость поляризации волны и плоскость падения взаимно перпендикулярны).

2. Волна поляризована в плоскости падения (плоскость поляризации и плоскость падения совпадают).

Общий случай произвольной ориентации вектора $\bar{E}$ можно рассматривать как суперпозицию этих частных случаев.

Случай поляризации волны, нормальной к плоскости падения

На рис. 6.14 показаны направления осей координат и векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ падающей, отраженной и преломленной волн. Электрические векторы всех волн направлены перпендикулярно к плоскости падения и параллельно оси x. Магнитные векторы имеют составляющие H_y и H_z, и их положительные направления выбраны так,

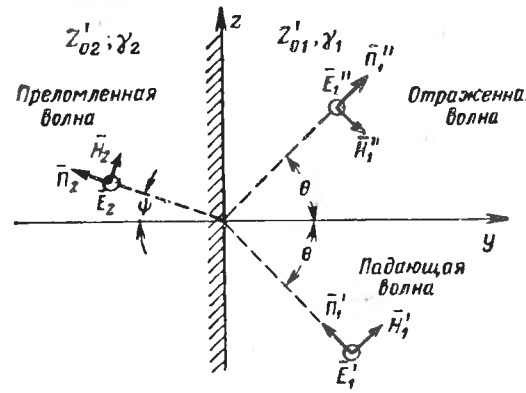


Рис. 6.14. Выбор осей координат и направлений векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ падающей, отраженной и преломленной волн при наклонном падении. Случай поляризации, нормальной к плоскости падения.

чтобы в направлении оси y вектор Пойнтинга отраженной волны был бы обратен вектору Пойнтинга падающей и преломленной волн.

Если нормаль к фронту падающей волны лежит в плоскости yz и образует угол θ с перпендикуляром к плоскости раздела сред, то направляющие косинусы

$$l_1' = 0; \quad m_1' = -\cos\theta; \quad n_1' = \sin\theta.$$

Поэтому для падающей волны имеем согласно (6.61)

$$\dot{E}_1' = \dot{E}_{1x}' = \dot{E}_{\text{пад}}\, e^{-\gamma_1 (-y\cos\theta + z\sin\theta)}, \tag{6.63}$$

$$\dot{H}_1' = \frac{\dot{E}_{\text{пад}}}{Z_{01}'}\, e^{-\gamma_1 (-y\cos\theta + z\sin\theta)}. \tag{6.64}$$

Для отраженной волны, распространяющейся в первой среде под углом θ', получим:

$$l_1'' = 0; \quad m_1'' = \cos\theta'; \quad n_1'' = \sin\theta'.$$

Комплексные амплитуды составляющих отраженной волны равны:

$$\dot{E}_1'' = \dot{E}_{1x}'' = \dot{E}_{\text{отр}}\, e^{-\gamma_1 (y \cos\theta' + z \sin\theta')}, \tag{6.65}$$

$$\dot{H}_1'' = \frac{\dot{E}_{\text{отр}}}{Z_{01}'}\, e^{-\gamma_1 (y \cos\theta' + z \sin\theta')}. \tag{6.66}$$

Результирующее поле в первой среде представляет собой сумму полей падающей и отраженной волн. Во второй среде имеется лишь преломленная волна, нормаль к которой образует угол ψ с перпендикуляром к плоскости падения.

Для преломленной волны

$$l_2 = 0; \quad m_2 = -\cos\psi; \quad n_2 = \sin\psi,$$

и компоненты поля принимают вид:

$$\dot{E}_2 = \dot{E}_{2x} = \dot{E}_{\text{пр}}\, e^{-\gamma_2 (-y \cos\psi + z \sin\psi)}, \tag{6.67}$$

$$\dot{H}_2 = \frac{\dot{E}_{\text{пр}}}{Z_{02}'}\, e^{-\gamma_2 (-y \cos\psi + z \sin\psi)}. \tag{6.68}$$

На границе двух сред тангенциальные составляющие векторов E_{tg} и H_{tg} в первой и второй средах равны между собой.

Так как электрические векторы параллельны плоскости раздела, то, полагая $y = 0$, получим на основании (6.65) — (6.67)

$$\dot{E}_{\text{пад}}\, e^{-\gamma_1 z \sin\theta} + \dot{E}_{\text{отр}}\, e^{-\gamma_1 z \sin\theta} = \dot{E}_{\text{пр}}\, e^{-\gamma_2 z \sin\psi}. \tag{6.69}$$

Уравнение (6.69) должно быть справедливо при любом z. Это возможно, если

$$\gamma_1 \sin\theta = \gamma_1 \sin\theta' = \gamma_2 \sin\psi,$$

откуда непосредственно следует, что

$$\sin\theta = \sin\theta' \quad \text{и} \quad \sin\psi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \sin\theta. \tag{6.70}$$

Следовательно, отраженная волна распространяется под углом, равным углу падения ($\theta = 0'$).

Для случая, когда обе среды являются диэлектриками

$$\gamma_1 = i\beta_1 = i\omega\sqrt{\varepsilon_1\mu}; \quad \gamma_2 = i\beta_2 = i\omega\sqrt{\varepsilon_2\mu},$$

$$\sin\psi = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \sin\theta. \tag{6.71}$$

Из уравнения (6.69) с учетом предыдущих соотношений следует, что

$$\dot{E}_{\text{пад}} + \dot{E}_{\text{отр}} = \dot{E}_{\text{пр}}. \tag{6.72}$$

Уравнение (6.72) дает связь между комплексными амплитудами падающей, отраженной и преломленной волн на поверхности раздела двух сред. Это уравнение необходимо дополнить другим уравнением, определяющим непрерывность тангенциальных составляющих магнитного вектора на границе двух сред. Проектируя векторы $\overline{H}_1$ и $\overline{H}_2$ на ось z и полагая $y = 0$, получим

$$\cos\theta\left(\frac{\dot{E}_{\text{пад}}}{Z'_{01}} - \frac{\dot{E}_{\text{отр}}}{Z'_{01}}\right) = \frac{\dot{E}_{\text{пр}}}{Z'_{02}}\cos\psi. \tag{6.73}$$

Из уравнений (6.72) и (6.73) можно определить значения $\dot{E}_{\text{отр}}$ и $\dot{E}_{\text{пр}}$ через комплексную амплитуду падающей волны $\dot{E}_{\text{пад}}$ на поверхности раздела.

Введем приведенные волновые сопротивления Z_{n1} и Z_{n2} обеих сред, определив их как

$$Z_{n1} = \frac{Z'_{01}}{\cos\theta} \quad \text{и} \quad Z_{n2} = \frac{Z'_{02}}{\cos\psi}. \tag{6.74}$$

Тогда граничные условия (6.72) и (6.73) запишутся следующим образом:

$$\dot{E}_{\text{пад}} + \dot{E}_{\text{отр}} = \dot{E}_{\text{пр}},$$

$$\dot{E}_{\text{пад}} - \dot{E}_{\text{отр}} = \dot{E}_{\text{пр}}\frac{Z_{n1}}{Z_{n2}},$$

откуда

$$\dot{E}_{\text{пр}} = \frac{2Z_{n2}}{Z_{n2}+Z_{n1}}\dot{E}_{\text{пад}},$$

$$\dot{E}_{\text{отр}} = \frac{Z_{n2}-Z_{n1}}{Z_{n2}+Z_{n1}}\dot{E}_{\text{пад}}.$$

Соответственно для коэффициентов отражения и преломления получим:

$$p_{\text{отр}} = \frac{\dot{E}_{\text{отр}}}{\dot{E}_{\text{пад}}} = \frac{Z_{n2}-Z_{n1}}{Z_{n2}+Z_{n1}}, \tag{6.75}$$

$$p_{\text{пр}} = \frac{\dot{E}_{\text{пр}}}{\dot{E}_{\text{пад}}} = \frac{2Z_{n2}}{Z_{n2}+Z_{n1}}. \tag{6.76}$$

Формулы (6.75) и (6.76) имеют вид, аналогичный формулам (6.57) и (6.58) для случая нормального падения. Различие заключается лишь в замене волновых сопротивлений Z'_{01} и Z'_{02} на приведенные волновые сопротивления Z_{n1}, Z_{n2}.

Результирующее поле в первой среде можно записать в виде:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{E}_1 &= \dot{E}_{x1} = \left(\dot{E}_{\text{пад}}\, e^{\gamma_1 y \cos\theta} + \dot{E}_{\text{отр}}\, e^{-\gamma_1 y \cos\theta}\right) e^{-\gamma_1 z \sin\theta},\\
\dot{H}_{y1} &= \frac{\sin\theta}{Z'_{01}}\left(\dot{E}_{\text{пад}}\, e^{\gamma_1 y \cos\theta} + \dot{E}_{\text{отр}}\, e^{-\gamma_1 y \cos\theta}\right) e^{-\gamma_1 z \sin\theta},\\
\dot{H}_{z1} &= \frac{\cos\theta}{Z'_{01}}\left(\dot{E}_{\text{пад}}\, e^{\gamma_1 y \cos\theta} - \dot{E}_{\text{отр}}\, e^{-\gamma_1 y \cos\theta}\right) e^{-\gamma_1 z \sin\theta}
\end{aligned}\right\} \quad (6.77)$$

или, полагая $\gamma_1 \cos\theta = \gamma_{n1}$,

$$\dot{E}_{x1} = \left(\dot{E}_{\text{пад}}\, e^{\gamma_{n1} y} + \dot{E}_{\text{отр}}\, e^{-\gamma_{n1} y}\right) e^{-\gamma_1 z \sin\theta}, \quad (6.78)$$

$$\left.\begin{aligned}
\dot{H}_{y1} &= \frac{\sin\theta}{Z'_{01}}\left(\dot{E}_{\text{пад}}\, e^{\gamma_{n1} y} + \dot{E}_{\text{отр}}\, e^{-\gamma_{n1} y}\right) e^{-\gamma_1 z \sin\theta},\\
\dot{H}_{z1} &= \frac{\cos\theta}{Z'_{01}}\left(\dot{E}_{\text{пад}}\, e^{\gamma_{n1} y} - \dot{E}_{\text{отр}}\, e^{-\gamma_{n1} y}\right) e^{-\gamma_1 z \sin\theta}.
\end{aligned}\right\} \quad (6.79)$$

Уравнения для составляющих $\dot{E}$ и $\dot{H}$ показывают, что вдоль плоскости раздела движется бегущая волна с постоянной распространения, равной $\gamma_1 \sin\theta$.

Случай поляризации волны в плоскости падения

Направление электрических и магнитных векторов для этого случая показано на рис. 6.15. Анализ этого случая отличается от предыдущего лишь тем, что электрический и магнитный векторы меняются местами.

Теперь магнитный вектор имеет лишь одну составляющую H_x, параллельную плоскости раздела, а электрический вектор — две составляющие E_y и E_z.

Для составляющих поля в первой среде получим:

$$\dot{H}_1 = \dot{H}_{x1} = -\left(\dot{H}_{\text{пад}}\, e^{\gamma_1 y \cos\theta} - \dot{H}_{\text{отр}}\, e^{-\gamma_1 y \cos\theta}\right) e^{-\gamma_1 z \sin\theta}, \quad (6.80)$$

$$\dot{E}_{y1} = Z'_{01} \sin\theta \left(\dot{H}_{\text{пад}}\, e^{\gamma_1 y \cos\theta} - \dot{H}_{\text{отр}}\, e^{-\gamma_1 y \cos\theta}\right) e^{-\gamma_1 z \sin\theta}, \quad (6.81)$$

$$\dot{E}_{z1} = Z'_{01} \cos\theta \left(\dot{H}_{\text{пад}}\, e^{\gamma_1 y \cos\theta} + \dot{H}_{\text{отр}}\, e^{-\gamma_1 y \cos\theta}\right) e^{-\gamma_1 z \sin\theta}. \quad (6.82)$$

Для составляющих поля во второй среде

$$\dot{H}_2 = \dot{H}_{x2} = -\dot{H}_0 e^{\gamma_{z2} y \cos\psi} e^{-\gamma_{z2} z \sin\psi}, \tag{6.83}$$

$$\dot{E}_2 = Z_{n2} \dot{H}_0 e^{\gamma_{z2} y \cos\psi} e^{-\gamma_{z2} z \sin\psi}. \tag{6.84}$$

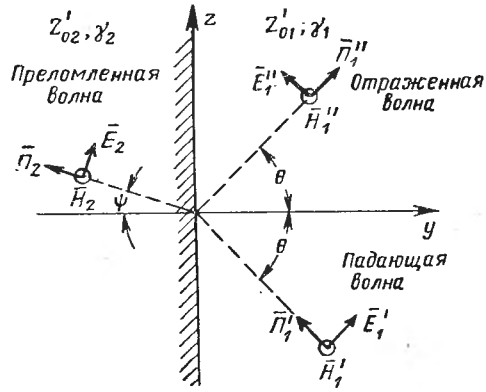


Рис. 6.15. Выбор осей координат и направлений векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ падающей, отраженной и преломленной волн при наклонном падении. Случай поляризации в плоскости падения.

Приведенные значения постоянной распространения и волновых сопротивлений теперь равны

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{n1} &= \gamma_1 \cos\theta, \\ Z_{n1} &= Z'_{01} \cos\theta, \\ Z_{n2} &= Z'_{02} \cos\psi. \end{aligned}\right\} \tag{6.85}$$

Коэффициенты отражения и преломления определяются формулами (6.75) и (6.76). Но теперь под $p_{отр}$ и $p_{пр}$ следует понимать отношение соответствующих комплексных амплитуд напряженностей магнитного поля.

9. Наклонное падение плоской волны на границу двух диэлектриков

В случае двух идеальных диэлектрических сред угол преломления ψ, как было показано в предыдущем параграфе, определяется равенством

$$\sin\psi = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \sin\theta. \tag{6.86}$$

Формула (6.86) хорошо известна из оптики, где она записывается в виде

$$\sin\psi = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta.$$

Коэффициент $n = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\varepsilon'}$ носит название показателя преломления среды.

Из формулы (6.86) следует, что преломленный луч тем больше отклоняется от нормали к граничной поверхности, чем больше отношение показателей преломления первой и второй сред.

Если $n_1 > n_2$, то при некотором значении угла $\theta = \theta_0$ получится, что $\sin\psi$ обращается в единицу. В этом случае вектор Пойнтинга во второй среде будет направлен вдоль границы.

Величина угла θ_0, определяется из равенства

$$\sin\theta_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}.$$

При углах, превышающих θ_0, наблюдается явление полного внутреннего отражения. В этом случае $\sin\psi$ должен быть больше единицы, что для вещественных ψ, разумеется, невозможно.

Выясним, какой характер будет иметь поле во второй среде, если $\theta > \theta_0$. Для этого используем, например, выражения (6.67) и (6.68), соответствующие волне, поляризованной нормально к плоскости падения. В рассматриваемом случае

$$\gamma_2 = i\beta_2 = i\omega\sqrt{\varepsilon_2\mu},$$

$$\cos\psi = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta_0}} = i\xi,$$

ибо

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta_0} > 1.$$

Подставляя это значение $\cos\psi$ в (6.67) и (6.68), получим:

$$\dot{E}_{2x} = \dot{E}_{\text{пр}}\, e^{\beta_2\xi y}\, e^{-i\beta_2 z\sin\psi},$$

$$\dot{H}_2 = \frac{\dot{E}_{\text{пр}}}{Z_{02}}\, e^{\beta_2\xi y}\, e^{-i\beta_2 z\sin\psi},$$

$$\dot{H}_{2z} = \dot{H}_2\cos\psi = i\,\frac{\dot{E}_{\text{пр}}}{Z_{02}}\, e^{\beta_2\xi y}\, e^{-i\beta_2 z\sin\psi},$$

где

$$\sin\psi = \sqrt{1 - \cos^2\psi} = \sqrt{1 + \xi^2} > 1.$$

Отсюда следует, что поле во второй среде имеет форму волны, распространяющейся вдоль плоскости раздела. Фазовый множитель такой волны равен $\beta \sin \psi$.

Вдоль нормали к поверхности раздела, т. е. в отрицательном направлении оси y, амплитуды поля убывают по экспоненциальному закону. При этом проекция H_{2z} сдвинута по фазе относительно проекции E_{2x} на $\pi/2$. Следовательно, энергия поля в глубь второй среды не передается.

Аналогичные результаты получаются также и для волны, поляризованной в плоскости падения.

Коэффициенты отражения и преломления волн при любых углах падения выражаются формулами (6.75) и (6.76). Подставляя в эти формулы значения Z_{n1} и Z_{n2} из (6.74) и учитывая (6.86), для волны, поляризованной нормально к плоскости падения, получим:

$$p_{\text{отр}} = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\cos\theta - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\theta}}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\cos\theta + \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\theta}}, \tag{6.87}$$

$$p_{\text{пр}} = \frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\cos\theta}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\cos\theta + \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\theta}}. \tag{6.88}$$

Для волны, поляризованной в плоскости падения, приведенные волновые сопротивления определяются равенствами (6.85). В этом случае

$$p_{\text{отр}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\theta} - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\cos\theta}{\sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\theta} + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\cos\theta}, \tag{6.89}$$

$$p_{\text{пр}} = \frac{2\sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\theta}}{\sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\theta} + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\cos\theta}.$$

Как видно из (6.89) при некотором угле падения $\theta = \theta_c$ коэффициент отражения волны, поляризованной в плоскости падения, обращается в нуль. Значение угла θ_c, называемого у г л о м

поляризации, или углом Брюстера, определяется из равенства

$$1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\theta_c=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos^2\theta_c,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\theta_c=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}.$$

Для волны, поляризованной нормально к плоскости падения, коэффициент отражения, как вытекает из (6.87), не равен нулю ни при каком угле падения.

10. Наклонное падение плоской волны на границу раздела диэлектрик — проводник

Рассмотрим теперь особенности распространения плоской электромагнитной волны, прошедшей из идеального диэлектрика в среду с конечной проводимостью (рис. 6.16). При любой поляризации па-

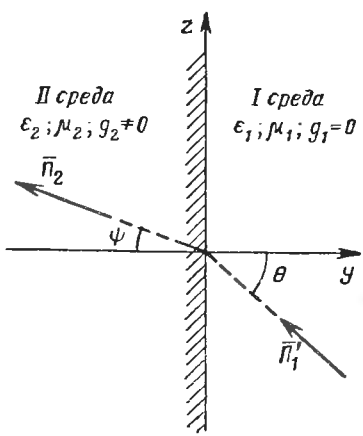


Рис. 6.16. Наклонное падение плоской волны на границу поглощающей среды.

дающей волны, как вытекает из (6.67), (6.68), (6.83), (6.84), произвольную составляющую поля во второй среде можно представить обобщенным уравнением

$$\dot{A}_2=\dot{A}_{\text{пр}}\,e^{\gamma_2(y\cos\psi-z\sin\psi)}. \tag{6.90}$$

При этом угол преломления ψ связан с углом падения θ законом (6.70):

$$\sin\psi=\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\sin\theta.$$

Так как угол падения по смыслу может принимать только вещественные значения, а постоянные распространения сред γ_1 и γ_2 соответственно равны

$$\gamma_1 = ik_1, \qquad \gamma_2 = \alpha_2 + i\beta_2,$$

то угол преломления является величиной комплексной. Полагая на этом основании

$$\cos\psi = u + iv$$

и выражая $\sin\psi$ из (6.70), запишем исходное равенство (6.90) в виде

$$\dot{A}_2 = \dot{A}_{\text{пр}}\, e^{[\alpha_2 u - \beta_2 v + i(\alpha_2 v + \beta_2 u)]\, y}\, e^{-ik_1 z \sin\theta}.$$

Обозначив

$$\alpha_2 u - \beta_2 v = a, \qquad \alpha_2 v + \beta_2 u = b, \qquad k_1 \sin\theta = c,$$

где a, b, c — вещественные числа и $a > 0$, имеем

$$\dot{A}_2 = \dot{A}_{\text{пр}}\, e^{ay}\, e^{i(by - cz)}. \tag{6.91}$$

Как видно из (6.91), затухание волны во второй среде определяется экспоненциально убывающим множителем e^{ay}*). Отсюда следует важный вывод о том, что независимо от угла падения прошедшая волна затухает строго в направлении нормали к границе раздела (в отрицательном направлении оси y). Таким образом, поверхностями равных амплитуд здесь являются плоскости $y = \text{const}$.

Фаза прошедшей волны определяется множителем $e^{i(by - cz)}$, поэтому для плоскостей равных фаз имеем другое уравнение:

$$by - cz = \text{const}.$$

Волны, у которых поверхности равных амплитуд не совпадают с поверхностями равных фаз, получили наименование неоднородных волн. Физический смысл этого названия заключается в том, что амплитуда волны в плоскости равной фазы не остается постоянной, а изменяется по определенному закону.

Особо интересен случай, когда постоянная распространения второй среды по модулю значительно превосходит постоянную распространения первой среды:

$$|\gamma_2| \gg |\gamma_1|. \tag{6.92}$$

Тогда, как это следует из (6.70), при любых значениях угла падения модуль комплексного угла преломления $|\psi| \to 0$. Полагая в силу этого в уравнении (6.90)

$$\cos\psi \approx 1, \qquad \sin\psi = 0,$$

*) Напомним читателю, что волна распространяется в отрицательном направлении оси y.

получаем для произвольной составляющей поля во второй среде

$$\dot{A}_2 \approx \dot{A}_{\text{пр}}\, e^{\gamma_2 y} = \dot{A}_{\text{пр}}\, e^{\alpha_2 y} e^{i\beta_2 y}. \qquad (6.93)$$

Уравнение (6.93) показывает, что при любых углах падения распространение электромагнитной волны во второй среде практически происходит по направлению нормали к поверхности раздела. Более того, волну можно считать однородной, так как плоскости равных фаз совпадают с плоскостями равных амплитуд.

На основании изложенного можно утверждать, что волна, прошедшая из диэлектрика в среду с параметрами, удовлетворяющими неравенству (6.92), как любая однородная плоская волна, будет иметь только поперечные составляющие E_{x2} и E_{z2}; H_{x2} и H_{z2}. Эти составляющие связаны между собой равенствами:

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_{x2} &= Z'_{02}\, \dot{H}_{z2}, \\ \dot{E}_{z2} &= -Z'_{02}\, \dot{H}_{x2}. \end{aligned}\right\} \qquad (6.94)$$

Поскольку на границе раздела сред (в плоскости $y = 0$) касательные составляющие векторов поля непрерывны, получаем следующие важные соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_{x1} &= Z'_{02}\, \dot{H}_{z1} \\ \dot{E}_{z1} &= -Z'_{02}\, \dot{H}_{x1} \end{aligned}\right\} \quad \text{при } y = 0. \qquad (6.95)$$

Эти соотношения устанавливают зависимость касательных составляющих векторов поля на поверхности раздела в первой среде от параметров второй среды. Как будет показано в дальнейшем, они играют важную роль при решении некоторых граничных задач теории поля.

Напомним, что уравнения (6.95) справедливы, если выполняется неравенство (6.92). При этом совершенно безразлично, какой из параметров, определяющих постоянную распространения γ_2, имеет большую величину.

На основании (6.77)—(6.82) для произвольной составляющей поля в первой среде можно записать обобщенное уравнение

$$\dot{A}_1 = \left(\dot{A}_{\text{пад}}\, e^{\gamma_1 y \cos\theta} + \dot{A}_{\text{отр}}\, e^{-\gamma_1 y \cos\theta}\right) e^{-\gamma_1 z \sin\theta}.$$

Через $\dot{A}_{\text{пад}}$ и $\dot{A}_{\text{отр}}$ обозначены амплитудные значения проекций векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ падающей и отраженной волн на координатные оси x, y, z. Они связаны между собой соотношением

$$\dot{A}_{\text{отр}} = \pm p_{\text{отр}}\, \dot{A}_{\text{пад}}.$$

Волновое сопротивление второй среды, а следовательно, и коэффициент отражения, определяемый (6.75), являются комплексными величинами. Отсюда фаза отраженной волны в общем случае может принимать любое значение от $-\pi$ до π.

При выполнении неравенства (6.92) волновое сопротивление второй среды по модулю много больше волнового сопротивления первой среды и $|p_{отр}| \approx 1$. Это значит, что амплитуды падающей и отраженной волн равны. Легко убедиться, что в этом случае вдоль оси y образуются стоячие волны. Расстояние между соседними узлами (или пучностями) будет равно $\lambda_1/2 \cos\theta$, где λ_1 — длина волны в первой среде.

Вдоль поверхности раздела $z = \text{const}$ распространяется бегущая волна с постоянной распространения $\gamma_1 \sin\theta$.

11. Поверхностный эффект в проводниках

Перейдем теперь к изучению поля в реальных проводниках. Как и в предшествующем параграфе, будем сначала считать, что одно полупространство заполнено диэлектриком (I область), а другое полупространство — проводником (II область). Однако в отличие от предыдущего случая координатную ось y направим внутрь второй среды. Для определенности положим, что вектор напряженности электрического поля в области I параллелен плоскости yz (рис. 6.17).

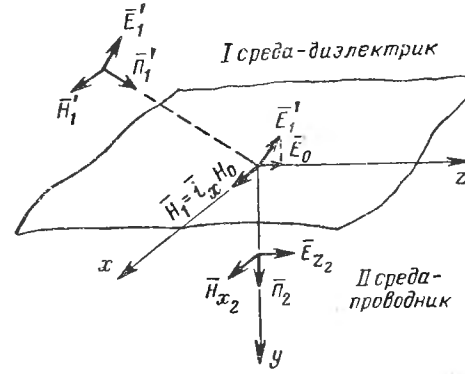


Рис. 6.17. К определению поля в плоском полубесконечном проводнике.

Как было установлено выше, при условии (6.92) в проводнике будут возбуждаться плоские волны, уходящие в глубь проводника по нормали к поверхности раздела (т. е. в направлении оси y). На этом основании выражения для комплексных амплитуд векторов поля в проводнике можно записать в виде

$$\dot{E}_{z2} = \dot{E}_0 e^{-ay} e^{-i\beta y},$$

$$\dot{H}_{x2} = \dot{H}_0 e^{-ay} e^{-i\beta y}. \qquad (6.96)$$

Через $\dot{E}_0$ и $\dot{H}_0$ здесь обозначены касательные составляющие векторов поля на поверхности раздела $y = 0$, которые согласно (6.94), (6.31б), (6.32б) связаны между собой соотношением

$$\dot{E}_0 = Z'_{02}\,\dot{H}_0 = \frac{(1+i)\,\alpha}{g}\,\dot{H}_0. \tag{6.97}$$

Из выражения (6.96) видно, что по мере распространения волны в глубь проводника амплитуда ее убывает по экспоненциальному закону. Скорость уменьшения амплитуды определяется величиной коэффициента затухания α.

Для хороших проводников (например, металлов) коэффициент затухания достигает больших величин. Вследствие этого поле в них затухает очень быстро и оказывается сосредоточенным лишь в тонком поверхностном слое.

Толщину поверхностного слоя, в котором сосредоточено электромагнитное поле, принято оценивать глубиной проникновения поля в проводник.

Под глубиной проникновения понимают расстояние δ, на котором амплитуда поля уменьшается в $e = 2{,}718$ раз по сравнению с полем на поверхности проводника. Из уравнения (6.96) легко установить, что глубина проникновения связана с коэффициентом затухания формулой

$$\delta = \frac{1}{\alpha}$$

или с учетом (6.29б)

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega g \mu}}. \tag{6.98}$$

Отсюда видно, что глубина проникновения уменьшается с увеличением частоты, проводимости и магнитной проницаемости проводника.

В таблице, приведенной ниже, представлена величина $\delta\sqrt{\omega}$ для некоторых металлов, находящих применение в радиотехнике.

№ п/п	Наименование металла	$\delta\sqrt{\omega}$ [*мм/сек* $^{1/2}$]
1	Серебро	160
2	Медь	165
3	Латунь	318

На высоких частотах глубина проникновения очень мала. Так, согласно данным таблицы, при $\omega = 2\pi \cdot 10^6$ 1/*сек* глубина проникновения для серебра $\delta = \frac{160}{\sqrt{2\pi \cdot 10^6}} \approx 6{,}4 \cdot 10^{-2}$ *мм*. С увеличением

круговой частоты до $\omega = 2\pi \cdot 10^{10}$ $1/сек$ величина δ уменьшается на два порядка и становится равной $6{,}4 \cdot 10^{-4}$ *мм*.

Очевидно, что на глубине, равной нескольким δ, в большинстве практически встречающихся случаев существованием поля в металлах можно пренебрегать.

Определим плотность тока в проводнике. На основании закона Ома плотность тока равна $\bar{j} = g\bar{E}$. Для рассматриваемого случая в соответствии с (6.96)

$$\dot{j}_z = g\dot{E}_0 e^{-\alpha y} e^{-i\beta y} = \dot{j}_0 e^{-\alpha y} e^{-i\beta y}, \qquad (6.99)$$

где $\dot{j}_0 = g\dot{E}_0$ — плотность тока на поверхности проводника.

По мере удаления от поверхности проводника плотность тока $|\dot{j}_z| = |\dot{j}_0| e^{-\alpha y}$ убывает по тому же закону, что и амплитуда напряженности поля. Поэтому на радиотехнических частотах мы будем наблюдать чрезвычайно неравномерное распределение тока по сечению проводника.

Описанное выше явление получило наименование поверхностного эффекта.

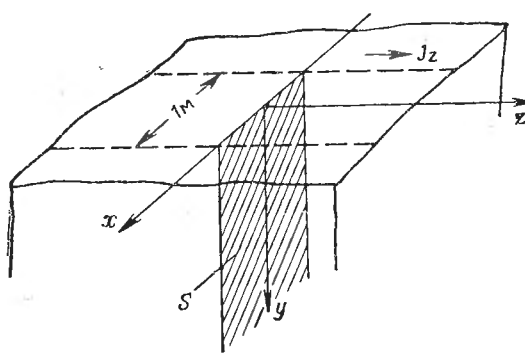


Рис. 6.18. К вычислению величины тока, текущего через поперечное сечение проводника на единицу его ширины.

Так как размеры проводника в плоскости $x0z$ безграничны, введем в рассмотрение величину тока I_S, текущего через поперечное сечение S проводника на единицу его ширины (заштрихованный участок на рис. 6.18). Ясно, что

$$\dot{I}_S = \int_{y=0}^{y\to\infty} \dot{j}_z\, dy = \int_{y=0}^{y\to\infty} g\dot{E}_0 e^{-\alpha y} e^{-i\beta y}\, dy = g\dot{E}_0 \frac{1}{\alpha + i\beta}.$$

Учитывая, что для проводников $\alpha \approx \beta$, имеем

$$\dot{I}_S = \frac{g\dot{E}_0}{\alpha(1+i)}. \tag{6.100}$$

Величина

$$Z_S = \frac{\dot{E}_0}{\dot{I}_s} = \frac{\alpha(1+i)}{g} \tag{6.101}$$

называется поверхностным сопротивлением проводника. Оно представляет собой отношение комплексной амплитуды напряжения на единицу длины проводника ($\dot{E}_0$) к комплексной амплитуде тока, рассчитанного на единицу его ширины ($\dot{I}_S$).

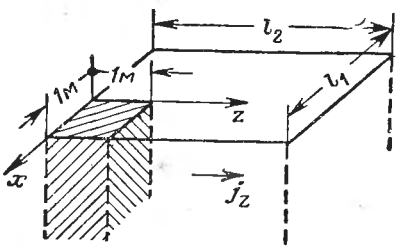


Рис. 6.19. К расчету поверхностного сопротивления проводника.

Из сопоставления (6.101) с (6.97) следует, что поверхностное сопротивление совпадает с волновым сопротивлением проводника Z_{02}.

Как видно из определения, Z_S характеризует собой сопротивление участка проводника с единичной площадью внешней поверхности ($x = z = 1$ ед. длины) и безграничным размером вдоль оси y (заштрихованный участок на рис. 6.19) при $\dot{I}_s(z) = \text{const}$.

Если же участок проводника имеет ширину (т. е. размер по оси x), равную l_1, и длину l_2, равную единице, то его полное сопротивление определится равенством

$$Z_f = \frac{Z_S}{l_1}. \tag{6.102}$$

Поверхностное сопротивление в соответствии с (6.101) имеет комплексный характер. Представим его на этом основании как

$$Z_S = R_S + jX_S. \tag{6.103}$$

Приравнивая вещественные и мнимые части (6.101) и (6.103), найдем активную и реактивную составляющие Z_S:

$$R_S = X_S = \frac{\alpha}{g} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2g}}. \tag{6.104}$$

Как обычно, активная составляющая R_S определяет мощность потерь в проводнике. Реактивная составляющая X_S имеет индуктивный характер и учитывает часть индуктивности проводника, обусловленную внутренним магнитным полем.

Из сопоставления формул (6.98) и (6.104) следует, что активную составляющую поверхностного сопротивления можно представить в виде

$$R_S = \frac{1}{g\delta}. \tag{6.105}$$

Этот замечательный результат показывает, что активная составляющая поверхностного сопротивления имеет ту же величину, которую при равномерном распределении тока (постоянный ток) имеет плоский проводник толщиной δ.

Полученные результаты относятся к плоской границе раздела сред. Однако они могут быть распространены и на проводники произвольной формы, для которых справедливы неравенства

$$l_0 \gg \delta, \quad r_0 \gg \delta, \tag{6.106}$$

где l_0 и r_0 — наименьший линейный размер сечения проводника и минимальный радиус кривизны его поверхности.

В самом деле, при выводе соотношений (6.101)—(6.104) мы основывались на предположении, что волна, уходящая внутрь проводника, является плоской. Если размеры сечения проводника и радиусы кривизны его поверхности значительно превосходят глубину проникновения, то любой малый участок поверхности можно рассматривать как часть касательной к нему плоскости. В пределах такого участка внутреннее поле будет аналогично полю плоской волны, проникающей в полубесконечный проводник через плоскую границу раздела и распространяющуюся по нормали к его поверхности. Стало быть, для произвольного тела, удовлетворяющего условиям (6.92), (6.106), приближенно справедливы исходные выражения (6.94), (6.96) и полученные на их базе расчетные формулы. Применим изложенную теорию для расчета сопротивления цилиндрического проводника радиуса ρ_0.

На основании предыдущих рассуждений для тока, текущего по проводнику, будем иметь

$$\dot{I} = \dot{J}_S l_1 = \dot{J}_S 2\pi\rho_0. \tag{6.107}$$

Из закона Ома в дифференциальной форме падение напряжения на единицу длины проводника $\dot{U} = \dot{E}_0$. Отсюда с учетом (6.100) комплексное сопротивление цилиндрического проводника единичной длины

$$Z_f = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{\dot{E}_0}{\dot{J}_S 2\pi\rho_0} = \frac{1}{2\pi\rho_0}\,\frac{\alpha(1+i)}{g}. \tag{6.108}$$

Заметим, что этот же результат можно получить непосредственно по формуле (6.102), если в ней положить $l_1 = 2\pi\rho_0$ и выразить Z_S из (6.101).

Разделяя в (6.107) вещественную и мнимую части, найдем активное и реактивное сопротивления единицы длины цилиндрического проводника

$$R_f = X_f = \frac{1}{2\pi\rho_0}\frac{\alpha}{g} = \frac{1}{2\pi\rho_0}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2g}}. \qquad (6.109)$$

Сравним R_f с сопротивлением того же проводника для постоянного тока $R_0 = 1/g\pi\rho_0^2$. Отношение этих величин равно

$$\frac{R_f}{R_0} = \frac{\rho_0}{2}\sqrt{\pi f\mu g}. \qquad (6.110)$$

Отсюда видно, что активное сопротивление цилиндрического проводника больше его омического сопротивления, причем это различие возрастает с увеличением частоты и проводимости материала.

Приведем числовой пример. Пусть $\rho_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ *м*, $f = 3 \cdot 10^8$ *гц*; $g = 6 \cdot 10^7$ *сим/м* (серебро). Тогда

$$\frac{R_f}{R_0} = 10^{-3}\sqrt{\pi \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 6 \cdot 10^7} \approx 250.$$

Величина поверхностного эффекта особенно сильно сказывается в проводах большого сечения. Так, если в предыдущем примере положить $\rho_0 = 4 \cdot 10^{-3}$ *м*, то при прочих равных условиях $\frac{R_f}{R_0} \approx$ ≈ 500, т. е. отношение $\frac{R_f}{R_0}$ по сравнению с предыдущим увеличивается в два раза.

Для уменьшения сопротивления проводника переменному току его целесообразно заменить совокупностью тонких изолированных друг от друга проводников.

12. Приближенные граничные условия Леонтовича

На основании рассуждений § 11 гл. VI можно считать, что в проводнике, размеры и радиусы кривизны которого значительно превосходят глубину проникновения, компоненты внутреннего поля связаны между собой приближенными равенствами [см. (6.94)]:

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_{x2} &\approx -Z'_{02}\dot{H}_{z2}, \\ \dot{E}_{z2} &\approx Z'_{02}\dot{H}_{x2}, \end{aligned}\right\} \qquad (6.111)$$

здесь $\dot{E}_{x2}$, $\dot{H}_{z2}$, $\dot{E}_{z2}$, $\dot{H}_{x2}$ — проекции векторов внутреннего поля на оси местной системы координат, у которой плоскость xOz является

касательной плоскостью к поверхности проводника в данной точке, а ось y совпадает с нормалью $\bar{n}$ (рис. 6.20). Приравнивая касательные составляющие векторов поля на границе раздела ($y = 0$), получаем для тела произвольной формы равенства, аналогичные (6.95):

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_{x1} &= -Z'_{02}\dot{H}_{z1} \\ \dot{E}_{z1} &= Z'_{02}H_{x1} \end{aligned}\right\} y=0. \qquad (6.112)$$

Граничные условия (6.112) были впервые получены советским ученым М. А. Леонтовичем и носят его имя. Они связывают касательные составляющие векторов поля у поверхности раздела в первой среде с параметрами второй среды. Это дает возможность, не определяя

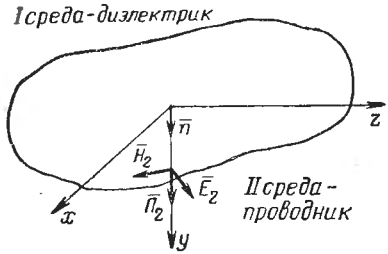


Рис. 6.20. К определению поля в проводнике произвольной формы при малой глубине проникновения.

поле внутри проводящего тела, приближенно учесть его влияние с помощью выражений (6.112). Точность приближенных граничных условий Леонтовича тем выше, чем больше по модулю постоянная распространения среды γ_2.

Для тела, ограниченного произвольной проверхностью, равенства (6.112) целесообразно записать в векторной форме:

$$\dot{\bar{E}}_{\text{tg}} = Z'_{02}\left[\dot{\bar{H}}_{\text{tg}}\,\bar{n}\right], \qquad (6.113)$$

где $\bar{n}$ — нормаль к поверхности, направленная внутрь тела.

Сопоставляя (6.97) с (6.101), получаем

$$\dot{H}_0 = \dot{H}_{\text{tg}} = \dot{I}_S.$$

Введем вектор $\dot{\bar{I}}_S$, модуль которого равен величине тока I_S, а направление совпадает с направлением вектора плотности тока. Так как векторы $\dot{\bar{H}}_{\text{tg}}$, $\bar{n}$ и $\dot{\bar{I}}_S$ образуют правовинтовую тройку, то

$$\dot{\bar{I}}_S = \left[\dot{\bar{H}}_{\text{tg}}\,\bar{n}\right]. \qquad (6.114)$$

Подставляя (6.114) в (6.113) и учитывая, что $Z'_{02} = Z_S$, имеем

$$\dot{\bar{E}}_{\text{tg}} = Z_S\,\dot{\bar{I}}_S. \qquad (6.115)$$

Последнее выражение является одной из форм записи приближенных граничных условий Леонтовича.

13. Граничные условия на поверхности идеального проводника

Реальные металлы, обладающие большой, но конечной проводимостью, в ряде случаев целесообразно считать идеальными проводниками с проводимостью $g \to \infty$.

Из формулы (6.98) видно, что при бесконечно большой проводимости глубина проникновения $\delta \to 0$. Стало быть, электромагнитное поле внутри идеализированного проводника отсутствует. Полагая на этом основании в (6.40)—(6.43), что $E_1 = H_1 = 0$, получаем граничные условия на поверхности идеального проводника:

$$\left.\begin{aligned} E_{\text{tg}} &= H_n = 0, \\ \varepsilon E_n &= -\sigma^*, \\ H_{\text{tg}} &= j_S \end{aligned}\right\} \text{ на } S. \tag{6.116}$$

Из этих выражений видно, что вектор электрического поля на поверхности идеального проводника имеет только одну нормальную составляющую, величина которой определяется поверхностной плотностью зарядов. Вектор магнитного поля направлен по касательной к поверхности проводника. А его значение равно поверхностной плотности тока (см. определение в § 5 гл. VI).

Поверхностная плотность тока j_S является пределом, к которому стремится ток I_S, текущий через поперечное сечение проводника на единицу его ширины, при стремлении глубины проникновения к нулю. Поэтому полученное в предыдущем параграфе приближенное равенство (6.114) в пределе при $g \to \infty$ ($\delta \to 0$) переходит в точное равенство

$$\bar{j}_S = [\bar{H}_{\text{tg}} \times \bar{n}]. \tag{6.117}$$

Заметим, что это выражение может быть получено из граничного условия (6.40′), если в нем положить $\bar{H}_{\text{tg1}} = 0$.

Введенное понятие об идеальном проводнике упрощает решение многих практических задач теории электромагнитного поля. Упрощение выражается в том, что поле внутри проводника можно вообще не рассматривать, а его влияние приближенно учесть с помощью граничных условий (6.116). В этом смысле значение граничных условий на поверхности идеального проводника аналогично значению приближенных граничных условий Леонтовича.

В качестве примера рассмотрим нормальное падение плоской волны на поверхность идеального проводника ($g_2 \to \infty$). В этом случае согласно (6.31б), (6.57) и (6.58) $z_{02} = 0$, коэффициент отражения $p_{\text{отр}} = -1$, а коэффициент прохождения $p_{\text{пр}} = 0$. В соответ-

*) Это выражение отличается от (1.45) знаком, потому что здесь изменено направление нормали.

ствии с граничными условиями (6.116) напряженность электрического поля на поверхности проводника (E_0) обращается в нуль (считаем $\sigma = 0$), напряженность магнитного поля не обращается в нуль, а равняется поверхностной плотности тока, текущего по проводящей поверхности раздела двух сред. Уравнения (6.55), (6.56) для рассматриваемого случая можно записать в виде

$$\dot{E}_1 = \dot{H}_0 Z_{01} \operatorname{sh} \gamma_1 y, \tag{6.118}$$

$$\dot{H}_1 = \dot{H}_0 \operatorname{ch} \gamma_1 y. \tag{6.119}$$

Сравнивая (6.119) с (6.60) для $p_{\text{отр}} = -1$, видим, что

$$\dot{H}_0 = 2\dot{H}_{\text{пад}}.$$

Рассматриваемый случай нормального падения волны на идеальный проводник аналогичен случаю короткого замыкания длинной линии. В точке короткого замыкания линии напряжение $U = 0$, а ток I_0 равен двойному значению тока падающей волны.

Если первая среда является идеальным диэлектриком, то

$$\alpha_1 = 0; \quad \gamma_1 = i\beta_1; \quad Z_{01} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}.$$

Так как

$$\operatorname{sh}(i\beta y) = i \sin \beta y; \quad \operatorname{ch}(i\beta y) = \cos \beta y,$$

то получим

$$\dot{E}_1 = i\dot{H}_0 Z_{01} \sin \beta y = \dot{H}_0 Z_{01} \sin \beta y \, e^{j\pi/2},$$

$$\dot{H}_1 = \dot{H}_0 \cos \beta y.$$

В пространстве вдоль оси y поле имеет характер стоячей волны. В отличие от случая бегущей волны, напряженность электрического поля имеет во всех точках фазу либо $\frac{\pi}{2}$ либо, $-\frac{\pi}{2}$ и различные амплитуды.

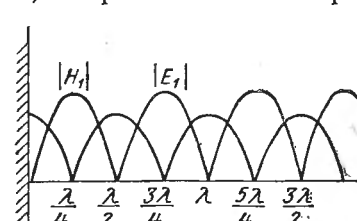


Рис. 6.21. Зависимость амплитудных значений электрического и магнитного векторов от расстояния до плоскости раздела.

В точках $\beta y = 2n(\pi/2)$ имеют место узлы, а в точках $\beta y = (2n-1)(\pi/2)$ имеют место пучности напряженности электрического поля.

Напряженность магнитного поля во всех точках сдвинута по фазе относительно напряженности электрического поля на $\pi/2$.

Узлы напряженности магнитного поля соответствуют точкам пучности напряженности электрического поля и наоборот.

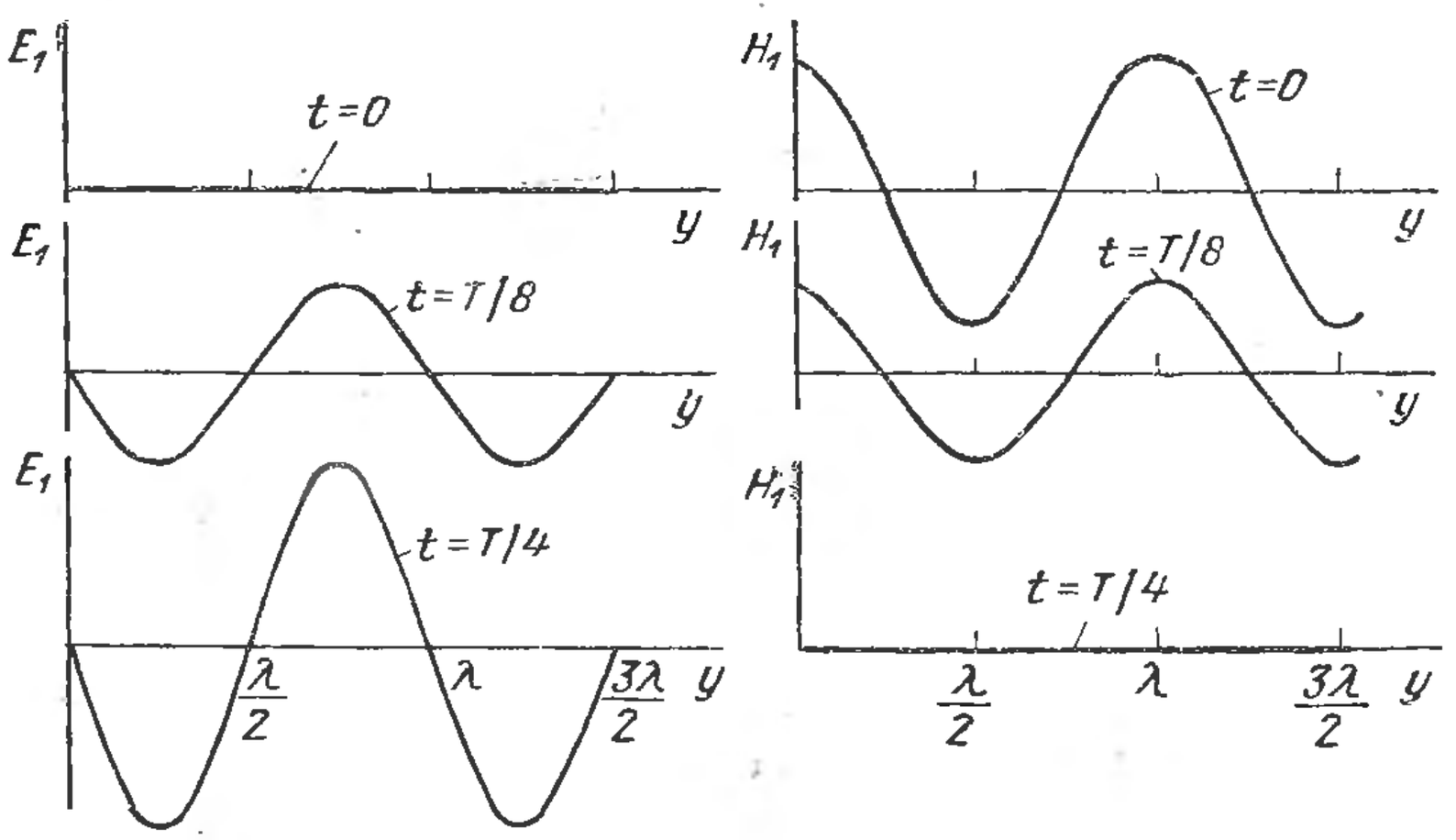


Рис. 6.22. Распределение в пространстве электрического и магнитного векторов в различные моменты времени.

На рис. 6.21 показаны зависимости амплитудных значений электрического и магнитного векторов от координаты y, а на рис. 6.22 — мгновенные значения этих векторов для различных моментов времени.

Фазовый сдвиг на $\pi/2$ между напряженностями E и H означает реактивный характер мощности. Вектор Пойнтинга в любой точке колеблется во времени с двойной частотой, а его среднее значение за период равно нулю.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

1. Анизотропные среды

До сих пор мы рассматривали электромагнитные поля в изотропных средах. Для таких сред соотношения, связывающие векторы $\overline{B}$ и $\overline{H}$; $\overline{D}$ и $\overline{E}$, имели вид:

$$\overline{B} = \mu \overline{H}; \quad \overline{D} = \varepsilon \overline{E}. \tag{7.1}$$

Так как μ и ε являются скалярными величинами, то векторы $\overline{B}$ и $\overline{H}$; $\overline{D}$ и $\overline{E}$ в изотропных средах параллельны между собой.

Каждое из векторных равенств (7.1) можно заменить тремя скалярными уравнениями:

$$\begin{aligned} B_x &= \mu H_x, & D_x &= \varepsilon E_x, \\ B_y &= \mu H_y, & D_y &= \varepsilon E_y, \\ B_z &= \mu H_z, & D_z &= \varepsilon E_z. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Отсюда видно, что в изотропных средах функционально связаны между собой только одноименные проекции векторов поля. Свойства таких сред одинаковы в любых направлениях.

Наряду с изотропными существуют среды, которые в разных направлениях обнаруживают различные свойства. Эти среды, как уже указывалось выше, называются анизотропными.

В анизотропных средах каждая проекция векторов $\overline{B}$ и $\overline{D}$ в общем случае может зависеть от трех проекций вектора $\overline{H}$ или $\overline{E}$ соответ-

ственно. Поэтому для них равенства (7.2) должны быть заменены более сложными соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} B_x &= \mu_{xx} H_x + \mu_{xy} H_y + \mu_{xz} H_z, \\ B_y &= \mu_{yx} H_x + \mu_{yy} H_y + \mu_{yz} H_z, \\ B_z &= \mu_{zx} H_x + \mu_{zy} H_y + \mu_{zz} H_z, \\ D_x &= \varepsilon_{xx} E_x + \varepsilon_{xy} E_y + \varepsilon_{xz} E_z, \\ D_y &= \varepsilon_{yx} E_x + \varepsilon_{yy} E_y + \varepsilon_{yz} E_z, \\ D_z &= \varepsilon_{zx} E_x + \varepsilon_{zy} E_y + \varepsilon_{zz} E_z. \end{aligned}\right\} \qquad (7.3)$$

Совокупность физических величин, на которые согласно (7.3) необходимо умножить проекции векторов $\overline{H}$ и $\overline{E}$ для определения проекций векторов $\overline{B}$ и $\overline{D}$, принято условно записывать в виде таблиц:

$$\overleftrightarrow{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{xx} \mu_{xy} \mu_{xz} \\ \mu_{yx} \mu_{yy} \mu_{yz} \\ \mu_{zx} \mu_{zy} \mu_{zz} \end{pmatrix}; \quad \overleftrightarrow{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \varepsilon_{xy} \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \varepsilon_{zy} \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}. \qquad (7.4)$$

Введенные по формулам (7.4) совокупности чисел носят наименование тензоров магнитной и диэлектрической проницаемости. Числа μ_{xx}; μ_{xy} ... и ε_{xx}, ε_{xy} ... называются компонентами тензоров $\overleftrightarrow{\mu}$ и $\overleftrightarrow{\varepsilon}$. Компоненты могут быть как вещественными, так и комплексными величинами. В частных случаях некоторые из них обращаются в нуль.

В результате введения тензоров магнитной и диэлектрической проницаемости уравнения (7.1) для анизотропных сред приобретают вид:

$$\overline{B} = \overleftrightarrow{\mu}\overline{H}: \quad \overline{D} = \overleftrightarrow{\varepsilon}\overline{E}. \qquad (7.5)$$

В общем случае для определения поля в анизотропной среде необходимо решать уравнения Максвелла в предположении, что магнитная и диэлектрическая проницаемости являются тензорами типа (7.4). Эта задача отличается значительной сложностью. К счастью, в природе не известны вещества, у которых магнитная и диэлектрическая проницаемости одновременно имеют тензорный характер. Поэтому в дальнейшем среды, обладающие или магнитной, или диэлектрической анизотропией, целесообразно рассматривать раздельно. Первые из них характеризуются уравнениями

$$\overline{D} = \varepsilon\overline{E}; \quad \overline{B} = \overleftrightarrow{\mu}\overline{H}. \qquad (7.6)$$

У вторых сред тензором является только диэлектрическая проницаемость. Для них имеем:

$$\overline{D} = \overleftrightarrow{\varepsilon}\,\overline{E}; \quad \overline{B} = \mu\overline{H}. \tag{7.7}$$

Следует заметить, что проводимость также может быть тензорной величиной. Для среды с тензорной проводимостью закон Ома в дифференциальной форме принимает вид

$$\overline{j} = \overleftrightarrow{g}\,\overline{E}.$$

Определение тензора проводимости $\overleftrightarrow{g}$ аналогично (7.4).

Введение тензорных величин позволяет обобщить основные соотношения, полученные в § 4.6 гл. V, на случай анизотропных сред. Необходимо только иметь в виду, что энергия электромагнитного поля в анизотропной среде определяется выражением

$$W = \frac{1}{2}\int_V (\overline{E}\,\overline{D} + \overline{H}\,\overline{B})\,dV.$$

Типичными представителями анизотропных сред, наиболее часто встречающихся в практике, являются намагниченные постоянным полем феррит и ионизированный газ (плазма). Рассмотрению этих сред посвящены следующие параграфы данной главы.

2. Свойства феррита и плазмы в постоянном магнитном поле

Феррит. Ферритами называют особую группу веществ, которые одновременно обладают магнитными свойствами ферромагнетиков и электрическими свойствами диэлектриков ($\varepsilon = 5 \div 20$). В отличие от ферромагнитных металлов ферриты имеют весьма малую удельную проводимость ($g = 10^{-4} \div 10^{-6}$ *сим/м*), и электромагнитные волны распространяются в них с небольшим затуханием. Совокупность целого ряда ценных свойств обусловливает широкое применение ферритов в современной радиотехнике.

В ненамагниченном состоянии феррит, как и любой другой ферромагнетик, представляет собой конгломерат большого числа областей, магнитные моменты которых ориентированы в различных направлениях (см. § 11 гл. IV). Под воздействием переменного электромагнитного поля магнитные моменты этих областей отклоняются от первоначального положения в направлении вектора $\overline{H}$. В результате этого появляется суммарный магнитный момент единицы объема (т. е. вектор магнитной поляризации), совпадающий по направлению с вектором напряженности внешнего поля. Согласно (4.84)

магнитная восприимчивость и связанная с ней соотношением типа (4.83) магнитная проницаемость являются скалярными величинами. Поэтому свойства ненамагниченного феррита для переменных полей любого направления оказываются одинаковыми, и распространение электромагнитных волн в нем происходит точно так же, как и в любой другой изотропной среде.

Под воздействием постоянного магнитного поля феррит приобретает анизотропные свойства. Его магнитная проницаемость для переменных электромагнитных полей становится тензорной величиной. В связи с этим рассмотрим процессы в намагниченном феррите.

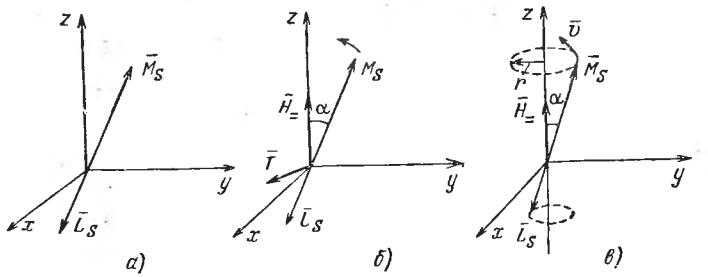


Рис. 7.1. К определению прецессии магнитного момента атома феррита в постоянном магнитном поле.

Как известно, электроны в атомах любого вещества обладают так называемым орбитальным и собственным (спиновым) магнитным моментом. Установлено, что свойства ферромагнитных веществ связаны главным образом со спиновым магнитным моментом. На этом основании упрощенную модель атома с некомпенсированным электронным спином можно представить в виде «волчка», обладающего спиновым магнитным моментом $\bar{M}_S$ и собственным механическим моментом количества движения $\bar{L}_S$ (появление которого объясняется вращением электрона вокруг собственной оси). Как показывает теория (см. гл. XIV), моменты $\bar{M}_S$ и $\bar{L}_S$ имеют противоположные направления (рис. 7.1, а) и связаны между собой соотношением

$$\bar{M}_S = -\mu_0 \frac{e_0}{m_0} \bar{L}_S = -\Psi \bar{L}_S, \qquad (7.8)$$

где e_0 и m_0 — заряд (абсолютная величина) и масса электрона, а

$$\Psi = \mu_0 \frac{e_0}{m_0} = \mu_0 \gamma = 2\pi \cdot 3{,}5 \cdot 10^4 \ м/к.$$

Допустим, что подобный атом помещен в постоянное магнитное поле с напряженностью $\bar{H}_= = \bar{i}_z H_=$. На атом начинает действовать

пара сил с моментом вращения, величина и направление которого определяется векторным произведением,

$$\bar{T} = [\bar{M}_S \times \bar{H}_=]. \tag{7.9}$$

Момент вращения $\bar{T}$ стремится развернуть атом так, чтобы магнитный момент $\bar{M}_S$ совпадал с направлением $\bar{H}_=$ (рис.7.1, *б*).

Однако наличие механического момента $\bar{L}_S$ делает атом подобным гироскопу и его магнитная ось (т. е. момент $\bar{M}_S$) начинает прецессировать вокруг направления поля $\bar{H}_=$, (рис. 7.1, *в*), описывая концом окружность.

В самом деле, из механики известно, что уравнение движения вектора $\bar{L}_S$ под воздействием момента $\bar{T}$ имеем вид

$$\frac{d\bar{L}_S}{dt} = \bar{T}, \tag{7.10}$$

откуда с учетом (7.9)

$$\frac{d\bar{L}_S}{dt} = [\bar{M}_S \times \bar{H}_=]. \tag{7.11}$$

Подставляя значение $\bar{L}_S$ из (7.8) в (7.11), получаем уравнение движения вектора $\bar{M}_S$:

$$\frac{d\bar{M}_S}{dt} = -\Psi [\bar{M}_S \times \bar{H}_=]. \tag{7.12}$$

Векторное уравнение (7.12) распадается на три скалярных уравнения относительно проекций вектора $\bar{M}_S$:

$$\frac{dM_{Sx}}{dt} + \Psi H_= M_{Sy} = 0,$$

$$\frac{dM_{Sy}}{dt} - \Psi H_= M_{Sx} = 0,$$

$$\frac{dM_{Sz}}{dt} = 0.$$

Совместное решение двух первых уравнений дает

$$M_{Sx} = M_{Sxy} \cos \Psi H_= t; \quad M_{Sy} = M_{Sxy} \sin \Psi H_= t,$$

где $M_{Sxy} = \sqrt{M_{Sx}^2 + M_{Sy}^2}$ — проекция $\bar{M}_S$ на плоскость xOy. Так как тангенс угла φ между осью x и проекцией M_{Sxy} равен

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{M_{Sy}}{M_{Sx}} = \frac{\sin \Psi H_= t}{\cos \Psi H_= t} = \operatorname{tg} \Psi H_= t,$$

то

$$\varphi = \Psi H_{=} t.$$

Из этих рассуждений следует, что вектор $\overline{M}_S$ вращается относительно оси z (рис. 7.1, *в*) с угловой частотой

$$\omega_м = \Psi H_{=}. \tag{7.13}$$

Из третьего уравнения системы $M_{Sz} = M_S \cos\alpha = \text{const}$, откуда видно, что угол α между осью z и $\overline{M}_S$ в процессе вращения остается неизменным.

Таким образом, магнитные моменты атомов, не совпадающие по направлению с приложенным полем $\overline{H}_{=}$, начинают прецессировать вокруг него с угловой частотой $\omega_м$, называемой частотой г и р о м а г н и т н о г о р е з о н а н с а. Если бы не было затухания, прецессия магнитного момента продолжалась бы бесконечно долго. Однако из-за потерь магнитный момент движется по скручивающейся спирали и через некоторое время установится вдоль направления поля $\overline{H}_{=}$. Время затухания прецессии, приблизительно оцениваемое величиной 10^{-8} *сек*, определяет собой время намагничивания феррита.

Рассмотрим теперь явления, которые возникают при воздействии на атом постоянного магнитного поля $\overline{H}_{=} = \overline{i}_z H_{=}$ и не совпадающего с ним по направлению переменного магнитного поля $\overline{H} = \overline{H}_0 \cos \omega t$. Для упрощения предположим, что вектор $\overline{H}$ направлен вдоль оси Ox, а круговая частота $\omega \approx \omega_м$. Момент вращения, созданный переменным полем, определяется формулой, аналогичной (7.9):

$$\overline{\tau} = [\overline{M}_S \times \overline{H}]. \tag{7.14}$$

Пусть в начальный момент времени вектор $\overline{M}_S$ лежит в плоскости xOz, а вектор напряженности переменного магнитного поля направлен вдоль оси Ox и имеет максимальную величину. Как вытекает из формул (7.9), (7.14) и рис. 7.2, *а*, при $t = 0$ момент вращения $\overline{\tau}$ направлен противоположно моменту $\overline{T}$ и стремится увеличить угол прецессии α.

Через время, равное половине периода $T_м = 2\pi/\omega_м$, магнитный момент повернется на угол π, а вектор $\overline{H}$ будет вновь иметь максимальную величину, но противоположную ориентацию. Из рис. 7.2, *б* следует, что и в момент $t = T_м/2$ вектор $\overline{\tau}$ будет стремиться увеличить угол прецессии.

В моменты времени $t = T_м/4$ и $t = 3T_м/4$, когда вектор M_S лежит в плоскости yOz, напряженность переменного магнитного поля равна нулю и оно на угол прецессии влияния не оказывает.

Таким образом, при одновременном воздействии несовпадающих по направлению постоянного и переменного магнитных полей магнитный момент атома феррита будет прецессировать относительно направления $\bar{H}_{=}$, описывая своим концом эллипс (рис. 7.2, *в*). Вектор магнитной поляризации (т. е. магнитный момент единицы объема феррита), а значит, и вектор магнитной индукции не будет совпадать по направлению с вектором напряженности переменного магнитного поля.

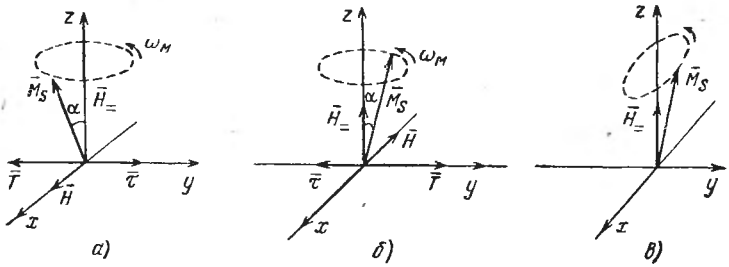


Рис. 7.2. К определению прецессии магнитного момента атома феррита при одновременном воздействии постоянного и переменного магнитных полей.

Повторяя рассуждения, позволившие получить (7.12), нетрудно убедиться в том, что уравнение движения магнитного момента атома в этом случае будет иметь вид

$$\frac{d\bar{M}_S}{dt} = -\Psi\left[\bar{M}_S \times \bar{H}_{\Sigma}\right], \tag{7.15}$$

где результирующее поле $\bar{H}_{\Sigma} = \bar{H}_{=} + \bar{H}$.

Намагниченная ферритовая среда представляет собой совокупность одинаково вращающихся магнитных моментов. Поэтому, умножая обе части уравнения (7.15) на число атомов в единице объема, мы получим уравнение движения суммарного магнитного момента единицы объема

$$\frac{d\bar{P}^{\text{м}}_{\Sigma}}{dt} = -\Psi\left[\bar{P}^{\text{м}}_{\Sigma} \times \bar{H}_{\Sigma}\right], \tag{7.16}$$

где $\bar{P}^{\text{м}}_{\Sigma}$ — магнитный момент единицы объема или вектор магнитной поляризации.

Если вектор $\bar{H} \parallel \bar{H}_{=}$, то переменное магнитное поле не будет влиять на общую картину ориентации магнитных моментов, установившихся по направлению постоянного магнитного поля. Векторы магнитной поляризации и магнитной индукции в отличие от предыдущего случая, будут параллельны вектору напряжен-

ности поля. Отсюда следует вывод о том, что свойства намагниченной постоянным полем ферритовой среды оказываются разными для переменных полей различного направления.

Плазма. Плазмой принято называть электрически нейтральный газ, в котором значительная часть атомов или молекул ионизирована.

По целому ряду свойств плазма отличается от обычных газов, содержащих одни нейтральные молекулы. Так, например, из-за наличия свободных зарядов плазма обладает большей, чем у обычных газов, электрической проводимостью. Под влиянием постоянного магнитного поля она может проявлять анизотропные свойства и т. п. В связи с этим целесообразно рассмотреть процессы, протекающие в плазме под действием электромагнитных полей.

Как отмечалось, плазма содержит большое число заряженных частиц, которые в отсутствие постоянного магнитного поля (ненамагниченная плазма) движутся хаотически. Под влиянием электрического поля с напряженностью $\bar{E} = \bar{E}_0 \cos \omega t$ на каждый свободный электрон ненамагниченной плазмы действует сила*)

$$\bar{F} = -e_0 \bar{E}.$$

Представим силу как произведение массы электрона на ускорение и, пренебрегая соударениями электронов с другими частицами, получим уравнение движения

$$m_0 \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = -e_0 \bar{E}, \tag{7.17}$$

где $\bar{r}$ — смещение электрона относительно исходного положения.

Решая уравнение (7.17), находим

$$\bar{r} = \frac{e_0}{m_0 \omega^2} \bar{E}. \tag{7.18}$$

Таким образом, электроны совершают прямолинейное колебательное движение в направлении вектора $\bar{E}$, приобретая при этом электрический момент

$$\bar{p} = -e_0 \bar{r} = -\frac{e_0^2}{m_0 \omega^2} \bar{E}. \tag{7.19}$$

Если в единице объема плазмы имеется N свободных электронов и каждый из них получает одинаковое смещение, то электрический момент единицы объема (вектор электрической поляризации) равен

$$\bar{P}^e = N\bar{p} = -Ne_0 \bar{r}, \tag{7.20}$$

*) Взаимодействием электронов с магнитным полем волны можно пренебречь (см. § 2 гл. X V). Кроме того, в большей части радиотехнического диапазона частот движение тяжелых ионов практически не влияет на распространение электромагнитных волн в плазме. Поэтому в дальнейшем их принимать в расчет не будем.

или с учетом (7.18) имеем

$$\overline{P}^e = -\frac{Ne_0^2}{m_0\omega^2}\overline{E}. \tag{7.21}$$

Согласно (1.11) и (1.12) электрическая восприимчивость и диэлектрическая проницаемость соотвественно равны

$$\varkappa_e = -\frac{Ne_0^2}{\varepsilon_0 m_0 \omega^2}, \tag{7.22}$$

$$\varepsilon' = 1 - \frac{Ne_0^2}{\varepsilon_0 m_0 \omega^2}. \tag{7.23}$$

Отсюда следует, что диэлектрическая проницаемость ненамагниченной плазмы — скалярная величина. Вектор электрической индукции в этом случае совпадает по направлению с вектором напряженности электрического поля и плазма является изотропной средой (см. § 1 гл. VII).

Пусть наряду с полем $\overline{E} = \overline{E}_0 \cos\omega t$ на плазму воздействует постоянное магнитное поле $\overline{H}_= = \overline{i}_z H_=$. Теперь, как только под влиянием электрического поля электрон приобретает скорость $\overline{v}$, на него начинает действовать со стороны магнитного поля сила Лоренца

$$\overline{F}_{\text{Л}} = -e_0 \mu_0 [\overline{v} \times \overline{H}_=]. \tag{7.24}$$

Из формулы (7.24) видно, что величина и направление силы Лоренца будут зависеть от взаимной ориентации векторов $\overline{v}$ и $\overline{H}_=$.

Предположим сначала, что после того, как электрону была сообщена начальная скорость $\overline{v}_0 \parallel \overline{E}$, электрическое поле исчезает. Тогда в зависимости от направления вектора $\overline{E}$ по отношению к $\overline{H}_=$ электроны будут перемещаться по различным траекториям.

Если $\overline{E} \parallel \overline{H}_=$, то согласно (7.24) сила Лоренца $F_{\text{Л}} = 0$ и частицы двигаются прямолинейно вдоль силовых линий постоянного магнитного поля $\overline{H}_=$ (как и при его отсутствии).

При $\overline{E} \perp \overline{H}_=$ сила Лоренца имеет максимальное значение

$$F_{\text{Л}} = e_0 \mu_0 v_0 H_=.$$

Теперь в любой точке траектории электрона сила $\overline{F}_{\text{Л}}$ перпендикулярна вектору скорости (рис. 7.3, *а*). Следовательно, она не производит работы и может изменять лишь направление скорости, не изменяя ее величины. Поэтому электроны будут двигаться по окружностям, плоскости которых перпендикулярны вектору $\overline{H}_=$.

Радиус окружностей можно определить из условия равенства центробежной силы и силы Лоренца:

$$\frac{m_0 v_0^2}{r} = e_0 \mu_0 v_0 H_=,$$

$$r = \frac{m_0 v_0}{e_0 \mu_0 H_=}. \qquad (7.25)$$

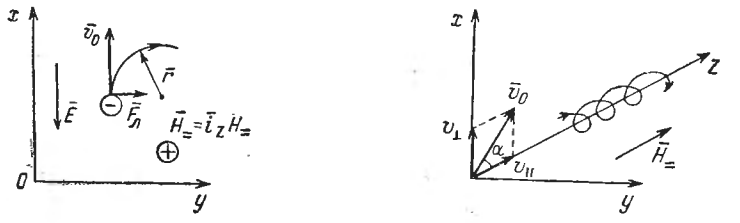
Период обращения электрона по окружности находится из очевидного соотношения $v_0 T_м = 2\pi r$. Откуда с учетом (7.25) будем иметь

$$T_м = \frac{2\pi m_0}{e_0 \mu_0 H_=}.$$

Угловая скорость вращения электрона (частота гиромагнитного резонанса) равна

$$\omega_м = \frac{2\pi}{T_м} = \frac{e_0 \mu_0 H_=}{m_0} = \Psi H_=. \qquad (7.26)$$

Если вектор $\bar{E}$ (и, следовательно, начальная скорость $\bar{v}_0$) составляет с направлением $\bar{H}_=$ некоторый угол α, то скорость $\bar{v}_0$ можно разложить на две составляющие: $\bar{v}_\perp$ и $\bar{v}_\parallel$ (рис. 7.3, *б*). Под влиянием $\bar{v}_\perp$ электрон приобретает вращательное движение. Одновременно



а) *б)*

Рис. 7.3. Виды траекторий движения свободных электронов в намагниченной плазме.

с этим он скользит вдоль силовых линий магнитного поля с постоянной скоростью $\bar{v}_\parallel$. Результирующая траектория электрона будет иметь вид винтовой линии с осью, параллельной вектору $\bar{H}_=$.

Допустим теперь, что переменное электрическое поле не исчезает после того, как электроны начали движение. Уравнение движения электрона при одновременном существовании полей $\bar{E}$ и $\bar{H}_=$ может быть получено из (7.17) путем введения в правую часть силы Лоренца:

$$m_0 \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = -e_0 \bar{E} - e_0 \mu_0 \left[\frac{d\bar{r}}{dt} \times \bar{H}_= \right]. \qquad (7.27)$$

Важно отметить, что в случае, когда $\bar{E} \parallel \bar{H}_{=}$, второе слагаемое в правой части (7.27) равно нулю, и это уравнение переходит в (7.17). Электроны совершают прямолинейное колебательное движение в направлении вектора $\bar{E}$. Все процессы протекают точно также, как и при отсутствии постоянного магнитного поля.

Если же вектор $\bar{E}$ не параллелен вектору $\bar{H}_{=}$, то траектории электронов, сохраняя элементы вращательного движения, приобретают более сложный вид, чем траектории, изображенные на рис. 7.3. Радиус-векторы $\bar{r}$ изменяются по весьма сложному закону, и вектор электрической поляризации, определяемый формулой (7.20), не будет совпадать по направлению с вектором $\bar{E}$ (так как $\bar{r} \parallel \bar{E}$). Электрическая восприимчивость и диэлектрическая проницаемость плазмы в этом случае не могут быть выражены скалярными величинами.

Таким образом, свойства намагниченной плазмы различны для полей разного направления. Иными словами, под воздействием постоянного магнитного поля плазма, как и феррит, приобретает свойства анизотропной среды.

3. Электрические параметры феррита и плазмы в постоянном магнитном поле. Уравнения Максвелла

Определим параметры намагниченных феррита и плазмы для переменного электромагнитного поля.

Феррит. Чтобы найти магнитную проницаемость намагниченного феррита, необходимо установить связь между напряженностью магнитного поля и магнитной индукцией. Это можно сделать с помощью уравнения (7.16).

Пусть на феррит наряду с постоянным магнитным полем $\bar{H}_{=} = \bar{i}_z H_{=}$ воздействует переменное поле с произвольно ориентированным вектором напряженности $\bar{H}_{к} = \dot{\bar{H}} e^{i\omega t}$. Результирующее поле выражается векторной суммой

$$\dot{\bar{H}}_{\Sigma к} = \bar{i}_z H_{=} + \dot{\bar{H}} e^{i\omega t}, \tag{7.28}$$

а уравнение для вектора магнитной поляризации согласно (7.16) принимает вид

$$\frac{d\bar{P}^{м}_{\Sigma к}}{dt} = -\Psi \left[\bar{P}^{м}_{\Sigma к} \times \left(\bar{i}_z H_{=} + \dot{\bar{H}} e^{i\omega t}\right)\right]. \tag{7.29}$$

Допустим, что феррит намагничен постоянным магнитным полем до насыщения, т. е. магнитные моменты всех атомов параллельны

между собой и направлены вдоль поля $\bar{H}_{=}$. Следовательно, в отсутствие переменного поля вектор магнитной поляризации $\bar{P}^{\text{м}}_{=}$ будет направлен так же, как и вектор $\bar{H}_{=}$:

$$\bar{P}^{\text{м}}_{=} = \bar{i}_z P^{\text{м}}_{=}.$$

Если теперь к намагниченному ферриту приложить слабое переменное поле с амплитудой

$$\left|\dot{\bar{H}}\right| \ll H_{=}, \tag{7.30}$$

то оно вызовет отклонения магнитных моментов атомов от положения равновесия в такт с приложенным полем. Это приведет к появлению переменной составляющей вектора магнитной поляризации $\dot{\bar{P}}^{\text{м}} e^{i\omega t}$. Поэтому решение уравнения (7.29) целесообразно искать в виде

$$\bar{P}^{\text{м}}_{\Sigma\text{к}} = \bar{i}_z P^{\text{м}}_{=} + \dot{\bar{P}}^{\text{м}} e^{i\omega t}. \tag{7.31}$$

Очевидно, что в силу неравенства (7.30) имеем

$$\left|\dot{\bar{P}}^{\text{м}}\right| \ll P^{\text{м}}_{=}. \tag{7.32}$$

Подставим (7.31) в (7.29):

$$\frac{d}{dt}\left(\bar{i}_z P^{\text{м}}_{=} + \dot{\bar{P}}^{\text{м}} e^{i\omega t}\right) = -\Psi\left[\left(\bar{i}_z P^{\text{м}}_{=} + \dot{\bar{P}}^{\text{м}} e^{i\omega t}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\bar{i}_z H_{=} + \dot{\bar{H}} e^{i\omega t}\right)\right]. \tag{7.33}$$

Решая это уравнение относительно переменной составляющей вектора магнитной поляризации, установим сначала связь между $\dot{\bar{P}}^{\text{м}}$ и $\dot{\bar{H}}$ на частоте ω, а затем найдем зависимость магнитной индукции от напряженности поля.

Выполняя в (7.33) дифференцирование и пренебрегая в силу (7.30), (7.32) слагаемым $\dot{\bar{P}}^{\text{м}} \times \dot{\bar{H}} e^{i2\omega t}$, получаем после сокращения на временной множитель:

$$i\omega \dot{\bar{P}}^{\text{м}} = -\Psi\left\{\left[\dot{\bar{P}}^{\text{м}} \times \bar{i}_z H_{=}\right] + \left[\bar{i}_z P^{\text{м}}_{=} \times \dot{\bar{H}}\right]\right\}. \tag{7.34}$$

Представим в (7.34) векторы $\dot{\bar{P}}^{\text{м}}$ и $\dot{\bar{H}}$ через их проекции на оси x, y, z и после вычисления векторных произведений, приравняем одноименные составляющие:

$$\left.\begin{aligned} i\omega \dot{P}^{\text{м}}_x &= -\Psi\left(\dot{P}^{\text{м}}_y H_{=} - \dot{H}_y P^{\text{м}}_{=}\right), \\ i\omega \dot{P}^{\text{м}}_y &= -\Psi\left(\dot{H}_x P^{\text{м}}_{=} - \dot{P}^{\text{м}}_x H_{=}\right), \\ i\omega \dot{P}^{\text{м}}_z &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.35}$$

Система уравнений (7.35) дает возможность определить проекции вектора $\overline{P}^{\text{м}}$. С учетом обозначений

$$\omega_{\text{м}} = \Psi H_{=},$$
$$\omega_0 = \frac{\Psi}{\mu_0} P^{\text{м}}_{=} = \gamma P^{\text{м}}_{=},$$

получим

$$\left.\begin{aligned} \dot{P}^{\text{м}}_x &= -\frac{\mu_0\omega_{\text{м}}\omega_0}{\omega^2-\omega^2_{\text{м}}}\dot{H}_x - i\frac{\mu_0\omega\omega_0}{\omega^2-\omega^2_{\text{м}}}\dot{H}_y, \\ \dot{P}^{\text{м}}_y &= i\frac{\mu_0\omega\omega_0}{\omega^2-\omega^2_{\text{м}}}\dot{H}_x - \frac{\mu_0\omega_{\text{м}}\omega_0}{\omega^2-\omega^2_{\text{м}}}\dot{H}_y. \end{aligned}\right\} \tag{7.36}$$

Комплексная амплитуда переменной составляющей магнитной индукции определяется равенством, аналогичным (4.62):

$$\dot{\overline{B}} = \dot{\overline{P}}^{\text{м}} + \mu_0\dot{\overline{H}}.$$

Из этого равенства вытекает, что:

$$\left.\begin{aligned} \dot{B}_x &= \dot{P}^{\text{м}}_x + \mu_0\dot{H}_x, \\ \dot{B}_y &= \dot{P}^{\text{м}}_y + \mu_0\dot{H}_y, \\ \dot{B}_z &= \dot{P}^{\text{м}}_z + \mu_0\dot{H}_z. \end{aligned}\right\} \tag{7.37}$$

Принимая во внимание (7.36) и группируя коэффициенты при одноименных проекциях вектора $\overline{H}$, окончательно получаем:

$$\left.\begin{aligned} \dot{B}_x &= \mu_0\left(1 - \frac{\omega_{\text{м}}\omega_0}{\omega^2-\omega^2_{\text{м}}}\right)\dot{H}_x - i\frac{\mu_0\omega\omega_0}{\omega^2-\omega^2_{\text{м}}}\dot{H}_y, \\ \dot{B}_y &= i\frac{\mu_0\omega\omega_0}{\omega^2-\omega^2_{\text{м}}}\dot{H}_x + \mu_0\left(1 - \frac{\omega_{\text{м}}\omega_0}{\omega^2-\omega^2_{\text{м}}}\right)\dot{H}_y, \\ \dot{B}_z &= \mu_0\dot{H}_z. \end{aligned}\right\} \tag{7.38}$$

Отсюда видно, что магнитная проницаемость намагниченного феррита является тензорной величиной. Сопоставление (7.38) с (7.3) дает для компонент тензора соотношения:

$$\mu_{xx} = \mu_0\left(1 - \frac{\omega_{\text{м}}\omega_0}{\omega^2-\omega^2_{\text{м}}}\right); \quad \mu_{yx} = i\mu_0\frac{\omega\omega_0}{\omega^2-\omega^2_{\text{м}}}; \quad \mu_{zx} = 0;$$

$$\mu_{xy} = -i\mu_0\frac{\omega\omega_0}{\omega^2-\omega^2_{\text{м}}}; \quad \mu_{yy} = \mu_0\left(1 - \frac{\omega_{\text{м}}\omega_0}{\omega^2-\omega^2_{\text{м}}}\right); \quad \mu_{zy} = 0; \tag{7.39}$$

$$\mu_{xz} = 0; \quad \mu_{yz} = 0; \quad \mu_{zz} = \mu_0.$$

Так как $\mu_{xx} = \mu_{yy}$, а $\mu_{xy} = -\mu_{yx}$, введем обозначения:

$$a = \mu_0 \frac{\omega\omega_0}{\omega^2 - \omega_м^2},$$

$$\mu_x = \mu_{xx} = \mu_{yy} = \mu_0 \left(1 - \frac{\omega_м\omega_0}{\omega^2 - \omega_м^2}\right). \tag{7.40}$$

С учетом этих обозначений имеем:

$$\begin{aligned} \dot{B}_x &= \mu_x \dot{H}_x - ia\dot{H}_y, \\ \dot{B}_y &= ia\dot{H}_x + \mu_x \dot{H}_y, \\ \dot{B}_z &= \mu_0 \dot{H}_z, \end{aligned} \tag{7.41}$$

или

$$\dot{\bar{B}} = \overleftrightarrow{\mu}\, \dot{\bar{H}},$$

где

$$\overleftrightarrow{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_x & -ia & 0 \\ ia & \mu_x & 0 \\ 0 & 0 & \mu_0 \end{pmatrix} \tag{7.42}$$

— тензор магнитной проницаемости.

Компоненты тензора (7.42) являются функциями постоянного магнитного поля $H_=$. Можно показать, что при изменении направления этого поля на обратное (т. е. при $\bar{H}_= = -\bar{i}_z H_=$) изменяет знак компонента a.

Так как диэлектрическая проницаемость намагниченного феррита — скалярная величина, то согласно (7.6) для намагниченной ферритовой среды, свободной от источников поля, система уравнений Максвелла в установившемся режиме имеет вид:

$$\operatorname{rot} \dot{\bar{H}} = i\omega\dot{\bar{D}},$$

$$\operatorname{rot} \dot{\bar{E}} = -i\omega\dot{\bar{B}},$$

$$\dot{\bar{D}} = \varepsilon\dot{\bar{E}}; \quad \dot{\bar{B}} = \overleftrightarrow{\mu}\, \dot{\bar{H}}.$$

В декартовой системе координат эти уравнения с учетом (7.41) запишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} = i\omega\varepsilon\dot{E}_x, && (1)\\
&\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} = i\omega\varepsilon\dot{E}_y, && (2)\\
&\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} = i\omega\varepsilon\dot{E}_z, && (3)\\
&\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} = -i\omega\left(\mu_x\dot{H}_x - ia\dot{H}_y\right), && (4)\\
&\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} = -i\omega\left(ia\dot{H}_x + \mu_x\dot{H}_y\right), && (5)\\
&\frac{\partial \dot{E}_y}{dx} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} = -i\omega\mu_0\dot{H}_z. && (6)
\end{aligned}\right\} \qquad (7.43)$$

Плазма. Для вычисления тензора диэлектрической проницаемости намагниченной плазмы установим связь между вектором электрической индукции и напряженностью электрического поля.

Пусть на плазму, находящуюся в постоянном магнитном поле,

$$\overline{H}_= = \bar{i}_z H_=, \qquad (7.44)$$

действует несовпадающее с ним по направлению электрическое поле

$$\overline{E}_к = \dot{\overline{E}}\, e^{i\omega t}. \qquad (7.45)$$

В этом случае движение каждого свободного электрона описывается уравнением (7.27). Так как радиус-вектор движущегося электрона будет изменяться в соответствии с законом изменения электрического поля, то решение уравнения (7.27) следует искать в виде

$$\bar{r}_к = \dot{\bar{r}}_m e^{i\omega t}. \qquad (7.46)$$

Подставим (7.44)—(7.46), в уравнение (7.27) и после сокращения на временной множитель получим

$$\omega^2 m_0 \dot{\bar{r}}_m = e_0\dot{\overline{E}} + i\omega e_0\mu_0 H_= \left[\dot{\bar{r}}_m \times \bar{i}_z\right]. \qquad (7.47)$$

Умножая обе части (7.47) на число электронов N в единице объема и принимая во внимание (7.20), имеем

$$-\omega^2 m_0 \dot{\overline{P}}^e = Ne_0^2\dot{\overline{E}} - i\omega e_0\mu_0 H_= \left[\dot{\overline{P}}^e \times \bar{i}_z\right], \qquad (7.48)$$

где $\dot{\overline{P}}^e = -Ne_0\dot{\bar{r}}_m$ — комплексная амплитуда вектора электрической поляризации.

Для упрощения дальнейших рассуждений разделим обе части уравнения (7.48) на $\omega^2 m_0$ и перепишем его в виде

$$-\dot{\bar{P}}^e = \varepsilon_0 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \dot{\bar{E}} - i \frac{\omega_м}{\omega} \left[\dot{\bar{P}}^e \times \bar{i}_z\right]. \tag{7.49}$$

Здесь ω_0 и $\omega_м$ определяются соотношениями:

$$\omega_0^2 = \frac{Ne_0^2}{\varepsilon_0 m_0},$$

$$\omega_м = \mu_0 \frac{e_0}{m_0} H_=. \tag{7.50}$$

Уравнение (7.49) устанавливает связь между вектором электрической поляризации и вектором напряженности электрического поля на частоте ω. Решая его, можно найти электрическую восприимчивость, а затем и диэлектрическую проницаемость намагниченной плазмы.

Представим векторы $\dot{\bar{P}}^e$ и $\dot{\bar{E}}$ через их проекции на оси прямоугольной системы координат и вычислим векторное произведение:

$$\bar{i}_x \dot{P}_x^e + \bar{i}_y \dot{P}_y^e + \bar{i}_z \dot{P}_z^e = -\varepsilon_0 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(\bar{i}_x \dot{E}_x + \bar{i}_y \dot{E}_y + \bar{i}_z \dot{E}_z\right) + \\ + i \frac{\omega_м}{\omega} \left(-\bar{i}_y \dot{P}_x^e + \bar{i}_x \dot{P}_y^e\right). \tag{7.51}$$

Приравнивая в (7.51) одноименные проекции, получим

$$\left.\begin{aligned} \dot{P}_x^e &= -\varepsilon_0 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \dot{E}_x + i \frac{\omega_м^2}{\omega} \dot{P}_y^e, \\ \dot{P}_y^e &= -\varepsilon_0 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \dot{E}_y - i \frac{\omega_м}{\omega} \dot{P}_x^e, \\ \dot{P}_z^e &= -\varepsilon_0 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \dot{E}_z. \end{aligned}\right\} \tag{7.52}$$

Система (7.52) позволяет определить проекции вектора электрической поляризации:

$$\left.\begin{aligned} \dot{P}_x^e &= -\varepsilon_0 \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_м^2} \dot{E}_x - i\varepsilon_0 \frac{\omega_м \omega_0^2}{\omega\left(\omega^2 - \omega_м^2\right)} \dot{E}_y, \\ \dot{P}_y^e &= i\varepsilon_0 \frac{\omega_м \omega_0^2}{\omega\left(\omega^2 - \omega_м^2\right)} \dot{E}_x - \varepsilon_0 \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_м^2} \dot{E}_y, \\ \dot{P}_z^e &= -\varepsilon_0 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \dot{E}_z. \end{aligned}\right\} \tag{7.53}$$

Амплитуда вектора электрической индукции согласно (1.10) определяется равенством

$$\dot{\bar{D}} = \dot{\bar{P}}^e + \varepsilon_0 \dot{\bar{E}}$$

или в проекциях на оси прямоугольной системы координат:

$$\left.\begin{aligned} \dot{D}_x &= \dot{P}_x^e + \varepsilon_0 \dot{E}_x, \\ \dot{D}_y &= \dot{P}_y^e + \varepsilon_0 \dot{E}_y, \\ \dot{D}_z &= \dot{P}_z^e + \varepsilon_0 \dot{E}_z. \end{aligned}\right\} \tag{7.54}$$

Подставляя значения $\dot{P}_x^e$, $\dot{P}_y^e$, $\dot{P}_z^e$ из (7.53) в (7.54) и группируя коэффициенты при одноименных проекциях вектора $\dot{\bar{E}}$, окончательно получаем:

$$\left.\begin{aligned} \dot{D}_x &= \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_м^2}\right) \dot{E}_x - i\varepsilon_0 \frac{\omega_м \omega_0^2}{\omega\left(\omega^2 - \omega_м^2\right)} \dot{E}_y, \\ \dot{D}_y &= i\varepsilon_0 \frac{\omega_м \omega_0^2}{\omega\left(\omega^2 - \omega_м^2\right)} \dot{E}_x + \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_м^2}\right) \dot{E}_y, \\ \dot{D}_z &= \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) \dot{E}_z. \end{aligned}\right\} \tag{7.55}$$

Отсюда видно, что каждая из проекций $\dot{D}_x$ и $\dot{D}_y$ определяется двумя проекциями вектора напряженности поля. Следовательно, диэлектрическая проницаемость является величиной тензорной. Сопоставляя (7.55) с общими выражениями (7.3), определим компоненты тензора диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_м^2}\right); \quad \varepsilon_{yx} = i\varepsilon_0 \frac{\omega_м \omega_0^2}{\omega\left(\omega^2 - \omega_м^2\right)}; \quad \varepsilon_{zx} = 0;$$

$$\varepsilon_{xy} = -i\varepsilon_0 \frac{\omega_м \omega_0^2}{\omega\left(\omega^2 - \omega_м^2\right)}; \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_м^2}\right); \quad \varepsilon_{zy} = 0;$$

$$\varepsilon_{xz} = 0; \qquad \varepsilon_{yz} = 0; \qquad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right). \tag{7.56}$$

Вводя обозначения

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_0\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_м^2}\right), \\ b &= \varepsilon_0 \frac{\omega_м\, \omega_0^2}{\omega\left(\omega^2 - \omega_м^2\right)}, \\ \varepsilon_z &= \varepsilon_{zz} = \varepsilon_0\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right), \end{aligned}\right\} \tag{7.57}$$

будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} \dot{D}_x &= \varepsilon_x \dot{E}_x - ib\dot{E}_y, \\ \dot{D}_y &= ib\dot{E}_x + \varepsilon_x \dot{E}_y, \\ \dot{D}_z &= \varepsilon_z \dot{E}_z, \end{aligned}\right\} \tag{7.58}$$

или в векторной форме

$$\dot{\overrightarrow{D}} = \overleftrightarrow{\varepsilon}\,\dot{\overrightarrow{E}},$$

где $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ — тензор диэлектрической проницаемости:

$$\overleftrightarrow{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & -ib & 0 \\ ib & \varepsilon_x & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}. \tag{7.59}$$

Компоненты тензора (7.59) зависят от величины постоянного магнитного поля. При изменении направления постоянного поля $\overrightarrow{H}_=$ на обратное изменяется знак у компоненты b.

Магнитная проницаемость намагниченной плазмы является скалярной величиной. Поэтому с учетом (7.7) система уравнений Максвелла для намагниченной плазмы, свободной от источников поля, может быть записана так:

$$\operatorname{rot}\dot{\overrightarrow{H}} = i\omega\,\dot{\overrightarrow{D}},$$

$$\operatorname{rot}\dot{\overrightarrow{E}} = -i\omega\dot{\overrightarrow{B}},$$

$$\dot{\overrightarrow{D}} = \overleftrightarrow{\varepsilon}\,\dot{\overrightarrow{E}}, \quad \dot{\overrightarrow{B}} = \mu\dot{\overrightarrow{H}}.$$

Принимая во внимание (7.58), выразим эти уравнения в декартовой системе координат:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y}-\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z}=i\omega\left(\varepsilon_x \dot{E}_x-ib\dot{E}_y\right), && (1)\\
&\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z}-\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x}=i\omega\left(ib\dot{E}_x+\varepsilon_x \dot{E}_y\right), && (2)\\
&\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x}-\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y}=i\omega\varepsilon_z \dot{E}_z, && (3)\\
&\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y}-\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z}=-i\omega\mu\dot{H}_x, && (4)\\
&\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z}-\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x}=-i\omega\mu\dot{H}_y, && (5)\\
&\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x}-\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y}=-i\omega\mu\dot{H}_z. && (6)
\end{aligned}\right\} \qquad (7.60)$$

Интересно отметить, что система (7.60) может быть получена из (7.43) путем простой перестановки:

$$\left.\begin{aligned}
&E \rightleftarrows H, \qquad && a \rightleftarrows -b,\\
&\varepsilon \rightleftarrows -\mu, \qquad && \mu_x \rightleftarrows -\varepsilon_x,\\
& && \mu_0 \rightleftarrows -\varepsilon_z.
\end{aligned}\right\} \qquad (7.61)$$

Это свойство уравнений будет в дальнейшем использовано для распространения на плазму результатов расчета электромагнитного поля в феррите.

4. Продольное распространение электромагнитных волн в гиротропных средах. Эффект Фарадея

Феррит. Пусть плоская электромагнитная волна распространяется в направлении постоянного магнитного поля $\bar{H}_= = \bar{i}_z H_=$ (рис. 7.4). Так как напряженность поля вдоль координат x и y не изменяется, то, полагая в (7.43),

$$\frac{\partial}{dx}=\frac{\partial}{\partial y}\equiv 0,$$

имеем

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} = -i\omega\varepsilon\dot{E}_x,\\
&\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} = i\omega\varepsilon\dot{E}_y,\\
&\dot{E}_z = 0,\\
&\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} = i\omega\,(\mu_x\dot{H}_x - ia\dot{H}_y),\\
&\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} = -i\omega\,(ia\dot{H}_x + \mu_x\dot{H}_y),\\
&\dot{H}_z = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (7.62)$$

Третье и шестое уравнения системы (7.62) говорят о том, что векторы электромагнитного поля, как и в изотропной среде, продольных составляющих не имеют.

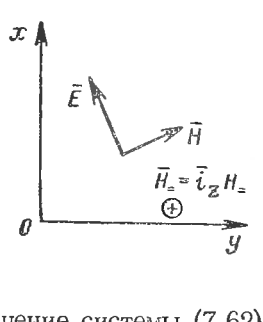


Рис. 7.4. Продольное распространение электромагнитной волны в намагниченном феррите.

Решение системы (7.62) будем искать в виде

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{H}_x = \dot{H}_{0x}\,e^{-ikz},\\
&\dot{H}_y = \dot{H}_{0y}\,e^{-ikz},\\
&\dot{E}_x = \dot{E}_{0x}\,e^{-ikz} = Z_{xy}\,\dot{H}_{0y}\,e^{-ikz},\\
&\dot{E}_y = \dot{E}_{0y}\,e^{-ikz} = -Z_{yx}\,\dot{H}_{0x}\,e^{-ikz}.
\end{aligned}\right\} \qquad (7.63)$$

Здесь k — волновое число, а Z_{xy} и Z_{yx} — волновые сопротивления. Для изотропной среды эти параметры достаточно просто выражаются через ее проницаемости ε и μ. Так как магнитная проницаемость намагниченного феррита является тензором, то в данном случае k, Z_{xy} и Z_{yx} следует считать неизвестными величинами.

Подставляя (7.63) в (7.62), получим:

$$\left.\begin{aligned} k &= \omega\varepsilon Z_{xy}, \\ k &= \omega\varepsilon Z_{yx}, \\ k\dot{H}_{0x} Z_{yx} &= \omega\left(\mu_x \dot{H}_{0x} - ia\dot{H}_{0y}\right), \\ k\dot{H}_{0y} Z_{xy} &= \omega\left(ia\dot{H}_{0x} + \mu_x \dot{H}_{0y}\right). \end{aligned}\right\} \tag{7.64}$$

Из первого и второго уравнений системы (7.64) вытекает, что

$$Z_{xy} = Z_{yx} = \frac{k}{\omega\varepsilon}. \tag{7.65}$$

Исключая из третьего и четвертого уравнений неизвестные Z_{xy} и Z_{yx}, находим:

$$\left.\begin{aligned} (k^2 - \omega^2\varepsilon\mu_x)\,\dot{H}_{0x} &= -i\omega^2\varepsilon a\dot{H}_{0y}, \\ (k^2 - \omega^2\varepsilon\mu_x)\,\dot{H}_{0y} &= i\omega^2\varepsilon a\dot{H}_{0x}. \end{aligned}\right\} \tag{7.66}$$

Решение системы (7.66) дает

$$k^2 - \omega^2\varepsilon\mu_x = \pm\,\omega^2\varepsilon a,$$

откуда волновое число

$$k_{1,2} = \omega\sqrt{\varepsilon(\mu_x \pm a)}. \tag{7.67}$$

Внося поочередно k_1 и k_2 в любое из уравнений (7.66), получаем:

$$\left.\begin{aligned} \dot{H}_{0y1} &= i\dot{H}_{0x1}, \\ \dot{H}_{0y2} &= -i\dot{H}_{0x2}. \end{aligned}\right\} \tag{7.68}$$

Сопоставляя (7.67) и (7.65), имеем

$$Z_{xy} = Z_{yx} = Z_{1,2} = \sqrt{\frac{\mu_x \pm a}{\varepsilon}}. \tag{7.69}$$

Таким образом, мы нашли неизвестные волновое число и волновое сопротивление феррита. Вводя k_1 и k_2 в (7.63) и принимая во внимание (7.68) и (7.69), определяем компоненты векторов поля:

$$\dot{H}_{x1} = \dot{H}_{01} e^{-ik_1 z}, \qquad \dot{H}_{x2} = \dot{H}_{02} e^{-ik_2 z};$$

$$\dot{H}_{y1} = \dot{H}_{01} e^{-i\left(k_1 z - \frac{\pi}{2}\right)}, \qquad \dot{H}_{y2} = \dot{H}_{02} e^{-i\left(k_2 z + \frac{\pi}{2}\right)};$$

$$\dot{E}_{x1} = Z_1 \dot{H}_{01} e^{-i\left(k_1 z - \frac{\pi}{2}\right)}, \qquad \dot{E}_{x2} = Z_2 \dot{H}_{02} e^{-i\left(k_2 z + \frac{\pi}{2}\right)};$$

$$\dot{E}_{y1} = -Z_1 \dot{H}_{01} e^{-ik_1 z}, \qquad \dot{E}_{y2} = -Z_2 \dot{H}_{02} e^{-ik_2 z}$$

или для мгновенных значений*):

$$\left.\begin{aligned} H_{x1} &= H_{01}\cos(\omega t - k_1 z),\\ H_{y1} &= -H_{01}\sin(\omega t - k_1 z),\\ E_{x1} &= -Z_1 H_{01}\sin(\omega t - k_1 z),\\ E_{y1} &= -Z_1 H_{01}\cos(\omega t - k_1 z), \end{aligned}\right\} \tag{7.70а}$$

$$\left.\begin{aligned} H_{x2} &= H_{02}\cos(\omega t - k_2 z);\\ H_{y2} &= H_{02}\sin(\omega t - k_2 z);\\ E_{x2} &= Z_2 H_{02}\sin(\omega t - k_2 z);\\ E_{y2} &= -Z_2 H_{02}\cos(\omega t - k_2 z). \end{aligned}\right\} \tag{7.70б}$$

Выражение (7.70а) описывает волну круговой поляризации левого направления вращения, а (7.70б) — волну правого направления вращения. Отсюда видно, что решение уравнений поля для продольно намагниченного феррита представляется в виде совокупности волн поляризованных по кругу в противоположных направлениях. Фазовые скорости распространения этих волн различны. Так, для волны левого направления вращения

$$v_1 = \frac{\omega}{k_1} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\mu_x + a)}}, \tag{7.71а}$$

в то время как для волны правого направления вращения

$$v_2 = \frac{\omega}{k_2} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\mu_x - a)}}. \tag{7.71б}$$

Рассмотрим случай, когда в феррите существуют одновременно обе описанные волны. При этом положим $H_{01} = H_{02} = H_0$ и вычислим напряженность результирующего поля:

$$\left.\begin{aligned} H_x &= H_{x1} + H_{x2} = H_0[\cos(\omega t - k_1 z) + \cos(\omega t - k_2 z)] =\\ &= 2H_0\cos\frac{k_1 - k_2}{2} z\cos\left(\omega t - \frac{k_1 + k_2}{2} z\right),\\ H_y &= H_{y1} + H_{y2} = H_0[-\sin(\omega t - k_1 z) + \sin(\omega t - k_2 z)] =\\ &= 2H_0\sin\frac{k_1 - k_2}{2} z\cos\left(\omega t - \frac{k_1 + k_2}{2} z\right). \end{aligned}\right\} \tag{7.72}$$

Согласно (7.72) проекции H_x и H_y изменяются в фазе. Отсюда следует, что магнитное поле результирующей волны является линейно-поляризованным. Его напряженность

$$H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2} = 2H_0\cos\left(\omega t - \frac{k_1 + k_2}{2} z\right).$$

*) Полагаем $\dot{H}_{01} = H_{01}$; $\dot{H}_{02} = H_{02}$.

Угол наклона вектора $\overline{H}$ в любой точке оси z определяется из очевидного равенства (рис. 7.5)

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{H_y}{H_x} = \operatorname{tg}\frac{k_1 - k_2}{2}\, z,$$

откуда

$$\theta = \frac{k_1 - k_2}{2}\, z. \tag{7.73}$$

Таким образом, угол наклона вектора $\overline{H}$ суммарного поля зависит от координаты z. На каждую единицу длины пути вектор $\overline{H}$ поворачивается по часовой стрелке на угол

$$\theta' = \frac{k_1 - k_2}{2} = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon}}{2}\left(\sqrt{\mu_x + a} - \sqrt{\mu_x - a}\right). \tag{7.74}$$

Электрическое поле суммарной волны в отличие от магнитного поля не будет линейно-поляризованным. В самом деле, амплитуда вектора напряженности электрического поля волны круговой поляризации левого направления вращения равна $E_{01} = Z_1 H_0$, а для

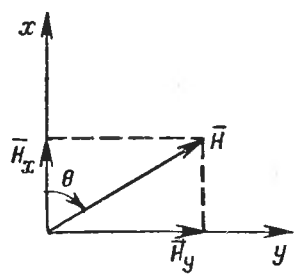


Рис. 7.5. К расчету угла поворота вектора $\overline{H}$ при распространении электромагнитной волны в продольно-намагниченном феррите.

волны правого направления вращения $E_{02} = Z_2 H_0$. Так как $Z_1 \neq Z_2$, то амплитуды напряженности электрического поля этих волн будут различны. Сложение двух волн круговой поляризации с разными амплитудами дает эллиптически поляризованную волну. Можно показать, что при распространении в продольно-намагниченном феррите эллипс поляризации электрического поля вращается точно так же, как и вектор напряженности магнитного поля. Угол поворота большой оси эллипса по отношению к отрицательному направлению оси y определяется формулой (7.73).

Описанное явление получило наименование эффекта Фарадея. Величина θ', характеризующая угол поворота вектора $\overline{H}$ и эллипса поляризации электрического поля на единицу длины пути, называется *постоянной Фарадея*. Она зависит от свойств феррита, величины подмагничивающего поля и частоты. Среды, в которых проявляется эффект Фарадея, носят название *гиротропных (вращающих) сред*.

При изменении направления постоянного магнитного поля на противоположное изменяется знак компоненты a и постоянной Фарадея. Вращение векторов поля в этом случае будет совершаться против часовой стрелки (рис. 7.6). Поэтому поле в гиротропной среде не подчиняется принципу взаимности.

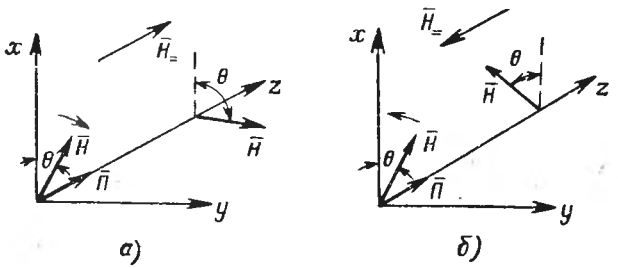


Рис. 7.6. К определению направления вращения вектора $\bar{H}$ при распространении электромагнитной волны в продольно-намагниченном феррите:
а — направление распространения совпадает с направлением $\bar{H}_0$; *б* — направление распространения противоположно направлению поля $\bar{H}_0$.

При продольном распространении одна из двух волн круговой поляризации может испытывать резонансное поглощение. В самом деле, из (7.40), (7.67) следует, что волновые числа в феррите без потерь равны

$$k_1 = \frac{\omega}{v_1} = \omega \sqrt{\varepsilon\mu_0 \left(1 + \frac{\omega_0}{\omega_м + \omega}\right)},$$

$$k_2 = \frac{\omega}{v_2} = \omega \sqrt{\varepsilon\mu_0 \left(1 + \frac{\omega_0}{\omega_м - \omega}\right)}.$$

Отсюда видно, что на частоте $\omega = \omega_м$ волновое число для волны правого направления вращения становится бесконечно большим, т. е. имеет место резонанс. Эта волна распространяться не может ($v_2 = 0$). Практически в среде всегда имеются потери и поэтому при резонансе волна правого направления вращения претерпевает сильное поглощение*). Если изменить направление постоянного магнитного поля на противоположное ($\bar{H}_= = -\bar{i}_z H_=$), то изменяет знак компонента a и резонансное поглощение будет испытывать волна левого направления вращения [см. (7.67)].

---

*) При учете потерь волновые числа становятся комплексными величинами. Мнимая часть числа k_2, характеризующая затухание волны правого направления вращения, в окрестностях резонанса значительно возрастает.

Явление продольного ферромагнитного резонанса, наряду с эффектом Фарадея находит широкое применение на практике (например, для создания волноводных вентильных устройств).

Плазма. Пусть теперь плоская волна распространяется вдоль оси z в плазме, намагниченной постоянным магнитным полем $\overline{H}_{=} = \overline{i}_z H_{=}$.

Полагая в (7.60) $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \equiv 0$, получаем

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} &= i\omega\,(\varepsilon_x \dot{E}_x - ib\dot{E}_y), \\ \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} &= i\omega\,(ib\,\dot{E}_x + \varepsilon_x \dot{E}_y), \\ \dot{E}_z &= 0, \\ \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} &= i\omega\mu\dot{H}_x, \\ \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} &= -i\omega\mu\dot{H}_y, \\ \dot{H}_z &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (7.75)$$

Поле в данном случае имеет поперечный характер ($\dot{E}_z = \dot{H}_z = 0$). Решение системы (7.75) будем по-прежнему искать в виде (7.63). Поступая точно так же, как при решении системы уравнений (7.62), получаем:

$$\left.\begin{aligned} k\dot{H}_{0y} &= \omega\,(\varepsilon_x \dot{E}_{0x} - ib\dot{E}_{0y}), \\ k\dot{H}_{0x} &= -\omega\,(ib\,\dot{E}_{0x} + \varepsilon_x \dot{E}_{0y}), \\ k\dot{E}_{0y} &= -\omega\mu\,\dot{H}_{0x}, \\ k\dot{E}_{0x} &= \omega\mu\,\dot{H}_{0y}. \end{aligned}\right\} \qquad (7.76)$$

После исключения из первых двух уравнений $\dot{H}_{0y}$ и $\dot{H}_{0x}$ имеем:

$$\left.\begin{aligned} (k^2 - \omega^2\mu\varepsilon_x)\,\dot{E}_{0x} &= -i\omega^2\mu b\,\dot{E}_{0y}, \\ (k^2 - \omega^2\mu\varepsilon_x)\,\dot{E}_{0y} &= i\omega^2\mu b\,\dot{E}_{0x}, \end{aligned}\right\} \qquad (7.77)$$

откуда волновое число

$$k_{1,2} = \omega\sqrt{\mu\,(\varepsilon_x \pm b)}. \qquad (7.78)$$

Подставляя $k_{1,2}$ в одно из уравнений системы (7.77), находим:

$$\dot{E}_{0y1} = +i\dot{E}_{0x1}; \quad \dot{E}_{0y2} = -i\dot{E}_{0x2}. \qquad (7.79)$$

Сопоставляя (7.78) и (7.79) с (7.67) и (7.68), мы видим, что, как и в продольно-намагниченном феррите, в плазме существуют волны круговой поляризации с противоположным направлением вращения векторов поля. Фазовые скорости волн левого и правого направлений вращения соответственно равны:

$$v_1 = \frac{\omega}{k_1} = \frac{1}{\sqrt{\mu\,(\varepsilon_x + b)}}, \tag{7.80а}$$

$$v_2 = \frac{\omega}{k_2} = \frac{1}{\sqrt{\mu\,(\varepsilon_x - b)}}. \tag{7.80б}$$

Записывая уравнение для составляющих вектора напряженности электрического поля в виде (7.70а) и (7.70б) и определяя составляющие результирующего поля [см. (7.72)], находим угол поворота вектора $\overline{E}$ (относительно оси x) и постоянную Фарадея:

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \frac{k_1 - k_2}{2}\, z, \\ \theta' &= \frac{k_1 - k_2}{2} = \frac{\omega\sqrt{\mu}}{2}\left(\sqrt{\varepsilon_x + b} - \sqrt{\varepsilon_x - b}\right). \end{aligned}\right\} \tag{7.81}$$

Таким образом, продольное распространение электромагнитной волны в намагниченной плазме сопровождается поворотом вектора напряженности электрического поля (рис. 7.7).

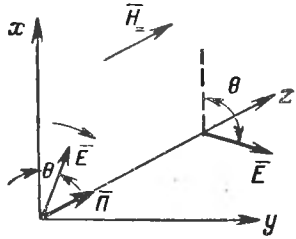


Рис. 7.7. К определению направления вращения вектора $\overline{E}$ при распространении электромагнитной волны в продольно-намагниченной плазме.

Нетрудно заметить, что выражения (7.78), (7.79) и др. можно было бы получить из (7.67) и (7.68) путем перестановки типа (7.61).

Согласно (7.76) волновое сопротивление плазмы

$$Z_{1,2} = \frac{\dot{E}_{0x}}{\dot{H}_{0y}} = -\frac{\dot{E}_{0y}}{\dot{H}_{0x}} = \frac{\omega\mu}{k_{1,2}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_x \pm b}}. \tag{7.82}$$

Из (7.82) мы видим, что оно различно для волн круговой поляризации левого и правого вращения. Поэтому амплитуды напряженности магнитного поля этих волн различны. Стало быть, магнитное поле результирующей волны будет поляризовано по эллипсу (сравни с поляризацией электрического поля в феррите). Угол поворота большой оси эллипса, отсчитываемый от координатной оси y,

определится формулой (7.81). Таким образом, при продольном распространении электромагнитных волн в плазме мы также наблюдаем эффект Фарадея.

Подводя итог, можно отметить, что процессы в продольно-намагниченных феррите и плазме в значительной мере аналогичны. Разница между ними состоит лишь в том, что векторы $\overline{E}$ и $\overline{H}$ меняются местами.

В заключение преобразуем формулу (7.81) к виду, наиболее часто встречающемуся в литературе. Для этого введем коэффициенты преломления

$$n_{1,2} = \frac{k_{1,2}}{k_0} = \frac{ck_{1,2}}{\omega} = \frac{k_{1,2}}{\omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}. \tag{7.83}$$

Подставляя сюда значение $k_{1,2}$ и учитывая (7.57), получаем

$$n_{1,2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_x \pm b}{\varepsilon_0}} = \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega(\omega \pm \omega_м)}}. \tag{7.84}$$

Индекс «1» и положительный знак в этой формуле относятся к волне круговой поляризации левого направления вращения, а индекс «2» и отрицательный знак — к волне правого направления вращения *).

С учетом (7.83) соотношение (7.81) примет вид

$$0 = \frac{\omega}{2c}(n_1 - n_2) z. \tag{7.85}$$

5. Поперечное распространение электромагнитных волн в гиротропных средах

Феррит. Пусть постоянное магнитное поле $\overline{H}_=$, как и раньше, направлено вдоль оси z, а электромагнитная волна распространяется в направлении оси x (поперечное распространение).

Полагая в (7.43) $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \equiv 0$, получаем:

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_x &= 0, & -i\omega(\mu_x \dot{H}_x - ia\dot{H}_y) &= 0, \\ -\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} &= i\omega\varepsilon \dot{E}_y, & \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} &= i\omega(ia\dot{H}_x + \mu_x \dot{H}_y), \\ \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} &= i\omega\varepsilon \dot{E}_z, & \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} &= -i\omega\mu_0 \dot{H}_z. \end{aligned}\right\} \tag{7.86}$$

*) Напомним читателю, что направление распространения совпадает с направлением поля $\overline{H}_= = \overline{i}_z H_=$.

Будем искать решение системы (7.86) в виде:

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_x &= \dot{E}_{0x}\,e^{-ikx}; \quad \dot{E}_y = \dot{E}_{0y}\,e^{-ikx}; \quad \dot{E}_z = \dot{E}_{0z}\,e^{-ikx}; \\ \dot{H}_x &= \dot{H}_{0x}\,e^{-ikx}; \quad \dot{H}_y = \dot{H}_{0y}\,e^{-ikx}; \quad \dot{H}_z = \dot{H}_{0z}\,e^{-ikx}, \end{aligned}\right\} \qquad (7.87)$$

где k — неизвестное волновое число.

После подстановки (7.87) в (7.86) имеем систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_{0x} &= 0, \quad (1) & \mu_x \dot{H}_{0x} &= ia\dot{H}_{0y}, \quad (4) \\ k\dot{H}_{0z} &= \omega\varepsilon\dot{E}_{0y}, \quad (2) & -k\dot{E}_{0z} &= \omega\left(ia\dot{H}_{0x} + \mu_x\dot{H}_{0y}\right), \quad (5) \\ k\dot{H}_{0y} &= -\omega\varepsilon\dot{E}_{0z}, \quad (3) & k\dot{E}_{0y} &= \omega\mu_0\dot{H}_{0z}. \quad (6) \end{aligned}\right\} \qquad (7.88)$$

Нетрудно заметить, что составляющие $\dot{E}_{0y}$ и $\dot{H}_{0z}$ входят только во второе и шестое уравнения, а составляющие $\dot{H}_{0x}$, $\dot{H}_{0y}$ и $\dot{E}_{0z}$ — в третье, четвертое и пятое уравнения. Поэтому система (7.88) распадается на две независимые системы уравнений. Рассмотрим их по отдельности.

Решая совместно уравнения

$$\left.\begin{aligned} k\dot{H}_{0z} &= \omega\varepsilon\dot{E}_{0y}, \\ k\dot{E}_{0y} &= \omega\mu_0\dot{H}_{0z}, \end{aligned}\right\} \qquad (7.89)$$

и обозначая $k = k_{об}$, находим волновое число

$$k_{об} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu_0}. \qquad (7.90)$$

Компоненты векторов поля согласно (7.87) имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_y &= \dot{E}_{0y}\,e^{-ik_{об}x}, \\ \dot{H}_z &= \dot{H}_{0z}\,e^{-ik_{об}x}. \end{aligned}\right\} \qquad (7.91)$$

Фазовая скорость и волновое сопротивление соответственно равны:

$$v_{об} = \frac{\omega}{k_{об}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu_0}}, \qquad (7.92)$$

$$Z_{об} = \frac{\dot{E}_{0y}}{\dot{H}_{0z}} = \frac{k_{об}}{\omega\varepsilon} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}. \qquad (7.93)$$

Таким образом, волна, описываемая уравнениями (7.89), ничем не отличается от обычной плоской волны в изотропной среде с параметрами ε, μ_0. Поэтому она называется о б ы к н о в е н н о й волной.

По-иному ведет себя волна, описываемая системой уравнений:

$$k\dot{H}_{0y} = -\omega\varepsilon\dot{E}_{0z},$$
$$\mu_x \dot{H}_{0x} = ia\dot{H}_{0y}, \qquad (7.94)$$
$$k\dot{E}_{0z} = -\omega\left(ia\dot{H}_{0x} + \mu_x \dot{H}_{0y}\right).$$

В отличие от обыкновенной эта волна имеет продольную составляющую магнитного поля. Как вытекает из второго уравнения системы (7.94), продольная составляющая $\dot{H}_x$ сдвинута по фазе на $\pi/2$ относительно поперечной составляющей $\dot{H}_y$. Следовательно, вектор

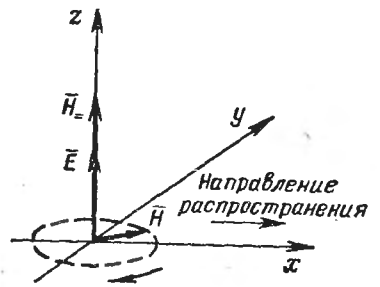


Рис. 7.8. Поляризационная структура необыкновенной волны в поперечно-намагниченном феррите.

напряженности магнитного поля вращается в плоскости $x0y$, описывая своим концом эллипс (рис. 7.8). Подобная волна получила наименование необыкновенной.

Исключая из третьего уравнения системы (7.94), составляющие $\dot{H}_{0x}$ и $\dot{H}_{0y}$, определим волновое число и фазовую скорость необыкновенной волны:

$$k_{\text{но}} = \omega\sqrt{\varepsilon\frac{\mu_x^2 - a^2}{\mu_x}}, \qquad (7.95)$$

$$v_{\text{но}} = \frac{\omega}{k_{\text{но}}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\dfrac{\mu_x^2 - a^2}{\mu_x}}}. \qquad (7.96)$$

В отличие от $v_{\text{об}}$ фазовая скорость необыкновенной волны зависит от напряженности постоянного магнитного поля. При $\mu_x = 0$ необыкновенная волна распространяться не будет ($v_{\text{но}} = 0$). В этом случае наблюдается гиромагнитный резонанс. Выражая μ_x по формуле (7.40), находим частоту поперечного гиромагнитного резонанса

$$\omega = \omega_{\text{п}} = \sqrt{\omega_{\text{м}}(\omega_{\text{м}} + \omega_0)}. \qquad (7.97)$$

При наличии потерь необыкновенная волна испытывает в окрестностях частоты $\omega_{\text{п}}$ резонансное поглощение.

Из (7.94) волновое сопротивление для необыкновенной волны:

$$Z_{\text{но}} = -\frac{E_{0z}}{H_{0y}} = \frac{k_{\text{но}}}{\omega\varepsilon} = \sqrt{\frac{\mu_x^2 - a^2}{\varepsilon\mu_x}}. \qquad (7.98)$$

Согласно (7.87), (7.94), (7.95) составляющие векторов поля:

$$\dot{H}_y = \dot{H}_{0y}\, e^{-ik_{\text{но}}\, x},$$
$$\dot{H}_x = \dot{H}_{0x}\, e^{-ik_{\text{но}}\, x} = i\frac{a}{\mu_x}\dot{H}_{0y}\, e^{-ik_{\text{но}}\, x}, \qquad (7.99)$$
$$\dot{E}_z = \dot{E}_{0z}\, e^{-ik_{\text{но}}\, x} = -Z_{\text{но}}\dot{H}_{0y}\, e^{-ik_{\text{но}}\, x}.$$

Предположим, что мы имеем волну произвольной поляризации, бегущую вдоль оси x (перпендикулярно $\bar{H}_=$). Такую волну можно представить в виде совокупности обыкновенной ($\bar{E} \perp \bar{H}_=$) и необыкновенной ($\bar{E} \parallel \bar{H}_=$) волн (рис. 7.9).

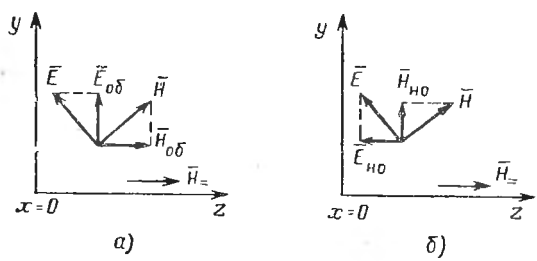


Рис. 7.9. Представление волны произвольной поляризации в виде обыкновенной и необыкновенной волн:
а — обыкновенная волна; *б* — необыкновенная волна.

Вследствие неравенства фазовых скоростей обыкновенная и необыкновенная волны в разных точках оси x будут иметь различный фазовый сдвиг. В самом деле, с учетом (7.91), (7.99) отношение напряженностей электрического поля обыкновенной и необыкновенной волн равно:

$$\frac{\dot{E}_{\text{об}}}{\dot{E}_{\text{но}}} = \frac{\dot{E}_y}{\dot{E}_z} = \frac{\dot{E}_{0y}}{\dot{E}_{0z}}\, e^{i(k_{\text{но}} - k_{\text{об}})\, x}. \qquad (7.100)$$

Если в показателе степени величина $\psi = (k_{\text{но}} - k_{\text{об}})x = n\pi$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, то E_y и E_z совпадают по фазе *). В точках оси x, удовлетворяющих этому равенству, электрическое поле суммарной волны имеет линейную поляризацию. Во всех остальных точках

*) Считаем, что начальные фазы $\dot{E}_{0x}$ и $\dot{E}_{0y}$ равны, т. е. при $x = 0$ волна имеет линейную поляризацию.

оси x эти составляющие сдвинуты по фазе на некоторый угол, и суммарное электрическое поле имеет эллиптическую поляризацию. При равенстве амплитуд $E_{0z} = E_{0y}$*) в точках, где $(k_{по} - k_{об})x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, результирующее поле имеет круговую поляризацию.

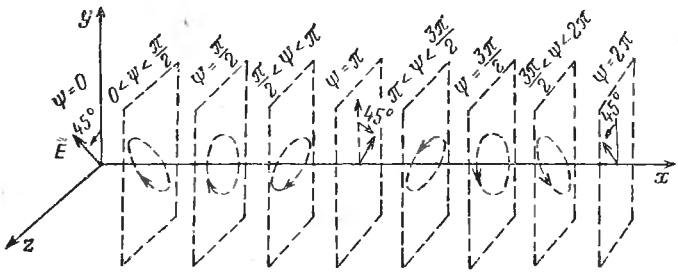


Рис. 7.10. Поляризационная структура поля в различных точках оси Ox при поперечном распространении.

Все изложенное иллюстрируется рис. 7.10. Аналогичный рисунок можно привести и для поперечной составляющей напряженности магнитного поля суммарной волны (см. выражения для $\dot{H}_z$ и $\dot{H}_y$ в (7.91), (7.99)).

Плазма. Распространение электромагнитных волн в поперечно-намагниченной плазме (рис. 7.11) сопровождается такими же явлениями, которые мы наблюдали в поперечно-намагниченном феррите. Различие состоит в том, что все сказанное о магнитном поле волны в феррите применимо к электрическому полю волны в плазме и наоборот.

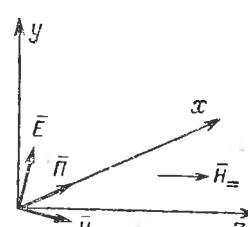


Рис. 7.11. К поперечному распространению электромагнитной волны в намагниченной плазме.

Волна в плазме, у которой вектор $\bar{H} \parallel \bar{H}_=$, является необыкновенной волной. Эта волна имеет продольную составляющую вектора $\bar{E}$. Поэтому электрическое поле необыкновенной волны поляризовано по эллипсу, лежащему в плоскости xOy.

Фазовую скорость необыкновенной волны можно определить из соотношения (7.96) путем перестановки (7.61):

$$v_{но} = \frac{\omega}{k_{но}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\dfrac{\varepsilon_x^2 - b^2}{\varepsilon_x}}}. \qquad (7.101)$$

*) Это имеет место, когда в точке $x = 0$ вектор $\bar{E}$ исходной волны направлен под углом 45° по отношению к оси y.

Волна, у которой вектор напряженности магнитного поля перпендикулярен $\overline{H}_{=}$, называется обыкновенной. Она имеет ту же фазовую скорость, как и волна в плазме без подмагничивания:

$$v_{об} = \frac{\omega}{k_{об}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_z}}. \qquad (7.102)$$

Показатели преломления необыкновенной и обыкновенной волн соответственно равны:

$$n_{но} = \frac{c}{v_{но}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_x^2 - b^2}{\varepsilon_0 \varepsilon_x}} = \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \dfrac{\omega^2 \omega_м^2}{\omega^2 - \omega_0^2}}}; \qquad (7.103)$$

$$n_{об} = \frac{c}{v_{об}} \sqrt{\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_0}} = \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}. \qquad (7.104)$$

Если одновременно существуют обыкновенная и необыкновенная волны, то угол сдвига фаз между поперечными составляющими вектора $\overline{E}$ в любой точке оси x определяется формулой

$$\psi = (n_{но} - n_{об})\, x.$$

Отсюда суммарное поле в различных сечениях $x = \text{const}$ будет иметь линейную, эллиптическую или круговую (при равенстве амплитуд обыкновенной и необыкновенной волн) поляризацию.

ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

1. Введение

Процесс передачи электромагнитного поля от источника в окружающее его пространство называется *излучением электромагнитных волн*.

Основная задача теории излучения заключается в том, чтобы по известным источникам найти создаваемое ими электромагнитное поле.

Прежде чем перейти к рассмотрению этой задачи, необходимо более отчетливо представить, каким образом целесообразно задавать источники поля.

Выше мы уже говорили, что электромагнитное поле возбуждается в пространстве сторонними токами и зарядами излучающей системы — антенны. И те и другие появляются в антенне под действием высокочастотных электромагнитных колебаний, подводимых от специального генератора при помощи линии передачи или фидера. (Последнее слово происходит от английского слова «to feed» — питать.)

Стало быть, источником электромагнитного поля, строго говоря, являются все токи и заряды сложной системы, в которую входят: генератор электромагнитных колебаний, линия передачи и, наконец, излучающий элемент. Однако в действительности генератор и фидер непосредственного участия в излучении электромагнитных волн не принимают. Как правило, генератор и фидер хорошо экранированы, поэтому токи и заряды на их внешних поверхностях оказывают весьма незначительное влияние на величину и структуру электромагнитного поля, излучаемого антенной *). А отсюда сле-

*) В открытом двухпроводном фидере поле, конечно, не экранировано. Однако токи в проводах фидера текут в противоположных направлениях, а заряды имеют соответственно противоположные знаки. Если расстояние между этими проводами значительно меньше длины волны, то излучение электромагнитных волн, которое при определенных условиях могло бы возникнуть, оказывается незначительным.

дует, что для упрощения анализа вместо генератора и линии передачи можно ввести какое-то эквивалентное им по действию стороннее поле, возбуждающее антенну.

Обозначим вектор напряженности этого поля, как обычно, $\overline{E}_{ст}$. Несомненно, что $\overline{E}_{ст}$ в данном случае имеет чисто электромагнитное происхождение, ибо она является напряженностью поля от той части системы, которую мы исключили из анализа.

Рассмотрим в качестве примера конкретную антенну — так называемый вибратор, к которому подводятся электромагнитные колебания от генератора (рис. 8.1, *а*).

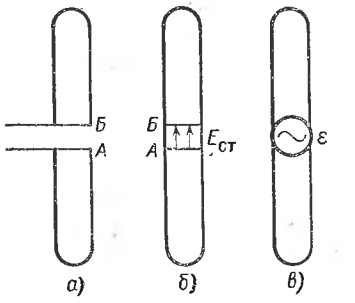


Рис. 8.1. К определению источников поля:

а — вибратор с питающей линией; *б* — распределение стороннего поля на поверхности вибратора; *в* — вибратор с источником сторонней э. д. с.

Основываясь на изложенном, мы можем полагать, что генератора и фидера в пространстве нет, а к вибратору на промежутке $АБ$ приложено стороннее поле с напряженностью $\overline{E}_{ст}$. При этом вибратор должен рассматриваться как сплошное проводящее тело, т. е. промежуток $АБ$ как бы металлизируется (рис. 8.1, *б*). Под действием стороннего поля в антенне, как уже указывалось выше, будет возбуждаться сторонний ток, создающий вместе с зарядами электромагнитное поле. Последнее характеризуется векторами $\overline{E}$ и $\overline{H}$.

Если антенна обладает бесконечно большой проводимостью, то на ее поверхности касательная составляющая вектора напряженности полного электрического поля должна обращаться в нуль, т. е.

$$\overline{E}_{tg} + (\overline{E}_{ст})_{tg} = 0 \quad \text{на } S, \tag{8.1}$$

где S — поверхность антенны.

Следовательно, расчет электромагнитного поля в установившемся режиме сводится к решению внешней задачи при граничных условиях (8.1). Найденное таким образом поле в силу теоремы единственности решения уравнений Максвелла будет истинным.

Но из теоремы единственности вытекает, что на поверхности S вместо условия (8.1) можно задать граничные условия для вектора $\overline{H}$ в виде

$$\overline{H} \times \overline{n} = \overline{j}_S = \overline{j}_{ст}, \tag{8.2}$$

где $\bar{j}_S = \bar{j}_{ст}$ — вектор поверхностной плотности электрических токов в антенне (сторонних токов); $\bar{n}$ — орт нормали к S.

Конечно, в этом случае, в отличие от предыдущего, на внешней стороне S придется ввести еще специальный источник, учитывающий наличие стороннего поля $\bar{E}_{ст}$, приложенного к антенне. Из дальнейшего нам станет ясно, что подобный источник эквивалентен кольцевому магнитному току, текущему по поверхности вибратора в промежутке $А—Б$ (см. рассуждения, приведенные в § 9 данной главы). Этот источник будет, очевидно, не только возбуждать электрический ток в антенне, но и излучать собственное электромагнитное поле в пространство. Однако для вибратора малой толщины собственное излучение кольцевого магнитного тока оказывается незначительным, и с ним можно не считаться.

Таким образом, в установившемся режиме источники электромагнитного поля могут быть заданы либо в виде распределения стороннего поля $\bar{E}_{ст}$ на поверхности антенны, либо в виде распределения сторонних электрических токов (для тонких вибраторов).

Мы уже говорили, что распределение тока по антенне часто бывает заранее известно с достаточной степенью точности или из практики, или из физических соображений. Так, например, установлено, что в антенне, состоящей из тонких проводов, распределение тока получается почти таким же, как и в соответствующем отрезке длинной линии и т. д. При такой ситуации источники поля целесообразно представлять в виде распределения сторонних токов, ибо расчет электромагнитного поля по заданным токам оказывается более простым, нежели решение задачи с граничными условиями (8.1). Если же распределение токов неизвестно, придется вводить в рассмотрение стороннее поле.

Строго говоря, распределение сторонней напряженности поля, приложенного к антенне, нам тоже заранее неизвестно. И здесь мы должны вводить какую-то функцию, приближенно представляющую $\bar{E}_{ст}$. Однако стороннее поле обычно локализовано в пределах малого промежутка (на рис. 8.1, *б* промежуток $АБ$). В этом случае мы, как правило, не интересуемся точным распределением $E_{ст}$ в антенне, а ограничиваемся лишь заданием величины

$$\mathscr{E} = \int_{А}^{Б} \bar{E}_{ст}\, d\bar{l}, \tag{8.3}$$

которую условно можно назвать сторонней э. д. с. (рис. 8.1, *в*).

Рассмотрим теперь более сложную систему, состоящую из антенны с известным распределением тока и расположенного вблизи нее проводящего экрана, распределение тока в котором неизвестно (рис. 8.2). Хотя электромагнитное поле в данном случае зависит от всех токов,

а именно, тока антенны и токов в экране, практически целесообразно, как это уже указывалось в гл. V, считать источником лишь известный нам ток антенны, питаемой от генератора. Соответственно мы определим этот ток как извне заданный сторонний ток, а токи в экране — как собственные токи в окружающей среде, или наведенные токи.

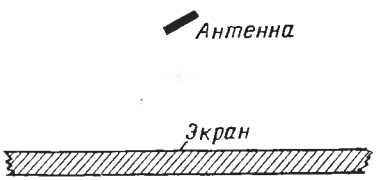


Рис. 8.2. Антенна над проводящим экраном.

На поверхности идеально проводящего экрана тангенциальная составляющая напряженности электрического поля должна быть равна нулю. Таким образом, задача по расчету поля антенны над экраном сводится к нахождению решения уравнений Максвелла с известным источником поля в виде стороннего тока при граничных условиях на поверхности экрана:

$$(\bar{E} \times \bar{n}) = 0,$$

где $\bar{n}$ — нормаль к его поверхности.

2. Решение уравнений электромагнитного поля. Запаздывающие потенциалы

Займемся теперь определением напряженностей $\bar{E}$ и $\bar{H}$ переменного электромагнитного поля по заданным токам и зарядам (вихрям и истокам).

Напишем вновь систему уравнений Максвелла для однородной среды:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{j} + \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}, \tag{I}$$

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}, \tag{II}$$

$$\operatorname{div} \bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}, \tag{III}$$

$$\operatorname{div} \mu \bar{H} = 0. \tag{IV}$$

Токи с плотностью $\bar{j}$ и заряды с плотностью ρ заданы. Необходимо, решив написанную выше систему дифференциальных уравнений, найти составляющие поля $\bar{E}$ и $\bar{H}$, выразив их через заданное распределение токов и зарядов.

Мы можем, очевидно, удовлетворить уравнению (IV), положив, что

$$\mu\bar{H} = \operatorname{rot}\bar{A}, \tag{8.4}$$

ибо дивергенция вихря произвольного вектора равна нулю. Так же как и при расчете магнитного поля постоянного тока, здесь вводится вспомогательный вектор $\bar{A}$, с помощью которого можно вычислить $\bar{H}$ (см. § 8 гл. IV). Заметим, однако, что, наложив условие (8.4) на значение вихря вектора $\bar{A}$, мы еще не определили вектор $\bar{A}$ однозначно, так как не задали его истоки.

Рассмотрим теперь уравнение (II). В отличие от электростатической задачи $\operatorname{rot}\bar{E} \neq 0$ и $\bar{E}$ нельзя рассматривать как потенциальный вектор. Подставляя в правую часть уравнения (II) значение $\bar{H}$ из (8.4), для вихря $\bar{E}$ получим

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{rot}\bar{A}\right)$$

или

$$\operatorname{rot}\left(\bar{E} + \frac{\partial\bar{A}}{\partial t}\right) = 0. \tag{8.5}$$

Мы можем теперь удовлетворить уравнению (8.5), а следовательно, и уравнению (II), положив, что

$$\bar{E} + \frac{\partial\bar{A}}{dt} = -\operatorname{grad} U$$

или

$$\bar{E} = -\frac{\partial\bar{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} U, \tag{8.6}$$

так как вихрь от градиента произвольной функции равен нулю.

Как видно из (8.4) и (8.6), нахождение двух векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ мы свели к нахождению одного вспомогательного вектора $\bar{A}$ и скаляра U, для определения которых у нас имеются еще неиспользованные уравнения (I) и (III).

Подставляя значения $\bar{E}$ и $\bar{H}$ из (8.4) и (8.6) в уравнения (I) и (III), получим

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\bar{A} = \mu\bar{j} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\bar{A}}{\partial t^2} - \varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad} U, \tag{8.7}$$

$$\operatorname{div}\frac{\partial\bar{A}}{\partial t} + \operatorname{div}\operatorname{grad} U = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \tag{8.8}$$

Левую часть уравнения (8.7) на основании (4.38) можно представить как $\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{A}-\nabla^2\bar{A}$, что после элементарных преобразований дает

$$\nabla^2\bar{A}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\bar{A}}{\partial t}-\operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\bar{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial U}{\partial t}\right)=-\mu\bar{j}. \qquad (8.9)$$

Мы вправе, как уже указывалось, наложить произвольные условия на значение $\operatorname{div}\bar{A}$*). В отличие от задачи о постоянном магнитном поле в данном случае, как следует из (8.9), целесообразно потребовать, чтобы

$$\operatorname{div}\bar{A}=-\varepsilon\mu\frac{\partial U}{\partial t}. \qquad (8.10)$$

В этом случае равенство (8.9) будет иметь лишь одну неизвестную — вектор $\bar{A}$, и примет вид

$$\nabla^2\bar{A}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\bar{A}}{\partial t^2}=-\mu\bar{j}. \qquad (8.11)$$

Уравнение (8.10) называется уравнением связи.

Подставляя из (8.10) значение $\operatorname{div}\bar{A}$ в уравнение (8.8), получим

$$-\varepsilon\mu\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+\operatorname{div}\operatorname{grad}U=-\frac{\rho}{\varepsilon}$$

или

$$\nabla^2 U-\varepsilon\mu\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon}. \qquad (8.12)$$

Таким образом, проекции вектора $\bar{A}$ на оси x, y, z и скалярная функция U удовлетворяют уравнению одного и того же типа:

$$\nabla^2\psi-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=-\eta. \qquad (8.13)$$

Уравнение (8.13) носит название уравнения Даламбера.

Для всех точек пространства, где токи или заряды отсутствуют ($\eta=0$), уравнение (8.13) переходит в уравнение

$$\nabla^2\psi-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0. \qquad (8.14)$$

Последнее известно под названием волнового уравнения.

Наиболее простое решение волнового уравнения получается

*) О степени произвола в выборе $\operatorname{div}\bar{A}$ см. приложение в конце книги.

при условии, что ψ зависит лишь от одной декартовой координаты, например, координаты z. В этом случае, полагая

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0,$$

получим

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \tag{8.15}$$

Решение этого уравнения, как известно, имеет вид

$$\psi = \psi_1\left(t - \frac{z}{v}\right) + \psi_2\left(t + \frac{z}{v}\right),$$

где

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Рассмотрим теперь другой частный случай волнового уравнения, который дает нам возможность составить решение непосредственно интересующего нас уравнения Даламбера для вектора $\overline{A}$ и функции U.

Положим, что источники электромагнитного поля имеют точечный характер. В этом случае поле и все его характеристики являются функциями только расстояния r от точки, где находится источник поля, до точки наблюдения и не зависит от угловых координат. Поэтому для $\nabla^2 \psi$ или div grad ψ в сферической системе координат имеем

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

Волновое уравнение (8.14) примет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \tag{8.16}$$

Введем функцию $v = \psi r$. Тогда

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial r^2} + \frac{2}{r^3} v.$$

После подстановки в уравнение (8.16) будем иметь

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0.$$

Мы получили то же уравнение, что и уравнение (8.15). Поэтому, пользуясь результатами предыдущего решения, находим, что $v = \psi_1(t - r/v) + \psi_2(t + r/v)$, и $\psi = v/r$ будет равна

$$\psi = \frac{\psi_1(t - r/v)}{r} + \frac{\psi_2(t + r/v)}{r}. \tag{8.17}$$

Решение (8.17) вновь имеет волновой характер.

Аргументы функций ψ_1 и ψ_2, как видно из (8.17), «распространяются» в направлении радиуса r со скоростью v и $-v$ и имеют одинаковые значения во всех точках одного и того же радиуса, т. е. на сфере.

Таким образом, решение (8.17) есть совокупность сферических волн, т. е. волн, у которых волновые поверхности, или поверхности равных фаз, суть сферы.

Первое частное решение $\psi_1 (t - r/v)/r$ описывает волну, которая распространяется со скоростью v от центра возмущения в бесконечность. Эта волна носит название расходящейся волны. Второе частное решение $\psi_2 (t + r/v)/r$ описывает волну, которая движется с той же скоростью из бесконечности к центру и называется сходящейся волной. В отличие от случая плоской волны амплитуда сферической волны с увеличением r уменьшается.

В дальнейшем для решения нашей задачи достаточно будет взять одно из частных решений. Мы выбираем первое частное решение, как наиболее отвечающее физической постановке задачи. В результате можно утверждать, что для точечного источника во всех точках поля, удаленных от источника, решение уравнения (8.12) имеет вид

$$U = \frac{\psi (t - r/v)}{r}, \tag{8.18}$$

где ψ — пока еще неизвестная функция

Заметим, что уравнение (8.12) при $v \to \infty$ ($\varepsilon\mu \to 0$) переходит в уравнение Пуассона для потенциала электростатического поля. Следовательно, решение (8.18) для случая точечного источника при $v \to \infty$ должно перейти в решение, определяющее потенциал точечного заряда q, которое при переменных q выглядело бы так:

$$U = \frac{q (t)}{4\pi\varepsilon r}. \tag{8.19}$$

Но (8.18) при $v \to \infty$ переходит в (8.19), если

$$\psi\left(t - \frac{r}{v}\right) = \frac{q (t - r/v)}{4\pi\varepsilon}.$$

Таким образом, решение уравнения Даламбера для U в случае точечного источника имеет вид

$$U = \frac{q (t - r/v)}{4\pi\varepsilon r}. \tag{8.20}$$

Как видно из (8.20), решение уравнения Даламбера отличается от решения уравнения Пуассона тем, что значение функции U в точке, отстоящей от источника на расстоянии r, для заданного t определяется величиной заряда не в тот же момент t, а в предшествующий ему $t' = t - r/v$, где r/v — время распространения волны

от точки истока до точки наблюдения. Стало быть, значение функции U запаздывает по отношению к соответствующему значению заряда q.

По аналогии с электростатическим потенциалом, функция U носит название запаздывающего (скалярного) потенциала.

Имея решение (8.20) для точечного источника, легко составить решение для общего случая распределения зарядов по объему. Разбивая объем V (рис. 8.3), заполненный зарядами с объемной

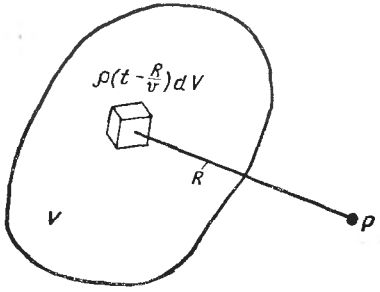


Рис. 8.3. К вычислению скалярного запаздывающего потенциала.

плотностью $\rho(t)$, на элементарные объемы с зарядом $\rho\,(t)\,dV$, получим, что элементарный заряд создает в точке наблюдения потенциал

$$dU = \frac{\rho\,(t-R/v)\,dV}{4\pi\varepsilon R},$$

где R — расстояние от элементарного объема dV до точки наблюдения.

Потенциал, созданный всеми зарядами, будет равен

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\limits_V \frac{\rho\,(t-R/v)}{R}\,dV. \qquad (8.21)$$

Следует подчеркнуть, что в соответствии с (8.21) при вычислении U значения объемной плотности в разных точках объема берутся для различных моментов времени.

Вследствие того, что уравнения, определяющие проекции вектора $\overline{A}$, совпадают с уравнением Даламбера, мы на основании аналогии (8.11) и (8.12) имеем выражение для $\overline{A}$:

$$\overline{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int\limits_V \frac{\overline{j}\,(-R/v)}{R}\,dV. \qquad (8.22)$$

Вектор $\overline{A}$ носит название запаздывающего вектор-потенциала.

Как и в случае скалярного потенциала U, при вычислении запаздывающего вектор-потенциала $\bar{A}$ в момент t, значение плотности тока в элементе объема берется в момент $t' = t - R/v$.

Часто для приближенных расчетов объемное распределение токов и зарядов можно заменить их линейным распределением по контуру проводника. В этом случае формулы (8.21), (8.22) принимают вид:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_l \frac{\tau(t - R/v)}{R}\, dl, \tag{8.23}$$

$$\bar{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_l \frac{I(t - R/v)}{R}\, \bar{dl}. \tag{8.24}$$

Здесь τ — линейная плотность заряда, а I — величина тока в проводнике.

Значения τ и I, как вытекает из уравнения непрерывности (3.6) или уравнения (8.10), связаны между собой соотношением

$$\frac{\partial I}{\partial l} = -\frac{\partial \tau}{\partial t}. \tag{8.25}$$

Если токи и заряды меняются по гармоническому закону

$$I_к = \dot{I} e^{i\omega t},$$

$$\tau_к = \dot{\tau} e^{i\omega t},$$

где $\dot{I}$ и $\dot{\tau}$ — соответствующие комплексные амплитуды, то, учитывая, что

$$e^{i\omega(t - R/v)} = e^{-i\omega R/v} e^{i\omega t} = e^{-ikR} e^{i\omega t},$$

левые и правые части написанных выше равенств можно сократить на $e^{i\omega t}$ и таким образом получить следующие выражения:

$$\dot{U} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_l \frac{\dot{\tau} e^{-ikR}}{R}\, dl, \tag{8.26}$$

$$\dot{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_l \frac{\dot{I} e^{-ikR}}{R}\, \bar{dl}. \tag{8.27}$$

Аналогично вместо (8.25) будем иметь

$$\frac{\partial \dot{I}}{\partial l} = -i\omega\dot{\tau}. \tag{8.28}$$

В отличие от формул (8.23) — (8.25) последние равенства выражают связь не между мгновенными значениями, а между комп-

лексными амплитудами. Переход к мгновенным комплексным значениям получается умножением этих выражений на множитель $e^{i\omega t}$.

Из вышеизложенного видно, что применительно к гармоническим процессам запаздывание на время R/v учитывается множителем e^{-ikR} и означает сдвиг по фазе на величину $\omega R/v$.

Перейдем теперь к определению напряженностей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ электромагнитного поля, ибо в этом и состоит конечная цель решения уравнений Максвелла. Используя найденные выражения для запаздывающих потенциалов, мы можем вычислить значения векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ по формулам (8.4), (8.6). Заметим, кстати, что для определения скалярного потенциала U совсем необязательно прибегать к непосредственному интегрированию выражения (8.21). Если мы нашли вектор-потенциал $\vec{A}$ из (8.21), то скалярный потенциал легко вычисляется с помощью уравнения связи (8.10).

Можно, наконец, вообще не вводить в расчет скалярный потенциал. Действительно, согласно уравнению (8.4) вектор $\vec{A}$ полностью определяет напряженность поля $\vec{H}$:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{A}. \tag{8.29}$$

Зная $\vec{H}$, далее целесообразно воспользоваться первым уравнением Максвелла, которое для точек, где отсутствуют токи проводимости, имеет вид

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{8.30}$$

Интегрирование этого уравнения по времени дает значение напряженности электрического поля в функции от магнитного поля.

3. Диполь Герца

В качестве простейшего излучателя электромагнитных волн мы рассмотрим «диполь Герца» — малый отрезок линейного проводника l, по которому течет ток I, неизменный вдоль его длины. Такой ток, как следует из закона сохранения количества электричества, может течь в том случае, если на концах проводника находятся меняющиеся во времени точечные заряды q и $-q$ (рис. 8.4), связанные с током соотношением

$$I = -\frac{dq}{dt}.$$

Найдем поле, созданное таким излучателем. В точке, отстоящей на расстоянии r от средней точки отрезка l, ввиду малости элемента l мы получим вектор-потенциал $\overline{A}$ в виде

$$\overline{A} = \mu \frac{I(t - r/v)\,\overline{l}}{4\pi r}.$$

Скалярный потенциал U найдется как алгебраическая сумма потенциалов зарядов q и $-q$:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{q(t - r_1/v)}{r_1} - \frac{q(t - r_2/v)}{r_2}\right].$$

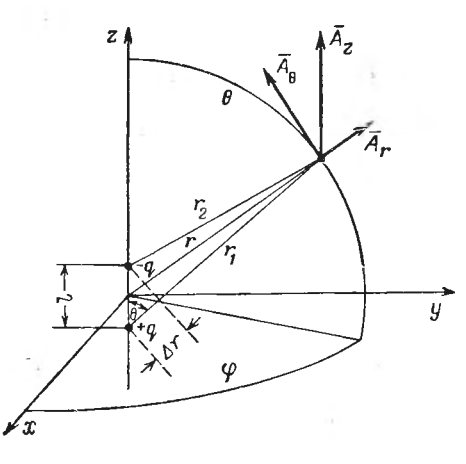


Рис. 8.4. К расчету поля диполя Герца.

Выражение, стоящее в скобках, легко преобразовать с помощью формулы

$$f(t, r + \Delta r) - f(t, r) = \frac{\partial f(t, r)}{\partial r}\Delta r.$$

Поэтому

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{q(t - r/v)}{r}\right]\Delta r = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[-\frac{q'(t - r/v)}{vr} - \frac{1}{r^2}\,q\left(t - \frac{r}{v}\right)\right]\Delta r,$$

где $q'(t - r/v)$ есть производная по аргументу $t - r/v$ или, что то же, по времени, а отрезок Δr, как видно из рис. 8.4, равен

$$\Delta r = l\cos\theta.$$

Напряженности электромагнитного поля $\overline{E}$ и $\overline{H}$ можно вычислить, как уже указывалось в конце предыдущего параграфа, различными способами. Мы решим задачу последним из перечисленных там способов, оставляя другие для самостоятельных упражнений читателя.

В рассматриваемой задаче направление тока в элементе l совпадает с положительным направлением оси z, и вектор-потенциал имеет лишь одну проекцию A_z, равную

$$A_z = A = \mu \frac{I(t - r/v)}{4\pi r} l.$$

В сферической системе координат проекции вектор-потенциал (рис. 8.4) определяются выражениями:

$$A_r = A_z \cos\theta = \mu \frac{I(t - r/v)}{4\pi r} l \cos\theta,$$

$$A_\theta = -A_z \sin\theta = -\mu \frac{I(t - r/v)}{4\pi r} l \sin\theta,$$

$$A_\varphi = 0.$$

Напряженность магнитного поля $\overline{H}$ находится по формуле (8.29). Пользуясь выражением для ротора в сферической системе координат, будем иметь

$$H_r = H_\theta = 0,$$

$$H_\varphi = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} A_r\right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{vr} I'\left(t - \frac{r}{v}\right) + \frac{I(t - r/v)}{r^2}\right] \sin\theta. \qquad (8.31)$$

Напряженность электрического поля найдем, подставив значения проекций $\overline{H}$ из (8.31) в уравнение (8.30). Вычисляя значения rot $\overline{H}$ в сферической системе координат, получим

$$\varepsilon \frac{\partial \vec{E}_r}{\partial t} = \mathrm{rot}_r \overline{H} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(r \sin\theta H_\varphi) =$$

$$= \frac{l}{2\pi}\left[\frac{I'\left(t - \frac{r}{v}\right)}{vr^2} + \frac{I\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r^3}\right] \cos\theta,$$

$$\varepsilon \frac{\partial E_\theta}{\partial t} = -\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial r}(r \sin\theta H_\varphi) =$$

$$= \frac{l}{4\pi}\left[\frac{I''\left(t - \frac{r}{v}\right)}{v^2 r} + \frac{I'\left(t - \frac{r}{v}\right)}{vr^2} + \frac{I\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r^3}\right] \sin\theta.$$

Интегрирование по переменной t дает:

$$E_r = \frac{l}{2\pi\varepsilon}\left[\frac{I\left(t-\frac{r}{v}\right)}{vr^2} - \frac{q\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r^3}\right]\cos\theta, \qquad (8.32)$$

$$E_\theta = \frac{l}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{I'\left(t-\frac{r}{v}\right)}{v^2 r} + \frac{I\left(t-\frac{r}{v}\right)}{vr^2} - \frac{q\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r^3}\right]\sin\theta. \qquad (8.33)$$

Рассматривая выражения, полученные для составляющих электрического и магнитного полей, мы видим, что отдельные слагаемые в них пропорциональны $1/r$, $1/r^2$ и $1/r^3$. Это позволяет написать более простые, но приближенные формулы для так называемых ближней и дальней зон.

Ближняя зона, или зона индукции — это область, в которой члены, пропорциональные $1/r^3$ и $1/r^2$, в выражениях для E и H преобладают над остальными членами. Дальняя зона, или зона излучения — это область, в которой преобладающими членами в выражениях для E и H являются слагаемые, пропорциональные $1/r$. Границы ближней и дальней зон определяются соотношением между величинами слагаемых, входящих в равенства (8.31) — (8.33). Легко заметить, что эти соотношения зависят от быстроты изменения токов и зарядов во времени.

Для конкретности рассмотрим наиболее важный для практики случай, когда ток в антенне меняется по гармоническому закону $\dot{I}\,e^{i\omega t}$, так что

$$I_к\left(t-\frac{r}{v}\right) = \dot{I}e^{i\omega\left(t-\frac{r}{v}\right)} = \dot{I}e^{-i\frac{\omega}{v}r}e^{i\omega t},$$

$$I'_к\left(t-\frac{r}{v}\right) = i\omega\dot{I}e^{i\omega\left(t-\frac{r}{v}\right)}.$$

Так как

$$I = -\frac{dq}{dt},$$

то

$$q_к\left(t-\frac{r}{v}\right) = -\frac{1}{i\omega}\dot{I}e^{-i\omega\frac{r}{v}}e^{i\omega t}.$$

Подставляя значения заряда и тока, а также его производных в выражения (8.31) — (8.33) для проекций $\dot{H}$ и $\dot{E}$ и опуская общий множитель $e^{i\omega t}$, получим

$$\dot{H}_\varphi = \frac{\dot{I}l}{4\pi}\left[i\frac{k}{r} + \frac{1}{r^2}\right]\sin\theta e^{-ikr}; \qquad (8.34)$$

$$\dot{E}_r = \frac{k}{\omega\varepsilon}\,\frac{\dot{I}l}{2\pi}\left[\frac{1}{r^2} - i\,\frac{1}{kr^3}\right]\cos\theta e^{-ikr}; \qquad (8.35)$$

$$\dot{E}_\theta = \frac{k}{\omega\varepsilon}\,\frac{\dot{I}l}{\omega\varepsilon}\left[i\,\frac{k}{r} + \frac{1}{r^2} - i\,\frac{1}{kr^3}\right]\sin\theta e^{-ikr}, \qquad (8.36)$$

где $k = \omega/v = 2\pi/\lambda$.

Из найденных выражений нетрудно видеть, что граница ближней и дальней зон для гармонического процесса определяется частотой поля или длиной волны. Если $r \ll \lambda$ (ближняя зона), преобладающим в выражении для H будет член, пропорциональный $1/r^2$ и в выражении для E — член, пропорциональный $1/r^3$. В дальней зоне ($r \gg \lambda$) преобладающими будут члены, пропорциональные $1/r$. Взаимная ориентация векторов $\overline{E}$ и $\overline{H}$ в поле электрического диполя изображена на рис. 8.5.

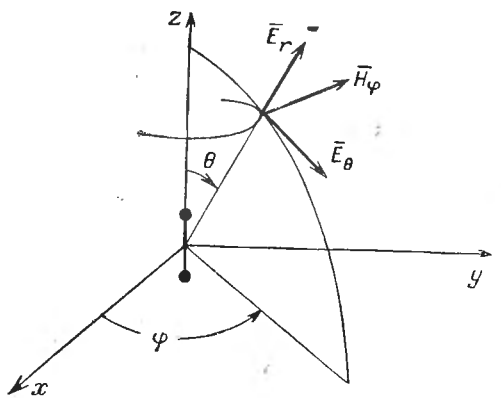


Рис. 8.5. Взаимная ориентация векторов $\overline{E}$ и $\overline{H}$ в поле диполя Герца.

Рассмотрим более подробно поле в ближней и дальней зонах.

Ближняя зона или зона индукции. Для этой зоны $r \ll \lambda$, следовательно, множитель e^{-ikr}, учитывающий запаздывание, можно приближенно принять равным единице

$$e^{-ikr} = e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}r} \approx 1.$$

Это означает, что при $r \ll \lambda$ запаздыванием можно пренебречь.

Сохраняя только наибольшие члены, пропорциональные $1/r^3$ в выражениях (8.35) и (8.36), и пропорциональные $1/r^2$ в выражении

(8.34), получим приближенные значения для поля в ближней зоне в виде:

$$\dot{H}_\varphi = \frac{Il}{4\pi r^2}\sin\theta, \tag{8.37}$$

$$\dot{E}_r = -\frac{\dot{q}l}{2\pi\varepsilon r^3}\cos\theta = -i\frac{\lambda Z_0 \dot{I} l}{4\pi^2 r^3}\cos\theta, \tag{8.38}$$

$$\dot{E}_\theta = -\frac{\dot{q}l}{4\pi\varepsilon r^3}\sin\theta = -i\frac{\lambda Z_0 \dot{I} l}{8\pi^2 r^3}\sin\theta, \tag{8.39}$$

где $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$.

Эти формулы тем более точны, чем r меньше по сравнению с λ.

В ближней зоне магнитное поле определяется током, а электрическое — зарядами. Эти поля в случае гармонического процесса сдвинуты во времени. Напряженность электрического поля отстает по фазе (множитель $-i$) от напряженности магнитного поля на $\pi/2$.

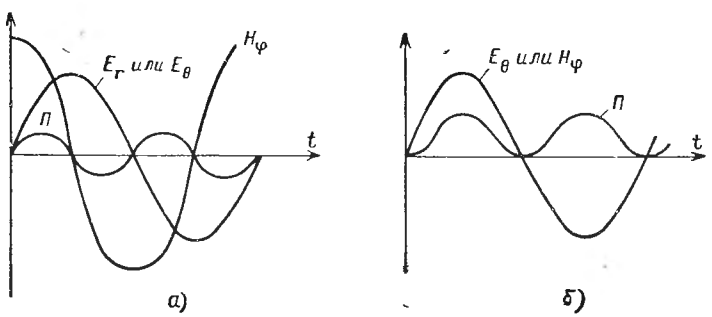


Рис. 8.6. Временные зависимости составляющих поля диполя Герца:
а — ближняя зона; *а* — дальняя зона.

На рис. 8.6, *а* показан график изменения составляющих электрического и магнитного полей во времени. Отсюда следует, что поле в ближней зоне имеет преимущественно реактивный характер *). Вектор Пойнтинга, равный произведению $\overline{E}$ и $\overline{H}$, меняется с двойной частотой, принимая во времени как положительные, так и отрицательные значения. Среднее значение его за период равно нулю. Характер движения главной части энергии, определяемой выражениями (8.37) — (8.39) — колебательный. Энергия четверть периода движется от источника поля в окружающее пространство и в следующую четверть периода возвращается обратно.

*) Векторы $\overline{E}$ и $\overline{H}$ здесь меняются во времени аналогично изменению напряжения и тока в реактивном элементе.

Заканчивая на этом рассмотрение поля в ближней зоне, заметим, что выражения (8.37) — (8.39) соответствуют значениям, которые мы получили бы, если бы для расчета поля переменных токов и зарядов воспользовались законами постоянных полей. Действительно, (8.37) есть не что иное, как формула Био-Савара для элемента постоянного тока.

Проекции $\dot{E}_r$ и $\dot{E}_\theta$ в (8.38) и (8.39), как легко может проверить читатель, совпадают с результатами расчета $\dot{E}$ по формуле электростатического поля

$$\dot{\bar{E}} = -\operatorname{grad} \dot{U},$$

где

$$\dot{U} = \frac{\dot{q}}{4\pi\varepsilon r_1} - \frac{\dot{q}}{4\pi\varepsilon r_2} \approx -\frac{\dot{q} l \cos\theta}{4\pi\varepsilon r^2}.$$

Таким образом, пренебрежение запаздыванием (допустимое при $r \ll \lambda$) приводит к полям Кулона и Био-Савара.

Другими словами, для мгновенных значений переменных полей применимы законы постоянных полей лишь в тех случаях, когда можно пренебречь запаздыванием. Это будет справедливо в точках, тем более удаленных от источников поля, чем медленнее поле меняется во времени. Так, для промышленной электротехники, где применяются медленно меняющиеся токи с частотой $f = 50$ *гц* или длиной волны $\lambda = v/f = 6 \cdot 10^6$ *м*, запаздыванием можно практически пренебречь на любых удалениях от источника, где поле еще имеет заметную величину. Наоборот, в радиотехнике, где применяются быстропеременные поля с частотами, превышающими величину $3 \cdot 10^{10}$ *гц*, т. е. с λ, меньшими 1 *см*, границы ближней зоны становятся во многих случаях столь малыми, что все пространство вокруг источника должно рассматриваться как дальняя зона.

Дальняя зона или зона излучения. Для этой зоны $r \gg \lambda$. Запаздыванием пренебречь нельзя. Приближенные значения для E и H в этой зоне получим, сохранив в (8.34) и (8.36) наибольшие члены, пропорциональные $1/r$.

Соответственно получим:

$$H_\varphi = \frac{l}{4\pi v r} I'(t - r/v) \sin\theta, \tag{8.40}$$

$$E_\theta = \frac{l}{4\pi\varepsilon v^2 r} I'(t - r/v) \sin\theta. \tag{8.41}$$

Кроме того, имеется еще незначительная составляющая E_r, приближенно равная

$$E_r = \frac{l}{2\pi\varepsilon v r^2} I(t - r/v) \cos\theta. \tag{8.42}$$

Для поля, меняющегося во времени по гармоническому закону, будем иметь:

$$\dot{H}_\varphi = i\frac{k}{4\pi}\dot{I}l\frac{e^{-ikr}}{r}\sin\theta = \frac{\dot{I}l}{2\lambda r}e^{-ikr}\sin\theta, \tag{8.43}$$

$$\dot{E}_\theta = i\frac{\omega\mu}{4\pi}\dot{I}l\frac{e^{-ikr}}{r}\sin\theta = Z_0\frac{\dot{I}l}{2\lambda r}e^{-ikr}\sin\theta, \tag{8.44}$$

$$\dot{E}_r = Z_0\frac{\dot{I}l}{2\pi r^2}e^{-ikr}\cos\theta, \tag{8.44'}$$

где $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$.

Проекция E_r электрического поля в принятой нами степени приближения не должна учитываться, так как ее величина обратно пропорциональна r^2. Действительно, как видно из формул (8.44) и (8.44'), отношение амплитуд

$$\frac{E_{rm}|_{\theta=0}}{E_{\theta m}|_{\theta=\pi/2}} = \frac{\lambda}{\pi r} \ll 1.$$

Поэтому в дальней зоне можно учитывать только одну составляющую E_θ электрического поля.

Рассматривая выражения (8.40) и (8.41), мы видим, что как электрическое, так и магнитное поля в дальней зоне пропорциональны производной тока в антенне.

Напряженность электрического и магнитного полей совпадает во времени по фазе. На рис. 8.6, *б* показаны графики изменения во времени E_θ и H_φ и величины вектора Пойнтинга, равной произведению $E_\theta H_\varphi$. В отличие от ближней зоны вектор Пойнтинга здесь не меняет знака, и энергия движется в течение всего периода в одном направлении — от антенны в окружающее пространство. На рис. 8.7 показаны направления векторов $\bar{E}_\theta$, $\bar{H}_\varphi$ и вектора $\bar{\Pi}$, являющегося их векторным произведением. Векторы $\bar{E}_\theta$ и $\bar{H}_\varphi$ нарисованы для моментов времени, когда $I'(t) < 0$. Когда $I'(t)$ изменит знак, векторы $\bar{E}_\theta$ и $\bar{H}_\varphi$ будут иметь противоположные направления, но направление $\bar{\Pi}$ сохранится без изменения. Стало быть, главная часть энергии в дальней зоне уходит от антенны — «излучается», двигаясь вдоль радиуса r со скоростью v.

Заметим, что при пренебрежении запаздыванием в выражениях для $\bar{E}$ и $\bar{H}$ исчезают слагаемые, соответствующие полю излучения. Таким образом, излучение непосредственно связано с конечным значением скорости распространения.

Излученное электромагнитное поле в дальней зоне представляет собой сферическую волну, в которой электрический и магнитный

векторы перпендикулярны направлению распространения. Такая волна, как известно, является поперечной электромагнитной волной.

В сферической волне, излучаемой диполем Герца, электрический вектор направлен по касательной к координатной линии θ, а магнитный вектор — по касательной к координатной линии φ.

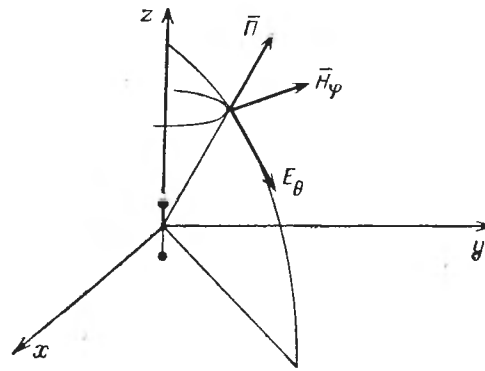


Рис. 8.7. Взаимная ориентация векторов поля диполя Герца в дальней зоне.

Оба вектора $\bar{E}$ и $\bar{H}$ убывают обратно пропорционально первой степени расстояния.

Как видно из выражений (8.43) и (8.44), $\dot{E}_\theta$ и $\dot{H}_\varphi$ относятся друг к другу как

$$\frac{\dot{E}_\theta}{\dot{H}_\varphi} = Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}. \qquad (8.45)$$

Напряженность излученного электромагнитного поля зависит от угла θ. Вдоль оси диполя при $\theta = 0$ излученное поле отсутствует. Поле максимально при $\theta = \frac{\pi}{2}$ в плоскости, перпендикулярной оси диполя.

Обозначая максимальные значения амплитуд E_m и H_m, соответствующие $\theta = \pi/2$, через E_{max} и H_{max}, получим, что при $r = \text{const}$

$$E_m(\theta) = E_{max} \sin\theta \quad \text{и} \quad H_m(\theta) = H_{max} \sin\theta.$$

Зависимости $E_m(\theta)$ и $H_m(\theta)$ или E_m/E_{max} и H_m/H_{max} в функции угла θ обычно изображаются в виде полярных диаграмм направленности, в которых радиус-вектор, отложенный в направлении θ, численно равен $E_m(\theta)/E_{max}$ (или H_m/H_{max}).

Такая диаграмма направленности для поля диполя Герца приведена на рис. 8.8, *а*. (Уравнение кривой $\rho = \sin\theta$ в полярных координатах есть уравнение окружности.) Так как поле диполя Герца не зависит от угла φ, то пространственная диаграмма направленности изображается в виде тела, образованного вращением фигуры 8.8, *а* вокруг вертикальной оси (рис. 8.8, *б*).

Полную мощность P_Σ, излученную диполем, мы получим, проинтегрировав значение вектора $\overline{\Pi}_{ср}$ по сфере произвольного радиуса r:

$$P_\Sigma = \int_S \Pi_{ср}\, dS,$$

где dS — элемент сферической поверхности, равный

$$dS = r^2 \sin\theta d\theta\, d\varphi.$$

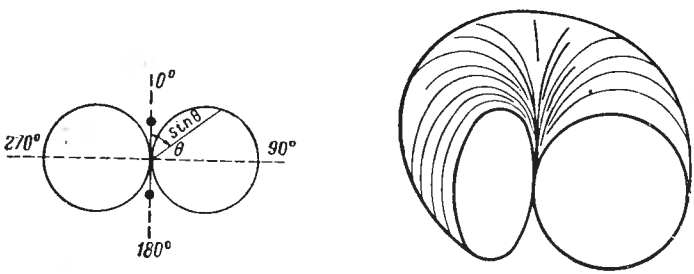


Рис. 8.8. Диаграмма направленности диполя Герца:
а — в плоскости, проходящей через ось диполя (полярные координаты)
б — пространственная диаграмма направленности.

Нетрудно показать, что

$$\Pi_{ср} = Z_0 \frac{(I_m l)^2}{8r^2\lambda^2} \sin^2\theta,$$

где I_m — амплитуда тока.

Тогда

$$P_\Sigma = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} Z_0 \frac{(I_m l)^2}{8r^2\lambda^2} \sin^2\theta r^2 \sin\theta d\theta\, d\varphi =$$

$$= \frac{\pi Z_0 (I_m l)^2}{8\lambda^2} \int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta = \frac{\pi Z_0}{3\lambda^2} (I_m l)^2. \qquad (8.46)$$

Излученная мощность не зависит от радиуса сферы. Этот результат является естественным следствием закона сохранения энергии, поскольку мы рассматриваем пространство, в котором отсутствуют токи проводимости, а стало быть, отсутствуют потери на джоулево тепло.

Излученную мощность можно представить как

$$P_\Sigma = \frac{I_m^2 R_\Sigma}{2}, \tag{8.47}$$

где R_Σ — так называемое сопротивление излучения, равное

$$R_\Sigma = \frac{2P_\Sigma}{I_m^2} = \frac{2\pi}{3} Z_0 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2. \tag{8.48}$$

Для пустоты $Z_0 = 120\pi$ *ом*, и сопротивление излучения равно

$$R_\Sigma = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2. \tag{8.49}$$

Картины электрических силовых линий колеблющегося диполя для различных моментов времени были вычислены и построены Герцем (рис. 8.9).

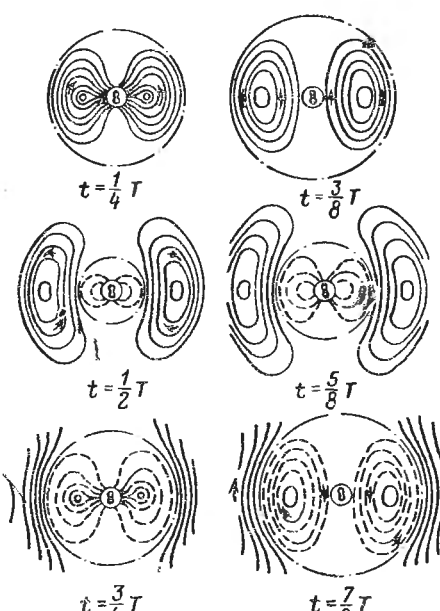


Рис. 8.9. Силовые линии электрического поля диполя Герца в различные моменты времени.

Как видно из рис. 8.9, вблизи диполя электрические силовые линии опираются на заряды диполя. В дальней зоне электрические силовые линии уже не оканчиваются на зарядах, а образуют замкнутые кривые, лежащие в меридиональных плоскостях. Магнитные силовые линии представляют собой окружности с центром на оси диполя. Эти замкнутые электрические и магнитные силовые линии характеризуют сферическую волну, которая распространяется радиально со скоростью света.

4. Излучение рамочной антенны

Рассмотрим поле, созданное рамочной антенной в виде круглого плоского витка радиуса a (рис. 8.10). Предположим, что по рамке течет синусоидальный ток $\dot{I}\,e^{i\omega t}$ одной и той же величины во всех точках рамки. Это будет иметь место в случаях, когда периметр рамки мал по сравнению с длиной волны. Вследствие симметрии, как было показано в § 9 гл. IV, вектор-потенциал имеет лишь одну составляющую A_φ.

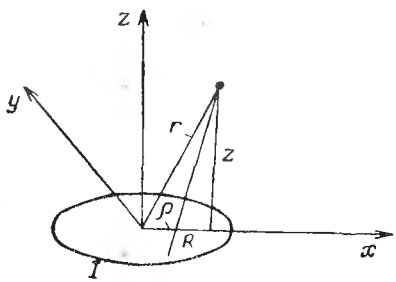


Рис. 8.10. К расчету поля рамочной антенны.

Обозначая через R расстояние от произвольной точки на окружности рамки до точки наблюдения, получим

$$A_к = A_{\varphi к} = \frac{\mu}{4\pi} \oint \frac{\dot{I}\, e^{i\left(\omega t - \omega \frac{R}{v}\right)}}{R}\, dl_1,$$

где $dl_1 = dl \cos\varphi = a\cos\varphi d\varphi$ (см. § 9 гл. IV).

Подставляя значение dl_1 и опуская временно́й множитель $e^{i\omega t}$, находим:

$$\dot{A}_\varphi = \frac{\mu a}{2\pi} \dot{I} \int_0^\pi \frac{e^{-ikR}}{R} \cos\varphi d\varphi, \qquad (8.50)$$

где $k = \omega/v = 2\pi/\lambda$.

Так как

$$R^2 = a^2 + \rho^2 + z^2 - 2a\rho\cos\varphi,$$

$$\rho^2 + z^2 = r^2,$$

$$\rho = r\sin\theta,$$

то

$$R^2 = a^2 + r^2 - 2ar\sin\theta\cos\varphi,$$

Непосредственное вычисление интеграла (8.50) представляет собой хотя и возможную, но длительную операцию. Поэтому мы перейдем к расчету поля для следующих двух случаев.

1. **Зона рамки.** Это область, где $R \ll a$. Так как $a \ll \lambda$, то для этой зоны $kR = \frac{2\pi}{\lambda} R \ll 1$ и $e^{-ikR} \approx 1 - ikR$.

Подставляя последнее выражение в (8.50), будем иметь:

$$\dot{A}_\varphi = \frac{\mu a}{2\pi} \dot{I} \int_0^\pi \frac{\cos\varphi d\varphi}{R} - ik \frac{\mu a \dot{I}}{2\pi} \int_0^\pi \cos\varphi d\varphi.$$

Второй интеграл здесь равен нулю. Что касается первого интеграла, то он в точности совпадает со значением вектор-потенциала для поля постоянного тока в круглом витке (4.47) с той лишь разницей, что взамен постоянного тока сюда входит переменный ток.

Таким образом, значение поля в зоне рамки определяется теми же формулами, что и поле постоянного тока.

2. **Зона, удаленная от рамки.** Здесь $R \gg a$. Поэтому

$$R = r\sqrt{1 - \frac{2a}{r}\sin\theta\cos\varphi + \frac{a^2}{r^2}} \simeq r - a\sin\theta\cos\varphi,$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r - a\sin\theta\cos\theta} \simeq \frac{1}{r} + \frac{a}{r^2}\sin\theta\cos\varphi$$

и

$$e^{-ikR} \simeq e^{-ikr}(1 + ika\sin\theta\cos\varphi).$$

Подставляя приближенные значения $1/R$ и e^{-ikR} в (8.50), получим

$$\dot{A}_\varphi = \frac{\mu a}{2\pi} \dot{I} e^{-ikr} \left\{ \left[\frac{1}{r} \int_0^\pi \cos\varphi d\varphi + \frac{a}{r^2} \sin\theta \int_0^\pi \cos^2\varphi d\varphi \right] + \right.$$

$$\left. + ika\sin\theta \left[\frac{1}{r} \int_0^\pi \cos^2\varphi d\varphi + \frac{a}{r^2} \sin\theta \int_0^\pi \cos^3\varphi d\varphi \right] \right\}.$$

Так как

$$\int_0^\pi \cos\varphi d\varphi = 0, \quad \int_0^\pi \cos^2\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^\pi \cos^3\varphi d\varphi = 0,$$

то окончательно

$$\dot{A}_\varphi = \frac{\mu a^2}{4r} \dot{I} \left[\left(ik + \frac{1}{r} \right) \right] \sin\theta e^{-ikr}. \qquad (8.51)$$

Теперь можно вычислить магнитное поле из соотношения

$$\dot{\overline{H}} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \dot{\overline{A}}.$$

Пользуясь сферической системой координат и учитывая, что

$$A_r = A_\theta = 0,$$

получаем:

$$H_\varphi = 0,$$

$$\dot{H}_r = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot}_r \dot{\overline{A}} = \frac{1}{\mu r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (r \sin\theta \dot{A}_\varphi) = i \frac{a^2}{2} \dot{I} \left(\frac{k}{r^2} - i \frac{1}{r^3} \right) \cos\theta \, e^{-ikr}, \tag{8.52}$$

$$\dot{H}_\theta = -\frac{1}{\mu r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial r} (r \sin\theta \dot{A}_\varphi) =$$

$$= i \frac{a^2}{4} \dot{I} \left(i \frac{k^2}{r} + \frac{k}{r^2} - i \frac{1}{r^3} \right) \sin\theta \, e^{-ikr}. \tag{8.53}$$

Если в этих выражениях положить

$$k\pi a^2 = l_э, \tag{8.54}$$

то (8.52) и (8.53) можно переписать в виде

$$\dot{H}_r = i \frac{\dot{I} l_э}{2\pi} \left[\frac{1}{r^2} - i \frac{1}{kr^3} \right] \cos\theta \, e^{-ikr}, \tag{8.55}$$

$$\dot{H}_\theta = i \frac{\dot{I} l_э}{4\pi} \left[\frac{1}{r^2} + i \frac{k}{r} - i \frac{1}{kr^3} \right] \sin\theta \, e^{-ikr}. \tag{8.56}$$

Из первого уравнения Максвелла следует, что вектор $\overline{E}$ в поле рамки имеет только одну проекцию E_φ, комплексная амплитуда которой равна

$$\dot{E}_\varphi = -i \frac{\omega\mu}{k} \frac{\dot{I} l_э}{4\pi} \left[\frac{1}{r^2} + i \frac{k}{r} \right] \sin\theta \, e^{-ikr}. \tag{8.57}$$

Сравнивая формулы (8.55) и (8.56) с формулами (8.35), (8.36) для проекций электрического поля диполя Герца, мы можем убедиться, что магнитное поле горизонтальной рамки идентично электрическому полю вертикального диполя Герца. Точно так же, из формул (8.57) и (8.34) вытекает идентичность электрического и магнитного полей этих источников.

Следовательно, горизонтальная рамка создает такое же поле, как и вертикальный электрический диполь, разница между их полями состоит лишь в том, что векторы $\overline{E}$ и $\overline{H}$ меняются в простран-

стве местами. А это значит, что горизонтальную рамочную антенну можно трактовать как фиктивный вертикальный магнитный диполь (рис. 8.11).

Определим условия, при которых рамка будет эквивалентна магнитному диполю. Для расчета поля магнитного диполя целесообразно использовать свойство перестановочной двойственности уравнений Максвелла. Действительно, если в формулах (8.34) —

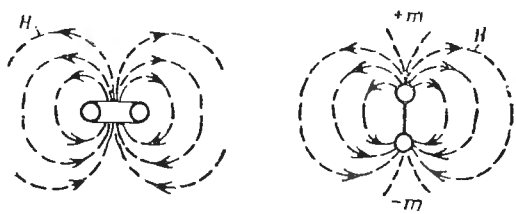


Рис. 8.11. Рамочная антенна и фиктивный магнитный диполь.

(8.36), относящихся к диполю Герца, произвести перестановки типа (5.53), то мы сразу же получим выражения, характеризующие поле магнитного источника:

$$\dot{E}_\varphi = -\frac{\dot{I}_м l}{4\pi}\left(i\frac{k}{r}+\frac{1}{r^2}\right)\sin\theta e^{-ikr},$$

$$\dot{H}_r = \frac{k}{\omega\mu}\frac{\dot{I}_м l}{2\pi}\left(\frac{1}{r^2}-i\frac{1}{kr^3}\right)\cos\theta e^{-ikr},$$

$$\dot{H}_\theta = \frac{k}{\omega\mu}\frac{\dot{I}_м l}{4\pi}\left(i\frac{k}{r}+\frac{1}{r^2}-i\frac{1}{kr^3}\right)\sin\theta e^{-ikr}.$$

Здесь $\dot{I}_м$ — комплексная амплитуда фиктивного магнитного тока.

Следует иметь в виду, что эти выражения относятся к диполю, у которого положительная масса находится в точке $z=-l/2$, а отрицательная — в точке $z=l/2$. Чтобы поле магнитного диполя было полностью идентично рассмотренному выше полю рамки, необходимо знаки в правых частях последних равенств заменить на обратные. Полученные таким образом выражения будут совпадать с формулами (8.55) — (8.57), если

$$-\frac{k}{\omega\mu}\dot{I}_м l = i\dot{I}l_э = i\dot{I}kS,$$

или

$$\frac{i}{\omega}\dot{I}_м l = \mu\dot{I}S.$$

Но величина $\frac{i}{\omega}\dot{I}_м l$ представляет собой комплексную амплитуду момента магнитного диполя $\dot{M}=\dot{q}_м l$, где $\dot{q}_м = -\int \dot{I}_м\, dt$ —

комплексная амплитуда магнитной массы. Стало быть, горизонтальная рамочная антенна эквивалентна вертикальному магнитному диполю с моментом $\dot{M} = \mu \dot{I} S$ (ср. этот результат с тем, который мы получили для рамки с постоянным током).

Взаимная ориентация векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ в поле рамки изображена на рис. 8.12.

Диаграмма направленности горизонтальной рамки, очевидно, должна совпадать с диаграммой направленности вертикального

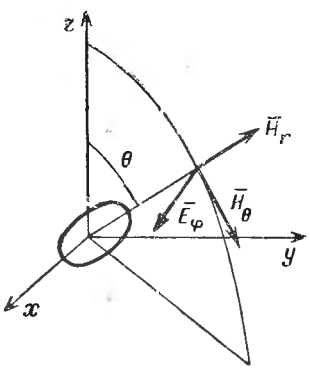


Рис. 8.12. Взаимная ориентация векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ в поле рамочной антенны.

электрического диполя. Максимум излучения энергии в этом случае лежит в плоскости рамки (т. е. в плоскости, перпендикулярной оси эквивалентного магнитного диполя).

Наконец, на основании рассмотренной выше аналогии с диполем Герца можно написать, что сопротивление излучения рамочной антенны в воздухе равно

$$R_\Sigma = 80\pi^2 \left(\frac{l_\vartheta}{\lambda}\right)^2 = \frac{320\pi^4 S^2}{\lambda^4} \text{ ом.} \qquad (8.58)$$

5. Типы электромагнитных волн

Структура электромагнитного поля, возникающего в однородной изотропной среде, определяется видом источника и его свойствами. Различные источники, очевидно, будут возбуждать в пространстве различные электромагнитные поля. Тем не менее, оказывается возможным произвести классификацию полей на основе некоторых характерных признаков.

В гл. VI мы рассмотрели плоские электромагнитные волны. Было установлено, что поле плоской волны является поперечным (поле ТЕМ), ибо проекции векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ в нем на направление движения волны равны нулю.

Поле поперечно-электромагнитного типа получается в результате решения уравнений Максвелла при условии, что векторы $\overline{E}$ и $\overline{H}$ зависят лишь от одной пространственной координаты и времени. В более общем случае векторы $\overline{E}$ и $\overline{H}$ будут зависеть не от одной, а от двух или трех пространственных координат. Ясно, что такое поле должно иметь более сложную структуру, нежели поле плоской волны.

В § 4 этой главы мы исследовали свойства элементарного электрического диполя. В результате решения уравнений Максвелла было найдено, что вектор напряженности $\overline{E}$ такого диполя имеет в сферической системе координат две составляющие $\overline{E}_\theta$ и $\overline{E}_r$, а вектор напряженности $\overline{H}$ — только одну составляющую $\overline{H}_\varphi$. Было также установлено, что волновые поверхности поля электрического диполя распространяются со скоростью $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ в радиальных направлениях. При этом проекция вектора $\overline{E}$ на направление распространения, т. е. проекция $\overline{E}_r$, не равна нулю, а вектор $\overline{H}$ лежит в плоскости, перпендикулярной направлению распространения (см. рис. 8.5).

Электромагнитное поле такого типа носит название п о п е р е ч н о-м а г н и т н о г о п о л я и обозначается буквами ТМ. Иногда поперечно-магнитное поле с учетом того, что составляющая вектора $\overline{E}$ на направление распространения в нем отлична от нуля, называют полем «электрического» типа и обозначают буквой E (E-поле).

Далее, при исследовании излучения рамки с током мы установили, что векторы $\overline{E}$ и $\overline{H}$ поля в сферической системе координат характеризуются составляющими $\overline{E}_\varphi$, $\overline{H}_r$ и $\overline{H}_\theta$ (рис. 8.12).

Из выражений (8.55) и (8.56) следует, что в поле рамки волновые поверхности также распространяются в радиальном направлении. Однако в этом случае вектор $\overline{H}$ имеет составляющую на направление распространения волны, отличную от нуля, а в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, лежит вектор $\overline{E}$. Такое поле называется п о п е р е ч н о-э л е к т р и ч е с к и м и обозначается буквами ТЕ. Иногда его называют полем «магнитного» типа и обозначают буквой H (H-поле).

Часто вместо типов полей говорят о типах электромагнитных волн. В соответствии с изложенным различают поперечные (ТЕМ), поперечно-электрические (ТЕ) и поперечно-магнитные (ТМ) волны.

Приведенная выше классификация полей справедлива не только для свободного пространства. Далее будет показано, что перечисленные типы полей существуют также в областях, ограниченных проводящими поверхностями и т. п.

6. Электромагнитное поле электрических и магнитных токов

Выше уже говорилось, что в ряде случаев для расчета электромагнитного поля в уравнения Максвелла полезно ввести фиктивные магнитные массы и фиктивные магнитные токи. При этом может оказаться, что решение новой системы уравнений Максвелла, содержащей магнитные токи и массы, будет проще, чем решение исходной системы уравнений, содержащей только электрические токи и заряды.

Уравнения Максвелла при наличии электрических и магнитных источников на основании рассуждений, изложенных в § 8 гл. V, можно написать в виде:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{rot}\overline{H}=\overline{j}+\varepsilon\frac{\partial\overline{E}}{\partial t},\\ &\operatorname{rot}\overline{E}=-\overline{j}_{\text{м}}-\mu\frac{\partial\overline{H}}{\partial t},\\ &\operatorname{div}\overline{D}=\rho,\ \operatorname{div}\overline{B}=\rho_{\text{м}}. \end{aligned}\right\} \tag{8.59}$$

Следовательно, расчет электромагнитного поля, создаваемого в пространстве электрическими и магнитными токами, сводится к интегрированию системы уравнений (8.59). Так как эта система линейна, можно полагать, что

$$\overline{E}=\overline{E}_1+\overline{E}_2 \quad \text{и} \quad \overline{H}=\overline{H}_1+\overline{H}_2. \tag{8.60}$$

Здесь $\overline{E}_1$, $\overline{H}_1$ и $\overline{E}_2$, $\overline{H}_2$ — электромагнитные поля электрических и соответственно магнитных источников.

Используя результаты решения уравнений Максвелла, приведенные в § 2 этой главы, для полей $\overline{E}_1$, $\overline{H}_1$ мы можем написать:

$$\overline{E}_1=-\operatorname{grad}U-\frac{\partial\overline{A}}{\partial t},\quad \overline{H}_1=\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\overline{A}, \tag{8.61}$$

где U и $\overline{A}$ — запаздывающие потенциалы.

Что касается поля $\overline{E}_2$, $\overline{H}_2$, то оно удовлетворяет уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{rot}\overline{H}_2=\varepsilon\frac{\partial\overline{E}_2}{\partial t},\\ &\operatorname{rot}\overline{E}_2=-\overline{j}_{\text{м}}-\mu\frac{\partial\overline{H}_2}{\partial t},\\ &\operatorname{div}\overline{D}_2=0,\\ &\operatorname{div}\overline{B}_2=\rho_{\text{м}}, \end{aligned}\right\} \tag{8.62}$$

которые нам нужно решить.

Для этого потребуем, чтобы $\overline{D}_2 = -\operatorname{rot}\overline{F}$, или

$$\overline{E}_2 = -\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{rot}\overline{F}, \tag{8.63}$$

где $\overline{F}$ — неизвестная векторная функция. Подставляя значение $\overline{E}_2$ из (8.63) в первое уравнение системы (8.62), получим

$$\operatorname{rot}\left(\overline{H}_2 + \frac{\partial\overline{F}}{\partial t}\right) = 0.$$

Последнее равенство будет удовлетворяться тождественно, если

$$\overline{H}_2 + \frac{\partial\overline{F}}{\partial t} = -\operatorname{grad}\varphi,$$

где φ — некоторая скалярная функция (не путать с углом φ в сферической системе координат). Отсюда следует, что

$$\overline{H}_2 = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial\overline{F}}{\partial t}. \tag{8.64}$$

Таким образом, векторы $\overline{E}_2$ и $\overline{H}_2$ поля магнитных источников мы выразили через вспомогательные функции φ и $\overline{F}$ подобно тому, как это ранее было сделано для поля электрических зарядов и токов.

По аналогии с потенциалами U и $\overline{A}$ функции φ и $\overline{F}$, очевидно, следует называть запаздывающими потенциалами поля магнитных источников.

Продолжая далее рассуждения, аналогичные тем, которые мы уже провели в § 2 данной главы, можно показать, что функции φ и $\overline{F}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} \nabla^2\varphi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho_м}{\mu}, \\ \nabla^2\overline{F} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\overline{F}}{\partial t^2} &= -\varepsilon\overline{j}_м, \end{aligned} \tag{8.65}$$

при условии, что равенство, связывающее φ и $\overline{F}$, имеет вид

$$\operatorname{div}\overline{F} = -\varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{8.66}$$

(Вывод этих уравнений рекомендуем читателю проделать самостоятельно).

Пусть электрические и магнитные источники поля распределены в некотором объеме V (рис. 8.13). В установившемся режиме вектор-потенциал $\overline{A}$ поля электрических токов определяется выражением

$$\dot{\overline{A}} = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \dot{\overline{j}}\,\frac{e^{-ikR}}{R}\,dV. \tag{8.67}$$

Здесь

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

— расстояние от элемента тока в точке $Q(x', y', z')$ до точки наблюдения $P(x\ y\ z)$, а интегрирование происходит по координатам точек $Q(x', y', z')$.

Выражение (8.67) сразу же получается из формулы (8.22) с учетом того, что зависимость тока от времени теперь определяется множителем $e^{i\omega t}$.

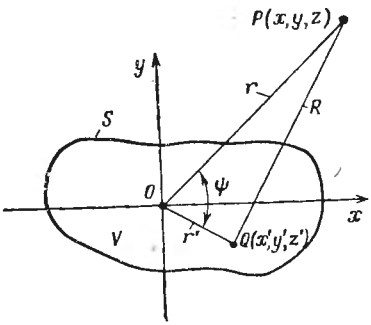


Рис. 8.13. К расчету поля электрических и магнитных токов.

Для вычисления скалярного потенциала U в установившемся режиме воспользуемся уравнением связи (8.10), из которого следует, что

$$\dot{U} = \frac{i}{\omega\varepsilon\mu} \operatorname{div} \dot{A}. \tag{8.68}$$

Запаздывающие потенциалы поля магнитных источников в принципе можно было бы найти из решения дифференциальных уравнений (8.65). Но эти уравнения по виду одинаковы с уравнениями (8.11), (8.12). Следовательно, на основании аналогии с (8.67) для вектор-потенциала $\overline{F}$ сразу же будем иметь

$$\dot{\overline{F}} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_V \dot{\overline{j}}_м \frac{e^{-ikR}}{R}\, dV. \tag{8.69}$$

По найденной векторной функции $\dot{\overline{F}}$ с помощью равенства (8.66) определим комплексную амплитуду скалярного потенциала φ:

$$\dot{\varphi} = \frac{i}{\omega\varepsilon\mu} \operatorname{div} \dot{\overline{F}}. \tag{8.70}$$

Учитывая соотношения (8.60), (8.61), (8.63) и (8.64), а также (8.68) и (8.70), напишем окончательные выражения для комплексных амплитуд векторов $\dot{\overline{E}}$ и $\dot{\overline{H}}$ электромагнитного поля:

$$\left.\begin{aligned}\dot{\overline{E}} &= -\frac{i}{\omega\varepsilon\mu}\operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\overline{A}} - i\omega\dot{\overline{A}} - \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{rot}\dot{\overline{F}},\\ \dot{\overline{H}} &= -\frac{i}{\omega\varepsilon\mu}\operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\overline{F}} - i\omega\dot{\overline{F}} + \frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\dot{\overline{A}}.\end{aligned}\right\} \tag{8.71}$$

Таким образом, суммарное поле электрических и магнитных источников в установившемся режиме определяется двумя векторпотенциалами $\dot{\overline{A}}$ и $\dot{\overline{F}}$. В случае объемного распределения токов эти векторы могут быть вычислены по формулам (8.67) и (8.69).

Если же источниками поля являются поверхностные электрический и магнитный токи, заданные на поверхности S, то комплексные векторы $\dot{\overline{A}}$ и $\dot{\overline{F}}$ будут равны

$$\left.\begin{aligned}\dot{\overline{A}} &= \frac{\mu}{4\pi}\int\limits_S \dot{\overline{j}}_S\,\frac{e^{-ikR}}{R}\,dS,\\ \dot{\overline{F}} &= \frac{\varepsilon}{4\pi}\int\limits_S \dot{\overline{j}}_{MS}\,\frac{e^{-ikR}}{R}\,dS,\end{aligned}\right\} \tag{8.72}$$

где $\dot{\overline{j}}_S$ и $\dot{\overline{j}}_{MS}$ — комплексные амплитуды плотности поверхностных токов. Наконец, в случае линейного распределения токов вдоль контура l

$$\left.\begin{aligned}\dot{\overline{A}} &= \frac{\mu}{4\pi}\int\limits_l \dot{I}\,\frac{e^{-ikR}}{R}\,\overline{dl},\\ \dot{\overline{F}} &= \frac{\varepsilon}{4\pi}\int\limits_l \dot{I}_M\,\frac{e^{-ikR}}{R}\,\overline{dl},\end{aligned}\right\} \tag{8.73}$$

где $\dot{I}$ — комплексная амплитуда электрического тока; $\dot{I}_M$ — комплексная амплитуда магнитного тока; $\overline{dl}$ — направленный элемент длины.

Если величины $\dot{\overline{j}}\,dV$, $\dot{\overline{j}}_S\,dS$, $\dot{I}\,\overline{dl}$ условно обозначить $\dot{\overline{dq}}_E$, а величины $\dot{\overline{j}}_M\,dV$, $\dot{\overline{j}}_{MS}\,dS$, $\dot{I}_M\,\overline{dl}$ — через $\dot{\overline{dq}}_M$, то выражения для векторов $\dot{\overline{A}}$ и $\dot{\overline{F}}$ при любом распределении источников приобретают одинаковый вид:

$$\dot{\overline{A}} = \frac{\mu}{4\pi}\int\frac{e^{-ikR}}{R}\,\dot{\overline{dq}}_E;\quad \dot{\overline{F}} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\int\frac{e^{-ikR}}{R}\,\dot{\overline{dq}}_M, \tag{8.74}$$

причем интегрирование здесь происходит по всей системе токов.

7. Электромагнитное поле источников в дальней зоне. Диаграмма направленности

Предположим, что источники электромагнитного поля распределены в области V конечных размеров.

Очевидно, в поле этих источников по аналогии с элементарными диполями можно выделить ближнюю и дальнюю зоны. Однако если у диполя дальнюю зону мы определяли неравенством $r \gg \lambda$, где r — расстояние от диполя до точки наблюдения, а λ — длина волны, то теперь к условию $r \gg \lambda$ следует еще добавить неравенство $r \gg r'_{\text{макс}}$. Здесь $r'_{\text{макс}}$ — расстояние от начала координат до максимально удаленной точки источника.

При расчете электромагнитного поля в дальней зоне выражения (8.74), представляющие вектор-потенциалы $\bar{A}$ и $\bar{F}$, можно упростить. Введем для этого сферическую систему координат и обозначим координаты точки наблюдения буквами r, θ, φ и координаты точек источника — r', θ', φ'. Тогда из треугольника $O\,P\,Q$ (рис. 8.13) будем иметь

$$R = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\psi};$$

здесь ψ — угол между направлениями OP и OQ.

Пусть $\bar{p}$ — единичный вектор, направленный по OP, а $\bar{p}'$ — единичный вектор, направленный по OQ. Тогда $\cos\psi = \bar{p}\bar{p}'$.

Так как по определению

$$\bar{p} = \bar{i}_x \sin\theta\cos\varphi + \bar{i}_y \sin\theta\sin\varphi + \bar{i}_z\cos\theta,$$

$$\bar{p}' = \bar{i}_x \sin\theta'\cos\varphi' + \bar{i}_y \sin\theta'\sin\varphi' + \bar{i}_z\cos\theta',$$

то

$$\cos\psi = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi'). \qquad (8.75)$$

Для точек наблюдения, находящихся в дальней зоне, используя правило приближенного извлечения корней, получим $R \approx r - r'\cos\psi$. В этом случае входящая в выражение (8.74) функция e^{-ikR}/R будет равна $e^{-ikr+ikr'\cos\psi}/r - r'\cos\psi$. Так как при $r \gg r'$ величина $1/r - r'\cos\psi$ почти не зависит от координат r', θ' и φ', то для приближенных расчетов можно полагать, что

$$\frac{e^{-ikR}}{R} \approx \frac{e^{-ikr}}{r} e^{ikr'\cos\psi}.$$

Следовательно, в дальней зоне выражения (8.74) принимают вид

$$\left.\begin{aligned}\dot{\bar{A}} &\approx \mu \frac{e^{-ikr}}{4\pi r}\int e^{ikr'\cos\psi}\, d\dot{\bar{q}}_e,\\ \dot{\bar{F}} &\approx \varepsilon \frac{e^{-ikr}}{4\pi r}\int e^{ikr'\cos\psi}\, d\dot{\bar{q}}_м.\end{aligned}\right\} \tag{8.76}$$

Введем в (8.76) обозначения:

$$\dot{\bar{N}} = \int e^{ikr'\cos\psi}\, d\dot{\bar{q}}_e, \tag{8.77}$$

$$\dot{\bar{L}} = \int e^{ikr'\cos\psi}\, d\dot{\bar{q}}_м \tag{8.78}$$

и назовем $\dot{\bar{N}}$ и $\dot{\bar{L}}$ комплексными векторами излучения. Тогда вектор-потенциалы электромагнитного поля в дальней зоне будут выражаться через векторы излучения следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}\dot{\bar{A}} &\approx \mu \frac{e^{-ikr}}{4\pi r}\dot{\bar{N}},\\ \dot{\bar{F}} &\approx \varepsilon \frac{e^{-ikr}}{4\pi r}\dot{\bar{L}},\end{aligned}\right\} \tag{8.79}$$

или в развернутом виде:

$$\left.\begin{aligned}\dot{\bar{A}} &\approx \mu \frac{e^{-ikr}}{4\pi r}(\bar{i}_r \dot{N}_r + \bar{i}_\theta \dot{N}_\theta + \bar{i}_\varphi \dot{N}_\varphi),\\ \dot{\bar{F}} &\approx \varepsilon \frac{e^{-ikr}}{4\pi r}(\bar{i}_r \dot{L}_r + \bar{i}_\theta \dot{L}_\theta + \bar{i}_\varphi \dot{L}_\varphi).\end{aligned}\right\}$$

Изучим более подробно свойства электромагнитного поля источников в дальней зоне. Из равенств (8.71) и (8.74) видно, что исследуемое поле представляет собой суперпозицию полей элементарных электрических и магнитных диполей, распределенных в области V. В самом деле, выражения

$$\mu \frac{1}{4\pi}\frac{e^{-ikR}}{R} d\dot{\bar{q}}_e \quad \text{и} \quad \varepsilon \frac{1}{4\pi}\frac{e^{-ikR}}{R} d\dot{q}_м,$$

стоящие под знаком интегралов в (8.74), можно рассматривать как комплексные амплитуды вектор-потенциалов элементарных электрических и магнитных диполей. Но выше было установлено, что поперечно-магнитное поле электрического диполя и поперечно-электрическое поле магнитного диполя в дальней зоне вырождаются в поля поперечного типа. Следовательно, поле любой ограниченной в пространстве системы источников на больших расстояниях от нее становится поперечным. В сферической системе координат такое поле будет иметь проекции E_θ, E_φ, H_θ и H_φ.

Так как в поле поперечного типа отношение взаимно перпендикулярных компонент напряженностей электрического и магнитного полей равно характеристическому (волновому) сопротивлению среды, то

$$\dot{E}_\theta = \dot{H}_\varphi Z_0, \quad \dot{E}_\varphi = -\dot{H}_\theta Z_0,$$

где

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}.$$

Так же как и у одиночного диполя, проекции E_θ, E_φ, H_θ и H_φ при $r \to \infty$ должны убывать, как $1/r$ (если проводимость среды $g = 0$).

Чтобы получить окончательные формулы, определяющие проекции векторов $\overline{E}$ и $\overline{H}$ поля в дальней зоне, рассмотрим равенства (8.71) и (8.79). Используя выражение для дивергенции вектора в сферической системе координат и учитывая (8.79), можно показать, что функции $\operatorname{div} \overline{A}$ и $\operatorname{div} \overline{F}$ при $r \to \infty$ убывают не медленнее, чем $1/r$. Что же касается градиентов этих функций, то их проекции на направления ортов $\overline{i}_\theta$ и $\overline{i}_\varphi$ при $r \to \infty$ убывают, как $1/r^2$. Поэтому главные значения поперечных составляющих векторов $\overline{E}$ и $\overline{H}$ на больших расстояниях будут определяться слагаемыми

$$-i\omega \dot{A} - \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{rot} \dot{F} \quad \text{и} \quad -i\omega \dot{F} + \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \dot{A}. \tag{8.80}$$

Стало быть, задача теперь заключается в том, чтобы в выражениях (8.80) выделить составляющие на направления $\overline{i}_\theta$ и $\overline{i}_\varphi$, убывающие при $r \to \infty$, как $1/r$.

Рассматривая формулу, определяющую $\operatorname{rot} \overline{A}$ в сферической системе координат, мы можем убедиться, что к числу проекций $\operatorname{rot} \overline{A}$, убывающих на бесконечности не быстрее, чем $1/r$, относятся лишь

$$\operatorname{rot}_\theta \dot{\overline{A}} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\dot{A}_\varphi) = \mu \frac{ik}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \dot{N}_\varphi,$$

$$\operatorname{rot}_\varphi \dot{\overline{A}} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\dot{A}_\theta) = -\mu \frac{ik}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \dot{N}_\theta.$$

Аналогично

$$\operatorname{rot}_\theta \dot{\overline{F}} = \varepsilon \frac{ik}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \dot{L}_\varphi,$$

$$\operatorname{rot}_\varphi \dot{\overline{F}} = -\varepsilon \frac{ik}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \dot{L}_\theta.$$

Следовательно, из выражений (8.71) с учетом последних результатов будем иметь:

$$\dot{E}_\theta = -i\left(\frac{\omega\mu}{4\pi}\dot{N}_\theta + \frac{k}{4\pi}\dot{L}_\varphi\right)\frac{e^{-ikr}}{r},$$

$$\dot{E}_\varphi = -i\left(\frac{\omega\mu}{4\pi}\dot{N}_\varphi - \frac{k}{4\pi}\dot{L}_\theta\right)\frac{e^{-ikr}}{r}.$$

Так как

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = 2\pi/\lambda \quad \text{и} \quad \omega\mu = kZ_0,$$

то

$$\frac{\omega\mu}{4\pi} = \frac{1}{2\lambda}Z_0.$$

Поэтому окончательные выражения для комплексных амплитуд проекций векторов поля в дальней зоне принимают вид:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{E}_\theta &= -\frac{i}{2\lambda}\left(Z_0\dot{N}_\theta + \dot{L}_\varphi\right)\frac{e^{-ikr}}{r},\\
\dot{E}_\varphi &= \frac{i}{2\lambda}\left(-Z_0\dot{N}_\varphi + \dot{L}_\theta\right)\frac{e^{-ikr}}{r},\\
\dot{H}_\theta &= -\frac{\dot{E}_\varphi}{Z_0}; \quad \dot{H}_\varphi = \frac{\dot{E}_\theta}{Z_0}.
\end{aligned}\right\} \qquad (8.81)$$

Отсюда вытекает, что электромагнитное поле произвольной ограниченной в пространстве системы источников в дальней зоне имеет характер сферической волны, распространяющейся от источников в радиальных направлениях.

В том случае, когда среда имеет конечную проводимость, множитель e^{-ikr}/r в (8.81) согласно (6.20) принимает вид $\frac{e^{-\alpha r}}{r}e^{-i\beta r}$. Следовательно, в проводящей среде амплитуда волны, излучаемой источником, убывает при $r \gg \lambda$, как $e^{-\alpha r}/r$ (α — коэффициент затухания).

Если в (8.81) полагать $r = \text{const}$, то мы получим формулы, устанавливающие зависимость напряженности поля источника от направления, характеризуемого углами θ и φ. Иными словами, равенства (8.81) при $r = \text{const}$ позволяют определить характеристику (диаграмму) направленности излучающей системы — антенны по напряженности поля.

Наряду с такой характеристикой целесообразно ввести в рассмотрение характеристику (диаграмму) направленности антенны по мощности. Ею называется функция $\Phi(\theta, \varphi)$, определяющая зависимость мощности, излучаемой антенной в единичном телесном угле, от направления (θ, φ).

Для расчета диаграммы направленности по мощности вычислим мощность, излучаемую антенной через поверхность сферы радиуса r. По формуле (5.33) при условии, что $\xi = \theta$ и $\eta = \varphi$, будем иметь

$$P_\Sigma = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\dot{E}_\theta \dot{H}_\varphi^* - \dot{E}_\varphi \dot{H}_\theta^*\right) r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi.$$

Так как $\sin\theta \, d\theta \, d\varphi = d\Omega$ ($d\Omega$ — элементарный телесный угол), то

$$P_\Sigma = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int\left(\dot{E}_\theta \dot{H}_\varphi^* - \dot{E}_\varphi \dot{H}_\theta^*\right) r^2 \, d\Omega,$$

где интегрирование происходит по полному телесному углу. Но из приведенного выше определения характеристики направленности следует, что

$$P_\Sigma = \int \Phi(\theta, \varphi)\, d\Omega,$$

где интегрирование также производится по полному телесному углу. Сравнивая оба выражения для мощности, излучаемой антенной, получим

$$\Phi(\theta, \varphi) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\dot{E}_\theta \dot{H}_\varphi^* - \dot{E}_\varphi \dot{H}_\varphi^*\right) r^2.$$

Подставляя в последнее выражение значения $\dot{E}_\theta$, $\dot{E}_\varphi$, $\dot{H}_\theta^*$ и $\dot{H}_\varphi^*$ из (8.81), находим окончательно

$$\Phi(\theta, \varphi) = \Phi_{11} + 2\Phi_{12} + \Phi_{22}, \tag{8.82'}$$

здесь

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{11} &= \frac{Z_0}{8\lambda^2}\left(\dot{N}_0 \dot{N}_\theta^* + \dot{N}_\varphi \dot{N}_\varphi^*\right), \\ \Phi_{22} &= \frac{1}{8Z_0\lambda^2}\left(\dot{L}_\theta \dot{L}_\theta^* + \dot{L}_\varphi \dot{L}_\varphi^*\right), \\ \Phi_{12} &= \frac{1}{8\lambda^2}\operatorname{Re}\left(\dot{N}_\theta \dot{L}_\varphi^* - \dot{N}_\varphi \dot{L}_\theta^*\right). \end{aligned}\right\} \tag{8.82''}$$

Формулы (8.82) позволяют рассчитать диаграмму направленности по мощности любой ограниченной в пространстве системы источников.

Установим связь между функцией $\Phi(\theta, \varphi)$ и характеристикой направленности по напряженности поля. Как известно, в электромагнитном поле поперечного типа среднее значение вектора Пойнтинга равно

$$\Pi_{ср} = \frac{|\dot{E}|^2}{2Z_0},$$

где $|\dot{\vec{E}}|$ — модуль вектора $\dot{\vec{E}}$. Но, с другой стороны, из определения функции $\Phi(\theta, \varphi)$ и величины телесного угла вытекает, что

$$\Pi_{\text{ср}} = \frac{\Phi}{r^2}.$$

Следовательно,

$$|\dot{\vec{E}}| = \frac{1}{r}\sqrt{2Z_0}\,\sqrt{\Phi(\theta, \varphi)}. \tag{8.83}$$

8. Электромагнитное поле прямолинейного тока

Рассчитаем электромагнитное поле тонкого прямолинейного проводника с электрическим током. Источник такого типа на практике используется либо в качестве самостоятельного излучающего устройства, либо как составной элемент более сложной антенны.

Пусть одиночный бесконечно тонкий прямолинейный проводник с током длиной $2l$ расположен вдоль оси z так, что начало системы координат находится в его середине (рис. 8.14).

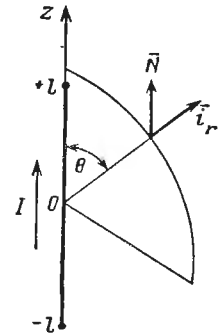


Рис. 8.14. Прямолинейный проводник с электрическим током.

Для определения электромагнитного поля проводника в дальней зоне необходимо найти векторы излучения. Так как в данном случае магнитные токи отсутствуют, то вектор $\dot{\vec{L}} = 0$.

Вектор $\dot{\vec{N}}$ равен

$$\dot{\vec{N}} = \int e^{ikr' \cos\psi}\, d\dot{\vec{q}}_e = \int_{-l}^{+l} \dot{I}(z')\, e^{ikr' \cos\psi}\, d\vec{z}',$$

ибо при линейном распределении токов величина $\vec{dq}_e = Id\vec{l} = Id\vec{z}$, где $I(z')$ — функция тока в различных точках проводника.

Из рис. 8.14 следует, что сферические координаты точек источника имеют вид: $r' = z'$, $\theta' = 0$, а угол $\psi = \theta$. Тогда

$$\dot{\vec{N}} = \vec{i}_z \int_{-l}^{+l} \dot{I}(z')\, e^{ikz' \cos\theta}\, dz'.$$

Проекция этого вектора на направления $\vec{i}_\theta$ и $\vec{i}_\varphi$ сферической системы координат (рис. 8.14) равны:

$$\left.\begin{aligned} \dot{N}_\theta &= -\dot{N}_z \sin\theta = -\sin\theta \int_{-l}^{+l} \dot{I}(z')\, e^{ikz' \cos\theta}\, dz', \\ \dot{N}_\varphi &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{8.84}$$

Подставив найденные значения $\dot{N}_\theta$ и $\dot{N}_\varphi$ в формулы (8.81) получим общие выражения для составляющих векторов электромагнитного поля прямолинейного проводника с током в дальней зоне:

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_\theta &= \frac{i}{2\lambda} Z_0 \frac{e^{-ikr}}{r} \sin\theta \int_{-l}^{+l} \dot{I}(z') e^{ikz'\cos\theta}\, dz', \\ \dot{H}_\varphi &= \frac{\dot{E}_\theta}{Z_0}. \end{aligned}\right\} \tag{8.85}$$

Из этих выражений видно, что структура поля в дальней зоне существенно зависит от характера распределения тока по проводнику, т. е. от вида функции $I(z')$.

Ниже мы рассмотрим два практически важных примера с различным распределением тока по проводнику.

Симметричный вибратор

Если сторонняя напряженность поля, возбуждающая проводник, приложена в центре, то закон распределения тока по проводнику оказывается симметричным, близким к синусоидальному закону, характеризующему режим стоячей волны. Действительно, при таком способе возбуждения проводник можно рассматривать как развернутую двухпроводную линию, в которой устанавливается режим, близкий к режиму стоячих волн с узлами тока на концах.

Возбуждаемый таким образом прямолинейный проводник получил наименование симметричного вибратора.

В соответствии с изложенным распределение тока вдоль вибратора может быть аппроксимировано функцией:

$$\dot{I}(z) = \begin{cases} I_0 \sin k(l-z), & z \geqslant 0; \\ I_0 \sin k(l+z), & z \leqslant 0. \end{cases} \tag{8.86}$$

Подставим функцию $\dot{I}(z)$ из (8.86) в (8.85). В результате будем иметь

$$\dot{E}_\theta = \frac{i}{2\lambda} Z_0 \frac{e^{-ikr}}{r} \sin\theta \left\{ \int_{-l}^{0} I_0 \sin k(l+z') \times \right.$$

$$\left. \times e^{ikz'\cos\theta}\, dz' + \int_{0}^{+l} I_0 \sin k(l-z') e^{ikz'\cos\theta}\, dz' \right\}.$$

Вычисляя интегралы, стоящие в фигурных скобках, получим окончательные выражения для проекций векторов электромагнитного поля в дальней зоне:

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_\theta &= \frac{i}{2\pi}\, Z_0 I_0 \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\cos(kl\cos\theta) - \cos kl}{\sin\theta}, \\ \dot{H}_\varphi &= \frac{\dot{E}_\theta}{Z_0}. \end{aligned}\right\} \tag{8.87}$$

Из выражений (8.87) следует, что характеристика направленности рассматриваемого источника по напряженности поля имеет вид

$$E_m(\theta) = E_0 \frac{\cos(kl\cos\theta) - \cos kl}{\sin\theta};\ E_0 = \text{const}. \tag{8.88}$$

На рис. 8.15 изображены диаграммы направленности вибратора, построенные в полуплоскости $\varphi = \text{const}$ для четырех различных значений $m = 4l/\lambda$. Пунктирной кривой на том же рисунке

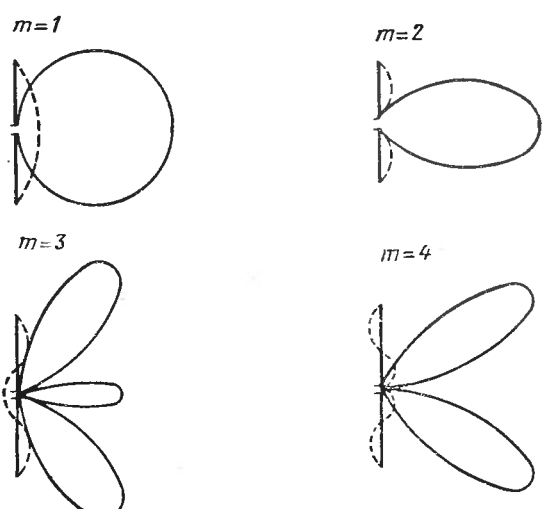


Рис. 8.15. Диаграммы направленности симметричного вибратора.

изображено распределение тока вдоль излучателя при выбранных m. Из рис. 8.15 видно, что с увеличением отношения l/λ диаграмма направленности источника расщепляется на несколько лепестков, которые, очевидно, появляются из-за интерференции полей, создаваемых различными участками проводника.

Для расчета диаграммы направленности вибратора по мощности вычислим проекцию $\dot{N}_\theta$ вектора излучения $\overline{\dot{N}}$ по формуле (8.84) с учетом (8.86)

$$\dot{N}_\theta = -\sin\theta \left\{ \int_{-l}^{0} I_0 \sin k(l+z') \, e^{ikz'\cos\theta} \, dz' + \right.$$

$$\left. + \int_{0}^{l} I_0 \sin k(l-z') \, e^{ikz'\cos\theta} \, dz' \right\} = I_0 \frac{\lambda}{\pi} \frac{\cos(kl\cos\theta) - \cos kl}{\sin\theta}.$$

Так как в рассматриваемом случае вектор $\dot{L} = 0$, то из выражений (8.82) следует, что

$$\Phi(\theta, \varphi) = \Phi_{11} = \frac{Z_0}{8\lambda^2} \dot{N}_\theta \dot{N}_\theta^*.$$

Подставляя сюда найденное значение N_θ, получим

$$\Phi(\theta, \varphi) = \frac{Z_0}{8\pi^2} I_0^2 \frac{[\cos(kl\cos\theta) - \cos kl]^2}{\sin^2\theta}. \tag{8.89}$$

На практике наиболее широкое применение находит полуволновой вибратор, длина которого $2l = \lambda/2$ ($kl = \pi/2$). Из выражений (8.87) следует, что проекции векторов электромагнитного поля полуволнового вибратора в дальней зоне имеют вид:

$$\dot{E}_\theta = \frac{i}{2\pi} Z_0 I_0 \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}, \qquad \dot{H}_\varphi = \frac{\dot{E}_\theta}{Z_0}. \tag{8.90}$$

Диаграмма направленности полуволнового вибратора по напряженности поля изображена на рис. 8.15 ($m = 1$).

Используя формулу (8.89), можно показать, что диаграмма направленности такого вибратора по мощности определяется выражением

$$\Phi = \frac{Z_0}{8\pi^2} I_0^2 \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}. \tag{8.91}$$

При $Z_0 = 120\,\pi$ *ом*

$$\Phi = \frac{15}{\pi} I_0^2 \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}. \tag{8.92}$$

Провод с бегущей волной

Если сторонняя напряженность поля приложена в конце проводника (например, в точке $z = -l$), то в нем возникает волна, движущаяся с некоторой скоростью v_1 к противоположному концу. При наличии на этом конце (в точке $z = +l$) специально подобранного сопротивления нагрузки, поглощающего энергию падающей волны, в проводнике устанавливается режим бегущих волн. В этом случае распределение тока по длине проводника будет определяться функцией

$$\dot{I}(z) = I_0 e^{-ik_1(z+l)}, \tag{8.93}$$

где $k_1 = \omega/v_1$ (величина l введена здесь потому, что волна «выходит» из точки $z = -l$).

Для расчета электромагнитного поля проводника с бегущей волной воспользуемся выражением (8.85). Принимая во внимание, что теперь

$$\int_{-l}^{+l} \dot{I}(z') e^{ikz'\cos\theta} dz' = \int_{-l}^{+l} I_0 e^{-ik_1 l} e^{-ik_1 z'} e^{ikz'\cos\theta} dz' =$$

$$= 2I_0 e^{-ik_1 l} \int_0^l \cos(k_1 - k\cos\theta) z' dz' = 2I_0 e^{-ik_1 l} \frac{\sin(k_1 - k\cos\theta) l}{k_1 - k\cos\theta},$$

получим

$$\dot{E}_\theta = \frac{i}{\lambda} Z_0 I_0 e^{-ik_1 l} \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\sin(k_1 - k\cos\theta) l}{k_1 - k\cos\theta} \sin\theta,$$

$$\dot{H}_\varphi = \frac{\dot{E}_\theta}{Z_0}.$$

Следовательно, характеристика направленности источника по напряженности поля имеет вид

$$E_m(\theta) = E_0 \frac{\sin x}{x} \sin\theta, \tag{8.94}$$

где $x = (k_1 - k\cos\theta) l$, $E_0 = \text{const}$.

Если скорость v_1 равна скорости распространения волны в свободном пространстве ($v_1 = v$), то

$$x = (1 - \cos\theta) kl = \frac{2\pi l}{\lambda} (1 - \cos\theta).$$

В этом случае

$$E_m(\theta) = E_0 \sin\theta \frac{\sin\left[\frac{2\pi l}{\lambda}(1-\cos\theta)\right]}{\frac{2\pi l}{\lambda}(1-\cos\theta)}. \tag{8.95}$$

На рис. 8.16 изображены диаграммы направленности проводника с бегущей волной, рассчитанные по формуле (8.95) для различных значений l/λ. Из этого рисунка видно, что диаграмма направленности имеет главный лепесток, прижатый к оси проводника по направлению распространения волны. При больших $m = 4l/\lambda$ наряду с главным лепестком появляются меньшие по величине боковые лепестки. Из рис. 8.16 также следует, что с увеличением m главный лепесток сужается, а число боковых лепестков растет.

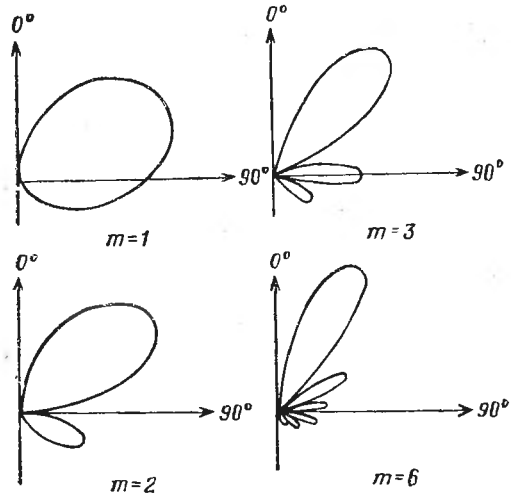


Рис. 8.16. Диаграммы направленности проводника с бегущей волной.

Для расчета характеристики направленности $\Phi(\theta, \varphi)$ необходимо вычислить проекцию $\dot{N}_0$ при условии (8.93), а затем использовать (8.82). Нетрудно показать, что в данном случае

$$\Phi(\theta) = \frac{I_0^2}{8} Z_0 \left(\frac{2l}{\lambda}\right)^2 \sin^2\theta \frac{\sin^2 x}{x^2}.$$

9. Принцип эквивалентных токов

В предыдущих параграфах был изложен способ расчета электромагнитного поля по заданным источникам в безграничной однородной изотропной среде. Ясно, что выведенные там формулы не могут быть непосредственно использованы для расчета поля в неоднородном пространстве.

Чтобы установить общие принципы решения таких задач, рассмотрим следующий пример. Пусть в области I с параметрами среды

ε_1, μ_1, g_1 имеются источники поля Q_1, Q_2, ..., Q_n. Требуется определить электромагнитное поле во внешнем пространстве (область II) с параметрами среды ε_2, μ_2, g_2 (рис. 8.17).

Используя формулы предыдущих параграфов, мы, очевидно, найдем поле, возбуждаемое источниками Q_1, Q_2, Q_3, ... в безграничной однородной среде с параметрами ε_1, μ_1, g_1 — так называемое поле источников. Разумеется, истинное поле в области I будет отличаться от поля источников, так как электромагнитные волны должны частично отражаться от граничной поверхности S. Равным образом, поле в области II будет отличаться от того поля, которое возбуждалось бы известными источниками в однородном пространстве с параметрами среды ε_2, μ_2, g_2.

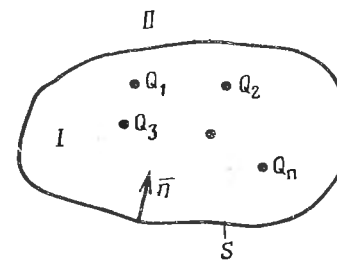


Рис. 8.17. К поясиению принципа эквивалеитных токов.

Чтобы определить поле в заданной области, необходимо иметь, как утверждает теорема единственности, касательные составляющие вектора $\bar{E}$ или вектора $\bar{H}$ на граничной поверхности S. Строго говоря, эти составляющие нам неизвестны, ибо они могут быть найдены лишь в результате полного решения поставленной задачи. Однако во многих интересных для практики случаях закон распределения касательных составляющих векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ на граничной поверхности известен с точностью, достаточной для инженерных расчетов. Тогда задача по расчету электромагнитного поля во внешнем пространстве сведется к определению поля в области II по известным граничным значениям векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ на поверхности S. Для решения такой задачи реальные источники целесообразно заменить некоторыми фиктивными эквивалентными источниками, поле которых в области I равно нулю, а во внешнем пространстве совпадает с электромагнитным полем истинных источников.

Но поле эквивалентных источников ($\bar{E}'$, $\bar{H}'$) будет совпадать во внешнем пространстве с истинным электромагнитным полем, если на поверхности S

$$\left.\begin{aligned} E'_{2\,\mathrm{tg}} &= E_{2\,\mathrm{tg}}, \\ H'_{2\,\mathrm{tg}} &= H_{2\,\mathrm{tg}}. \end{aligned}\right\} \qquad (8.96)$$

В самом деле, из теоремы единственности вытекает, что рассматриваемые поля будут одинаковы, если на S выполняется только одно из условий (8.96), второе же условие при этом удовлетворяется автоматически. Разумеется, мы считаем, что поле удовлетворяет также принципу излучения на бесконечности. Что касается обла-

сти I, то на ее поверхности:

$$\left.\begin{aligned} E'_{1\,tg} &= 0, \\ H'_{1\,tg} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{8.97}$$

ибо векторы $\overline{E}'$ и $\overline{H}'$ равны нулю в каждой точке этой области.

Итак, из выражений (8.96) и (8.97) следует, что касательные составляющие векторов $\overline{E}'$ и $\overline{H}'$ электромагнитного поля эквивалентных источников при переходе через поверхность S испытывают скачок.

Ранее в § 5 гл. VI было показано, что касательная составляющая вектора $\overline{H}$ имеет разрыв непрерывности на граничной поверхности S, если по ней текут поверхностные электрические токи. Величина скачка касательной составляющей вектора $\overline{H}$ связана с плотностью поверхностных электрических токов соотношением

$$\overline{n} \times (\overline{H}_1 - \overline{H}_2) = \overline{j}_S. \tag{8.98}$$

Здесь $\overline{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности S, направленный в область I.

Выражение (8.98), как известно, является следствием первого уравнения Максвелла в интегральной форме

$$\oint_l \overline{H}\,\overline{dl} = I + \frac{dN}{dt}$$

при наличии поверхностных токов.

Совершенно аналогично можно показать, что разрыв непрерывности касательной составляющей вектора $\overline{E}$ на поверхности S обусловлен наличием поверхностных магнитных токов. При этом из второго уравнения Максвелла в интегральной форме

$$\oint_l \overline{E}\,\overline{dl} = -I_м - \frac{d\Phi}{dt}$$

следует, что величина скачка $\overline{E}_{tg}$ связана с поверхностной плотностью магнитных токов $\overline{j}_{мS}$ соотношением

$$-[\overline{n} \times (\overline{E}_1 - \overline{E}_2)] = \overline{j}_{мS}. \tag{8.99}$$

На основании изложенного можно утверждать, что источниками лектромагнитного поля $\overline{E}'$ и $\overline{H}'$ являются поверхностные электрические и магнитные токи, текущие по граничной поверхности S. Так как в рассматриваемом случае

$$\overline{E}'_1 = \overline{E}_1 = 0 \text{ и } \overline{H}'_1 = \overline{H}_1 = 0,$$

то из выражений (8.98), (8.99) следует, что плотности эквивалентных поверхностных токов равны

$$\left.\begin{aligned} \dot{\bar{j}}_S &= -(\bar{n}\times\dot{\bar{H}}_2) = \dot{\bar{H}}_2\times\bar{n} \\ \dot{\bar{j}}_{MS} &= -(\dot{\bar{E}}_2\times\bar{n}) = \bar{n}\times\dot{\bar{E}}_2 \end{aligned}\right\} \text{ на } S. \tag{8.100}$$

Стало быть, расчет электромагнитного поля во внешнем пространстве сводится к определению поля эквивалентных источников в однородной среде. Так, вектор-потенциалы искомого электромагнитного поля находятся из выражений:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\bar{A}} &= \frac{\mu}{4\pi}\int_S \dot{\bar{j}}_S \frac{e^{-ikR}}{R}\,dS = \frac{\mu}{4\pi}\int_S (\dot{\bar{H}}_2\times\bar{n})\frac{e^{-ikR}}{R}\,dS, \\ \dot{\bar{F}} &= \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_S \dot{\bar{j}}_{MS} \frac{e^{-ikR}}{R}\,dS = \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_S (\bar{n}\times\dot{\bar{E}}_2)\frac{e^{-ikR}}{R}\,dS. \end{aligned}\right\} \tag{8.101}$$

Аналогично, векторы излучения $\dot{\bar{N}}$ и $\dot{\bar{L}}$ можно рассчитать по формулам:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\bar{N}} &= \int_S (\dot{\bar{H}}_2\times\bar{n})\, e^{ikr'\cos\psi}\,dS = \int_S \dot{\bar{j}}_S e^{ikr'\cos\psi}\,dS, \\ \dot{\bar{L}} &= \int_S (\bar{n}\times\dot{\bar{E}}_2)\, e^{ikr'\cos\psi}\,dS = \int_S \dot{\bar{j}}_{MS} e^{ikr'\cos\psi}\,dS. \end{aligned}\right\} \tag{8.102}$$

Наконец, имея выражения для вектор-потенциалов электромагнитного поля и соответствующих им векторов излучения, нетрудно найти значения векторов $\dot{\bar{E}}$ и $\dot{\bar{H}}$ по формулам (8.71) или (8.81), а также характеристику направленности по формуле (8.82).

Изложенный метод называется методом (или принципом) эквивалентных токов. Этот метод позволяет рассчитать электромагнитное поле любой ограниченной в пространстве системы источников, если известны касательные составляющие векторов $\dot{\bar{E}}$ и $\dot{\bar{H}}$ на некоторой замкнутой поверхности S, охватывающей источники.

Следует однако иметь в виду, что граничные значения для касательных составляющих векторов $\dot{\bar{E}}$ и $\dot{\bar{H}}$ нельзя вводить независимо друг от друга, ибо это противоречит теореме единственности решения уравнений Максвелла. Из теоремы единственности вытекает, что заданной на границе области составляющей $\dot{\bar{E}}_{tg}$ (или $\dot{\bar{H}}_{tg}$) соответствует совершенно определенная составляющая $\dot{\bar{H}}_{tg}$ (или $\dot{\bar{E}}_{tg}$), которая может иметь единственное, а не произвольное значение.

Стало быть, вводя какие-то подходящие, но в сущности независимые друг от друга выражения для касательных составляющих

векторов $\overline{E}$ и $\overline{H}$ на граничной поверхности и производя затем расчет поля с помощью изложенного выше метода, мы допускаем принципиальную ошибку. В результате оказывается, что найденное поле может не удовлетворять поставленным граничным условиям. Однако, если приближенные граничные значения для векторов $\overline{E}$ и $\overline{H}$ достаточно близки к истинным, подобная ошибка получается небольшой.

10. Излучение элемента плоскости с поверхностными электрическими и магнитными токами

Существенный интерес для практики представляет расчет электромагнитного поля поверхностных электрических и магнитных токов, распределенных известным образом в пределах некоторого элемента плоской поверхности. Дело в том, что многие реальные антенны на основании рассмотренного выше принципа эквивалентных токов могут быть представлены в виде источников подобного типа.

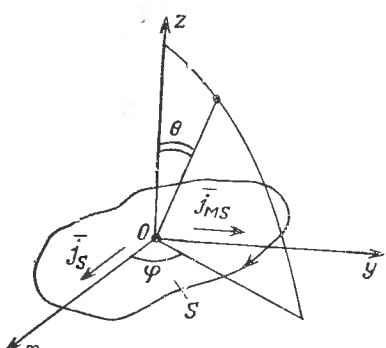


Рис. 8.18. Элемент плоскости с поверхностными электрическими и магнитными токами.

Предположим, что источником поля является элемент S плоскости $z = 0$ (рис. 8.18) с заданными на нем поверхностными электрическими и магнитными токами:

$$\dot{\overline{j}}_S = \overline{i}_x \dot{j}_0(x, y),$$
$$\dot{\overline{j}}_{MS} = \overline{i}_y \dot{j}_{M0}(x, y).$$

В этом случае векторы излучения, определяющие диаграмму направленности источника, будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} \dot{\overline{N}} &= \overline{i}_x \int_S \dot{j}_0(x', y')\, e^{ikr' \cos\psi}\, dS, \\ \dot{\overline{L}} &= \overline{i}_y \int \dot{j}_{M0}(x', y')\, e^{ikr' \cos\psi}\, dS. \end{aligned}\right\} \qquad (8.103)$$

Если полагать, что электрические и магнитные токи связаны соотношением $\dot{j}_{м0} = Z_0 \dot{j}_0$, то

$$\dot{\overline{N}} = \overline{i}_x \dot{N}_x \quad \text{и} \quad \dot{\overline{L}} = \overline{i}_y Z_0 \dot{N}_x,$$

причем

$$\dot{N}_x = \int_S \dot{j}_0(x', y')\, e^{ikr' \cos \psi}\, dS. \tag{8.104}$$

Рассчитаем проекции векторов излучения на направления θ и φ сферической системы координат. При этом будем, как обычно, полагать, что угол θ отсчитывается от оси z, а угол φ — от оси x (рис. 8.18). Так как проекции любого вектора $\overline{C}$ в сферической системе координат выражаются через его проекции в прямоугольных координатах соотношениями

$$\left.\begin{aligned} C_\theta &= (C_x \cos\varphi + C_y \sin\varphi)\cos\theta - C_z \sin\theta, \\ C_\varphi &= -C_x \sin\varphi + C_y \cos\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{8.105}$$

то в рассматриваемом случае

$$\dot{N}_\theta = \dot{N}_x \cos\theta \cos\varphi; \quad \dot{N}_\varphi = -\dot{N}_x \sin\varphi;$$
$$\dot{L}_\theta = Z_0 \dot{N}_x \cos\theta \sin\varphi; \quad \dot{L}_\varphi = Z_0 \dot{N}_x \cos\varphi.$$

Подставляя найденные значения проекций векторов $\dot{\overline{N}}$ и $\dot{\overline{L}}$ в формулы (8.81), получим для компонент векторов электромагнитного поля источника в дальней зоне:

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_\theta &= -\frac{i}{2\lambda} Z_0 \dot{N}_x \frac{e^{-ikr}}{r}(1+\cos\theta)\cos\varphi, \\ \dot{E}_\varphi &= \frac{i}{2\lambda} Z_0 \dot{N}_x \frac{e^{-ikr}}{r}(1+\cos\theta)\sin\varphi, \\ \dot{H}_\theta &= -\frac{\dot{E}_\varphi}{Z_0}, \\ \dot{H}_\varphi &= \frac{\dot{E}_\theta}{Z_0}. \end{aligned}\right\} \tag{8.106}$$

Предположим, что элемент плоскости S имеет форму прямоугольника со сторонами a и b (рис. 8.19), а величины токов в каждой точке поверхности S неизменны, т. е.

$$\dot{j}_0(x, y) = \dot{j}_0; \quad \dot{j}_{м0}(x, y) = \dot{j}_{м0},$$

причем

$$-\frac{a}{2} \leqslant x \leqslant \frac{a}{2} \quad \text{и} \quad -\frac{b}{2} \leqslant y \leqslant \frac{b}{2}.$$

В этом случае проекция $\dot{N}_x$ будет равна

$$\dot{N}_x = \dot{j}_0 \int_{-a/2}^{+a/2} \int_{-b/2}^{+b/2} e^{ikr' \cos \psi} \, dx' \, dy'.$$

Развернем выражение $r' \cos \psi$, используя формулу (8.75) и учитывая известные соотношения между сферическими и прямоугольными координатами точек источника

$$r' \sin \theta' \cos \varphi' = x'; \quad r' \sin \theta' \sin \varphi' = y'; \quad r' \cos \theta' = z'.$$

Так как в рассматриваемом случае $z' = 0$, то

$$r' \cos \psi = x' \sin 0 \cos \varphi + y' \sin \theta \sin \varphi.$$

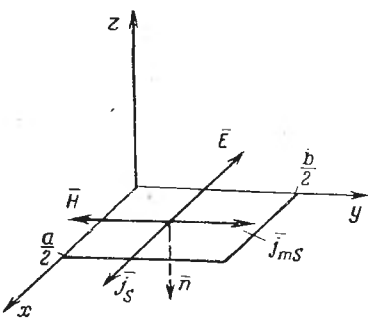


Рис. 8.19. Прямоугольник с поверхностными электрическими и магнитными токами.

Следовательно,

$$\dot{N}_x = \dot{j}_0 \int_{-a/2}^{+a/2} \int_{-b/2}^{+b/2} e^{ik(x' \sin \theta \cos \varphi + y' \sin \theta \sin \varphi)} \, dx' \, dy' =$$

$$= \dot{j}_0 \, ab \, \frac{\sin\left(\frac{ka}{2} \sin \theta \cos \varphi\right)}{\frac{ka}{2} \sin \theta \cos \varphi} \, \frac{\sin \frac{kb}{2} \sin \theta \sin \varphi}{\frac{kb}{2} \sin \theta \sin \varphi}.$$

Подставив найденное значение $\dot{N}_x$ в (8.106), получим:

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_0 &= -\frac{i}{2\lambda} \dot{j}_0 Z_0 S \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\sin X}{X} \frac{\sin Y}{Y} (1 + \cos \theta) \cos \varphi, \\ \dot{E}_\varphi &= \frac{i}{2\lambda} \dot{j}_0 Z_0 S \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\sin X}{X} \frac{\sin Y}{Y} (1 + \cos \theta) \sin \varphi, \\ \dot{H}_\theta &= -\frac{\dot{E}_\varphi}{Z_0}; \quad \dot{H}_\varphi = \frac{\dot{E}_\theta}{Z_0}, \end{aligned}\right\} \quad (8.107)$$

где

$$X = \frac{ka}{2} \sin \theta \cos \varphi; \qquad Y = \frac{kb}{2} \sin \theta \sin \varphi; \qquad S = ab.$$

Исследуем электромагнитное поле рассматриваемого источника при $\varphi = 0$, (плоскость xOz) и $\varphi = \pi/2$ (плоскость yOz). Из выражений (8.107) следует, что при $\varphi = 0$ проекция $E_\varphi = 0$, а

$$\dot{E}_\theta(\theta, 0) = -\frac{i}{2\lambda} \dot{j}_0 Z_0 S \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}{\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta}(1+\cos\theta).$$

Аналогично, при $\varphi = \pi/2$ проекция $E_\theta = 0$, а

$$\dot{E}_\varphi\left(\theta, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{i}{2\lambda} \dot{j}_0 Z_0 S \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta\right)}{\frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta}(1+\cos\theta).$$

Сравнивая последние два выражения, можно заключить, что характеристика направленности прямоугольного элемента с равномерным распределением токов в главных плоскостях ($\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$) имеет вид

$$E_m(\theta) = E_0 \frac{\sin\left(\frac{\pi l}{\lambda}\sin\theta\right)}{\frac{\pi l}{\lambda}\sin\theta}(1+\cos\theta), \qquad (8.108)$$

где $l = a$, если $\varphi = 0$, $l = b$, если $\varphi = \frac{\pi}{2}$; $E_0 = \text{const}$.

Вид диаграммы направленности (8.108) существенно зависит от отношения l/λ (т. е. от величины a/λ или b/λ).

На рис. 8.20 изображены нормированные кривые $E_m(\theta)$, построенные для различных значений l/λ. Из этого рисунка следует, что при $l/\lambda > 1$ диаграмма направленности источника имеет большой по величине главный лепесток и несколько небольших боковых лепестков. Наличие минимумов и максимумов в диаграмме направленности источника, очевидно, есть результат интерференции полей, созданных элементарными участками излучающей поверхности S.

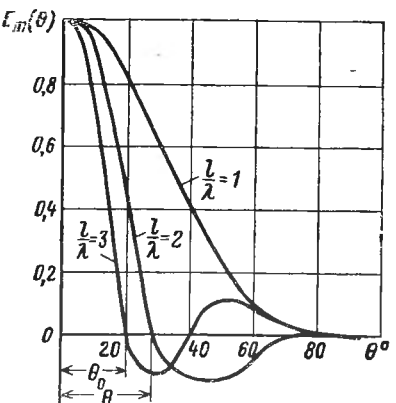


Рис. 8.20. Диаграммы направленности прямоугольника с поверхностными электрическими и магнитными токами.

В количественном отношении ширина главного лепестка диаграммы направленности характеризуется углом раствора $2\theta_0$ (рис. 8.20), где θ_0 — минимальный угол, при котором функция

$E_m(\theta)$ обращается в нуль. Из выражения (8.108) вытекает, что $E_m(\theta_0) = 0$, если

$$\sin(\pi l/\lambda \sin\theta_0) = 0$$

и, следовательно,

$$\sin\theta_0 = \lambda/l.$$

Поэтому величина угла раствора главного лепестка равна

$$2\theta_0 = 2\arcsin\lambda/l.$$

Если

$$\lambda/l \ll 1, \text{ то } 2\theta_0 \approx 2\lambda/l.$$

Таким образом, с увеличением отношения l/λ ширина главного лепестка диаграммы направленности уменьшается, т. е. излучение электромагнитных волн становится более направленным. Для получения остронаправленного излучения необходимо, чтобы линейные размеры источника значительно превышали длину волны. Этот вывод имеет важное значение, ибо он определяет принципы построения направленных антенн.

Аналогичные расчеты можно провести и в том случае, когда излучающий элемент имеет форму круга с равномерно распределенными электрическими и магнитными токами. Если радиус круга равен a, то характеристика направленности источника будет определяться выражением

$$E_m(\theta) = E_0' \frac{J_1\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}{\frac{2\pi a}{\lambda}\sin\theta}(1+\cos\theta), \tag{8.109}$$

где $E_0' = \text{const}$ и $J_1(x)$—функция Бесселя первого порядка. Ввиду того, что функция $J_1(x)/x$ весьма близка к функции $\sin x/x$ (рис. 8.21), диаграмма направленности круглого источника в главных плоскостях будет аналогична диаграмме направленности прямоугольного источника. Поэтому выводы, полученные при исследовании электромагнитного поля прямоугольного элемента S, качественно применимы и к полю круглого источника.

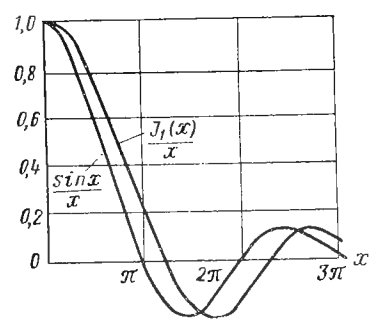


Рис. 8.21. Функции $\sin x/x$ и $J_1(x)/x$.

Предположим, что излучающий элемент имеет малые (или в пределе бесконечно малые) размеры, т. е. величина $S \to \Delta S \to 0$. В этом случае при любой форме элемента S проекция $\dot{N}_x$ будет равна

$$\dot{N}_x = \int_{\Delta S} \dot{j}_0(x', y')\, e^{ikr'\cos\psi}\, dS = \dot{j}_0 \Delta S.$$

Подставив найденное значение $\dot{N}_x$ в (8.106), получим выражения для компонент векторов электромагнитного поля элементарного поверхностного источника в дальней зоне:

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_\theta &= -\frac{i}{2\lambda}\,\dot{j}_0 Z_0 \Delta S\,\frac{e^{-ikr}}{r}\,(1+\cos\theta)\cos\varphi, \\ \dot{E}_\varphi &= \frac{i}{2\lambda}\,\dot{j}_0 Z_0 \Delta S\,\frac{e^{-ikr}}{r}\,(1+\cos\theta)\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{8.110}$$

Из выражений (8.110) следует, что характеристика направленности подобного элементарного источника, обычно называемого источником Гюйгенса, в главных плоскостях имеет вид

$$E_m(\theta) = E_0(1+\cos\theta)$$

и, следовательно, является кардиоидой (рис. 8.22).

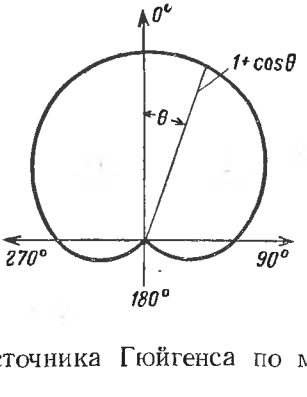


Рис. 8.22. Диаграмма направленности источника Гюйгенса в главных плоскостях (полярные координаты).

Характеристика направленности источника Гюйгенса по мощности определяется выражением

$$\Phi(0, \varphi) = \frac{Z_0}{8\lambda^2}\,j_0^2\,(dS)^2\,(1+\cos\theta)^2.$$

(Вывод этой формулы предоставляется читателю.)

Из выражений (8.100) следует, что система поверхностных электрических и магнитных токов, определяемых равенствами

$$\dot{\bar{j}}_s = \begin{cases} \bar{i}_x \dot{j}_0 & \text{на } S \\ 0 & \text{вне } S \end{cases} \quad \text{и} \quad \dot{\bar{j}}_{M\,S} = \begin{cases} \bar{i}_y \dot{j}_{M0} & \text{на } S \\ 0 & \text{вне } S \end{cases} \tag{8.111}$$

в плоскости $z=0$, эквивалентна распределению векторов электромагнитного поля вида

$$\dot{\bar{H}} = \begin{cases} \bar{i}_y \dot{H}_y = -\bar{i}_y \dot{j}_0 & \text{на } S; \\ 0 & \text{вне } S \end{cases} \quad \dot{\bar{E}} = \begin{cases} \bar{i}_x \dot{E}_x = -\bar{i}_x \dot{j}_{M0} & \text{на } S \\ 0 & \text{вне } S \end{cases}$$

(см. рис. 8.19), причем в пределах S

$$\frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y} = \frac{\dot{j}_{м0}}{\dot{j}_0} = Z_0.$$

Последние соотношения, как известно, справедливы для составляющих векторов поля плоской волны. Следовательно, задачу по расчету поля плоского элемента S с токами (8.111) мы могли бы сформулировать как задачу об излучении соответствующего участка фронта плоской волны.

11. Излучение из открытого конца коаксиальной линии

Рассмотрим еще один пример, иллюстрирующий применение метода эквивалентных токов.

Пусть в полубесконечной коаксиальной линии с идеально проводящими стенками (рис. 8.23) возбуждена электромагнитная волна, распространяющаяся от $z \to -\infty$ к $z = 0$. На открытом конце линии, т. е. в плоскости $z = 0$, часть электромагнитной энергии падающей волны, очевидно, отразится обратно, а другая часть будет излучаться в окружающее пространство.



Рис. 8.23. К расчету поля излучения из открытого конца коаксиальной линии.

Вычислим диаграмму направленности подобной излучающей системы. С этой целью введем некоторую замкнутую поверхность S, охватывающую источники поля, и зададимся на ней законом распределения эквивалентных токов, достаточно близким к истинному закону. В данном случае такую поверхность целесообразно составить из участка плоскости $z = 0$; $0 \leqslant \rho \leqslant b$ (на рис. 8.23 он обозначен $S_{осн}$) боковой поверхности внешнего цилиндра $S_б$ и участка бесконечно удаленной плоскости $z \to -\infty$, $0 \leqslant \rho \leqslant b$.

Чтобы найти, хотя бы приближенно, закон распределения электрических и магнитных токов в плоскости $z = 0$; $0 \leqslant \rho \leqslant b$ и на поверхности внешнего цилиндра, рассмотрим структуру электромагнитного поля внутри коаксиальной линии.

Ниже будет показано, что в бесконечной коаксиальной линии могут существовать волны различных типов. Сейчас же мы ограничимся случаем, когда по линии распространяется простейшая волна. Проекции векторов $\dot{E}_{пад}$ и $\dot{H}_{пад}$ поля этой волны в цилиндрической системе координат имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_{\rho\,пад} &= \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{\dot{A}_0}{\rho}\,e^{-ikz} \\ \dot{H}_{\varphi\,пад} &= \frac{\dot{A}_0}{\rho}\,e^{-ikz} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &a \leqslant \rho \leqslant b, \\ &0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \end{aligned}$$

где $\dot{A}_0$ — некоторая постоянная.

Если радиальные размеры линии малы по сравнению с длиной волны, то мощность, излучаемая из открытого конца такой системы, по-видимому, будет незначительна. Следовательно, распространяющаяся по линии волна почти полностью отразится обратно. Иными словами, мы можем полагать, что в плоскости $z = 0$ напряженность магнитного поля равна нулю (линия «разомкнута» на конце), а напряженность электрического поля максимальна. В соответствии с этим при $z = 0$ будем иметь:

$$\dot{H}_\varphi \approx 0, \quad \dot{E}_\rho \approx \frac{\dot{A}_0}{\rho}; \quad \dot{A} = \text{const}.$$

Конечно, в действительности электромагнитное поле на открытом конце линии имеет более сложную структуру, тем не менее применяемая здесь аппроксимация приводит к результатам, достаточно близким к данным опыта.

Предположим далее, что на внешних проводящих поверхностях линии (боковая поверхность внешнего цилиндра $S_б$, торцевая поверхность внутреннего проводника и участок бесконечно удаленной плоскости $z \to -\infty$) проекции векторов $\dot{\overline{E}}$ и $\dot{\overline{H}}$, касательные к последним, равны нулю и, следовательно, равны нулю соответствующие им эквивалентные токи. Это допущение в действительности также не имеет места, ибо фактически на поверхности идеального проводника обращаются в нуль лишь касательные проекции вектора $\overline{E}$. Касательные же проекции вектора $\overline{H}$ и эквивалентные им электрические токи отличны от нуля. Однако эти токи обычно невелики и, кроме того, они быстро затухают при удалении от открытого конца линии. Поэтому последнее наше допущение также не приводит к значительным ошибкам.

Таким образом, приближенно можно считать, что диаграмма направленности коаксиальной линии с открытым концом определяется круговым магнитным током

$$\dot{\overline{I}}_{мS} = \overline{n} \times \dot{\overline{E}} = \overline{i}_\varphi \frac{\dot{A}}{\rho}, \tag{8.112}$$

заданным в плоскости $z = 0$; $a \leqslant \rho \leqslant b$; $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, где $\overline{i}_\varphi$ — орт координатной линии φ в цилиндрической системе координат.

Подставляя выражение (8.112) в формулу (8.102) и учитывая (8.75), получим при $\theta' = \pi/2$ и $r' = \rho'$

$$\dot{\overline{L}} = \dot{A} \int_0^{2\pi} \int_a^b \overline{i}_\varphi \, e^{ik\rho' \sin\theta \cos(\varphi - \varphi')} d\rho' \, d\varphi'. \tag{8.113}$$

Можно показать (см., например, аналогичное исследование поля рамки с электрическим током, проведенное в § 9 гл. V), что вектор излучения $\dot{\overline{L}}$, определяемый равенством (8.113), будет иметь одну проекцию $\dot{L}_\varphi$, отличную от нуля, причем

$$\dot{L}_\varphi = \dot{A} \int_0^{2\pi} \int_a^b e^{ik\rho' \sin\theta \cos\varphi'} \cos\varphi' \, d\rho' \, d\varphi'.$$

Если длина волны $\lambda \gg b$, то функцию $e^{ik\rho' \sin\theta \cos\varphi'}$ для приближенных вычислений можно заменить суммой двух первых членов ее степенного ряда:

$$e^{ik\rho' \sin\theta \cos\varphi'} \approx 1 + k\rho' \sin\theta \cos\varphi'.$$

Тогда

$$\dot{L}_\varphi \approx \dot{A} \int_0^{2\pi} \int_a^b (1 + ik\rho' \sin\theta \cos\varphi') \cos\varphi' \, d\rho' \, d\varphi' = ik\dot{A} \frac{S_0}{2} \sin\theta, \tag{8.114}$$

где $S_0 = \pi (b^2 - a^2)$ — площадь кольца.

Подставив найденное значение L_φ в (8.82), получим выражение для диаграммы направленности рассматриваемого источника по мощности

$$\Phi(\theta, \varphi) = \frac{\pi^2}{8\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\lambda^4} A^2 S_0^2 \sin^2\theta.$$

Проекции векторов электромагнитного поля в дальней зоне могут быть найдены из общих формул (8.81) с учетом (8.114):

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_\theta &= \frac{\pi}{2\lambda^2} \dot{A} S_0 \frac{e^{-ikr}}{r} \sin\theta, \\ \dot{H}_\varphi &= \frac{\dot{E}_\theta}{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}. \end{aligned}\right\} \qquad (8.115)$$

Сравнивая (8.115) с выражениями, определяющими поле элементарного электрического диполя, можно заметить, что в дальней зоне поле излучения из открытого конца коаксиальной линии малых размеров аналогично полю диполя.

12. Входное сопротивление источника электромагнитного поля

Предположим, что источник электромагнитного поля, находящийся в однородной изотропной среде с нулевой проводимостью, представляет собой тонкий провод с известным законом распределения электрического тока по его объему V_0.

Введем в рассмотрение область V_r, ограниченную поверхностью S_r, охватывающей проводник с током, и напишем для этой области теорему Умова — Пойнтинга в комплексной форме:

$$\int_{V_r} \dot{\bar{j}}^* \dot{\bar{E}}_{ст} dV = i\omega \int_{V_r} \left(\mu \dot{\bar{H}} \dot{\bar{H}}^* - \varepsilon \dot{\bar{E}} \dot{\bar{E}}^*\right) dV + \int_{V_r} \frac{\dot{\bar{j}} \dot{\bar{j}}^*}{g} dV + \int_{S_r} \left(\dot{\bar{E}} \times \dot{\bar{H}}^*\right) \overline{dS}.$$

Так как электрические токи отличны от нуля только в объеме V_0 (там, где $g \neq 0$), то последнее равенство можно переписать в виде

$$\int_{V_0} \dot{\bar{j}}^* \dot{\bar{E}}_{ст} dV = i\omega \int_{V_r} \left(\mu \dot{\bar{H}} \dot{\bar{H}}^* - \varepsilon \dot{\bar{E}} \dot{\bar{E}}^*\right) dV + \int_{V_0} \frac{\dot{\bar{j}} \dot{\bar{j}}^*}{g} dV + \int_{S_r} \left(\dot{\bar{E}} \times \dot{\bar{H}}^*\right) \overline{dS}. \qquad (8.116)$$

Если размеры поперечного сечения проводника много меньше его длины l, то от объемного распределения токов в левой части (8.116) можно перейти к линейному, имея в виду, что $\bar{j}dV = I\bar{dl}$. В соответствии с этим будем иметь

$$\int_l \dot{I}^* \dot{\bar{E}}_{\text{ст}}\, \bar{dl} = i\omega \int_{V_r} \left(\mu \dot{\bar{H}}\dot{\bar{H}}^* - \varepsilon \dot{\bar{E}}\dot{\bar{E}}^*\right) dV + \\ + \int_{V_0} \frac{\dot{\bar{j}}\dot{\bar{j}}^*}{g}\, dV + \int_{S_r} \left(\dot{\bar{E}} \times \dot{\bar{H}}^*\right) \bar{dS}. \qquad (8.117)$$

Здесь $\dot{I}$ — комплексная амплитуда тока, текущего по проводнику.

Соотношение (8.117), физический смысл которого был рассмотрен в § 5 гл. V, является аналогом известного в теории электрических цепей соотношения

$$\dot{\mathscr{E}}\, \dot{I} = 2P + i2P_x,$$

где $\dot{\mathscr{E}}$ — э. д. с. на входе двухполюсника (рис. 8.24); $\dot{I}$ — ток, текущий по двухполюснику; P — активная мощность, потребляемая двухполюсником; P_x — реактивная мощность двухполюсника.



Рис. 8.24. К расчету входного сопротивления двухполюсника.

Известно далее, что входное сопротивление двухполюсника равно

$$Z_{\text{вх}} = R_{\text{вх}} + iX_{\text{вх}} = \frac{\dot{\mathscr{E}}}{\dot{I}} = \frac{\dot{\mathscr{E}}\, \dot{I}^*}{I_m^2},$$

причем

$$R_{\text{вх}} = \frac{2P}{I_m^2} = \frac{1}{I_m^2} \operatorname{Re}\left(\dot{\mathscr{E}}\, \dot{I}^*\right);$$

$$X_{\text{вх}} = \frac{2P}{I_m^2} = \frac{1}{I_m^2} \operatorname{Im}\left(\dot{\mathscr{E}}\, \dot{I}^*\right); \qquad (8.118)$$

I_m — амплитуда тока.

Рассматриваемый источник поля с точки зрения теории электрических цепей представляет собой по отношению к линии передачи определенную нагрузку и, следовательно, может быть заменен некоторым эквивалентным двухполюсником с соответствующим входным сопротивлением $Z_{\text{вх}}$.

Чтобы найти входное сопротивление источника (антенны), рассмотрим более подробно равенство (8.117). Пусть сторонняя напряженность поля, возбуждающая антенну, приложена в пределах небольшого промежутка $[a, b]$ контура l. Тогда

$$\int_l \dot{I}^* \dot{\bar{E}}_{\text{ст}}\, \bar{dl} = \int_a^b \dot{I}^* \dot{\bar{E}}_{\text{ст}}\, \bar{dl} \approx \dot{I}^*_{\text{вх}}\, \dot{\mathscr{E}}.$$

Здесь $\dot{I}_{\text{вх}}$ — комплексная амплитуда тока на входе антенны (в точках, где приложена сторонняя напряженность поля), $\mathscr{E}$ — сторонняя э. д. с. Отсюда следует, что входное сопротивление антенны равно

$$Z_{\text{вх}} = R_{\text{вх}} + iX_{\text{вх}} = \frac{\dot{\mathscr{E}}}{\dot{I}_{\text{вх}}} = \frac{1}{I^2_{\text{вх}m}} \int_l \dot{I}^* \dot{\bar{E}}_{\text{ст}}\, \overline{dl},$$

или

$$\left.\begin{aligned} R_{\text{вх}} &= \frac{1}{I^2_{\text{вх}m}} \operatorname{Re} \int_l \dot{I}^* \dot{\bar{E}}_{\text{ст}}\, \overline{dl}, \\ X_{\text{вх}} &= \frac{1}{I^2_{\text{вх}m}} \operatorname{Im} \int_l \dot{I}^* \dot{\bar{E}}_{\text{ст}}\, \overline{dl}, \end{aligned}\right\} \tag{8.119}$$

[ср. эти выражения с формулами (8.118)]. Принимая во внимание, что

$$\operatorname{Re} \int_l \dot{I}^* \dot{\bar{E}}_{\text{ст}}\, \overline{dl} = \int_{V_0} \frac{|\dot{\bar{j}}|^2}{g}\, dV + \operatorname{Re} \int_{S_r} \left(\dot{\bar{E}} \times \dot{\bar{H}}^*\right) \overline{dS},$$

$$\operatorname{Im} \int_l \dot{I}^* \dot{\bar{E}}_{\text{ст}}\, \overline{dl} = \omega \int_{V_r} \left(\mu |\dot{\bar{H}}|^2 - \varepsilon |\dot{\bar{E}}|^2\right) dV + \operatorname{Im} \int_{S_r} \left(\dot{\bar{E}} \times \dot{\bar{H}}^*\right) \overline{dS},$$

получим

$$R_{\text{вх}} = \frac{1}{I^2_{\text{вх}m}} \int_{V_0} \frac{|\dot{\bar{j}}|^2}{g}\, dV + \frac{1}{I^2_{\text{вх}m}} \operatorname{Re} \int_{S_r} \left(\dot{\bar{E}} \times \dot{\bar{H}}^*\right) \overline{dS},$$

$$X_{\text{вх}} = \frac{\omega}{I^2_{\text{вх}m}} \int_{V_r} \left(\mu |\dot{\bar{H}}|^2 - \varepsilon |\dot{\bar{E}}|^2\right) dV + \frac{1}{I^2_{\text{вх}m}} \operatorname{Im} \int_{S_r} \left(\dot{\bar{E}} \times \dot{\bar{H}}^*\right) \overline{dS}.$$

Таким образом, активная составляющая входного сопротивления источника, находящегося в области V_r, будет определяться величиной активной мощности, которую линия передачи отдает источнику. Реактивная составляющая входного сопротивления определяется величиной реактивной мощности, заключенной в объеме V_r, а также «излучаемой» через поверхность S_r.

Предположим теперь, что область V_r имеет форму сферы бесконечно большого радиуса с центром на проводнике. В этом случае

$$\operatorname{Re} \int_{S_r/r\to\infty} \left(\dot{\bar{E}} \times \dot{\bar{H}}^*\right) \overline{dS} = \int_{S_r/r\to\infty} \left(\dot{\bar{E}} \times \dot{\bar{H}}^*\right) \overline{dS},$$

а

$$\operatorname{Im} \int_{S_r/r\to\infty} \left(\dot{\bar{E}} \times \dot{\bar{H}}^*\right) \overline{dS} = 0,$$

так как в дальней зоне векторы $\dot{\bar{E}}$ и $\dot{\bar{H}}$ изменяются в фазе [см. (8.81)] и, следовательно, произведение $(\dot{\bar{E}} \times \dot{\bar{H}}^*)\, \bar{dS}$ является чисто вещественной величиной. Тогда активная и реактивная составляющие входного сопротивления будут равны:

$$\left.\begin{aligned} R_{\text{вх}} &= \frac{1}{I^2_{\text{вх}m}} \int\limits_{V_0} \frac{\left|\dot{\bar{j}}\right|^2}{g}\, dV + \lim_{r\to\infty} \frac{1}{I^2_{\text{вх}\,m}} \int\limits_{S_r} \left(\dot{\bar{E}} \times \dot{\bar{H}}^*\right)\, \bar{dS}, \\ X_{\text{вх}} &= \lim_{r\to\infty} \frac{\omega}{I^2_{\text{вх}m}} \int\limits_{V_r} \left(\mu \left|\dot{\bar{H}}\right|^2 - \varepsilon \left|\dot{\bar{E}}\right|^2\right) dV. \end{aligned}\right\} \qquad (8.120)$$

Из выражений (8.120) следует, что активная составляющая входного сопротивления источника в свободном пространстве представляет собой сумму двух слагаемых. Первое слагаемое

$$R_{\text{п}} = \frac{1}{I^2_{\text{вх}\,m}} \int\limits_{V_0} \frac{\left|\dot{\bar{j}}\right|^2}{g}\, dV$$

обусловлено активными потерями электромагнитной энергии в самом источнике, поэтому оно называется сопротивлением потерь.

Второе слагаемое

$$R_{\Sigma} = \frac{1}{I^2_{\text{вх}m}} \lim \int\limits_{S_r/r\to\infty} \left(\dot{\bar{E}} \times \dot{\bar{H}}^*\right)\, \bar{dS} \qquad (8.121)$$

определяется активной мощностью, излучаемой в окружающее пространство, и, следовательно, является сопротивлением излучения источника. В том случае, когда $R_{\text{п}} \ll R_{\Sigma}$ величина $R_{\text{вх}} \approx R_{\Sigma}$.

Так как мощность излучения

$$P_{\Sigma} = \frac{1}{2} \lim_{r\to\infty} \int\limits_{S_r} \left(\dot{\bar{E}} \times \dot{\bar{H}}^*\right)\, \bar{dS} = \int \Phi(\theta, \varphi)\, d\Omega,$$

то для расчета сопротивления излучения антенны в свободном пространстве можно использовать формулу

$$R_{\Sigma} = \frac{2}{I^2_{\text{вх}\,m}} \int \Phi(\theta, \varphi)\, d\Omega, \qquad (8.122)$$

где интегрирование происходит по полному телесному углу.

Из выражений (8.121), (8.122) видно, что сопротивление излучения источника определяется величиной и характером распределения электромагнитного поля в дальней зоне, т. е. диаграммой

направленности источника по мощности. Реактивная составляющая входного сопротивления источника зависит, как это вытекает из (8.120), от соотношения энергии электрического и магнитного полей во всем пространстве. Однако напряженности электрического и магнитного полей имеют наибольшие значения в ближней зоне. Поэтому реактивная составляющая входного сопротивления будет зависеть главным образом от величины и структуры электромагнитного поля в ближней зоне.

Рассчитаем сопротивление излучения полуволнового вибратора. Подставив в (8.122) значение $\Phi(\theta, \varphi)$ для такого источника из (8.92), получим

$$R_{\Sigma} = \frac{30}{\pi} \frac{I_0^2}{I_{\text{вх}\,m}^2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} \sin\theta d\theta d\varphi =$$

$$= 60 \frac{I_0^2}{I_{\text{вх}\,m}^2} \int_0^{\pi} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} d\theta \ [\text{ом}].$$

Если сторонняя э. д. с. приложена к вибратору в пучности тока, то $I_{\text{вх}\,m} = I_0$. В этом случае

$$R_{\Sigma_0} = 60 \int_0^{\pi} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} d\theta \ [\text{ом}].$$

Для вычисления последнего интеграла применим подстановку $u = \cos\theta$.
Тогда

$$d\theta = -\frac{du}{\sin\theta},$$

$$R_{\Sigma_0} = 60 \int_{-1}^{+1} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}u\right)}{1-u^2} du \ [\text{ом}].$$

Учитывая, что

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{2}u\right) = \frac{1+\cos(\pi u)}{2},$$

$$\frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u}\right),$$

будем иметь

$$R_{\Sigma_0} = 15 \int_{-1}^{+1} \frac{1+\cos(\pi u)}{1+u} du + 15 \int_{-1}^{+1} \frac{1+\cos(\pi u)}{1-u} du \ [\text{ом}].$$

Для вычисления интегралов применим в первом из них подстановку $1+u=v/\pi$, а во втором $1-u=v/\pi$. Проведя несложные алгебраические преобразования, получим

$$R_{\Sigma_0}=30\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos v}{v}\,dv\ [ом].$$

Из теории специальных функций известно*), что

$$\int_0^x\frac{1-\cos v}{v}\,dv=\ln\gamma x+\int_x^\infty\frac{\cos v}{v}\,dv;\quad \gamma=1{,}7811.$$

Но функция $-\int_x^\infty\frac{\cos v}{v}\,dv$, называемая интегральным косинусом и обозначаемая $\mathrm{Ci}\,(x)$, табулирована. Поэтому

$$\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos v}{v}\,dv=\ln 2\pi\gamma-\mathrm{Ci}\,(2\pi).$$

Таким образом, сопротивление излучения полуволнового вибратора равно

$$R_{\Sigma_0}=30\,[\ln 2\pi\gamma-\mathrm{Ci}\,(2\pi)]\ ом.$$

Так как $\ln 2\pi\gamma\approx 2{,}415$, а $\mathrm{Ci}\,(2\pi)\approx -0{,}021$, то $R_{\Sigma_0}\approx 73{,}08$ *ом*.

13. Метод наводимых э. д. с.

Входное сопротивление источника поля можно также определить, используя метод наводимых э. д. с. Этот метод впервые был сформулирован независимо друг от друга советским ученым Д. А. Рожанским и французским ученым Бриллуэном в 1922 г. Однако широкое практическое применение он получил после работ советских ученых А. А. Пистолькорса и И. Г. Кляцкина.

Для выяснения сущности метода наводимых э. д. с. рассмотрим источник электромагнитного поля в виде линейного замкнутого проводника с током (рис. 8.25), к которому на промежутке $a-b$ приложено стороннее поле с напряженностью $\bar{E}_{ст}$.

Под действием сторонней э. д. с. в проводнике возникает переменный электрический ток, который возбуждает в пространстве

*) См., например, книгу Е. Янке и Ф. Эмде «Таблицы функций с формулами и кривыми», Гостехиздат, М., 1949.

электромагнитное поле. Последнее, как уже указывалось в § 1 этой главы, будет удовлетворять на контуре идеального проводника граничным условиям:

$$(\bar{E}_{ст})_{tg} = -\bar{E}_{tg}.$$

Для вычисления входного сопротивления источника, в соответствии с формулой (8.119), умножим обе части последнего равенства

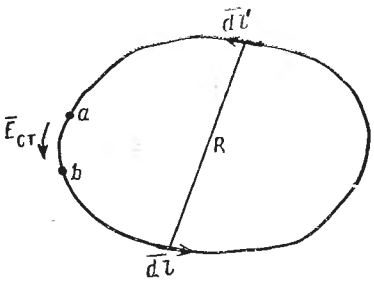


Рис. 8.25. К анализу метода наводимых э. д. с.

на величину $\dot{I}^* \overline{dl}$ и проинтегрируем полученные выражения по контуру l. В результате будем иметь

$$\oint_l (\dot{\bar{E}}_{ст})_{tg} \dot{I}^* \overline{dl} = -\oint_l \dot{\bar{E}}_{tg} \dot{I}^* \overline{dl} = -\oint_l \dot{I}^* \dot{\bar{E}} \overline{dl}. \qquad (8.123)$$

Так как сторонняя напряженность поля отлична от нуля лишь в пределах малого промежутка a—b, то

$$\oint_l (\dot{\bar{E}}_{ст})_{tg} \dot{I}^* \overline{dl} = \dot{I}^*_{вх} \dot{\mathscr{E}}, \qquad (8.124)$$

где $\dot{\mathscr{E}} = \int_a^b \dot{\bar{E}}_{ст} \overline{dl}$ — сторонняя э. д. с; $\dot{I}_{вх}$ — ток в точках, где приложено стороннее поле.

Используя (8.124), перепишем равенство (8.123) в виде

$$\dot{I}^*_{вх} \dot{\mathscr{E}} = -\oint_l \dot{I}^* \dot{\bar{E}} \overline{dl}. \qquad (8.125)$$

В установившемся режиме

$$\dot{\bar{E}} = -i\omega \dot{\bar{A}} - \operatorname{grad} \dot{U},$$

поэтому

$$\dot{I}^*_{вх} \dot{\mathscr{E}} = \oint_l (i\omega \dot{\bar{A}} + \operatorname{grad} \dot{U}) \dot{I}^* \overline{dl}. \qquad (8.126)$$

Будем полагать, что амплитуда тока не меняется вдоль контура l, как это, например, имело место в рамке малых размеров*). Тогда, разделив обе части равенства (8.126) на $I_{вх}$, получим

$$\dot{\mathscr{E}} = \oint_l (i\omega \dot{\bar{A}} + \operatorname{grad} U)\, \bar{dl} = i\omega \oint_l \dot{\bar{A}}\, \bar{dl}.$$

Применяя формулу для вектор-потенциала $\dot{\bar{A}}$ в установившемся режиме, будем иметь

$$\dot{\mathscr{E}} = i\,\frac{\omega\mu}{4\pi}\,\dot{I} \oint_l \oint_l \frac{e^{-ikR}}{R}\, \bar{dl}\, \bar{dl}'. \qquad (8.127)$$

Здесь $\bar{dl}$ и $\bar{dl}'$ — бесконечно малые элементы контура l (рис. 8.25), а R — расстояние между ними.

Разложим в выражении (8.127) функцию e^{-ikR} по формуле Эйлера

$$e^{-ikR} = \cos kR - i \sin kR.$$

Следовательно,

$$\dot{\mathscr{E}} = \dot{I}\,\frac{\omega\mu}{4\pi} \oint_l \oint_l \frac{\sin kR}{R}\, \bar{dl}\, \bar{dl}' + i\dot{I}\,\frac{\omega\mu}{4\pi} \oint_l \oint_l \frac{\cos kR}{R}\, \bar{dl}\, \bar{dl}'. \qquad (8.128)$$

Нетрудно заметить, что равенство (8.128) выражает известный закон теории электрических цепей, утверждающий, что приложенная к контуру электродвижущая сила равна по величине сумме падений напряжения на элементах контура. Анализ правой части этого равенства показывает, что проводящий контур l можно рассматривать как последовательное соединение активного и реактивного сопротивлений, определяющих входное сопротивление источника. Так как контур по условию является идеально проводящим, то, естественно, роль активного сопротивления будет играть сопротивление излучения R_Σ, причем

$$R_\Sigma = \frac{\omega\mu}{4\pi} \oint_l \oint_l \frac{\sin kR}{R}\, \bar{dl}\, \bar{dl}'. \qquad (8.129)$$

Реактивная составляющая входного сопротивления источника равна

$$X_{вх} = \frac{\omega\mu}{4\pi} \oint_l \oint_l \frac{\cos kR}{R}\, \bar{dl}\, \bar{dl}'. \qquad (8.130)$$

Из полученных выражений следует, что сопротивление излучения источника обращается в нуль, если пренебречь запаздыванием

*) Строго говоря, при заданном распределении $\bar{E}_{ст}$ это несправедливо и для контура малых размеров. Поэтому наши дальнейшие рассуждения являются приближенными.

($kR \to 0$). Реактивная составляющая входного сопротивления в этом случае становится равной обычному индуктивному сопротивлению контура при частоте ω.

Таким образом, суммарное излучение электромагнитных волн рассматриваемым источником обусловлено наличием запаздывания. Действительно, вследствие конечной скорости распространения электромагнитных волн элементы контура l наводят на участке dl электродвижущие силы, сдвинутые по фазе относительно тока в нем на угол, больший $\pi/2$. (Если бы скорость распространения электромагнитных волн была бесконечно большой, то э. д. с. в элементе dl была бы сдвинута относительно тока на угол $\pi/2$, так как dl в этом случае должен вести себя как чистая индуктивность.) Поэтому падение напряжения на элементе dl, уравновешивающее наводимую в нем суммарную э. д. с., будет иметь составляющую в фазе с током. Отсюда следует, что элемент dl расходует энергию электромагнитного поля на излучение, и излучаемая им мощность равна

$$dP_\Sigma = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(d\dot{U}\dot{I}^*\right) = \frac{1}{2}\,dUI\cos\psi,$$

где dU — падение напряжения на элементе dl; ψ — угол, определяющий фазовый сдвиг между током и напряжением.

Для расчета сопротивления излучения источника по формуле (8.129) функцию $\sin kR$ целесообразно представить в виде степенного ряда:

$$\sin kR = kR - \frac{(kR)^3}{3!} + \frac{(kR)^5}{5!} - \ldots$$

Тогда

$$R_\Sigma = \frac{\omega\mu}{4\pi}\oint_l\oint_l\left[kR - \frac{(kR)^3}{3!} + \frac{(kR)^5}{5!} - \ldots\right]\frac{\overline{dl}\,\overline{dl}'}{R}.$$

Так как $\oint \overline{dl}$, то

$$R_\Sigma = -\frac{\omega\mu}{4\pi}\oint_l\oint_l\left[\frac{(kR)^3}{3!} - \frac{(kR)^5}{5!} + \ldots\right]\frac{\overline{dl}\,\overline{dl}'}{R}. \qquad (8.131)$$

Реактивную составляющую входного сопротивления источника рассчитать по (8.130) нельзя, так как интеграл в этой формуле обращается в бесконечность. Для определения $X_{\text{вх}}$ необходимо учитывать характер действительного распределения токов по сечению проводника, т. е. переходить от линейных токов к объемным.

Применим формулу (8.131) для расчета сопротивления излучения рамки с током радиуса a (рис. 8.26).

Из рис. 8.26 следует, что

$$\overline{dl}\,\overline{dl'} = dl\,dl'\cos(\varphi-\varphi') = a^2\cos(\varphi-\varphi')\,d\varphi\,d\varphi',$$

$$R = 2a\sin\frac{\varphi-\varphi'}{2}.$$

Если $a \ll \lambda$, то

$$R_\Sigma \approx -\frac{\omega\mu}{4\pi}\oint_l\oint_l \frac{k^3R^2}{3!}\,\overline{dl}\,\overline{dl'} =$$

$$= -\frac{\omega\mu}{4\pi}\,\frac{k^3}{3!}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} 4a^4\cos(\varphi-\varphi')\sin^2\frac{\varphi-\varphi'}{2}\,d\varphi\,d\varphi'.$$

Произведя вычисления последнего интеграла, получим

$$R_\Sigma = 320\,\pi^4\,\frac{S^2}{\lambda^4}\ \text{ом},$$

где $S = \pi a^2$ — площадь рамки.

Как и следовало ожидать, величина сопротивления излучения рамки, вычисленная по методу наводимых э. д. с., совпадает с величиной, рассчитанной в § 4 этой главы.

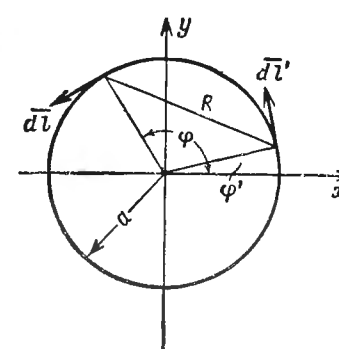


Рис. 8.26. К расчету сопротивления излучения рамки с током методом наводимых э. д. с.

В заключение укажем, что метод наводимых э. д. с. определяет пределы применимости уравнений электрических цепей к исследованию процессов в проводниках с переменным электрическим током. Изложенное показывает, что обычные уравнения электрических цепей будут справедливы лишь в том случае, когда можно пренебречь явлением запаздывания, т. е. когда линейные размеры цепи много меньше длины волны электромагнитного поля*).

*) Исключение составляют специальные системы, например длинные линии. Для анализа таких систем, как будет показано ниже, могут быть использованы уравнения электрических цепей.

14. Теория сферической антенны

До сих пор при расчете поля излучения предполагалось, что ток в источнике известен. Однако в действительности распределение тока по источнику известно только приближенно или из рассмотрения физической сущности явлений в антенне, или из данных опыта.

Истинный закон распределения тока, возбуждаемого в антенне сторонними силами поля, очевидно, можно найти из решения граничной задачи электродинамики при заданных условиях на поверхности источника.

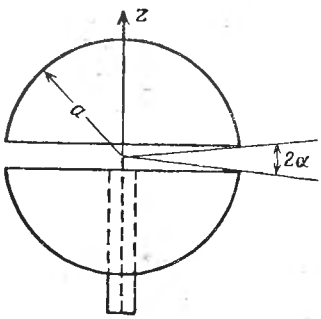


Рис. 8.27. Сферическая антенна.

В качестве примера, иллюстрирующего сущность такого более строгого метода решения задачи теории излучения, исследуем электромагнитное поле сферической антенны. Последняя представляет собой два проводящих сферических сегмента, разделенных малым промежутком (рис. 8.27). В соответствии с методикой, изложенной в § 1 этой главы, предположим, что сфера является сплошной и что в пределах промежутка действует стороннее поле, возбуждающее в антенне электрический ток.

Будем считать, что сторонняя напряженность поля распределена по «экватору» сферической антенны равномерно. Для этого, очевидно, необходимо, чтобы электромагнитная энергия от генератора подводилась с помощью фидера непосредственно к центру антенны (рис. 8.27). При таком способе «питания» антенны можно полагать, что силовые линии вектора сторонней напряженности поля в пределах заданного малого промежутка будут совпадать с меридиональными линиями на поверхности сферы.

Таким образом, расчет электромагнитного поля, возбуждаемого сферической антенной, сводится к решению внешней задачи в области, ограниченной изнутри поверхностной сферы $r = a$.

Учитывая изложенное и считая сферу идеально проводящей, введем на поверхности $r = a$ граничные условия:

$$E_\theta = -E_{ст} = F(\theta) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ при } r = a;\ 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2} - \alpha;\ \dfrac{\pi}{2} + \alpha \leqslant \theta \leqslant \pi; \\ E_0(\theta) \text{ при } r = a;\ \dfrac{\pi}{2} - \alpha \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2} + a;\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi; \end{array} \right\}, \quad (8.132)$$

здесь $\dot{E}_\theta$ — проекция вектора $\dot{E}$, касательная к граничной поверхности; $\dot{E}_0(\theta)$ — известная функция, характеризующая распределение сторонней напряженности поля в зазоре.

Уравнения Максвелла в сферической системе координат при условии $\partial/\partial\varphi = 0$ (искомое электромагнитное поле не зависит от угла φ) имеют вид (см. § 10, гл. V):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(r\dot{E}_\theta) - \frac{\partial \dot{E}_r}{\partial \theta} &= -i\omega\mu\, r\dot{H}_\varphi, \\ \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}(\dot{H}_\varphi \sin\theta) &= i\omega\varepsilon\dot{E}_r, \\ -\frac{\partial}{\partial r}(r\dot{H}_\varphi) &= i\omega\varepsilon\, r\dot{E}_\theta, \end{aligned}\right\} \tag{8.133}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(r\dot{H}_\theta) - \frac{\partial \dot{H}_r}{\partial \vartheta} &= i\omega\varepsilon\, r\dot{E}_\varphi, \\ \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}(\dot{E}_\varphi \sin\theta) &= -i\omega\mu\dot{H}_r, \\ \frac{\partial}{\partial r}(r\dot{E}_\varphi) &= i\omega\mu\, r\dot{H}_\theta. \end{aligned}\right\} \tag{8.134}$$

Нетрудно убедиться, что эти уравнения образуют две независимые системы. Действительно, в уравнения (8.133) входят только неизвестные E_r, E_θ и H_φ, и, следовательно, решение их в сферической системе координат приводит к волнам поперечно-магнитного типа (или E-волнам). В уравнения же (8.134) входят неизвестные H_r, H_θ, E_φ, образующие в пространстве волны поперечно-электрические (или H-волны). Так как электромагнитное поле H-волны не содержит составляющей E_θ, то оно не может удовлетворить граничным условиям (8.132). Следовательно, в дальнейших рассуждениях мы можем использовать только уравнения (8.133).

Для решения системы (8.134) подставим в первое уравнение значения $\dot{E}_r$ и $\dot{E}_\theta$, найденные из второго и третьего уравнений соответственно. В результате получим уравнение с неизвестной $\dot{H}_\varphi$:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\dot{H}_\varphi) + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}(r\dot{H}_\varphi \sin\theta)\right] + k^2(r\dot{H}_\varphi) = 0. \tag{8.135}$$

Будем искать решение последнего уравнения методом разделения переменных, полагая

$$r\dot{H}_\varphi = R(r)\,Q(\theta). \tag{8.136}$$

Подставляя (8.136) в (8.135) и используя обычные приемы этого метода, находим, что

$$r^2\frac{R''}{R}+k^2r^2=-\frac{1}{Q}\frac{d}{d\theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(Q\sin\theta)\right]=C,$$

где C — некоторая постоянная. Ввиду произвольности выбора C положим $C=n\ (n+1)$, n — целое число.

Следовательно, уравнение (8.135) оказалось сведенным к двум уравнениям вида

$$-\frac{1}{Q}\frac{d}{d\theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(Q\sin\theta\right)\right]=n(n+1); \tag{8.137}$$

$$r^2\frac{R''}{R}+k^2r^2=n(n+1). \tag{8.138}$$

Для решения уравнения (8.137), преобразуем его, применив подстановку:

$$\cos\theta=u;\quad \sin\theta=\sqrt{1-u^2};\quad \frac{d}{d\theta}=-\sin\theta\frac{d}{du}.$$

В результате получим

$$(1-u^2)\frac{d^2Q}{du^2}-2u\frac{dQ}{du}+\left[n(n+1)-\frac{1}{1-u^2}\right]Q=0. \tag{8.139}$$

Дифференциальное уравнение (8.139) совпадает с уравнением Лежандра:

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0 \tag{8.140}$$

при $m=1$ *).

Известно, что уравнению (8.140) удовлетворяют так называемые присоединенные полиномы Лежандра $P_n^m(x)$ n-го порядка степени m. Последние связаны с обычными полиномами Лежандра соотношением

$$P_n^m(x)=(1-x^2)^{m/2}\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}. \tag{8.141}$$

Имея значения $P_n(x)$ (см. § 12 гл. II) и используя (8.141), можно получить выражения для присоединенных полиномов Лежандра:

---

*) См. книгу: В. И. Смирнов «Курс высшей математики», т. III, ч. 2, Гостехиздат, 1954.

$$
\left.
\begin{aligned}
&P_1(x) = x = \cos\theta; \quad P_1^1(x) = (1-x^2)^{1/2} = \sin\theta,\\
&P_2^1(x) = 3(1-x^2)^{1/2}\, x = \frac{3}{2}\sin 2\theta,\\
&P_2^2(x) = 3(1-x^2) = \frac{3}{2}(1-\cos 2\theta),\\
&P_3^1(x) = \frac{3}{2}(1-x^2)^{1/2}(5x^2-1) = \frac{3}{8}(\sin\theta + 5\sin 3\theta),\\
&P_3^2(x) = 15(1-x^2)\, x = \frac{15}{4}(\cos\theta - \cos 3\theta),\\
&P_3^2(x) = 15(1-x^2)^{3/2} = \frac{15}{4}(3\sin\theta - \sin 3\theta),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right\} \qquad (8.142)
$$

Присоединенные полиномы Лежандра $P_n^m(x)$ на интервале $-1 \leqslant x \leqslant 1$ при $m = \text{const}$ образуют ортогональную замкнутую систему функций. Для полиномов $P_n^1(x)$ условие ортогональности имеет вид

$$
\int_{-1}^{+1} P_n^1(x)\, P_l^1(x)\, dx = \begin{cases} 0 & ; \quad n \neq l, \\ \dfrac{2n(n+1)}{2n+1} & ; \quad n = l, \end{cases} \qquad (8.143)
$$

или, на интервале $0 \leqslant 0 \leqslant \pi$,

$$
\int_0^{\pi} P_n^1(\cos\theta)\, P_l^1(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta = \begin{cases} 0; & n \neq l, \\ \dfrac{2n(n+1)}{2n+1}. \end{cases} \qquad (8.144)
$$

В соответствии с этим любая функция $f(\theta)$, кусочно-непрерывная на промежутке $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, может быть разложена в ряд по полиномам $P_n^m(\cos\theta)$, и в частности по полиномам $P_n^1(\cos\theta)$:

$$
f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, P_n^1(\cos\theta), \qquad (8.145)
$$

где

$$
b_n = \frac{2n+1}{2n(n+1)} \int_0^{\pi} f(\theta)\, P_n^1(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta.
$$

В дальнейшем нам будет также полезна формула

$$
\frac{d}{d\theta}\left[P_n^1(\cos\theta)\right] = \frac{1}{\sin\theta}\left[nP_{n+1}^1(\cos\theta) - (n+1)\cos\theta P_n^1(\cos\theta)\right]. \qquad (8.146)
$$

Существует, конечно, еще второе решение дифференциального уравнения (8.139) — так называемая функция Лежандра 2-го рода, обращающаяся в бесконечность при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Однако второе решение (8.139) нам не требуется ввиду того, что электромагнитное поле на оси $\theta = 0$, $\theta = \pi$ должно иметь конечную величину. Таким образом,

$$Q(\theta) = P_n^1(\cos\theta). \tag{8.147}$$

Рассмотрим теперь оставшееся уравнение (8.138). Для решения его используем подстановку

$$R_1 = \frac{R}{\sqrt{r}}. \tag{8.148}$$

Нетрудно показать, что функция R_1 удовлетворяет дифференциальному уравнению Бесселя порядка $n + \frac{1}{2}$:

$$\frac{d^2R_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR_1}{dr} + \left[k^2 - \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{r^2}\right]R_1 = 0. \tag{8.149}$$

Как известно, общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$R_1 = A_n^1 J_{n+1/2}(kr) + B_n^1 N_{n+1/2}(kr). \tag{8.150}$$

При n целых функции $J_{n+1/2}(x)$ и $N_{n+1/2}(x)$ представляются через тригонометрические функции. Например,

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x; \quad N_{1/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x;$$

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right);$$

$$N_{3/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\sin x + \frac{\cos x}{x}\right) \quad \text{и т. д.}$$

Если в равенстве (8.150) положить $A_n^1 = 1$ и $B_n^1 = i$, то получится функция

$$J_{n+1/2}(kr) + iN_{n+1/2}(kr),$$

имеющая название функции Ханкеля 1-го рода порядка $n + 1/2$; она обозначается символом $H^{(1)}_{n+1/2}(kr)$. Аналогично функция

$$H^{(2)}_{n+1/2}(kr) = J_{n+1/2}(kr) - iN_{n+1/2}(kr)$$

носит название функции Ханкеля 2-го рода порядка $n + 1/2$. При целых n функции Ханкеля выражаются через показательные функции мнимого аргумента. Например,

$$H^{(1)}_{1/2}(x) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,e^{ix}; \quad H^{(2)}_{1/2}(x) = i\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,e^{-ix} \text{ и т. д.}$$

Совершенно очевидно, что линейная комбинация функций Ханкеля

$$\dot{A}H^{(1)}_{n+1/2}(kr) + \dot{B}H^{(2)}_{n+1/2}(kr)$$

также является общим решением уравнения Бесселя (8.149).

Чтобы искомое поле удовлетворяло принципу излучения на бесконечности, т. е. представлялось в виде волны, уходящей от источника, нам, очевидно, необходимо использовать функцию Ханкеля 2-го рода, которая в сочетании с множителем $e^{i\omega t}$ и образует при $r \to \infty$ требуемую волновую функцию $e^{i(\omega t - kr)}$. Что же касается функции Ханкеля 1-го рода, то она может быть использована для представления волны, приходящей из бесконечности. Следовательно, подходящее для нас решение уравнения (8.149) будет иметь вид

$$R_1 = \dot{B}_n H^{(3)}_{n+1/2}(kr),$$

а аналогичное решение уравнения (8.138)—

$$R = \dot{B}_n \sqrt{r}\, H^{(2)}_{n+1/2}(kr). \tag{8.151}$$

Используя (8.136), (8.147) и (8.151), мы можем теперь написать общее выражение для компоненты поля $\dot{H}_\varphi$, а затем, учитывая второе и третье уравнения системы (8.133) — выражения для остальных компонент, удовлетворяющие принципу излучения на бесконечности:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{H}_\varphi &= \frac{\dot{B}_n}{\sqrt{r}}\, P^1_n(\cos\theta)\, H^{(2)}_{n+1/2}(kr),\\
\dot{E}_\theta &= \frac{\dot{B}_n\, P^1_n(\cos\theta)}{i\omega\varepsilon r^{3/2}}\left[nH^{(2)}_{n+1/2}(kr) - krH^{(2)}_{n-1/2}(kr)\right],\\
\dot{E}_r &= -\frac{\dot{B}_n\, nH^{(2)}_{n+1/2}(kr)}{i\omega\varepsilon r^{3/2}\sin\theta}\left[\cos\theta\, P^1_n(\cos\theta) - P^1_{n+1}(\cos\theta)\right].
\end{aligned}\right\} \tag{8.152}$$

При выводе равенств (8.152) была использована также формула дифференцирования функций Бесселя и соотношение (8.146).

К сожалению, электромагнитное поле типа (8.152) не удовлетворяет граничным условиям (8.132) при $r = a$. Чтобы удовлетворить требуемым условиям, необходимо построить общее решение системы

уравнений (8.133), представляющее собой суперпозицию всех частных решений типа (8.152) при $n = 1, 2, 3 \ldots$ Последнее будет иметь вид:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{H}_\varphi &= \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{B}_n P_n^1(\cos\theta) H_{n+1/2}^{(2)}(kr), \\
\dot{E}_\theta &= \frac{1}{i\omega\varepsilon r^{3/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{B}_n P_n^1(\cos\theta) \times \\
&\quad \times \left[nH_{n+1/2}^{(2)}(kr) - krH_{n-1/2}^{(2)}(kr)\right], \\
\dot{E}_r &= -\frac{1}{i\omega\varepsilon r^{3/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{B}_n H_{n+1/2}^{(2)}(kr) \times \\
&\quad \times \left[\cos\theta P_n^1(\cos\theta) - P_{n+1}^1(\cos\theta)\right] \frac{n}{\sin\theta}.
\end{aligned}\right\} \qquad (8.153)$$

Тогда, в соответствии с условиями (8.132) имеем

$$\frac{1}{i\omega\varepsilon a^{3/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{B}_n P_n^1(\cos\theta) \left[nH_{n+1/2}^{(2)}(ka) - kaH_{n+1/2}^{(2)}(ka)\right] =$$

$$= F(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} - \alpha;\ \frac{\pi}{2} + \alpha \leqslant \theta \leqslant \pi, \\ E_0(\theta) & \text{при } \frac{\pi}{2} - \alpha \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} + \alpha. \end{cases} \qquad (8.154)$$

Для определения неизвестных коэффициентов B_n ($n = 1, 2, \ldots$) разложим кусочно-непрерывную функцию $F(\theta)$ в ряд по присоединенным полиномам Лежандра, используя соотношение (8.145)

$$F(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n P_n^1(\cos\theta), \qquad (8.155)$$

где

$$C_n = \frac{2n+1}{2n(n+1)} \int_0^{\pi} F(\theta) P_n^1(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta =$$

$$= \frac{2n+1}{2n(n+1)} \int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2+\alpha} E_0(\theta) P_n^1(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta.$$

Строго говоря, функция $E_0(\theta)$ нам неизвестна. Однако в случае малого зазора ($\alpha \to 0$) можно полагать, что непрерывные функ-

ции $P_n^1(\cos\theta)$ и $\sin\theta$ на интервале $\frac{\pi}{2}-\alpha\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}+\alpha$ изменяются незначительно. Тогда

$$C_n\approx\frac{2n+1}{2n(n+1)}P_n^1(0)\int\limits_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2+\alpha}E_0(\theta)\,d\theta=\frac{2n+1}{2n(n+1)\,a}P_n^1(0)\dot{\mathscr{E}}.$$

Здесь $\dot{\mathscr{E}}=a\int\limits_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2+\alpha}E_0(\theta)\,d\theta$ — известная комплексная амплитуда сторонней э. д. с., приложенной к зазору.

Приравняем левую часть равенства (8.154) правой части равенства (8.155). В результате, учитывая свойство ортогональности присоединенных полиномов Лежандра, получим

$$\dot{B}_n=\frac{i\omega\varepsilon\,C_n\,a^{3/2}}{\left[nH_{n+1/2}^{(2)}(ka)-kaH_{n-1/2}^{(2)}(ka)\right]}. \tag{8.156}$$

Таким образом, выражения (8.153) в совокупности с (8.156) полностью определяют электромагнитное поле, возбуждаемое сферической антенной в пространстве.

Нетрудно теперь найти закон распределения электрического тока на поверхности антенны. Действительно, используя соотношение

$$\bar{j}=\bar{H}\times\bar{n}\,|_{r=a},$$

где $\bar{n}$ — орт нормали к заданной поверхности, находим, что

$$j_\theta=-H_\varphi\,|_{r=a}.$$

Общий ток в антенне

$$I(\theta)=2\pi a\sin\theta\,j_\theta=-2\pi a\sin\theta H_\varphi\,|_{r=a}.$$

Комплексная амплитуда тока, текущего от зазора $\left(\text{при }\theta=\frac{\pi}{2}\right)$,

$$\dot{I}_{\text{вх}}=-\dot{I}(\theta)\,|_{\theta=\pi/2}=2\pi a^{1/2}\sum_{n=1}^{\infty}P_n^1(0)\,\dot{B}_n\,H_{n+1/2}^{(2)}(ka).$$

Вычислим входную проводимость $Y_{\text{вх}}$ сферической антенны как отношение тока $\dot{I}_{\text{вх}}$ к приложенной э. д. с. Проделав необходимые преобразования, получим

$$Y_{\text{вх}}=\frac{\dot{I}_{\text{вх}}}{\dot{\mathscr{E}}}=\sum_{n=1}^{\infty}{}'Y_n, \tag{8.157}$$

где

$$Y_n = G_n + iB_n = \frac{i\pi (2n+1)\left[P_n^1(0)\right]^2}{n(n+1)Z_0\left[\frac{n}{ka} - \frac{H_{n-1/2}^{(2)}(ka)}{H_{n+1/2}^{(2)}(ka)}\right]};$$

G_n — активная составляющая проводимости Y_n; B_n — реактивная составляющая проводимости Y_n.

Знак (′) в (8.157) показывает, что суммирование здесь происходит только по нечетным n, ибо при четных n полиномы $P_n^1(0) = 0$.

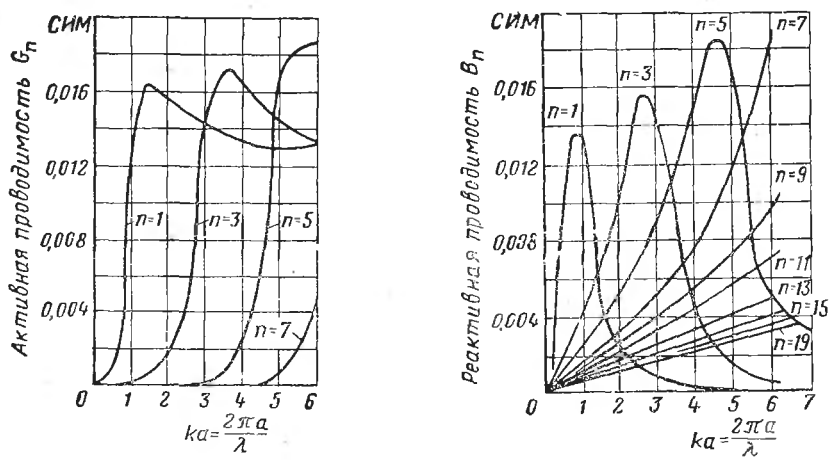


Рис. 8.28. Проводимости сферической антенны:
а — активная составляющая G_n; *б* — реактивная составляющая B_n.

Из выражения (8.157) следует, что входная проводимость сферической антенны равна проводимости бесконечного множества параллельно соединенных двухполюсников, причем каждый из них имеет проводимость Y_n. При больших n и $ka \ll n$ функция Y_n аппроксимируется выражением

$$Y_n \approx \frac{i2\pi \left[P_n^1(0)\right]^2}{Z_0 n^2} ka,$$

так как для $n \gg ka$ отношение

$$\frac{H_{n-1/2}^{(2)}}{H_{n+1/2}^{(2)}} \approx e^{-1/3} \ll \frac{n}{ka}.$$

Анализ показывает, что ряд $\operatorname{Im} \sum_{n=1}^{\infty}{}' Y_n$ расходится. Последнее обстоятельство является следствием допущения о том, что зазор в антенне бесконечно мал. В этом случае, естественно, реактивная составляющая входной проводимости антенны должна принимать бесконечно большое значение.



Рис. 8.29. Входная проводимость сферической антенны:

Если же стороннее поле приложено на промежутке конечных размеров, то реактивная составляющая будет иметь конечное значение.

На рис. 8.28, *а* и *б* изображены графики изменения активной G_n и реактивной B_n проводимостей в зависимости от величины ka при $n = 1, 3, 5$.

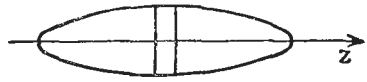


Рис. 8.30. Сфероидальная антенна.

На рис. 8.29 приводятся кривые изменения полной проводимости, ее активной и реактивной составляющих в зависимости от величины ka для антенны при $Z_0 = 120\pi$ *ом* и $n = 1, 2, 3, \ldots, 19$.

Из анализа приведенных кривых вытекает, что на низких частотах ($ka \ll 1$) проводимость сферической антенны определяется в основном реактивной составляющей и имеет емкостный характер (статическая емкость между полусферами). Реактивная составляющая входной проводимости такой антенны имеет емкостный характер при любой частоте возбуждающего поля. Наконец, вблизи $ka = n$ активная и реактивная составляющие проводимости для колебания n-го порядка приближаются к максимуму*).

Аналогичный анализ может быть также проведен для сфероидальной антенны, изображенной на рис. 8.30. Подобная антенна по своей форме оказывается достаточно близкой к обычному вибратору.

Иной метод исследования вибратора был разработан советскими учеными М. А. Леонтовичем и М. Л. Левиным, а также Халленом (Швеция).

Позднее Е. Н. Васильев (СССР) осуществил расчет электромагнитного поля, создаваемого проводящим телом вращения произвольной формы.

*) Изложенный здесь анализ был произведен Стрэттоном и Чу.

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

1. Введение

Пусть среда, в которой распространяется электромагнитная волна, содержит какое-то постороннее тело с электрическими параметрами, отличными от ее собственных параметров. Естественно, электромагнитное поле, возникающее в таком неоднородном пространстве, будет иметь более сложную структуру, нежели поле падающей, первичной волны. Действительно, при наличии постороннего тела во внешней области, помимо падающей волны, появляется так называемое вторичное поле, рассеиваемое телом. Кроме того, электромагнитное поле будет проникать и внутрь тела, если только проводимость его не бесконечно велика. С физической точки зрения сущность этих явлений, очевидно, в какой-то степени аналогична явлениям отражения и преломления плоских волн на границе раздела двух сред, которые мы уже рассматривали в одной из предыдущих глав.

Распространение электромагнитной волны в среде с посторонним телом часто характеризуется тем, что волна как бы огибает его. В физике подобное явление называют д и ф р а к ц и е й электромагнитных волн. Однако изменение структуры поля первичной волны в такой ситуации далеко не всегда проявляется как огибание. Поэтому мы под дифракцией будем понимать любое изменение структуры поля первичной волны при падении ее на тело или совокупность тел. Иными словами, термину «дифракция» мы будем придавать более широкий смысл, нежели огибание волной какого-либо препятствия.

При излучении и распространении электромагнитных волн в реальных условиях можно наблюдать самые разнообразные формы дифракционных явлений. Здесь и огибание волнами поверхности Земли, и рассеяние волн дождем или какими-либо другими части-

цами, и прохождение волн через отверстие в проводящем экране и т. п.

Теоретическое исследование дифракционных явлений сводится к определению полного или вторичного электромагнитного поля по заданным геометрическим и электрическим параметрам тела и заданному полю первичной волны. Если тело, на котором происходит дифракция, имеет простую геометрическую форму (шар, бесконечный круглый цилиндр и др.), возможно провести строгий расчет электромагнитного поля. В большинстве же случаев дифракционные задачи приходится решать приближенно.

Ниже мы рассмотрим некоторые примеры расчета дифракционных полей.

2. Дифракция электромагнитных волн на бесконечном круглом цилиндре (строгое решение)

Предположим, что на бесконечный круглый цилиндр радиуса a падает плоская электромагнитная волна, распространяющаяся в направлении, перпендикулярном оси Oz (рис. 9.1). Требуется определить вторичное электромагнитное поле, возникающее в пространстве при условии, что значения ε, μ и g для цилиндра и для окружающей среды различны.

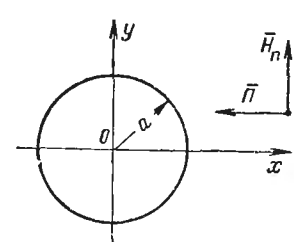


Рис. 9.1. К исследованию дифракции плоской волны на бесконечном круглом цилиндре.

При решении поставленной задачи целесообразно рассматривать два случая поляризации падающей волны относительно оси Oz:

1) вектор $\bar{E}$ параллелен Oz,

2) вектор $\bar{H}$ параллелен Oz.

Общий случай произвольной поляризации падающей волны может быть получен наложением этих типов полей. Так как методика решения обеих задач одинакова, мы ограничимся анализом только первого варианта. В соответствии с исходным условием проекции векторов поля падающей волны будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_{x\,\text{пад}} &= \dot{E}_{y\,\text{пад}} = 0; \quad \dot{E}_{z\,\text{пад}} = \dot{E}_0 e^{ikx}, \\ \dot{H}_{x\,\text{пад}} &= \dot{H}_{z\,\text{пад}} = 0; \quad \dot{H}_{y\,\text{пад}} = \dot{H}_0 e^{ikx}. \end{aligned}\right\} \qquad (9.1)$$

Строгое решение дифракционной задачи сводится к решению уравнений Максвелла при заданных граничных условиях для составляющих электромагнитного поля на поверхности цилиндра и на бесконечности. Совершенно ясно, что составляющие векторов результирующего электромагнитного поля, касательные к поверх-

ности цилиндра, при переходе через последнюю должны быть непрерывны. На бесконечности вторичное поле должно удовлетворять принципу излучения.

Для решения этой задачи целесообразно использовать цилиндрическую систему координат ρ, φ, z. Так как в рассматриваемом случае векторы $\bar{E}_{\text{пад}}$ и $\bar{H}_{\text{пад}}$ падающей волны не зависят от координаты z, а параметры цилиндра одинаковы на всем интервале $-\infty < z < \infty$, вторичное электромагнитное поле также не должно зависеть от z.

Уравнения Максвелла в цилиндрической системе координат при условии $\partial/\partial z = 0$ распадаются на две независимые системы уравнений, первая из которых определяет электромагнитное поле поперечно-электрического типа с компонентами $\dot{E}_z$, $\dot{H}_\rho$ и $\dot{H}_\varphi$, а вторая — поле поперечно-магнитного типа с компонентами $\dot{H}_z$, $\dot{E}_\rho$ и $\dot{E}_\varphi$ *).

Вследствие того, что поле падающей волны имеет компоненту $\dot{E}_z$, вторичное электромагнитное поле тоже должно содержать эту компоненту, т. е. оно должно быть поперечно-электрическим. Система уравнений для комплексных амплитуд проекций векторов вторичного поля поперечно-электрического типа в установившемся режиме имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \varphi} + i\omega\mu\rho\dot{H}_\rho &= 0, \\ \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \rho} - i\omega\mu\dot{H}_\varphi &= 0, \\ \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\dot{H}_\varphi) - \frac{\partial \dot{H}_\rho}{\partial \varphi}\right] - i\omega\varepsilon\dot{E}_z &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{9.2}$$

Для упрощения задачи будем полагать цилиндр идеально проводящим. Тогда граничные условия, которым должно удовлетворять суммарное электромагнитное поле на поверхности цилиндра, запишутся следующим образом:

$$\dot{E}_{z\,\text{пад}} + \dot{E}_z = 0 \tag{9.3}$$

при $\rho = a$; $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$; $-\infty < z < \infty$.

Здесь $\dot{E}_{z\,\text{пад}}$ — проекция вектора $\bar{E}_{\text{пад}}$ падающей волны, касательная к поверхности цилиндра, а $\dot{E}_z$ — аналогичная проекция вектора $\bar{E}$ вторичного поля.

Так как по определению

$$\dot{E}_{z\,\text{пад}} = \dot{E}_0 e^{ikx} = \dot{E}_0 e^{ik\rho\cos\varphi},$$

---

*) Классификация полей здесь проводится относительно радиального направления в цилиндрической системе координат.

то условие (9.2) может быть переписано в виде

$$\dot{E}_0 e^{ika\cos\varphi} + \dot{E}_z = 0 \tag{9.4}$$

при $\rho = a$; $0 \leqslant \varphi < 2\pi$; $-\infty < z < \infty$.

Следовательно, расчет электромагнитного поля дифракции сводится к решению системы уравнений (9.2) при граничных условиях (9.4).

Для решения системы (9.2) выразим из первого и второго уравнений неизвестные $\dot{H}_\rho$ и $\dot{H}_\varphi$ через $\dot{E}_z$ и подставим найденные значения в последнее уравнение. В результате получим

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial \varphi^2} + k^2 \dot{E}_z = 0. \tag{9.5}$$

Используя метод разделения переменных, напишем

$$\dot{E}_z = R(\rho)\,\psi(\varphi). \tag{9.6}$$

С помощью обычных приемов можно показать, что функции $R(\rho)$ и $\psi(\varphi)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left(k^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right) R = 0, \tag{9.7}$$

$$\frac{d^2\psi}{d\varphi^2} + m^2\psi = 0, \tag{9.8}$$

где m — произвольная постоянная.

Вследствие того, что искомое электромагнитное поле должно быть периодическим относительно угла φ, необходимо положить m равным любому целому числу, т. е. $m = 0, 1, 2, \ldots$

Уравнение (9.7) является уравнением Бесселя, общее решение которого имеет вид

$$R = A_m' J_m(k\rho) + B_m' N_m(k\rho)$$

или

$$R = A_m H_m^{(1)}(k\rho) + B_m H_m^{(2)}(k\rho). \tag{9.9}$$

В соответствии с принципом излучения искомое электромагнитное поле должно иметь характер волны, распространяющейся в бесконечность по радиальным направлениям. Из рассмотрения асимптотических выражений для функций Ханкеля

$$H_m^{(1)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{i\left(z - \frac{2m+1}{4}\pi\right)},$$

$$H_m^{(2)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{-i\left(z - \frac{2m+1}{4}\pi\right)},$$

справедливых при больших значениях аргументов

$$(|z| \gg 1; \quad |z| \gg m),$$

следует, что слагаемое $\dot{B}_m H_m^{(2)}(k\rho)$ в (9.9) при $\rho \to \infty$ соответствует волне, распространяющейся от источника (в данном случае цилиндра) на бесконечность, а слагаемое

$$A_m H_m^{(1)}(k\rho) \text{ при } \rho \to \infty$$

определяет волну, движущуюся в противоположном направлении (из бесконечности к источнику). Таким образом, принцип излучения на бесконечности будет удовлетворен, если положить $A_m = 0$. В этом случае

$$R = B_m H_m^{(2)}(k\rho). \tag{9.10}$$

Общее решение уравнения (9.8), как известно, выражается следующим образом:

$$\psi = C_m \cos m\varphi + D_m \sin m\varphi.$$

Принимая во внимание, что компоненты поля падающей волны являются четными функциями угла φ [см. (9.4)], положим

$$D_m = 0, \quad \psi = C_m \cos m\varphi. \tag{9.11}$$

Таким образом, одно из возможных решений уравнения (9.5) будет иметь вид

$$\dot{E}_z = \dot{B}_m H_m^{(2)}(k\rho) \cos m\varphi. \tag{9.12}$$

Общее решение уравнения (9.5) с четной зависимостью от угла φ и удовлетворяющее принципу излучения на бесконечности может быть получено в результате суперпозиции частных решений (9.12):

$$\dot{E}_z = \sum_{m=0}^{\infty} \dot{B}_m H_m^{(2)}(k\rho) \cos m\varphi. \tag{9.13}$$

Чтобы найти неизвестные коэффициенты $\dot{B}_m$, необходимо удовлетворить граничным условиям (9.4). Для этого используем известную из теории бесселевых функций формулу

$$e^{ika\cos\varphi} = J_0(ka) + \sum_{m=1}^{\infty} 2(i)^m J_m(ka) \cos m\varphi \tag{9.14}$$

(она получается, если функцию $e^{ika\cos\varphi}$ разложить в обычный ряд Фурье). Подставляя в (9.4) значения $\dot{E}_z$ и $e^{ika\cos\varphi}$ из (9.13) и (9.14), будем иметь

$$\dot{E}_0 J_0(ka) + \dot{E}_0 \sum_{m=1}^{\infty} 2(i)^m J_m(ka)\cos m\varphi =$$

$$= -\dot{B}_0 H_0^{(2)}(ka) - \sum_{m=1}^{\infty} \dot{B}_m H_m^{(2)}(ka)\cos m\varphi. \qquad (9.15)$$

Умножая далее обе части равенства (9.15) на $\cos n\varphi\, d\varphi$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) и интегрируя полученные выражения от $-\pi$ до $+\pi$, находим:

$$\dot{E}_0 J_0(ka) = -\dot{B}_0 H_0^{(2)}(ka),$$

$$2\dot{E}_0 (i)^n J_n(ka) = -\dot{B}_n H_n^{(2)}(ka),$$

откуда

$$\dot{B}_0 = -E_0 \frac{J_0(ka)}{H_0^{(2)}(ka)},$$

$$\dot{B}_n = -2\dot{E}_0 (i)^n \frac{J_n(ka)}{H_n^{(2)}(ka)}.$$

Следовательно, проекция $\dot{E}_z$ вторичного электромагнитного поля, возникающего в пространстве при дифракции плоской волны на бесконечном круглом цилиндре, определяется выражением

$$\dot{E}_z = -\dot{E}_0 \left[\frac{J_0(ka)}{H_0^{(2)}(ka)} H_0^{(2)}(k\rho) + \sum_{m=1}^{\infty} 2(i)^m \frac{J_m(ka)}{H_m^{(2)}(ka)} H_m^{(2)}(k\rho)\cos m\varphi \right].$$

Если учесть, что

$$e^{ip\varphi} + e^{-ip\varphi} = 2\cos p\varphi,$$

$$J_{-p}(k\rho) = (-1)^p J_p(k\rho),$$

$$H_{-p}^{(2)}(k\rho) = e^{-ip\pi} H_p^{(2)}(k\rho),$$

то

$$\dot{E}_z = -\dot{E}_0 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (i)^m \frac{J_m(ka)}{H_m^{(2)}(ka)} H_m^{(2)}(k\rho)\, e^{im\varphi}.$$

Чтобы найти закон распределения тока, возбуждаемого на поверхности цилиндра полем плоской волны, необходимо вычислить

H_φ. Используя для этого второе уравнение системы (9.2) и выражение для $\dot{E}_z$, получим

$$\dot{H}_\varphi = -\frac{1}{i\omega\mu}\dot{E}_0 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (i)^m \frac{J_m(ka)}{H_m^{(2)}(ka)} \frac{dH_m^{(2)}(k\rho)}{d\rho} e^{im\varphi}.$$

Так как вектор плотности тока на поверхности цилиндра равен

$$\bar{j}_S = (\bar{H}_{\text{над}} + \bar{H}) \times \bar{n} = \bar{i}_z (H_{\varphi\,\text{над}} + H_\varphi) = \bar{i}_z j_z \text{ при } \rho = a,$$

то

$$\dot{j}_z = \dot{E}_0 \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}} \cos\varphi\, e^{ika\cos\varphi} - \frac{1}{i\omega\mu} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (i)^m \frac{J_m(ka)}{H_m^{(2)}(ka)} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{dH_m^{(2)}(k\rho)}{d\rho} e^{im\varphi} \right].$$

Суммирование в полученных формулах проводится до значений m, близких к величине $2ka$.

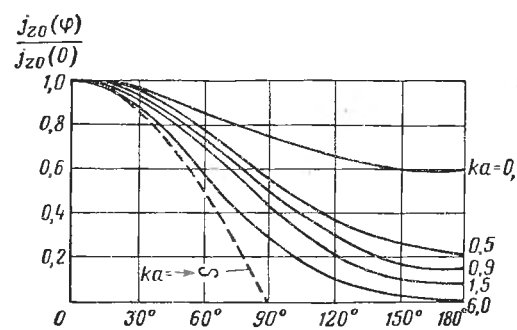


Рис. 9.2. Распределение амплитуд плотности тока на поверхности проводящего цилиндра при дифракции плоской волны.

На рис. 9.2 изображены нормированные кривые распределения модуля плотности тока $|\dot{j}_z| = j_{z0}$, возбуждаемого на поверхности цилиндра полем падающей плоской волны, при различных значениях ka *).

*) Эти кривые, а также диаграммы, изображенные на рис. 9.3, заимствованы из книги А. И. Потехина «Некоторые задачи дифракции электромагнитных волн». Изд-во «Советское радио», 1948.

На рис. 9.3 изображены нормированные кривые изменения амплитуд напряженности E_z вторичного поля при $k\rho \gg 1$ в зависимости от угла φ, также построенные для различных значений ka. Как видно из приводимых графиков, кривые $|\dot{E}_z(\varphi)|/|\dot{E}_z(0)|$ при увеличении ka стремятся к некоторой предельной кривой, построенной для значения $ka \to \infty$. То же самое можно сказать о кривых распределения модуля плотности тока в зависимости от угла φ.

Таким образом, в результате проведенного анализа мы определили ток на поверхности цилиндра, а также нашли компоненты вторичного электромагнитного поля, возбуждаемого этим током в окружающем пространстве.

Решение дифракционной задачи, несомненно, было бы более простым, если бы закон распределения тока на поверхности тела (в данном случае на поверхности цилиндра) был известен заранее. Действительно, по известному току на поверхности тела создаваемое им вторичное электромагнитное поле можно рассчитать, например, по формулам (8.71) и (8.72). Но, к сожалению, истинный закон распределения тока на теле может быть найден лишь в результате строгого решения задачи, подобного изложенному.

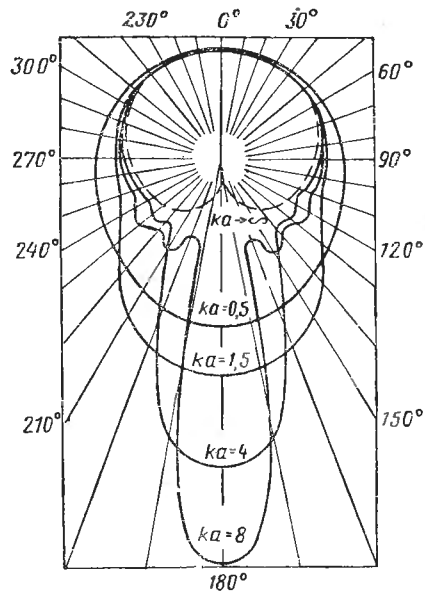


Рис. 9.3. Диаграмма направленности вторичного поля при дифракции плоской волны на проводящем цилиндре.

Поэтому с практической точки зрения весьма полезно выявить некоторые закономерности, позволяющие хотя бы приближенно находить ток, и, следовательно, осуществлять приближенное решение дифракционных задач.

3. Волновая теория электромагнитного поля. Принцип Гюйгенса — Кирхгофа

Проекции векторов $\dot{\bar{E}}$ и $\dot{\bar{H}}$ на оси прямоугольной системы координат во всех точках пространства, где нет токов и зарядов, в режиме установившихся гармонических колебаний удовлетворяют

скалярному волновому уравнению

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0, \qquad k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{\omega}{v}. \tag{9.16}$$

Последнее нетрудно вывести из уравнений Максвелла для комплексных амплитуд $\dot{\vec{E}}$ и $\dot{\vec{H}}$:

$$\operatorname{rot}\dot{\vec{H}} = i\omega\varepsilon\dot{\vec{E}}; \qquad \operatorname{rot}\dot{\vec{E}} = -i\omega\mu\dot{\vec{H}}.$$

В самом деле, из второго уравнения Максвелла вытекает, что

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\dot{\vec{E}} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\vec{E}} - \nabla^2\dot{\vec{E}} = -i\omega\mu\operatorname{rot}\dot{\vec{H}}.$$

Подставляя сюда значение $\operatorname{rot}\dot{\vec{H}}$ из первого уравнения Максвелла и учитывая, что $\operatorname{div}\dot{\vec{E}} = 0$, будем иметь

$$\nabla^2\dot{\vec{E}} + k^2\dot{\vec{E}} = 0.$$

Полученное векторное уравнение в прямоугольной системе координат распадается на три идентичных скалярных уравнения для проекций $\dot{\vec{E}}$, совпадающих с (9.16).

Рассуждения относительно вектора $\dot{\vec{H}}$ проводятся аналогично.

Проинтегрируем уравнение (9.16) в области V, ограниченной поверхностью S, используя теорему Грина

$$\int_V (\psi\nabla^2\theta - \theta\nabla^2\psi)\,dV = \int_S \left(\psi\frac{\partial\theta}{\partial n} - \theta\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)dS \tag{9.17}$$

(см. § 15, гл. I).

Будем полагать, что ψ есть функция, удовлетворяющая уравнению (9.16), а

$$\theta = \frac{e^{-ikR}}{R}, \tag{9.18}$$

где R — расстояние от некоторой точки P в области V до переменной точки интегрирования P_1.

Согласно условиям теоремы Грина функции ψ и θ должны иметь конечные производные первого и второго порядка во всех точках области V. Такое требование, как нетрудно видеть, выполняется всюду, за исключением точки P, где функция $\theta = e^{-ikR}/R$ обращается в бесконечность. Стало быть, последнюю точку необходимо из рассмотрения исключить.

С этой целью окружим точку P сферической поверхностью S_0 малого радиуса R_0 и напишем теорему Грина для области, ограни-

ченной поверхностями S и S_0 (рис. 9.4, *а*). Так как функция (9.18) тоже удовлетворяет уравнению (9.16), интеграл по объему в левой части теоремы обращается в нуль, и мы будем иметь:

$$\int\limits_{S+S_0} \left(\psi \frac{\partial \theta}{\partial n} - \theta \frac{\partial \psi}{\partial n}\right) dS = 0. \tag{9.19}$$

На поверхности S_0 производная

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{e^{-ikR}}{R}\right) = \left(ik + \frac{1}{R}\right)\frac{e^{-ikR}}{R}$$

и, стало быть,

$$\int\limits_{S_0} \left(\psi \frac{\partial \theta}{\partial n} - \theta \frac{\partial \psi}{\partial n}\right) dS = \left(ik + \frac{1}{R_0}\right) \times$$

$$\times \frac{e^{-ikR_0}}{R_0} \int\limits_{S_0} \psi dS + \frac{e^{-ikR_0}}{R_0} \int\limits_{S_0} \frac{d\psi}{\partial R} dS = I_0.$$

Применив далее теорему о среднем, получим

$$I_0 = \left(ik + \frac{1}{R_0}\right)\frac{e^{-ikR_0}}{R_0}\psi_{ср} 4\pi R_0^2 + \frac{e^{-ikR_0}}{R_0}\left(\frac{\partial \psi}{\partial R}\right)_{ср} 4\pi R_0^2.$$

Так как $\psi_{ср}$ и $(\partial\psi/\partial R)_{ср}$ конечны, то при стремлении R_0 к нулю

$$I_0 \to 4\pi\psi_{ср} = 4\pi\psi(P).$$

Таким образом, из равенства (9.19) вытекает, что

$$\psi(P) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_S \left[\psi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikR}}{R}\right) - \frac{\partial \psi}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikR}}{R}\right)\right] dS. \tag{9.20}$$

Найденное выражение позволяет определить функцию ψ в любой точке области V по известным значениям ψ и $\partial\psi/\partial n$ на граничной поверхности S.

Заметим, что граничные значения ψ и $\partial\psi/\partial n$, вообще говоря, не могут выбираться произвольным образом, независимо друг от друга, ибо решение волнового уравнения (9.17) будет единственным, если на S задана или только функция ψ или ее нормальная произ-

водная $\partial\psi/\partial n$. С аналогичным обстоятельством мы уже встречались при рассмотрении метода эквивалентных токов (см. рассуждения, приведенные в § 9 гл. VIII).

Применим равенство (9.19) к внешней задаче. В этом случае следует полагать, что интересующая нас область заключена между

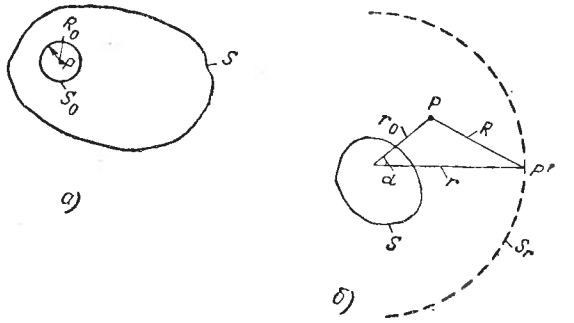


Рис. 9.4. К решению волнового уравнения с помощью теоремы Грина:
а — внутренняя задача; *б* — внешняя задача.

заданной поверхностью S и поверхностью сферы S_r бесконечно большого радиуса, центр которой находится в точке, принятой за начало координат (рис. 9.4, *б*).

Пусть

$$I_r = \int\limits_{S_r} \left(\psi \frac{\partial \theta}{\partial n} - \theta \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS.$$

Проводя рассуждения, подобные изложенным в § 7 гл. VIII, можно показать, что для больших R функция θ равна

$$\theta = \frac{e^{-ikR}}{R} \approx \frac{e^{-ikr}}{r} e^{ikr_0 \cos \alpha}$$

Здесь r — радиус сферической поверхности S_r; r_0 — расстояние от начала координат до точки наблюдения; α — угол между лучами OP и OP' (рис. 9.4, *б*).

Так как на S_r производная $\partial/\partial n = \partial/\partial r$, то с учетом приведенных соотношений

$$I_r = -\int\limits_{S_r} \left[\psi \left(ik + \frac{1}{r} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] \frac{e^{-ikr}}{r} e^{ikr \cos \Psi} dS.$$

Этот интеграл при $r \to \infty$ будет стремиться к нулю, если

$$\lim_{r \to \infty} \left[\psi \left(ik + \frac{1}{r} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] r = 0$$

или

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial r}\right|_{r\to\infty} = -\left(ik+\frac{1}{r}\right)\psi|_{r\to\infty}. \qquad (9.20')$$

Легко убедиться, что последнее условие выполняется, если функция ψ удовлетворяет принципу излучения на бесконечности, т. е.

$$\psi|_{r\to\infty} = f(\theta, \varphi)\frac{e^{-ikr}}{r}.$$

Стало быть, равенство (9.20) при выполнении условия (9.20') остается справедливым и для внешней области.

Рассматриваемое равенство представляет собой аналитическую формулировку так называемого принципа Гюйгенса — Кирхгофа. Этот принцип утверждает, что функция ψ, удовлетворяющая скалярному волновому уравнению, в любой точке наблюдения есть суперпозиция сферических волн, излучаемых элементарными источниками, распределенными на заданной поверхности S.

Интеграл (9.20), как мы увидим ниже, может быть использован для решения некоторых задач дифракции электромагнитных волн.

Разумеется, принцип Гюйгенса — Кирхгофа в электродинамике следует рассматривать как частный случай более общего принципа эквивалентных токов, учитывающего векторный характер электромагнитного поля.

Принцип эквивалентных токов, как известно, дает возможность по заданным векторам $\overline{E}$ и $\overline{H}$ или их касательным составляющим на исходной граничной поверхности S определить электромагнитное поле в любой точке внешнего пространства. Следует подчеркнуть, что согласно этому принципу, поле в точке наблюдения P есть результат векторного сложения полей элементарных источников, распределенных по всей поверхности S.

В качестве исходной граничной поверхности с заданными векторами поля можно выбрать, в частности, какую-то волновую поверхность. Тогда с помощью рассматриваемого метода мы можем определить в пространстве любую другую волновую поверхность и осуществлять последовательный переход от одной такой поверхности к другой.

Изложенные соображения составляют основу волновой теории электромагнитного поля.

4. Геометрическая оптика. Основное уравнение

В отличие от предыдущих рассуждений предположим, что поле в произвольной точке наблюдения P определяется полем только одной точки P_0, принадлежащей волновой поверхности S. В этом случае каждой точке исходной волновой поверхности будет, оче-

видно, соответствовать какая-то одна точка на другой волновой поверхности. При перемещении такой поверхности в пространстве точки ее должны описывать определенные траектории. Совокупность этих траекторий образует семейство кривых, называемых лучами.

Отсюда вытекает, что законы движения волновых поверхностей в пространстве теперь приобретают чисто геометрический смысл. Они, как мы видим, устанавливают геометрическую связь между точками, принадлежащими различным волновым поверхностям.

Чтобы сформулировать эти законы, рассмотрим поле плоской волны.

Напряженность электрического поля плоской волны, распространяющейся в произвольном направлении, как известно, имеет вид

$$\dot{E} = \dot{E} e^{i[\omega t - k(lx + my + pz)]},$$

где $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = \omega/v$, а l, m, p — направляющие косинусы нормали к волновой поверхности (см. § 7 гл. VI). Из этого выражения вытекает, что поверхность равных фаз поля в различные моменты времени определяется уравнением

$$\omega t - k(lx + my + pz) = \text{const}. \tag{9.21}$$

Следовательно, положение волновых поверхностей в поле плоской волны для любого момента времени может быть найдено непосредственно из уравнения (9.21) без учета соотношений волновой теории.

Пусть проекции векторов поля на оси прямоугольной системы координат в общем случае имеют вид, аналогичный проекциям векторов поля плоской волны. Так, например, предположим, что любая из указанных проекций вектора $\dot{E}$ равна

$$\dot{E} = \dot{E}_0(x, y, z)\, e^{i[\omega t - kL_0(x, y, z)]}, \tag{9.22}$$

где $L_0(x, y, z)$ — известная функция пространственных координат. В этом случае поверхности равных фаз поля в различные моменты времени будут также определяться уравнением, имеющим чисто геометрический смысл,

$$\omega t - kL_0(x, y, z) = \text{const}. \tag{9.23}$$

Если среда, в которой происходит распространение, однородна [скорость распространения $v(x, y, z) = \text{const}$], уравнение (9.23) превращается в уравнение

$$L_0(x, y, z) = \text{const}.$$

Перепишем равенство (9.23) в виде

$$\omega t - \frac{\omega}{c} nL_0(x, y, z) = \text{const}, \tag{9.24}$$

где $n = \frac{c}{v}$ — показатель преломления среды; c — скорость света в пустоте.

Отсюда следует, что поверхность равных фаз волны типа (9.22) в общем случае определяется уравнением

$$L(x, y, z) = nL_0(x, y, z) = \text{const}, \tag{9.25}$$

ибо величина c, входящая в (9.24), постоянна.

Для плоской волны, распространяющейся в однородной среде, уравнение (9.25) дает

$$L(x, y, z) = n(lx + my + pz) = \text{const}. \tag{9.26}$$

Нетрудно убедиться, что величина L в этом случае представляет собой умноженное на n расстояние от начала координат до волновой поверхности, проходящей через точку с координатами (x, y, z).

Из выражения (9.26) следует, что расстояние между двумя поверхностями равных значений функций $L = L_1$ и $L = L_1 + \Delta L$, отсчитываемое по нормали к ним, в поле плоской волны равно:

$$\Delta s = \frac{\Delta L}{n}$$

или в пределе

$$ds = \frac{dL}{n},$$

откуда

$$\frac{dL}{ds} = n. \tag{9.27}$$

Аналогичное равенство может быть выведено для любого фронта волны, если приращение функции L отсчитывать для бесконечно малых участков поверхности $L = \text{const}$ в направлении нормали («луча») к последней.

Выражение (9.27) справедливо также и для сред с переменным показателем преломления, так как в бесконечно тонком слое ds показатель преломления можно считать постоянным.

Так как направление $\bar{s}$, по которому происходит дифференцирование функции L в (9.27), совпадает с направлением нормали к поверхности равных значений L, то

$$\frac{dL}{ds} = |\operatorname{grad} L|,$$

ибо по определению

$$\operatorname{grad} L = \frac{dL}{ds}\bar{s},$$

где s — единичный вектор, определяющий направление наибыстрейшего изменения функции L. Отсюда следует, что уравнение, которому удовлетворяет функция L, окончательно запишется в виде

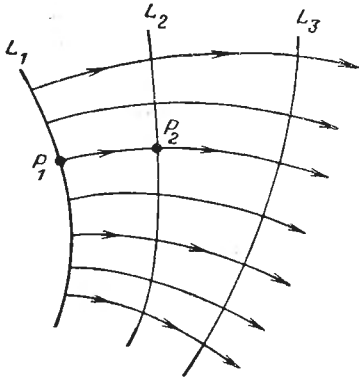


Рис. 9.5. Волновые поверхности и лучи.

$$\left.\begin{aligned} &|\operatorname{grad} L| = n, \\ &\text{или} \\ &\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^2 + \\ &\quad + \left(\frac{\partial L}{\partial z}\right)^2 = n^2. \end{aligned}\right\} \qquad (9.28)$$

Таким образом, при движении волны (9.22) в среде с переменным показателем преломления форма и положение волновой поверхности в любой момент времени будут определяться уравнением (9.25). В процессе распространения волны каждый элементарный участок волновой поверхности смещается в направлении нормали к последней, т. е. движется вдоль луча. Поэтому характер движения волны в этом случае определяется семейством кривых (лучей), нормальных поверхностям $L = \text{const}$ (рис. 9.5).

5. Законы геометрической оптики

Рассмотрим две поверхности равных значений функции L:

$$L(x, y, z) = L_1 \text{ и } L(x, y, z) = L_1 + \Delta L = L_2.$$

Из выражения (9.27) следует, что при переходе от первой поверхности ко второй функция L получает приращение

$$\Delta L = \int_{\Gamma} n ds, \qquad (9.29)$$

где Γ — контур интегрирования, совпадающий с «лучом», соединяющим точки P_1 и P_2 этих поверхностей (рис. 9.5). Величина ΔL, определяемая интегралом (9.29), называется длиной оптического пути между точками P_1 и P_2.

Из уравнения (9.24) получается, что длина оптического пути между точками P_1 и P_2 равна

$$\Delta L = c\Delta t,$$

где Δt — время, необходимое для перемещения точки P_1 по лучу в точку P_2 со скоростью v. Следовательно, длина оптического пути между точками P_1 и P_2 численно равна расстоянию, которое точка P_1 пройдет за время Δt при движении со скоростью света в пустоте.

Из вышеизложенного вытекает, что длина оптического пути между любыми точками P_1 и P_2 поверхностей L_1 и L_2, связанными соответствующим лучом, остается одинаковой, несмотря на то, что геометрическая длина лучей между этими точками в общем случае будет различной.

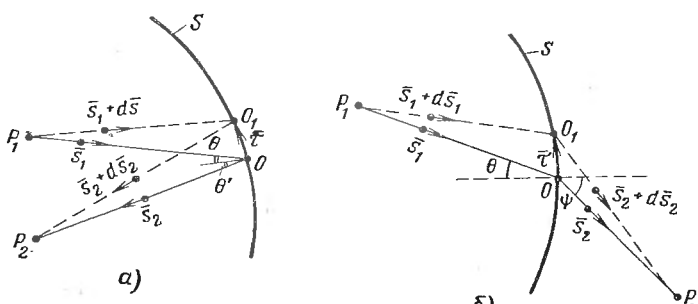


Рис. 9.6. К выводу законов отражения (*а*) и преломления (*б*) волн.

В основе законов геометрической оптики лежит так называемый принцип Ферма, утверждающий, что при движении волны типа (9.22) длина оптического пути между волновыми поверхностями должна быть экстремальна, т. е. она может иметь либо минимальное, либо максимальное значение.

Принцип Ферма дает возможность определить форму лучей в пространстве. Так, из него непосредственно вытекает, что при распространении волн в однородной среде лучи имеют характер прямых линий. Он позволяет также вывести законы отражения и преломления волн типа (9.22).

Рассмотрим, например, отражение волны, источник которой находится в точке P_1 однородной среды, от криволинейной поверхности S (рис. 9.6, *а*).

Согласно принципу Ферма волна из точки P_1 должна распространяться в точку P_2 прямолинейно так, чтобы длина оптического пути, отсчитываемая по лучам P_1O и OP_2, была экстремальна. Условие экстремума длины оптического пути означает, что приращения этой величины при бесконечно малых отклонениях лучей от истинного их положения должны быть равны нулю *).

*) Аналогичными свойствами, как известно, обладают все непрерывные функции в точках экстремальных значений. Действительно, приращение функции $y = f(x)$, вызванное бесконечно малым приращением аргумента в точке $x = x_0$, равно $dy = f'(x_0)\,dx$. В тех точках, где функция $y = f(x)$ имеет максимум или минимум, $f'(x_0) = 0$ и, следовательно, $dy = 0$.

Если приращение длины оптического пути обозначить δL, то условие экстремума будет иметь вид

$$\delta L = 0. \tag{9.30}$$

Предположим, что мы переместились из точки O на поверхности S в бесконечно близкую точку O_1 (рис. 9.6, *а*). В соответствии с изложенным приращение длины оптического пути δL в этом случае должно быть равно нулю.

Так как среда слева от поверхности S однородна (показатель преломления $n = \text{const}$), то длина оптического пути из точки P_1 в точку P_2, отсчитываемая по лучам P_1O и OP_2, равна

$$n(r_1 + r_2),$$

где r_1 — расстояние P_1O; r_2 — расстояние OP_2.

При смещении в точку O_1 новая длина оптического пути становится равной $n(r_1 + dr_1 + r_2 + dr_2)$; здесь $r_1 + dr_1$ — расстояние P_1O_1; $r_2 + dr_2$ — расстояние O_1P_2. Следовательно,

$$\delta L = n(r_1 + dr_1 + r_2 + dr_2) - n(r_1 + r_2) = n(dr_1 + dr_2). \tag{9.31}$$

Обозначим (рис. 9.6, *а*): $\bar{s}_1$ — орт, направленный по P_1O; $\bar{s}_2$ — орт, направленный по OP_2; $(\bar{s}_1 + \bar{ds}_1)$ — орт, направленный по P_1O_1; $(\bar{s}_2 + \bar{ds}_2)$ — орт, направленный по O_1P_2; $\bar{\tau}$ — орт, направленный по касательной к поверхности S из точки O в точку O_1; dl — длина бесконечно малого отрезка OO_1.

Тогда из рис. 9.6, *а* следует, что вектор $(r_1 + dr_1)(\bar{s}_1 + \bar{ds})$ равен

$$(r_1 + dr_1)(\bar{s}_1 + \bar{ds}_1) = r_1\bar{s}_1 + \bar{\tau}dl,$$

а

$$(r_2 + dr_2)(\bar{s}_2 + \bar{ds}_2) = r_2\bar{s}_2 - \bar{\tau}\,dl.$$

Раскрывая скобки и пренебрегая бесконечно малыми второго порядка, получим

$$dr_1\bar{s}_1 + r_1\bar{ds}_1 = \bar{\tau}\,dl,$$

$$dr_2\bar{s}_2 + r_2\bar{ds}_2 = -\bar{\tau}\,dl.$$

Умножим обе части первого равенства скалярно на $\bar{s}_1$ и обе части второго равенства на $\bar{s}_2$. В результате будем иметь

$$dr_1 = \bar{s}_1\bar{\tau}\,dl,$$

$$dr_2 = -\bar{s}_2\bar{\tau}\,dl$$

(произведения $\bar{s}_1 d\bar{s}_1$ и $\bar{s}_2 d\bar{s}_2$ равны нулю, так как векторы $\bar{s}$ и $d\bar{s}$ взаимно перпендикулярны). Подставив найденные значения dr_1 и dr_2 в выражение (9.31) и учитывая (9.30), получим

$$(\bar{s}_1 - \bar{s}_2)\,\bar{\tau} = 0. \tag{9.32}$$

Рассматривая рис. 9.6, *а*, нетрудно заметить, что

$$\bar{s}_1\bar{\tau} = \cos(\bar{s}_1, \bar{\tau}) = -\sin\theta;$$

$$\bar{s}_2\bar{\tau} = \cos(\bar{s}_2, \bar{\tau}) = -\sin\theta'.$$

Следовательно, $\theta = \theta'$.

Так как равенство (9.32) должно выполняться при любых направлениях единичного орта $\bar{\tau}$, проходящего через точку O, то лучи P_1O, OP_2 и нормаль к поверхности S в точке O должны лежать в одной плоскости.

Таким образом, при отражении волн типа (9.22) от поверхности S:

1) луч падающей волны, луч отраженной волны и нормаль к поверхности S в точке падения лежат в одной плоскости;

2) угол между нормалью к поверхности S и лучом падающей волны (угол падения) равен углу между нормалью и лучом отраженной волны (угол отражения).

Законы преломления волны типа (9.22) на границе раздела двух сред выводятся аналогично. В этом случае приращение длины оптического пути из точки P_1 в точку P_2 (рис. 9.6, *б*) при смещении точки O в точку O_1 будет равно

$$\delta L = n_1\,dr_1 + n_2\,dr_2.$$

По принципу Ферма

$$n_1\,dr_1 + n_2\,dr_2 = 0.$$

Так как здесь по-прежнему

$$dr_1 = \bar{s}_1\bar{\tau}; \qquad dr_2 = -\bar{s}_2\bar{\tau},$$

то

$$(n_1\bar{s}_1 - n_2\bar{s}_2)\,\bar{\tau} = 0$$

при любом направлении единичного орта $\bar{\tau}$. Отсюда следует, что лучи P_1O, OP_2 и нормаль к поверхности раздела в точке O должны лежать в одной плоскости.

Принимая во внимание, что

$$\bar{s}_1\bar{\tau} = \cos(\bar{s}_1, \bar{\tau}); \qquad \bar{s}_2\bar{\tau} = \cos(\bar{s}_2, \bar{\tau}),$$

а

$$\cos(\bar{s}_1, \bar{\tau}) = -\sin\theta; \quad \cos(\bar{s}_2, \bar{\tau}) = -\sin\psi,$$

получим

$$n_1 \sin\theta = n_2 \sin\psi. \tag{9.33}$$

Таким образом, в случае преломления волны (9.22) на границе раздела двух сред:

1) луч падающей волны, луч преломленной волны и нормаль к поверхности раздела в точке падения лежат в одной плоскости;

2) угол падения и угол преломления связаны между собой соотношением (9.33).

Из вышеизложенного следует, что законы отражения и преломления, вытекающие из принципа Ферма, аналогичны законам отражения и преломления плоских электромагнитных волн на плоской границе раздела. Эта аналогия объясняется тем, что любой элементарный участок поверхности равных фаз волны (9.22) при распространении ведет себя как элемент волновой поверхности плоской волны.

6. Переход от волновой теории поля к законам геометрической оптики

Найдем условия, при которых электромагнитное поле будет удовлетворять законам геометрической оптики. Для этого попробуем искать решение уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot}\dot{\bar{H}} = i\omega\varepsilon\dot{\bar{E}}; \qquad \operatorname{rot}\dot{\bar{E}} = -i\omega\mu\dot{\bar{H}}$$

в области с ε и $\mu = \text{const}$ в виде

$$\left.\begin{aligned} \dot{\bar{E}} &= \dot{\bar{E}}_0(x, y, z)\, e^{-ik_0 L(x, y, z)}, \\ \dot{\bar{H}} &= \dot{\bar{H}}_0(x, y, z)\, e^{-ik_0 L(x, y, z)}, \end{aligned}\right\} \tag{9.34}$$

где $\dot{\bar{E}}_0$, $\dot{\bar{H}}_0$ — комплексные векторные амплитуды; $k_0 = \omega/c$; $L = nL_0(x, y, z)$ — функция, определяющая волновые поверхности поля.

Чтобы найти уравнения, которым должны удовлетворять $\dot{\bar{E}}_0$, $\dot{\bar{H}}_0$ и L, подставим (9.34) в исходные уравнения Максвелла. В результате, используя соотношение

$$\operatorname{rot}(\psi\bar{a}) = \psi \operatorname{rot}\bar{a} + (\operatorname{grad}\psi \times \bar{a}),$$

получим:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\bar{E}}_0 &= -\frac{k_0}{\omega\varepsilon}\left(\operatorname{grad} L \times \dot{\bar{H}}_0\right) + \frac{1}{i\omega\varepsilon}\operatorname{rot}\dot{\bar{H}}_0, \\ \dot{\bar{H}}_0 &= \frac{k_0}{\omega\mu}\left(\operatorname{grad} L \times \dot{\bar{E}}_0\right) - \frac{1}{i\omega\mu}\operatorname{rot}\dot{\bar{E}}_0. \end{aligned}\right\} \tag{9.35}$$

Подставим далее значение $\dot{\overline{H}}_0$ из второго уравнения в первое. Тогда

$$\dot{\overline{E}}_0 = -\frac{k_0^2}{\omega^2\varepsilon\mu}\left(\operatorname{grad} L \times \operatorname{grad} L \times \dot{\overline{E}}_0\right) + \\ + \frac{k_0^2}{i\omega^2\varepsilon\mu}\left[\operatorname{rot}\left(\operatorname{grad} L \times \dot{\overline{E}}_0\right) + \left(\operatorname{grad} L \times \operatorname{rot}\dot{\overline{E}}_0\right)\right] + \\ + \frac{1}{\omega^2\varepsilon\mu}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\dot{\overline{E}}_0.$$

Так как $\omega\sqrt{\varepsilon\mu} = k$ и $\frac{k}{k_0} = \frac{c}{v} = n$, а

$$\operatorname{grad} L \times \operatorname{grad} L \times \dot{\overline{E}}_0 = \operatorname{grad} L\left(\operatorname{grad} L\,\dot{\overline{E}}_0\right) - \\ - \dot{\overline{E}}_0 |\operatorname{grad} L|^2,$$

то

$$\dot{\overline{E}}_0 = -\frac{1}{n^2}\left[\operatorname{grad} L\left(\dot{\overline{E}}_0 \operatorname{grad} L\right) - \dot{\overline{E}}_0 |\operatorname{grad} L|^2\right] + \\ + \frac{1}{in^2k_0}\left[\operatorname{rot}\left(\operatorname{grad} L \times \dot{\overline{E}}_0\right) + \left(\operatorname{grad} L \times \operatorname{rot}\dot{\overline{E}}_0\right)\right] + \\ + \frac{1}{n^2k_0^2}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\dot{\overline{E}}_0. \qquad (9.36)$$

Аналогичному уравнению удовлетворяет также вектор $\dot{\overline{H}}_0$.

Рассмотрим теперь уравнение (9.36) при условии, что ω и $k_0 \to \infty$. Если производные функций $\dot{\overline{E}}_0$, $\dot{\overline{H}}_0$ и L по переменным x, y, z конечны, то второй и третий члены в правой части равенства (9.36) будут стремиться к нулю, и, следовательно,

$$\dot{\overline{E}}_0\Big|_{\omega\to\infty} = -\frac{1}{n^2}\left[\operatorname{grad} L\left(\dot{\overline{E}}_0 \operatorname{grad} L\right) - \dot{\overline{E}}_0 |\operatorname{grad} L|^2\right].$$

Последнее равенство и аналогичное соотношение для $\dot{\overline{H}}_0$ будут выполняться при условиях:

$$\dot{\overline{E}}_0 \operatorname{grad} L = 0, \qquad (9.37')$$

$$\dot{\overline{H}}_0 \operatorname{grad} L = 0, \qquad (9.37'')$$

$$|\operatorname{grad} L|^2 = n^2. \qquad (9.37''')$$

Какой же смысл имеют эти условия? Прежде всего следует отметить, что равенство (9.37''') совпадает с дифференциальным урав-

пением (9.28), которому удовлетворяет функция L. Далее, из условий (9.37′) и (9.37″) вытекает, что векторы $\dot{\vec{E}}_0$ и $\dot{\vec{H}}_0$ перпендикулярны направлению движения волновой поверхности, так как grad L в каждой точке поверхности $L = \text{const}$ нормален к ней и, стало быть, направлен по лучу.

Переписав затем второе равенство (9.33) при $\omega \to \infty$ в виде

$$\dot{\vec{H}}_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left(\frac{\text{grad } L}{n} \times \dot{\vec{E}}_0 \right),$$

мы можем заключить, что вектор $\dot{\vec{H}}_0$ перпендикулярен вектору $\dot{\vec{E}}$. Кроме того, из условий (9.37) и последнего выражения вытекает, что

$$\dot{H}_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{|\text{grad } L|}{n} \dot{E}_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \dot{E}_0 = \frac{\dot{E}_0}{Z_0}.$$

Таким образом, волновое электромагнитное поле в предельном случае $\omega \to \infty$ (или $\lambda \to 0$) вырождается в поле, удовлетворяющее законам геометрической оптики. При этом каждый бесконечно малый элемент волновой поверхности поля ведет себя как элемент фронта плоской волны.

Если частота колебаний поля конечна, но все же достаточно велика, то соотношения геометрической оптики будут, очевидно, приближенно применимы к тем точкам пространства, где второй и третий члены равенства (9.35) значительно меньше первого члена. Понятно, что последнее условие не будет выполняться там, где резко изменяются величины векторов $\dot{\vec{E}}_0$ и $\dot{\vec{H}}_0$, а также в точках быстрого изменения функции L.

Резкое изменение амплитуд поля обычно имеет место на границе так называемой «геометрической тени» (в терминах геометрической оптики), а функция L быстро изменяется вблизи своей фокальной точки. В этих областях электромагнитное поле при конечной частоте колебаний будет значительно отличаться от поля, удовлетворяющего законам геометрической оптики. Подтверждением последнему может служить нормированная кривая распределения амплитуды $|\dot{E}_z(\varphi)|$ в пространстве при дифракции плоской волны относительно кругового цилиндра, построенная на рис. 9.3 для значения $ka \to \infty$ и, следовательно, соответствующая методам геометрической оптики. Действительно, эта кривая удовлетворительно приближается к истинным кривым в «освещенной» области ($-\pi/2 < \varphi < \pi/2$) при больших значениях ka и совершенно не отражает действительного характера поля вблизи границ «тени» (окрестности $\varphi = \pm\pi$).

Переход от волнового поля к полю геометрической оптики можно объяснить качественным путем.

Предположим, что S есть некоторая волновая поверхность поля известной системы источников в однородном пространстве (рис. 9.7). При малых λ каждый элемент поверхности S можно рассматривать как источник Гюйгенса (см. § 10 гл. VIII), ибо в этом случае поле в каждой точке S становится поперечным, причем отношение $\dot{E}_0/\dot{H}_0$ равно волновому сопротивлению среды. Следовательно, векторы $\overline{E}$ и $\overline{H}$ поля в произвольной точке наблюдения P являются результатом геометрического сложения векторов полей элементарных источников, распределенных на S.

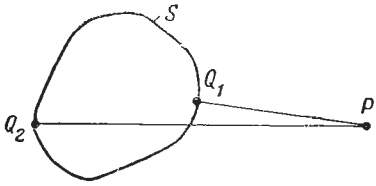


Рис. 9.7. Волновая поверхность и точки стационарной фазы.

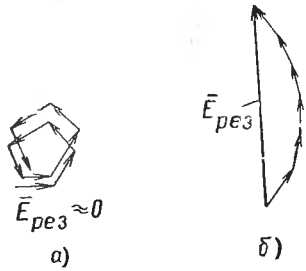


Рис. 9.8. Суммирование векторов полей элементарных источников при быстром (*а*) и медленном (*б*) изменении фаз.

Совершенно ясно, что характер суммирования полей источников Гюйгенса в точке наблюдения будет зависеть от величины фазовых сдвигов между ними. Для любой пары источников эта величина, как известно, равна

$$\Delta\Phi = 2\pi\frac{\Delta r}{\lambda},$$

где Δr — разность хода волны от первого и второго источников до точки наблюдения.

При больших $\Delta\Phi$ суммирование малых (или, точнее, бесконечно малых) векторов полей элементарных источников в точке P имеет вид, изображенный на рис. 9.8, *а*. В этом случае результирующий вектор $\overline{E}$ (и вектор $\overline{H}$) будет стремиться к нулю. Если же величина $\Delta\Phi$ невелика, суммирование соответствует рис. 9.8, *б*, откуда следует, что результирующий вектор $\overline{E}$ (а также вектор $\overline{H}$) теперь отличен от нуля.

Но величина $\Delta\Phi$ при небольшой λ принимает малые значения только в окрестностях так называемых точек стационарной фазы. Последние представляют собой точки пересечения волновой поверхности S с нормалями, опущенными на S из точки наблюдения P (рис. 9.7). В рассматриваемом случае мы полагаем,

что через точку P проходят только две таких нормали и соответственно на S имеются только две точки стационарной фазы Q_1 и Q_2. В точке стационарной фазы производные функции Δr по направлениям, касательным к S, оказываются равными нулю. Поэтому смещение из такой точки по волновой поверхности на малую величину дает фазовый сдвиг, близкий к нулю. Для всех остальных точек, принадлежащих S, величина $\Delta\Phi$ будет достаточно большой.

Таким образом, мы можем заключить, что при малой длине волны поле в точке наблюдения создается элементарными источниками, находящимися в окрестностях точек стационарной фазы на исходной волновой поверхности, причем площадь, занимаемая этими источниками, по мере укорочения волны все более сжимается.

Казалось бы, в рассматриваемом случае нам необходимо учитывать обе точки Q_1 и Q_2. Однако следует иметь в виду, что диаграммой направленности источника Гюйгенса является кардиойда, максимум которой направлен в сторону движения фронта волны. Поэтому поле источника Q_2 в точке P при $\lambda \to 0$ равно нулю, а поле источника Q_1 будет совпадать с геометрооптическим полем.

7. Принципы приближенного решения дифракционных задач

Изложенные в предыдущих параграфах сведения лежат в основе приближенного решения задач дифракции электромагнитных волн. Чтобы познакомиться с принципами такого решения, рассмотрим пример.

Пусть на тело, ограниченное некоторой гладкой поверхностью S, падает электромагнитная волна, возбуждаемая удаленным источником Q (рис. 9.9). Требуется определить вторичное (рассеянное) электромагнитное поле.

При решении поставленной задачи мы можем полагать, что дифракция электромагнитной волны на теле будет подчиняться законам, близким к законам геометрической оптики, если длина волны много меньше линейных размеров тела и радиусов кривизны его поверхности. В этом случае любой малый элемент фронта первичной волны, падающей на криволинейную граничную поверхность, будет вести себя приблизительно так же, как и элемент фронта плоской волны, падающей на плоскую поверхность.

Однако законы геометрической оптики не дают достаточно правильного представления о распределении рассеянного поля во всем пространстве. Из них, в частности, следует, что поле в области «тени» равно нулю, между тем как в действительности поле там, конечно, имеется. Поэтому законы геометрической оптики целесообразно использовать лишь для того, чтобы определить прибли-

женные значения векторов вторичного поля на граничной поверхности, а затем, на основании методов волновой теории, рассчитать уже поле во всем пространстве.

Предположим для простоты рассуждений, что тело является идеально проводящим и что, вследствие этого, на поверхности его имеется только электрический ток.

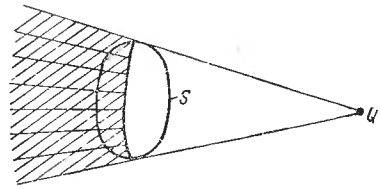


Рис. 9.9. К исследованию дифракции электромагнитной волны на теле произвольной формы.

В соответствии с приведенными выше соображениями можно полагать, что на «теневой» стороне тела вектор поверхностной плотности тока $\bar{j}_S = 0$ (на рис. 9.9 области «тени» соответствует заштрихованная часть пространства).

На «освещенной» стороне вектор плотности тока может быть найден из условия, что в каждой точке поверхности S волна источника отражается по тем же законам, что и плоская волна, падающая на бесконечную идеально проводящую плоскость.

Из выражений, рассмотренных в VI главе, следует, что при отражении плоской волны на идеально проводящей плоской поверхности выполняется равенство

$$\dot{\bar{H}}_{\text{tg пад}} = \dot{\bar{H}}_{\text{tg отр}}, \tag{9.38}$$

где $\dot{\bar{H}}_{\text{tg пад}}$ и $\dot{\bar{H}}_{\text{tg отр}}$ — составляющие векторов напряженности магнитного поля падающей и отраженной волн, касательные к плос-

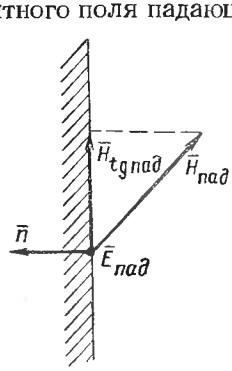


Рис. 9.10. К расчету плотности электрического тока на плоской проводящей поверхности.

кости. Если ввести в рассмотрение орт нормали $\bar{n}$ к плоскости (рис. 9.10), то получается, что

$$\dot{\bar{H}}_{\text{tg пад}} = \bar{n} \times (\dot{\bar{H}}_{\text{пад}} \times \bar{n}),$$

и, аналогично,

$$\dot{\bar{H}}_{\text{tg отр}} = \bar{n} \times (\dot{\bar{H}}_{\text{отр}} \times \bar{n}).$$

Следовательно, выражение (9.38) может быть записано в виде

$$\left(\dot{\bar{H}}_{\text{пад}} \times \bar{n}\right) = \left(\dot{\bar{H}}_{\text{отр}} \times \bar{n}\right). \tag{9.39}$$

Так как на «освещенной» части тела плотность тока, возбуждаемого полем падающей волны, равна

$$\bar{j}_S = \left(\dot{\bar{H}}_{\text{пад}} + \dot{\bar{H}}_{\text{отр}}\right) \times \bar{n},$$

то, учитывая равенство (9.39), получим

$$\bar{j}_S = 2\left(\dot{\bar{H}}_{\text{пад}} \times \bar{n}\right).$$

Таким образом, приближенный закон распределения тока, возникающего на поверхности проводящего тела при дифракции электромагнитной волны, имеет вид

$$\bar{j}_S = \begin{cases} 0 & \text{на «теневой» части тела,} \\ 2\left(\dot{\bar{H}}_{\text{пад}} \times \bar{n}\right) & \text{на «освещенной» части тела.} \end{cases} \tag{9.40}$$

На рис. 9.2 изображена кривая распределения модуля вектора плотности тока, возбуждаемого на поверхности бесконечно длинного идеально проводящего цилиндра полем плоской волны при $ka \to \infty$ ($\lambda \to 0$). Следовательно эта кривая является аппроксимацией типа (9.40) истинного закона распределения величины j_S для цилиндра при больших ka.

Как видно из рис. 9.2, кривые $j_{z_0}(\varphi)/j_{z_0}(0) = f(\varphi)$ достаточно близки к предельной кривой в «освещенной» области даже при сравнительно небольших ka и приближаются к ней на всем интервале $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$ при увеличении ka.

Для расчета вторичного электромагнитного поля, создаваемого током (9.40), необходимо определить вектор-потенциал $\dot{\bar{A}}$ по формуле (8.72), а затем найти векторы $\dot{\bar{E}}$ и $\dot{\bar{H}}$ по формулам (8.71) при $\dot{\bar{F}} = 0$.

8. Дифракция плоской электромагнитной волны на отверстии в плоском проводящем экране

Пусть плоская волна с векторами

$$\left.\begin{aligned} \dot{\bar{E}}_{\text{пад}} &= -\bar{i}_x \dot{E}_0 e^{-ikz}, \\ \dot{\bar{H}}_{\text{пад}} &= -\bar{i}_y \dot{H}_0 e^{-ikz} \end{aligned}\right\}$$

падает на бесконечный проводящий экран, расположенный в плоскости $z = 0$. Требуется рассчитать электромагнитное поле, проникающее в переднее полупространство ($z \geqslant 0$) через отверстие прямоугольной формы с размерами сторон a и b (рис. 9.11).

Для расчета вторичного электромагнитного поля удобно использовать принцип эквивалентных токов в сочетании с законами геометрической оптики.

По законам геометрической оптики поле, проникающее за экран при падении на него плоской волны, представляется в виде пучка лучей, параллельных оси z, с поперечным сечением той же формы, что и отверстие. На самом деле, поле в переднем полупространстве имеет другую структуру. Тем не менее соотношения геометрической оптики можно использовать для того, чтобы найти хотя бы приближенное распределение векторов поля в плоскости $z = 0 +$ (знак

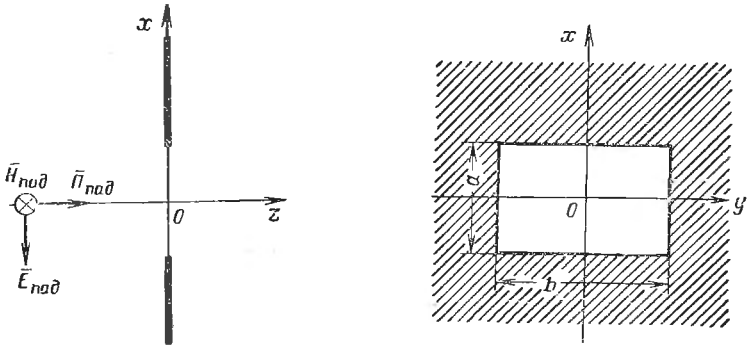


Рис. 9.11. К исследованию дифракции плоской волны на отверстии в плоском проводящем экране.

$+$ здесь указывает, что стремление к плоскости $z = 0$ происходит справа). Согласно этим законам распределение поля на отверстии должно совпадать с распределением поля падающей волны, а на остальной части плоскости $z = 0 +$ («теневая» сторона экрана) векторы $\bar{E}$ и $\bar{H}$ должны обращаться в нуль.

Разумеется, все изложенное будет приближенно справедливо лишь при условии, что размеры отверстия в экране значительно больше длины волны (a и $b \gg \lambda$). В действительности структура поля на отверстии, конечно, отличается от той структуры, которую имеет падающая волна, вследствие искажений, возникающих вблизи кромок экрана. Однако для больших отверстий относительное влияние этих искажений на вторичное поле будет не столь значительным, как, например, при малых отверстиях.

Далее, в отличие от исходных допущений, на «теневой» части экрана истинное поле не обращается в нуль. На самом деле, по экрану и в «теневой» части его течет электрический ток, и, стало быть, касательная составляющая вектора $\bar{H}$ на нем отлична от нуля. Однако, как показывает опыт, проникновение поля в область «тени» вблизи экрана оказывается незначительным, если a и $b \gg \lambda$.

Итак, в соответствии с изложенным граничные условия для векторов $\overline{E}$ и $\overline{H}$ искомого электромагнитного поля в плоскости $z = 0 +$ можно записать в виде:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\overline{E}} &= \begin{cases} -\overline{i}_x \dot{E}_0 & \text{на } S_0, \\ 0 & \text{на } S_1; \end{cases} \\ \dot{\overline{H}} &= \begin{cases} -\overline{i}_y \dot{H}_0 & \text{на } S_0, \\ 0 & \text{на } S_1. \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{9.41}$$

Здесь S_0 — площадь отверстия; S_1 — «теневая» поверхность экрана.

По принципу эквивалентных токов распределению поля (9.41) в плоскости $z = 0 +$ соответствуют поверхностные электрический и магнитный токи:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\overline{j}}_S &= \begin{cases} \overline{i}_x \dot{H}_0 & \text{на } S_0, \\ 0 & \text{на } S_1; \end{cases} \\ \dot{\overline{j}}_{MS} &= \begin{cases} \overline{i}_y \dot{E}_0 & \text{на } S_0, \\ 0 & \text{на } S_1. \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{9.42}$$

Таким образом, для определения поля, проникающего в переднее полупространство через отверстие, необходимо найти поле поверхностных электрических и магнитных токов (9.42).

Задача по расчету поля такого источника в дальней зоне была рассмотрена в § 10 гл. VIII. Поэтому можно сразу же утверждать, что проекции векторов $\overline{E}$ и $\overline{H}$ на больших расстояниях от отверстия определяются полученными там формулами (8.107). Необходимо только величину S в них заменить на S_0, а ток j_0 считать равным $\dot{H}_0$.

Диаграмма направленности источника подобного типа также была исследована в § 10 гл. VIII. На основании этих исследований можно заключить, что с увеличением линейных размеров отверстия при неизменной длине волны (или с уменьшением длины волны при неизменных размерах отверстия) главный лепесток диаграммы сужается (см. рис. 8.20).

Изложенный метод решения дифракционной задачи, как уже отмечалось выше, использует приближенные граничные условия в плоскости $z = 0 +$ *). Поэтому найденное в результате решения электромагнитное поле в переднем полупространстве будет в какой-то степени отличаться от истинного поля. Определим, например,

*) См. об этом также в § 9 гл. VIII.

проекцию $\dot{E}_\varphi$, касательную при $\theta = \pi/2$ к плоскости экрана. Из формул (8.107) следует, что

$$\dot{E}_\varphi = \frac{i}{2\lambda} \dot{H}_0 Z_0 S_0 \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\sin\left(\frac{ka}{2}\sin\theta\cos\varphi\right)}{\frac{ka}{2}\sin\theta\cos\varphi} \times$$

$$\times \frac{\sin\left(\frac{kb}{2}\sin\theta\sin\varphi\right)}{\frac{kb}{2}\sin\theta\sin\varphi} (1+\cos\theta)\sin\varphi.$$

Так как экран по условию имеет бесконечно большую проводимость, то проекция $\dot{E}_\varphi$ при $\theta = \pi/2$ должна обратиться в нуль. Однако из последнего выражения видно, что

$$\dot{E}_\varphi\left(\frac{\pi}{2}, \varphi\right) \neq 0.$$

Следовательно, найденное поле не удовлетворяет граничным условиям в плоскости экрана.

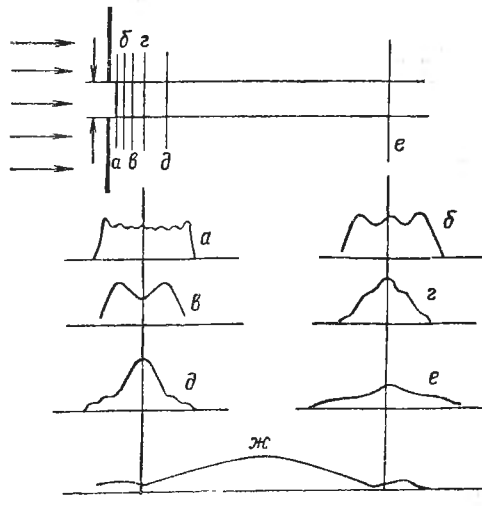


Рис. 9.12. Распределение напряженности поля в плоскости $z = \text{const}$ на различных расстояниях от источника в виде прямоугольника с поверхностными токами.

Таким образом, приближенное решение дифракционной задачи приводит к результатам, отличающимся от истинных при больших значениях угла θ. Однако для небольших θ результаты приближенного решения оказываются достаточно близкими к истинным данным.

Выражения (8.106), как уже отмечалось, определяют вторичное электромагнитное поле в дальней зоне. Протекающие здесь явле-

ния характеризуют так называемую дифракцию Фраунгофера. Отличительным признаком фраунгоферовой дифракции является наличие в пространстве чисто сферической волны.

Дифракционные явления в ближней и промежуточной зонах имеют другой характер. Здесь происходит превращение поля, сформировавшегося на отверстии, в сферическую волну. В этих областях наблюдается так называемая дифракция Френеля.

На рис. 9.12 изображены кривые, дающие представление о распределении поля рассмотренного выше эквивалентного источника в плоскостях $z = \text{const}$, на различных расстояниях от него. Из рисунка видно, что вблизи источника распределение поля в поперечной плоскости приближается к тому, которое получается из законов геометрической оптики. По мере увеличения расстояния от плоскости $z = 0$ структура поля существенно изменяется, «пучок» лучей как бы расплывается, превращаясь в сферическую волну.

9. Основы теории плоских дифракционных антенн

Дифракционная антенна представляет собой проводящую поверхность с отверстием (или совокупностью отверстий), через которое излучается электромагнитное поле. Отверстие, как правило, закрыто с одной стороны проводящими стенками, образующими вместе с исходной поверхностью внутреннюю полость (рис. 9.13). В этой полости помещается источник электромагнитного поля в виде штыря или рамки с током и т. п. Таким образом, излучение электромагнитных волн во внешнее пространство здесь происходит в результате дифракции поля первичного источника на отверстии. Отсюда, собственно, и происходит название «дифракционная антенна».

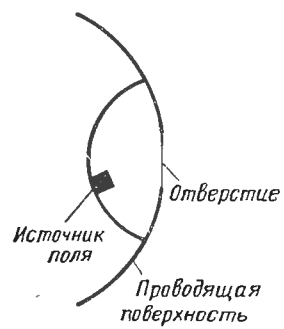


Рис. 9.13. Дифракционная антенна.

Если проводящая поверхность имеет форму плоскости, дифракционная антенна называется плоской. В основе теории таких антенн лежит принцип двойственности, сформулированный, как указывалось выше, А. А. Пистолькорсом.

Рассмотрим плоскую дифракционную антенну в виде бесконечного идеально проводящего экрана в плоскости $z = 0$ с отверстием S_0 (рис. 9.14, *а*). Пусть граничные значения касательной к этой плоскости составляющей вектора $\dot{\bar{E}}$ при $z = 0$ равны

$$\dot{\bar{E}}_{\text{tg}} = \begin{cases} 0 & \text{на } S_1, \\ \dot{\bar{F}}(x, y) & \text{на } S_0, \end{cases} \tag{9.43}$$

где $\dot{\bar{F}}(x, y)$ — заданная векторная функция; S_1 — часть плоскости $z=0$ без S_0 (т. е. проводящая часть поверхности $z=0$).

На основании принципа двойственности решение уравнений Максвелла в полупространстве $z \geqslant 0$ при условиях (9.43) может быть получено непосредственно из решения задачи с граничными условиями

$$\dot{\bar{H}}_{\text{tg}} = \begin{cases} 0 & \text{на } S_1 \text{ при } z=0, \\ \dot{\bar{F}}_1(x, y) & \text{на } S_0 \text{ при } z=0, \end{cases} \tag{9.43'}$$

где $\dot{\bar{F}}_1(x, y)$ — функция, образованная из $\dot{\bar{F}}(x, y)$ перестановкой

$$\dot{\bar{E}} \rightleftarrows \dot{\bar{H}}; \quad \varepsilon \rightleftarrows \mu.$$

Предположим, что в плоскости $z=0$ имеется другой источник поля, в виде идеально проводящего бесконечно тонкого плоского листка (антенны) с электрическим током, причем форма этого листка совпадает с формой отверстия (рис. 9.13, *б*). Легко убедиться, что при любом распределении электрического тока на поверхности листка вектор $\dot{\bar{H}}$ магнитного поля в плоскости $z=0$ на участке S_1 будет перпендикулярен к последней. С этой целью представим новый источник в виде суперпозиции элементарных электрических диполей. Силовые линии магнитного поля электрического диполя, как известно, имеют форму концентрических окружностей с центром на его оси, причем вектор $\dot{\bar{H}}$ перпендикулярен любой плоскости, в которой лежит эта ось. В нашем случае все диполи, эквивалентные электрическому току в области S_0, лежат в одной плоскости. Следовательно, любая силовая линия создаваемого ими магнитного поля пересекает плоскость $z=0$ в области S_1 под прямым углом. Отсюда вытекает, что на S_1 составляющая

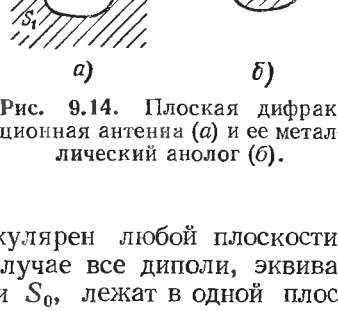


Рис. 9.14. Плоская дифракционная антенна (*а*) и ее металлический анолог (*б*).

$$\dot{\bar{H}}_{\text{tg}} = 0.$$

Если, кроме того, на поверхности листка имеет место равенство

$$\dot{\bar{j}} = \bar{n} \times \left(\dot{\bar{H}}_1 - \dot{\bar{H}}_2\right) = 2\dot{\bar{H}}_{\text{tg}} \times \bar{n} = 2\dot{\bar{F}}_1 \times \bar{n}, \tag{9.44}$$

где $\dot{\bar{H}}_1$ и $\dot{\bar{H}}_2$ — векторы напряженности магнитного поля при $z=0-$ и $z=0+$; $\bar{n} = -\bar{i}_z$, то система, изображенная на рис. 9.14, *б*, будет полностью удовлетворять требованиям принципа двойственности по отношению к системе рис. 9.14, *а*.

Таким образом, плоская дифракционная антенна с заданным распределением касательных составляющих напряженности электрического поля в пределах отверстия имеет своим аналогом плоскую металлическую антенну такой же формы и с таким же распределением касательных составляющих напряженности магнитного поля по ее поверхности. Это означает, что если известно электромагнитное поле, возбуждаемое в пространстве плоской бесконечно тонкой металлической антенной, то, произведя в выражениях для поля ее перестановку типа $\dot{E} \rightleftarrows \dot{H}$ и $\varepsilon \rightleftarrows \mu$, мы найдем электромагнитное поле соответствующей плоской дифракционной антенны.

Одним из примеров плоской дифракционной антенны может служить прямоугольная щель в проводящем экране, имеющая длину порядка $\lambda/2$ и весьма малую ширину $d \ll \lambda$.

В соответствии с изложенным, решение задачи об излучении подобной щели может быть получено из решения задачи об излучении плоского вибратора тех же размеров (рис. 9.15).

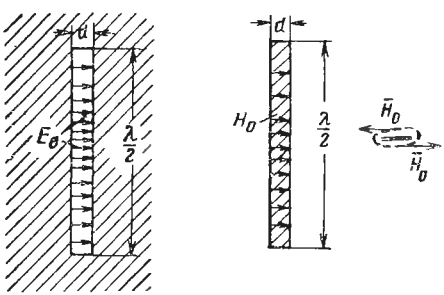


Рис. 9.15. Плоская щелевая антенна и плоский вибратор.

Рассмотрим малый участок плоского вибратора длиной Δl. Как известно электромагнитное поле, создаваемое таким элементарным излучателем в дальней зоне, будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} \dot{H}_\varphi &= i\,\frac{k\dot{I}_0\,\Delta l}{4\pi r}\sin\theta\,e^{-ikr}, \\ \dot{E}_\theta &= i\omega\mu\,\frac{\dot{I}_0\,\Delta l}{4\pi r}\sin\theta\,e^{-ikr}. \end{aligned}\right\} \qquad (9.45)$$

Так как вибратор по определению бесконечно тонок, то в соответствии с формулой (8.98) плотность тока в нем равна

$$j_S = 2H_0,$$

а полный ток $I_0 = j_S\,d = 2H_0\,d$. Поэтому формулы (9.45) могут быть переписаны так:

$$\left.\begin{aligned} \dot{H}_\varphi &= i\,\frac{k\dot{H}_0\,d\,\Delta l}{2\pi r}\sin\theta\,e^{-ikr}, \\ \dot{E}_\theta &= i\omega\mu\,\frac{\dot{H}_0\,d\,\Delta l}{2\pi r}\sin\theta\,e^{-ikr}. \end{aligned}\right\} \qquad (9.46)$$

Осуществляя в (9.46) перестановку $\dot{E} \rightleftarrows \dot{H}$; $\varepsilon \rightleftarrows -\mu$, получим выражения для электромагнитного поля, создаваемого аналогичным элементом дифракционной антенны:

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_\varphi &= ik\frac{\dot{E}_0\, d\Delta l}{2\pi r}\sin\theta\, e^{-ikr}, \\ \dot{H}_\theta &= -i\omega\varepsilon\frac{\dot{E}_0\, d\Delta l}{2\pi r}\sin\theta\, e^{-ikr}. \end{aligned}\right\} \tag{9.47}$$

Но произведение $E_0 d$ имеет смысл амплитуды напряжения между краями щели $U_0 = E_0 d$. Стало быть,

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_\varphi &= i\frac{\dot{U}_0\,\Delta l}{\lambda r}\sin\theta\, e^{-ikr}, \\ \dot{H}_\theta &= -i\frac{\dot{U}_0\,\Delta l}{Z_0\lambda r}\sin\theta\, e^{-ikr}. \end{aligned}\right\} \tag{9.48}$$

Нетрудно убедиться, что поля (9.45) и (9.46) будут одинаковы по величине, если

$$\dot{U}_0 = \frac{1}{2} Z_0 \dot{I}_0.$$

Отсюда следует, что в воздухе элемент вибратора с током в 1 *а* эквивалентен элементу щели с напряжением 60 π *в*.

Советским ученым Я. Н. Фельдом было доказано, что при длине щели, равной приблизительно $\lambda/2$, напряжение между ее краями изменяется в продольном направлении почти по синусоидальному закону, т. е. распределение напряжения в полуволновой щели аналогично распределению тока в полуволновом вибраторе. Поэтому выражения для компонент поля такой щели могут быть получены сразу из выражений для поля полуволнового вибратора.

Дифракционные антенны с отверстием в виде узкой щели обычно называются щ е л е в ы м и.

Для характеристики излучающей способности щелевой антенны целесообразно ввести так называемую п р о в о д и м о с т ь и з л у ч е н и я, определяемую равенством

$$P_\Sigma = \frac{1}{2} U_{0m}^2 G_\Sigma,$$

где P_Σ — мощность, излучаемая щелью в полупространство; G_Σ — проводимость излучения.

Используя формулу (5.33), можно показать, что для элемента щели длиной Δl мощность излучения в полупространство, ограниченное бесконечным плоским экраном, равна

$$P_\Sigma = \frac{2\pi}{3}\frac{1}{Z_0} U_{0m}^2 \left(\frac{\Delta l}{\lambda}\right)^2.$$

Следовательно, проводимость излучения этого элемента равна

$$G_{\Sigma}=\frac{2}{Z_{\text{в}}}\ \frac{2\pi}{3}\left(\frac{\Delta l}{\lambda}\right)^{2}. \tag{9.49}$$

Так как сопротивление излучения элемеитарного электрического диполя длиной Δl имеет вид

$$R_{\Sigma}=\frac{2\pi}{3}\ Z_{0}\left(\frac{\Delta l}{\lambda}\right)^{2},$$

то

$$G_{\Sigma}=2\,\frac{R_{\Sigma}}{Z_{0}^{2}}. \tag{9.50}$$

Последняя формула справедлива также и для щелевой антенны конечной длины.

Если щель излучает энергию в оба полупространства, ее проводимость излучеиия будет в два раза больше проводимости, определяемой равенствами (9.49) и (9.50).

На практике экран щелевой антенны, разумеется, имеет конечные размеры. Однако полученные выше результаты для G_{Σ} будут применимы и к такой антенне, если размеры экрана в несколько раз превышают длину волны

ГЛАВА X

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В НАПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМАХ

1. Введение

В главе VIII рассматривались основные вопросы теории излучения электромагнитных волн. Было показано, что на больших расстояниях от антенны электромагнитное поле имеет характер сферической волны. При движении такой волны в точку, где находится потребитель энергии (приемное устройство), естественно, попадает лишь незначительная часть общей энергии, излучаемой антенной. Иными словами, коэффициент полезного действия передачи электромагнитной энергии, т. е. отношение мощности, извлекаемой из пространства приемным устройством, к мощности, излученной передающей антенной, получается очень низким. Это утверждение остается справедливым и в том случае, когда антенна обладает высокой направленностью излучения.

Теперь мы перейдем к изучению так называемых *направляемых волн*, которые подобно плоской электромагнитной волне распространяются только в каком-то заданном направлении. Но если плоская волна является математической абстракцией, то здесь пойдет речь о волнах, существующих в реальных условиях.

Устройства, в которых распространяются направляемые волны, получили название *направляющих устройств* или *направляющих систем*. В большинстве случаев они образованы поверхностями проводников; однако при некоторых условиях направляющими свойствами обладают также поверхности диэлектриков. Следовательно, электромагнитные волны в направляющих системах движутся вдоль граничных поверхностей, выполняющих функции своеобразных «электромагнитных рельсов».

Направляющие устройства имеют самые разнообразные применения в современной радиотехнике. Наиболее широко они исполь-

зуются в качестве линий передачи или фидеров, предназначенных для передачи электромагнитной энергии из одной точки пространства в другую (например, от передатчика к антенне или от антенны к приемнику и т. п.) с высоким к. п. д.

Некоторые типы направляющих устройств используются как замедляющие системы. Они служат для получения волн, распространяющихся со скоростью, меньшей скорости света c. Такие волны, оказывается, весьма эффективно взаимодействуют с потоками заряженных элементарных частиц. Поэтому замедляющие системы находят широкое применение в электронных приборах сверхвысоких

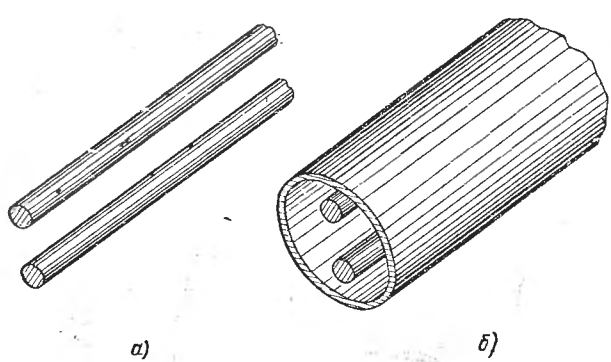


Рис. 10.1. Открытая (*а*) и экранированная (*б*) двухпроводные линии.

частот и ускорителях заряженных частиц. Иногда они используются также в антенных устройствах, измерительных приборах и т. п.

Познакомимся кратко с основными типами направляющих систем.

Наиболее простой линией передачи является открытая двухпроводная линия (рис. 10.1, *а*). Направляемая такой системой электромагнитная волна распространяется, как видно из рисунка, в пространстве, окружающем провода. Следовательно, передача электромагнитной энергии вдоль этой линии практически всегда сопровождается потерями на излучение и потерями в окружающих предметах. Кроме того, часть энергии поля теряется на нагревание проводов.

По мере укорочения длины волны общий уровень потерь энергии в линии растет. В связи с этим открытая двухпроводная линия может работать вполне удовлетворительно лишь в диапазоне сравнительно длинных волн (обычно на волнах длиннее 1 *м*).

Из теории поверхностного эффекта известно, что электромагнитное поле очень быстро затухает при распространении в хорошо проводящих средах. Значит, если поле окружить проводящей металлической поверхностью — экраном, то интенсивность его во внешнем

пространстве будет ничтожно мала. Отсюда вытекает, что двухпроводная экранированная линия (рис. 10.1, *б*) на высоких частотах должна иметь более высокий к. п. д., нежели открытая линия.

На рис. 10.2 изображена коаксиальная линия. Электромагнитная волна здесь распространяется в пространстве между поверхностями внешнего и внутреннего проводников. Поэтому коаксиальная линия обладает всеми достоинствами экранированной линии и вместе с тем имеет более простую конструкцию*).

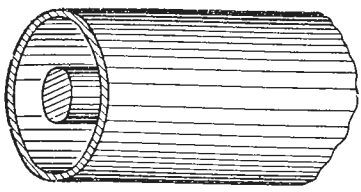


Рис. 10.2. Коаксиальная линия,

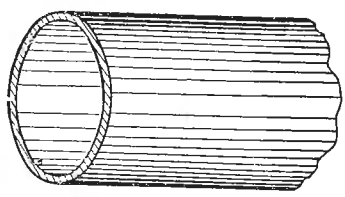


Рис. 10.3. Волновод.

Электромагнитные волны, оказывается, могут распространяться при определенных условиях вдоль линии, даже если в пространстве, ограниченном металлическим экраном, внутренние провода совсем отсутствуют. Направляющие устройства такого типа носят название волноводов (рис. 10.3). Очевидно, распространение

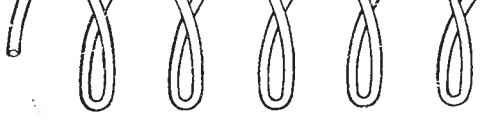


Рис. 10.4. Спиральная линия.

электромагнитной волны по волноводу в какой-то степени напоминает распространение звуковой волны в полой трубе с жесткими стенками.

Типичным примером замедляющей системы является спиральная линия. Она образована проводом, свернутым в цилиндрическую спираль (рис. 10.4). При упрощенном рассмотрении процессов в такой системе можно полагать, что волна, направляемая поверхностью провода, будет двигаться со скоростью c вдоль вин-

*) Промежуточное положение между открытыми и экранированными линиями занимают так называемые полосковые линии (см. § 4 гл. XI).

товой линии*). Вследствие этого скорость распространения ее в осевом направлении становится меньше скорости c.

На рис. 10.5 изображена замедляющая система, называемая ребристой структурой. (Принцип действия подобной системы будет рассмотрен позднее.)

Замедление электромагнитных волн можно также осуществить, если в качестве направляющей системы использовать диэлектри-

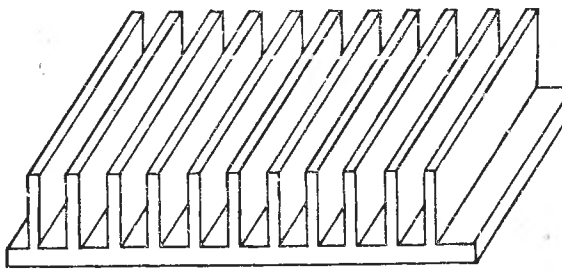


Рис. 10.5. Ребристая структура.

ческую среду, ибо скорость распространения волны в диэлектрике меньше скорости ее в свободном пространстве. Примером такой системы является диэлектрический волновод (рис. 10.6).

Ниже мы рассмотрим основные свойства наиболее распространенных направляющих систем. Прежде всего нам необходимо определить типы волн, которые могут распространяться в направляющей системе, и установить способы их возбуждения. Наряду с этим мы должны рассчитать потери электромагнитной энергии при распространении волны вдоль системы.



Рис. 10.6. Диэлектрический волновод.

Ответ на все эти вопросы дает решение уравнений Максвелла для тех или иных областей с учетом соответствующих граничных условий.

При определении структуры возможных типов волн и способов их возбуждения в целях упрощения исследования можно полагать, что проводники направляющей системы обладают бесконечно большой проводимостью, а диэлектрики — проводимостью, равной нулю. Иными словами, реальную систему можно заменить идеализированной системой без потерь.

*) Это утверждение приближенно справедливо, если шаг спирали, т. е. расстояние между витками, не очень мало по сравнению с длиной волны.

В реальных устройствах проводники, разумеется, имеют не бесконечную, но все же достаточно большую проводимость, а диэлектрики — проводимость, близкую к нулю. Вследствие этого результаты, полученные для идеализированных систем, оказываются близкими к истинным. Однако при расчете потерь в направляющем устройстве такие допущения, конечно, уже теряют смысл.

Вопросы распространения волн в направляющих системах давно привлекали внимание ученых, занимавшихся теорией электромагнитного поля. Так, первые исследования, относящиеся к волнам в полых трубах (волноводах), были проведены английским физиком Релеем еще в 1897 году.

В создание современной теории направляющих устройств значительный вклад внесли советские ученые: Г. В. Кисунько, А. А. Самарский и А. Н. Тихонов, Л. А. Вайнштейн, А. Л. Драбкин и др.

2. Электромагнитные волны между параллельными идеально проводящими плоскостями

Наиболее простой направляющей системой является совокупность двух параллельных проводящих бесконечных плоскостей, пространство между которыми заполнено диэлектриком (рис. 10.7). Конечно, направляющая система такого типа представляет лишь теоретический интерес. Тем не менее анализ электромагнитного поля в ней позволяет выяснить основные особенности распространения электромагнитных волн в реальных направляющих устройствах.

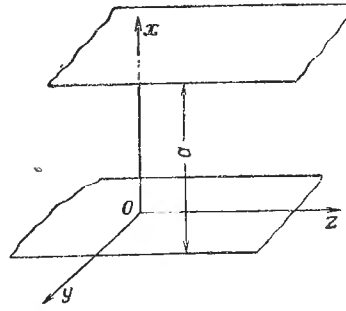


Рис. 10.7. Направляющая система, образованная двумя параллельными проводящими плоскостями.

Для того чтобы найти поля, которые могут существовать в пространстве между проводящими плоскостями, необходимо решить уравнения Максвелла в заданной области при соответствующих граничных условиях.

Руководствуясь приведенными выше соображениями, мы будем полагать, что направляющие плоскости обладают бесконечно большой проводимостью. Тогда касательная составляющая вектора $\overline{E}$ на этих плоскостях должна обращаться в нуль

$$\overline{E}_{tg} = 0. \tag{10.1}$$

Для решения уравнений Максвелла введем прямоугольную систему координат (рис. 10.7). В этой системе уравнения направляю-

щих поверхностей запишутся самым простым образом: $x = 0$ и $x = a$.

Предположим, что источники поля находятся вне пределов интересующей нас области и что волны распространяются по оси z. Будем также считать, что векторы $\overline{E}$ и $\overline{H}$ искомого поля не зависят от координаты y (двумерная задача).

При таких условиях уравнения для проекций векторов поля в установившемся режиме принимают вид (см. общие уравнения, приведенные в § 9 гл. V):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} = i\omega\mu \dot{H}_x, \quad \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} = -i\omega\mu \dot{H}_z, \\ &\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} = i\omega\varepsilon \dot{E}_y; \end{aligned}\right\} \tag{10.2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} = -i\omega\varepsilon \dot{E}_x, \quad \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} = i\omega\varepsilon \dot{E}_z, \\ &\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} = -i\omega\mu \dot{H}_y. \end{aligned}\right\} \tag{10.3}$$

Здесь ε и μ — параметры среды в пространстве между плоскостями (проводимость среды g равна нулю).

Полученные уравнения распадаются на две независимые системы, ибо в уравнения (10.2) входят неизвестные $\dot{E}_y$, $\dot{H}_x$, H_z, а в уравнения (10.3) — неизвестные $\dot{E}_x$, $\dot{E}_z$, $\dot{H}_y$. Так как по условию задачи электромагнитные волны распространяются вдоль оси z, то система (10.2) определяет поля поперечно-электрические (H-волны), а система (10.3) — поля поперечно-магнитные (E-волны). Действительно, в поле (10.2) проекция вектора $\overline{H}$ на направление распространения не равна нулю (проекция H_z), а вектор $\overline{E}$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси z. Аналогично в поле (10.3) проекция вектора $\overline{E}$ на направление распространения не равна нулю, а в плоскости, перпендикулярной оси z, лежит вектор $\overline{H}$.

Рассмотрим эти типы полей по отдельности.

Поперечно-магнитные поля

Выразим величины $\dot{E}_x$ и $\dot{E}_z$ из первого и второго уравнений системы (10.3) через $\dot{H}_y$:

$$\dot{E}_x = -\frac{1}{i\omega\varepsilon}\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z}; \qquad \dot{E}_z = \frac{1}{i\omega\varepsilon}\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x}. \tag{10.4}$$

Подставив их значения в последнее уравнение системы, получим дифференциальное уравнение для составляющей $\dot{H}_y$ *):

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_y}{\partial z^2} + k^2 \dot{H}_y = 0, \tag{10.5}$$

где $k^2 = \omega^2 \varepsilon\mu$.

Следовательно, расчет поперечно-магнитного поля в направляющей системе сводится к решению уравнения (10.5) при граничных условиях (10.1). Последние в рассматриваемом случае принимают вид

$$\dot{E}_{tg} = \dot{E}_z = \frac{1}{i\omega\varepsilon} \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0; \quad x = a \tag{10.6}$$

или просто $\partial \dot{H}_y / \partial x = 0$ при $x = 0$ и $x = a$.

Решение уравнения (10.5) будем искать методом разделения переменных, полагая, что

$$\dot{H}_y = X(x)\, Z(z). \tag{10.7}$$

Тогда уравнение (10.5) нетрудно привести к виду

$$\frac{X''}{X} + \frac{Z''}{Z} + k^2 = 0. \tag{10.8}$$

Последнее уравнение эквивалентно двум уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dx^2} + k_c^2 X &= 0, \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} - \gamma^2 Z &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{10.9}$$

где k_c^2 — неизвестная постоянная разделения, а

$$\gamma^2 = k_c^2 - k^2. \tag{10.10}$$

Решение первого уравнения (10.9) целесообразно записать таким образом:

$$X(x) = A_1 \sin k_c x + B_1 \cos k_c x.$$

Для второго уравнения (10.9) решение удобно представить в виде линейной комбинации показательных функций:

$$Z(z) = C\, e^{-\gamma z} + D\, e^{\gamma z}.$$

Следовательно,

$$\dot{H}_y = (A_1 \sin k_c x + B_1 \cos k_c x)(C\, e^{-\gamma z} + D\, e^{\gamma z}). \tag{10.11}$$

---

*) Аналогичным уравнениям, как известно, удовлетворяют все другие составляющие векторов $\dot{E}$ и $\dot{H}$.

Чтобы найти входящие в (10.11) неизвестные коэффициенты и постоянную разделения k_c, используем граничные условия (10.6). Поставив туда значение $\dot{H}_y$, будем иметь

$$k_c (A_1 \cos k_c x - B_1 \sin k_c x) = 0 \qquad (10.12)$$

при $x = 0$; $x = a$.

Условия (10.12), очевидно, могут быть удовлетворены, если положить $k_c = 0$. В этом случае проекция $\dot{E}_z$, как видно из (10.4), обращается в нуль не только на проводящих плоскостях, но и во всех точках пространства между ними. Тогда из (10.10) следует, что $\gamma = ik$ (величина γ, как известно, носит название постоянной распространения).

Подставляя найденные значения k_c и γ в выражения (10.11) и (10.4), получим

$$\left.\begin{aligned} &\dot{E}_z \equiv 0, \\ &\dot{E}_x = \frac{k}{\omega\varepsilon}\left[\dot{A}e^{-ikz} - \dot{B}e^{ikz}\right] = Z_0\left[\dot{A}e^{-ikz} - \dot{B}e^{ikz}\right], \\ &\dot{H}_y = \dot{A}e^{-ikz} + \dot{B}e^{ikz}; \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.13)$$

Здесь мы положили, что $B_1 C = A$ и $B_1 D = B$.

Таким образом, решение системы уравнений (10.3) при $k_c = 0$ определяет электромагнитное поле в виде суммы двух бегущих волн, распространяющихся по оси z в противоположных направлениях.

Если полагать, что источник электромагнитной энергии находится где-то в точках $z \to -\infty$, то в линии, естественно, будет существовать только одна волна, распространяющаяся в направлении от $z \to -\infty$ к $z \to \infty$. В этом случае выражения для компонент электромагнитного поля принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{E}_x = \dot{A}_0 e^{-ikz}, \quad \dot{E}_z = 0, \\ &\dot{H}_y = \frac{\dot{A}_0}{Z_0} e^{-ikz}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.14)$$

Из равенств (10.14) вытекает, что векторы электромагнитного поля полученной волны не имеют составляющих на направление распространения. Следовательно, электромагнитное поле, определяемое уравнениями (10.4), (10.5), при $k_c = 0$ вырождается в волну поперечно-электромагнитного типа.

Фазовая скорость волны (10.14) совпадает со скоростью распространения плоской волны в свободном пространстве с параметрами среды ε, μ:

$$v_\Phi = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Для характеристики направляющей системы целесообразно ввести величину, называемую характеристическим сопротивлением. Последнее определяется как отношение поперечной проекции вектора $\dot{\overline{E}}$ к перпендикулярной ей поперечной проекции вектора $\dot{\overline{H}}$.

В нашем случае характеристическое сопротивление Z_c будет равно

$$Z_c = \frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y} = Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}},$$

т. е. оно совпадает с волновым сопротивлением среды для плоской волны. Такое совпадение нельзя считать случайным, ибо волна ТЕМ в рассматриваемой системе аналогична по своей структуре плоской волне в неограниченном пространстве (см. § 1 гл. VI). Действительно, если в поле плоской волны, распространяющейся в неограниченном пространстве, внести две бесконечно-тонкие проводящие плоскости, перпендикулярные вектору $\overline{E}$, то граничные условия (10.1) автоматически оказываются выполненными.*

Электромагнитное поле (10.14) в пространстве между проводящими плоскостями имеет волновой характер при любом значении частоты колебаний. Иными словами, поперечная волна в направляющей системе может существовать при любой частоте колебаний поля, причем распространение этой волны происходит со скоростью, зависящей лишь от параметров среды.

Полученное выше решение уравнений (10.3) оказывается не единственно возможным. В самом деле, условиям (10.6), (10.12) можно также удовлетворить, если $k_c \neq 0$, но

$$A_1 \cos k_c x - B_1 \sin k_c x = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = a.$$

Легко убедиться, что левая часть последнего равенства будет обращаться в нуль при $x = 0$ и $x = a$, если

$$A_1 = 0; \quad \sin k_c a = 0,$$

откуда вытекает, что

$$k_c = \frac{m\pi}{a}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Постоянная распространения γ, которую в дальнейшем целесообразно обозначить γ_m, согласно (10.11) будет равна

$$\gamma = \gamma_m = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - k^2}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \qquad (10.15)$$

* Речь идет об аналогии полей на участке между плоскостями.

Подставив найденное значение γ_m в выражение (10.12) и учитывая, что $A_1 = 0$, получим

$$\dot{H}_y = \left(\dot{A}e^{-\gamma_m z} + \dot{B}e^{\gamma_m z}\right)\cos\frac{m\pi}{a}x.$$

Аналогично ранее исследованному случаю поперечной волны мы можем положить $\dot{B} \equiv 0$. Тогда, в соответствии с (10.5), выражения для проекций векторов поля будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{H}_y = \dot{A}_m e^{-\gamma_m z}\cos\frac{m\pi}{a}x,\\
&\dot{E}_x = \frac{\gamma_m}{i\omega\varepsilon}\dot{A}_m e^{-\gamma_m z}\cos\frac{m\pi}{a}x,\\
&\dot{E}_z = -\frac{1}{i\omega\varepsilon}\frac{m\pi}{a}\dot{A}_m e^{-\gamma_m z}\sin\frac{m\pi}{a}x,\\
&m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (10.16)$$

Здесь коэффициент $\dot{A}$ мы заменили на $\dot{A}_m$.

Так как m по определению — любое целое число, то в пространстве между параллельными проводящими плоскостями, помимо ранее найденной волны ТЕМ, может существовать бесчисленное множество полей поперечно-магнитного типа, характеризуемых различными значениями m (поля TM_m).

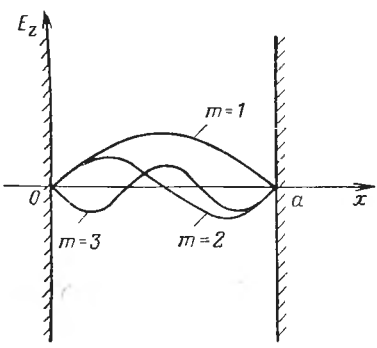


Рис. 10.8. Зависимость составляющей E_z от координаты x в пространстве между проводящими плоскостями при различных m (t = const).

Из выражений (10.16) следует, что распределение поля вдоль оси x имеет форму стоячей волны. Характер изменения поля на интервале $0 \leqslant x \leqslant a$ определяется числом (индексом) m. Согласно (10.16) при различных m на промежутке между плоскостями будет укладываться различное число «полуволн» поля, причем это число как раз и равно m. На рис. 10.8 изображены кривые изменения E_z вдоль оси x, соответствующие разным m. (Максимальные значения E_z для различных «гармоник» здесь выбраны произвольно. Начальные фазы взяты или одинаковыми или отличающимися одна от другой на π.)

Нетрудно убедиться, что компоненты электромагнитного поля (10.16) при $m = 0$ совпадают с компонентами поля (10.14), ибо $m = 0$ соответствует $k_c = 0$. Следовательно, поперечно-электромагнитную волну в пространстве между параллельными проводя-

щими плоскостями можно рассматривать как вырожденный случай поля поперечно-магнитного типа.

Рассмотрим теперь формулу (10.15), определяющую постоянную распространения γ_m.

Легко заметить, что при $k > m\pi/a$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, постоянная распространения становится чисто мнимой величиной:

$$\gamma_m = i\beta_m,$$

где

$$\beta_m = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}; \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

В этом случае поперечно-магнитное поле (10.16) будет иметь волновой характер, ибо выражения (10.16) при $\gamma_m = i\beta_m$ представляют волны, распространяющиеся с определенной скоростью вдоль оси z.

Предположим, что при данных значениях частоты f, расстояния a и заданном типе поля, характеризуемом величиной m, выполняется соотношение

$$k = 2\pi f \sqrt{\varepsilon\mu} < \frac{m\pi}{a}.$$

В этом случае электромагнитное поле (10.16) уже не будет иметь волнового характера, так как теперь γ_m является величиной вещественной, и множитель $e^{-\gamma_m z}$ определяет лишь экспоненциальный характер убывания амплитуды колебаний поля в различных точках оси z. Электромагнитные поля такого типа обычно называют затухающими полями (не смешивать с бегущими волнами, амплитуды которых экспоненциально затухают вдоль направления распространения).

Для любого значения m и a можно, очевидно, найти такую частоту колебаний, при которой постоянная распространения обращается в нуль. Из выражения (10.15) следует, что $\gamma_m = 0$, если

$$k = k_c = \frac{m\pi}{a} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}.$$

Частота колебаний электромагнитного поля, определенная из последнего равенства, имеет название критической частоты и обозначается $f_{кр}$. Нетрудно видеть, что

$$f_{кр} = \frac{1}{2\pi} k_c v = \frac{m}{2a\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{mv}{2a}; \quad m = 0, 1, 2, \ldots \qquad (10.17)$$

Для каждой критической частоты можно рассчитать соответствующую ей критическую длину волны:

$$\lambda_{кр} = \frac{c}{f_{кр}} = \frac{2\pi}{k_c}\,\frac{c}{v} = \frac{2a}{m}\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}; \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (10.18)$$

Если $\varepsilon = \varepsilon_0$ и $\mu = \mu_0$, то $\lambda_{кр} = 2a/m$.

Используя выражения (10.15), (10.17) и (10.18), получим

$$\left.\begin{aligned} \gamma_m &= ik\sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2} = ik\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2} = i\beta_m, \\ \beta_m &= k\sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2} = k\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.19)$$

Следовательно, при данных a, m и f поперечно-магнитное поле TM_m будет иметь форму бегущей волны в том случае, когда частота колебаний поля больше критической частоты (10.17), т. е. когда длина волны λ короче критической длины волны $\lambda_{кр}$. Например, поле TM_1 в линии с $\varepsilon = \varepsilon_0$ и $\mu = \mu_0$ будет иметь волновой характер, если частота $f > \frac{c}{2a} = \frac{1}{2a\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$, или соответственно длина волны $\lambda < 2a$.

Если же частота колебаний меньше критической частоты, поле становится затухающим*).

Анализируя выражения (10.16) можно показать, что перенос электромагнитной энергии вдоль направляющей системы осуществляется только бегущими волнами. В самом деле, среднее значение проекции вектора Пойнтинга на ось z в рассматриваемом случае, как вытекает из формул (5.25) и (10.16), имеет вид

$$(\Pi_z)_{ср} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[\dot{\bar{E}} \times \dot{\bar{H}}\right]\bar{i}_z =$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[\frac{\gamma_m}{i\omega\varepsilon}\,\dot{A}_m\,\dot{A}_m^*\,e^{-z\left(\gamma_m + \gamma_m^*\right)}\cos^2\frac{m\pi}{a}\,x\right].$$

Если постоянная распространения γ_m — величина чисто мнимая, то

$$(\Pi_z)_{ср} = \frac{1}{2}\,\frac{\beta_m}{\omega\varepsilon}\,|A_m|^2\cos^2\frac{m\pi}{a}\,x.$$

При вещественной γ_m (затухающее поле)

$$(\Pi_z)_{ср} = 0.$$

*) Из выражений (10.17) и (10.18) следует, что при $m = 0$ (волна ТЕМ) критическая частота $f_{кр} = 0$, или соответственно критическая волна $\lambda_{кр} \to \infty$. Указанное обстоятельство подтверждает ранее полученный вывод о том, что поле ТЕМ имеет волновой характер при любой частоте колебаний.

Следовательно, мощность, заключенная в затухающем электромагнитном поле, является чисто колебательной. Последний вывод становится очевидным, если учесть, что проекция E_x в случае вещественной γ_m сдвинута по фазе относительно проекции H_y на угол $-\pi/2$.

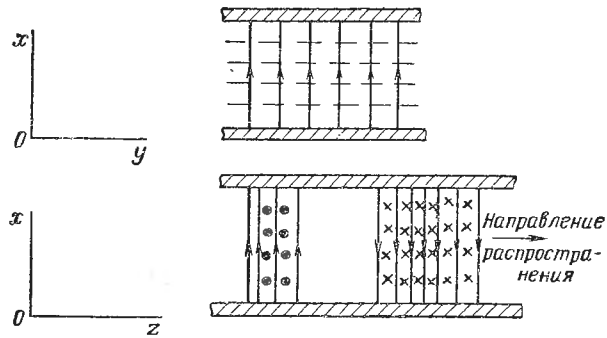


Рис. 10.9. Силовые линии векторов $\overline{E}$ и $\overline{H}$ волны ТЕМ в пространстве между проводящими плоскостями.

Найдем фазовую скорость волны TM_m. Так как по определению $v_\Phi = \omega/\beta_m$, то, учитывая (10.17) — (10.18), получим

$$v_\Phi = \frac{v}{\sqrt{1-\left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}} = \frac{v}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}} = \frac{v}{\sqrt{1-\left(\frac{m\lambda}{2a}\right)^2}}, \quad (10.20)$$

где $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$.

Отсюда вытекает, что фазовая скорость волны TM_m при $f > f_{кр}$ ($\lambda < \lambda_{кр}$) больше скорости v. При $f \to f_{кр}$ величина v_Φ становится бесконечно большой.

Характеристическое сопротивление

$$(Z_c)_{TM} = \frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y} = \frac{\beta_m}{\omega\varepsilon} = Z_0\sqrt{1-\left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2} \quad (10.21)$$

в случае поперечно-магнитных волн оказывается меньше характеристического сопротивления Z_0.

Таким образом, величины, характеризующие волны ТМ в рассматриваемой системе, зависят и от частоты колебаний f и от расстояния a между направляющими плоскостями. Что же касается волны ТЕМ, то ее характеристики не зависят ни от f, ни от a. Получается, что направляющая система как бы не оказывает влияния на распространение этой волны.

Пользуясь выражениями (10.16), можно изобразить силовые линии электромагнитного поля различных типов волн. На рис. 10.9

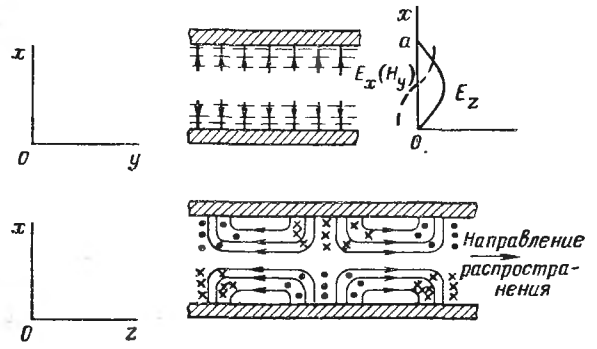


Рис. 10.10. Силовые линии векторов $\overline{E}$ и $\overline{H}$ волны TM_1 в пространстве между проводящими плоскостями.

показаны силовые линии волны TEM в различных координатных плоскостях (сплошные линии соответствуют электрическому полю, пунктирные — магнитному). На рис. 10.10 приведены силовые линии волны TM_1.

Поперечно-электрические поля

Выразим величины $\dot{H}_x$ и $\dot{H}_z$ из первого и второго уравнений системы (10.2) через $\dot{E}_y$:

$$\dot{H}_x = \frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial z}; \quad \dot{H}_z = -\frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x}.$$

Подставив найденные значения $\dot{H}_x$ и $\dot{H}_z$ в третье уравнение, получим для проекции $\dot{E}_y$:

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial z^2} + k^2 \dot{E}_y = 0. \tag{10.22}$$

Используя метод разделения переменных, легко показать, что решение уравнения (10.22) имеет вид:

$$\dot{E}_y = (A_1 \sin k_c x + B_1 \cos k_c x)\left(C\,e^{-\gamma z} + D\,e^{\gamma z}\right),$$

$$\gamma^2 = k_c^2 - k^2.$$

Аналогично предыдущему случаю будем рассматривать лишь волны, бегущие в положительном направлении оси z. Тогда $D=0$ и

$$\dot{E}_y = (\dot{A}\sin k_c x + B\cos k_c x)\,\mathrm{e}^{-\gamma z}, \tag{10.23}$$

где

$$\dot{A} = A_1 C; \quad \dot{B} = B_1 C.$$

Чтобы найти неизвестные, входящие в (10.23), воспользуемся граничными условиями:

$$\dot{E}_y = 0 \text{ при } x=0 \text{ и } x=a. \tag{10.24}$$

Эти условия будут удовлетворены, если

$$\dot{B}=0 \quad \text{и} \quad \sin k_c a = 0,$$

откуда следует:

$$k_c = \frac{m\pi}{a}; \quad m = 0, 1, 2, \ldots \quad \gamma = \gamma_m = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - k^2}.$$

Стало быть, выражения для проекций векторов поля поперечно-электрического типа будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_y &= \dot{A}_m \mathrm{e}^{-\gamma_m z}\sin\frac{m\pi}{a}x, \\ \dot{H}_x &= -\frac{\gamma_m}{i\omega\mu}\dot{A}_m \mathrm{e}^{-\gamma_m z}\sin\frac{m\pi}{a}x, \\ \dot{H}_z &= -\frac{1}{i\omega\mu}\frac{m\pi}{a}\dot{A}_m \mathrm{e}^{-\gamma_m z}\cos\frac{m\pi}{a}x. \end{aligned}\right\} \tag{10.25}$$

Из выражений (10.25) вытекает, что в пространстве между параллельными проводящими плоскостями может существовать бесчисленное множество поперечно-электрических полей, соответствующих различным значениям m (поля TE_m). Число m здесь имеет тот же смысл, что и в случае полей поперечно-магнитного типа. Однако в отличие от предыдущего случая поле TE_0 в направляющей системе не существует, ибо при $m=0$ все составляющие векторов $\overline{E}$ и $\overline{H}$ обращаются в нуль.

Электромагнитное поле (10.25) будет иметь волновой характер, если

$$\gamma_m = i\beta_m = i\sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} \tag{10.26}$$

есть мнимое число. Это выполняется при условии, что величина $k > \frac{m\pi}{a}$. Следовательно, для каждого типа поперечно-электри-

ческого поля можно определить критическую частоту $f_{кр} = \frac{\omega_{кр}}{2\pi}$, при которой

$$\omega \sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{m\pi}{a} = k_c.$$

Эта частота равна

$$f_{кр} = \frac{k_c v}{2\pi} = \frac{mv}{2a}; \quad m = 1, 2, 3, \ldots \tag{10.27}$$

Соответственно, критическая длина волны

$$\lambda_{кр} = \frac{2\pi}{k_c} = \frac{2a}{m} \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0 \mu_0}}. \tag{10.28}$$

Подставив найденные значения $f_{кр}$ и $\lambda_{кр}$ в выражение (10.26), получим

$$\gamma_m = i\beta_m = ik \sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2} = ik \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}.$$

Стало быть, поперечно-электрическое поле имеет волновой характер, если $f > f_{кр}$ (или $\lambda < \lambda_{кр}$). При $f < f_{кр}$ поле (10.25) будет

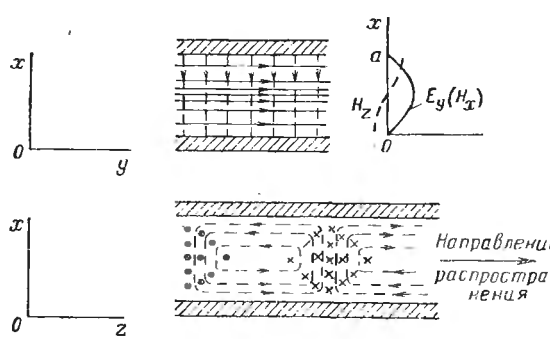


Рис. 10.11. Силовые линии векторов $\overline{E}$ и $\overline{H}$ волны TE_1 в пространстве между проводящими плоскостями.

затухать вдоль оси z. Затухающее поле TE, так же как и TM, характеризуется реактивной мощностью, т. е. оно в переносе энергии вдоль направления распространения не участвует.

Фазовая скорость поперечно-электрической волны определяется выражением

$$v_ф = \frac{\omega}{\beta_m} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}, \tag{10.29}$$

откуда следует, что при $f > f_{кр}$ она больше скорости $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$.

Характеристическое сопротивление волны в направляющей системе равно

$$(Z_c)_{\text{ТЕ}} = -\frac{\dot{E}_y}{\dot{H}_x} = \frac{\omega\mu}{\beta_m} = \frac{Z_0}{\sqrt{1-\left(\frac{f_{\text{кр}}}{f}\right)^2}}. \qquad (10.30)$$

Эта величина оказывается больше характеристического сопротивления Z_0 среды, заполняющей пространство между проводниками.

Таковы свойства поперечно-электрических волн в пространстве между параллельными проводящими плоскостями.

На рис. 10.11 изображены силовые линии электромагнитного поля волны ТЕ_1.

3. Скорости распространения электромагнитных волн

Пусть электромагнитная волна распространяется в среде (или направляющей системе) без потерь. В режиме установившихся гармонических колебаний мгновенные комплексные значения любой из проекций вектора $\overline{E}$ или $\overline{H}$ на оси прямоугольной системы координат имеют вид:

$$\psi_{\text{к}} = \dot{A}\, e^{i(\omega t - \beta z)}. \qquad (10.31)$$

Здесь ось z принята за направление распространения волны.

Из выражения (10.31) следует, что изменение фазы поля вдоль направления распространения определяется величиной $\omega t - \beta z$. Отсюда мы находим фазовую скорость волны

$$v_{\phi} = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta} \qquad (10.32)$$

как скорость движения поверхности равных фаз вдоль оси z. Таким образом, фазовая скорость характеризует изменение начальных фаз гармонических колебаний по направлению движения волны.

Рассмотрим теперь более сложный вопрос о распространении колебаний произвольной формы. В дальнейшем такие колебания мы будем условно называть сигналами.

Очевидно, у нас нет оснований утверждать, что скорость распространения сигнала будет совпадать с фазовой скоростью. В самом деле, последняя, как было установлено, характеризует лишь фазовые соотношения между гармоническими колебаниями в различных точках пространства, когда эти колебания уже возникли и установились всюду.

Предположим, что в точке $z = 0$ имеется сигнал, меняющийся во времени по закону $f(t)$. Выясним, какой вид будет иметь этот сигнал в других точках оси z при $t > 0$; иными словами, определим

функцию $f(t, z)$, если известна функция $f(t, 0)$, а также известны характеристики среды, в которой происходит распространение.

Используя интеграл Фурье, представим $f(t, 0)$ в виде:

$$f(t, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{A}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{0}^{\infty} \dot{A}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega, \quad (10.33)$$

где $\dot{A}(\omega)$ — спектральная плотность функции $f(t)$ *). Согласно выражению (10.33) функция $f(t, 0)$ представляет собой сумму множества гармонических колебаний с частотами ω и амплитудами $\frac{1}{\pi} A(\omega)\, d\omega$. Совокупность этих колебаний, как известно, образует спектр функции $f(t)$.

Но каждой составляющей $\frac{1}{\pi} \dot{A}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$ при распространении колебаний вдоль оси z соответствует волна

$$\frac{1}{\pi} \dot{A}(\omega)\, e^{i(\omega t - \beta z)}\, d\omega,$$

где β — волновое число. Поэтому функцию $f(t, z)$ в любой точке оси z можно представить в виде

$$f(t, z) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{0}^{\infty} \dot{A}(\omega)\, e^{i(\omega t - \beta z)}\, d\omega; \quad z \geqslant 0. \quad (10.34)$$

Из формулы (10.34) следует, что распространение сигнала в данном направлении обусловлено движением всех его гармонических составляющих.

В общем случае фазовая скорость волны зависит от частоты колебаний (подробнее об этом см. ниже). При наличии такой зависимости различные гармонические составляющие сигнала будут двигаться вдоль оси z с различными фазовыми скоростями. А это, очевидно, может привести к тому, что форма сигнала по мере его распространения будет изменяться.

Так как волновое число $\beta = 2\pi/\lambda$ есть функция частоты, т. е. $\beta = \beta(\omega)$, в (10.34) вместо интегрирования по ω можно перейти к интегрированию по β:

$$f(t, z) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{0}^{\infty} \dot{A}(\beta)\, e^{i[\omega(\beta) t - \beta z]}\, d\beta. \quad (10.35)$$

---

*) Напомним, что модуль $\dot{A}(\omega)$ есть четная, а аргумент — нечетная функции частоты.

Пусть действительный спектр сигнала ограничен частотами $\omega_{мин} = \omega_0 - \Delta\omega$ и $\omega_{макс} = \omega_0 + \Delta\omega$, и, кроме того, $\Delta\omega \ll \omega_0$ (ω_0 — средняя частота спектра). Тогда интегрирование в (10.34) будет происходить по промежутку $\omega_0 - \Delta\omega \leqslant \omega \leqslant \omega_0 + \Delta\omega$, а в (10.35) — по промежутку $\beta_0 - \Delta\beta \leqslant \beta \leqslant \beta_0 + \Delta\beta$. Здесь $\beta_0 = \omega_0/v_0$ — среднее значение волнового множителя, соответствующее средней частоте ω_0 и фазовой скорости на этой частоте, а $\Delta\beta \ll \beta_0$. На основании этого вместо (10.35) будем иметь

$$f(t, z) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{\beta_0 - \Delta\beta}^{\beta_0 + \Delta\beta} \dot{A}(\beta)\, e^{i(\omega t - \beta z)}\, d\beta. \qquad (10.36)$$

Сигнал, определяемый интегралом (10.36), называется волновым пакетом или группой волн.

Рассматривая ω как функцию переменной β, разложим $\omega(\beta)$ в ряд по степеням $\beta - \beta_0$:

$$\omega(\beta) = \omega_0 + \left.\frac{d\omega}{d\beta}\right|_{\beta_0} (\beta - \beta_0) + \ldots \qquad (10.37)$$

и подставим $\omega(\beta)$ из (10.37) в (10.36).

При малом промежутке интегрирования в разложении (10.37) можно ограничиться двумя первыми членами. В этом случае интеграл (10.36) принимает вид:

$$f(t, z) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{\beta_0 - \Delta\beta}^{\beta_0 + \Delta\beta} \dot{A}(\beta)\, e^{i\left\{\left[\omega_0 + \frac{d\omega}{d\beta_0}(\beta - \beta_0)\right] t - [\beta_0 + (\beta - \beta_0)] z\right\}} d\beta =$$

$$= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ e^{i(\omega_0 t - \beta_0 z)} \int_{\beta_0 - \Delta\beta}^{\beta_0 + \Delta\beta} \dot{A}(\beta)\, e^{i\left[\frac{d\omega}{d\beta_0}(\beta - \beta_0) t - (\beta - \beta_0) z\right]} d\beta \right\}.$$

Здесь $d\omega/d\beta_0$ означает производную $d\omega/d\beta$ при $\beta = \beta_0$.

Введя далее новую переменную интегрирования $\xi = \beta - \beta_0$, получим

$$f(t, z) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ e^{i(\omega_0 t - \beta_0 z)} \int_{-\Delta\beta}^{+\Delta\beta} \dot{A}(\xi)\, e^{i\left(\frac{d\omega}{d\beta_0} t - z\right)\xi} d\xi \right\}.$$

Будем полагать, что $\dot{A}(\xi)$ — непрерывная медленно меняющаяся функция. Тогда ее на малом интервале $[-\Delta\beta, \Delta\beta]$ можно считать постоянной, равной $\dot{A}(\beta_0)$. В этом случае

$$\dot{f}(t, z) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \dot{A}(\beta_0)\, e^{i(\omega_0 t - \beta_0 t)} \int_{-\Delta\beta}^{+\Delta\beta} e^{i\left(\frac{d\omega}{d\beta_0} t - z\right)\xi} d\xi = \right.$$

$$= \frac{2}{\pi} A(\beta_0) \frac{\sin\left(\frac{d\omega}{d\beta_0} t - z\right) \Delta\beta}{\frac{d\omega}{d\beta_0} t - z} \cos(\omega_0 t - \beta_0 z - \varphi_0); \qquad (10.38)$$

φ_0 — аргумент комплексной величины $\dot{A}(\beta_0)$.

Выражение (10.38), таким образом, определяет рассматриваемый сигнал в любой точке $z \geqslant 0$. Функция

$$F(t, z) = \frac{2}{\pi} A(\beta_0) \frac{\sin\left(\frac{d\omega}{d\beta_0} t - z\right) \Delta\beta}{\frac{d\omega}{d\beta_0} t - z}, \qquad (10.39)$$

вследствие того, что $\Delta\beta$ мало, является медленно меняющейся функцией переменных t и z. Поэтому ее можно считать амплитудой волны $\cos(\omega_0 t - \beta_0 z - \varphi_0)$. При $z = \text{const}$ функция $F(t, z)$ является огибающей сигнала $\dot{f}(t, z)$ с узким (а точнее, с бесконечно узким) частотным спектром.

Из формулы (10.39) видно, что с течением времени огибающая перемещается вдоль оси z. О ее движении удобно судить по перемещению максимума, находящегося в точке $\frac{d\omega}{d\beta_0} t - z = 0$.

Нетрудно сообразить, что с течением времени этот максимум движется вдоль оси z со скоростью

$$v_{\text{гр}} = \left.\frac{d\omega}{d\beta_0}\right|_{\beta = \beta_0}. \qquad (10.40)$$

Последняя получила наименование **групповой скорости**. Она-то и определяет скорость распространения сигнала типа «волновой пакет».

Установим связь между групповой и фазовой скоростями. Дифференцируя выражение (10.30) по частоте, получим

$$\frac{dv_\Phi}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega}{\beta}\right) = \frac{\beta - \omega \frac{d\beta}{d\omega}}{\beta^2},$$

откуда

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{v_\Phi}{1 - \frac{\omega}{v_\Phi} \frac{dv_\Phi}{d\omega}}. \qquad (10.41)$$

Если фазовая скорость не зависит от частоты, т. е. $\frac{dv_ф}{d\omega}=0$, то и $\frac{dv_{гр}}{d\omega}=0$. В этом случае $v_{гр}=v_ф$.

Зависимость фазовой скорости от частоты колебаний в физике принято называть дисперсией, а среду, в которой это явление наблюдается — дисперсной средой.

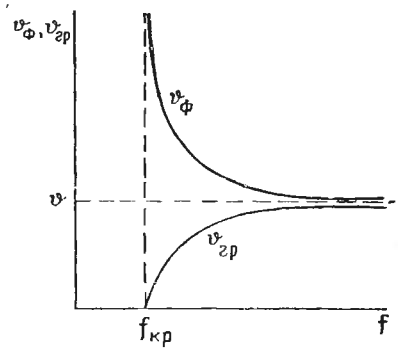


Рис. 10.12. Зависимость фазовой и групповой скоростей волны, распространяющейся между параллельными проводящими плоскостями, от частоты колебаний.

Подобная зависимость характерна, например, для направляющей системы, которую мы рассматривали в предыдущем параграфе. В самом деле, фазовая скорость волны ТЕ или ТМ, распространяющейся между проводящими плоскостями, равна

$$v_ф=\frac{v}{\sqrt{1-\left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}}, \qquad (10.42)$$

а волновое число

$$\beta=\sqrt{k^2-k_c^2}=\sqrt{\omega^2\varepsilon\mu-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}=\frac{2\pi}{v}f\sqrt{1-\left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}.$$

Используя соотношение (10.40) или (10.41), для групповой скорости получим

$$v_{гр}=v\sqrt{1-\left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}, \qquad (10.43)$$

и соответственно

$$v_ф\,v_{гр}=v^2. \qquad (10.44)$$

На рис. 10.12 показаны графики изменения фазовой и групповой скоростей (10.42), (10.44) в зависимости от частоты колебаний.

Если в среде дисперсии нет, то волновой множитель β оказывается линейной функцией частоты

$$\beta(\omega)=\frac{\omega}{v_ф}=\frac{\omega}{v};\ v_ф=v=\text{const}.$$

При таком условии выражение (10.34) принимает вид

$$f(t, z) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^\infty \dot{A}(\omega)\, e^{i\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)} d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^\infty \dot{A}(\omega)\, e^{i\omega t'} d\omega; \qquad t' = t - \frac{z}{v}. \tag{10.45}$$

Сравнивая последнее выражение с формулой (10.33), получим

$$f(t, z) = f(t', 0) = f\left(t - \frac{z}{v}\right). \tag{10.46}$$

Таким образом, в среде без дисперсии сигнал какой угодно формы распространяется со скоростью v; при этом форма сигнала не меняется*).

Исследование вопроса о распространении сигнала в дисперсной среде представляет собой очень сложную задачу. В общем случае этот процесс, как ясно из всего вышеизложенного, не может быть полностью охарактеризован величинами фазовой и групповой скорости.

Сложность вопроса заключается в том, что форма сигнала при движении деформируется, сигнал по мере распространения расплывается. В этой ситуации понятие скорости вообще становится неоднозначным, ибо нет одинаковых сигналов, занимающих в разное время разные положения в пространстве.

Аналогичную картину мы наблюдаем при движении облака. Здесь тоже не существует однозначного определения скорости. Можно говорить о скорости переднего края облака, скорости его центра масс и т. п., и все эти величины будут различными.

Введенное выше понятие групповой скорости сигнала определяло скорость перемещения его огибающей, и это понятие имело смысл, пока огибающая перемещалась без изменения формы.

Если частотный спектр сигнала не широк, то искажение огибающей при распространении происходит медленно. В этом случае изменение формы сигнала на небольших расстояниях от источника можно не учитывать, и групповая скорость будет определять движение всей группы колебаний в целом. Очевидно, такой сигнал по своим свойствам приближается к волновому пакету.

В заключение остановимся на вопросе о скорости движения энергии электромагнитных колебаний. Эта величина для плоской волны определяется как отношение среднего значения вектора Пойнтинга к средней плотности энергии в данной точке. Для направляющей системы скорость движения энергии следует определить как отношение среднего потока мощности через поперечное сечение

*) Понятно, что речь идет о среде без потерь.

системы к средней энергии поля на единицу ее длины. Очевидно, что скорость движения энергии не может быть больше скорости распространения электромагнитных волн в вакууме.

Советский ученый М. А. Леонтович показал, что во всех случаях, когда групповая скорость имеет физический смысл, она совпадает со скоростью движения энергии.

Если сигнал движется в среде с потерями, то к искажениям, обусловленным дисперсией, добавляется еще изменение формы сигнала за счет поглощения энергии. Следовательно, процесс распространения в этом случае становится еще более сложным.

4. Волноводы

Волновод, как уже отмечалось выше, представляет собой полую металлическую трубу, в которой при определенных условиях могут распространяться электромагнитные волны. Внутреннее пространство волновода, ограниченное проводящей поверхностью, заполнено диэлектриком. В большинстве случаев таким диэлектриком является воздух. Стенки волновода, изготовляемые из металла с большой электропроводностью, например из меди или латуни, во избежание коррозии часто покрываются тонким слоем серебра.

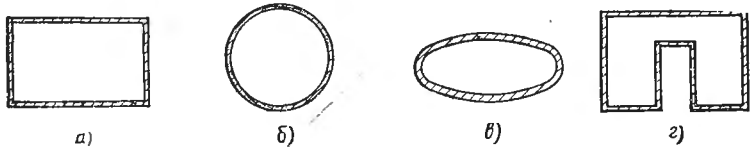


Рис. 10.13. Волноводы:
а — прямоугольный; *б* — круглый; *в* — эллиптический; *г* — П-образный.

Существуют различные типы волноводов, отличающихся друг от друга формой образующих их металлических поверхностей и, следовательно, формой поперечных сечений. Некоторые из них показаны на рис. 10.13: волновод *а* на этом рисунке имеет прямоугольное поперечное сечение и называется прямоугольным, *б* — круглым цилиндрическим (или, просто, круглым), *в* — эллиптическим и, наконец, *г* — П-образным, так как по форме он напоминает букву «П».

Ниже будет показано, что волна в волноводе может распространяться, если размеры поперечного сечения его при заданной частоте колебаний выбраны больше некоторых предельно допустимых значений. Последнее обстоятельство, несомненно, является недостатком подобной линии передачи. Однако в диапазоне сверхвысоких частот волноводы, оказывается, имеют существенно меньший уровень потерь энергии, чем коаксиальные и, тем более, двухпроводные

линии. Поэтому на волнах дециметрового, сантиметрового и отчасти миллиметрового диапазонов для передачи электромагнитной энергии применяются именно волноводы.

В дальнейшем мы рассмотрим свойства двух наиболее распространенных типов волноводов: прямоугольного и круглого.

5. Прямоугольный волновод

Чтобы найти поля, которые могут существовать в прямоугольном волноводе без потерь, необходимо решить уравнения Максвелла для области, ограниченной идеально проводящими стенками, при нулевых граничных условиях.

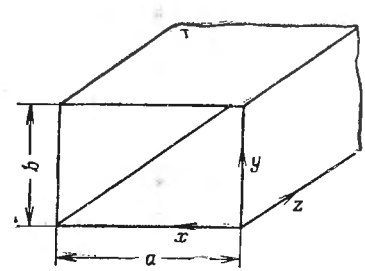


Рис. 10.14. К расчету поля в прямоугольном волноводе.

Будем считать, что волновод имеет бесконечно большую протяженность и что источники поля в рассматриваемой области отсутствуют.

Введя прямоугольную систему координат (рис. 10.14), запишем граничные условия на стенках волновода в виде:

$$\dot{E}_{\text{tg}} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = a, \quad y = 0 \quad \text{и} \quad y = b. \tag{10.47}$$

Нас будут интересовать условия, при которых решение уравнений поля имеет форму бегущей волны, распространяющейся вдоль оси волновода (оси z). Поэтому естественно полагать, что зависимость составляющих векторов $\dot{E}$ и $\dot{H}$ от координаты z в установившемся режиме представляется функцией

$$e^{i\omega t - \gamma z}, \tag{10.48}$$

где γ — пока еще неизвестная постоянная распространения.

Но при условии (10.48) дифференцирование любой из проекций вектора $\dot{E}$ или вектора $\dot{H}$ по переменной z эквивалентно умножению ее на величину $-\gamma$. Например,

$$\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\dot{E}_{x0}(x, y)\, e^{-\gamma z}\right] = -\gamma \dot{E}_x \quad \text{и т. д.}$$

На основании этого из уравнений, приведенных в § 9 гл. V, для внутреннего пространства волновода при $\bar{j}=0$ и $\rho=0$ будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y}+\gamma \dot{H}_y = i\omega\varepsilon \dot{E}_x, && (1)\\
&-\gamma \dot{H}_x-\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} = i\omega\varepsilon \dot{E}_y, && (2)\\
&\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x}-\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} = i\omega\varepsilon \dot{E}_z, && (3)\\
&\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y}+\gamma \dot{E}_y = -i\omega\mu \dot{H}_x; && (4)\\
&-\gamma \dot{E}_x-\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} = -i\omega\mu \dot{H}_y; && (5)\\
&\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x}-\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} = -i\omega\mu \dot{H}_z. && (6)
\end{aligned}\right\} \qquad (10.49)$$

Здесь ε и μ — электрическая и магнитная проницаемости среды, заполняющей волновод.

Если теперь в уравнения (1) и (2) системы (10.49) подставить значения $\dot{H}_x$ и $\dot{H}_y$ из уравнений (4) и (5), а затем в уравнения (4), (5) — значения $\dot{E}_x$ и $\dot{E}_y$ из уравнений (1) и (2), то неизвестные $\dot{E}_x$, $\dot{E}_y$, $\dot{H}_x$, $\dot{H}_y$ будут выражены через величины $\dot{E}_z$ и $\dot{H}_z$:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{E}_x &= -\frac{1}{k_c^2}\left(\gamma\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x}+i\omega\mu\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y}\right),\\
\dot{E}_y &= \frac{1}{k_c^2}\left(-\gamma\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y}+i\omega\mu\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x}\right),\\
\dot{H}_x &= \frac{1}{k_c^2}\left(i\omega\varepsilon\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y}-\gamma\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x}\right),\\
\dot{H}_y &= -\frac{1}{k_c^2}\left(i\omega\varepsilon\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x}+\gamma\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y}\right),
\end{aligned}\right\} \qquad (10.50)$$

где $k_c^2=\gamma^2+k^2$.

Для волны, распространяющейся в противоположном направлении, γ в выражениях (10.49) и (10.50) следует заменить на $-\gamma$.

Таким образом, все поперечные проекции векторов $\dot{E}$ и $\dot{H}$ нам удалось выразить через продольные проекции $\dot{E}_z$ и $\dot{H}_z$. Подставляя $\dot{E}_x$ и $\dot{E}_y$ из (10.50) в равенство (6) системы (10.49), а $\dot{H}_x$, $\dot{H}_y$—в равенство (3), получим уравнения для проекций $\dot{H}_z$ и $\dot{E}_z$:

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial y^2}+k_c^2 \dot{H}_z=0, \tag{10.51}$$

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial y^2}+k_c^2 \dot{E}_z=0. \tag{10.52}$$

Из выражений (10.50) следует что электромагнитное поле в волноводе в общем случае представляет собой сумму двух независимых частных полей:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{E}_x=-\frac{i\omega\mu}{k_c^2}\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y}; \quad \dot{E}_y=\frac{i\omega\mu}{k_c^2}\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x}, \quad \dot{E}_z=0,\\ &\dot{H}_x=-\frac{\gamma}{k_c^2}\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x}; \quad \dot{H}_y=-\frac{\gamma}{k_c^2}\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y}, \quad \dot{H}_z\neq 0; \end{aligned}\right\} \tag{10.53}$$

$$\left.\begin{aligned} &\dot{E}_x=-\frac{\gamma}{k_c^2}\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x}; \quad \dot{E}_y=-\frac{\gamma}{k_c^2}\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y}, \quad \dot{E}_z\neq 0,\\ &\dot{H}_x=\frac{i\omega\varepsilon}{k_c^2}\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y}; \quad \dot{H}_y=-\frac{i\omega\varepsilon}{k_c^2}\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x}, \quad \dot{H}_z=0. \end{aligned}\right\} \tag{10.54}$$

Легко заметить, что поле (10.53) является полем поперечно-электрическим ($E_z=0$), а поле (10.54)—поперечно-магнитным ($H_z=0$).

Перейдем к изучению этих полей по отдельности.

Поперечно-электрические поля

Согласно (10.53) поле ТЕ в волноводе определяется продольной составляющей $\dot{H}_z$, которая удовлетворяет уравнению (10.51).

Граничные условия для функции $\dot{H}_z$ можно найти из общих граничных условий (10.47). Последние применительно к полю ТЕ выглядят так:

$$\begin{aligned} &\dot{E}_x=0 \quad \text{при } y=0;\ y=b;\\ &\dot{E}_y=0 \quad \text{при } x=0;\ x=a. \end{aligned} \tag{10.55}$$

Отсюда с учетом (10.53) будем иметь:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0;\ x = a; \\ &\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0;\ y = b. \end{aligned} \tag{10.56}$$

Решение уравнения (10.53) представим в виде

$$\dot{H}_z = X(x)\, Y(y)\, e^{-\gamma z}, \tag{10.57}$$

где $X(x)$ и $Y(y)$ — функции, зависящие соответственно только от x и y. Подставляя последнее выражение в уравнение (10.57) и проводя несложные преобразования, получим

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + k_c^2 = 0,$$

откуда следует, что

$$X'' + p^2 X = 0,\ Y'' + q^2 Y = 0 \quad \text{и} \quad p^2 + q^2 = k_c^2,$$

где p^2 и q^2 — произвольные постоянные разделения.

Общее решение этих дифференциальных уравнений запишем следующим образом:

$$X = (\dot{A}_1 \cos px + \dot{B}_1 \sin px),$$

$$Y = (\dot{A}_2 \cos qy + \dot{B}_2 \sin qy).$$

Стало быть, в соответствии с (10.57) проекция $\dot{H}_z$ будет равна

$$\dot{H}_z = (A_1 \cos px + B_1 \sin px)(A_2 \cos qy + B_2 \sin qy)\, e^{-\gamma z}, \tag{10.58}$$

причем постоянная распространения $\gamma^2 = p^2 + q^2 - k^2$.

Чтобы найти входящие сюда неизвестные величины, воспользуемся граничными условиями (10.56). Из первого условия вытекает, что

$$B_2 = 0;\ \sin qb = 0 \quad \text{и} \quad q = \frac{n\pi}{b};\quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Из второго условия получается:

$$B_1 = 0;\ \sin pa = 0 \quad \text{и} \quad p = \frac{m\pi}{a};\quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Следовательно,

$$k_c^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2,$$

$$\gamma = \gamma_{mn} = \sqrt{k_c^2 - k^2} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k^2},$$

$$\dot{H}_z = \dot{A}_{mn} \cos\frac{m\pi}{a} x \cos\frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma_{mn} z}.$$

Здесь мы обозначили $A_1 A_2 = \dot{A}_{mn}$.

Подставляя теперь значение $\dot{H}_z$ в равенства (10.53), найдем окончательные выражения для проекций векторов поперечно-электрического поля в прямоугольном волноводе:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{E}_x &= \frac{i\omega\mu}{k_c^2}\frac{n\pi}{b}\dot{A}_{mn}\cos\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y e^{-\gamma_{mn}z},\\
\dot{E}_y &= -\frac{i\omega\mu}{k_c^2}\frac{m\pi}{a}\dot{A}_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y e^{-\gamma_{mn}z},\\
\dot{E}_z &= 0;\\
\dot{H}_x &= -\frac{\gamma_{mn}}{k_c^2}\frac{m\pi}{a}\dot{A}_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y e^{-\gamma_{mn}z},\\
\dot{H}_y &= \frac{\gamma_{mn}}{k_c^2}\frac{n\pi}{b}\dot{A}_{mn}\cos\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y e^{-\gamma_{mn}z},\\
\dot{H}_z &= \dot{A}_{mn}\cos\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y e^{-\gamma_{mn}z}.
\end{aligned}\right\} \qquad (10.59)$$

Как видно из полученных равенств, при $m = n = 0$ все компоненты векторов, за исключением $\dot{H}_z$, обращаются в нуль. Следовательно, числа m и n могут принимать здесь любые значения, равные 0, 1, 2, 3, но они не должны одновременно равняться нулю.

Таким образом, в прямоугольном волноводе существует бесчисленное множество типов поперечно-электрических полей, характеризуемых различными значениями m и n (поля TE_{mn} или H_{mn}). Согласно (10.59), вдоль сторон a и b распределение поля имеет форму стоячей волны, причем величина m определяет число полуволн, укладывающихся на интервале $0 \leqslant x \leqslant a$, а n — число полуволн на интервале $0 \leqslant y \leqslant b$.

Поле (10.59), очевидно, будет распространяться по оси z в виде бегущей волны, если постоянная распространения γ_{mn} равна чисто мнимой величине

$$\gamma_{mn} = i\beta_{mn} = i\sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}; \qquad (10.60)$$

β_{mn} — фазовая постоянная (волновое число). Для этого необходимо, чтобы при заданных f, m, n, a и b выполнялось неравенство

$$k^2 = \omega^2 \varepsilon\mu > \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2.$$

Если же $k^2 < \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$, то поле становится затухающим (см. § 2 этой главы).

Стало быть, в волноводе, так же как и в пространстве между проводящими плоскостями, поле TE_{mn} будет волновым, если частота колебаний f больше некоторой критической частоты $f_{кр}$, определяемой из условия $\gamma_{mn} = 0$.

Учитывая (10.60), после несложных преобразований для $f_{кр}$ получим

$$f_{кр} = \frac{1}{2\pi} k_c v = \frac{v}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}, \qquad (10.61)$$

$$m, n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$. Критическая длина волны $\lambda_{кр}$, соответствующая найденной критической частоте, рассчитывается по формуле

$$\lambda_{кр} = \frac{c}{f_{кр}} = \frac{2\pi}{k_c}\,\frac{c}{v} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}. \qquad (10.62)$$

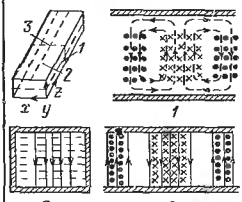
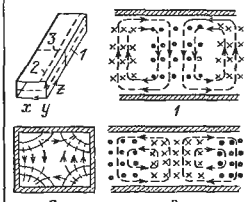
Отсюда вытекает, что условие распространения волны по волноводу имеет вид

$$f > f_{кр} \quad \text{или} \quad \lambda < \lambda_{кр}. \qquad (10.63)$$

Нетрудно далее рассчитать фазовую скорость и длину волны TE_{mn} в волноводе. Фазовая скорость $v_ф$ равна

$$v_ф = \frac{\omega}{\beta_{mn}} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}}, \qquad (10.64)$$

Волны в прямоугольных волноводах

Тип волны	TE_{10}	TE_{11}
Структура поля в различных сечениях волновода *1-сечение плоскостью y=const* *2-сечение плоскостью x=const* *3-сечение плоскостью z=const*		
Компоненты поля, отличные от нуля	E_y, H_x, H_z	E_x, E_y, H_x, H_y, H_z
κ_c	$\frac{\pi}{a}$	$\frac{\pi\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$
$\lambda_{кр}$	$2a\sqrt{\varepsilon'\mu'}$	$\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{\varepsilon'\mu'}$
$f_{кр}$	$\frac{1}{2a\sqrt{\varepsilon\mu}}$	$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2ab\sqrt{\varepsilon\mu}}$

а длина волны

$$\lambda_в = \frac{v_ф}{f} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}} \frac{v}{c}. \qquad (10.65)$$

Следовательно, величина $\lambda_в$ отличается от длины волны, определенной для свободного пространства с $\varepsilon = \varepsilon_0$ и $\mu = \mu_0$.

Групповая скорость $v_{гр}$ согласно формуле (10.40) имеет вид:

$$v_{гр} = \frac{d\omega}{d\beta_{mn}} = v\sqrt{1-\left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}. \qquad (10.66)$$

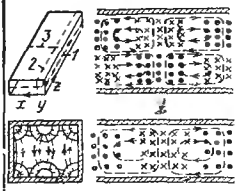
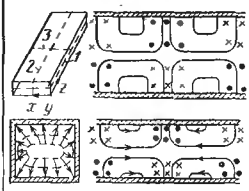
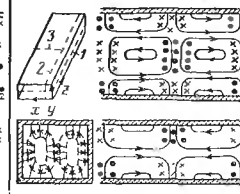
Из формул (10.64) и (10.66) для фазовой и групповой скоростей следует, что прямоугольный волновод является дисперсной средой.

Характеристическое сопротивление волновода в случае поперечно-электрических волн равно

$$(Z_c)_{TE} = \frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y} = -\frac{\dot{E}_y}{\dot{H}_x} = \frac{\omega\mu}{\beta_{mn}} = \frac{Z_0}{\sqrt{1-\left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}}. \qquad (10.67)$$

Из выражения (10.61) получается, что при неизменных размерах поперечного сечения волновода критическая частота растет с увеличением m и n, т. е. волны с большими значениями m и n обладают более высокими критическими частотами, нежели волны с малыми m и n. Следовательно, для передачи электромагнитной энергии при

Таблица 1

TE_{21}	TM_{11}	TM_{21}
		
H_z, H_x, H_y, E_x, E_y	E_x, E_y, E_z, H_x, H_y	$E_x, E_y, E_z, E_x, H_x, H_y$
$\frac{\pi\sqrt{4b^2+a^2}}{ab}$	$\frac{\pi\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$	$\frac{\pi\sqrt{4b^2+a^2}}{ab}$
$\frac{2ab}{\sqrt{4b^2+a^2}}\sqrt{\varepsilon'\mu'}$	$\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{\varepsilon'\mu'}$	$\frac{2ab}{\sqrt{4b^2+a^2}}\sqrt{\varepsilon'\mu'}$
$\frac{\sqrt{4b^2+a^2}}{2ab\sqrt{\varepsilon\mu}}$	$\frac{a^2+b^2}{2ab\sqrt{\varepsilon\mu}}$	$\frac{\sqrt{4b^2+a^2}}{2ab\sqrt{\varepsilon\mu}}$

заданной частоте колебаний по волноводу с наименьшими поперечными размерами необходимо применять волну с малыми значениями m и n.

Структура поперечно-электрических полей различных типов в прямоугольном волноводе и другие их характеристики приведены в табл. 1.

Поперечно-магнитные поля

Поперечно-магнитные поля в волноводе определяются проекцией $\dot{E}_z$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению (10.52) и граничным условиям:

$$\begin{aligned} \dot{E}_z &= 0 \quad \text{при } x=0,\ x=a; \\ \dot{E}_z &= 0 \quad \text{при } y=0,\ y=b. \end{aligned} \tag{10.68}$$

Так как уравнения (10.51) и (10.52) совершенно аналогичны, то решение последнего будет иметь точно такой же вид, как и (10.58), т. е.

$$\dot{E}_z = (\dot{A}_1 \cos px + \dot{B}_1 \sin px)(\dot{A}_2 \cos qy + \dot{B}_2 \sin qy)\, e^{-\gamma z}, \tag{10.69}$$

причем здесь снова

$$p^2+q^2=k_c^2 \quad \text{и} \quad \gamma^2=p^2+q^2-k^2. \tag{10.70}$$

Удовлетворяя граничным условиям (10.69), получим

$$\left.\begin{aligned} &A_1 = 0; \quad \sin pa = 0; \quad p = \frac{m\pi}{a}; \quad m = 0, 1, 2, \ldots \\ &A_2 = 0; \quad \sin qb = 0; \quad q = \frac{n\pi}{b}; \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}\right\} \tag{10.71}$$

С учетом этого из (10.69) будем иметь

$$\dot{E}_z = \dot{B}_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \, e^{-\gamma_{mn} z},$$

здесь $\dot{B}_{mn} = B_1 B_2$.

Подставляя найденное значение $\dot{E}_z$ в формулы (10.54), получим окончательные выражения для составляющих векторов поперечно-магнитных полей в прямоугольном волноводе:

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_x &= -\frac{\gamma_{mn}}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \dot{B}_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{\pi} y \, e^{-\gamma_{mn} z}, \\ \dot{E}_y &= -\frac{\gamma_{mn}}{k_c^2} \frac{m\pi}{b} \dot{B}_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \, e^{-\gamma_{mn} z}, \\ \dot{E}_z &= \dot{B}_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma_{mn} z}, \\ \dot{H}_x &= \frac{i\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \dot{B}_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \, e^{-\gamma_{mn} z}, \\ \dot{H}_y &= -\frac{i\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \dot{B}_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \, e^{-\gamma_{mn} z}, \\ \dot{H}_z &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{10.72}$$

причем в соответствии с (10.69) и (10.70)

$$k_c^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2,$$

$$\gamma_{mn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k^2}.$$

Таким образом, в прямоугольном волноводе может существовать бесчисленное множество типов поперечно-магнитных полей, характеризуемых различными числами m и n (поля TM_{mn} или E_{mn}). Эти числа имеют тот же физический смысл, что и в случае полей ТЕ.

Легко заметить, что при m или n, равном нулю, векторы поля повсюду обращаются в нуль. Стало быть, в рассматриваемом волноводе поля TM_{00}, TM_{m0} или TM_{0n} не существуют, и величины m и n теперь будут равны $m = 1, 2, 3, \ldots$; $n = 1, 2, 3. \ldots$

Повторяя далее рассуждения, аналогичные предыдущим, можно получить формулы для критических частот, критических волн и других характеристик поперечно-магнитных волн различных типов. Все они по виду совпадают с формулами, относящимися к поперечно-электрическим волнам. Правда, формула для характеристического сопротивления волновода в случае поперечно-магнитных волн имеет несколько иной вид:

$$(Z_c)_{\text{ТМ}} = \frac{\beta_{mn}}{\omega\varepsilon} = Z_0 \sqrt{1 - \left(\frac{f_{\text{кр}}}{f}\right)^2}. \qquad (10.73)$$

Структура поперечно-магнитных полей различных типов изображена на рисунках табл. 1.

Итак, все возможные типы решений в прямоугольном волноводе исчерпываются полями (10.59) и (10.72) при $m, n = 0, 1, 2$. Эти поля носят наименование собственных полей, или собственных волн прямоугольного волновода. Очевидно, любое другое поле с более сложной конфигурацией в точках, где нет источников, может быть представлено в виде совокупности собственных полей.

6. Волна ТЕ_{10} в прямоугольном волноводе

Самыми простыми волнами в прямоугольном волноводе являются поперечно-электрические волны ТЕ_{10} и ТЕ_{01}. Обе они обладают идентичными свойствами, поэтому мы ограничимся рассмотрением только волны ТЕ_{10}.

Полагая в выражениях (10.59) $m = 1$ и $n = 0$, для проекций векторов $\dot{E}$ и $\dot{H}$ этой волны получим:

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{E}_y = -i\omega\mu \frac{a}{\pi} \dot{A}_{10} \sin\frac{\pi}{a} x e^{-i\beta_{10} z},\\
&\dot{E}_x = \dot{E}_z = 0,\\
&\dot{H}_x = i\beta_{10} \frac{a}{\pi} \dot{A}_{10} \sin\frac{\pi}{a} x e^{-i\beta_{10} z},\\
&\dot{H}_y = 0,\\
&\dot{H}_z = \dot{A}_{10} \cos\frac{\pi}{a} x e^{-i\beta_{10} z},
\end{aligned}\right\} \qquad (10.74)$$

где

$$\beta_{10} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}.$$

Согласно (10.61) критическая частота поля TE_{10} равна

$$(f_{кр})_{TE_{10}} = \frac{v}{2a} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \frac{1}{2a},$$

и, соответственно, критическая длина волны

$$(\lambda_{кр})_{TE_{10}} = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}\, 2a.$$

Если волновод заполнен воздухом, т. е. $\varepsilon = \varepsilon_0$ и $\mu = \mu_0$, то

$$(f_{кр})_{TE_{10}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \frac{1}{2a} \text{ и } (\lambda_{кр})_{TE_{10}} = 2a.$$

Из последних формул видно, что величины $f_{кр}$ и $\lambda_{кр}$ в данном случае не зависят от размера b поперечного сечения волновода. Кроме того, $\lambda_{кр}$ у поля TE_{10} оказывается больше критических волн всех других типов, включая и поле TE_{01} при условии, что $a > b$ (для поля TE_{01} критическая длина волны равна $\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}\, 2b$). Вследствие этого допустимые поперечные размеры волновода для заданной частоты колебаний получаются самыми малыми, если в нем возбуждается волна TE_{10}. Эта причина, наряду с простотой конфигурации поля, привела к тому, что на практике в прямоугольных волноводах, как правило, применяется волна TE_{10}*).

Структура электромагнитного поля TE_{10} изображена на рисунке в табл. 1. Как следует из формул (10.74) и рисунка, силовые линии электрического поля параллельны оси y. Магнитные силовые линии как всегда замкнуты. Они лежат в плоскости, перпендикулярной электрическим силовым линиям, и окружают вертикально направленные токи смещения.

При распространении волны по волноводу на стенках его, естественно, появляется поверхностный электрический ток. Вектор плотности тока, как известно, связан с вектором напряженности магнитного поля соотношением

$$\bar{j}_S = \bar{H} \times \bar{n}.$$

Из этого равенства следует, что составляющей напряженности магнитного поля H_x в волноводе соответствует продольный ток j_{S_z}, причем при $y = 0$

$$j_{S_z} = H_x,$$

---

*) Последняя, как будет показано ниже, характеризуется наименьшим уровнем потерь энергии в стенках волновода.

а при $y = b$

$$j_{S_z} = -H_x.$$

Распределение плотности продольного тока j_{S_z} в плоскости $y = b$, $0 \leqslant x \leqslant a$ для какого-то фиксированного момента времени изображено на рис. 10.15. Так как H_x обращается в нуль при $x = 0$ и $x = a$, то продольный ток на боковых стенках волновода также равен нулю.

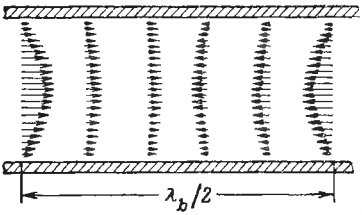


Рис. 10.15. Продольный ток волны TE_{10} на стенке $y = b$ прямоугольного волновода.

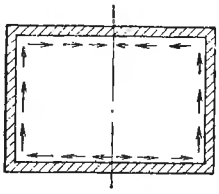


Рис. 10.16. Поперечный ток волны TE_{10} на стенках прямоугольного волновода.

Составляющей поля H_z соответствуют поперечные электрические токи, текущие по стенкам волновода в направлениях, перпендикулярных оси z. Так, на боковых стенках течет ток с плотностью $j_{S_y} = -H_z$. На верхней стенке волновода — ток $j_{S_x} = -H_z$ и на нижней — ток $j_{S_x} = H_z$.

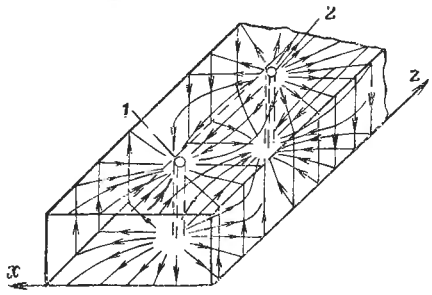


Рис. 10.17. Силовые линии тока волны TE_{10} на стенках прямоугольного волновода.

Распределение поперечных токов в волноводе показано на рис. 10.16.

Общий вид силовых линий тока для фиксированного момента времени представлен на рис. 10.17. В точках, обозначенных цифрами *1*, *2*,..., токи проводимости переходят в токи смещения.

Определим величину мощности, проходящей через поперечное сечение S_0 волновода. Подставив значения $\dot{E}_y$ и $\dot{H}_x$ из равенств (10.74) в формулу (5.33), получим:

$$P = -\frac{1}{2}\operatorname{Re}\int\limits_{S_0}\dot{E}_y\dot{H}_x^*\,dS = \frac{1}{4}\omega\mu A_{10}^2\beta_{10}\left(\frac{a}{\pi}\right)^2 ab. \quad (10.75)$$

С помощью этого выражения можно вычислить величину $A_{10} = |\dot{A}_{10}|$ как функцию передаваемой мощности.

Рассчитаем далее среднюю энергию поля на единицу длины волновода. Эта величина равна

$$W_0 = W_{0e} + W_{0м} = \int\limits_{S_0}(w_e)_{ср}\,dS + \int\limits_{S_0}(w_м)_{ср}\,dS,$$

где W_{0e} и $W_{0м}$ — средние энергии электрического и магнитного полей на единицу длины волновода; $(w_e)_{ср}$ и $(w_м)_{ср}$ — средние плотности энергии электрического и магнитного полей.

Используя выражения (5.24) и (5.25) и учитывая (10.74), для средних плотностей энергии будем иметь:

$$(w_e)_{ср} = \frac{\varepsilon}{4}\omega^2\mu^2\left(\frac{a}{\pi}\right)^2 A_{10}^2\sin^2\frac{\pi}{a}x,$$

$$(w_м)_{ср} = \frac{\mu}{4}(|\dot{H}_x|^2 + |\dot{H}_z|^2) = \frac{\mu}{4}A_{10}^2\left[\beta_{10}^2\left(\frac{a}{\pi}\right)^2\sin^2\frac{\pi}{a}x + \cos^2\frac{\pi}{a}x\right].$$

Следовательно,

$$W_{0e} = \frac{\varepsilon}{4}\omega^2\mu^2\left(\frac{a}{\pi}\right)^2 A_{10}^2\int\limits_0^a\int\limits_0^b\sin^2\frac{\pi}{a}x\,dx\,dy =$$

$$= \frac{\varepsilon}{8}\omega^2\mu^2\left(\frac{a}{\pi}\right)^2 A_{10}^2\,ab,$$

$$W_{0м} = \frac{\mu}{4}A_{10}^2\int\limits_0^a\int\limits_0^b\left[\left(k^2 - \frac{\pi^2}{a^2}\right)\left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \times\right.$$

$$\left.\times\sin^2\frac{\pi}{a}x + \cos^2\frac{\pi}{a}x\right]dx\,dy = \frac{\varepsilon}{8}\omega^2\mu^2\left(\frac{a}{\pi}\right)^2 A_{10}^2\,ab,$$

$$W_0 = \frac{\varepsilon}{4}\omega^2\mu^2\left(\frac{a}{\pi}\right)^2 A_{10}^2\,ab. \quad (10.76)$$

Отсюда видно, что энергии, запасенные в электрическом и магнитном полях волновода, равны друг другу. Однако такое равенство имеет место лишь в том случае, когда поле является волновым, т. е. когда частота колебаний $f > f_{кр}$. Расчет показывает, что при

$f < f_{кр}$ средняя энергия электрического поля уже не равна средней энергии поля магнитного.

Отношение P/W_0, как известно, есть скорость передачи энергии в направляющей системе. Вычисляя это отношение в нашем случае, получим

$$\frac{P}{W_0} = \frac{\beta_{10}}{\omega\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2} = v \sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2} = v_{гр}.$$

(См. рассуждения относительно скорости передачи энергии в § 3 данной главы.)

В заключение покажем, что поле волны TE_{10} в прямоугольном волноводе может быть представлено как совокупность полей двух плоских волн. Для этого выражения (10.74) перепишем в виде:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{E}_y &= -\omega\mu \frac{a}{2\pi}\left[e^{-i\left(-\frac{\pi}{a}x + \beta_{10}z\right)} - e^{-i\left(\frac{\pi}{a}x + \beta_{10}z\right)}\right]\dot{A}_{10},\\
\dot{H}_x &= \beta_{10}\frac{a}{2\pi}\left[e^{-i\left(-\frac{\pi}{a}x + \beta_{10}z\right)} - e^{-i\left(\frac{\pi}{a}x + \beta_{10}z\right)}\right]\dot{A}_{10},\\
\dot{H}_z &= \frac{1}{2}\left[e^{-i\left(-\frac{\pi}{a}x + \beta_{10}z\right)} + e^{-i\left(\frac{\pi}{a}x + \beta_{10}z\right)}\right]\dot{A}_{10}.
\end{aligned}\right\} \qquad (10.77)$$

Отсюда вытекает, что

$$\dot{E}_y = \dot{E}_y^{(1)} + \dot{E}_y^{(2)},$$
$$\dot{H}_x = \dot{H}_x^{(1)} + \dot{H}_x^{(2)},$$
$$\dot{H}_z = \dot{H}_z^{(1)} + \dot{H}_z^{(2)}.$$

Обозначив $\frac{\beta_{10}}{k} = \sin\varphi$ и $\frac{\pi}{ak} = \cos\varphi$, из (10.77) получим:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{E}_y^{(1)} &= -\frac{\omega\mu a}{2\pi}\dot{A}_{10}\,e^{-ik(-x\cos\varphi + z\sin\varphi)},\\
\dot{H}_x^{(1)} &= \frac{\beta_{10}a}{2\pi}\dot{A}_{10}\,e^{-ik(-x\cos\varphi + z\sin\varphi)},\\
\dot{H}_z^{(1)} &= \frac{1}{2}\dot{A}_{10}\,e^{-ik(-x\cos\varphi + z\sin\varphi)}
\end{aligned}\right\} \qquad (10.78)$$

и

$$\left.\begin{aligned}
\dot{E}_y^{(2)} &= \frac{\omega\mu a}{2\pi}\dot{A}_{10}\,e^{-ik(x\cos\varphi + z\sin\varphi)},\\
\dot{H}_x^{(2)} &= -\frac{\beta_{10}a}{2\pi}\dot{A}_{10}e^{-ik(x\cos\varphi + z\sin\varphi)},\\
\dot{H}_z^{(2)} &= \frac{1}{2}\dot{A}_{10}e^{-ik(x\cos\varphi + z\sin\varphi)}.
\end{aligned}\right\} \qquad (10.79)$$

Согласно уравнению (5.6i) множитель $e^{-ik(-x\cos\varphi+z\sin\varphi)}$ в выражениях (10.78) соответствует плоской волне, распространяющейся в направлении орта $\bar{r}_1$, образующем с осями x, y и z углы $\pi - \varphi$, $\pi/2$ и $\pi/2 - \varphi$ (рис. 10.18). Вектор $\dot{\bar{E}}^{(1)}$ в поле (10.78) перпендикулярен направлению $\bar{r}_1$. В этом нетрудно убедиться, если вычислить скалярное произведение $(\dot{\bar{E}}^{(1)}, \bar{r}_1)$, которое окажется равным нулю. Вектор $\dot{\bar{H}}^{(1)}$ лежит в плоскости xOz и тоже перпендикулярен орту r_1.

Модуль вектора $\dot{\bar{H}}^{(1)}$ имеет вид

$$\left|\dot{\bar{H}}^{(1)}\right| = \sqrt{\left|\dot{H}_x^{(1)}\right|^2 + \left|\dot{H}_z^{(1)}\right|^2} = A_{10}\sqrt{\frac{1}{4\pi^2}\beta_{10}^2 a^2 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2\pi} kaA_{10}.$$

Следовательно, отношение

$$\frac{\dot{E}^{(1)}}{\dot{H}^{(1)}} = -\frac{\dot{E}_y^{(1)}}{\dot{H}^{(1)}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z_0.$$

Таким образом, поле (10.78) действительно является полем линейно-поляризованной плоской волны, движущейся в направлении $\bar{r}_1$.

Аналогично можно показать, что выражения (10.79) определяют поле другой плоской волны, распространяющейся в направлении $\bar{r}_2$ (рис. 10.18). Разумеется, эти волны существуют не во всем пространстве, а только там, где имеется волна TE_{10}, т. е. в области, ограниченной стенками волновода.

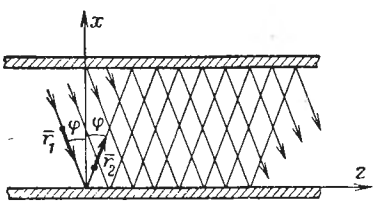


Рис. 10.18. Направления распространения плоских волн, образующих волну TE_{10}.

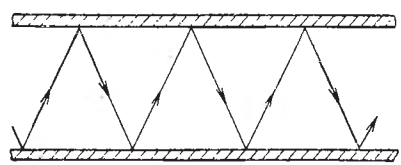


Рис. 10.19. Многократное отражение плоской волны от параллельных проводящих плоскостей (боковых стенок волновода).

Совокупность двух таких «перекрещивающихся» в пространстве плоских волн можно рассматривать как результат многократного отражения одной плоской волны при попеременном ее падении на идеально проводящие плоскости $x = 0$ и $x = a$. Движение этой волны в промежутке между плоскостями характеризуется лучами, изображенными на рис. 10.19.

Угол падения рассматриваемой волны на отражающую поверхность определяется выражением $\varphi = \arccos \pi/ak = \arccos \lambda/2a \sqrt{\frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu}} = \arccos \lambda/\lambda_{кр}$. Отсюда следует, что при $\lambda = \lambda_{кр}$ плоская волна распространяется в направлениях, перпендикулярных продольной оси волновода (угол $\varphi = 0$). В этом случае перенос энергии электромагнитного поля вдоль волновода отсутствует. Из последнего выражения также следует, что при $\lambda > \lambda_{кр}$ распространение волны TE_{10} в волноводе становится невозможным, ибо $\cos\varphi$ теперь должен быть больше единицы.

Продолжая аналогичные рассуждения, мы можем вывести и остальные соотношения для волны TE_{10}, которые, естественно, будут совпадать с результатами, полученными ранее прямым способом.

7. Круглый цилиндрический волновод

В любом цилиндрическом волноводе без потерь электромагнитное поле, так же как и в прямоугольном волноводе, может быть представлено в виде совокупности поперечно-электрических и поперечно-магнитных полей различных типов.

Пусть мы имеем бесконечный цилиндрический волновод, поверхность которого в обобщенной цилиндрической системе координат ξ, η, z задана уравнением $\xi = \xi_0$ (рис. 10.20). Поперечно-электрические поля в таком волноводе по-прежнему будут определяться проекцией $\dot{H}_z$, а поперечно-магнитные — проекцией $\dot{E}_z$.

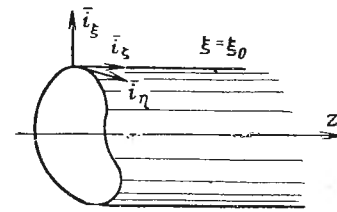


Рис. 10.20. Цилиндрический волновод.

Дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют комплексные амплитуды векторов $\dot{\bar{E}}$ и $\dot{\bar{H}}$ в области, где нет источников, имеют вид:

$$\nabla^2\dot{\bar{H}} + k^2\dot{\bar{H}} = 0 \quad \text{и} \quad \nabla^2\dot{\bar{E}} + k^2\dot{\bar{E}} = 0;$$

здесь $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu$; ε и μ — параметры среды, заполняющей волновод. Поэтому для проекций $\dot{H}_z$ и $\dot{E}_z$ можно сразу же написать:

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 \dot{H}_z + k^2 \dot{H}_z = 0, \\ \nabla^2 \dot{E}_z + k^2 \dot{E}_z = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (10.80)$$

(см. рассуждения, изложенные в § 3 гл. IX).

При решении уравнений (10.80) будем вновь полагать, что функция, характеризующая зависимость векторов $\dot{\bar{E}}$ и $\dot{\bar{H}}$ от переменной z имеет вид

$$e^{-\gamma z}. \qquad (10.81)$$

В этом случае вместо (10.80) получим

$$\nabla^2_{\xi,\,\eta}\dot{H}_z + k_c^2 \dot{H}_z = 0, \qquad (10.82)$$

$$\nabla^2_{\xi,\,\eta}\dot{E}_z + k_c^2 \dot{E}_z = 0, \qquad (10.83)$$

где $\nabla^2_{\xi,\,\eta}$ — двумерный оператор Лапласа, а

$$k_c^2 = k^2 + \gamma^2. \qquad (10.84)$$

Уравнения (10.82), (10.83) позволяют найти, при соответствующих граничных условиях, значения $\dot{H}_z$ и $\dot{E}_z$. Все остальные проекции векторов искомых полей могут быть выражены через $\dot{H}_z$ и $\dot{E}_z$ непосредственно из уравнений Максвелла подобно тому, как это было сделано для прямоугольного волновода.

Рассмотрим круглый цилиндрический волновод, поверхность которого в цилиндрической системе координат ρ, φ, z определяется уравнением $\rho = a$ (рис. 10.21).

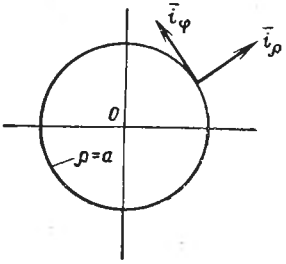


Рис. 10.21. К расчету поля в круглом волноводе.

Используя уравнения Максвелла и учитывая (10.81), представим проекции $\dot{E}_\rho$, $\dot{E}_\varphi$; $\dot{H}_\rho$ и $\dot{H}_\varphi$ через $\dot{E}_z$ и $\dot{H}_z$:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{E}_\rho &= -\frac{1}{k_c^2}\left(\gamma\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \rho} + \frac{i\omega\mu}{\rho}\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial \varphi}\right),\\
\dot{E}_\varphi &= \frac{1}{k_c^2}\left(-\frac{\gamma}{\rho}\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \varphi} + i\omega\mu\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial \rho}\right),\\
\dot{H}_\rho &= \frac{1}{k_c^2}\left(\frac{i\omega\varepsilon}{\rho}\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \varphi} - \gamma\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial \rho}\right),\\
\dot{H}_\varphi &= -\frac{1}{k_c^2}\left(i\omega\varepsilon\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \rho} + \frac{\gamma}{\rho}\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial \varphi}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (10.85)$$

В дальнейшем будем анализировать поля ТЕ и ТМ, как обычно, по отдельности.

Поперечно-электрические поля

Общие выражения для составляющих векторов $\dot{\bar{E}}$ и $\dot{\bar{H}}$ поперечно-электрических полей в круглом волноводе имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{E}_\rho = -\frac{1}{k_c^2}\frac{i\omega\mu}{\rho}\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial \varphi}; \quad \dot{E}_\varphi = \frac{i\omega\mu}{k_c^2}\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial \rho}; \quad \dot{E}_z = 0;\\
&\dot{H}_\rho = -\frac{\gamma}{k_c^2}\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial \rho}; \quad \dot{H}_\varphi = -\frac{\gamma}{k_c^2}\frac{1}{\rho}\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial \varphi}.
\end{aligned}\right\} \qquad (10.86)$$

Так как в обычной цилиндрической системе координат оператор

$$\nabla^2_{\rho,\varphi} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

то уравнение (10.82) для функции $\dot{H}_z$ можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial \varphi^2} + k_c^2 \dot{H}_z = 0. \qquad (10.87)$$

Граничные условия, которым должна удовлетворять функция $\dot{H}_z$, нетрудно получить из условия исчезновения касательной составляющей вектора $\dot{\vec{E}}$ на поверхности волновода.

Согласно (10.86) проекция $\dot{E}_{tg} = \dot{E}_\varphi$ будет равна нулю при $\rho = a$, если

$$\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial \rho} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = a. \qquad (10.88)$$

Так как радиальное направление в данной системе координат совпадает с направлением внешней нормали к поверхности $\rho = a$, то выражение (10.88) может быть переписано в виде

$$\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial n} = 0 \quad \text{при } \rho = a. \qquad (10.89)$$

Уравнение (10.87) совпадает по виду с уравнением (9.5), если в последнем функцию $\dot{E}_z$ заменить на $\dot{H}_z$, а величину k на k_c. Однако следует учесть, что в уравнении (9.5) функция $\dot{E}_z$ не зависит от координаты z, тогда как в рассматриваемом случае зависимость $\dot{H}_z$ от переменной z определяется множителем $e^{-\gamma z}$.

Используя результаты § 2 гл. IX с учетом приведенных здесь замечаний, получим

$$\dot{H}_z = [A_m J_m(k_c\rho) + B_m N_m(k_c\rho)][C_m \cos m\varphi + D_m \sin m\varphi]\, e^{-\gamma z}.$$

Начало отсчета угла φ может быть выбрано произвольно. Возьмем за начало отсчета φ полуплоскость $\varphi = \text{const}$, в которой составляющая $\dot{H}_z$ имеет максимум. Тогда в выражении для $\dot{H}_z$ останется лишь множитель $\cos m\varphi$, и, следовательно, $\dot{H}_z$ будет равна

$$\dot{H}_z = [\dot{A}_m J_m(k_c\rho) + \dot{B}_m N_m(k_c\rho)] \cos m\varphi\, e^{-\gamma z}. \qquad (10.90)$$

Как известно, функции Бесселя второго рода при $\rho \to 0$ обращаются в бесконечность. Однако из физических условий задачи ясно, что поле в центре волновода ($\rho = 0$) должно иметь конечные значения. Поэтому в (10.90) необходимо положить $\dot{B}_m = 0$. Стало быть, удовлетворяющее нас решение уравнения (10.87) будет иметь вид

$$\dot{H}_z = \dot{A}_m J_m(k_c\rho) \cos m\varphi\, e^{-\gamma z}. \qquad (10.91)$$

Так как функция H_z не должна изменяться при замене φ на $\varphi + 2\pi$, то m может быть лишь целым числом, т. е. $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Далее, граничное условие (10.88) будет удовлетворено, если

$$\frac{dJ_m(k_c \rho)}{d\rho} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = a$$

или

$$J'_m(k_c a) = 0; \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{10.92}$$

где значок $'$ означает производную по аргументу *).

В теории бесселевых функций установлено, что для каждого значения m имеется бесконечное счетное множество корней уравнения $J'_m(\nu) = 0$. Мы будем обозначать эти корни ν_{mn}, где n — порядковый номер корня.

Значения нескольких первых корней ν_{mn} при $m = 0, 1, 2$ даны в табл. 2.

Таблица 2

Корни производных функций Бесселя

Номер корня	$m=0$	$m=1$	$m=2$
1	3,832	1,840	3,054
2	7,016	5,335	6,705
3	10,174	8,536	9,965

Из равенства (10.92) вытекает, что

$$k_c a = \nu_{mn},$$

откуда

$$k_c = \frac{\nu_{mn}}{a}; \quad m = 0, 1, 2, \ldots; \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{10.93}$$

Подставляя значение k_c в равенство (10.84), получим

$$\gamma_{mn} = \sqrt{\left(\frac{\nu_{mn}}{a}\right)^2 - k^2}$$

и соответственно

$$\beta_{mn} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\nu_{mn}}{a}\right)^2}. \tag{10.94}$$

*) Условие $k_c = 0$ приводит к тривиальному решению.

Из выражений (10.86), (10.91), (10.93) и (10.94) следует, что проекции векторов поперечно-электрических полей в круглом волноводе имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{E}_\rho &= \frac{i\omega\mu}{k_c^2}\frac{m}{\rho}\,\dot{A}_{mn}\,J_m\left(\frac{\nu_{mn}}{a}\rho\right)\sin m\varphi\, e^{-\gamma_{mn}z},\\
\dot{E}_\varphi &= \frac{i\omega\mu}{k_c}\,\dot{A}_{mn}\,J_m'\left(\frac{\nu_{mn}}{a}\rho\right)\cos m\varphi\, e^{-\gamma_{mn}z},\\
\dot{E}_z &= 0,\\
\dot{H}_\rho &= -\frac{\gamma_{mn}}{k_c}\,\dot{A}_{mn}\,J_m'\left(\frac{\nu_{mn}}{a}\rho\right)\cos m\varphi\, e^{-\gamma_{mn}z},\\
\dot{H}_\varphi &= \frac{\gamma_{mn}}{k_c^2}\frac{m}{\rho}\,\dot{A}_{mn}\,J_m\left(\frac{\nu_{mn}}{a}\rho\right)\sin m\varphi\, e^{-\gamma_{mn}z},\\
\dot{H}_z &= \dot{A}_{mn}\,J_m\left(\frac{\nu_{mn}}{a}\rho\right)\cos m\varphi\, e^{-\gamma_{mn}z}.
\end{aligned}\right\} \qquad (10.95)$$

Таким образом, в круглом волноводе может существовать бесчисленное множество поперечно-электрических полей TE_{mn} (или H_{mn}) с различными значениями чисел m и n. Эти числа определяют структуру поля в плоскости поперечного сечения волновода: m характеризует изменение поля по окружности волновода, а n — изменение вдоль радиуса. Так же, как и в прямоугольном волноводе, каждый тип поля имеет свою критическую частоту и критическую длину волны.

Критическая частота поля TE_{mn} теперь определяется выражением

$$(f_{кр})_{TE} = \frac{1}{2\pi}\,k_c\,v = \frac{\nu_{mn}}{2\pi a\sqrt{\varepsilon\mu}}, \qquad (10.96)$$

а критическая длина волны

$$(\lambda_{кр})_{TE} = \frac{2\pi}{\nu_{mn}}\,a\,\frac{\varepsilon\mu}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}. \qquad (10.97)$$

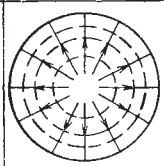
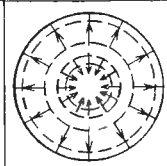
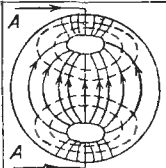
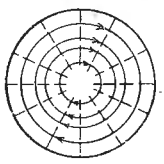
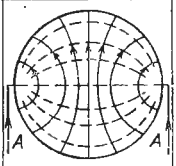
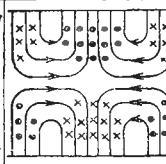
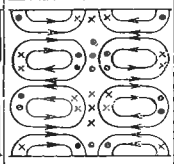
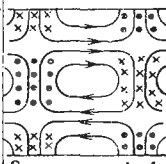
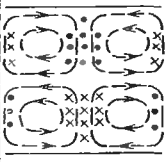
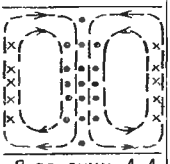
Из табл. 2 следует, что наименьшим корнем уравнения $J_m'(\nu) = 0$ является корень ν_{11}, равный 1,84.

Стало быть, волна TE_{11} (или H_{11}) при данном радиусе волновода a будет иметь наибольшую критическую длину $(\lambda_{кр})_{TE_{11}} \approx \approx 3{,}41\,a\sqrt{\varepsilon\mu/\varepsilon_0\mu_0}$. В этом смысле волна TE_{11} является аналогом волны TE_{10} в прямоугольном волноводе. Сходство между этими волнам проявляется и в общности структуры их полей.

Силовые линии векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ волны TE_{11}, а также других наиболее простых поперечно-электрических волн в круглом волноводе изображены на рисунках табл. 3.

Волны в круглых волноводах

Таблица 3

Тип волны	TM_{01} E_{01}	TM_{02} E_{02}	TM_{11} E_{11}	TE_{01} H_{01}	TE_{11} H_{11}
Структура поля в плоскости поперечного сечения волновода					
Структура поля в продольном сечении волновода Напр. распростр.					
Компоненты поля, отличные от нуля	E_ρ, E_z, H_φ	E_ρ, E_z, H_φ	В сечении А-А $E_\rho, E_\varphi, E_z, H_\rho, H_\varphi$	E_φ, H_ρ, H_z	В сечении А-А $E_\rho, E_\varphi, H_\rho, H_\varphi, H_z$
$\varkappa_{mn}$ или ϑ_{mn}	2,405	5,520	3,830	3,830	1,840
K_c	$\frac{2,405}{a}$	$\frac{5,52}{a}$	$\frac{3,83}{a}$	$\frac{3,83}{a}$	$\frac{1,84}{a}$
$\lambda_{кр}$	$2,61a\sqrt{\varepsilon'\mu'}$	$1,14a\sqrt{\varepsilon'\mu'}$	$1,64a\sqrt{\varepsilon'\mu'}$	$1,64a\sqrt{\varepsilon'\mu'}$	$3,41a\sqrt{\varepsilon'\mu'}$
$f_{кр}$	$\frac{0,383}{a\sqrt{\varepsilon\mu}}$	$\frac{0,877}{a\sqrt{\varepsilon\mu}}$	$\frac{0,609}{a\sqrt{\varepsilon\mu}}$	$\frac{0,609}{a\sqrt{\varepsilon\mu}}$	$\frac{0,293}{a\sqrt{\varepsilon\mu}}$

Формулы для фазовой и групповой скоростей волны TE_{mn} в круглом волноводе имеют следующий вид:

$$v_{\phi}=\frac{v}{\sqrt{1-\left(\frac{f_{\text{кр}}}{f}\right)^2}}; \quad v_{\text{гр}}=v\sqrt{1-\left(\frac{f_{\text{кр}}}{f}\right)^2} \qquad (10.98)$$

Характеристическое сопротивление волновода в этом случае равно

$$(Z_c)_{\text{TE}}=\frac{Z_0}{\sqrt{1-\left(\frac{f_{\text{кр}}}{f}\right)^2}}.$$

Поперечно-магнитные поля

Исходные выражения для проекций векторов поперечно-магнитного поля в круглом волноводе имеют вид:

$$\dot{E}_{\rho}=-\frac{\gamma}{k_c^2}\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \rho}; \quad \dot{E}_{\varphi}=-\frac{\gamma}{k_c^2}\frac{1}{\rho}\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \varphi}; \quad \dot{E}_z\neq 0,$$

$$\dot{H}_{\rho}=\frac{1}{k_c^2}\frac{i\omega\varepsilon}{\rho}\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \varphi}; \quad \dot{H}_{\varphi}=-\frac{1}{k_c^2}i\omega\varepsilon\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \rho}; \quad H_z=0. \qquad (10.99)$$

Уравнение (10.83) для проекции $\dot{E}_z$ в цилиндрической системе координат выглядит аналогично уравнению (10.87), т. е.

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial \varphi^2}+k_c^2\dot{E}_z=0. \qquad (10.100)$$

Граничные условия, которым должна удовлетворять функция $\dot{E}_z$ на поверхности волновода, записываются следующим образом:

$$\dot{E}_z=0 \text{ при } \rho=a. \qquad (10.101)$$

При выполнении этого условия все касательные составляющие вектора $\dot{E}$ на поверхности волновода будут равны нулю.

Решение уравнения (10.100), конечное на оси $\rho=0$, имеет вид

$$\dot{E}_z=\dot{B}_m J_m(k_c\rho)\cos m\varphi\, e^{-\gamma z}, \quad m=0, 1, 2, \ldots$$

Это решение будет удовлетворять условию (10.101), если

$$k_c=\frac{\varkappa_{mn}}{a},$$

где $\varkappa_{mn}$ — корни уравнения $J_m(\varkappa)=0$, $m=0, 1, 2, \ldots$; $n=1, 2, 3, \ldots$.

Значения первых корней полученного уравнения при $m = 0$, 1, 2 даны в табл. 4 *).

Таблица 4

Номер корня	$m=0$	$m=1$	$m=2$
1	2,405	3,832	5,135
2	5,520	7,016	8,417
3	8,654	10,173	11,620

Подставляя найденное значение $\dot{E}_z$ в (10.99), напишем окончательные выражения для составляющих векторов поперечно-магнитного поля в круглом волноводе:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{E}_\rho &= -\frac{\gamma_{mn}}{k_c}\dot{B}_{mn}J'_m\left(\frac{\varkappa_{mn}}{a}\rho\right)\cos m\varphi\, e^{-\gamma_{mn}z},\\
\dot{E}_\varphi &= \frac{\gamma_{mn}}{k_c^2}\frac{m}{\rho}\dot{B}_{mn}J_m\left(\frac{\varkappa_{mn}}{a}\rho\right)\sin m\varphi\, e^{-\gamma_{mn}z},\\
\dot{E}_z &= \dot{B}_{mn}J_m\left(\frac{\varkappa_{mn}}{a}\rho\right)\cos m\varphi\, e^{-\gamma_{mn}z},\\
\dot{H}_\rho &= -\frac{i\omega\varepsilon}{k_c^2}\frac{m}{\rho}\dot{B}_{mn}J_m\left(\frac{\varkappa_{mn}}{a}\rho\right)\sin m\varphi\, e^{-\gamma_{mn}z},\\
\dot{H}_\varphi &= -\frac{i\omega\varepsilon}{k_c}\dot{B}_{mn}J'_m\left(\frac{\varkappa_{mn}}{a}\rho\right)\cos m\varphi\, e^{-\gamma_{mn}z},\\
\dot{H}_z &= 0;\ m=0,1,2,\ldots;\ n=1,2,3,\ldots,\\
\gamma_{mn} &= \sqrt{\left(\frac{\varkappa_{mn}}{a}\right)^2 - k^2}.
\end{aligned}\right\} \qquad (10.102)$$

Стало быть, и здесь мы получаем множество типов полей TM_{mn} (или E_{mn}), характеризуемых различными значениями m и n. Эти величины имеют тот же смысл, что в случае полей TE_{mn}.

Критические частоты поперечно-магнитных полей круглого волновода равны

$$(f_{кр})_{TM} = \frac{1}{2\pi}k_c v = \frac{\varkappa_{mn}}{2\pi a\sqrt{\varepsilon\mu}}, \qquad (10.103)$$

а критические волны

$$(\lambda_{кр})_{TM} = \frac{2\pi a}{\varkappa_{mn}}\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}. \qquad (10.104)$$

*) При $m \neq 0$ уравнение $J_m(\varkappa) = 0$ имеет также корень $\varkappa = 0$. Однако этот случай соответствует тривиальному решению.

Если $f > (f_{кр})_{TM}$ или соответственно $\lambda < (\lambda_{кр})_{TM}$, то поле будет распространяться по волноводу в виде бегущей волны.

Так как корень $\varkappa_{mn}$ принимает наименьшее значение при $m = 0$ и $n = 1$, то самую низкую критическую частоту (наибольшую критическую длину волны) будет иметь волна TM_{01}. Подставляя значение $\varkappa_{01} = 2{,}405$ в (10.104), получим

$$(\lambda_{кр})_{TM_{01}} \approx 2{,}61a \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0 \mu_0}}.$$

Силовые линии простейших поперечно-магнитных полей в круглом волноводе изображены на рисунке табл. 3. Здесь же приведены и некоторые другие их характеристики.

Поля, определяемые выражениями (10.95) и (10.103), называются собственными полями (собственными волнами) круглого волновода.

В заключение следует подчеркнуть, что в волноводах, как вытекает из изложенного, существуют лишь волны ТЕ и ТМ. Поперечные волны ТЕМ здесь существовать не могут.

Справедливость последнего утверждения очевидна из простых физических соображений. Предположим, например, что силовые линии вектора $\overline{H}$ целиком лежат в плоскости поперечного сечения волновода. Будучи линиями замкнутыми, они, естественно, должны охватывать линии тока. Но так как внутри волновода проводников нет, то этот ток может быть лишь током смещения. Следовательно, вектор $\overline{E}$ в данном случае должен иметь составляющую, направленную вдоль оси z. А это значит, что поле в волноводе не является поперечным *).

8. Затухание электромагнитных волн в волноводах с потерями

До сих пор мы исследовали электромагнитные поля в волноводах, полагая, что стенки их обладают бесконечно большой проводимостью, а внутреннее пространство заполнено идеальным диэлектриком. Естественно, электромагнитные волны распространяются вдоль таких волноводов без затухания.

В реальных условиях часть электромагнитной энергии, передаваемой по волноводу, расходуется на нагревание стенок, а также теряется в диэлектрике. Вследствие этого амплитуды поля будут уменьшаться вдоль направления распространения, т. е. волна в волноводе становится затухающей.

---

*) Подробнее вопрос о существовании поперечных волн в направляющих системах будет рассмотрен в гл. XI.

Постоянная распространения затухающей волны, существующей в среде с потерями, как известно, есть величина комплексная:

$$\gamma = \alpha + i\beta, \tag{10.105}$$

где α — коэффициент затухания; β — волновое число.

Наша задача теперь и будет заключаться в определении этих величин для волновода.

Рассмотрим цилиндрический волновод с потерями, изображенный на рис. 10.22. Чтобы найти коэффициент затухания α, вычислим среднюю мощность P, проходящую по волноводу, в двух близлежащих плоскостях поперечного сечения. Пусть эта величина в плос-

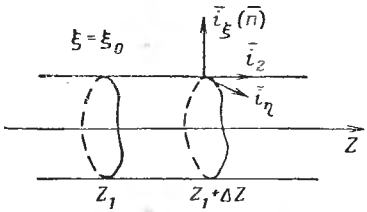


Рис. 10.22. К расчету затухания электромагнитных волн в волноводе.

кости $z = z_1$ равна P_1. В плоскости $z = z_2 = z_1 + \Delta z$ мощность P_2 будет отличаться от величины P_1 из-за потерь энергии на участке Δz.

Если $\Delta z \to 0$, то

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{P_2 - P_1}{\Delta z} = \frac{dP}{dz}.$$

Стало быть, величина $-dP/dz$ представляет собой убыль средней мощности в волноводе на единицу длины.

Как известно, средняя мощность, передаваемая по волноводу, равна

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{S_0} \left(\dot{\bar{E}} \times \dot{\bar{H}}^* \right) \bar{i}_z \, dS, \tag{10.106}$$

где S_0 — площадь поперечного сечения волновода; $\bar{i}_z$ — единичный вектор, совпадающий по направлению с направлением распространения волны.

В цилиндрической системе координат ξ, η, z векторы $\dot{\bar{E}}$ и $\dot{\bar{H}}$ поля в волноводе можно представить таким образом:

$$\dot{\bar{E}} = \dot{\bar{E}}_0(\xi, \eta)\, e^{-\gamma z} = \dot{\bar{E}}_0(\xi, \eta)\, e^{-\alpha z}\, e^{-i\beta z},$$

$$\dot{\bar{H}} = \dot{\bar{H}}_0(\xi, \eta)\, e^{-\gamma z} = \dot{\bar{H}}_0(\xi, \eta)\, e^{-\alpha z}\, e^{-i\beta z}.$$

Следовательно,

$$P = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int\limits_{S_0}\left(\dot{\bar{E}}\times\dot{\bar{H}}_0^*\right)e^{-2\alpha z}\,\bar{i}_z\,dS = P_0\,e^{-2\alpha z},$$

где

$$P_0 = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int\limits_{S_0}\left(\dot{\bar{E}}\times\dot{\bar{H}}^*\right)\bar{i}_z\,dS.$$

Дифференцируя последнее равенство по z, получим

$$\frac{dP}{dz} = -2\alpha P_0\,e^{-2\alpha z} = -2\alpha P.$$

Отсюда вытекает, что коэффициент затухания

$$\alpha = -\frac{1}{2}\frac{dP}{dz}\frac{1}{P}. \qquad (10.107)$$

На практике волновод обычно заполняется воздухом, который, как известно, является диэлектриком с очень малым уровнем потерь. В этом случае потери в диэлектрике, естественно, можно не принимать во внимание. При таком условии убыль средней мощности в волноводе на единицу длины согласно закону сохранения энергии будет равна среднему потоку вектора Пойнтинга через стенки, рассчитываемому также на единицу длины:

$$-\frac{dP}{dz} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\oint\limits_{L}\left(\dot{\bar{E}}\times\dot{\bar{H}}^*\right)\bar{i}_\xi\,dl, \qquad (10.108)$$

где L — контур поперечного сечения волновода; $\bar{i}_\xi$ — орт нормали, внешней относительно области с поверхностью $\xi = \xi_0$.

Подставляя значения P и dP/dz из (10.106) и (10.108) в (10.107), получим формулу, определяющую коэффициент затухания:

$$\alpha = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{Re}\oint\limits_{L}\left(\dot{\bar{E}}\times\dot{\bar{H}}^*\right)\bar{i}_\xi\,dl}{\operatorname{Re}\int\limits_{S_0}\left(\dot{\bar{E}}\times\dot{\bar{H}}^*\right)\bar{i}_z\,dz}\left[\frac{\text{нп}}{\text{м}}\right]. \qquad (10.109)$$

Согласно (10.109) для определения коэффициента затухания необходимо иметь истинные значения векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ электромагнитного поля в волноводе с учетом конечной проводимости стенок. А это значит, что решение уравнений Максвелла в данном случае следует искать не только в пространстве, заполненном диэлектриком, но и в окружающей его проводящей среде (стенках волновода),

причем на граничной поверхности, разделяющей проводник и диэлектрик, касательные к ней проекции векторов $\dot{\bar{E}}$ и $\dot{\bar{H}}$ должны удовлетворять условиям непрерывности *).

К сожалению, подобный путь решения в большинстве случаев оказывается настолько сложным, что использование его для практического расчета коэффициента затухания в волноводах становится нецелесообразным, а иногда и просто невозможным. В настоящее время широко используется другой метод расчета коэффициента затухания, основанный на применении приближенных граничных условий Леонтовича и теории поверхностного эффекта.

Согласно последней теории для волны, распространяющейся вдоль плоской границы раздела «диэлектрик—проводник», справедливо соотношение:

$$\dot{E}_{tg} = \dot{H}_{tg} Z_0 = \dot{I}_S Z_S = \dot{H}_{tg} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2g}} (1+i) = \dot{H}_{tg} Z_S, \qquad (10.110)$$

где $\dot{E}_{tg}$ и $\dot{H}_{tg}$ — взаимно перпендикулярные проекции векторов $\dot{\bar{E}}$ и $\dot{\bar{H}}$, касательные к граничной поверхности;

$\dot{\bar{I}}_S$ — ток на единицу ширины проводника;

Z_S — поверхностное сопротивление проводника (см. § 11 гл. VI).

Но на основании граничных условий Леонтовича можно утверждать, что соотношение (10.110) приближенно справедливо также и для проводников с криволинейными граничными поверхностями, если только радиусы кривизны последних значительно больше величины $\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu g}}$.

Поэтому в данном случае проекции $\dot{E}_\eta$ и $\dot{E}_z$, касательные к поверхности $\xi = \xi_0$, будут равны:

$$\dot{E}_\eta = \dot{H}_z Z_S; \dot{E}_z = -\dot{H}_\eta Z_S, \qquad (10.111)$$

(знак «минус» в последнем выражении введен для того, чтобы получить правильное направление составляющей вектора Пойнтинга на ось z).

Перепишем числитель выражения (10.108) в виде

$$\mathrm{Re} \int_L \left(\dot{\bar{E}} \times \dot{\bar{H}}^*\right) \bar{i}_\xi \, dl = \mathrm{Re} \int_L \left(\dot{E}_\eta \dot{H}_z^* - \dot{E}_z \dot{H}_\eta^*\right) dl.$$

---

*) Так как проводимость стенок волновода достаточно велика и поле там быстро затухает, то можно полагать, что стенки имеют бесконечно большую толщину.

Подставив сюда значения E_η и E_z из (10.111), находим, что

$$\operatorname{Re} \oint_L \left(\dot{\bar{E}} \times \dot{\bar{H}}^*\right) \bar{i}_\xi \, dl = \operatorname{Re} \oint_L \left(H_{z0}^2 + H_{\eta 0}^2\right) Z_S \, dl = R_S \oint_L \left(H_{z0}^2 + H_{\eta 0}^2\right) dl,$$

где

$$H_{\eta 0} = |\dot{H}_\eta| \text{ и } H_{z0} = |\dot{H}_z|.$$

Следовательно, приближенная формула для коэффициента затухания электромагнитных волн в волноводе принимает вид

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{R_S \oint_L H_{\tau g_0}^2 \, dl}{\operatorname{Re} \int_{S_0} \left(\dot{\bar{E}} \times \dot{\bar{H}}^*\right) \bar{i}_z \, dS}, \tag{10.112}$$

где $H_{\tau g_0}^2 = H_{z0}^2 + H_{\eta 0}^2 = |\dot{H}_z|^2 + |\dot{H}_\eta|^2$.

Обычно стенки волновода изготовляются из металла с высокой проводимостью. В этом случае логично предположить, что касательная составляющая магнитного поля на проводящей поверхности системы будет незначительно отличаться от $\dot{H}_{\tau g 0}$ в идеальном волноводе. Следовательно, при приближенном расчете коэффициента затухания по формуле (10.112) можно полагать, что касательная составляющая вектора $\dot{\bar{H}}$ на стенках реального волновода будет равна касательной составляющей вектора $\dot{\bar{H}}$ в волноводе без потерь. При таком допущении учет конечной проводимости стенок волновода сводится к введению небольшой касательной составляющей напряженности электрического поля

$$\dot{E}_{\tau g} = \dot{H}_{\tau g 0} Z_S \big|_{\xi = \xi_0}.$$

Здесь $\dot{H}_{\tau g 0}$ — касательная составляющая вектора $\dot{\bar{H}}$ на поверхности идеального волновода.

Точно так же мы допустим небольшую погрешность, если реальные величины $\dot{\bar{E}}$ и $\dot{\bar{H}}^*$ в знаменателе выражения (10.112) заменим на величины, соответствующие идеальному волноводу.

Таким образом, для приближенного расчета коэффициента затухания достаточно знать характеристики соответствующей волны в идеальном волноводе той же формы. Сравнение результатов расчета коэффициента α изложенным способом с результатами, полученными строгим путем, свидетельствует о том, что при большой проводимости стенок, приближенные значения α оказываются близкими к истинным.

Формула (10.112), конечно, применима не только к волноводам, но и к другим направляющим системам, образованным проводящими поверхностями.

Что касается значения β в выражении (10.105), то оно согласно сделанным допущениям берется таким же, как и в системе без потерь.

В заключение отметим, что в волноводе с потерями скачкообразного перехода от поля, распространяющегося в виде бегущей волны, к полю чисто затухающему уже не наблюдается, ибо постоянная распространения в таком волноводе при любой частоте колебаний оказывается величиной комплексной, отличной от нуля. Изменение частоты колебаний в окрестностях критической здесь сопровождается резким изменением соотношения между значениями α и β. Так, на частотах, бóльших критической, коэффициент α становится много меньше (при малых потерях) величины β, и поле принимает форму слабо затухающей волны. На частотах, меньших критической, напротив, коэффициент α много больше β, поэтому поле получается сильно затухающим, но оно все же сохраняет небольшую способность к распространению.

9. Затухание электромагнитных волн в прямоугольном волноводе

Применим формулу (10.112) к расчету коэффициента затухания волны TE_{10} в прямоугольном волноводе. Выражения для проекций векторов поля TE_{10} в идеальном волноводе были приведены выше в § 6.

Используя эти выражения, в числителе формулы (10.112) будем иметь

$$R_S \int_L H_{\tau 0}^2\, dl = R_S \int_0^a \left[H_{x0}^2 + H_{z0}^2\right]_{y=0} dx + R_S \int_0^b H_{z0}^2 \,|_{x=0}\, dy +$$

$$+ R_S \int_0^a \left[H_{x0}^2 + H_{z0}^2\right]_{y=b} dx + R_S \int_0^b H_{z0}^2 \,|_{x=a}\, dy = 2R_S \int_0^a \left[H_{x0}^2 + H_{z0}^2\right]_{y=0} dx +$$

$$+ 2R_S \int_0^b H_{z0}^2 \,|_{x=0}\, dy = 2R_S \int_0^a \Big[A_{10}^2 \beta_{10}^2 \times$$

$$\times \frac{a^2}{\pi^2} \sin^2 \frac{\pi}{a} x + A_{10}^2 \cos^2 \frac{\pi}{a} x \Big] dx +$$

$$+ 2R_S \int_0^b A_{10}^2\, dy = R_S\, A_{10}^2 \left(\beta_{10}^2 \frac{a^2}{\pi^2} + a + 2b \right).$$

Знаменатель формулы (10.112) в рассматриваемом случае равен

$$\mathrm{Re} \int_S \left(\dot{\bar{E}} \times \dot{\bar{H}}^* \right) \bar{i}_z\, dS = \mathrm{Re} \int_0^a \int_0^b \omega \mu \beta_{10} A_{10}^2 \times$$

$$\times \frac{a^2}{\pi^2} \sin^2 \frac{\pi}{a} x\, dx\, dy = \omega \mu \beta_{10} A_{10}^2 \frac{a^2 b}{2\pi^2}.$$

Подставляя найденные значения в исходную формулу, получим

$$\alpha = \frac{R_S\left(\beta_{10}^2 + \frac{\pi^2}{a^2} + 2\frac{b}{a}\frac{\pi^2}{a^2}\right)}{\omega\mu\beta_{10}\, b}.$$

Так как

$$\omega\mu = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = kZ_0,$$

$$\beta_{10} = \sqrt{k^2 - \frac{\pi^2}{a^2}} = k\sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2},$$

то

$$\alpha = \frac{R_S\left[1 + \frac{2b}{a}\left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2\right]}{Z_0\, b\sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}}. \qquad (10.113)$$

Из выражения (10.113) следует, что коэффициент затухания волны TE_{10} зависит от частоты колебаний, а также от размеров поперечного сечения волновода. На рис. 10.23 изображены графики

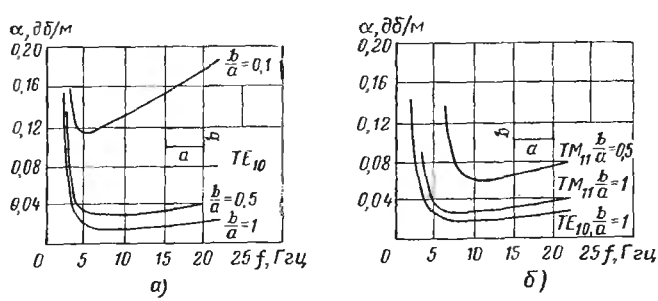


Рис. 10.23. Зависимость коэффициентов затухания волн TE_{10} и TM_{11} в прямоугольном волноводе от частоты (сторона $a = 50{,}8$ *мм*):

а — волна TE_{10}; *б* — волны TM_{11} и TE_{10}.

характеризующие зависимость коэффициента $\alpha_{TE_{10}}$ от частоты при различных размерах стороны b и $a = \text{const}$. Как видно из графиков, в окрестностях критической частоты коэффициент затухания имеет весьма большую величину. При $f = f_{кр}$ получается, что коэффициент затухания становится даже бесконечно большим *).

*) Такой результат есть следствие приближенного расчета коэффициента затухания. В действительности α при $f = f_{кр}$ имеет большое, но конечное значение.

С увеличением частоты колебаний в области $f > f_{кр}$ величина $\alpha_{TE_{10}}$ сначала падает, а затем снова возрастает. Из выражения (10.113) видно, что на очень высоких частотах $\alpha \approx R_S/Z_0 b$. Стало быть, при $f \to \infty$ коэффициент затухания растет пропорционально корню квадратному из частоты, ибо поверхностное сопротивление

$$R_S \approx \sqrt{\frac{\omega\mu}{2g}} = \sqrt{\frac{\pi f \mu}{g}}.$$

На некоторой частоте величина $\alpha_{TE_{10}}$ принимает минимальное значение, однако этот минимум оказывается нерезким, т. е. коэффициент затухания получается достаточно малым в полосе частот.

Из формулы (10.113) следует, что коэффициент затухания волны TE_{10} возрастает с уменьшением размера b, если при этом размер a остается неизменным (рис. 10.23, *а*). Стало быть, сторона b в волноводе не может выбираться произвольно малой, хотя последнее и было бы желательным с практической точки зрения.

Анализируя формулу (10.113), можно также заключить, что коэффициент затухания уменьшается с ростом периметра поперечного сечения волновода. Далее, при неизменном периметре сечения величина α будет зависеть от отношения b/a. Установлено, что минимальное значение коэффициент α имеет при $b/a = 1{,}18$. Однако эта величина не является критичной. Изменение отношения b/a в пределах от 1/2 до 2 приводит к незначительному изменению α относительно $\alpha_{мин}$.

Формулы для расчета затухания других типов волн в прямоугольном волноводе имеют следующий вид:

$$\alpha_{TE} = 2\frac{R_S}{Z_0 b\sqrt{1-\left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}} \times$$

$$\times\left\{\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2 + \left[1-\left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2\right]\frac{\frac{b}{a}\left(\frac{b}{a}m^2+n^2\right)}{\frac{b^2m^2}{a^2}+n^2}\right\}$$

$$(m>1;\ n>1),$$

$$\alpha_{TM} = 2\frac{R_S}{Z_0 b\sqrt{1-\left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}}\frac{m^2\left(\frac{b}{a}\right)^3+n^2}{m^2\left(\frac{b}{a}\right)^2+n^2}.$$

Они получаются из общего выражения (10.112) таким же путем, как и для волны TE_{10}. (Вывод их читателю рекомендуется проделать самостоятельно.)

Согласно этим формулам частотная зависимость коэффициента затухания любой волны ТЕ или ТМ в волноводе аналогична функции $\alpha_{TE_{10}}(f)$. На рис. 10.23, *б* изображены графики, характеризующие подобную зависимость в случае волны TM_{11}. Здесь же для сравнения изображена кривая $\alpha_{TE_{10}}(f)$. Из графиков видно, что волна TM_{11} характеризуется более высоким уровнем потерь, нежели волна TE_{10}.

Такой же вывод можно сделать и для других типов волн в волноводе.

10. Затухание электромагнитных волн в круглом волноводе

Для круглого волновода с поперечно-электрической волной величины, входящие в числитель формулы (10.112), будут равны

$$H_{\tau g0}^2 = H_{\varphi 0}^2 + H_{z0}^2 \text{ и } \oint_L H_{\tau g0}^2 dl = a \int_0^{2\pi} \left(H_{\varphi 0}^2 + H_{z0}^2\right) d\varphi; \qquad (10.114)$$

a — радиус волновода. В знаменателе (10.112)

$$\operatorname{Re} \int_{S_0} \left(\dot{\bar{E}} \times \dot{\bar{H}}^*\right) \bar{i}_z \, dS = \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(\dot{E}_\rho \dot{H}_\varphi^* - \dot{E}_\varphi \dot{H}_\rho^*\right) \rho d\rho d\varphi. \qquad (10.115)$$

Следовательно, коэффициент затухания поперечно-электрических волн в волноводе будет определяться выражением

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{aR_S \int_0^{2\pi} \left(H_{\varphi 0}^2 + H_{z0}^2\right) d\varphi}{\operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(\dot{E}_\rho \dot{H}_\varphi^* - \dot{E}_\varphi \dot{H}_\rho^*\right) \rho d\rho d\varphi}.$$

Подставив сюда значения компонент векторов поля из (10.95), получим

$$\alpha_{TE} = \frac{R_S}{a\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}} \left[\left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2 + \frac{m^2}{\nu_{mn}^2 - m^2}\right]. \qquad (10.116)$$

Коэффициент затухания поперечно-магнитных волн рассчитывается аналогично. Так как в этом случае $H_z = 0$, то из формулы (10.112) с учетом (10.115) будем иметь

$$\alpha_{TM} = \frac{1}{2} \frac{aR_S \int_0^{2\pi} H_{\varphi 0}^2 \, d\varphi}{\operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(\dot{E}_\rho \dot{H}_\varphi^* - \dot{E}_\varphi \dot{H}_\rho^*\right) \rho d\rho d\varphi}.$$

или в окончательном виде

$$\alpha_{TM} = \frac{R_S}{a\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}}. \qquad (10.117)$$

Зависимость коэффициента затухания простейших типов волн от частоты в круглом волноводе показана на рис. 10.24. Отсюда видно, что коэффициенты затухания изменяются с ростом частоты примерно так же, как и в прямоугольном волноводе. Исключение составляет лишь волна TE_{01} (и вообще волны TE_{0n}), затухание которой с увеличением частоты непрерывно убывает.

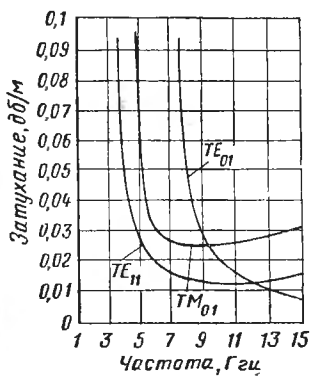


Рис. 10.24. Зависимость коэффициента затухания волн от частоты в круглом волноводе ($a = 25{,}4$ *мм*).

Подобное обстоятельство объясняется тем, что волна TE_{01} возбуждает в стенках волновода только круговые токи $j_\varphi = H_z$. А они с ростом частоты колебаний при неизменной мощности, передаваемой по волноводу, уменьшаются.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим выражения для компонент поля TE_{01}:

$$\dot{E}_\varphi = \frac{i\omega\mu}{k_c}\dot{A}_{01}J_0'\left(\nu_{01}\frac{\rho}{a}\right)e^{-\gamma_{01}z},$$

$$\dot{H}_\rho = -\frac{\gamma_{01}}{k_c}\dot{A}_{01}J_0'\left(\nu_{01}\frac{\rho}{a}\right)e^{-\gamma_{01}z},$$

$$\dot{H}_z = \dot{A}_{01}J_0\left(\nu_{01}\frac{\rho}{a}\right)e^{-\gamma_{01}z}.$$

Из этих выражений получается, что проекции $\dot{E}_\varphi$ и $\dot{H}_\rho$ при $\dot{A}_0 = \text{const}$ с увеличением частоты растут, а проекция $\dot{H}_z$ по амплитуде не изменяется.

$\left(\text{Напомним, что } \gamma_{01} = i\sqrt{k^2 - \left(\frac{\nu_{01}}{a}\right)^2}.\right)$

Так как средняя мощность P, переносимая волной TE_{01}, определяется произведением компонент $\dot{E}_\varphi$ и $\dot{H}_\varphi$, то соблюдение условия $P = \text{const}$ при увеличении частоты приводит к уменьшению постоянной $\dot{A}_{01}$. Следовательно, проекция $\dot{H}_z$, и соответственно токи TE_{01} с ростом частоты колебаний уменьшаются. Вместе с ними уменьшаются и тепловые потери в стенках волновода, несмотря на рост поверхностного сопротивления.

На рис. 10.25 построены кривые изменения коэффициентов затухания некоторых типов волн в зависимости от отношения диаметра волновода к длине волны (при постоянной частоте, равной 3000 *Мгц*). Как видно из этих графиков, потери в волноводе уменьшаются с ростом длины окружности поперечного сечения. Такая же зависимость наблюдалась и для прямоугольного волновода (коэффициенты затухания уменьшаются с увеличением периметра поперечного сечения).

На высоких частотах наименьший коэффициент затухания в волноводе имеет волна TE_{01}. Вследствие этого представляется целесообразным использование ее для передачи энергии высокочастотных колебаний на большие рас-

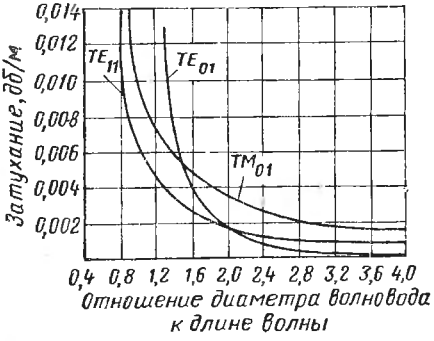


Рис. 10.25. Зависимость коэффициентов затухания различных волн от отношения диаметра волновода к длине волны.

стояния. Однако следует иметь в виду, что волна TE_{01} обладает значительной критической частотой. Кроме того, она весьма чувствительна к деформации волновода, ибо асимметрия стенок его приводит к появлению воли других типов. При этом аномальные свойства частотной зависимости потерь в волноводе могут быть утрачены.

11. Возбуждение волноводов

Познакомимся теперь с методами возбуждения электромагнитных волн в волноводах.

Количественные соотношения, определяющие электромагнитное поле в волноводе по заданным источникам, будут рассмотрены в следующем параграфе. Здесь же мы ограничимся качественным анализом этого вопроса.

Для выяснения условий возбуждения волноводов используем принцип взаимности. Исходя из этого принципа, можно утверждать, что конструкции устройств, предназначенных для возбуждения в волноводе волны определенного типа, или для извлечения энергии из волновода с волной того же типа, должны быть одинаковыми.

Итак, представим себе, что в волноводе движется волна определенного типа. Каким образом можно извлечь максимальную энергию из этого волновода?

Известны следующие способы решения подобной задачи.

1. В волноводе необходимо поместить прямой провод так, чтобы он находился в точке, где напряженность электрического поля имеет

максимальное значение, и ориентировать провод так, чтобы его ось совпадала с направлением напряженности электрического поля. При такой ориентации провода индуцируемая в нем э. д. с. будет максимальна.

2. В волноводе необходимо поместить рамочную антенну (виток), ориентировав ее так, чтобы нормаль к плоскости рамки совпала с направлением вектора напряженности магнитного поля. При этом рамку следует расположить там, где нормальная к ее плоскости напряженность магнитного поля имеет максимальное значение.

Приведенные способы обеспечат извлечение из волновода максимальной мощности, если сопротивление нагрузки, кроме того, согласовано с источником энергии (волноводом).

Исходя из вышеизложенного и основываясь на принципе взаимности, приходим к следующим правилам возбуждения в волноводе волны того или иного типа.

1. Необходимо установить структуру поля волны, которую желательно возбудить.

2. Для возбуждения волны в волновод можно поместить проводник или систему проводников с током, расположив их вдоль направления вектора напряженности электрического поля в тех точках, где это поле должно иметь максимальное значение.

3. При возбуждении рамкой последнюю следует поместить в волноводе, там, где напряженность магнитного поля должна быть максимальна. Плоскость рамки необходимо ориентировать перпендикулярно силовым линиям $\overline{H}$.

Заметим, что при применении нескольких проводов, помещенных в разных точках поля, надо, исходя из структуры поля возбуждаемой волны, выбрать фазы токов, текущих в проводниках, так, чтобы они соответствовали фазам напряженности поля в этих точках.

Перечисленные выше способы осуществления связи генератора (или нагрузки) с волноводом не являются единственно возможными. Возбуждение волноводов и извлечение энергии из них может осуществляться также через отверстия в стенках. Подробнее этот способ будет рассмотрен в § 13 данной главы.

На рис. 10.26, *а* и *б* приведен пример возбуждения волны TE_{10} в прямоугольном волноводе. Элементом связи здесь является штырь, расположенный в точке, где напряженность электрического поля волны TE_{10} должна иметь максимальное значение. Конструктивно этот штырь является продолжением внутреннего провода коаксиальной линии, присоединенной с другой стороны к генератору.

Обычно волновод на одном конце закрывается проводящей стенкой. Благодаря этому передача энергии происходит только в одну сторону. Величина мощности, отдаваемой источником в волновод, как будет показано в следующем параграфе, зависит от расстояния между возбуждающим элементом и закрытым концом волновода.

На рис. 10.27 показано устройство для возбуждения волны TE_{10} в прямоугольном волноводе с элементом связи в виде витка.

Способы возбуждения волн высших порядков в прямоугольном волноводе изображены на рис. 10.28. Стрелками указаны направления токов в проводах, выбранные соответственно фазовой структуре возбуждаемого поля.

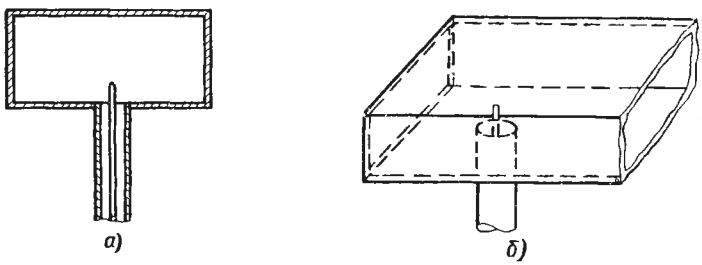
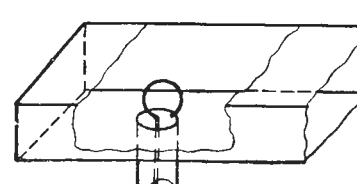


Рис. 10.26. Возбуждение волны TE_{10} в прямоугольном волноводе с помощью штыря:
а — поперечное сечение волновода; *б* — вид сбоку.

Возбуждение волн в круглом волноводе можно осуществить с помощью тех же устройств, что и в прямоугольном волноводе (рис. 10.29).

Несколько по-иному обстоит дело с волной TE_{01}, которая, как известно, не имеет аналога среди волн прямоугольного волновода. На практике волну такого типа можно получить, например, путем

Рис. 10.27. Возбуждение волны TE_{10} в прямоугольном волноводе с помощью витка.



постепенной трансформации прямоугольного волновода с волной TE_{10} в круглый (рис. 10.30). Как видно из этого рисунка, прямоугольный волновод сначала переходит в секторный, а затем в круглый с волной TE_{01}. Таким образом, здесь мы имеем, в сущности, уже не возбуждение, а преобразование типов волн и волноводов.

В приведенных выше примерах элементы связи способны извлекать энергию, а следовательно, и возбуждать волны не только того типа, для которого они специально предназначены, но и множество волн (полей) других типов. Так, например, элемент, изображенный на рис. 10.26, может извлекать энергию и возбуждать любые волны TE_{mn}, где m — нечетное число, и т. п.

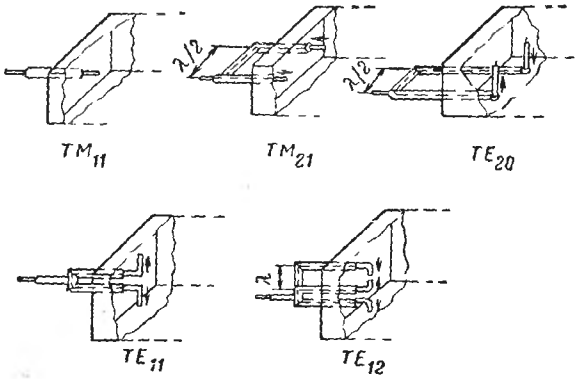


Рис. 10.28. Возбуждение волн высших порядков в прямоугольном волноводе.

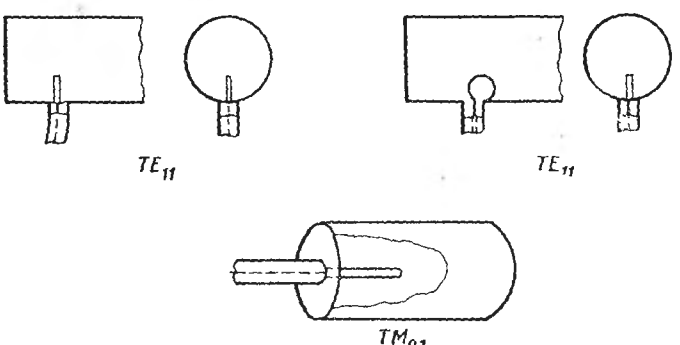


Рис. 10.29. Возбуждение волн в круглом волноводе.

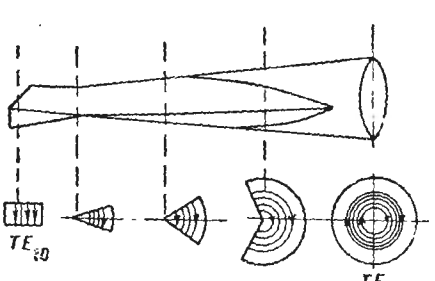


Рис. 10.30. Переход от прямоугольного волновода с волной TE_{10} к круглому с волной TE_{01}.

Таким образом, мы приходим к выводу, что возбуждающий элемент создает в волноводе множество полей различных типов. Более того, мы можем утверждать, что возбудить в волноводе поле только одного типа, очевидно, нельзя.

В самом деле, возбуждение поля связано с введением в волновод источника. Значит, поле в волноводе должно удовлетворять граничным условиям не только на стенках волновода, но и в точках, где находится источник. Ясно, что поле одного типа удовлетворить последнему требованию не может. Для этого потребуется совокупность множества типов полей, которые и образуют в волноводе результирующее поле сложной конфигурации.

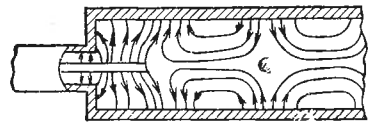


Рис. 10.31. Структура поля в круглом волноводе при возбуждении в нем волны TM_{10} штырем.

Если размеры поперечного сечения волновода таковы, что из множества типов полей лишь одно, с наименьшей критической частотой, может распространяться в волноводе, то все остальные поля будут затухающими. Естественно, такие поля в переносе энергии по волноводу не участвуют, ибо они имеют чисто колебательный характер. По мере удаления от источника напряженности затухающих полей убывают. Стало быть, начиная с некоторого расстояния от источника мы будем иметь фактически одну незатухающую волну.

На рис. 10.31 показана структура поля, образующегося в круглом волноводе при возбуждении волны TM_{01} штырем. Из рисунка видно, что вблизи штыря поле имеет сложную структуру, а затем оно постепенно переходит в поле TM_{01}.

В тех случаях, когда в волноводе возбуждаются волны, имеющие не наименьшие критические частоты, необходимо принимать меры, исключающие появление других типов волн. Так, например, при возбуждении волны TE_{20} в прямоугольном волноводе необходимо подавить волну TE_{10}. Если волна TE_{20} возбуждается способом, показанным на рис. 10.28, то штыри с токами в возбуждающем устройстве должны представлять собой взаимные электрические изображения относительно вертикальной плоскости, проходящей посредине поперечного сечения волновода. При выполнении этого требования поля TE_{10}, создаваемые штырями, будут взаимно уничтожаться.

12. Расчет электромагнитного поля в волноводе по заданным источникам

Перейдем теперь к теоретическому анализу возбуждения волноводов.

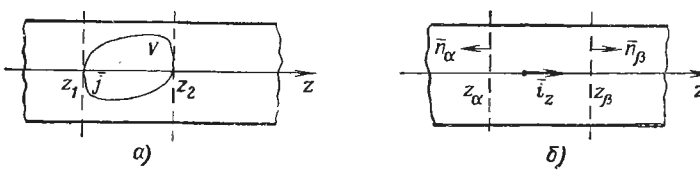
Определение электромагнитного поля в волноводе по заданным источникам сводится к решению системы уравнений Максвелла

в области, ограниченной идеально проводящими стенками, при условии, что E_{tg} на этих стенках равна нулю.

Впервые подобная задача для одного частного случая рассматривалась С. А. Шелкуновым. Затем она была решена в общем виде советскими учеными Г. В. Кисунько, А. А. Самарским и Н. Л. Тихоновым и др.

Пусть в бесконечном волноводе источники поля находятся в области V, определенной на интервале $z_1 \leqslant z \leqslant z_2$ (рис. 10.32, *а*).

Руководствуясь ранее изложенными соображениями, представим поле в области, где нет токов и зарядов, т. е. слева от плоскости $z = z_1$ и справа от плоскости $z = z_2$, в виде совокупности собствен-



а) *б)*

Рис. 10.32. К расчету поля в волноводе по заданным источникам:

а — волновод с источниками в области V; *б* — волновод с источниками, удаленными на бесконечность.

ных поперечно-электрических и поперечно-магнитных волн. Совершенно ясно, что справа от плоскости $z = z_2$ волны будут распространяться в положительном направлении оси z, а слева от плоскости $z = z_1$ — в противоположном, отрицательном направлении.

В соответствии с этим для области $z \geqslant z_2$ напишем:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\bar{E}} &= \sum_p \dot{A}_p \dot{\bar{E}}_p, \\ \dot{\bar{H}} &= \sum_p \dot{A}_p \dot{\bar{H}}_p. \end{aligned}\right\} \tag{10.118}$$

Здесь p — индекс, определяющий тип поля в волноводе (в общем случае под p следует понимать два индекса и осуществлять суммирование по обоим индексам); $\dot{\bar{E}}_p$, $\dot{\bar{H}}_p$ — комплексные векторы поперечно-электрического или поперечно-магнитного поля p-го типа с амплитудным множителем, равным единице.

Для области $z \leqslant z_1$ будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\bar{E}} &= \sum_p \dot{A}_{-p} \dot{\bar{E}}_{-p}, \\ \dot{\bar{H}} &= \sum_p \dot{A}_{-p} \dot{\bar{H}}_{-p}. \end{aligned}\right\} \tag{10.119}$$

Знак «минус» здесь обозначает волну, распространяющуюся в отрицательном направлении оси z.

Для определения неизвестных коэффициентов $\dot{A}_p$ используем лемму Лоренца:

$$\int_S [(\dot{\bar{E}}_1 \times \dot{\bar{H}}_2) - (\dot{\bar{E}}_2 \times \dot{\bar{H}}_1)\,\bar{n}\,dS] = \int_V (\dot{\bar{j}}_{1\text{ст}}\,\dot{\bar{E}}_2 - \dot{\bar{j}}_{2\text{ст}}\,\dot{\bar{E}}_1)\,dV$$

(см. § 7 гл. V). Применим эту лемму к электромагнитному полю в области, ограниченной участком боковой поверхности $S_б$ волновода и плоскостями $z = z_1$ и $z = z_2$ (рис. 10.32, *а*).

Будем считать, что поле $\dot{\bar{E}}_1$, $\dot{\bar{H}}_1$ представляет собой искомое электромагнитное поле $\dot{\bar{E}}, \dot{\bar{H}}$, возбуждаемое в волноводе заданными источниками, т. е.

$$\dot{\bar{E}}_1 = \dot{\bar{E}}, \quad \dot{\bar{H}}_1 = \dot{\bar{H}} \quad \text{и} \quad \dot{\bar{j}}_{1\text{ст}} = \dot{\bar{j}},$$

а поле $\dot{\bar{E}}_2, \dot{\bar{H}}_2$ есть вспомогательное собственное поле поперечно электрического или поперечно-магнитного типа, т. е.

$$\dot{\bar{E}}_2 = \dot{\bar{E}}_{\pm q}, \quad \dot{\bar{H}}_2 = \dot{\bar{H}}_{\pm q},$$

причем $\dot{\bar{j}}_2 = 0$.

Выбирая в качестве вспомогательного поле $\dot{\bar{E}}_{-q}$, $\dot{\bar{H}}_{-q}$, а затем поле $\dot{\bar{E}}_q$, $\dot{\bar{H}}_q$, получим:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{S_{01}} [(\dot{\bar{E}} \times \dot{\bar{H}}_{-q}) - (\dot{\bar{E}}_{-q} \times \dot{\bar{H}})]\bar{n}_1\,dS + \int_{S_{02}} [(\dot{\bar{E}} \times \dot{\bar{H}}_{-q}) - \\
&- (\dot{\bar{E}}_{-q} \times \dot{\bar{H}})]\bar{n}_2\,dS = \int_V \dot{\bar{j}}\,\dot{\bar{E}}_{-q}\,dV; \\
&\int_{S_{01}} [(\dot{\bar{E}} \times \dot{\bar{H}}_q) - (\dot{\bar{E}}_q \times \dot{\bar{H}})]\bar{n}_1 dS + \int_{S_{02}} [(\dot{\bar{E}} \times \dot{\bar{H}}_q) - \\
&- (\dot{\bar{E}}_q \times \dot{\bar{H}})]\bar{n}_2 dS = \int_V \dot{\bar{j}}\,\dot{\bar{E}}_q\,dV.
\end{aligned}\right\} \qquad (10.120)$$

В этих выражениях интегралы по поверхности $S_б$ волновода отсутствуют, так как касательные составляющие вектора $\dot{\bar{E}}$ искомого поля и вспомогательных полей здесь равны нулю.

Подставим в выражения (10.120) значения векторов $\dot{\overline{E}}$ и $\dot{\overline{H}}$ из равенств (10.118) и (10.119). В результате будем иметь

$$\int\limits_{S_{01}}\left[\left(\sum_p \dot{A}_{-p}\,\dot{\overline{E}}_{-p}\times\dot{\overline{H}}_{-q}\right)-\left(\dot{\overline{E}}_{-q}\times\sum_p \dot{A}_{-p}\,\dot{\overline{H}}_{-p}\right)\right]\overline{n}_1\,\overline{dS}+$$

$$+\int\limits_{S_{02}}\left[\left(\sum_p \dot{A}_p\,\dot{\overline{E}}_p\times\dot{\overline{H}}_{-q}\right)-\left(\dot{\overline{E}}_{-q}\times\sum_p \dot{A}_p\,\dot{\overline{H}}_p\right)\right]\overline{n}_2\,\overline{dS}=$$

$$=\int\limits_V \dot{\overline{j}}\,\dot{\overline{E}}_{-q}dV \quad \text{и т. д.} \tag{10.121}$$

Прежде чем перейти к преобразованию выражений последнего типа, познакомимся с одним важным свойством собственных полей в волноводе. С этой целью напишем лемму Лоренца для полей $\overline{E}_p$, $\overline{H}_p$ и $\dot{\overline{E}}_{p'}$, $\dot{\overline{H}}_{p'}$ в области, ограниченной произвольными плоскостями $z=z_\alpha$, $z=z_\beta$ и участком поверхности волновода (рис. 10 32, *б*).

Повторяя рассуждения, аналогичные предыдущим, получим

$$\int\limits_{S_{0\alpha}}\left[(\dot{\overline{E}}_p\times\dot{\overline{H}}_{p'})-(\dot{\overline{E}}_{p'}\times\dot{\overline{H}}_p)\right]\overline{n}_\alpha\,dS+$$

$$+\int\limits_{S_{0\beta}}\left[(\dot{\overline{E}}_p\times\dot{\overline{H}}_{p'})-(\dot{\overline{E}}_{p'}\times\dot{\overline{H}}_p)\right]\overline{n}_\beta\,dS=0. \tag{10.122}$$

Здесь $S_{0\alpha}$ и $S_{0\beta}$ — сечения волновода плоскостями $z=z_\alpha$ и $z=z_\beta$. Так как на $S_{0\alpha}$ орт $\overline{n}=-\overline{i}_z$, а на $S_{0\beta}$ он совпадает по направлению с $\overline{i}_z$, то из (10.122) имеем

$$\int\limits_{S0\alpha}\left[(\dot{\overline{E}}_p\times\dot{\overline{H}}_{p'})-(\dot{\overline{E}}_{p'}\times\dot{\overline{H}}_p)\right]\overline{i}_z\,dS=$$

$$=\int\limits_{S_{0\beta}}\left[(\dot{\overline{E}}_p\times\dot{\overline{H}}_{p'})-(\dot{\overline{E}}_{p'}\times\dot{\overline{H}}_p)\right]\overline{i}_z\,dS. \tag{10.123}$$

Отсюда вытекает, что интеграл

$$J_{pp'}=\int\limits_{S_0}\left[(\dot{\overline{E}}_p\times\dot{\overline{H}}_{p'})-(\dot{\overline{E}}_{p'}\times\dot{\overline{H}}_p)\right]\overline{i}_z\,dS$$

не должен зависеть от переменной z, ибо сечения $S_{0\alpha}$ и $S_{0\beta}$ были выбраны произвольно, и, стало быть, равенство (10.123) справедливо для любых $S_{0\alpha}$ и $S_{0\beta}$.

Предположим, что волна с индексом p (т. е. волна p) распространяется в положительном направлении оси z, а волна p' — в обратном направлении. Тогда поле $\overline{E}_p$, $\overline{H}_p$ будет характе-

ризоваться множителем $e^{-i\beta_p z}$, а поле $\dot{\vec{E}}_{-p'}$, $\dot{\vec{H}}_{-p'}$ — множителем $e^{-i\beta_{p'} z}$. В этом случае формально можно написать, что

$$J_{pp'} = J_{pp'}(0)\ e^{-i(\beta_p - \beta_{p'})z},$$

где $J_{pp'}(0)$ — значение интеграла при $z=0$. Следовательно, величина $J_{pp'}$ не будет зависеть от z, если $J_{pp'}(0)=0$, или $\beta_p=\beta_{p'}$.

Обычно в волноводах различным типам полей соответствуют разные волновые числа. Однако в некоторых случаях это условие нарушается, и волны с разными индексами p и p' могут иметь одинаковые значения β_p и $\beta_{p'}$. Такие типы собственных полей получили название вырожденных.

В дальнейшем мы будем полагать, что $\beta_p \neq \beta_{p'}$, если $p \neq p'$.

С учетом изложенного интеграл $J_{pp'}$ для волн, распространяющихся по оси z в противоположных направлениях, будет равен

$$J_{pp'} = \int_{S_0} \left[\left(\dot{\vec{E}}_p \times \dot{\vec{H}}_{-p'}\right) - \left(\dot{\vec{E}}_{-p'} \times \dot{\vec{H}}_p\right)\right] \vec{i}_z\, dS = 0;\ p \neq p'. \qquad (10.124)$$

Аналогичным путем можно показать, что для волн, движущихся вдоль оси z в одинаковых направлениях,

$$J_{pp'} = \int_{S_0} \left[\left(\dot{\vec{E}}_{\pm p} \times \dot{\vec{H}}_{\pm p'}\right) - \left(\dot{\vec{E}}_{\pm p'} \times \dot{\vec{H}}_{\pm p}\right)\right] \vec{i}_z\, dS = 0, \qquad (10.125)$$

даже если $p = p'$.

Соотношения (10.124), (10.125) представляют собой условия ортогональности собственных волн в волноводе.

Будем считать, что волны, движущиеся в отрицательном направлении оси z, имеют отрицательные волновые числа: $\beta_{-p} = -\beta_p$. Тогда соотношения (10.124) и (10.125) можно объединить в одно равенство*)

$$\int_{S_0} \left[\left(\dot{\vec{E}}_p \times \dot{\vec{H}}_l\right) - \left(\dot{\vec{E}}_l \times \dot{\vec{H}}_p\right)\right] \vec{i}_z\, dS = 0 \text{ при } p \neq -l. \qquad (10.126)$$

Используем условия ортогональности волн для преобразования выражений (10.121). В результате будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} \dot{A}_q \int_{S_{02}} \left[\left(\dot{\vec{E}}_q \times \dot{\vec{H}}_{-q}\right) - \left(\dot{\vec{E}}_{-q} \times \dot{\vec{H}}_q\right)\right] \vec{i}_z\, dS &= -\int_V \dot{\vec{j}}\, \dot{\vec{E}}_{-q}\, dV, \\ \dot{A}_{-q} \int_{S_{01}} \left[\left(\dot{\vec{E}}_{-q} \times \dot{\vec{H}}_q\right) - \left(\dot{\vec{E}}_q \times \dot{\vec{H}}_{-q}\right)\right] \vec{i}_z\, dS &= \int_V \dot{\vec{j}}\, \dot{\vec{E}}_q\, dV. \end{aligned}\right\} \qquad (10.127)$$

*) Из приведенных выше соотношений ортогональности можно также получить равенство вида

$$\int_{S_0} \left[\left(\dot{\vec{E}}_p \times \dot{\vec{H}}^*_l\right)\right] \vec{i}_z dS = 0 \text{ при } |p| \neq |l|.$$

Анализируя полученные выражения, можно заметить, что продольные токи ($\dot{\bar{j}} = \dot{\bar{j}}_z$) возбуждают в волноводе только поперечно-магнитные волны, так как в этом случае $(\dot{\bar{j}}\,\dot{\bar{E}}_{\pm q\text{ТЕ}}) = 0$, и, следовательно, $(\dot{A}_{\pm q})_{\text{ТЕ}} = 0$. Поперечные же токи будут возбуждать волны обоих типов. Рассмотрение этих выражений подтверждает также и другие качественные выводы относительно способов возбуждения электромагнитных волн, полученные в предыдущем параграфе.

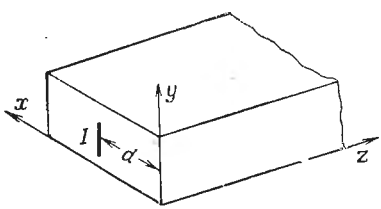


Рис. 10.33. К расчету поля ТЕ_{10} в прямоугольном волноводе, возбуждаемом прямолинейным проводником с током.

Применим выражения (10.127) к расчету электромагнитного поля волны ТЕ_{10}, возбуждаемой в прямоугольном волноводе линейным поперечным током, направленным по оси y (рис. 10.33).

В этом случае:

$$\dot{\bar{E}}_{\pm q} = \dot{\bar{E}}_{\pm 10} = -i\omega\mu\,\frac{a}{\pi}\sin\frac{\pi}{a}x\,e^{\mp i\beta_{10}z}\,\bar{i}_y,$$

$$\dot{\bar{H}}_{\pm q} = \dot{\bar{H}}_{\pm 10} = \pm i\beta_{10}\,\frac{a}{\pi}\sin\frac{\pi}{a}x\,e^{\mp i\beta_{10}z}\,\bar{i}_x + \cos\frac{\pi}{a}x\,e^{\pm i\beta_{10}z}\,\bar{i}_z.$$

(Верхний знак здесь соответствует волне, движущейся вдоль оси z, а нижний — волне, движущейся в противоположном направлении.) Тогда

$$\left(\dot{\bar{E}}_{-q}\times\dot{\bar{H}}_q\right)\bar{i}_z = \left(-i\omega\mu\,\frac{a}{\pi}\sin\frac{\pi}{a}x\,e^{i\beta_{10}z}\,\bar{i}_y\times\right.$$

$$\left.\times\, i\beta_{10}\,\frac{a}{\pi}\sin\frac{\pi}{a}x\,e^{-i\beta_{10}z}\,\bar{i}_x\right)\bar{i}_z = -\omega\mu\beta_{10}\,\frac{a^2}{\pi^2}\sin^2\frac{\pi}{a}x;$$

$$\left(\dot{\bar{E}}_q\times\dot{\bar{H}}_{-q}\right)\bar{i}_z = \omega\mu\beta_{10}\,\frac{a^2}{\pi^2}\sin^2\frac{\pi}{a}x.$$

Так как возбуждение волновода осуществляется линейным током, то от объемных интегралов в правых частях выражений (10.127) необходимо перейти к линейным

$$\int_V \dot{\bar{j}}\,\dot{\bar{E}}_{\pm q}\,dV \to \int_L \dot{I}\,\dot{\bar{E}}_{\pm q}\,\overline{dl}.$$

Предположим, что возбуждающий элемент находится в плоскости $z = 0$, причем $x = d$ и $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$. При этих условиях

$$\int_L \dot{I}\,\dot{\bar{E}}_q\,\bar{dl} = \int_{y_1}^{y_2} \dot{I}\,\dot{\bar{E}}_{10}\,\bar{i}_y\,dy = -i\int_{y_1}^{y_2} \dot{I}_{(y)}\,\omega\mu\,\frac{a}{\pi} \times$$

$$\times \sin\frac{\pi}{a}d\,dy = -i\omega\mu\,\frac{a}{\pi}\,\dot{I}_{\text{вх}}h_\partial \sin\frac{\pi}{a}d,$$

где $\dot{I}(y)$—функция распределения тока по источнику, $\dot{I}_{\text{вх}}$—комплексная амплитуда тока в точках возбуждения проводника; h_∂—так называемая действующая длина источника, определяемая из условия:

$$I_{\text{вх}}\,{}_m h_\partial = \int_{y_1}^{y_2} I(y)\,dy.$$

Подставляя промежуточные результаты в выражения (10.127) и проведя несложные вычисления, получим

$$\dot{A}_{-10} = \dot{A}_{10} = -i\,\frac{\dot{I}_{\text{вх}}\,h_\partial}{\frac{a}{\pi}\beta_{10}S_0}\sin\frac{\pi}{a}d; \qquad S_0 = ab. \tag{10.128}$$

Выше уже говорилось, что один из концов волновода обычно «замкнут» накоротко проводящей плоскостью. Для того чтобы рассчитать поле в таком полубесконечном волноводе, можно использовать метод электрических изображений.

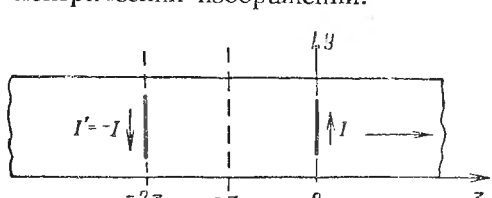


Рис. 10.34. К расчету поля TE_{10} в прямоугольном волноводе с отражающей стенкой.

Пусть проводящая плоскость, закорачивающая прямоугольный волновод, находится в точках $z = -z_0$, а проводник с током по-прежнему находится в плоскости $z = 0$. Тогда, в соответствии с методом электрических изображений, исходная система будет эквивалентна системе, изображенной на рис. 10.34.

Электромагнитное поле в волноводе (точки $z \geqslant 0$) теперь можно найти как сумму полей реального и фиктивного источников, причем амплитуда волны TE_{10} реального источника будет определяться

выражением (10.128), а амплитуду волны фиктивного источника нетрудно рассчитать, используя равенства (10.127).

Нас будет интересовать волна, распространяющаяся от фиктивного источника в положительном направлении оси z. Обозначим комплексную амплитуду этой волны $\dot{A}'_{10}$. Тогда, учитывая, что

$$\dot{I}'(y) = -\dot{I}(y),$$

$$\int_{y_1}^{y_2} \dot{I}'(y)\,\dot{\bar{E}}_{-10}\,\bar{i}_y\,dy = i\omega\mu\,\frac{a}{\pi}\,\dot{I}_{\text{вх}}h_\partial \sin\frac{\pi}{a}\,d\,e^{-i2\beta_{10}z_0},$$

получим

$$\dot{A}'_{10} = i\,\frac{\dot{I}_{\text{вх}}h_\partial}{\frac{a}{\pi}\beta_{10}S_0}\sin\frac{\pi}{a}\,d\,e^{-i2\beta_{10}z_0}. \qquad (10.129)$$

Комплексная амплитуда результирующей волны TE_{10} при $z > z_0$ будет равна

$$(\dot{A}_{10})_{\text{рез}} = \dot{A}_{10} + \dot{A}'_{10} = -i\,\frac{\dot{I}_{\text{вх}}h_\partial}{\frac{a}{\pi}\beta_{10}S_0}\sin\frac{\pi}{a}\,d \times$$

$$\times\left(1 - e^{-i2\beta_{10}z_0}\right) = 2\,\frac{\dot{I}_{\text{вх}}h_\partial}{\frac{a}{\pi}\beta_{10}S_0}\sin\frac{\pi}{a}\,d\sin(\beta_{10}Z_0)\,e^{-i\beta_{10}z_0}. \qquad (10.130)$$

Определим мощность излучения рассматриваемого источника в полубесконечном волноводе. Если размеры волновода выбраны так, что характер бегущей волны имеет лишь поле TE_{10}, то мощность излучения будет равна среднему потоку мощности волны TE_{10} через поперечное сечение волновода. Для расчета этой мощности можно воспользоваться формулой (10.75).

Подставляя в (10.75) значение комплексной амплитуды поля из (10.130), получим

$$P = \frac{Z_0}{\sqrt{1-\left(\frac{f_{\text{кр}}}{f}\right)^2}}\,\frac{(\dot{I}_{\text{вх}}h_\partial)^2}{S_0}\sin^2\frac{\pi}{a}\,d\sin^2\beta_{10}z_0. \qquad (10.131)$$

Отсюда видно, что мощность, отдаваемая источником в волновод, зависит от расстояния z_0 между источником и отражающей стенкой на конце волновода. Если величина $z_0 = (2m+1)\lambda_{TE_{10}}/4$, где m — любое целое число, в том числе и нуль, то P, как следует из (10.131), имеет максимум. Физически подобный результат объясняется тем, что в данном случае прямая волна, излучаемая возбуждающим элементом, и волна, отраженная от закрытого конца волновода, складываются при $z \geqslant 0$ в фазе.

Если же $z_0 = m\,\lambda_{TE_{10}}/2$, то $P = 0$. В этом случае обе волны при $z \geqslant 0$ складываются в противофазе. Но так как амплитуды их одинаковы, то суммарное поле TE_{10} справа от источника исчезает.

Следует также указать, что величина P зависит от положения источника на оси x. Так, при $d = a/2$ мощность будет иметь наибольшее значение.

Если частота колебаний $f = f_{кр}$, то P согласно (10.131) обращается в нуль.

В заключение определим сопротивление излучения источника в волноводе. Последнее находится из условия

$$P = \frac{1}{2}\, I_{вхm}^2\, R_\Sigma,$$

откуда

$$R_\Sigma = \frac{2Z_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}} \frac{h_\partial^2}{S_0} \sin^2 \frac{\pi}{a} d \sin^2 \beta_{10} Z_0. \qquad (10.132)$$

Из выражения (10.132) следует, что R_Σ будет иметь максимальное значение, если $d = \frac{a}{2}$, а $z_0 = (2m+1)\frac{\lambda_{TE_{10}}}{4}$.

Как и следовало ожидать, сопротивление излучения источника в волноводе отличается от аналогичной величины, рассчитанной для свободного пространства [ср., например, (10.132) с выражением (8.48), определяющим сопротивление излучения электрического диполя при $l = h_\partial$]. Это отличие объясняется тем, что электромагнитное поле в волноводе имеет совершенно другую структуру по сравнению с полем в свободном пространстве.

13. Возбуждение волноводов через щели

Выше уже говорилось, что возбуждение волноводов, а также извлечение энергии из них можно осуществить при помощи отверстий, которые часто имеют форму узких щелей. Конечно, не каждая щель в волноводе позволяет эффективно возбудить поле или извлечь энергию. Так же как и при возбуждении волновода проводником с током, щель должна быть определенным образом ориентирована относительно силовых линий поля.

Чтобы установить способы возбуждения поля через щель, мы снова воспользуемся принципом взаимности. Согласно этому принципу щель, эффективно излучающая электромагнитное поле из волновода в пространство, может быть использована и для возбуждения в волноводе поля аналогичного типа.

В дальнейшем нас будут интересовать два случая:

1) щель прорезана параллельно силовым линиям тока, наводимого в стенках волной данного типа (рис. 10.35, *а*);

2) щель прорезана перпендикулярно силовым линиям тока (рис. 10.35, *б*).

Нетрудно убедиться, что в первом случае щель почти не «прерывает» и, следовательно, не искажает силовых линий тока (рис. 10.35, *а*). Поэтому электромагнитное поле в волноводе будет

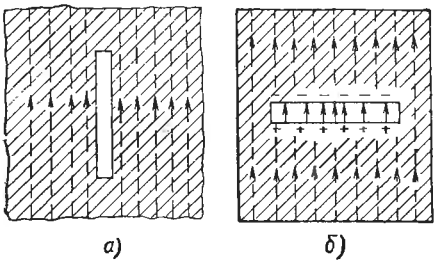


Рис. 10.35. Щели в проводящей поверхности:
а — неизлучающая щель; *б* — излучающая щель.

почти таким же, как и поле обычного, невозмущенного волновода. А это означает, что излучения электромагнитных волн через такую щель практически нет.

Во втором случае щель сильно искажает электромагнитное поле в волноводе, так как она «прерывает» силовые линии тока. Можно полагать, что теперь на краях щели как бы скапливаются электрические заряды противоположных знаков, которые возбуждают в щели интенсивное электрическое поле (рис. 10.35, *б*).

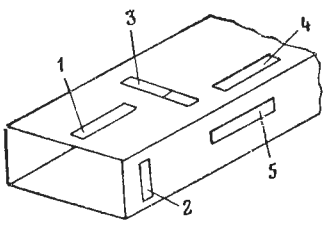


Рис. 10.36. Неизлучающие (*1*, *2*) и излучающие (*3*, *4*, *5*) щели в прямоугольном волноводе с волной TE_{10}.

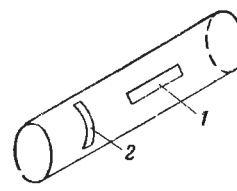


Рис. 10.37. Излучающая (*1*) и неизлучающая (*2*) щели в круглом волноводе с волной TM_{01}.

Под влиянием образующегося на щели напряжения по внешней поверхности волновода будут протекать электрические токи. Они-то и создадут во внешнем пространстве электромагнитное поле.

Таким образом, для извлечения электромагнитного поля из волновода или для возбуждения в волноводе поля требуемого типа щель необходимо прорезать перпендикулярно силовым линиям

тока (вдоль силовых линий магнитного поля). Разумеется, при возбуждении волновода на щели с помощью внешнего источника должно быть создано электрическое поле, силовые линии которого продолжали бы линии тока.

На рис. 10.36 изображен прямоугольный волновод с волной TE_{10}, в стенках которого сделаны щели различных типов. В соответствии с вышеизложенным можно утверждать, что щели *1—2* не излучают электромагнитного поля из волновода, в то время как щели *3*, *4*, *5* являются эффективными источниками поля (см. рис. 10.17 с изображением силовых линий тока в волноводе с волной TE_{10}).

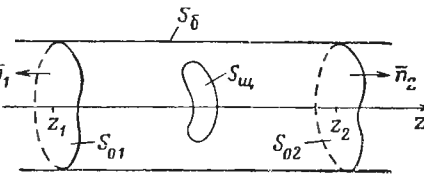


Рис. 10.38. К расчету поля в волноводе, возбуждаемого через отверстие.

На рис. 10.37 изображены излучающая *1* и неизлучающая *2* щели в круглом волноводе с волной TM_{01}.

При возбуждении волновода через щель в нем, как обычно, появляется множество полей разных типов. Однако, если возбуждаемая волна имеет минимальную критическую частоту, путем правильного выбора поперечных размеров волновода можно добиться, чтобы все другие поля были затухающими.

Перейдем теперь к расчету поля в волноводе. Для этого используем методику предыдущего параграфа.

Будем полагать, что сторонних токов в волноводе нет и что распределение поля на щели известно. При таких условиях лемма Лоренца для области, ограниченной плоскостями $z = z_1$, $z = z_2$ и участком боковой поверхности волновода $S_б$ (рис. 10.38), принимает вид

$$\int_S \left[\left(\dot{\bar{E}}_1 \times \dot{\bar{H}}_2\right) - \left(\dot{\bar{E}}_2 \times \dot{\bar{H}}_1\right)\right] \bar{n}\, dS = 0,$$

здесь

$$S = S_{01} + S_{02} + S_б.$$

Пусть, как и прежде, $\dot{\bar{E}}_1 = \dot{\bar{E}}$, $\dot{\bar{H}}_1 = \dot{\bar{H}}$, где $\dot{\bar{E}}$ и $\dot{\bar{H}}$ — векторы искомого поля в волноводе, а $\dot{\bar{E}}_2 = \dot{\bar{E}}_{\pm q}$ и $\dot{\bar{H}}_2 = \dot{\bar{H}}_{\pm q}$, где $\dot{\bar{E}}_{\pm q}$ и $\dot{\bar{H}}_{\pm q}$ — векторы собственного поля q-го типа. С учетом этих соотношений получим

$$\int_S \left[\left(\dot{\bar{E}} \times \dot{\bar{H}}_{\pm q}\right) - \left(\dot{\bar{E}}_{\pm q} \times \dot{\bar{H}}\right)\right] \bar{n}\, dS = 0. \qquad (10.133)$$

Следует подчеркнуть, что интеграл по $S_б$ теперь уже не равен нулю, так как на отверстии $\dot{\bar{E}}_{tg} = \dot{\bar{E}}_0$, где $\dot{\bar{E}}_0$ — заданная функция точки наблю-

дения. В самом деле, принимая во внимание, что на $S_б$ векторное произведение $\bar{n} \times \dot{\bar{E}}_{\pm q} = 0$, будем иметь

$$\int\limits_{S_б} \left[(\dot{\bar{E}}_1 \times \dot{\bar{H}}_2) - (\dot{\bar{E}}_2 \times \dot{\bar{H}}_1)\right] \bar{n}\, dS = \int\limits_{S_б} \left[(\dot{\bar{E}} \times \dot{\bar{H}}_{\pm q}) - (\dot{\bar{E}}_{\pm q} \times \dot{\bar{H}})\right] \bar{n}\, dS =$$

$$= \int\limits_{S_б} \left[(\dot{\bar{E}} \times \dot{\bar{H}}_{\pm q})\, \bar{n}\right] dS = \int\limits_{S_щ} (\bar{n} \times \dot{\bar{E}}_0)\, \dot{H}_{\pm q}\, dS, \qquad (10.134)$$

здесь $S_щ$ — поверхность отверстия, являющаяся геометрическим продолжением боковой поверхности волновода.

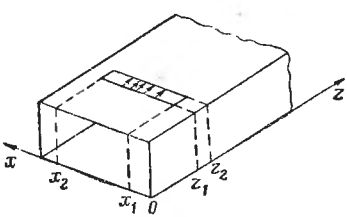


Рис. 10.39. К расчету поля TE_{10} в прямоугольном волноводе, возбуждаемом поперечной щелью.

Подставляя далее значения $\dot{\bar{E}}$ и $\dot{\bar{H}}$ из разложений (10.118) и (10.119) в равенство (10.133) и учитывая (10.134), получим следующие уравнения для комплексных амплитуд электромагнитных волн, возбуждаемые в волноводе:

$$\left.\begin{aligned} \dot{A}_q \int\limits_{S_{02}} \left[(\dot{\bar{E}}_q \times \dot{\bar{H}}_{-q}) - (\dot{\bar{E}}_{-q} \times \dot{\bar{H}}_q)\right] \bar{i}_z\, dS &= \int\limits_{S_щ} (\bar{n} \times \dot{\bar{E}}_0)\, \dot{\bar{H}}_{-q}\, dS, \\ \dot{A}_{-q} \int\limits_{S_{01}} \left[(\dot{\bar{E}}_{-q} \times \dot{\bar{H}}_q) - (\dot{\bar{E}}_q \times \dot{\bar{H}}_{-q})\right] \bar{i}_z\, dS &= \int\limits_{S_щ} (\bar{n} \times \dot{\bar{E}}_0)\, \dot{H}_q\, dS. \end{aligned}\right\} \qquad (10.135)$$

Применим соотношения (10.135) к расчету поля волны TE_{10}, возбуждаемой в прямоугольном волноводе поперечной щелью (рис. 10.39).

Используя выражения для поперечных проекций векторов $\dot{\bar{E}}$ и $\dot{\bar{H}}$ волны TE_{10}, находим, что

$$\int\limits_{S_{01}} \left[(\dot{\bar{E}}_{-q} \times \dot{\bar{H}}_q) - (\dot{\bar{E}}_q \times \dot{\bar{H}}_{-q})\right] \bar{i}_z\, dS = -\omega\mu\beta_{10} \frac{a^2}{\pi^2} S_0.$$

Рассмотрим далее выражение

$$\int\limits_{S_щ} (\bar{n} \times \dot{\bar{E}}_0)\, \dot{\bar{H}}_q\, dS.$$

Так как на поверхности щели $\bar{n} = \bar{i}_y$, а $\dot{\bar{E}}_0 = \bar{i}_z \dot{E}_0(x, z)$, то

$$\int\limits_{S_щ} (\bar{n} \times \dot{\bar{E}}_0)\, \dot{\bar{H}}_q\, dS = \int\limits_{S_щ} \bar{i}_x\, \dot{\bar{H}}_q \dot{E}_0\, dS.$$

Если щель очень узкая, то функцию $\overline{i_x}\,\dot{H}_q = i\beta_{10}\frac{a}{\pi}\sin\frac{\pi}{a}x\,e^{-i\beta_{10}z}$ на интервале $z_1 \leqslant z \leqslant z_2$ можно считать постоянной, равной ее значению при $z = z_0 = z_1/2 + z_2/2$. Тогда

$$\int\limits_{S_{щ}} \overline{i_x}\,\dot{H}_q(x, z)\,\dot{E}_0(x, z)\,dS = \int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_{z_1}^{z_2} \overline{i_x}\,\dot{H}_q(x, z_0)\,\dot{E}_0(x, z)\,dx\,dz =$$

$$= \int\limits_{x_1}^{x_2} \overline{i_x}\,\dot{H}_q(x, z_0)\int\limits_{z_1}^{z_2}\dot{E}_0(x, z)\,dz\,dx.$$

Легко сообразить, что $\int\limits_{z_1}^{z_2}\dot{E}_0(x, z)\,dz = \dot{U}(x)$, где $\dot{U}(x)$ — комплексная амплитуда напряжения между корнями щели. Следовательно,

$$\int\limits_{S_{щ}} \overline{i_x}\,\dot{H}_q\,\dot{E}_0(x, z)\,dS = i\beta_{10}\frac{a}{\pi}\,e^{-i\beta_{10}z_0}\int\limits_{x_1}^{x_2}\dot{U}(x)\sin\frac{\pi}{a}x\,dx.$$

Используя, наконец, соотношения (10.135), будем иметь

$$\dot{A}_{-10} = -\frac{i\,e^{-i\beta_{10}z_0}}{\omega\mu\frac{a}{\pi}S_0}\int\limits_{x_1}^{x_2}\dot{U}(x)\sin\frac{\pi}{a}x\,dx.$$

Мы уже говорили ранее, что в узкой щели, настроенной в резонанс, напряжение вдоль ее длины меняется по синусоидальному закону аналогично электрическому току в тонком вибраторе. Следовательно, для полуволновой щели, расположенной посредине широкой стороны волновода,

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_0\cos k\left(x - \frac{a}{2}\right);\quad \frac{a}{2} - \frac{\lambda}{4} \leqslant x \leqslant \frac{a}{2} + \frac{\lambda}{4}.$$

В соответствии с этим:

$$\int\limits_{x_1}^{x_2}\dot{U}_0\cos k\left(x - \frac{a}{2}\right)\cos\frac{\pi}{a}x\,dx = \int\limits_{\frac{a}{2}-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{a}{2}+\frac{\lambda}{4}}\dot{U}_0\cos k\left(x - \frac{a}{2}\right)\cos\frac{\pi}{a}x\,dx =$$

$$= 2\dot{U}_0\frac{k}{\beta_{10}^2}\cos\frac{\pi}{4}\frac{\lambda}{a},$$

$$\dot{A}_{-10} = -2i\dot{U}_0\frac{k}{\beta_{10}^2}\frac{\cos\frac{\pi}{4}\frac{\lambda}{a}}{\omega\mu\frac{a}{\pi}S_0}e^{-i\beta_{10}z_0}.$$

14. Замедляющие системы

Перейдем к изучению свойств электромагнитных полей в замедляющих системах. Мы познакомимся с двумя видами таких систем — ребристой, или гребенчатой, структурой и диэлектрическим волноводом.

Ребристая структура

Рассмотрим замедляющую систему, состоящую из множества тонких идеально проводящих пластин высотой l, расположенных перпендикулярно проводящей плоскости $x = -l$ на одинаковых расстояниях друг от друга (рис. 10.40).

Будем полагать, что элементы, образующие эту систему, имеют бесконечную протяженность по оси y, а волны в полупространстве $x \geqslant 0$ распространяются вдоль оси z. Естественно, при таких условиях можно считать, что проекции векторов искомого поля не зависят от координаты y.

В области $-l \leqslant x \leqslant 0$ совокупность двух соседних ребер можно рассматривать как линию, состоящую из двух параллельных проводящих плоскостей. Если расстояние между соседними реб-

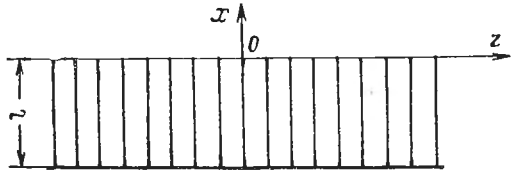


Рис. 10.40. К расчету поля в ребристой структуре.

рами много меньше длины волны, то в каждой такой линии преобладающее значение будет иметь поле поперечного типа, ибо все другие поля быстро затухают по мере удаления от начала линии в точке $x = 0$*).

Стало быть, приближенно можно полагать, что в промежутках между ребрами замедляющей системы существуют только поля поперечного типа. Векторы $\overline{E}$ и $\overline{H}$ этих полей направлены соответственно вдоль осей z и y. По аналогии с выражениями (10.13) для проекций $\dot{E}_z$ и $\dot{H}_y$ будем иметь:

$$\dot{E}_z = \frac{k}{\omega\varepsilon}\left(-\dot{A}\,e^{-ikx} + \dot{B}\,e^{ikx}\right), \quad \dot{H}_y = \dot{A}e^{-ikx} + \dot{B}\,e^{ikx}.$$

*) Очевидно, поле в промежутки между ребрами попадает из верхнего полупространства.

Знак «минус» перед коэффициентом $\dot{A}$ в выражении для $\dot{E}_z$ введен с тем, чтобы иметь нужное направление вектора Пойнтинга волны, движущейся в положительном направлении оси z.

По условию все линии, образующие ребристую структуру, замкнуты на конце. Следовательно, проекция $\dot{E}_z$ при $x = -l$ должна обращаться в нуль. Удовлетворяя этому условию, получим:

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_z &= i\frac{k}{\omega\varepsilon}\dot{A}_0 \sin k(x+l), \\ \dot{H}_y &= \dot{A}_0 \cos k(x+l). \end{aligned}\right\} \tag{10.136}$$

где $\dot{A}_0$ — постоянная величина.

Выражения (10.136), таким образом, приближенно определяют поле между любой парой ребер направляющей системы. Следует, однако, иметь в виду, что постоянная $\dot{A}_0$ в разных промежутках может принимать различные значения.

Во внешнем пространстве ($x \geqslant 0$) искомое поле будет, очевидно, поперечно-магнитным, ибо в плоскости $x = 0$ оно имеет проекцию $\dot{E}_z$, а направление оси z есть направление распространения волны.

Для расчета поля при $x \geqslant 0$ мы можем использовать формулы (10.4) и уравнение (10.5), которое перепишем еще раз

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_y}{\partial z^2} + k^2 \dot{H}_y = 0.$$

Приемлемое для нас решение этого уравнения запишем в виде

$$\dot{H}_y = \dot{B}_0 e^{-k_0 x} e^{-\gamma z}, \tag{10.137}$$

здесь $\dot{B}_0$ — постоянный коэффициент; γ — постоянная распространения, а

$$k_0^2 = -k^2 - \gamma^2.$$

Заметим, что выражение (10.137) не содержит второго слагаемого с множителем $e^{k_0 x}$, так как при $x \to \infty$ поле не должно обращаться в бесконечность (или не должно принимать форму волны, приходящей из бесконечности).

Подставляя значение $\dot{H}_y$ из (10.137) в формулы (10.5), получим:

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_x &= \frac{\gamma}{i\omega\varepsilon}\dot{B}_0 e^{-k_0 x} e^{-\gamma z}, \\ \dot{E}_z &= -\frac{k_0}{\omega\varepsilon}\dot{B}_0 e^{-k_0 x} e^{-\gamma z}, \\ \dot{H}_y &= \dot{B}_0 e^{-k_0 x} e^{-\gamma z}. \end{aligned}\right\} \tag{10.138}$$

Эти выражения можно использовать для приближенного представления поля в области $x \geqslant 0$ при условии, что ребра системы имеют очень малую толщину.

Чтобы найти постоянную распространения γ, необходимо установить связь между решениями (10.136) и (10.137) в плоскости $x = 0$. Известно, что при переходе из одной области в другую касательные составляющие векторов поля изменяются непрерывным образом. В соответствии с этим проекции $\dot{E}_z$ и $\dot{H}_y$ искомых полей в плоскости $x = 0$ при стремлении к ней сверху и снизу должны быть одинаковыми.

Из выражений (10.136) видно, что значения $\dot{E}_z$ и $\dot{H}_y$ в промежутках между ребрами не зависят от переменной z, лишь меняются при переходе от одного промежутка к другому. Вместе с тем $\dot{E}_z$ и $\dot{H}_y$ в равенствах (10.138) зависят от z как $e^{-\gamma z}$. Следовательно, выражения (10.136) и (10.137) не удовлетворяют условиям непрерывности касательных составляющих векторов $\dot{\overline{E}}$ и $\dot{\overline{H}}$.

Для приближенного решения задачи точные условия непрерывности придется заменить приближенными условиями. Так, можно потребовать, чтобы в плоскости $x = 0$ были равны отношения касательных составляющих векторов поля, т. е.

$$\left.\frac{\dot{E}_z}{\dot{H}_y}\right|_{x=0+} = \left.\frac{\dot{E}_z}{H_y}\right|_{x=0-}. \tag{10.139}$$

Физически это условие, как нетрудно понять, означает непрерывность характеристических сопротивлений сред на граничной поверхности.

Подставляя в (10.139) значения $\dot{E}_z$ и $\dot{H}_y$ из выражений (10.136), (10.138), будем иметь

$$k_0 = k \operatorname{tg} kl. \tag{10.140}$$

Учитывая далее, что $k_0^2 = -\left(k^2 + \gamma^2\right) = -k^2 + \beta^2$, где β — волновое число, из (10.140) получим

$$\beta = k\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 kl} = \frac{k}{|\cos kl|}. \tag{10.141}$$

Отсюда следует, что фазовая скорость волны, распространяющейся вдоль оси z, равна

$$\left.\begin{aligned} v_\Phi &= \frac{\omega}{\beta} = v\,|\cos kl|, \\ v &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \end{aligned}\right\} \tag{10.142}$$

Из уравнения (10.140) видно, что величина k_0 имеет чисто вещественные значения. Однако эта величина должна быть только положительной, ибо в противном случае поле на бесконечности неограниченно возрастает [см. выражения (10.138)]. Следовательно, решение уравнения (10.140) будет иметь физический смысл, если $0 \leqslant kl < \pi/2$, $\pi \leqslant kl < 3/2\pi$ и т. д.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением случая $kl < \pi/2$ (или $l < \pi/4$).

При $l < \lambda/4$ фазовая скорость волны, как вытекает из формулы (10.142), получается меньше скорости v_Φ, т. е. ребристая структура в этом случае действительно является замедляющей системой.

Согласно выражениям (10.138) проекции векторов поля замедляющей системы во внешнем пространстве убывают вдоль оси x по экспоненциальному закону. При больших k_0, т. е. при $kl \to \pi/2$, поле фактически будет локализовано непосредственно вблизи поверхности замедляющей системы.

Электромагнитные волны, обладающие подобными свойствами, получили наименование поверхностных волн.

Изложенное приближенное решение дает результаты, достаточно близкие к истинным, если выполняются приведенные выше условия применимости его.

В общем случае, когда расстояние между соседними ребрами соизмеримо с длиной волны и толщина ребер не мала, расчет поля в ребристой структуре существенно усложняется.

Диэлектрический волновод

Мы уже говорили о том, что направляющие свойства могут проявлять не только проводящие поверхности, но и поверхности диэлектриков.

Так, в § 8 гл. VI было установлено, что при падении плоской волны на плоскую границу двух диэлектриков результирующее электромагнитное поле в режиме полного внутреннего отражения распространяется вдоль этой границы.

Такая же картина будет наблюдаться и в плоском слое диэлектрика (рис. 10.41), если для волны, последовательно отражаемой верхней и нижней граничными поверхностями, выполняются условия полного внутреннего отражения. Стало быть, плоский диэлектрический слой при определенных условиях также может выполнять функции направляющей системы. В связи с этим его часто называют плоским диэлектрическим волноводом.

Другим примером аналогичной направляющей системы является круглый диэлектрический волновод

(рис. 10.42). Определим простейшие типы волн, которые могут существовать в таком волноводе. Для этого введем цилиндрическую систему координат, направив ось z по оси волновода, и будем решать уравнения Максвелла.

Здесь нам придется рассматривать две области (рис. 10.42): область I, соответствующую диэлектрику с параметрами $\varepsilon_1, \mu_1, g_1 = 0$, и область II, соответствующую внешнему пространству с па-

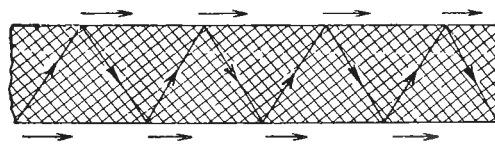


Рис. 10.41. Плоский диэлектрический волновод.

раметрами ε_2, μ_2 и g_2 тоже равной нулю. Разумеется, мы считаем, что $\varepsilon_1 \mu_1 > \varepsilon_2 \mu_2$, или (при $\mu_1 = \mu_2$ $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$. На границе областей, т. е. при $\rho = a$, касательные проекции векторов поля должны удовлетворять условиям непрерывности. Кроме того, поле в области I должно быть всюду конечно, а в области II — удовлетворять принципу излучения на бесконечности (при $\rho \to \infty$).

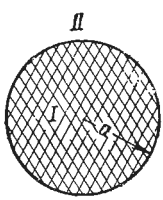


Рис. 10.42. К расчету поля в круглом диэлектрическом волноводе.

Зависимость векторов поля от переменной z в обоих областях представим функцией $e^{\gamma z}$, где γ — постоянная распространения.

В дальнейшем мы ограничимся для простоты изучением поля, симметричного относительно оси волновода. В этом случае уравнения Максвелла распадаются на две не зависящие друг от друга системы. Одна из них содержит проекции $\dot{E}_\rho$, $\dot{H}_\varphi$, $\dot{H}_z$ и, следовательно, определяет поперечно-электрическое поле, а другая — проекции $\dot{H}_\rho$, $\dot{E}_\varphi$, $\dot{E}_z$ и соответствует поперечно-магнитному полю.

Рассмотрим поле ТМ. Используя общие для цилиндрической системы координат выражения (10.99), при условии $\partial/\partial\varphi \equiv 0$ будем иметь:

$$\dot{E}_\rho = -\frac{\gamma}{k_c^2}\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \rho}; \quad \dot{H}_\varphi = -\frac{i\omega\varepsilon}{k_c^2}\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \rho}.$$

Проекция $\dot{E}_z$ в данном случае удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \rho} + k_c^2 \dot{E}_z = 0, \qquad (10.143)$$

которое сразу же получается из уравнения (10.100), если $\partial \dot{E}_z/\partial\varphi \equiv 0$.

Решение (10.143) для области I представим в виде (см. рассуждения, приведенные в § 7 этой главы)

$$\dot{E}_{z1} = \dot{B}_1 J_0(k_{c1}\rho)\, e^{-\gamma z}, \tag{10.144}$$

где

$$k_{c1}^2 = k_1^2 + \gamma^2 = \omega^2 \varepsilon_1 \mu_1 + \gamma^2. \tag{10.145}$$

В области II для функции $\dot{E}_{z2}$ будем иметь (см. § 2 гл. IX).

$$\dot{E}_{z2} = \dot{B}_2 H_0^{(2)}(k_{c2}\rho)\, e^{-\gamma z}, \tag{10.146}$$

$$k_{c2}^2 = k_2^2 + \gamma^2 = \omega^2 \varepsilon_2 \mu_2 + \gamma^2. \tag{10.147}$$

Воспользуемся далее условиями непрерывности касательных составляющих векторов поля на граничной поверхности:

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_{z1} &= \dot{E}z_2, \\ \dot{H}_{\varphi 1} &= \dot{H}_{\varphi 2}, \end{aligned}\right| \quad \rho = a.$$

Нетрудно убедиться, что эти условия приводят к равенствам:

$$\dot{B}_1 J_0(k_{c1}a) = \dot{B}_2 H_0^{(2)}(k_{c2}a),$$

$$\frac{\varepsilon_1}{k_{c1}} \dot{B}_1 J_1(k_{c1}a) = \frac{\varepsilon_2}{k_{c2}^2} \dot{B}_2 H_1^{(2)}(k_{c2}a),$$

из которых получается трансцендентное уравнение

$$\frac{J_0(k_{c1}a)}{J_1(k_{c1}a)} = \frac{\varepsilon_1 k_{c2}}{\varepsilon_2 k_{c1}} \frac{H_0^{(2)}(k_{c2}a)}{H_1^{(2)}(k_{c2}a)}. \tag{10.148}$$

Решение последнего в совокупности с формулами (10.145) и (10.147) позволяет найти постоянную распространения γ.

Определим условия, при которых поле в диэлектрическом волноводе будет иметь форму волны, распространяющейся вдоль оси z. Очевидно, для этого необходимо, чтобы во внешнем пространстве не было движения волн в радиальном направлении.

Из выражения (10.146) видно, что зависимость $\dot{E}_{z2}$ от переменной ρ в области II характеризуется функцией Ханкеля $H_0^{(2)}(k_{c2}\rho)$. При больших аргументах эта функция, как известно, равна

$$H_0^{(2)}(k_{c2}\rho) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_{c2}\rho}}\, e^{-i\left(k_{c2}\rho - \frac{\pi}{4}\right)}$$

Отсюда вытекает, что произведение $e^{i\omega t} H_0^{(2)}(k_{c2}\rho)$ не является волновой функцией, если постоянная k_{c2} есть чисто мнимая величина. Если к тому же k_{c2} имеет отрицательный знак, то проекция $\dot{E}_{Z2}$ и все другие проекции векторов поля во внешнем пространстве будут убывать в радиальном направлении (при больших ρ) с точностью до множителя $1/\sqrt{\rho}$ по экспоненциальному закону.

Таким образом, условие распространения волны по волноводу имеет вид

$$k_{c2}^2 \leqslant 0, \text{ или, точнее, } k_{c2} = -i\,|k_{c2}|. \qquad (10.149)$$

В этом случае постоянная распространения γ, как вытекает из равенства (10.147), становится мнимой величиной, и поле во внешнем пространстве принимает форму поверхностной волны. С физической точки зрения подобный результат означает, что на границе диэлектрик — внешнее пространство мы будем наблюдать картину, соответствующую явлению полного внутреннего отражения.

Теперь нам необходимо установить, при каких же частотах колебаний выполняется условие (10.149)? Для этого рассмотрим уравнение (10.148) при $k_c^2 \to 0$ и $k_c^2 \to -\infty$.

Используя приближенные значения функций Ханкеля для малых аргументов, можно показать, что правая часть уравнения (10.148) при $k_{c2} \to 0$ стремится к нулю. В этом случае уравнение (10.148) будет удовлетворяться, если $J_0(k_{c1}\, a) = 0$, и соответственно

$$k_{c1} = \frac{\varkappa_{0n}}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

где $\varkappa_{0n}$ — корни уравнения $J_0(\varkappa) = 0$.

При $k_{c_2}^2 \to -\infty$ правая часть (10.148), как показывают расчеты, стремится к бесконечности. Стало быть, слева в (10.148) мы должны иметь

$$J_1(k_{c1}\, a) = 0$$

или

$$k_{c1} = \frac{\varkappa_{1n}}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

где $\varkappa_{1n}$ — корни уравнения $J_1(\varkappa) = 0$.

Но из равенств (10.145), (10.147) видно, что частота ω связана с постоянными k_{c1} и k_{c2} соотношением

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{c1}^2 - k_{c2}^2}{\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2}}$$

Значит, условие $k_{c2}^2 = 0$, при котором $k_{c1} = \varkappa_{0n}/a$, соответствует частоте

$$\omega_{0n} = \frac{\varkappa_{0n}}{a\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2}}. \qquad (10.150)$$

Аналогично, условие $k_{c2}^2 \to -\infty$ дает частоту $\omega \to \infty$.

Таким образом, волна будет распространяться по волноводу, если частота колебаний $\omega \geqslant \omega_{0n}$, где ω_{0n} — величина, определяемая выражением (10.150). Ясно, что эта величина имеет смысл критической частоты.

Согласно (10.150) волновод характеризуется бесконечным множеством таких частот, и каждая из них, очевидно, соответствует поперечно-магнитной волне определенного типа.

Если частота колебаний поля меньше критической, волновод свои направляющие свойства утрачивает. В этом случае поле во внешнем пространстве начинает распространяться в радиальном направлении.

Перейдем теперь к рассмотрению фазовой скорости волны в диэлектрическом волноводе.

Из выражения (10.147) вытекает, что при частоте, равной критической (т. е. при $k_{c2} = 0$) постоянная распространения

$$\gamma = ik_2 = i\omega\sqrt{\varepsilon\mu},$$

а фазовая скорость

$$v_\Phi = \frac{\omega}{k_2} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}.$$

Следовательно, v_Φ в этом случае определяется параметрами внешней среды.

Если частота $\omega \to \infty$, то, как вытекает из (10.145),

$$\gamma = ik_1 = i\omega\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1},$$

$$v_\Phi = \frac{\omega}{k_1} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}.$$

Теперь уже фазовая скорость совпадает со скоростью распространения волны в пространстве с параметрами внутренней области.

На рис. 10.43 изображены графики изменения нормированной фазовой скорости волн TM_{01} и TM_{02} диэлектрического волновода в зависимости от параметра $\nu = k_2 a\sqrt{\frac{\varepsilon_1\mu_1}{\varepsilon_2\mu_2} - 1}$, при условии $\mu_2 = \mu_1 = \mu_0$ и $\varepsilon_2 = \varepsilon_0$. Эти графики получены в результате численного решения трансцендентного уравнения (10.148). Из графиков хорошо видно, что рассматриваемый диэлектрический волновод является з а м е д л я ю щ е й с и с т е м о й.

С изменением частоты колебаний происходит перераспределение энергии электромагнитного поля между волноводом и внешним пространством. На основании проведенных выше рассуждений можно утверждать, что при больших частотах компоненты поля во внешнем пространстве быстро затухают в радиальном направлении. Поэтому энергия поля оказывается сосредоточенной главным образом внутри волновода. При частотах колебаний, близких к кри-

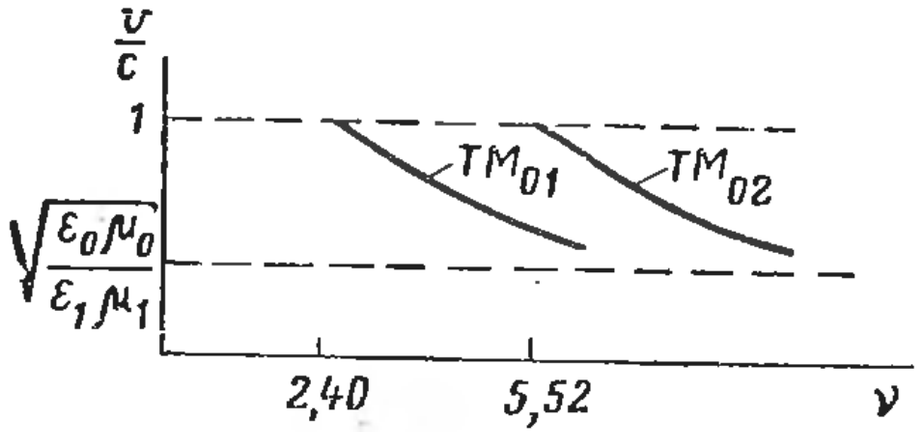


Рис. 10.43. Нормированные фазовые скорости волн TM_{01} и TM_{02} в круглом диэлектрическом волноводе

$$\nu = k_2 a \sqrt{\frac{\varepsilon_1\mu_1}{\varepsilon_2\mu_2} - 1};$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_0; \quad \mu_2 = \mu_0.$$

тической, поле во внешнем пространстве затухает вдоль радиуса медленно. Вследствие этого доля энергии поля во внешнем пространстве возрастает.

Аналогичным путем можно также провести исследование симметричных поперечно-электрических волн.

Кроме симметричных волн в диэлектрическом волноводе, разумеется, существуют и несимметричные волны. Последние, как вытекает из уравнений Максвелла, характеризуются двумя продольными компонентами $\dot{E}_z$ и $\dot{H}_z$, отличными от нуля. Следовательно, несимметричные поля не являются полями ТЕ или ТМ.

В заключение следует отметить, что некоторые типы диэлектрических волноводов могут быть использованы в качестве линий передачи для волн оптического диапазона. Такие линии получили наименование с в е т о в о д о в.

ПОПЕРЕЧНЫЕ ВОЛНЫ В НАПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМАХ

1. Общие свойства поперечных волн в направляющих системах

Исследуя электромагнитные поля в пространстве между параллельными идеально проводящими плоскостями, мы установили, что наряду с поперечно-электрическими и поперечно-магнитными волнами в такой направляющей системе может существовать поперечно-электромагнитная волна (TEM). Последняя отличается от волн TE и TM прежде всего тем, что она распространяется в линии при любой частоте колебаний поля. В связи с этим изучение поперечных электромагнитных волн представляет несомненный практический интерес.

Волны поперечного типа могут, очевидно, распространяться не только в линии, образованной двумя проводящими плоскостями, но и в других направляющих системах.

Чтобы уяснить особенности распространения поперечной волны, рассмотрим выражения (10.50), определяющие проекции векторов $\dot{\bar{E}}$ и $\dot{\bar{H}}$ поля, движущегося вдоль оси z прямоугольной системы координат.

Как известно, в поле поперечной волны проекции $\dot{E}_z$ и $\dot{H}_z$ равны нулю. Согласно (10.50) остальные прекции векторов поля этой волны будут отличны от нуля, если $k_c^2 = k^2 + \gamma^2 = 0$. Отсюда вытекает, что постоянная распространения волны TEM (в дальнейшем такую волну мы будем называть основной) равна $\gamma = ik = i\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$, а фазовая скорость $v_\Phi = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$.

Покажем, что уравнения*)

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 \dot{\bar{E}} + k^2 \dot{\bar{E}} = 0; \\ \nabla^2 \dot{\bar{H}} + k^2 \dot{\bar{H}} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (11.1)$$

*) Вывод этих уравнений приводится в § 3 гл. IX.

которым удовлетворяют векторы $\dot{\overline{E}}$ и $\dot{\overline{H}}$ в точках, где нет источников, для волны, распространяющейся вдоль оси z, при условии $\gamma = ik$ принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2_{x,y}\,\dot{\overline{E}} &= 0, \\ \nabla^2_{x,y}\,\dot{\overline{H}} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (11.2)$$

Здесь $\nabla^2_{x,y} = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Действительно, в рассматриваемом случае векторы $\dot{\overline{E}}$ и $\dot{\overline{H}}$ можно записать следующим образом:

$$\dot{\overline{E}} = \dot{\overline{E}}_0(x, y)\,e^{-ikz};\quad \dot{\overline{H}} = \dot{\overline{H}}_0(x, y)\,e^{-ikz}.$$

Подставляя эти выражения в уравнения (11.1) и учитывая, что $\frac{\partial^2 \dot{\overline{E}}}{\partial z^2} = -k^2\,\dot{\overline{E}}$ и $\frac{\partial^2 \dot{\overline{H}}}{\partial z^2} = -k^2\dot{\overline{H}}$, мы получим (11.2).

Уравнения (11.2) являются двумерными уравнениями Лапласа, которым удовлетворяют также векторы $\overline{E}$ и $\overline{H}$ постоянных во времени полей. В самом деле, для постоянных полей в точках, где нет электрических токов и зарядов, при неизменных ε и μ мы имеем:

$$\operatorname{rot}\overline{H} = 0;\quad \operatorname{rot}\overline{E} = 0;\quad \operatorname{div}\overline{H} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{div}\overline{E} = 0.$$

Из этих уравнений вытекает, что

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\overline{H} = 0;\quad \operatorname{rot}\operatorname{rot}\overline{E} = 0,$$

и соответственно

$$\nabla^2\overline{E} = 0;\quad \nabla^2\overline{H} = 0. \qquad (11.2')$$

Для полей, зависящих только от координат x и y, уравнения (11.2′) совпадают с уравнениями (11.2). Отсюда следует, что электрическое и магнитное поля основной волны в плоскости поперечного сечения направляющей системы по структуре будут точно такими же, как и постоянные во времени электрическое и магнитное поля, возникающие в системе при аналогичных граничных условиях. А это означает, что основная волна будет существовать в направляющей системе, если последняя может быть использована для передачи постоянного тока. На основании этого мы можем утверждать, что поперечная волна существует в двухпроводной (открытой и экранированной) линии, коаксиальной линии и т. п.

Из выражений (10.49) при условиях $\dot{E}_z = \dot{H}_z = 0$ и $\gamma = ik$ нетрудно получить соотношения, связывающие между собой составляющие векторов поля основной волны:

$$\left.\begin{aligned} \dot{H}_y &= \frac{i\omega\varepsilon}{\gamma}\dot{E}_x = \frac{\gamma}{i\omega\mu}\dot{E}_x = \frac{\dot{E}_x}{Z_0}; \\ \dot{H}_x &= -\frac{\gamma}{i\omega\mu}\dot{E}_y = -\frac{i\omega\varepsilon}{\gamma}\dot{E}_y = -\frac{\dot{E}_y}{Z_0}. \end{aligned}\right\} \qquad (11.3)$$

Согласно (11.3) в поле такой волны отношение взаимно перпендикулярных составляющих векторов $\overline{E}$ и $\overline{H}$ равно характеристическому сопротивлению Z_0 среды.

Так как электрическое поле волны ТЕМ в поперечном сечении системы совпадает с полем электростатическим, для расчета вектора $\overline{E}$ можно ввести потенциальную функцию и определить напряжение между проводниками линии. Наряду с напряжением целесообразно также ввести электрический ток, текущий вдоль проводов.

Введение этих величин позволяет в данном случае перейти от уравнений Максвелла к уравнениям для тока и напряжения — так называемым телеграфным уравнениям.

Конечно, все изложенное здесь оказывается справедливым, если направляющая система образована идеально проводящими поверхностями. В реальных условиях наличие продольного тока приводит к появлению на поверхности проводников продольной составляющей электрического поля. Вследствие этого поле в направляющей системе, строго говоря, уже не будет поперечным.

2. Уравнения тока и напряжения в линии с поперечной волной

Рассмотрим направляющую систему (линию), образованную двумя параллельными идеальными проводниками (рис. 11.1), в которой вдоль оси z движется поперечная волна.

В соответствии с предыдущим параграфом, для характеристики такой волны введем в рассмотрение токи и напряжения.

Чтобы установить связь между током и напряжением в линии, напишем второе уравнение Максвелла для контура *1—2—3—4*, полагая, что в данный момент времени ток в точке *1* (верхний провод) течет слева направо, а в точке *4* (нижний провод) — в противоположном направлении. Это уравнение, как известно, имеет вид:

$$\oint_{1-2-3-4} \overline{E}\,\overline{dl} = -\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (11.4)$$

Нетрудно убедиться, что в данном случае

$$\oint\limits_{1-2-3-4} \overline{E}\,\overline{dl} = \int\limits_{2}^{3} \overline{E}\,\overline{dl} + \int\limits_{4}^{1} \overline{E}\,\overline{dl} = U_{z2} - U_{z1},$$

ибо касательная составляющая вектора $\overline{E}$ на поверхности идеального проводника равна нулю. Здесь U_{z1} и U_{z2} — напряжения между верхним и нижним проводами линии в плоскости z_1 и z_2.

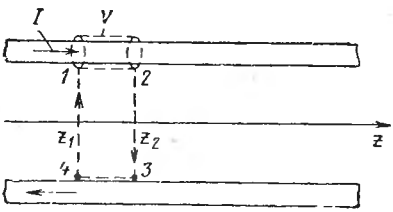


Рис. 11.1. К выводу телеграфных уравнений.

Учитывая эти соотношения, перепишем уравнение (11.4) в виде

$$U_{z2} - U_{z1} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Допустим, что точки z_1 и z_2 находятся на бесконечно малом расстоянии друг от друга: $z_2 - z_1 = dz$. В этом случае, очевидно,

$$U_{z2} - U_{z1} = dU.$$

Величина же магнитного потока через контур в соответствии с определением индуктивности будет равна

$$d\Phi = IL_1\,dz,$$

где L_1 — погонная индуктивность линии; I — ток в рассматриваемой точке линии.

Таким образом,

$$dU = -\frac{d}{dt}(IL_1\,dz)$$

или в окончательном виде

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -L_1\frac{\partial I}{\partial t}. \qquad (11.5)$$

Так как распределение магнитного поля в плоскости поперечного сечения системы совпадает с распределением магнитного поля постоянного тока, погонная индуктивность линии будет одинакова с погонной индуктивностью ее на постоянном токе (без учета магнитного поля в проводниках).

Воспользуемся далее равенством

$$\operatorname{div} \bar{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

где ρ — объемная плотность заряда.

Умножая обе части этого равенства на dV и интегрируя по объему V, охватывающему часть верхнего проводника (рис. 11.1), получим

$$\int_V \operatorname{div} \bar{j}\, dV = \int_S \bar{j}\, \overline{dS} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV. \tag{11.6}$$

Но из определения электрического тока, приведенного в § 1 гл. IV, вытекает, что

$$\int_S \bar{j}\, \overline{dS} = I_2 - I_1,$$

где I_2 и I_1 — величины токов в сечениях z_2 и z_1. Кроме того,

$$\int_V \rho dV = Q,$$

где Q — заряд в объеме V. Следовательно, выражение (11.6) принимает вид

$$I_2 - I_1 = -\frac{dQ}{dt}.$$

Если расстояние между точками z_1 и z_2 равно dz, то $I_2 - I_1 = dI$, а $Q = \tau_1\, dz$ (τ_1 — погонная плотность заряда).

Так как распределение электрического поля в плоскости поперечного сечения системы совпадает с распределением электростатического поля, мы можем утверждать, что погонная плотность заряда равна $\tau_1 = C_1 U$, где C_1 — погонная электростатическая емкость линии.

Учитывая эти соотношения, получим

$$dI = -\frac{d}{dt}(UC_1\, dz)$$

или окончательно

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -C_1 \frac{\partial U}{\partial t}. \tag{11.7}$$

Уравнения (11.5) и (11.7) образуют систему телеграфных уравнений для тока и напряжения в линии:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial z} &= -L_1 \frac{\partial I}{\partial t}, \\ \frac{\partial I}{\partial z} &= -C_1 \frac{\partial U}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \tag{11.8}$$

По виду они аналогичны уравнениям для проекций векторов поля плоской волны (см. § 1 гл. VI).

На основании этой аналогии общее решение системы (11.8) можно представить в виде:

$$U(z, t) = f_1\left(t - \frac{z}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{z}{v}\right),$$

$$I(z, t) = \frac{f_1\left(t - \frac{z}{v}\right)}{Z_л} - \frac{f_2\left(t + \frac{z}{v}\right)}{Z_л},$$

где $v = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ — скорость распространения волны вдоль линии, а $Z_л = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$ — так называемое **волновое сопротивление линии**, равное отношению напряжения к току в данной точке линии в режиме бегущих волн.

В случае установившегося режима комплексные амплитуды напряжения и тока в линии равны:

$$\left.\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{A}\, e^{-ikz} + \dot{B}\, e^{ikz}, \\ \dot{I} &= \frac{\dot{A}}{Z_л} e^{-ikz} - \frac{\dot{B}}{Z_л} e^{ikz}. \end{aligned}\right\}$$

3. Коаксиальная линия

В коаксиальной линии, как уже отмечалось выше, может распространяться поперечная волна. Кроме того, в ней могут возникать волны ТЕ и ТМ. В связи с этим вопрос о типах полей в такой линии целесообразно рассмотреть в общем виде.

Исходные выражения для компонент поля коаксиальной линии будут совпадать с выражениями (10.86) и (10.87), которые мы рассматривали при изучении круглого волновода. Однако теперь область $\rho \leqslant a$, содержащая точку $\rho = 0$, из рассмотрения исключается, так как она занята внутренним проводником. Поэтому решение уравнений (10.87) и (10.100), определяющих продольные составляющие $\dot{H}_z$ и $\dot{E}_z$, нам следует искать в виде:

$$\left.\begin{matrix} \dot{H}_z \\ \dot{E}_z \end{matrix}\right\} = \left[\dot{A}_m J_m(k_c \rho) + \dot{B}_m N_m(k_c \rho)\right] \cos m\varphi\, e^{-\gamma z}, \qquad (11.9)$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots\ ^{*)}$$

---

*) Конечно, размерности постоянных коэффициентов $\dot{A}_m$ и $\dot{B}_m$ в (11.9) для $\dot{H}_z$ и $\dot{E}_z$ будут различны.

В случае поперечно-электрических полей граничные условия на идеально проводящих поверхностях коаксиальной линии имеют вид:

$$\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial \rho} = 0 \text{ при } \rho = a \quad \text{и} \quad \rho = b, \tag{11.10}$$

где a и b — радиусы внутреннего и внешнего проводников (рис. 11.2, *а*).

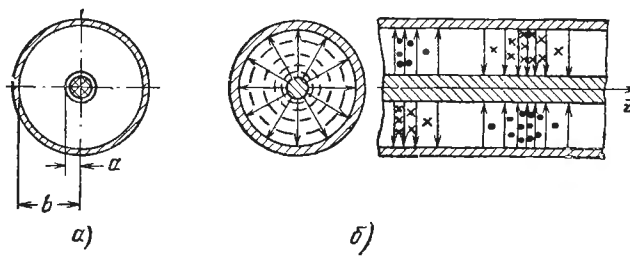


Рис. 11.2. Коаксиальная линия (*а*) и силовые линии векторов $\overline{E}$ и $\overline{H}$ волны ТЕМ в ней (*б*).

Подставляя в условие (11.10) значение $\dot{H}_z$ из (11.9), получим

$$\dot{A}_m J'_m(k_c a) + \dot{B}_m N'_m(k_c a) = 0,$$

$$\dot{A}_m J'_m(k_c b) + \dot{B}_m N'_m(k_c b) = 0,$$

отсюда следует, что

$$\frac{N'_m(k_c a)}{J'_m(k_c a)} = \frac{N'_m(k_c b)}{J'_m(k_c b)}; \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{11.11}$$

В случае поперечно-магнитных полей граничные условия на поверхностях проводников коаксиальной линии запишутся таким образом:

$$\dot{E}_z = 0 \quad \text{при} \quad \rho = a \quad \text{и} \quad \rho = b,$$

откуда вытекает, что

$$\dot{A}_m J_m(k_c a) + \dot{B}_m N_m(k_c a) = 0,$$

$$\dot{A}_m J_m(k_c b) + \dot{B}_m N_m(k_c b) = 0$$

или

$$\frac{N_m(k_c a)}{J_m(k_c a)} = \frac{N_m(k_c b)}{J_m(k_c b)}; \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{11.12}$$

Чтобы определить величины k_c, необходимо решить трансцендентные уравнения (11.11) и (11.12).

Известно, что при каждом значении m эти уравнения имеют бесчисленное множество корней. Следовательно, в коаксиальной линии может существовать бесчисленное множество типов волн, определяемых величиной m и порядковым номером n корня соответствующего уравнения (волны TE_{mn}, TM_{mn} и TEM). Для каждого типа поля можно рассчитать критическую частоту и критическую длину волны:

$$f_{кр} = \frac{1}{2\pi} k_c v \quad \text{и} \quad \lambda_{кр} = \frac{2\pi}{k_c} \frac{c}{v}. \tag{11.13}$$

Уравнения (11.11) и (11.12) достаточно хорошо изучены; значения их корней приводятся в справочной литературе (см., например, Е. Янке и Ф. Эмде, Таблицы функций).

Найдем решение этих уравнений для малых, а также для больших аргументов $k_c a$ и $k_c b$.

Пусть мы имеем уравнение

$$\frac{N_0(k_c a)}{J_0(k_c a)} = \frac{N_0(k_c b)}{J_0(k_c b)}, \tag{11.14}$$

соответствующее симметричным поперечно-магнитным волнам. При $k_c a < k_c b \ll 1$ функции Бесселя и Неймана могут быть приближенно заменены первыми членами их разложений в степенные ряды:

$$J_0(k_c a) \approx 1; \quad N_0(k_c a) \approx -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma k_c a}, \quad \gamma = 1{,}78107;$$

$$J_0(k_c b) \approx 1; \quad N_0(k_c b) \approx -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma k_c b}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (11.14), получим

$$\ln \frac{2}{\gamma k_c a} = \ln \frac{2}{\gamma k_c b}.$$

Ясно, что последнее равенство удовлетворится, если $k_c = 0$. Но из формулы (11.13) следует, что критическая частота при $k_c = 0$ также равна нулю. Таким образом, полученное решение соответствует основной волне.

При больших аргументах функции Бесселя и Неймана в (11.14) могут быть заменены их асимптотическими представлениями:

$$J_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right); \quad N_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$x \gg 1.$$

В этом случае уравнение (11.14) приводится к виду

$$\sin[(b-a)k_c] = 0,$$

откуда следует, что

$$k_c = \frac{n\pi}{b - a}; \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{11.15}$$

Критические частоты симметричных полей TM_{0n}, для которых справедливо соотношение (11.15), приближенно равны

$$f_{кр} \approx \frac{1}{2} \frac{nv}{b - a}; \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{11.16}$$

Отсюда видно, что значения $(f_{кр})_{TM_{0n}}$ зависят от величины $(b - a)$.

Если разность $(b - a)$ мала, критические частоты полей TM_{0n} будут весьма высокими. Последнее утверждение остается справедливым и в том случае, когда условия $k_c a \gg 1$ и $k_c b \gg 1$ не выполняются (т. е. когда радиусы a и b проводов малы). На практике размеры поперечного сечения коаксиальной линии выбираются так, что поля TM_{0n} оказываются сильно затухающими.

То же самое можно сказать и о симметричных поперечно-электрических полях.

Наряду с симметричными полями в коаксиальной линии могут существовать также поля несимметричного типа. Среди них наименьшей критической частотой обладает поле TE_{11}. Критическая частота этого типа поля может быть приближенно рассчитана по формуле

$$f_{кр} \approx \frac{v}{2\pi \frac{a + b}{2}} = \frac{v}{(a + b)\pi}. \tag{11.17}$$

При небольших радиусах проводников коаксиальной линии величина $(f_{кр})$ TE_{11} также оказывается весьма большой. Стало быть, из множества волн в коаксиальной линии целесообразно использовать на практике только основную волну.

Выражения для составляющих векторов поля основной волны нетрудно получить, исходя из общих соображений, данных в § 1 этой главы. Так, например, можно сразу же утверждать, что распределение электрического поля в плоскости поперечного сечения коаксиальной линии будет таким же, как и в электрической системе, состоящей из двух проводящих коаксиальных цилиндров аналогичных размеров.

В § 3 гл. II было показано, что напряженность электростатического поля в коаксиальном конденсаторе равна

$$\bar{E}_0 = \bar{i}_\rho \frac{U_0}{\ln \frac{b}{a}} \frac{1}{\rho} = \bar{i}_\rho \frac{A}{\rho},$$

где U_0 — разность потенциалов между цилиндрами. Следовательно, вектор $\dot{\bar{E}}$ электромагнитного поля основной волны в коаксиальной линии будет иметь вид

$$\dot{\bar{E}} = \dot{\bar{E}}_0 e^{-ikz} = \bar{i}_\rho \frac{\dot{A}}{\rho} e^{-ikz}.$$

Распределение магнитного поля основной волны в поперечном сечении линии совпадает с распределением магнитного поля по-

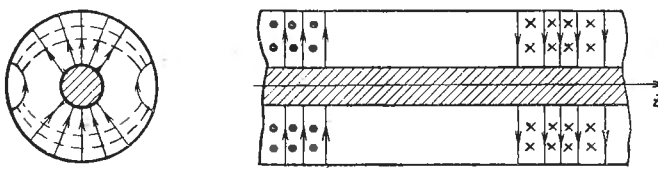


Рис. 11.3. Силовые линии векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ волны TE_{11} в коаксиальной линии.

стоянного тока. Так как силовые линии постоянного магнитного поля в этом случае имеют форму концентрических окружностей с центром на оси z, то для основной волны $\dot{\bar{H}} = \bar{i}_\varphi \dot{H}_\varphi$. Учитывая далее, что в поле ТЕМ отношение взаимно перпендикулярных составляющих векторов $\dot{\bar{E}}$ и $\dot{\bar{H}}$ равно $\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$, будем иметь

$$\dot{\bar{H}} = \bar{i}_\varphi \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}} \frac{\dot{A}}{\rho} e^{-ikz}.$$

Таким образом, составляющие векторов поля основной волны в коаксиальной линии принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{E}_\rho = \frac{\dot{A}}{\rho} e^{-ikz}; \quad \dot{E}_\varphi = \dot{E}_z = 0, \\ &\dot{H}_\varphi = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}} \frac{\dot{A}}{\rho} e^{-ikz}; \quad \dot{H}_\rho = \dot{H}_z = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (11.18)$$

Выражения для составляющих $\dot{\bar{E}}$ и $\dot{\bar{H}}$ волны, распространяющейся в противоположном направлении, могут быть получены из (11.18), если в них—ik заменить на ik, а перед $\dot{H}_\varphi$ поставить знак «минус», обеспечивающий требуемое направление вектора Пойнтинга.

Структура поля основной волны изображена на рис. 11.2, *б*. На рис. 11.3 и 11.4 показана также структура полей TE_{11} и TM_{01}.

Рассчитаем теперь волновое сопротивление коаксиальной линии. По определению (см. § 1 этой главы) $Z_{0л} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}}$, где $\dot{U}$ и $\dot{I}$ — комплексные амплитуды напряжения и тока прямой волны в данной точке линии.

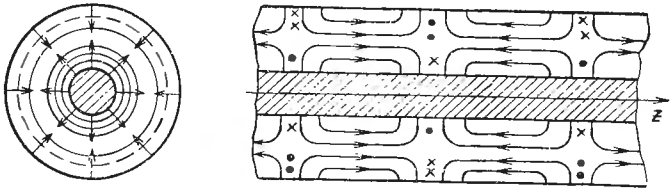


Рис. 11.4. Силовые линии векторов $\overline{E}$ и $\overline{H}$ волны TM_{01} в коаксиальной линии.

В рассматриваемом случае

$$\dot{U}_a - \dot{U}_b = \dot{U} = \int_a^b \dot{E}_\rho \, d\rho.$$

Так как

$$\dot{E}_\rho = \frac{\dot{A}}{\rho} e^{-ikz},$$

то

$$\dot{U} = \dot{A} \ln \frac{b}{a} e^{-ikz}.$$

Комплексная амплитуда тока, текущего по внутреннему проводу, равна

$$\dot{I} = \int_l \dot{j}_S \, dl = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}} \frac{\dot{A}}{a} e^{-ikz} a d\varphi =$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}} \dot{A} e^{-ikz}.$$

Отсюда вытекает, что волновое сопротивление коаксиальной линии определяется выражением

$$Z_л = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}{2\pi} \ln \frac{b}{a} = 138 \sqrt{\frac{\mu'}{\varepsilon'}} \lg \frac{b}{a} \ [ом].$$

Если пространство между проводниками заполнено воздухом, то

$$Z_{л} = 60 \ln \frac{b}{a} \ [ом].$$

Определим, наконец, коэффициент затухания волны ТЕМ в коаксиальной линии, обусловленный потерями в проводах. Для этого используем общую формулу (10.112) с учетом выражений (11.18). После соответствующих преобразований получим

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{R_S}{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}} \frac{1}{\ln \frac{b}{a}} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right). \tag{11.19}$$

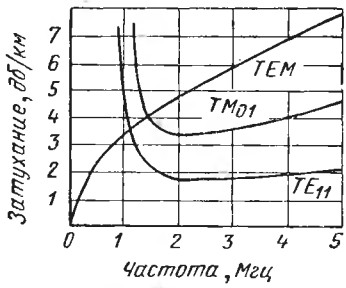


Рис. 11.5. Коэффициенты затухания электромагнитных волн в коаксиальной линии и круглом волноводе.

Зависимость $\alpha_{ТЕМ}$ от частоты для линии, образованной медными проводниками, при $b/a = 3, 6$, изображена на рис. 11.5. На этом же рисунке изображены аналогичные графики для волн TM_{01} и TE_{11} в круглом волноводе, радиус которого равен радиусу внешнего провода линии. Из рисунка следует, что на частотах, превышающих критические частоты волн TE_{11} и TM_{01}, коэффициент затухания в коаксиальной линии оказывается больше коэффициента затухания волновода. А это значит, что в диапазоне сверхвысоких частот для передачи электромагнитной энергии целесообразно применять не коаксиальную линию, а волновод. Однако там, где использование волноводов требует значительного увеличения их размеров (например, на метровых и дециметровых волнах), коаксиальная линия с ее малыми поперечными размерами становится самой подходящей линией передачи.

4. Полосковая линия

В диапазоне сантиметровых волн наряду с волноводами иногда применяются направляющие системы, называемые полосковыми линиями.

На рис. 11.6, *а* и *б* изображены полосковые линии симметричного и несимметричного типов. Очевидно, линию *а*) можно рассматривать как некоторую модификацию коаксиальной, или, точнее говоря, экранированной линии, состоящей из проводов прямоугольной формы с общей продольной осью (рис. 11.7).

Линия б) представляет собой разновидность направляющей системы, состоящей из двух плоских параллельных проводников.

Полосковые линии заполняются либо воздухом, либо специальным диэлектриком, как это показано на рис. 11.6. Расчет электромагнитного поля в таких направляющих системах оказывается весьма сложным. Поэтому мы на нем останавливаться не будем.

В отсутствие диэлектрика по линии, как нетрудно понять, будет распространяться основная (поперечная) волна.

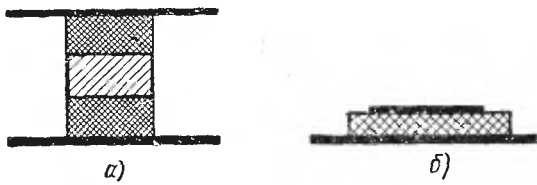


Рис. 11.6. Симметричная (*а*) и несимметричная (*б*) полосковые линии.

Введение в направляющую систему диэлектрика приводит к тому, что поле ее перестает быть поперечным. Действительно, в линии с неоднородным заполнением электромагнитная волна уже не может распространяться со скоростью $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$, и соот-

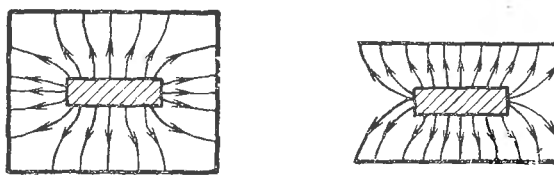


Рис. 11.7. Переход от экранированной линии к полосковой.

ветственно величина k_c, характеризующая волну, не может быть равна нулю (см. § 1 этой главы). На практике основная часть поля такой линии все же оказывается сосредоточенной в диэлектрике между проводами. На основании этого приближенно можно считать, что провода, образующие линию, находятся как бы в безграничном диэлектрике. Стало быть, поле в линии с диэлектриком приближается по своим свойствам к полю поперечного типа.

Обычно полосковые линии изготовляются методом «печатных схем», при котором направляющие проводники наносятся непосредственно на поверхность диэлектрика. Расстояние между внешними

проводниками линии, как правило, берется небольшим, поэтому потери электромагнитной энергии на излучение в системе оказываются малыми*).

Тем не менее полосковые линии имеют более высокий уровень потерь, нежели волноводы с воздушным заполнением. Следовательно, их целесообразно применять в тех случаях, когда устройство должно иметь малые габариты, а снижение уровня потерь не имеет существенного значения.

---

*) См. примечание в § 1 гл. VIII.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ЛИНИЙ ПЕРЕДАЧИ

1. Введение

В предыдущих главах была рассмотрена теория распространения электромагнитных волн в линиях, у которых электрические параметры, т. е. форма и размеры поперечного сечения, а также значения ε, μ и g, оставались неизменными во всех точках продольной оси. Такие линии называют р е г у л я р н ы м и (в отличие от нерегулярных линий, характеристики которых плавно или скачкообразно изменяются вдоль оси).

Очевидно, что во всякой реальной линии, например в реальном волноводе, имеет место нарушение регулярности характеристик. Действительно, реальный волновод всегда имеет начало и конец — точки, в которых волновод связывается с источником электромагнитной энергии (генератором) и нагрузкой.

Аналогично при соединении двух участков линий с разными поперечными сечениями, при изгибе или скручивании линий, при наличии разветвлений и т. п. тоже происходит изменение параметров системы. В этих точках, как говорят, имеются неоднородности.

Выше было показано, что в регулярных волноводах может распространяться дискретное множество волн ТЕ и ТМ, причем каждая из них в отдельности удовлетворяет граничным условиям на поверхности волновода.

В нерегулярном волноводе решение уравнений поля, как правило, не может быть представлено в виде волны одного типа, ибо удовлетворить граничным условиям на его поверхности можно лишь путем композиции частных решений в виде суммы волн различных типов.

Однако во многих случаях нерегулярности имеются лишь на отдельных участках волновода, длина которых много меньше длины

регулярной его части. Вместе с тем размеры поперечного сечения основной регулярной части волновода допускают распространение лишь одной незатухающей волны. В этих случаях поле в волноводе представляется в виде суммы незатухающей волны и бесконечной суммы дискретных затухающих полей. Последние имеют значительные амплитуды лишь в точках нарушения регулярности волновода и, экспоненциально убывая по мере удаления от этих точек, оказываются обычно пренебрежимо малыми в регулярной части волновода.

Аналогичную картину мы уже наблюдали при возбуждении волновода соответствующим источником (элементом связи), который согласно изложенному тоже представляет собой неоднородность. Физически эта картина означает, что генератор через элемент связи возбуждает в волноводе кроме незатухающей волны еще бесчисленное множество затухающих полей, интенсивность которых определяется конструкцией элемента связи. Возникшие затухающие поля существуют лишь в непосредственной близости к источнику и, имея реактивный характер, определяют реактивную составляющую входного сопротивления элемента связи.

Заметим, что можно провести некоторую аналогию между возникновением затухающих полей при распространении волн в волноводе и возникновением так называемых собственных затухающих решений, которые имеют место при исследовании временных переходных процессов.

Вынужденные решения при включении цепи можно формально сопоставить с незатухающими волнами в волноводе, собственные решения — с затухающими полями. Точно так же, как собственные решения необходимо добавить к вынужденным для того, чтобы удовлетворить начальным условиям в момент времени $t = 0$ (момент включения источника), к незатухающим волнам необходимо добавить затухающие поля, чтобы удовлетворить граничным условиям на оси z в точках $z = 0$ (место включения источника). При $t \to \infty$ собственные решения, возникшие при включении вынуждающей силы, исчезают. Точно так же при $z \to \infty$ в волноводе исчезают затухающие поля, возникшие в точке ($z = 0$) включения неоднородности. Если в некоторый момент $t = t_0$ происходит нарушение непрерывности процесса во времени (изменяется режим цепи), то вновь возникают собственные решения, которые необходимо учитывать для всех моментов времени, близких к t_0.

Аналогично, если в некоторой точке z_0 происходит нарушение пространственной непрерывности (изменяется геометрия волновода), то возникают затухающие поля, которые необходимо учитывать в точках z, близких к z_0. Само собой разумеется, что все изложенное является лишь аналогией, основанной на общности математических методов исследования уравнений, и поэтому такая аналогия не может быть полной. Ее неполнота, в частности, связана с тем, что процессы во времени текут лишь в одном направле-

нии — увеличивающихся t, тогда как процессы в пространстве могут распространяться как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения пространственной координаты z.

Несмотря на известную формальность проведенной аналогии, она все же полезна, так как позволяет уяснить роль затухающих полей в составлении решений, удовлетворяющих граничным условиям.

Проведенные выше рассуждения, конечно, полностью применимы и к другим линиям, при условии, что в них может распространяться волна только одного типа.

Среди вопросов, которые возникают при проектировании линии, соединяющей источник энергии с нагрузкой, одним из наиболее важных является вопрос о согласовании, т. е. таком ее режиме, при котором передача энергии осуществляется без отражений и, стало быть, без отраженных волн.

Согласованный режим передачи энергии имеет ряд преимуществ, из которых основными являются следующие:

1) коэффициент полезного действия линии в согласованном режиме имеет максимальное значение;

2) режим бегущей волны обеспечивает возможность передачи максимальной мощности по линии при заданной величине электрической прочности;

3) отсутствие рассогласования в диапазоне частот обеспечивает постоянство входного сопротивления линии в этом диапазоне. Если входное сопротивление линии в свою очередь согласовано с внутренним сопротивлением генератора, то такой режим является оптимальным, так как соответствует во всех случаях, когда затухание линии мало, режиму отдачи в нагрузку максимальной мощности*).

Если волна распространяется вдоль бесконечно длинной линии (волновода) и на пути ее отсутствуют какие-либо неоднородности, возможность возникновения отраженной волны исключается полностью. В том случае, когда линия (волновод) ограничена по своей длине, естественно ожидать возникновения в конечной точке линии отражений. Однако в линиях можно создать такую конструкцию оконечной нагрузки, при которой как бы не нарушается электрическая однородность линии, и, таким образом, не возникает отраженная волна. В этом случае говорят, что линия (волновод) «замкнута» на согласованную с ней нагрузку.

---

*) Несколько иначе может стоять вопрос при проектировании линии, соединяющей приемную антенну со входом приемного устройства. Для повышения реальной чувствительности приемника требуется режим линии, соответствующий получению на входе приемника максимального отношения сигнал/шум. При наличии значительных шумов антенны этот режим не совпадает с режимом отдачи генератором максимальной мощности в нагрузку. Таким образом, оптимальный режим, оказывается, не соответствует режиму согласованной передачи. Смотри, например, книгу: В. И. Сифорова «Радиоприемные устройства», Воениздат, 1954.

В настоящее время достаточно подробно разработана теория согласования линий, поперечные размеры которых малы по сравнению с длиной волны. Вопросы согласования в волноводах имеют ряд специфических особенностей, вытекающих из того, что размеры поперечного сечения волновода имеют порядок длины волны. Сейчас уже решены многие важные задачи из этой области прикладной электродинамики, имеющие большое значение для практики. Все же в целом практический опыт здесь опередил теоретические расчеты. Однако даже в тех отдельных задачах согласования, когда теоретический анализ не позволяет получить необходимые расчетные соотношения, теория позволяет сделать важные для практики качественные выводы.

2. Распространение волн в линиях со скачкообразно изменяющимися параметрами

В гл. VI рассматривался вопрос об отражении плоских волн от границы двух полубесконечных сред. Было показано, что условия непрерывности тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей на границе могут быть удовлетворены, если допустить существование падающей, отраженной и преломленной (проходящей) волн. Было также установлено, что комплексные амплитуды этих волн в случае нормального падения связаны между собой соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\dot{E}_{\text{отр}}}{\dot{E}_{\text{пад}}} &= p_{\text{отр}} = \frac{Z_{02}-Z_{01}}{Z_{01}+Z_{02}}, \\ \frac{\dot{E}_{\text{пр}}}{\dot{E}_{\text{пад}}} &= p_{\text{пр}} = \frac{2Z_{02}}{Z_{01}+Z_{02}}, \end{aligned}\right\} \tag{12.1}$$

где $Z_{01}=\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}$ и $Z_{02}=\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}$ [см. формулы (6.57) и (6.58)].

Перейдем теперь к анализу особенностей распространения электромагнитных волн в неоднородных линиях. Из множества неоднородных систем мы рассмотрим линию, параметры которой меняются скачком в одной какой-либо точке по ее длине. Подобного рода неоднородности получили название *плоских неоднородностей*.

Пусть мы имеем коаксиальный фидер с размерами поперечного сечения, малыми по сравнению с длиной волны. В таком фидере, естественно, будет распространяться только волна ТЕМ, для которой отношение $\dot{E}/\dot{H}$ всюду равно $\sqrt{\mu/\varepsilon}$.

Предположим, что размеры поперечного сечения линии не меняются, но в точке $z=0$ параметры среды изменяются скачко-

образно, т. е. в области $z<0$ линия заполнена диэлектриком с $\varepsilon=\varepsilon_1$, а в области $z>0$ — диэлектриком с $\varepsilon=\varepsilon_2$ (рис. 12.1). Легко показать, что явление отражения в такой системе не отличается от подобного явления, возникающего при нормальном падении плоской волны на границу раздела двух сред. Вследствие этого выражения для коэффициентов отражения и преломления волны в линии будут совпадать с формулами (12.1).

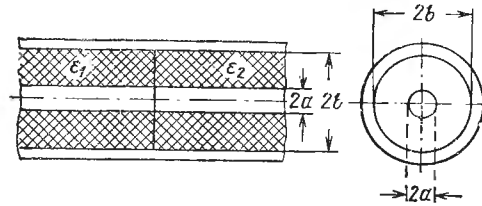


Рис. 12.1. Коаксиальная линия со скачкообразным изменением диэлектрической проницаемости среды.

Рассмотрим теперь аналогичную задачу для волновода. Предположим, что в волноводе распространяется лишь волна одного типа. Возьмем для конкретности прямоугольный волновод с волной ТЕ. Электромагнитное поле в этом случае определяется выражениями:

$$\dot{E}_x=-\frac{i\omega\mu}{k_c^2}\frac{\partial\dot{H}_z}{\partial y},\quad \dot{E}_y=\frac{i\omega\mu}{k_c^2}\frac{\partial\dot{H}_z}{\partial x},\quad \dot{E}_z=0;$$

$$\dot{H}_x=-\frac{\gamma}{k_c^2}\frac{\partial\dot{H}_z}{\partial x},\quad \dot{H}_y=-\frac{\gamma}{k_c^2}\frac{\partial\dot{H}_z}{\partial y},$$

где $\dot{H}_z$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\dot{H}_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\dot{H}_z}{\partial y^2}+k_c^2\dot{H}_z=0$$

[см. (10.51) и (10.53)]. Общее решение уравнения (10.51), как известно, имеет вид

$$\dot{H}_z=\dot{A}\,e^{-\gamma z}+\dot{B}\,e^{\gamma z},$$

где $\dot{A}$ и $\dot{B}$ — функции переменных x и y. Используя далее (10.53) и обозначив $i\omega\mu/\gamma$ через $Z_{\text{ТЕ}}$, для области $z<0$ получим:

$$\left.\begin{aligned}\dot{E}_y^{(1)}&=\dot{A}_1\,e^{-\gamma_1 z}+\dot{B}_1\,e^{\gamma_1 z},\\ \dot{H}_x^{(1)}&=\frac{1}{Z_{\text{ТЕ}}^{(1)}}(\dot{A}_1\,e^{-\gamma_1 z}-\dot{B}_1\,e^{\gamma_1 z}).\end{aligned}\right\}\qquad(12.2)$$

Первые слагаемые в (12.2) определяют падающую волну, а вторые — отраженную. Будем полагать, что в области $z>0$ суще-

ствует только проходящая волна, поэтому здесь

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_y^{(2)} &= \dot{A}_2 e^{-\gamma_2 z}, \\ \dot{H}_x^{(2)} &= \frac{\dot{A}_2}{Z_{\text{ТЕ}}^{(2)}} e^{-\gamma_2 z}. \end{aligned}\right\} \tag{12.3}$$

Условие непрерывности тангенциальных составляющих векторов $\dot{\bar{E}}$ и $\dot{\bar{H}}$ на границе двух диэлектриков ($z = 0$) можно теперь записать в виде:

$$\left.\begin{aligned} \dot{A}_1 + \dot{B}_1 &= \dot{A}_2 \\ \dot{A}_1 - \dot{B}_1 &= \frac{Z_{\text{ТЕ}}^{(1)}}{Z_{\text{ТЕ}}^{(2)}} \dot{A}_2. \end{aligned}\right\} \tag{12.4}$$

Из решения этих уравнений получаем выражения для коэффициентов отражения и прохождения:

$$\left.\begin{aligned} p_{\text{отр}} &= \frac{\dot{B}_1}{\dot{A}_1} = \frac{Z_{\text{ТЕ}}^{(2)} - Z_{\text{ТЕ}}^{(1)}}{Z_{\text{ТЕ}}^{(1)} + Z_{\text{ТЕ}}^{(2)}}, \\ p_{\text{пр}} &= \frac{\dot{A}_2}{\dot{A}_1} = \frac{2Z_{\text{ТЕ}}^{(2)}}{Z_{\text{ТЕ}}^{(1)} + Z_{\text{ТЕ}}^{(2)}}, \end{aligned}\right\} \tag{12.5}$$

которые отличаются от (12.1) тем, что вместо волновых сопротивлений Z_{01} и Z_{02} содержат характеристические сопротивления волноводов $Z_{\text{ТЕ}}^{(1)}$ и $Z_{\text{ТЕ}}^{(2)}$.

Таким сбразом, мы приходим к выводу, что в линии с неизменными геометрическими размерами поперечного сечения отражение волн, обусловленное скачкообразным изменением параметров среды, проявляется аналогично отражению плоских волн в свободном пространстве, а именно, здесь возникают отраженная и проходящая волны того же типа, что и падающая волна.



Рис. 12.2. Плоская двухпроводная линия со скачкообразным изменением расстояния между проводами.

Если же в линии имеет место скачкообразное изменение формы или размеров поперечного сечения, то удовлетворить граничным условиям путем введения только отраженной и преломленной волн того же типа, что и падающая волна, уже невозможно.

Рассмотрим, например, распространение волны ТЕМ между проводящими плоскостями со скачкообразным изменением расстояния между ними в точке $z = 0$ (рис. 12.2).

Составляющие $\dot{E}_x$ и H_y волны ТЕМ, естественно, не зависят от координаты x, тогда как граничные условия для разных x при $z = 0$ различны. Если допустить, что в первой линии существует только прямая и отраженная волны типа ТЕМ, то их амплитуды надо подобрать так, чтобы на участке $b < x < a$ результирующая проекция $\dot{E}_x$ была равна

$$\dot{E}_x = \dot{E}_{x\,\text{пад}} + \dot{E}_{x\,\text{отр}} = 0.$$

Но тогда E автоматически обратится в нуль и на участке $0 < x < b$, что противоречит очевидному факту — возможности перехода энергии во вторую линию.

Совершенно ясно, что в данном случае при отражении будет возникать множество полей различных типов (с разным законом распределения вдоль оси x). Амплитуды этих полей должны быть таковы, чтобы суммарное поле обращалось в нуль на интервале $b < x < a$, а на интервале $0 < x < b$ принимало некоторые значения, непрерывные при переходе через $z = 0$.

Из общей теории распространения волн вдоль направляющих поверхностей известно, что в линиях передачи кроме волны ТЕМ могут существовать поля ТЕ и ТМ. В отличие от волны ТЕМ последние могут быть как волновыми, так и затухающими, в зависимости от соотношения между рабочей частотой f и критической частотой $f_{\text{кр}}$ данного типа поля, значение которой зависит от геометрических размеров поперечного сечения.

Таким образом, чтобы удовлетворить граничным условиям в точке $z = 0$, мы должны искать решение в виде наложения полей различных типов.

В том частном и важном для практики случае, когда размеры поперечного сечения линии допускают распространение лишь волны ТЕМ, наше решение должно состоять из вынужденной волны этого типа, таких же отраженной и проходящей волн и бесконечного множества затухающих полей, локализованных слева и справа от точки $z = 0$.

Как уже указывалось, затухающие поля быстро убывают, и поэтому их амплитудные значения пренебрежимо малы уже на относительно малых расстояниях от точки их возникновения. В связи с этим может возникнуть естественный вопрос, какую же роль будут играть затухающие поля при распространении волн по линии? Влияние их проявляется двояко. Во-первых, от них зависит величина коэффициента отражения, под которым принято понимать отношение комплексной амплитуды незатухающей отраженной волны к комплексной амплитуде такой же падающей волны в плоскости отражения. Во-вторых, при большой амплитуде затухающих полей в местах их возникновения будут возникать значительные токи (в стенках). Если стенки имеют не слишком высокую проводимость, то эти токи могут быть причиной значительных потерь мощ-

ности. Любопытно отметить, что даже при достижении согласования (отсутствия отраженной волны) упомянутые токи приводят к неравенству мощностей падающей и проходящей волн на границе.

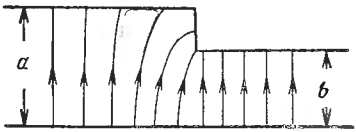


Рис. 12.3. Картина силовых линий поля в месте скачкообразного изменения расстояния между направляющими плоскостями.

Перейдем теперь к математической формулировке задачи. Из качественной картины электрического поля (рис. 12.3) следует, что искажение, вызванное изменением сечения, связано с появлением продольной составляющей $\dot{E}_z$ электрического поля. Таким образом, для удовлетворения граничных условий необходимо предположить, что кроме основной волны TEM существуют еще поля TM. Проекции векторов $\dot{E}$ и $\dot{H}$ этих полей на основании выражений, приведенных в § 2 гл. X, для области I можно записать в виде:

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_{x\,m} &= -\frac{\gamma_m^a}{i\omega\varepsilon}\dot{A}_m \cos\frac{m\pi}{a}x\,e^{\gamma_m^a z}, \\ \dot{E}_{zm} &= \frac{i}{\omega\varepsilon}\dot{A}_m \frac{m\pi}{a}\sin\frac{m\pi}{a}x\,e^{\gamma_m^a z}, \\ \dot{H}_{ym} &= \dot{A}_m \cos\frac{m\pi}{a}x\,e^{\gamma_m^a z}, \end{aligned}\right\} \qquad (12.6)$$

где $\gamma_m^a = \sqrt{\frac{m^2\pi^2}{a^2} - \omega^2\varepsilon\mu}$, и, соответственно, для области II

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_{xn} &= \frac{i\gamma_n^b}{i\omega\varepsilon}\dot{B}_n \cos\frac{n\pi}{b}x\,e^{-\gamma_n^b z}, \\ \dot{E}_{zn} &= \frac{i}{\omega\varepsilon}\dot{B}_n \frac{n\pi}{b}\sin\frac{n\pi}{b}x\,e^{-\gamma_n^b z}, \\ \dot{H}_{yn} &= \dot{B}_n \cos\frac{n\pi}{b}x\,e^{-\gamma_n^b z}, \end{aligned}\right\} \qquad (12.7)$$

где

$$\gamma_n^b = \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{b^2} - \omega^2\varepsilon\mu}.$$

Здесь мы, конечно, имеем в виду лишь поля, расходящиеся от места неоднородности в плоскости $z = 0$.

Нетрудно теперь получить общее поле в областях I и II, если просуммировать (12.6) и (12.7), а затем добавить к суммам еще

волны ТЕМ [см. выражение (10.43)]. В соответствии с этим для проекций $\dot{E}_x$ и $\dot{H}_y$ в области I при $z = 0$ будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_{x1} &= Z_0\,(\dot{A}_0' - \dot{A}_0'') + \frac{i}{\omega\varepsilon}\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_m^a\,\dot{A}_m\cos\frac{m\pi}{a}\,x, \\ \dot{H}_{y1} &= \dot{A}_0' + \dot{A}_0'' + \sum_{m=1}^{\infty}\dot{A}_m\cos\frac{m\pi}{a}\,x. \end{aligned}\right\} \tag{12.8}$$

Аналогично в области II

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_{x2} &= Z_0\,\dot{B}_0 - \frac{i}{\omega\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n^b\,\dot{B}_n\cos\frac{n\pi}{b}\,x, \\ \dot{H}_{y2} &= \dot{B}_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\dot{B}_n\cos\frac{n\pi}{b}\,x. \end{aligned}\right\} \tag{12.9}$$

Граничные условия в плоскости $z=0$ имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_{x1}|_{z=0} &= \begin{cases} \dot{E}_{x2}|_{z=0}, & 0<x<b, \\ 0\ , & b<x<a; \end{cases} \\ \dot{H}_{y1} &= \dot{H}_{y2}|_{z=0}, \qquad 0<x<b. \end{aligned}\right\} \tag{12.10}$$

Найдем теперь напряжение между проводами линии (в данном случае между нижним и верхним проводами), В области I

$$\dot{U}_1|_{z=0} = \int_0^a \dot{E}_{x1}\,dx = aZ_0\,(\dot{A}_0' - \dot{A}_0'')$$

и в области II

$$\dot{U}_2|_{z=0} = \int_0^b \dot{E}_{x2}\,dx = bZ_0\,\dot{B}_0.$$

Отсюда следует, что напряжение между проводами определяется только основной волной. Так как $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$ при $z = 0$ должны быть одинаковыми, то

$$a\,(\dot{A}_0' - \dot{A}_0'') = b\dot{B}_0$$

или

$$\dot{A}_0' - \dot{A}_0'' = \frac{b}{a}\,\dot{B}_0.$$

Условие равенства тангенциальных составляющих магнитного поля на границе приводит к следующему уравнению:

$$\dot{A}_0' + \dot{A}_0'' + \sum_{m=1}^{\infty} \dot{A}_m \cos \frac{m\pi}{a} x = \dot{B}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \dot{B}_n \cos \frac{n\pi}{b} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant b. \tag{12.11}$$

Интегрируя эти уравнения по x в пределах от 0 до b, получим

$$b(\dot{A}_0' + \dot{A}_0'') + \sum_{m=1}^{\infty} \dot{A}_m \int_0^b \cos \frac{m\pi}{a} x dx = b\dot{B}_0$$

или (12.12)

$$\dot{A}_0' + \dot{A}_0'' + \frac{a}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m\pi} \dot{A}_m \sin \frac{m\pi}{a} b = \dot{B}_0.$$

Но величина $(\dot{A}_0' + \dot{A}_0'')$ представляет собой комплексную амплитуду поверхностной плотности тока поперечных волн на нижней проводящей плоскости в области I при $z = 0$ (т. е. комплексную амплитуду тока на единицу ширины проводника). Точно такой же смысл имеет величина $\dot{B}_0$ для области II. Обозначая эти токи $\dot{I}_{10}$ и $\dot{I}_{20}$ соответственно, вместо (12.12) мы можем написать

$$\dot{I}_{20} - \dot{I}_{10} = \frac{a}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m\pi} \dot{A}_m \sin \frac{m\pi}{a} b. \tag{12.13}$$

Отсюда следует, что ток основной волны на границе соединения линий с разными поперечными размерами изменяется скачком. В соответствии с этим место соединения линий в точке $z = 0$ можно представить некоторой эквивалентной цепочкой, изображенной на рис. 12.4, *а*. Скачок тока в такой цепочке учитывается введением проводимости

$$Y_{\text{ш}} = \frac{\dot{I}_{10} - \dot{I}_{20}}{\dot{U}}, \tag{12.14}$$

где $\dot{U}$ — комплексная амплитуда напряжения основной волны между проводами в точке $z = 0$.

Из равенств (12.13), (12.14) видно, что $Y_{\text{ш}}$ обусловлена затухающими полями и, следовательно, она имеет реактивный характер.

На основании изложенного полную эквивалентную схему рассматриваемой неоднородной системы по отношению к основной вол-

не можно представить в виде совокупности двух длинных линий с волновыми сопротивлениями $Z_{л1}$ и $Z_{л2}$, в месте соединения которых включена дополнительная проводимость $Y_ш$ (рис. 12.4, *б*). Волновое сопротивление каждой линии в данном случае определяет-

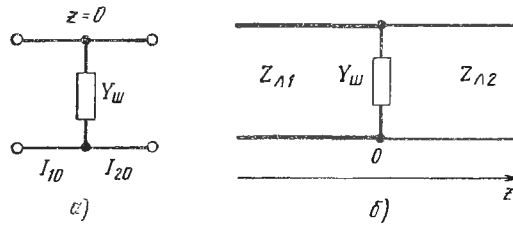


Рис. 12.4. Эквивалентная схема линии со скачкообразным изменением расстояния между направляющими плоскостями:
а — схема для точки $z=0$; *б* — полная эквивалентная схема.

ся как отношение комплексной амплитуды напряжения между проводами к комплексной амплитуде тока на единицу ширины проводящей поверхности в режиме бегущих волн.

3. Расчет параметров плоских неоднородностей

В этом параграфе мы остановимся на расчете параметров эквивалентной схемы рассмотренной выше плоской неоднородности.

Для определения проводимости $Y_ш$, учитывающей краевой эффект от соединения двух линий с различным сечением, следует использовать выражение (12.14). Подставляя сюда значение $\dot{U} = bZ_0\dot{B}_0$ и учитывая равенство (12.13), получим

$$Y_ш = -\frac{a}{b^2 Z_0 B_0}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m\pi}\dot{A}_m \sin\frac{m\pi}{a}b.$$

Задача расчета $Y_ш$ сводится, таким образом, к вычислению волновых амплитуд различных типов полей. Для расчета этих амплитуд обратимся к граничным условиям (12.10) в точке $z = 0$. Подставляя в первое условие значения $\dot{E}_{x1}$ и $\dot{E}_{x2}$ из (12.8) и (12.9), получим

$$Z_0(\dot{A}_0' - \dot{A}_0'') + \frac{i}{\omega\varepsilon}\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_m^a \dot{A}_m \cos\frac{m\pi}{a}x =$$

$$= \begin{cases} Z_0\dot{B}_0 - \dfrac{i}{\omega\varepsilon}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n^b \dot{B}_n \cos\frac{n\pi}{b}x & 0 \leqslant x \leqslant b, \\ 0 & b < x \leqslant a. \end{cases}$$

Умножим обе части этого равенства на $\cos\frac{l\pi}{a}x$, где $l = 1, 2, 3, \ldots$ и, интегрируя в пределах от 0 до a, с учетом свойств ортогональности тригонометрических функций будем иметь:

$$\frac{i}{\omega\varepsilon}\gamma_l^a \dot{A}_l \frac{a}{2} = Z_0 \dot{B}_0 \int_0^b \cos\frac{l\pi}{a}x\,dx -$$

$$-\frac{i}{\omega\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n^b \dot{B}_n \int_0^b \cos\frac{n\pi}{b}x\cos\frac{l\pi}{a}x\,dx.$$

Отсюда следует, что

$$\dot{A}_l = -\frac{i\omega\varepsilon}{\gamma_l^a} 2Z_0 \dot{B}_0 \frac{\sin\frac{l\pi}{a}b}{l\pi} -$$

$$-2\frac{\sin\frac{l\pi}{a}b}{\gamma_l^a\, l\pi}\sum_{n=1}^{b}\gamma_n^b \dot{B}_n \frac{(-1)^n}{\left[1-\left(\frac{na}{lb}\right)^2\right]}. \qquad (12.15)$$

Используем теперь равенство (12.11). Умножая это равенство на $\cos\frac{p\pi}{b}x$, где $p = 1,2,3, \ldots$ и, интегрируя обе части по x от 0 до b, получим

$$\dot{B}_p = (-1)^p \frac{2a}{b}\sum_{m=1}^{\infty}\dot{A}_m \frac{1}{m\pi}\frac{\sin\frac{m\pi}{a}b}{1-\left(\frac{pa}{mb}\right)^2}. \qquad (12.16)$$

Уравнения (12.15), (12.16) представляют собой бесконечные системы линейных алгебраических уравнений, определяющих амплитудные коэффициенты $\dot{A}_m$, $\dot{B}_n$ затухающих полей через коэффициент $\dot{B}_0$ основной волны.

Подставим далее значения $\dot{A}_l$ (при $l = m$) из уравнения (12.15) в выражение (12.14) для $Y_{ш}$. Это дает нам следующий результат:

$$Y_{ш} = i\omega\varepsilon\frac{2a}{b^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{m\pi}{b}a}{m^2\pi^2\gamma_m^a} -$$

$$-\frac{2a}{b^2 Z_0}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{m\pi}{b}a}{m^2\pi^2\gamma_m^a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\dot{B}_n}{\dot{B}_0}\gamma_n^b\frac{(-1)^n}{\left(\frac{na}{mb}\right)^2-1}. \qquad (12.17)$$

Таким образом, для расчета эквивалентной проводимости необходимо найти отношения $\dot{B}_n/\dot{B}_0$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$ С этой целью значения $\dot{A}_l$ из уравнения (12.15) придется подставить в уравнение (12.16). После несложных преобразований будем иметь

$$\frac{\dot{B}_p}{\dot{B}_0} = i\omega\varepsilon \frac{4a}{b} Z_0 (-1)^p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{m\pi}{a} b}{m^2 \pi^2 \gamma_m^a \left[\left(\frac{pa}{mb}\right)^2 - 1\right]} - (-1)^p \frac{4a}{b} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\dot{B}_n}{\dot{B}_0} \gamma_n^b \frac{\sin^2 \frac{m\pi}{a} b}{m^2 \pi^2 \gamma_m^a \left[\left(\frac{pa}{mb}\right)^2 - 1\right]} \frac{(-1)^n}{\left[\left(\frac{na}{mb}\right)^2 - 1\right]}. \quad (12.18)$$

Система (12.18) тоже содержит бесчисленное множество уравнений и бесчисленное множество неизвестных $\dot{B}_p/\dot{B}_0$. Давая индексу p определенные значения 1, 2, 3, 4 и т. д. и ограничивая число членов уравнений наивысшим значением p, мы получим конечное число уравнений, из которых приближенно можно определить конечное число неизвестных $\dot{B}_p/\dot{B}_0$.

Не останавливаясь на вопросе о возможных преобразованиях для удобства вычислений сумм, входящих в уравнения (12.18), приведем некоторые конечные результаты.

Анализ показывает, что эквивалентная проводимость $Y_{ш}$ имеет емкостной характер, т. е. $Y_{ш} = i\omega C_{ш}$, где

$$C_{ш} = \frac{2a}{b^2} \varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{m\pi}{b} a}{m^2 \pi^2 \gamma_m^a} - \frac{1}{i\omega\varepsilon} \frac{2a}{Z_0 b^2} \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{m\pi}{b} a}{m^2 \pi^2 \gamma_m^a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\dot{B}_n}{\dot{B}_0} \frac{\gamma_n^b (-1)^n}{\left(\frac{na}{mb}\right)^2 - 1}. \quad (12.19)$$

Подобный результат физически объясняется тем, что рассматриваемая неоднородность создает в линии затухающие поля поперечно-магнитного типа. А у таких полей, как можно показать, электрическая энергия на единицу длины линии превышает энергию магнитную.

Конкретные расчеты позволяют установить, что второй член в правой части равенства (12.19) относительно мал, и поэтому его

в большинстве случаев можно не учитывать. Таким образом, в первом приближении

$$C_{\text{ш}} \approx \frac{2a}{b^2}\,\varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{m\pi}{b}\,a}{m^2\,\pi^2\,\gamma_m^a}\,. \tag{12.20}$$

Если размеры сечения достаточно малы по сравнению с λ, то, учитывая, что слагаемые суммы быстро убывают с увеличением m, можно принять $\gamma_m^a = m\pi/a$. В этом случае

$$C_{\text{ш}} = \frac{2\varepsilon}{\pi^3}\,S_0(\alpha), \tag{12.21}$$

где

$$S_0(\alpha) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{m\pi}{b}\,a}{m^3\,\alpha^2}, \quad \alpha = \frac{b}{a}\,.$$

Функция $S_0(\alpha)$ табулирована. Ее значения приводятся в таблице.

α	$S_0(\alpha)$	α	$S_0(\alpha)$
0,01	42,117	0,09	20,453
0,02	35,276	0,10	19,418
0,03	31,276	0,12	17,630
0,04	28,439	0,14	16,123
0,05	26,924	0,16	14,822
0,06	24,442	0,18	13,678
0,07	22,924	0,20	12,659
0,08	21,611	0,25	10,518

Рассмотренный метод, естественно, может применяться для расчета эквивалентных параметров плоских неоднородностей и других типов. При этом в каждом конкретном случае надо составить уравнения непрерывности проекций $\dot{\bar{E}}$ и $\dot{\bar{H}}$, касательных к границе раздела, и найти их решение.

ОБЪЕМНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

1. Введение

В диапазонах ультракоротких и более длинных волн в качестве колебательной системы обычно применяется колебательный контур, состоящий из индуктивности L, емкости C и неизбежного активного сопротивления потерь R.

Основным параметром контура, как впрочем и любой другой колебательной системы, является резонансная частота (резонансная длина волны). Она определяет частоту колебаний внешнего источника (длину волны), при которой в системе наступает резонанс.

Другим важным параметром колебательной системы является добротность.

Из теории электрических цепей известно, что резонансная частота контура $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, а добротность $Q = \sqrt{\frac{L}{C}}/R$.

К сожалению, на волнах, более коротких, нежели те, о которых речь шла выше, колебательные системы подобного типа становятся практически непригодными.

Колебательный контур, используемый в диапазоне УКВ, как известно, имеет вид, изображенный на рис. 13.1.

В целях дальнейшего увеличения резонансной частоты такого контура приходится уменьшать его индуктивность, ибо минимальная величина емкости, как правило, ограничивается какими-то другими элементами устройства. А для этого необходимо уменьшать размеры витка, которые в конце концов будут иметь тот же порядок, что и длина волны. В результате контур начинает интенсивно излучать электромагнитную энергию в окружающее пространство и, следовательно, в нем существенно возрастают потери на излучение. Вместе с тем увеличиваются и тепловые потери вследствие силь-

ного поверхностного эффекта в проводниках. Все это приводит к тому, что добротность колебательного контура по мере укорочения резонансной волны уменьшается и уже на волнах дециметрового диапазона становится недопустимо низкой.

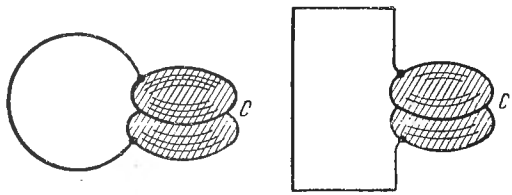


Рис. 13.1. Типы колебательных контуров в диапазоне УКВ.

Подключим к емкости C контура, изображенного на рис. 13.1, несколько витков $L_1, L_2, \ldots, L_n$ (рис. 13.2). В этом случае результирующая индуктивность контура, образованная параллельным соединением индуктивностей $L_1, L_2, \ldots, L_n$, уменьшится, а резонансная частота возрастет. При достаточно большом числе витков поверхности их сольются в одну общую поверхность, которая вместе с пластинами конденсатора полностью ограничит диэлектрический объем (рис. 13.3).

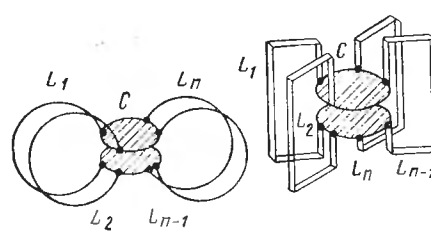


Рис. 13.2. Колебательные контуры диапазона УКВ с параллельно включенными индуктивностями.



Рис. 13.3. Тороидальные объемные резонаторы.

Совершенно очевидно, что в таких колебательных системах потери энергии на излучение практически отсутствуют, так как при высокой проводимости металлических стенок диэлектрический объем оказывается изолированным от окружающего пространства. Вместе с тем подобные системы характеризуются и малым уровнем тепловых потерь, так как проводники с током имеют весьма большие поверхности. Вследствие этого рассматриваемые колебательные системы, очевидно, будут обладать высокой добротностью.

Если исходный контур имеет вид, изображенный на рис. 13.4, то при увеличении числа металлических лент, соединяющих пласти-

ны конденсатора, мы получим систему с замкнутой металлической поверхностью прямоугольной или цилиндрической формы (рис. 13.5).

Колебательная система, представляющая собой диэлектрический объем, ограниченный, как правило, замкнутой металлической поверхностью, носит название объемного резонатора.

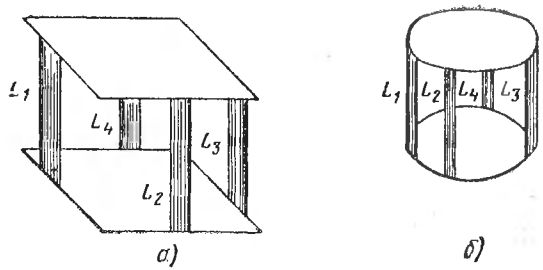


Рис. 13.4. Переход от колебательного контура к прямоугольному (*а*) и цилиндрическому (*б*) объемным резонаторам.

Обладая высокими резонансными частотами, а также имея большую добротность, объемные резонаторы находят широкое применение в диапазоне сверхвысоких частот.

Существует большое количество различных типов резонаторов, отличающихся друг от друга формой металлической поверхности.

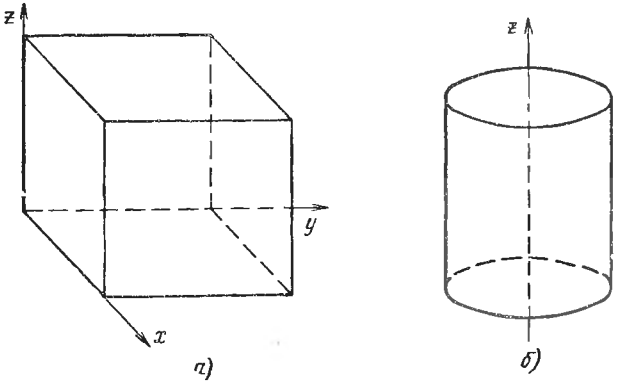


Рис. 13.5. Прямоугольный (*а*) и цилиндрический (*б*) резонаторы.

Так, например, резонаторы, приведенные на рис. 13.3, имеют поверхности, близкие к тороидальным. Поэтому они носят название тороидальных резонаторов. Далее, резонатор, внешний вид которого показан на рис. 13.5, *а*, называется прямо-

угольным, а резонатор, изображенный на рис. 13.5,*б* — цилиндрическим.

Проведенные выше рассуждения, разумеется, имеют формальный характер. Они, к сожалению, не вскрывают разницы между резонатором и колебательным контуром с сосредоточенными параметрами.

В действительности объемный резонатор является колебательной системой, которая, как будет показано ниже, существенно отличается от обычного колебательного контура.

Известно, что в колебательном контуре электрическое и магнитное поля отделены друг от друга (электрическое поле заключено главным образом в конденсаторе, а магнитное поле — в катушке индуктивности). Количественные соотношения, харктеризующие физические процессы в контуре, с достаточной степенью точности определяются уравнениями теории электрических цепей. Объемный же резонатор представляет собой систему, в которой электрические и магнитные поля в пространстве не разделены. Электромагнитные процессы в такой системе описываются не уравнениями электрических цепей, а уравнениями Максвелла.

Лишь в некоторых частных случаях резонаторы специальной формы приближенно можно рассматривать как некоторые колебательные контуры. Так, например, в тороидальных резонаторах, изображенных на рис. 13.3, электрическое поле, в основном, сосредоточено в «конденсаторной» части (между параллельными пластинами), а магнитное поле — в тороидальной части резонатора. Поэтому тороидальный резонатор приближенно может быть заменен эквивалентным ему колебательным контуром с сосредоточенными постоянными.

Ниже мы увидим, что объемный резонатор имеет бесчисленное множество резонансных частот. Поэтому даже тороидальный резонатор эквивалентен колебательному контуру лишь на одной резонансной частоте.

Таким образом, задача по определению параметров объемных резонаторов в общем случае сводится к решению уравнений Максвелла при соответствующих граничных условиях на стенках.

В некоторых случаях исследование электромагнитных полей в резонаторах упрощается за счет использования результатов, полученных при изучении процессов в других электродинамических системах.

Рассматривая, например, прямоугольный и цилиндрический резонаторы, изображенные на рис. 13.5, нетрудно убедиться, что они представляют собой отрезки прямоугольного и круглого цилиндрического волноводов, «закороченных» на концах проводящими плоскими экранами. Структура электромагнитного поля в в плоскости поперечного сечения этих резонаторов, естественно, должна быть аналогична структуре полей соответствующих волноводов.

Теоретическое исследование электромагнитных явлений в объемных резонаторах в общем случае представляет собой довольно сложную задачу. Однако в настоящее время теория объемных резонаторов существенно продвинута вперед. Первые исследования, посвященные расчету параметров резонаторов и вопросам их практического применения, были выполнены советским ученым М. С. Нейманом. Важную роль в развитии теории резонаторов сыграли работы Г. В. Кисунько, Л. А. Вайнштейна и др.

2. Собственные колебания в объемном резонаторе без потерь

Пусть в объемном резонаторе полностью отсутствуют потери электромагнитной энергии. Для этого, очевидно, необходимо, чтобы оболочка его обладала бесконечно большой проводимостью, а внутренний объем был заполнен идеальным диэлектриком. Кроме того, резонатор не должен быть связан с внешней нагрузкой.

Если в резонаторе источников поля нет, но начальные значения векторов поля отличны от нуля, то мы будем иметь так называемый режим собственных (свободных) колебаний.

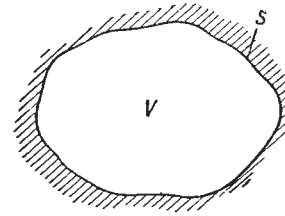


Рис. 13.6. К анализу собственных колебаний в объемном резонаторе.

Решение задачи о собственных колебаниях в резонаторе без потерь (рис. 13.6) сводится к интегрированию уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \overline{H} = \varepsilon \frac{\partial \overline{E}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \overline{E} = -\mu \frac{\partial \overline{H}}{\partial t} \tag{13.1}$$

в диэлектрическом объеме V при граничных условиях

$$\overline{E}_{\text{tg}} = 0 \big|_{\text{на } S}. \tag{13.2}$$

Для решения системы уравнений (13.1) преобразуем второе уравнение к виду

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \overline{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \overline{H}.$$

Подставляя сюда значение $\operatorname{rot}\overline{H}$ из первого уравнения (13.1), получим

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\overline{E}+\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\overline{E}}{\partial t^2}=0, \tag{13.3}$$

где

$$v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Решение уравнения (13.3) при условиях (13.2) будем искать методом разделения переменных

$$\overline{E}=f(t)\,\overline{E}_{\nu}(x, y, z). \tag{13.4}$$

Тогда вместо (13.3) можно написать

$$\overline{E}_{\nu}\frac{1}{v^2}\frac{f''(t)}{f(t)}+\operatorname{rot}\operatorname{rot}\overline{E}_{\nu}=0.$$

Так как второй член этого уравнения не зависит от t, то оно будет иметь смысл лишь в том случае, если и первый член его не зависит от времени, т. е.

$$\frac{f''(t)}{f(t)}=-\omega_{\nu}^2, \tag{13.5}$$

где ω_{ν}^2 — постоянная разделения.

Таким образом, исходное уравнение (13.3) приводится к двум уравнениям:

$$f''(t)+\omega_{\nu}^2 f(t)=0, \tag{13.6}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\overline{E}_{\nu}-k_{\nu}^2\overline{E}_{\nu}=0;\quad k_{\nu}^2=\frac{\omega_{\nu}^2}{v^2}, \tag{13.7}$$

причем первое из них определяет зависимость векторов электромагнитного поля от времени, а второе в совокупности с граничным условием

$$(\overline{E}_{\nu})_{\mathrm{tg}}=0\,|_{\text{на }S} \tag{13.8}$$

— распределение векторов поля в области V. В дальнейшем нам удобно полагать, что $\overline{E}_{\nu}$ является комплексной функцией $\overline{E}_{\nu}$ и что, следовательно, $\overline{E}$ в (13.4) тоже является комплексной функцией $\overline{E}_{\kappa}$.

Докажем, что входящая в уравнение (13.7) неизвестная величина k_{ν}^2 является существенно положительной. Для этого умножим

обе части уравнения скалярно на $\dot{\overline{E}}_\nu^*$ и проинтегрируем полученное равенство по объему V. В результате будем иметь

$$\int_V \dot{\overline{E}}_\nu^* \operatorname{rot}\operatorname{rot}\dot{\overline{E}}_\nu\, dV - k_\nu^2 \int_V \dot{\overline{E}}_\nu \dot{\overline{E}}_\nu^*\, dV = 0.$$

Используя формулу

$$\operatorname{div}(\overline{a}\times\overline{b}) = \overline{b}\operatorname{rot}\overline{a} - \overline{a}\operatorname{rot}\overline{b},$$

а также учитывая, что

$$\dot{\overline{E}}_\nu \dot{\overline{E}}_\nu^* = \left|\dot{\overline{E}}_\nu\right|^2, \quad \left(\operatorname{rot}\dot{\overline{E}}_\nu\right)\left(\operatorname{rot}\dot{\overline{E}}_\nu^*\right) = \left|\operatorname{rot}\dot{\overline{E}}_\nu\right|^2,$$

получим

$$-k_\nu^2 \int_V \left|\dot{\overline{E}}_\nu\right|^2 dV - \int_V \operatorname{div}\left(\dot{\overline{E}}_\nu^* \times \operatorname{rot}\dot{\overline{E}}_\nu\right) dV + \int_V \left|\operatorname{rot}\dot{\overline{E}}_\nu\right|^2 dV = 0. \quad (13.9)$$

Здесь под $\overline{a}$ мы подразумеваем вектор $\dot{\overline{E}}_\nu^*$, а под $\overline{b}$ — вектор $\operatorname{rot}\dot{\overline{E}}_\nu$. Далее, по теореме Гаусса—Остроградского имеем

$$\int_V \operatorname{div}\left(\dot{\overline{E}}_\nu^* \times \operatorname{rot}\dot{\overline{E}}_\nu\right) dV = \int_S \left(\dot{\overline{E}}_\nu^* \times \operatorname{rot}\dot{\overline{E}}_\nu\right)\overline{n}\, dS. \quad (13.9')$$

Кроме того, из граничных условий (13.8) вытекает, что $\overline{n}\times\dot{\overline{E}}_\nu^* = 0$ на S и

$$\left(\dot{\overline{E}}_\nu^* \times \operatorname{rot}\dot{\overline{E}}_\nu\right)\overline{n} = \left(\overline{n}\times\dot{\overline{E}}_\nu^*\right)\operatorname{rot}\dot{\overline{E}}_\nu = 0\Big|_{\text{на } S}.$$

Следовательно, уравнение (13.9) может быть переписано в виде

$$-k_\nu^2 \int_V \left|\dot{\overline{E}}_\nu\right|^2 dV + \int_V \left|\operatorname{rot}\dot{\overline{E}}_\nu\right|^2 dV = 0. \quad (13.10)$$

Отсюда вытекает, что

$$k_\nu^2 = \frac{\int_V \left|\operatorname{rot}\dot{\overline{E}}_\nu\right|^2 dV}{\int_V \left|\dot{\overline{E}}_\nu\right|^2 dV} \geqslant 0. \quad (13.11)$$

Решение уравнения (13.6) имеет вид $f_к(t) = \dot{A}e^{i\omega_\nu t}$, где ω_ν — вещественная величина. Стало быть, в соответствии с (13.4)

$$\overline{E}_к = \dot{\overline{E}}_\nu e^{i\omega_\nu t}, \quad (13.12)$$

т. е. $\overline{E}_к$ есть текущий комплекс вектора $\overline{E}$.

Подставив значение $\overline{E}_к$ из (13.12) во второе уравнение Максвелла и проинтегрировав его по времени, будем иметь

$$\overline{H}_к = \frac{1}{\omega_\nu \mu} \left(\operatorname{rot} \dot{\overline{E}}_\nu\right) e^{i\left(\omega_\nu t + \frac{\pi}{2}\right)} = \dot{\overline{H}}_\nu e^{i\omega_\nu t}, \qquad (13.12')$$

где

$$\dot{\overline{H}}_\nu = \frac{1}{\omega_\nu \mu} \operatorname{rot} \dot{\overline{E}}_\nu e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

(Постоянную интегрирования мы положили равной нулю.)

Итак, из выражений (13.12) и (13.12′) следует, что в отсутствие вынуждающих источников электромагнитное поле в идеальном резонаторе изменяется во времени по гармоническому закону с угловой частотой ω_ν. Между векторами $\overline{E}$ и $\overline{H}$ имеется фазовый сдвиг, равный $\pi/2$.

Выше уже было указано, что характер распределения электромагнитного поля (в частности, вектора $\overline{E}$) в области V определяется уравнением (13.7). По аналогии с другими рассмотренными граничными задачами электродинамики можно утверждать, что имеется бесчисленное множество функций, удовлетворяющих уравнению (13.7) при граничных условиях (13.8)*). Каждой такой функции, как это следует из (13.11), соответствует определенное значение постоянной k_ν, которая, в свою очередь определяет частоту собственных колебаний системы ω_ν—так называемую собственную частоту.

Таким образом, объемный резонатор в отличие от колебательного контура с сосредоточенными постоянными характеризуется бесконечным множеством собственных частот. Ниже на конкретных примерах будет показано, что каждая собственная частота резонатора соответствует определенному типу свободных колебаний. Однако в некоторых случаях различные типы колебаний могут иметь одинаковые собственные частоты. Такие колебания называются вырожденными.

Покажем, что для каждого типа собственных колебаний максимальное значение энергии электрического поля в резонаторе равно максимальному значению энергии магнитного поля. Максимумы энергии электрического и магнитного полей внутри рассматриваемой области V, как известно, определяются выражениями:

$$\left(W_E^{\text{макс}}\right)_\nu = \varepsilon \int_V \frac{1}{2} \left|\dot{\overline{E}}_\nu\right|^2 dV;$$

$$\left(W_м^{\text{макс}}\right)_\nu = \mu \int_V \frac{1}{2} \left|\dot{\overline{H}}_\nu\right|^2 dV.$$

*) Аналогичную картину мы наблюдаем, например, при изучении электромагнитных полей в волноводах.

Используя эти выражения, а также учитывая, что

$$\left|\dot{\overline{H}}_v\right|^2 = \dot{\overline{H}}_v \dot{\overline{H}}_v^* = \frac{1}{\omega_v^2 \mu^2} \left|\operatorname{rot} \dot{\overline{E}}_v\right|^2,$$

получим

$$(W_{\text{м}}^{\text{макс}})_v = \int\limits_V \frac{\mu}{2} \left|\dot{\overline{H}}_v\right|^2 dV = \frac{1}{2} \frac{1}{\omega_v^2 \mu} \int\limits_V \left|\operatorname{rot} \dot{\overline{E}}_v\right|^2 dV.$$

Используя затем выражение (13.10), будем иметь

$$(W_{\text{м}}^{\text{макс}})_v = \frac{1}{2} \frac{k_v^2}{\omega_v^2 \mu} \int\limits_V \left|\dot{\overline{E}}_v\right|^2 dV = \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_V \left|\dot{\overline{E}}_v\right|^2 dV = (W_E^{\text{макс}})_v. \quad (13.13)$$

Равенство (13.13), естественно, является следствием закона сохранения энергии. Его можно рассматривать как аналог известного соотношения

$$\frac{LI_m^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2}$$

для обычного колебательного контура, где L и C — индуктивность и емкость, а I_m и U_m — амплитуды тока и напряжения в контуре.

3. Собственные колебания в резонаторе с потерями. Добротность объемного резонатора

Если проводимость металлической поверхности S, ограничивающей резонатор, конечна, то электромагнитные процессы в нем, естественно, будут сопровождаться потерями энергии на нагревание. Если, кроме того, диэлектрик, заполняющий объем V, обладает некоторой проводимостью, то к потерям в металле добавляются еще потери энергии в диэлектрике. При наличии потерь, по аналогии с процессами в обычном колебательном контуре, можно утверждать, что амплитуды собственных колебаний в резонаторе будут экспоненциально убывать во времени, причем скорость затухания колебаний с увеличением потерь возрастает.

Рассмотрим собственные колебания в резонаторе, ограниченном металлической оболочкой с конечной проводимостью, полагая, что «диэлектрические» потери в нем отсутствуют. В этом случае касательные составляющие вектора $\dot{\overline{E}}$ на граничной поверхности резонатора должны быть отличны от нуля,

Следовательно, из выражений (13.9) и (13.9′) вытекает:

$$k_v^2 = \frac{\int\limits_V \left|\operatorname{rot} \dot{\bar{E}}_v\right|^2 dV - \int\limits_S \left(\dot{\bar{E}}_v^* \times \operatorname{rot} \dot{\bar{E}}_v\right) \bar{n}\, dS}{\int\limits_V \left|\dot{\bar{E}}_v\right|^2 dV}. \qquad (13.14)$$

Учитывая, что

$$\operatorname{rot} \dot{\bar{E}}_v = -i\omega_v \mu \dot{\bar{H}}_v,$$

$$\left|\operatorname{rot} \dot{\bar{E}}_v\right|^2 = \mu^2 \omega_v \omega_v^* \left|\dot{\bar{H}}_v\right|^2,$$

перепишем выражение (13.14) в виде

$$k_v^2 = \frac{\int\limits_V \left|\operatorname{rot} \dot{\bar{E}}_v\right|^2 dV}{\int\limits_V \left|\dot{\bar{E}}_v\right|^2 dV} \left\{ 1 + i \frac{1}{\mu\omega_v^*} \frac{\int\limits_S \left(\dot{\bar{E}}_v^* \times \dot{\bar{H}}_v\right) \bar{n}\, dS}{\int\limits_V \left|\dot{\bar{H}}_v\right|^2 dV} \right\}. \qquad (13.15)$$

Если потери в системе малы, то в начальном (нулевом) приближении можно полагать, что величина ω_v в правой части равенства (13.15) совпадает с собственной частотой ω_{0v} резонатора без потерь. С учетом этого приближения для поверхностного интеграла в (13.15) на основании приближенных граничных условий Леонтовича (см. § 12 гл. VI) получим

$$\frac{1}{\mu\omega_v^*} \int\limits_S \left(\dot{\bar{E}}_v^* \times \dot{\bar{H}}_v\right) \bar{n}\, dS \approx$$

$$\approx \frac{1}{\mu\omega_{0v}} \int\limits_S Z_S^* \left|\dot{\bar{H}}_{v\,\mathrm{tg}}\right|^2 dS = \frac{1}{\mu\omega_{0v}} \sqrt{\frac{\omega_{0v}^* \mu_1}{2g}} (1-i) \int\limits_S \left|\dot{\bar{H}}_{v\,\mathrm{tg}}\right|^2 dS.$$

Здесь Z_S — поверхностное сопротивление и μ_1 — магнитная проницаемость оболочки резонатора.

Так как $\sqrt{\frac{\omega_{0v}\mu_1}{2g}} = \frac{1}{2}\delta_0 \delta \omega_{0v}^* \mu_1$ ($\delta_0 = \sqrt{\frac{2}{\omega_{0v}\mu, g}}$ — глубина проникновения поля), то

$$\frac{1}{\mu\omega_v^*} \int \left(\dot{\bar{E}}_v^* \times \dot{\bar{H}}_v\right) \bar{n}\, dS \approx \frac{1}{2} \delta_0 \frac{\mu_1}{\mu} (1-i) \int\limits_S \left|\dot{\bar{H}}_{v\,\mathrm{tg}}\right|^2 dS. \qquad (13.16)$$

Далее, мы, очевидно, допустим небольшую ошибку, если векторы $\dot{\bar{E}}_\nu$ и $\dot{\bar{H}}_\nu$ в объемных интегралах (13.15) и вектор $\dot{\bar{H}}_{\nu tg}$ в поверхностном интеграле (13.16) заменим на величины $\dot{\bar{E}}_{0\nu}$, $\dot{\bar{H}}_{0\nu}$ и $\dot{\bar{H}}_{0\nu\,tg}$, рассчитанные для аналогичного резонатора без потерь*). Поэтому

$$k_\nu^2 \approx k_{0\nu}^2 \left\{ 1 + \frac{1}{2}\,\delta_0\,\frac{\mu_1}{\mu}\,(1+i)\,\frac{\int\limits_S \left|\dot{\bar{H}}_{0\nu\,tg}\right|^2 dS}{\int\limits_V \left|\dot{\bar{H}}_{0\nu}\right|^2 dV} \right\}, \qquad (13.17)$$

где $k_{0\nu}^2$ — величина, определяемая выражением (13.11).

Так как отношение поверхностного интеграла к объемному в равенстве (13.17), очевидно, имеет тот же порядок, что и S/V, а величина δ_0 в диапазоне сверхвысоких частот очень мала, то модуль второго слагаемого в (13.17) будет также мал. Поэтому, пренебрегая вещественной частью второго слагаемого, получим

$$k_\nu^2 \approx k_{0\nu}^2 \left\{ 1 + i\,\frac{\delta_0\,\mu_1}{2\mu}\,\frac{\int\limits_S \left|\dot{\bar{H}}_{0\nu\,tg}\right|^2 dS}{\int\limits_V \left|\dot{\bar{H}}_{0\nu}\right|^2 dV} \right\}$$

и

$$\omega_\nu^2 = k_\nu^2 v^2 \approx \omega_0^2 \left\{ 1 + i\,\frac{\delta_0\,\mu_1}{2\mu}\,\frac{\int\limits_S \left|\dot{\bar{H}}_{0\nu\,tg}\right|^2 dS}{\int\limits_V \left|\dot{\bar{H}}_{0\nu}\right|^2 dV} \right\},$$

где $\omega_0 = \omega_{0\nu}$, отсюда вытекает, что ω_ν в следующем, более высоком, приближении равна

$$\omega_\nu \approx \omega_0 \left\{ 1 + i\,\frac{1}{2Q_\nu} \right\}, \qquad (13.18)$$

причем

$$Q_\nu = \frac{2\mu}{\delta_0\,\mu_1}\,\frac{\int\limits_V \left|\dot{\bar{H}}_{0\nu}\right|^2 dV}{\int\limits_S \left|\dot{\bar{H}}_{0\nu\,tg}\right|^2 dS}. \qquad (13.19)$$

*) См. аналогичные рассуждения в § 8 гл. X.

Из равенств (13.12), (13.12′) и (13.18) следует, что векторы поля реального резонатора в режиме собственных колебаний определяются выражениями

$$\left.\begin{aligned}\overline{E}_{\text{к}} &\approx \dot{\overline{E}}_{\nu}\, e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q_\nu}}\, e^{i\omega_0 t},\\ \overline{H}_{\text{к}} &\approx \dot{\overline{H}}_{\nu}\, e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q_\nu}}\, e^{i\omega_0 t}.\end{aligned}\right\} \tag{13.20}$$

Таким образом, собственные частоты колебаний в резонаторе с потерями приблизительно равны собственным частотам резонатора без потерь. Но амплитуды собственных колебаний поля при наличии потерь действительно затухают во времени по экспоненциальному закону. Скорость затухания колебаний зависит от величины Q_ν, которую по аналогии с обычным контуром можно назвать добротностью объемного резонатора.

Учитывая, что средняя мощность потерь в оболочке резонатора

$$P_{\text{п}\nu} = \frac{1}{2}\,\text{Re}\int\limits_S \left(\dot{\overline{E}}_\nu \times \dot{\overline{H}}_\nu^*\right)\overline{n}\, dS \approx \frac{1}{2} R_S \int\limits_S \left|\dot{\overline{H}}_{0\nu\,\text{tg}}\right|^2 dS =$$

$$= \frac{1}{4}\,\omega_0 \mu_1 \delta_0 \int\limits_S \left|\dot{\overline{H}}_{0\nu\,\text{tg}}\right|^2 dS,$$

а энергия, запасенная в системе,

$$W_\nu = \frac{1}{2}\,\mu \int\limits_V \left|\dot{\overline{H}}_{0\nu}\right|^2 dV,$$

формулу (13.19) можно привести к обычному виду*)

$$Q_\nu = \omega_0 \frac{\text{энергия, запасенная в резонаторе}}{\text{средняя мощность потерь}} = \omega_0 \frac{W_\nu}{P_{\text{п}\nu}}. \tag{13.21}$$

Эта формула позволяет рассчитать добротность резонатора, если известно распределение поля в соответствующем резонаторе без потерь.

Определим примерную величину добротности объемного резонатора в сантиметровом диапазоне. Выше уже указывалось, что отношение объемного интеграла к поверхностному в выражении (13.19) имеет тот же порядок, что и отношение V/S. Поэтому

$$Q_\nu \approx \frac{V}{S\delta_0}. \tag{13.22}$$

---

*) Предположение о том, что энергия, запасенная в реальном резонаторе, равна максимальной энергии электрического или магнитного поля, конечно, справедливо приближенно, ибо фазовый сдвиг между векторами $\overline{E}$ и $\overline{H}$ на самом деле несколько отличен от 90°.

Так как линейные размеры резонатора обычно сравнимы с длиной волны собственных колебаний, а глубина проникновения поля δ_0 в сантиметровом диапазоне составляет десятитысячные доли сантиметра, то величина $Q_v \approx 10^4$.

Формула (13.21), разумеется, справедлива и для резонатора, заполненного диэлектриком с потерями. Только под $P_{пv}$ в этом случае следует понимать среднюю мощность потерь в стенках резонатора и в диэлектрике.

4. Прямоугольный резонатор

Для определения типов собственных колебаний в резонаторе без потерь необходимо решить уравнение (13.7) при граничных условиях (13.8). Однако, как уже отмечалось выше, прямоугольный или цилиндрический резонатор можно рассматривать как отрезок аналогичного волновода, закороченного на концах проводящими плоскими поверхностями. В этом случае вместо непосредственного решения уравнения (13.7) можно использовать результаты исследования соответствующего волновода.

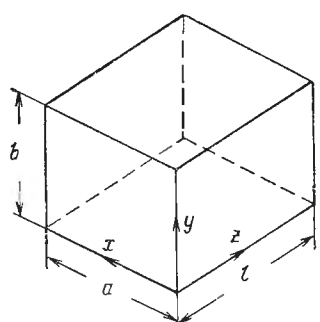


Рис. 13.7. К анализу собственных колебаний в прямоугольном резонаторе.

Учитывая последнее обстоятельство, перейдем к анализу собственных колебаний в прямоугольном резонаторе (рис. 13.7). На основании аналогии с прямоугольным волноводом можно утверждать, что в резонаторе будут существовать поля поперечно-электрического и поперечно-магнитного типов (предполагается, что ось волновода совпадает с осью z резонатора). При этом распределение поля вдоль оси z резонатора в отличие от волновода должно иметь характер стоячих волн.

Используя подобную методику, рассмотрим собственные колебания обоих типов по отдельности.

Поперечно-электрические колебания

Будем искать поле резонатора в виде совокупности двух волн TE_{mn}, распространяющихся по оси z в противоположных направлениях. Используя выражения (10.59) для поля прямой волны в волноводе и добавляя к ним проекции векторов $\dot{\bar{E}}$ и $\dot{\bar{H}}$ обратной волны, получим:

$$
\left.
\begin{aligned}
\dot{E}_x &= \frac{i\omega\mu}{k_c^2}\,\frac{n\pi}{b}\cos\frac{m\pi}{a}\,x\sin\frac{n\pi}{b}\,y\,(\dot{A}_{mn}\,e^{-\gamma_{mn}z}+\dot{B}_{mn}\,e^{\gamma_{mn}z}),\\
\dot{E}_y &= -\frac{i\omega\mu}{k_c^2}\,\frac{m\pi}{a}\sin\frac{m\pi}{a}\,x\cos\frac{n\pi}{b}\,y\,(\dot{A}_{mn}\,e^{-\gamma_{mn}z}+\dot{B}_{mn}\,e^{\gamma_{mn}z}),\\
\dot{E}_z &= 0,\\
\dot{H}_x &= \frac{\gamma_{mn}}{k_c^2}\,\frac{m\pi}{a}\sin\frac{m\pi}{a}\,x\cos\frac{n\pi}{b}\,y\,(\dot{A}_{mn}\,e^{-\gamma_{mn}z}-\dot{B}_{mn}\,e^{\gamma_{mn}z}),\\
\dot{H}_y &= \frac{\gamma_{mn}}{k_c^2}\,\frac{n\pi}{b}\cos\frac{m\pi}{a}\,x\sin\frac{n\pi}{b}\,y\,(\dot{A}_{mn}\,e^{-\gamma_{mn}z}-\dot{B}_{mn}\,e^{\gamma_{mn}z}),\\
\dot{H}_z &= \cos\frac{m\pi}{a}\,x\cos\frac{n\pi}{b}\,y\,(\dot{A}_{mn}\,e^{-\gamma_{mn}z}+\dot{B}e^{\gamma_{mn}z}).
\end{aligned}
\right\} \qquad (13.23)
$$

Угловая частота ω здесь пока остается неизвестной, ибо она является искомой частотой собственных колебаний. То же самое можно сказать и о постоянной распространения

$$
\gamma_{mn} = i\beta_{mn} = i\sqrt{\omega^2\varepsilon\mu-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2-\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} =
$$

$$
= i\sqrt{k^2-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2-\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}. \qquad (13.24)
$$

Выражения (13.23), как известно, удовлетворяют уравнениям Максвелла без источников, т. е. тем же уравнениям, что и поле свободных колебаний в резонаторе. Они также удовлетворяют граничным условиям на «боковых» стенках резонатора, совпадающих со стенками волновода.

Но поле в резонаторе должно еще удовлетворять граничным условиям на «торцевых» стенках, т. е.

$$
\dot{E}_x = \dot{E}_y = 0 \quad \text{при} \quad z = 0 \quad \text{и} \quad z = l.
$$

Легко убедиться, что проекции $\dot{E}_x$ и $\dot{E}_y$ на поверхности $z = 0$ будут обращаться в нуль, если

$$
\dot{B}_{mn} = -\dot{A}_{mn}. \qquad (13.25)
$$

Следовательно, волны, распространяющиеся по оси z в противоположных направлениях, имеют равные амплитуды, и совокупность их действительно образует стоячую волну.

Из выражений (13.23) получается, что при $z = l$ проекции

$$
\dot{E}_x = \dot{E}_y = 0, \quad \text{если} \quad \dot{A}_{mn}\,e^{-i\beta_{mn}l}+\dot{B}_{mn}\,e^{i\beta_{mn}l} = 0
$$

или с учетом (13.25)

$$\sin \beta_{mn} l = 0. \tag{13.26}$$

Отсюда вытекает, что $\beta_{mn} l = p\pi$,

$$\beta_{mn} = \frac{p\pi}{l}, \tag{13.27}$$

где p — целое число.

Подставив найденные значения $\dot{B}_{mn}$ и β_{mn} в (13.23), для проекций векторов поля в резонаторе будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{E}_x &= \frac{\omega\mu}{k_c^2}\frac{n\pi}{b}\dot{A}_{mnp}\cos\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\sin\frac{p\pi}{l}z,\\
\dot{E}_y &= -\frac{\omega\mu}{k_c^2}\frac{m\pi}{a}\dot{A}_{mnp}\sin\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y\sin\frac{p\pi}{l}z,\\
\dot{E}_z &= 0.\\
\dot{H}_x &= i\frac{p\pi}{l}\frac{1}{k_c^2}\frac{m\pi}{a}\dot{A}_{mnp}\sin\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y\cos\frac{p\pi}{l}z,\\
\dot{H}_y &= i\frac{p\pi}{l}\frac{1}{k_c^2}\frac{n\pi}{b}\dot{A}_{mnp}\cos\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\cos\frac{p\pi}{l}z,\\
\dot{H}_z &= -i\dot{A}_{mnp}\cos\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y\sin\frac{p\pi}{l}z.
\end{aligned}\right\} \tag{13.28}$$

Амплитудные коэффициенты $\dot{A}$ здесь мы снабдили тремя индексами m, n и p.

Таким образом, прямоугольный резонатор характеризуется множеством типов собственных поперечно-электрических колебаний. Каждый тип колебаний определяется числами m, n и p и обозначается TE_{mnp}.

Величины m и n здесь имеют тот же смысл, что и в прямоугольном волноводе, причем $m = 0, 1, 2, \ldots$; $n = 0, 1, 2, \ldots$ и $m = n \neq 0$. Что же касается нового числа p, то оно определяет число полуволн поля, укладывающихся на стороне l резонатора. Из выражений (13.28) видно, что это число в рассматриваемом случае может принимать значения $p = 1, 2, 3, \ldots$

Каждый тип поперечно-электрических колебаний в резонаторе имеет свою собственную угловую частоту ω_{mnp}. Последняя согласно выражениям (13.27) и (13.24) равна

$$\omega_{mnp} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}. \tag{13.29}$$

Угловой частоте ω_{mnp}, как обычно, соответствует собственная частота

$$f_{mnp}=\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2+\left(\frac{p}{l}\right)^2} \qquad (13.30)$$

и собственная длина волны

$$\lambda_{mnp}=\frac{c}{f_{mnp}}=\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}\,\frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2+\left(\frac{p}{l}\right)^2}}. \qquad (13.31)$$

Из выражения (13.29) — (13.31) видно, что чем больше значения m, n и p, тем выше собственная частота колебаний и тем короче собственная волна. Стало быть, высшие типы колебаний, характеризуемые большими значениями m, n и p, имеют более высокие собственные частоты по сравнению с низшими, простейшими типами.

Из этих же выражений следует, что для заданного типа колебаний (m, n и p фиксированы) собственная частота по мере увеличения размеров резонатора уменьшается, а собственная длина волны растет.

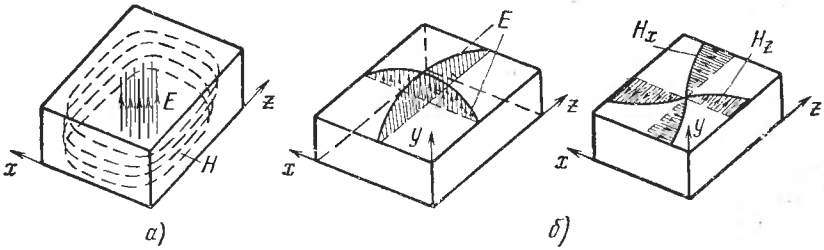


Рис. 13.8. Структура поля TE_{101} в прямоугольном резонаторе:
а — силовые линии векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$; *б* — зависимость проекций векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ от координат x и y (при $t=\text{const}$).

Простейшими типами поперечно-электрических колебаний в прямоугольном резонаторе, очевидно, являются колебания TE_{101} и TE_{011}. Эти колебания имеют самые низкие собственные частоты и соответственно самые большие собственные длины волн:

$$\left.\begin{aligned}\omega_{TE_{101}}&=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{l}\right)^2},\\ \lambda_{TE_{101}}&=\frac{2al}{\sqrt{a^2+l^2}}\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}};\end{aligned}\right\} \qquad (13.32)$$

$$\left.\begin{aligned}\omega_{\mathrm{TE}_{011}} &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\left(\frac{\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{\pi}{l}\right)^2},\\ \lambda_{\mathrm{TE}_{011}} &= \frac{2bl}{\sqrt{b^2+l^2}}\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}.\end{aligned}\right\} \qquad (13.33)$$

Они имеют также наиболее простую структуру поля.

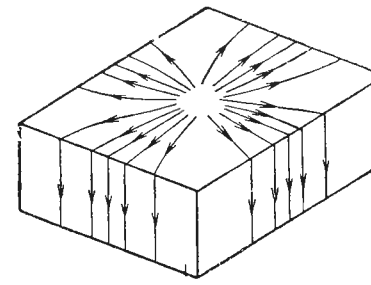


Рис. 13.9. Силовые линии вектора плотности тока в стенках прямоугольного резонатора с колебаниями TE_{101}.

Силовые линии векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ колебаний TE_{101} изображены на рис 13.8, *а*. Здесь же показаны кривые изменения проекций $\bar{E}$ и $\bar{H}$ по осям x и z (рис. 13.8, *б*).

На рис. 13.9 показаны также силовые линии вектора плотности тока, возбуждаемого полем TE_{101} в стенках резонатора.

Поперечно-магнитные колебания

Поле поперечно-магнитного типа в резонаторе представим в виде совокупности двух волноводных поперечно-магнитных волн TM_{mn}, распространяющихся по оси z в противоположных направлениях.

Используя выражения для компонент поля этих волн и проводя рассуждения, аналогичные предыдущим, можно показать, что проекции векторов $\dot{\bar{E}}$ и $\dot{\bar{H}}$ собственных колебаний поперечно-магнитного типа имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}\dot{E}_x &= -\frac{p\pi}{l}\,\frac{1}{k_c^2}\,\frac{m\pi}{a}\,\dot{B}_{mnp}\cos\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\sin\frac{p\pi}{l}z,\\ \dot{E}_y &= -\frac{p\pi}{l}\,\frac{1}{k_c^2}\,\frac{n\pi}{b}\,\dot{B}_{mnp}\sin\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y\sin\frac{p\pi}{l}z,\\ \dot{E}_z &= \dot{B}_{mnp}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\cos\frac{p\pi}{l}z,\\ \dot{H}_x &= i\,\frac{\omega\varepsilon}{k_c^2}\,\frac{n\pi}{b}\,B_{mnp}\sin\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y\cos\frac{p\pi}{l}z,\end{aligned}\right\} \qquad (13.34)$$

$$\dot{H}_y = -i\frac{\omega\varepsilon}{k_c^2}\frac{m\pi}{a}\dot{B}_{mnp}\cos\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\cos\frac{p\pi}{l}z,$$

$$\dot{H}_z = 0.$$

(Вывод формул (13.34) читателю рекомендуется провести самостоятельно.)

Таким образом, в прямоугольном резонаторе может существовать бесчисленное множество собственных поперечно-магнитных колебаний TM_{mnp}. Каждый тип колебаний характеризуется числами m, n и p, причем: $m = 1, 2, 3, \ldots$; $n = 1, 2, 3, \ldots$ и $p = 0, 1, 2 \ldots$

Как и в предыдущем случае, значения m, n и p определяют число полуволн поля, укладывающихся на сторонах a, b и l соответственно. Однако теперь число p может быть равно нулю, т. е. в резонаторе возможны поперечно-магнитные колебания TM_{mn0}. Из выражений (13.34) следует, что проекции векторов $\dot{\bar{E}}$ и $\dot{\bar{H}}$ такого поля вдоль оси z резонатора не меняются.

Собственные частоты и длины волн поперечно-магнитных колебаний в резонаторе определяются формулами (13.29)—(13.31), выведенными для колебаний TE_{mnp}. Подобное совпадение объясняется тем, что постоянные распространения волн TM_{mn} и TE_{mn} в прямоугольном волноводе имеют один и тот же вид.

Следует отметить, что поля TE и TM с одинаковыми значениями m, n и p обладают одинаковыми собственными частотами, т. е. здесь наблюдается случай вырождения, о котором уже говорилось выше.

Из множества поперечно-магнитных полей наименьшую собственную частоту имеют колебания TM_{110}. Последняя, как вытекает из (13.29), равна

$$\omega_{110} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}. \qquad (13.35)$$

Структура поля TM_{110} аналогична структуре поля TE_{101}. Однако эти поля по-разному ориентированы относительно осей x, y и z прямоугольной системы координат. (В случае колебаний TM_{110} вектор $\dot{\bar{E}}$ направлен вдоль оси z.)

Добротность прямоугольного резонатора

Используя формулу (13.21), рассчитаем добротность резонатора для колебаний TE_{101}.

Из выражений (13.28) следует, что составляющие векторов $\dot{\bar{E}}$ и $\dot{\bar{H}}$ поля TE_{101} имеют вид:

$$\dot{E}_y = -\omega\mu\frac{a}{\pi}\dot{A}_{101}\sin\frac{\pi}{a}x\sin\frac{\pi}{l}z = \dot{E}_0\sin\frac{\pi}{a}x\sin\frac{\pi}{l}z,$$

$$\dot{H}_x = i\frac{a}{l}\dot{A}_{101}\sin\frac{\pi}{a}x\cos\frac{\pi}{l}z = -i\frac{\lambda}{2l}\frac{\dot{E}_0}{Z_0}\sin\frac{\pi}{a}x\cos\frac{\pi}{l}z,$$

$$\dot{H}_z = -i\dot{A}_{101}\cos\frac{\pi}{a}x\sin\frac{\pi}{l}z = i\frac{\lambda}{2a}\frac{\dot{E}_0}{Z_0}\cos\frac{\pi}{a}x\sin\frac{\pi}{l}z,$$

где

$$\dot{E}_0 = -\omega\mu\frac{a}{\pi}\dot{A}_{101};\quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}.$$

Величина энергии электромагнитного поля в резонаторе равна

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon\int_V |\dot{\vec{E}}|^2 dV = \frac{1}{2}\varepsilon\int_0^a\int_0^b\int_0^l E_0^2\sin^2\frac{\pi}{a}x\times$$

$$\times\sin^2\frac{\pi}{l}z\,dxdydz = \frac{\varepsilon}{8}abl E_0^2.$$

Средняя мощность потерь в проводящей оболочке резонатора определяется выражением

$$P_\text{п} = \frac{1}{4}\omega_0\mu_1\delta_0\int_S |\dot{\vec{H}}|^2 dS = P_{\text{п}1} + P_{\text{п}2} + P_{\text{п}3},$$

где $P_{\text{п}1}$—мощность, теряемая в стенках $x=0$ и $x=a$ резонатора (рис. 13.7); $P_{\text{п}2}$—мощность, теряемая в стенках $z=0$ и $z=l$; $P_{\text{п}3}$—мощность, теряемая в верхнем и нижнем основаниях резонатора.

Нетрудно показать, что

$$P_{\text{п}1} = \frac{1}{2}\omega_0\mu_1\delta_0\int_0^b\int_0^l\frac{E_0^2}{Z_0^2}\frac{\lambda^2}{4a^2}\sin^2\frac{\pi z}{l}\,dy\,dz = \frac{\omega_0 bl\lambda^2}{16Z_0^2a^2}E_0^2\mu_1\delta_0.$$

Аналогично,

$$P_{\text{п}2} = \frac{1}{2}\omega_0\mu_1\delta_0\int_0^a\int_0^b\frac{E_0^2}{Z_0^2}\frac{\lambda^2}{4l^2}\sin^2\frac{\pi x}{a}\,dx\,dy = \frac{\omega_0 ab\lambda^2}{16Z_0^2l^2}E_0^2\mu_1\delta_0;$$

$$P_{\text{п}3} = \frac{1}{2}\omega_0\mu_1\delta_0\int_0^a\int_0^l\frac{E_0^2}{Z_0^2}\left(\frac{\lambda^2}{4l^2}\sin^2\frac{\pi x}{a}\cos^2\frac{\pi z}{l} + \frac{\lambda^2}{4a^2}\times\right.$$

$$\left.\times\cos^2\frac{\pi x}{a}\sin^2\frac{\pi z}{l}\right)dx\,dz = \frac{\omega_0\mu_1\delta_0\lambda^2}{32Z_0^2}E_0^2\left(\frac{a}{l}+\frac{l}{a}\right).$$

Тогда

$$P_\text{п} = \frac{\omega_0\mu_1\delta_0\lambda^2}{16Z_0^2}E_0^2\left(\frac{bl}{a^2}+\frac{ab}{l^2}+\frac{a}{2l}+\frac{l}{2a}\right).$$

Подставляя найденные значения W и $P_{\text{п}}$ в формулу (13.21), получим

$$Q_{\text{TE}_{101}} = 2\frac{\varepsilon}{\mu_1} Z_0^2 \frac{abl}{\delta_0 \lambda^2} \frac{1}{\frac{bl}{a^2} + \frac{ab}{l^2} + \frac{a}{2l} + \frac{l}{2a}}.$$

Так как величину $\lambda = \lambda_{101}$ можно выразить через размеры резонатора по формуле (13.32), то

$$Q_{\text{TE}_{101}} = \frac{1}{2} \frac{\mu}{\mu_1} \frac{b}{\delta_0} \frac{a^2 + l^2}{\frac{bl^2}{a} + \frac{a^2 b}{l} + \frac{a^2}{2} + \frac{l^2}{2}}. \qquad (13.36)$$

Последнее выражение значительно упрощается, если резонатор имеет форму куба, т. е. $a = b = l$. В этом случае

$$Q_{\text{TE}_{101}} = \frac{1}{3} \frac{\mu}{\mu_1} \frac{a}{\delta_0}. \qquad (13.37)$$

Из выражений (13.36) следует, что добротность прямоугольного резонатора с колебаниями TE_{101} зависит от размера b. При малой величине b добротность увеличивается с ростом b приблизительно по линейному закону. При больших b величина Q от b почти не зависит.

Таким образом, несмотря на то, что собственная волна колебаний TE_{101} от размера b не зависит, чрезмерное уменьшение его нежелательно, так как при этом значительно понижается добротность.

Чтобы получить представление о численном значении добротности прямоугольного резонатора на сантиметровых волнах, воспользуемся формулой (13.37), в которой величину a выразим через собственную частоту $f_{\text{TE}_{101}} = f$. Используя формулу (13.32) при $a = l$, получим:

$$Q_{\text{TE}_{101}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \frac{\mu}{\mu_1} \frac{v}{f\delta_0}; \qquad v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Предположим, что резонатор имеет медные стенки. В этом случае:

$$\mu_1 = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{гн}}{\text{м}}; \qquad \delta_0 = \frac{0{,}066}{\sqrt{f\,(\text{гц})}}\ [\text{м}].$$

Следовательно,

$$Q_{\text{TE}_{101}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \frac{v}{0{,}066\sqrt{f}} \approx \frac{v}{0{,}28\sqrt{f}}.$$

Если резонатор заполнен воздухом, то при частоте $f = 3000$ *Мгц* ($\lambda = 10$ *см*) получается, что

$$Q_{\text{TE}_{101}} \approx 19\,600.$$

Для той же частоты добротность латунного резонатора

$$Q_{TE_{101}} \approx 10\,000.$$

В реальных устройствах часть энергии из резонатора обычно передается в связанные с ним элементы. Поэтому добротность такого нагруженного резонатора оказывается меньше вычисленной выше собственной его добротности.

5. Цилиндрический резонатор

Рассматривая цилиндрический резонатор как отрезок круглого волновода, закрытого на концах идеально проводящими плоскими поверхностями (рис. 13.10), мы можем сразу же сказать, что в нем существуют электромагнитные колебания поперечно-электрического и поперечно-магнитного типов.

Если в исходном круглом волноводе распространяется волна TE_{mn}, то в соответствующем цилиндрическом резонаторе образуются колебания TE_{mnp}. Аналогично, волнам TM_{mn} волновода соответствуют колебания типа TM_{mnp} цилиндрического резонатора.

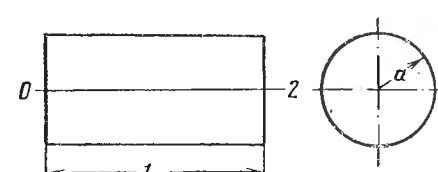


Рис. 13.10. К анализу собственных колебаний в цилиндрическом резонаторе.

Различные типы колебаний в резонаторе характеризуются тремя числами m, n и p. Значения m и n имеют тот же смысл, что и в волноводе, а величина p определяет число полуволн поля, укладывающихся вдоль оси z резонатора.

В случае поперечно-электрического поля вектор $\overline{E}$ лежит в плоскости $z = \text{const}$ и, следовательно, обращается в нуль на торцевых стенках резонатора. Так как поле резонатора при $p = 0$ не должно изменяться вдоль оси z (по оси z не укладывается ни одной полуволны), то $\overline{E}$ всюду будет равен нулю. Значит поле TE_{mnp} в резонаторе при $p = 0$ не существует.

В поперечно-магнитном поле вектор $\overline{E}$ при $p = 0$ в нуль не обращается, ибо теперь $\overline{E}$ имеет еще продольную составляющую E_z, перпендикулярную торцевым стенкам. Следовательно, колебания TM_{mnp} в резонаторе при $p = 0$ существуют.

Таким образом, в случае поперечно-электрических колебаний $m = 0, 1, 2, \ldots$; $n = 1, 2, 3, \ldots$; $p = 1, 2, 3, \ldots$, и в случае попе-

речно-магнитных колебаний $m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\quad n = 1, 2, 3, \ldots;$ $p = 0, 1, 2, \ldots$

Рассмотрим собственные колебания в цилиндрическом резонаторе с наименьшими собственными частотами.

Среди множества поперечно-электрических колебаний в резонаторе минимальную собственную частоту, очевидно, будет иметь колебание TE_{111}. Электромагнитное поле этого типа может быть представлено в виде суммы волн TE_{11}, распространяющихся вдоль оси z (рис. 13.10) в противоположных направлениях. Используя выражения (10.95) при $m = n = 1$ и учитывая, что для волны, распространяющейся в направлении убывающих значений z, величину $\gamma_{mn} = i\beta_{mn}$ необходимо заменить на $-i\beta_{mn}$, получим:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{E}_\rho &= \frac{i\omega\mu}{k_c^2}\,\frac{1}{\rho}\,J_1\left(\nu_{11}\frac{\rho}{a}\right)\sin\varphi\,\left[\dot{A}_{11}\,e^{-i\beta_{11}z} + \dot{B}_{11}\,e^{i\beta_{11}z}\right],\\
\dot{E}_\varphi &= \frac{i\omega\mu}{k_c}\,J_1'\left(\nu_{11}\frac{\rho}{a}\right)\cos\varphi\,\left[\dot{A}_{11}\,e^{-i\beta_{11}z} + \dot{B}_{11}\,e^{i\beta_{11}z}\right],\\
\dot{E}_z &= 0,\\
\dot{H}_\rho &= -\frac{i\beta_{11}}{k_c}\,J_1'\left(\nu_{11}\frac{\rho}{a}\right)\cos\varphi\,\left[\dot{A}_{11}\,e^{-i\beta_{11}z} - \dot{B}_{11}\,e^{i\beta_{11}z}\right],\\
\dot{H}_\varphi &= \frac{i\beta_{11}}{k_c^2}\,\frac{1}{\rho}\,J_1\left(\nu_{11}\frac{\rho}{a}\right)\sin\varphi\,\left[\dot{A}_{11}\,e^{-i\beta_{11}z} - \dot{B}_{11}\,e^{i\beta_{11}z}\right],\\
\dot{H}_z &= J_1\left(\nu_{11}\frac{\rho}{a}\right)\cos\varphi\,\left[\dot{A}_{11}\,e^{-i\beta_{11}z} + \dot{B}_{11}\,e^{i\beta_{11}z}\right].
\end{aligned}\right\} \qquad (13.38)$$

Выражения (13.38) будут удовлетворять граничным условиям

$$\left.\begin{aligned}
\dot{E}_\rho &= 0 \quad \text{при} \quad z = 0 \quad \text{и} \quad z = l,\\
\dot{E}_\varphi &= 0 \quad \text{при} \quad z = 0 \quad \text{и} \quad z = l,
\end{aligned}\right\} \qquad (13.39)$$

если

$$\dot{B}_{11} = -\dot{A}_{11} \quad \text{и} \quad \sin\beta_{11} l = 0, \qquad (13.40)$$

откуда следует, что

$$\beta_{11} l = l\sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - \left(\frac{\nu_{11}}{a}\right)^2} = p\pi; \quad p = 1,\ 2,\ \ldots \qquad (13.41)$$

Из равенства (13.41) вытекает, что собственные частоты колебаний TE_{11p} в цилиндрическом резонаторе равны

$$\omega_{\mathrm{TE}_{11p}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\left(\frac{\nu_{11}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2},$$

а соответствующие им собственные длины волн

$$\lambda_{\mathrm{TE}_{11p}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\nu_{11}}{2\pi a}\right)^2 + \left(\frac{p}{2l}\right)^2}} \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0 \mu_0}}.$$

Так как $\nu_{11} = 1{,}84$, то при $p = 1$

$$\omega_{\mathrm{TE}_{111}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{1{,}84}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2}, \tag{13.42}$$

$$\lambda_{\mathrm{TE}_{111}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{0{,}293}{a}\right)^2 + \frac{1}{4l^2}}} \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0 \mu_0}}. \tag{13.43}$$

Используя (13.40) и (13.41) в совокупности с (13.38), получим окончательные выражения для составляющих поля TE_{111}:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{E}_\rho &= \frac{\omega\mu}{k_c^2} \frac{1}{\rho} \dot{A}_{111} J_1\left(\nu_{11} \frac{\rho}{a}\right) \sin\varphi \sin\frac{\pi}{l} z, \\
\dot{E}_\varphi &= \frac{\omega\mu}{k_c} \dot{A}_{111} J_1'\left(\nu_{11} \frac{\rho}{a}\right) \cos\varphi \sin\frac{\pi}{l} z, \\
\dot{E}_z &= 0, \\
\dot{H}_\rho &= -i \frac{1}{k_c} \frac{\pi}{l} \dot{A}_{111} J_1'\left(\nu_{11} \frac{\rho}{a}\right) \cos\varphi \cos\frac{\pi}{l} z, \\
\dot{H}_\varphi &= i \frac{1}{k_c^2} \frac{\pi}{l\rho} \dot{A}_{111} J_1\left(\nu_{11} \frac{\rho}{a}\right) \sin\varphi \cos\frac{\pi}{l} z, \\
\dot{H}_z &= -i \dot{A}_{111} J_1\left(\nu_{11} \frac{\rho}{a}\right) \cos\varphi \sin\frac{\pi}{l} z.
\end{aligned}\right\} \tag{13.44}$$

Структура поля этого типа изображена на рис. 13.11.

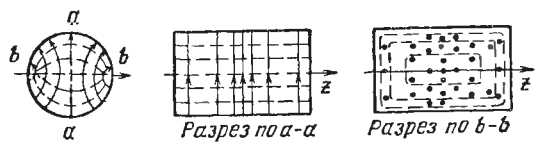


Рис. 13.11. Силовые линии векторов $\overline{E}$ и $\overline{H}$ колебаний TE_{111} в цилиндрическом резонаторе.

Аналогичным путем можно показать, что собственные длины волн колебаний TE_{mnp} в цилиндрическом резонаторе определяются выражением

$$\lambda_{TE_{mnp}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\nu_{mn}}{2\pi a}\right)^2 + \left(\frac{p}{2l}\right)^2}} \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0 \mu_0}}. \qquad (13.45)$$

Из множества колебаний поперечно-магнитного типа в цилиндрическом резонаторе наименьшей собственной частотой будут обладать колебания TM_{010}. Компоненты поля этого типа могут быть представлены в виде суммы проекций векторов полей двух электромагнитных волн TM_{01}, распространяющихся по оси z резонатора в противоположных направлениях.

Составляющие поля волны TM_{01} имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_\rho &= -\frac{i\beta_{01}}{k_c} \dot{B}_{01} J_0'\left(\varkappa_{01}\frac{\rho}{a}\right) e^{-i\beta_{01} z}, \\ \dot{E}_z &= \dot{B}_{01} J_0\left(\varkappa_{01}\frac{\rho}{a}\right) e^{-i\beta_{10} z}, \\ \dot{H}_\varphi &= -i\frac{\omega\varepsilon}{k_c} \dot{B}_{01} J_0'\left(\varkappa_{01}\frac{\rho}{a}\right) e^{-i\beta_{01} z}. \end{aligned}\right\} \qquad (13.46)$$

(Эти выражения получаются из (10.102), если там положить $m = 0$; $n = 1$ и γ_{01} заменить на $i\beta_{01}$.)

Проделав несложные преобразования, аналогичные предыдущим, для поля TM_{01p} в резонаторе будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_\rho &= -\frac{p\pi}{l}\frac{1}{k_c} \dot{B}_{01p} J_0'\left(\varkappa_{01}\frac{\rho}{a}\right) \sin\frac{p\pi}{l} z, \\ \dot{E}_z &= \dot{B}_{01p} J_0\left(\varkappa_{01}\frac{\rho}{a}\right) \cos\frac{p\pi}{l} z, \\ \dot{H}_\varphi &= -i\frac{\omega\varepsilon}{k_c} \dot{B}_{01p} J_0'\left(\varkappa_{01}\frac{\rho}{a}\right) \cos\frac{p\pi}{l} z. \end{aligned}\right\} \qquad (13.47)$$

Собственные частоты и длины волн таких колебаний определяются формулами:

$$\left.\begin{aligned} \omega_{TM_{01p}} &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{\varkappa_{01}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}, \\ \lambda_{TM_{01p}} &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\varkappa_{01}}{2\pi a}\right)^2 + \left(\frac{p}{2l}\right)^2}} \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0 \mu_0}}. \end{aligned}\right\} \qquad (13.48)$$

При $p=0$ выражения (13.47) и (13.48) принимают вид:

$$\dot{E}_z = \dot{B}_{010} J_0\left(\varkappa_{01} \frac{\rho}{a}\right),$$

$$\dot{H}_\varphi = -i \frac{\omega\varepsilon}{k_c} \dot{B}_{010} J_1\left(\varkappa_{01} \frac{\rho}{a}\right),$$

$$\omega_{TM_{010}} = \frac{k_c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{\varkappa_{01}}{a\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

$$\lambda_{TM_{010}} = \frac{2\pi}{k_c} \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}} = 2{,}61\, a \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}.$$

Подставляя найденное значение $\omega_{TM_{010}}$ в формулу для $\dot{H}_\varphi$ получим окончательно:

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_z &= \dot{B}_{010} J_0\left(\varkappa_{01} \frac{\rho}{a}\right), \\ \dot{H}_\varphi &= -i \frac{\dot{B}_{010}}{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}} J_1\left(\varkappa_{01} \frac{\rho}{a}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (13.49)$$

Структура электромагнитного поля TM_{010} в цилиндрическом резонаторе изображена на рис. 13.12.

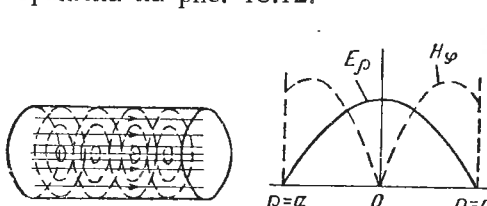


Рис. 13.12. Колебания TM_{010} в цилиндрическом резонаторе.

Рассчитаем добротность цилиндрического резонатора с колебаниями TM_{010}. Для этого вычислим энергию электромагнитного поля в резонаторе

$$W_v = W_{Ev}^{\text{макс}} = \frac{1}{2} \varepsilon \int_V \left|\dot{\bar{E}}_v\right|^2 dV$$

и среднюю мощность потерь $P_п$. Так как согласно (13.49)

$$\left|\dot{\bar{E}}_v\right|^2 = B_{010}^2 J_0^2\left(\varkappa_{01} \frac{\rho}{a}\right),$$

то

$$W_{\nu} = \pi\varepsilon B_{010}^2\, l \int_0^a J_0^2\left(\varkappa_{01}\frac{\rho}{a}\right)\rho\, d\rho = \pi\varepsilon l B_{010}^2\, J_1^2(\varkappa_{01})\frac{a^2}{2}. \quad (13.50)$$

Средняя мощность потерь в проводящей оболочке резонатора равна

$$P_{\text{пр}\nu} = \frac{\omega_0}{4}\mu_1\delta_0\int_S |\dot{\bar{H}}_{\nu}|^2\, dS = \frac{\omega_0}{2}\mu_1\delta_0\int_0^{2\pi}\int_0^a |\dot{\bar{H}}_{\nu}|^2\,\rho\, d\rho\, d\varphi +$$

$$+\frac{\omega_0}{4}\mu_1\delta_0\int_0^{2\pi}\int_0^l |\dot{\bar{H}}_{\nu}|^2\, a\, d\varphi\, dz;$$

$$\omega_0 = \omega_{\text{ТМ}_{010}}.$$

Подставляя сюда значение $\dot{\bar{H}}_{\nu}$ из выражений (13.49), получим

$$P_{\text{пр}\nu} = \frac{\omega_0}{4}\mu_1\sigma_0\frac{\varepsilon}{\mu}\left\{4\pi\int_0^a J_1^2\left(\varkappa_{01}\frac{\rho}{a}\right)\rho d\rho + 2\pi a l\, J_1^2(\varkappa_{01})\right\} B_{010}^2.$$

Но

$$\int_0^a J_1^2\left(\varkappa_{01}\frac{\rho}{a}\right)\rho d\rho = \frac{a^2}{2}J_1^2(\varkappa_{01}),$$

следовательно,

$$P_{\text{пр}\nu} = \frac{\omega_0}{2}\pi\mu_1\delta_0\frac{\varepsilon}{\mu}B_{010}^2\, J_1^2(\varkappa_{01})\, a(a+l). \quad (13.51)$$

Подставив (13.50) и (13.51) в формулу (13.21) для добротности объемного резонатора, находим, что

$$Q_{\text{ТМ}_{010}} = \frac{\mu}{\mu_1}\frac{al}{\delta_0(a+l)} = \frac{2\mu}{\mu_1}\frac{V}{\delta_0 S},$$

где V — объем резонатора, а S — поверхность его. Из этого выражения вытекает, что порядок величины Q для цилиндрического резонатора, как и следовало ожидать, совпадает с (13.22).

Анализ собственных колебаний в «волноводных» резонаторах других типов может быть проведен аналогично.

Условие, определяющее собственные частоты резонатора «волноводного» типа, имеет вид

$$\sin\beta_{mn} l = \sin\left(l\sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - k_c^2}\right) = 0,$$

откуда следует, что

$$\omega = \omega_{mnp} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{k_c^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}. \quad (13.52)$$

Здесь k_c — величина, характеризующая волны ТЕ и ТМ в соответствующем волноводе.

В случае поперечно-магнитных колебаний индекс p, как уже говорилось, может принимать нулевые значения. При этом собственные частоты колебаний TM_{mn0} оказываются равными критическим частотам поперечно-магнитных волн TM_{mn} волновода. Действительно, из выражения (13.52) следует, что при $p = 0$

$$\omega_{\mathrm{TM}_{mn0}} = k_c v = (\omega_{\mathrm{кр}})_{\mathrm{TM}_{mn}}.$$

6. Коаксиальный резонатор

Коаксиальный резонатор представляет собой отрезок коаксиальной линии, закороченной на концах проводящими плоскостями (рис. 13.13, *а*).

Для анализа собственных колебаний в коаксиальном резонаторе целесообразно использовать тот же самый метод, который был применен к исследованию электромагнитных полей в «волноводных» резонаторах.

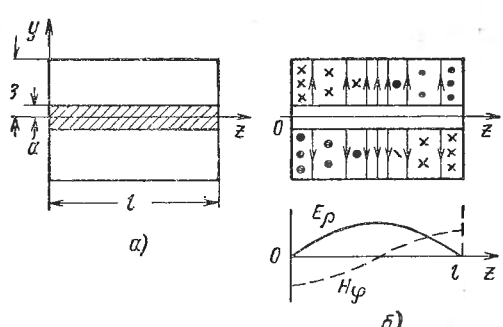


Рис. 13.13. К анализу собственных колебаний в коаксиальном резонаторе:
а — вид коаксиального резонатора; *б* — структура поля ТЕМ при $p = 1$.

В соответствии с этим методом можно утверждать, что в коаксиальном резонаторе существует множество типов поперечно-электрических и поперечно-магнитных колебаний. Каждый тип таких колебаний характеризуется своим распределением поля в плоскости поперечного сечения резонатора и числом полуволн поля, укладывающихся в осевом направлении.

Однако в коаксиальном резонаторе в отличие от резонаторов «волноводного» типа могут также существовать поперечные собственные колебания, соответствующие поперечной электромагнит-

ной волне коаксиальной линии. Подобные колебания мы будем обозначать, как принято, ТЕМ.

Поле поперечно-электромагнитных колебаний в резонаторе может быть представлено в виде суммы двух поперечно-электромагнитных волн, распространяющихся вдоль оси z в противоположных направлениях. В соответствии с этим для проекций векторов поперечного поля [см. выражения (11.18)] напишем:

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_\rho &= \frac{1}{\rho}\left(\dot{A}\,e^{-ikz} + \dot{B}\,e^{ikz}\right), \\ \dot{H}_\varphi &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\frac{1}{\rho}\left(\dot{A}\,e^{-ikz} - \dot{B}\,e^{ikz}\right). \end{aligned}\right\} \tag{13.53}$$

Электромагнитное поле (13.53) будет удовлетворять граничным условиям

$$\dot{E}_\rho = 0 \text{ при } z = 0 \text{ и } z = l,$$

если

$$\dot{A} = -\dot{B} \text{ и } \sin kl = 0.$$

С учетом последних соотношений составляющие векторов $\dot{E}$ и $\dot{H}$ поля ТЕМ в коаксиальном резонаторе окончательно принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_\rho &= \dot{A}_0\,\frac{\sin kz}{\rho}, \\ \dot{H}_\varphi &= i\,\frac{\dot{A}}{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}\,\frac{\cos kz}{\rho}, \end{aligned}\right\} \tag{13.54}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \dot{A}_0 &= i2\dot{B}, \\ k &= \frac{p\pi}{l};\quad p = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}\right\} \tag{13.55}$$

Из равенства (13.55) вытекает, что собственные частоты этих колебаний равны

$$\omega_{\text{ТЕМ}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\,\frac{p\pi}{l}, \tag{13.56}$$

а соответствующие им собственные длины волны

$$\lambda_{\text{ТЕМ}} = \frac{2\pi c}{\omega_{\text{ТЕМ}}} = \frac{2l}{p}\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}};\quad p = 1, 2, 3, \ldots \tag{13.57}$$

Структура поля поперечно-электромагнитных колебаний ТЕМ в коаксиальном резонаторе при $p = 1$ изображена на рис. 13.13, *б*.

Для вычисления добротности подобного резонатора можно использовать формулу (13.19). Проведя несложные преобразования, получим при $p = 1$:

$$Q_{\text{ТЕМ}} = \frac{\mu}{2\mu_1 \delta_0} \frac{l}{1 + \frac{l}{2a_0}}, \qquad (13.58)$$

где

$$\frac{1}{a_0} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2 \ln \frac{b}{a}}.$$

7. Объемные резонаторы с квазисосредоточенными параметрами

Строгий расчет собственных частот и других параметров объемного резонатора, оказывается, возможно провести лишь в том случае, когда резонатор ограничен проводящей оболочкой простой геометрической формы.

Однако на практике довольно часто применяются резонаторы, металлическая оболочка которых представляет сложную геометрическую поверхность. К их числу относятся, например, тороидальные резонаторы и некоторые другие.

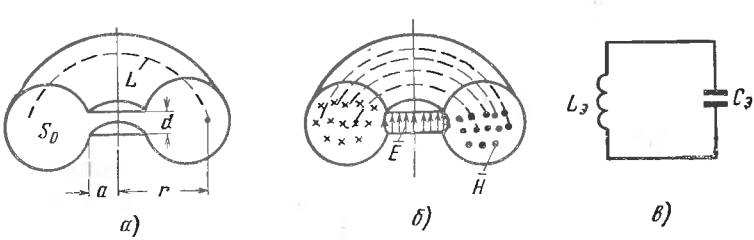


Рис. 13.14. К анализу собственных колебаний в резонаторе с квазисосредоточенными параметрами:
а — вид резонатора; *б* — структура поля в резонаторе; *в* — эквивалентная схема резонатора.

В тороидальном резонаторе (рис. 13.14, *а*) в принципе могут существовать различные типы электромагнитных полей. Однако наибольший практический интерес представляют так называемые колебания основного типа с силовыми линиями векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$, показанными на рис. 13.14, *б*. При таких колебаниях электрическое и магнитное поля в резонаторе достаточно четко отделены в пространстве друг от друга. Электрическое поле сосредоточено в основном в пределах зазора между пластинами резонатора, а магнитное —

в тороидальной части. Вследствие этого подобный резонатор, как уже говорилось выше, можно представить в виде эквивалентного колебательного контура с сосредоточенными индуктивностью $L_э$ и емкостью $C_э$ (рис. 13.14, *в*).

Объемные резонаторы, обладающие аналогичными свойствами, получили наименование резонаторов с квазисосредоточенными параметрами.

Для основного типа колебаний линейные размеры резонатора с квазисосредоточенными параметрами оказываются значительно меньше длины волны. Это обстоятельство позволяет произвести расчет параметров $L_э$ и $C_э$ эквивалентного контура с помощью квазистатических приближений, без учета эффекта запаздывания электромагнитных волн. Иными словами величины $L_э$ и $C_э$ можно определить так же, как и для постоянных полей.

Приведенные выше соображения лежат в основе приближенной теории резонаторов с квазисосредоточенными параметрами, разработанной впервые советским ученым М. С. Нейманом. Применим эти соображения к расчету собственной частоты колебаний основного типа в тороидальном резонаторе.

Согласно изложенному собственную частоту ω_0 можно приближенно рассчитать по формуле

$$\omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{L_э C_э}}. \tag{13.59}$$

Величину емкости $C_э$, образованной параллельными пластинами резонатора, вычислим с помощью соотношения

$$C_э = \frac{\varepsilon S}{d} = \varepsilon \frac{\pi a^2}{d}, \tag{13.60}$$

здесь a — радиус пластин и d — расстояние между ними, причем $d \ll a$.

Для определения индуктивности $L_э$ используем равенство

$$\Phi = L_э I, \tag{13.61}$$

связывающее магнитный поток Φ, пронизывающий тороидальную часть резонатора, с током I, создающим магнитное поле.

Пусть площадь поперечного сечения тороидальной части равна S_0 (рис. 13.14, *а*). Тогда

$$\Phi = \mu \int_{S_0} \overline{H}\, \overline{dS}.$$

Так как силовыми линиями вектора $\overline{H}$ являются концентрические окружности с центрами на оси резонатора, то $\overline{H dS} = H dS$ и, следовательно,

$$\Phi = \mu \int_{S_0} H dS. \tag{13.62}$$

Пусть L — замкнутый контур, совпадающий с какой-либо силовой линией $\overline{H}$ радиуса r (рис. 13.14, *а*). Напишем для этого контура первое уравнение Максвелла в интегральной форме:

$$\oint_L \overline{H}\,\overline{dl} = I. \tag{13.63}$$

Тогда из (13.63) с учетом осевой симметрии поля будем иметь

$$H = \frac{I}{2\pi r}.$$

Подставив найденное значение H в (13.62), получим

$$\Phi = I\frac{\mu}{2\pi}\int_{S_0}\frac{dS}{r}. \tag{13.64}$$

Из сравнения (13.64) с (13.61) следует, что

$$L_э = \frac{\mu}{2\pi}\int_{S_0}\frac{dS}{r}. \tag{13.65}$$

Используя (13.59), (13.60) и (13.65), окончательно находим

$$\omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\frac{2\pi d}{S\int\limits_{S_0}\frac{dS}{r}}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2d}{\int\limits_{S_0}\frac{dS}{r}}}. \tag{13.66}$$

Собственная длина волны резонатора при условии, что $\varepsilon = \varepsilon_0$ и $\mu = \mu_0$ равна

$$\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0} = \pi a\sqrt{\frac{2}{d}\int_{S_0}\frac{dS}{r}}. \tag{13.67}$$

Стало быть, чем больше радиус пластин и чем меньше расстояние между ними, тем больше собственная длина волны. Аналогично, увеличение площади сечения тороида (т. е. увеличение S_0) также приводит к росту собственной длины волны. Такой вывод, конечно, не является неожиданным, ибо при увеличении индуктивности и емкости колебательной системы собственная длина волны ее растет.

Пусть сечение тороида имеет прямоугольную форму (рис. 13.15). В этом случае

$$\int_{S_0}\frac{dS}{r} = \int_0^l\int_a^b\frac{dr\,dz}{r} = l\ln\frac{b}{a},$$

$$\lambda_0 = 2\pi a\sqrt{\frac{l}{2d}\ln\frac{b}{a}}. \tag{13.68}$$

Перейдем к приближенному расчету собственных частот коаксиального резонатора с малым зазором (рис. 13.16, *а*). Основной тип колебаний в таком резонаторе характеризуется силовыми линиями поля, изображенными на рис. 13.16, *б*.

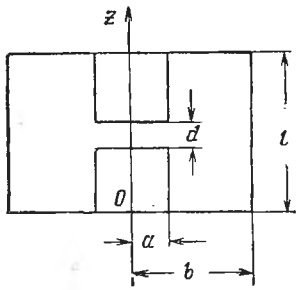


Рис. 13.15. К расчету собственной волны тороидального резонатора с прямоугольным сечением тороида.

Рассматриваемый резонатор в целом не является системой с квазисосредоточенными параметрами, ибо поле в коаксиальной части при достаточной ее длине должно иметь волновой характер.

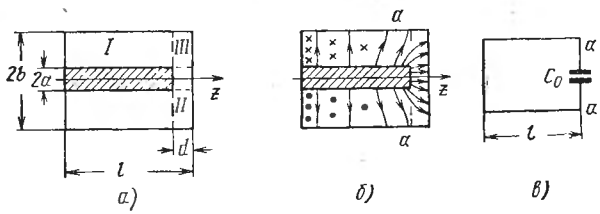


Рис. 13.16. К анализу собственных колебаний в коаксиальном резонаторе с малым зазором:
а—вид резонатора; *б*—структура поля основного типа колебаний; *в*—эквивалентная схема резонатора.

В соответствии с этим мы будем полагать, что поле в коаксиальной части резонатора (область I) приближенно совпадает с полем коаксиальной линии, короткозамкнутой на конце, т. е.

$$\dot{E}_1 \approx \dot{A}_0 \frac{\sin kz}{\rho},$$

$$\dot{H}_1 \approx i \frac{\dot{A}_0}{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}} \frac{\cos kz}{\rho}.$$

Что же касается областей II и III, то здесь, как и в предыдущем случае, можно учитывать только электрическое поле в малом зазоре (область II), которое приближенно будет иметь тот же характер, что и поле плоского конденсатора.

На основании изложенного рассматриваемый резонатор можно представить в виде эквивалентной схемы, состоящей из короткозамкнутой линии и емкости C (рис. 13.16, *в*). Очевидно, такая колебательная система будет настроена в резонанс, если входное сопротивление короткозамкнутой линии в точках $a-a$ имеет индуктивный характер, а по величине равно сопротивлению конденсатора C_0 на резонансной частоте.

Входное сопротивление $Z_{вх}$ короткозамкнутой линии длиной $l_1 = l - d$, как известно, определяется формулой

$$Z_{вх} = iZ_{л} \operatorname{tg} kl_1,$$

где $Z_{л}$ — волновое сопротивление линии. Так как в нашем случае

$$Z_{л} = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}{2\pi} \ln \frac{b}{a},$$

то

$$Z_{вх} = i \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \operatorname{tg} kl_1.$$

Сопротивление конденсатора C_0 на частоте ω равно

$$Z_c = \frac{1}{i\omega C_0} = \frac{d}{i\omega\varepsilon\pi a^2} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{d}{i\pi k a^2}.$$

Так как при резонансе $Z_{вх} + Z_c = 0$, то

$$\frac{1}{2} \ln \frac{b}{a} \operatorname{tg} kl_1 - \frac{d}{ka^2} = 0, \qquad k = \frac{2d}{a^2 \ln \frac{b}{a}} \operatorname{ctg} kl_1. \quad (13.69)$$

Полученное выражение является трансцендентным уравнением с неизвестной величиной $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$. Оно позволяет определить собственные частоты основного типа колебаний резонатора, ибо в колебательной системе без потерь они, как известно, совпадают с резонансными частотами.

Если длина резонатора $l \approx l_1 \ll \lambda_0$, где λ_0 — собственная длина волны, то $\operatorname{ctg} kl_1 \approx 1/kl_1 \approx 1/kl$. В этом случае (13.69) принимает вид

$$k^2 = \frac{2d}{la^2 \ln \frac{b}{a}},$$

и собственная волна λ_0 совпадает с (13.68).

8. Возбуждение объемных резонаторов

Итак, мы определили типы собственных колебаний, которые могут существовать в объемных резонаторах различной геометрической формы. Естественно, теперь возникает вопрос о способах возбуждения в резонаторе колебаний требуемого типа. Решение этой задачи на основании теоремы взаимности приводит одновременно и к решению задачи о рациональных способах извлечения электромагнитной энергии из внутреннего объема резонатора.

Совершенно ясно, что для возбуждения колебаний того или иного типа резонатор необходимо связать с источником электромагнитного поля. Следовательно, анализ возбуждения резонаторов в теоретическом отношении сводится к исследованию вынужденных колебаний поля в диэлектрическом объеме, ограниченном проводящей поверхностью.

Такая задача достаточно сложна математически. Поэтому сначала мы ограничимся лишь качественным рассмотрением поставленного вопроса.

С физической точки зрения возбуждение электромагнитных колебаний в резонаторах во многом аналогично возбуждению электромагнитных волн в волноводах.

Повторяя рассуждения, уже изложенные в гл. X, мы, естественно, придем к выводу, что для возбуждения резонатора можно использовать металлический штырь с током, ориентированный вдоль силовых линий электрического поля требуемого типа колебаний, или металлическую рамку (виток) с током, плоскость которой пересекается силовыми линиями магнитного поля колебаний.

Резонатор можно также возбудить через отверстие (щель) в стенках. Для этого в отверстии необходимо создать электрическое поле, силовые линии которого продолжали бы линии тока резонатора.

Наконец, в резонаторах с малым зазором (например, тороидальный резонатор и т. п.) возбуждение электромагнитных колебаний часто осуществляется пульсирующим электронным пучком, проходящим через зазор.

Очевидно, что штырь, виток и отверстие в стенке можно использовать и в качестве элементов связи для извлечения электромагнитной энергии из резонатора.

При возбуждении резонаторов необходимо, чтобы частота колебаний поля внешнего источника совпадала с собственной частотой заданного типа колебаний. В этом случае в системе будет наблюдаться явление резонанса, и амплитуда возбуждаемых колебаний достигает максимума*).

---

*) В колебательных системах с малыми потерями резонансная частота приближенно равна собственной частоте.

В резонаторе с возбуждающим устройством электромагнитное поле должно удовлетворять граничным условиям не только на металлических стенках, но и на источнике. Точно так же как и в случае возбуждения волновода, электромагнитное поле одного типа не может удовлетворить граничным условиям в точках, где находится источник. Для выполнения этих условий, очевидно, потребуется совокупность полей различных типов колебаний.

Стало быть, возбуждающее устройство создает в резонаторе множество типов колебаний. Структура поля каждого типа будет аналогична структуре соответствующих собственных колебаний, а частота равна частоте возбуждающего поля. Но последняя совпадает лишь с одной собственной частотой резонатора. Следовательно, явление резонанса в системе наступает только для того типа поля, который подлежит возбуждению. Именно этот тип и будет преобладать над всеми другими типами колебаний, возникающими в резонаторе.

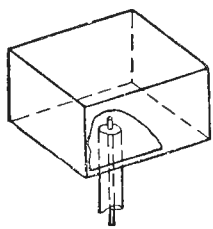


Рис. 13.17. Возбуждение колебаний TE_{101} в прямоугольном резонаторе с помощью штыря.

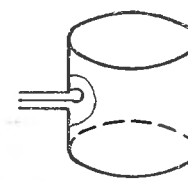


Рис. 13.18. Возбуждение колебаний TM_{010} в цилиндрическом резонаторе витком.

Чтобы более ясно понять смысл изложенного, представим резонатор в виде множества эквивалентных колебательных контуров, собственные частоты которых совпадают с собственными частотами резонатора. Тогда в режиме вынужденных колебаний амплитуда тока будет максимальна в том контуре, который настроен в резонанс с источником.

Приведем несколько примеров, поясняющих различные способы возбуждения резонаторов. На рис. 13.17 показано возбуждение колебаний TE_{101} в прямоугольном резонаторе с помощью металлического штыря. На рис. 13.18 изображается возбуждение колебаний TM_{010} в цилиндрическом резонаторе витком. В обоих примерах энергия электромагнитного поля подводится к возбуждающему элементу с помощью коаксиальной линии. На рис. 13.19 показано возбуждение колебаний TE_{101} в прямоугольном резонаторе через отверстие. В этом примере электромагнитное поле подводится к резонатору посредством волновода с волной TE_{10}.

Чтобы получить представление о возбуждении резонатора пульсирующим электронным пучком, познакомимся с принципом ра-

боты одного из электронных приборов — так называемого клистрона.

На рис. 13.20 показано схематически устройство клистрона с двумя объемными резонаторами. Пусть первый резонатор возбуждается с помощью витка от внешнего источника колебаний. Из рисунка видно, что через оба резонатора проходит пучок электронов, создаваемый специальным устройством — электронной пушкой.

Электроны, попадая в зазор первого резонатора, естественно, будут взаимодействовать с имеющимся там электрическим полем. Это взаимодействие приводит к изменению скорости движения

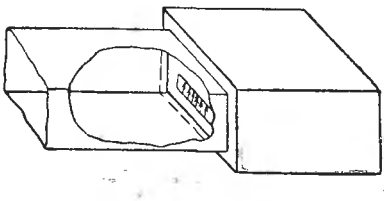


Рис. 13.19. Возбуждение колебаний TE_{101} в прямоугольном резонаторе через отверстие.

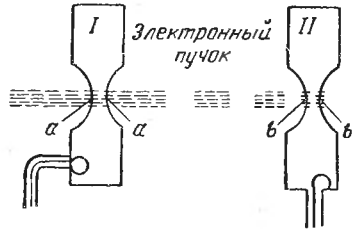


Рис. 13.20. Возбуждение колебаний в резонаторах клистрона.

электронов. Часть из них ускоряется полем, а другая часть, наоборот, замедляется. Иными словами, в первом резонаторе осуществляется модуляция электронов по скорости. Изменение скорости движения электронов, конечно, происходит в соответствии с изменением напряженности электрического поля.

Промежуток между первым и вторым резонаторами называется *дрейф-пространством*. Здесь однородный по плотности поток электронов становится неоднородным, так как быстрые электроны при движении уходят вперед, а медленные — отстают. В результате при выходе из дрейф-пространства электроны группируются в сгустки, чередующиеся с разряжениями, т. е. электронный пучок оказывается модулированным по плотности.

Проходя через второй резонатор, этот пучок возбудит в нем электромагнитные колебания. Последние будут иметь достаточно большую интенсивность, если частота пульсаций электронов совпадает с собственной частотой резонатора. Электромагнитная энергия из второго резонатора, как показано на рис. 13.20, извлекается с помощью витка.

Проведенные выше рассуждения характеризуют работу клистрона как усилителя электромагнитных колебаний. Если же часть энергии из второго резонатора через специальную цепь обратной связи ввести в первый резонатор, то клистрон при определенных условиях превратится в генератор незатухающих колебаний.

9. Вынужденные колебания в резонаторе. Входное сопротивление источника

Перейдем к математическому анализу вынужденных колебаний в резонаторе.

Предположим вначале, что внутрь резонатора введены возбуждающие его источники в виде электрических токов, а сторонних зарядов нет. Такой случай на практике будет иметь место, если резонатор возбуждается при помощи витка (рис. 13.21).

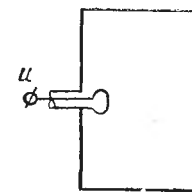


Рис. 13.21. К анализу вынужденных колебаний в резонаторе, возбуждаемом витком.

Если на зажимах витка, радиус которого мал по сравнению с длиной волны, действует стороннее напряжение u, то согласно закону Кирхгофа

$$u = RI + \frac{d\Phi}{dt}, \tag{13.70}$$

где R — собственное активное сопротивление витка; Φ — магнитный поток через площадь S поперечного сечения витка; I — ток в витке.

Для установившегося во времени гармонического процесса уравнение (13.70) имеет вид

$$\dot{U} = R\dot{I} + i\omega\dot{\Phi}, \tag{13.71}$$

где $\dot{U}$, $\dot{I}$ и $\dot{\Phi}$ — соответственно комплексные амплитуды приложенного напряжения, тока и потока. После деления на $\dot{I}$ получаем входное сопротивление витка

$$Z_{\text{вх}} = R + i\omega\frac{\dot{\Phi}}{\dot{I}}. \tag{13.72}$$

Возбуждение током электромагнитного поля сопровождается появлением в цепи витка добавочного сопротивления

$$\Delta Z = i\omega\frac{\dot{\Phi}}{\dot{I}}. \tag{13.73}$$

Значение добавочного сопротивления зависит от характера образовавшегося электромагнитного поля.

Так, например, если виток расположен в неограниченной среде, то в случае медленно меняющихся — квазистационарных полей, когда допустимо считать, что мгновенное значение потока пропорционально току и соответственно

$$\Phi = L\dot{I} \tag{13.74}$$

(L — индуктивность витка), сопротивление ΔZ имеет чисто реактивный характер и известно под названием индуктивного сопротивления.

Для того же примера (витка в неограниченной среде), но в случае быстропеременных полей, когда нельзя пренебрегать явлением запаздывания, расчет ΔZ показывает, что это сопротивление имеет комплексный характер, т. е. имеет вещественную часть — активное сопротивление или сопротивление излучения и реактивную часть — индуктивное сопротивление, величина которого отличается от значения, рассчитанного для случая квазистационарного поля.

Чтобы определить сопротивление ΔZ для интересующего нас случая (рис. 13.21), рассчитаем электромагнитное поле, созданное витком с током в резонаторе.

Магнитный поток Φ через площадь витка S равен

$$\Phi = \int_S \mu \bar{H}\, d\bar{S} = \oint_l \bar{A}\, d\bar{l}, \tag{13.75}$$

где $\bar{A}$ — запаздывающий вектор-потенциал. Векторы поля вынужденных колебаний в резонаторе имеют вид

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \bar{A}, \tag{13.76}$$

$$\bar{E} = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t}, \tag{13.77}$$

так как мы предполагаем отсутствие сторонних зарядов (см. приложение). Это поле создано сторонним током витка и должно удовлетворять граничным условиям на поверхности резонатора.

Как уже указывалось в предыдущем параграфе, возбуждающий элемент создает в резонаторе множество колебаний. Естественно поэтому искать поле вынужденных колебаний в резонаторе как сумму (взятых в соответствующих амплитудных соотношениях) собственных полей.

Введем в рассмотрение вектор- потенциал $\bar{A}_\nu(\bar{r}, t)$ для ν-го типа собственных колебаний. На основании рассуждений, приведенных в § 2 гл. XIII, можно написать, что

$$\bar{A}_\nu(\bar{r}, t) = \bar{A}_\nu(\bar{r}) \cos(\omega_\nu t + \varphi_\nu), \tag{13.78}$$

где ω_ν — собственная (угловая) частота, φ_ν — начальная фаза колебаний ν-го типа, $\bar{r}$ — радиус-вектор точки наблюдения.

Векторная функция $\bar{A}_\nu(\bar{r})$, зависящая только от пространственных координат, удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\bar{A}_\nu - k_\nu^2\bar{A}_\nu = 0, \tag{13.79}$$

где

$$k_\nu^2 = \omega_\nu^2\varepsilon\mu = \frac{\omega_\nu^2}{v^2},$$

которое получается из уравнения (8.7) при $\bar{A} = \bar{A}_\nu(\bar{r}, t)$, $\bar{j} \equiv 0$ и $U = 0$ (см. также приложение 1).

Так как на стенках резонатора $\bar{E}_{\nu\,\mathrm{tg}} = 0$, то на основании (13.77) граничные условия для $\bar{A}_\nu$ принимают вид

$$\bar{A}_{\nu\,\mathrm{tg}} = 0 \text{ на } S \tag{13.80}$$

или

$$\bar{A}_\nu \times \bar{n} = 0 \text{ на } S. \tag{13.81}$$

Здесь S — поверхность резонатора, а $\bar{n}$ — орт нормали к этой поверхности.

В соответствии с изложенными выше соображениями представим вектор-потенциал искомого поля вынужденных колебаний в виде

$$\bar{A}(\bar{r}, t) = \sum_\nu p_\nu(t)\,\bar{A}_\nu(\bar{r}), \tag{13.82}$$

где $p_\nu(t)$ — неизвестные коэффициенты, определяющие интенсивность различных типов полей, возникающих в резонаторе.

Прежде чем перейти к вычислению функций $p_\nu(t)$, докажем, что собственные функции $\bar{A}_\nu(\bar{r})$ резонатора ортогональны.

Для доказательства ортогональности умножим обе части уравнения (13.79) скалярно на функцию $\bar{A}_\mu$ и проинтегрируем полученный результат по объему V резонатора. Затем напишем такое же уравнение для функции $\bar{A}_\mu$ и проделаем над ним аналогичные действия. Вычитая почленно из первого равенства второе, будем иметь

$$\int_V (\operatorname{rot}\operatorname{rot}\bar{A}_\nu\,\bar{A}_\mu - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\bar{A}_\mu\,\bar{A}_\nu)\,dV =$$

$$= (k_\nu^2 - k_\mu^2)\int_V \bar{A}_\nu\,\bar{A}_\mu\,dV. \tag{13.83}$$

Но из формулы $\operatorname{div}(\bar{a}\times\bar{b}) = \bar{b}\operatorname{rot}\bar{a} - \bar{a}\operatorname{rot}\bar{b}$ следует, что

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\bar{A}_\nu\bar{A}_\mu = \operatorname{div}(\operatorname{rot}\bar{A}_\nu \times \bar{A}_\mu) - \operatorname{rot}\bar{A}_\nu\operatorname{rot}\bar{A}_\mu,$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\bar{A}_\mu\bar{A}_\nu = \operatorname{div}(\operatorname{rot}\bar{A}_\mu \times \bar{A}_\nu) - \operatorname{rot}\bar{A}_\mu\operatorname{rot}\bar{A}_\nu.$$

Подставляя последние выражения в (13.83) и используя теорему Гаусса—Остроградского, получим

$$\int_S [(\operatorname{rot} \bar{A}_\nu \times \bar{A}_\mu) - (\operatorname{rot} \bar{A}_\mu \times \bar{A}_\nu)]\, d\bar{S} = (k_\nu^2 - k_\mu^2) \int_V \bar{A}_\nu \bar{A}_\mu\, dV. \quad (13.84)$$

Воспользуемся далее граничными условиями (13.80). Из этих условий следует, что

$$(\operatorname{rot} \bar{A}_\nu \times \bar{A}_\mu)\, \bar{n} = (\bar{A}_\mu \times \bar{n}) \operatorname{rot} \bar{A}_\nu = 0 \quad \text{и} \quad (\operatorname{rot} \bar{A}_\mu \times \bar{A}_\nu)\, \bar{n} = 0.$$

Стало быть, левая часть равенства (13.84) есть нуль, и при $\nu \neq \mu$ (если $k_\nu \neq k_\mu$)

$$\int_V \bar{A}_\nu \bar{A}_\mu\, dV = 0,$$

т. е. функции $\bar{A}_\nu(\bar{r})$ действительно ортогональны.

Из ортогональности этих функций вытекает ортогональность векторов $\bar{E}_\nu$ и $\bar{H}_\nu$ полей собственных колебаний.

Случай $k_\nu = k_\mu$ при $\nu \neq \mu$ соответствует вырожденным колебаниям. Для них может оказаться, что $\int_V \bar{A}_\nu \bar{A}_\mu dV \neq 0$. Однако если вместо функций $\bar{A}_\nu$ и $\bar{A}_\mu$ выбрать их некоторые линейные комбинации, то соотношение ортогональности будет снова выполняться.

В дальнейшем вырожденные колебания мы рассматривать не будем.

Подчиним семейство ортогональных собственных функций $\bar{A}_\nu(\bar{r})$ нормировке так, чтобы выполнялись равенства

$$\frac{1}{V} \int_V \bar{A}_\nu(\bar{r}) \bar{A}_\mu(\bar{r})\, dV = \begin{cases} 0 & \text{при } \nu \neq \mu, \\ 1 & \text{при } \nu = \mu, \end{cases} \quad (13.85)$$

где V — объем резонатора.

Предположим далее, что заданный сторонний ток можно разложить в ряд по собственным функциям $\bar{A}_\nu(\bar{r})$

$$j(\bar{r}, t) = \sum_\nu i_\nu(t)\, \bar{A}_\nu(\bar{r}), \quad (13.86)$$

где $\bar{j}(\bar{r}, t)$ — объемная плотность сторонних токов. Тогда на основании (13.85) найдем, что

$$i_\nu(t) = \frac{1}{V} \int_V j(\bar{r}, t)\, \bar{A}_\nu(\bar{r})\, dV. \quad (13.87)$$

Уравнение (13.87) позволяет, таким образом, вычислить компоненты стороннего тока, соответствующие различным типам собственных колебаний.

Теперь можно определить и функции $p_\nu(t)$ в разложении (13.81). Для этого воспользуемся первым уравнением Максвелла

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{j}(\bar{r}, t) + \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}.$$

Подставляя в него значения $\bar{H}$ и $\bar{E}$, выраженные через вектор-потенциал (13.82), а также значение тока $\bar{j}$ из (13.86) и учитывая ортогональность функций $\bar{A}_\nu(\bar{r})$, получим для ν-й компоненты уравнение вида

$$p_\nu(t) \operatorname{rot}\operatorname{rot} \bar{A}_\nu(\bar{r}) + \bar{A}_\nu(\bar{r}) \varepsilon\mu \frac{d^2 p_\nu(t)}{dt^2} = \mu i_\nu(t) \bar{A}_\nu(\bar{r}). \quad (13.88)$$

Принимая во внимание уравнение (13.79), окончательно будем иметь

$$\frac{d^2 p_\nu(t)}{dt^2} + \omega_\nu^2 p_\nu(t) = \frac{1}{\varepsilon} i_\nu(t). \quad (13.89)$$

Решение уравнений (13.79) и (13.89) позволяет найти ν-ю составляющую вектор-потенциала, а значит, с помощью (13.81) и результирующий вектор-потенциал поля, после чего по формулам (13.76) и (13.77) можно вычислить векторы $\bar{E}$ и $\bar{H}$.

Прежде чем перейти к дальнейшему, заметим, что уравнение (13.89) по виду аналогично дифференциальному уравнению вынужденных колебаний в контуре без затухания. Это естественно, так как все рассуждения проводились для резонатора в отсутствие потерь.

Мы можем приближенно учесть влияние потерь в резонаторе, если по аналогии с обычным колебательным контуром заменим уравнение (13.89) на уравнение*)

$$\frac{d^2 p_\nu(t)}{dt} + \frac{\omega_\nu}{Q_\nu} \frac{dp_\nu(t)}{dt} + \omega_\nu^2 p_\nu = \frac{i_\nu(t)}{\varepsilon}, \quad (13.90)$$

где Q_ν — добротность резонатора, соответствующая ν-му типу колебаний.

---

*) В обычном колебательном контуре в отсутствие затухания левая часть дифференциального уравнения имеет вид $\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{LC} I$, а при наличии затухания —

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{\omega}{Q}\frac{dI}{dt} + \omega^2 I.$$

В установившемся режиме гармонических колебаний вместо мгновенных значений $i_\nu(t)$ и $p_\nu(t)$ целесообразно ввести комплексные величины

$$i_{\nu\kappa}(t) = \dot{I}_\nu e^{i\omega t} \quad \text{и} \quad p_{\nu\kappa}(t) = \dot{P}_\nu e^{i\omega t},$$

здесь ω — частота источника, а $\dot{I}_\nu$ согласно (13.87) равна

$$\dot{I}_\nu = \frac{1}{V} \int_V \dot{\vec{j}}(\vec{r})\, \dot{\vec{A}}_\nu(\vec{r})\, dV.$$

В этом случае взамен (13.90) будем иметь уравнение для комплексных амплитуд $\dot{P}_\nu$:

$$\dot{P}_\nu(\omega_\nu^2 - \omega^2) + i\frac{\omega\omega_\nu}{Q_\nu}\dot{P}_\nu = \frac{1}{\varepsilon}\dot{I}_\nu,$$

откуда следует, что

$$\dot{P}_\nu = \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\dot{I}_\nu}{\omega_\nu^2 - \omega^2 + i\dfrac{\omega\omega_\nu}{Q_\nu}}. \tag{13.91}$$

Обозначая далее $\omega - \omega_\nu = \Delta\omega$ и полагая, что $|\Delta\omega|/\omega_\nu \ll 1$ (область малых расстроек), из (13.91) получим приближенное равенство:

$$\dot{P}_\nu = \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\dot{I}_\nu}{(\omega_\nu + \omega)(\omega_\nu - \omega) + i\dfrac{\omega\omega_\nu}{Q_\nu}} \approx -\frac{i}{\omega_\nu^2\,\varepsilon}\,\frac{\dot{I}_\nu Q_\nu}{1 + i2Q_\nu\dfrac{\Delta\omega}{\omega_\nu}}.$$

Стало быть, амплитуда

$$P_{\nu m} \approx \frac{1}{\omega_\nu^2\,\varepsilon}\,\frac{I_{\nu m} Q_\nu}{\sqrt{1 + \left(2Q_\nu\dfrac{\Delta\omega}{\omega_\nu}\right)^2}}. \tag{13.92}$$

Последнее выражение аналогично уравнению резонансной характеристики обычного колебательного контура с сосредоточенными параметрами.

Отсюда вытекает, что величина $P_{\nu m}$ достигает максимума, если частота колебаний источника ω совпадает с собственной частотой ω_ν (т. е. при $\Delta\omega = 0$) и уменьшается по мере отклонения ω от ω_ν. Но $P_{\nu m}$ в конечном счете характеризует амплитуду вектор-потенциала, а вместе с ней амплитуды векторов поля ν-го типа колебаний. Следовательно, зависимость амплитуды колебаний ν-го типа в резонаторе от частоты источника имеет типичный резонансный характер.

Если резонатор потерь не имеет ($Q_\nu \to \infty$), то амплитуда колебаний, как видно из выражения (13.91) или (13.92), при частоте $\omega = \omega_\nu$ становится бесконечно большой. Такая же картина, как известно, наблюдается и в колебательном контуре без потерь.

Подставим значение $p_{\nu\text{к}}(t)$ в исходное выражение для векторпотенциала. [Разумеется, теперь речь идет уже о комплексном векторе $\overline{A}_\text{к}(\overline{r}, t)$.] В результате получим

$$\overline{A}_\text{к}(\overline{r}, t) = \frac{e^{i\omega t}}{\varepsilon} \sum_\nu \frac{\dot{I}_\nu}{(\omega_\nu^2 - \omega^2) + i\dfrac{\omega\omega_\nu}{Q_\nu}} \dot{\overline{A}}_\nu(\overline{r}). \qquad (13.93)$$

Из этого выражения видно, что резонанс в рассматриваемой системе возникает каждый раз, когда частота колебаний источника совпадает с собственной частотой ω_ν, если, конечно, $\dot{I}_\nu$ при данном ν не равно нулю. Таким образом, резонатор действительно имеет множество резонансных частот, которые в случае малых потерь приближенно равны частотам собственных колебаний.

Пусть $\omega = \omega_{\nu 1}$. Тогда (13.93) можно переписать в виде

$$\overline{A}_\text{к}(\overline{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon\omega_{\nu 1}^2} \dot{I}_{\nu 1} Q_{\nu 1} \dot{\overline{A}}_{\nu 1}(\overline{r})\, e^{i\omega t} +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\nu \neq \nu_1} \frac{\dot{I}_\nu}{(\omega_\nu^2 - \omega^2) + i\dfrac{\omega\omega_\nu}{Q_\nu}} \dot{\overline{A}}_\nu(\overline{r})\, e^{i\omega t}.$$

При большом значении добротности $Q_{\nu 1}$ первый член в последнем выражении будет значительно превосходить по модулю остальные слагаемые. Поэтому практически можно считать, как мы и делали в предыдущем параграфе, что источник возбуждает в резонаторе колебания заданного типа.

Перейдем теперь к расчету входного сопротивления витка. Поток Ф через виток равен

$$\Phi = \int_S \mu\overline{H}\, d\overline{S} = \int_l \overline{A}\, d\overline{l} = \sum_\nu p_\nu(t) \int_l \overline{A}_\nu(\overline{r})\, d\overline{l}. \qquad (13.94)$$

Как видно из структуры последнего равенства, $\int_l \overline{A}_\nu\, d\overline{l}$ представляет собой магнитный поток, соответствующий ν-му собственному колебанию, когда $p_\nu(t) = 1$. Эту величину можно рассматривать как коэффициент взаимоиндукции витка с магнитным полем ν-го собственного колебания.

Вводя обозначение

$$M_\nu = \int_l \overline{A}_\nu(\overline{r})\, d\overline{l}, \qquad (13.95)$$

перепишем уравнение (13.70) в виде

$$u = RI + \sum_{\nu} M_{\nu} \frac{dp_{\nu}(t)}{dt}. \tag{13.96}$$

Для рассматриваемого случая линейного тока $I(t)$, одинакового во всех точках витка, величина $i_{\nu}(t)$, входящая в правую часть уравнения (13.90), в соответствии с (13.87) будет равна

$$i_{\nu}(t) = \frac{1}{V} I(t) \int_{l} \overline{A}_{\nu}(\overline{r})\, \overline{dl} = \frac{1}{V} M_{\nu} I(t). \tag{13.97}$$

Переходя к установившемуся гармоническому процессу и учитывая (13.97), напишем вместо уравнений (13.96) и (13.90) уравнения для комплексных амплитуд:

$$\dot{U} = R\dot{I} + i\omega \sum_{\nu} M_{\nu} \dot{P}_{\nu}, \tag{13.98}$$

$$\left[(\omega_{\nu}^2 - \omega^2) + i \frac{\omega \omega_{\nu}}{Q_{\nu}} \right] \dot{P}_{\nu} = \frac{M_{\nu} \dot{I}}{\varepsilon V}, \tag{13.99}$$

откуда после исключения $\dot{P}_{\nu}$ получим

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = R + \sum_{\nu} \frac{i\omega M_{\nu}^2}{\varepsilon V \left(\omega_{\nu}^2 - \omega^2 + i \frac{\omega \omega_{\nu}}{Q_{\nu}} \right)}. \tag{13.100}$$

Выражение (13.100) дает возможность вычислить полное входное сопротивление. Первый член в этом равенстве представляет собой собственное активное сопротивление провода; второй член определяет сопротивление, наводимое полем резонатора. Как видно из (13.100), для собственных колебаний, частоты которых сильно отличаются от частоты источника, соответствующие слагаемые наводимого (вносимого) сопротивления имеют практически реактивный характер.

Для собственного колебания, частота которого совпадает с частотой источника ($\omega_{\nu} = \omega$), вносимое сопротивление имеет чисто активный характер и равно

$$R_{\text{рез}} = \frac{M_{\nu}^2 Q_{\nu}}{\varepsilon V \omega_{\nu}}. \tag{13.101}$$

Из этой формулы следует, что $R_{\text{рез}}$ по мере увеличения добротности Q_{ν} увеличивается. Если резонатор потерь не имеет ($Q_{\nu} \to \infty$), то $R_{\text{рез}}$ становится бесконечно большим.

Комплексная амплитуда $\dot{P}_\nu$, соответствующая резонансному колебанию, теперь принимает вид

$$\dot{P}_\nu = -i\frac{M_\nu \dot{I}}{\varepsilon V \omega_\nu^2} Q_\nu. \tag{13.102}$$

Рассчитаем для примера сопротивление петли связи в прямоугольном резонаторе, имеющем форму куба, при резонансе с собственными колебаниями типа TE_{101}.

Проекции вектор-потенциала $\overline{A}$ этого вида колебания согласно (13.77) с точностью до постоянного множителя совпадают с проекциями вектора $\overline{E}$ и, следовательно, равны

$$A_{\nu y}(\overline{r}) = C \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}z\right),$$

$$A_{\nu x}(\overline{r}) = A_{\nu z}(\overline{r}) = 0.$$

Коэффициент C в соответствии с условием нормировки определяется из равенства (13.85)

$$\frac{1}{a^3}\int_0^a\int_0^a\int_0^a C^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{a}y\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{a}z\right)dx\,dy\,dz = 1$$

или

$$\frac{C^2}{a^3}\,\frac{a^2}{4} = 1,$$

откуда

$$C = 2.$$

Таким образом,

$$\overline{A}_\nu(\overline{r}) = \overline{i}_y\, 2\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}z\right)\ ^{*)}.$$

Соответственно

$$\operatorname{rot}\overline{A}_\nu = \frac{2\pi}{a}\left[\overline{i}_x \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{a}z\right) - \overline{i}_z\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}z\right)\right].$$

Коэффициент взаимоиндукции M_ν, как следует из (13.95), равен

$$M_\nu = \int_l \overline{A}_\nu\, d\overline{l} = \int_S \operatorname{rot}\overline{A}_\nu\, d\overline{S}.$$

---

*) $\overline{i}_x$, $\overline{i}_y$ и $\overline{i}_z$ — орты координатных осей.

Если виток расположен в точке $x=\frac{a}{2}$; $z=0$ и если плоскость витка нормальна к $\bar{i}_x$, а сам он достаточно мал, то

$$|M_\nu|=2\pi\frac{S}{a},$$

где S — площадь витка. В этом случае для $R_{\text{рез}}$ из (13.101) получим

$$R_{\text{рез}}=\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{2\pi S}{a}\right)^2\frac{Q_\nu}{a^3\omega_\nu};\quad \omega_\nu=\omega_{101}.$$

Нетрудно рассчитать и амплитудные величины, характеризующие поле в резонаторе.

Величина $\dot{P}_\nu$ в соответствии с (13.102) равна

$$\dot{P}_\nu=-i\frac{2\pi S}{\varepsilon a}\frac{\dot{I}}{a^3}\frac{M_\nu}{\omega_\nu^2}Q_\nu.$$

Напряженность электрического поля $\bar{E}_\nu$ в точке $x=z=\frac{a}{2}$ равна

$$\dot{E}_\nu=-i\omega_\nu\dot{A}_\nu(\bar{r},t)=-i\omega_\nu 2\dot{P}_\nu.$$

Входящие в эти выражения значения ω_ν и Q_ν могут быть рассчитаны по формулам (13.29) и (13.37).

Рассмотрим теперь, как изменятся соотношения в том случае, когда сторонними источниками являются и токи, и заряды. Такой случай будет иметь место, если элементом связи является короткий металлический штырь, вводимый через отверстие в стенке резонатора.

Теперь для расчета поля необходимо ввести как векторный, так и скалярный запаздывающие потенциалы $\bar{A}$ и U, через которые поле определится по известным формулам

$$\bar{H}=\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\bar{A},$$

$$\bar{E}=-\frac{\partial\bar{A}}{\partial t}-\operatorname{grad}U.$$

Если подставить эти значения в уравнения Максвелла, то для $\bar{A}$ и U получим уравнения:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\bar{A}+\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\bar{A}}{\partial t^2}=\bar{j}(\bar{r},t)-\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}U, \qquad (13.103)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\bar{A}-\nabla^2U=\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

В отличие от того, как это делалось в гл. VIII, наложим на вектор-потенциал условие

$$\operatorname{div} \overline{A} = 0.$$

Тогда для скалярного потенциала получим уравнение

$$\nabla^2 U = -\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Таким образом, потенциал U будет определен так, как если бы имелась электростатическая задача с аналогичными граничными условиями. Что касается вектор-потенциала, то, как видно из уравнения (13.103), его значение теперь определится не только через заданный сторонний ток, но и через величину $-\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} U$.

Поэтому, повторяя те же выкладки, что и ранее, мы получим взамен уравнения (13.87) для $i_v(t)$ уравнение

$$i_v(t) = \frac{1}{V} \int_V \left[\overline{j}(\overline{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} U \right] \overline{A}_v \, dV.$$

Однако нетрудно показать, что второе слагаемое в этом выражении исчезает. Действительно, так как $\operatorname{div} \overline{A}_v = 0$, то можно положить, что

$$\overline{A}_v = \operatorname{rot} \overline{F}, \quad \text{где } \overline{F} \text{ — некоторый вектор.}$$

Тогда

$$\frac{d}{dt} \int_V \operatorname{grad} U \, \overline{A}_v \, dV = \frac{d}{dt} \int_V \operatorname{grad} U \operatorname{rot} \overline{F} \, dV.$$

Используя известное выражение для $\operatorname{div} (\overline{F} \times \overline{C})$ и полагая, что

$$\overline{C} = \operatorname{grad} U,$$

получим

$$\operatorname{grad} U \operatorname{rot} \overline{F} = \operatorname{div} [\overline{F} \times \operatorname{grad} U].$$

С учетом этого

$$\frac{d}{dt} \int_V \operatorname{grad} U \overline{A}_v \, dV = \frac{d}{dt} \int_V \operatorname{div} [\overline{F} \times \operatorname{grad} U] \, dV.$$

Преобразуя последний интеграл по формуле Гаусса — Остроградского и учитывая, что вектор $\operatorname{grad} U$ нормален к поверхности S резонатора, будем иметь

$$\frac{d}{dt} \int_V \operatorname{grad} U \overline{A}_v \, dV = \frac{d}{dt} \int_S (\overline{F} \times \operatorname{grad} U) \, \overline{dS} = 0.$$

Таким образом, для определения $i_v(t)$ могут быть использованы без изменения уравнения (13.87) и (13.97).

Если длина штыря достаточно мала и на конце его имеется какой-то электрод, то ток $I(t)$ вдоль штыря можно считать одинаковым. В этом случае взамен уравнения (13.96) мы будем иметь уравнение

$$u = \frac{q}{C} + RI + \sum M_v \frac{dp_v(t)}{dt},$$

где q и C — соответственно заряд и емкость электрода по отношению к стенкам резонатора.

Повторяя рассуждения, аналогичные предыдущим, для входного сопротивления штыря получим

$$Z_{\text{вх}} = R + \frac{1}{i\omega C} + \sum \frac{i\omega M_v^2}{\varepsilon V\left[\omega_v^2 - \omega^2 + i\dfrac{\omega\omega_v}{Q_v}\right]}. \qquad (13.104)$$

Величина коэффициента взаимоиндукции M_v для короткого штыря длиной h вычисляется в соответствии с (13.95) по формуле

$$M_v = \int_0^h \overline{A}_v\, \overline{dl} \approx A_v h.$$

Для колебаний TE_{101} в случае, когда штырь введен в точку максимума вектора $\overline{A}_v$ (или, что то же, вектора $\overline{E}_v$),

$$M_v = 2h.$$

10. Входное сопротивление и добротность нагруженного резонатора

Изложенный в предыдущем параграфе метод расчета позволяет найти все необходимые соотношения для случая, когда резонатор включается как промежуточный элемент между генератором и нагрузкой.

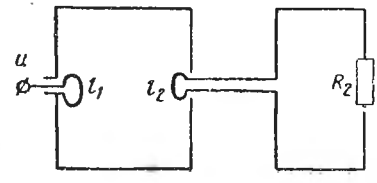


Рис. 13.22. К анализу вынужденных колебаний нагруженного резонатора.

Для конкретности рассмотрим пример, изображенный на рис. 13.22. Пусть R_1 — собственное сопротивление витка l_1, возбуждающего резонатор, а R_2 — сопротивление нагрузки с учетом собственного сопротивления витка l_2.

Обозначим токи в витках I_1 и I_2 через $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$.

Повторяя затем весь расчет, изложенный в предыдущем параграфе, для случая, когда заданы два сторонних тока, получим вместо уравнений (13.98) и (13.99) систему уравнений:

$$\left[R_1 + i\frac{\omega}{\varepsilon V}\sum_{\nu}\frac{M^2_{\nu(1)}}{(\omega_\nu^2-\omega^2)+i\dfrac{\omega\omega_\nu}{Q_\nu}}\right]\dot{I}_1 +$$

$$+ i\frac{\omega}{\varepsilon V}\sum_{\nu}\frac{M_{\nu(1)}M_{\nu(2)}}{(\omega_\nu^2-\omega^2)+i\dfrac{\omega\omega_\nu}{Q_\nu}}\dot{I}_2, = \dot{U}, \qquad (13.105)$$

$$\left[R_2 + i\frac{\omega}{\varepsilon V}\sum_{\nu}\frac{M^2_{\nu(2)}}{(\omega_\nu^2-\omega^2)+i\dfrac{\omega\omega_\nu}{Q_\nu}}\right]\dot{I}_2 +$$

$$+ i\frac{\omega}{\varepsilon V}\sum_{\nu}\frac{M_{\nu(1)}M_{\nu(2)}}{(\omega_\nu^2-\omega^2)+i\dfrac{\omega\omega_\nu}{Q_\nu}}\dot{I}_1 = 0, \qquad (13.106)$$

где $M_{\nu(1)}$ и $M_{\nu(2)}$ — коэффициенты взаимоиндукции соответственно первого и второго витков с ν-м типом колебаний в резонаторе, рассчитываемые по формулам:

$$M_{\nu(1)} = \oint_{l_1}\overline{A}_\nu(\vec{r})\,\overline{dl}_1 \quad \text{и} \quad M_{\nu(2)} = \oint_{l_2}\overline{A}_\nu(\vec{r})\,\overline{dl}_2.$$

Решая систему уравнений (13.105) и (13.106), получаем выражения для токов $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$, аналогичные известным формулам для связанных контуров:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z_{\text{вх}}} = \frac{\dot{U}}{Z_1 - \dfrac{Z_m^2}{Z_2}}, \qquad (13.107)$$

$$\dot{I}_2 = -\dot{I}_1\frac{Z_m}{Z_2}, \qquad (13.108)$$

где

$$Z_{\text{вх}} = Z_1 - \frac{Z_m^2}{Z_2},$$

$$Z_1 = R_1 + i\frac{\omega}{\varepsilon V}\sum_{\nu}\frac{M^2_{\nu(1)}}{(\omega_\nu^2-\omega^2)+i\dfrac{\omega\omega_\nu}{Q_\nu}}; \qquad (13.109)$$

$$Z_2 = R_2 + i\frac{\omega}{\varepsilon V}\sum_{\nu}\frac{M^2_{\nu\,(2)}}{\left(\omega_\nu^2-\omega^2\right)+i\dfrac{\omega\omega_\nu}{Q_\nu}}; \qquad (13.110)$$

$$Z_m = i\frac{\omega}{\varepsilon V}\sum_{\nu}\frac{M_{\nu\,(1)}\,M_{\nu\,(2)}}{\left(\omega_\nu^2-\omega^2\right)+i\dfrac{\omega\omega_\nu}{Q_\nu}}. \qquad (13.111)$$

В случае резонанса с ν-м колебанием активная составляющая входного сопротивления оказывается равной

$$R_{\text{вх}} \approx R_1 + \frac{M^2_{\nu\,(1)}\,Q_\nu}{\varepsilon V\omega_\nu}\left[1-\frac{M^2_{\nu\,(2)}\,Q_\nu}{\varepsilon V\omega_\nu\left(R_2+\dfrac{M^2_{\nu\,(2)}\,Q_\nu}{\varepsilon V\omega_\nu}\right)}\right].$$

Сопротивление $R_{\text{рез}}$, вносимое в возбуждающий элемент, определяется выражением

$$R_{\text{рез}} \approx \frac{M^2_{\nu\,(1)}\,Q_\nu}{\varepsilon V\omega_\nu}\left[1-\frac{M^2_{\nu\,(1)}\,Q_\nu}{\varepsilon V\omega_\nu\left(R_2+\dfrac{M^2_{\nu\,(1)}\,Q_\nu}{\varepsilon V\omega_\nu}\right)}\right].$$

Это выражение после несложных преобразований приводится к виду

$$R_{\text{рез}} = \frac{R_0\,R_2'}{R_0+R_2'}, \qquad (13.112)$$

где $R_0 = \dfrac{M^2_{\nu\,(1)}\,Q_\nu}{\varepsilon V\omega_\nu}$ — сопротивление, наводимое в возбуждающем элементе ν-м полем ненагруженного резонатора,

$$R_2' = R_2\left(\frac{M_{\nu\,(1)}}{M_{\nu\,(2)}}\right)^2. \qquad (13.113)$$

Таким образом,

$$R_{\text{вх}} \approx R_1 + R_{\text{рез}} = R_1 + \frac{R_0\,R_2'}{R_0+R_2'}. \qquad (13.114)$$

Отсюда видно, что нагрузка оказывает на резонатор шунтирующее влияние. При уменьшении нагрузочного сопротивления величина $R_{\text{вх}}$ уменьшается.

Шунтирующее действие нагрузки зависит также от степени связи резонатора с источником и нагрузкой, т. е. от величины отношения $M_{\nu(1)}/M_{\nu(2)}$. Если связь резонатора с источником неизменна ($M_{\nu(1)} = \text{const}$), а связь с нагрузкой, т. е. величина $M_{\nu(2)}$ умень-

шается, то сопротивление R_2' растет. А$_2$ это приводит к тому, что сопротивление $R_{рез}$ будет приближаться к величине R_0.

Определим в заключение добротность нагруженного резонатора (рис. 13.22). Последняя на основании формулы (13.21) равна

$$Q_{\nu н} = \omega_\nu \frac{W_\nu}{P_{п\nu} + P_н} = \omega_\nu \frac{W_\nu}{P_{п\nu}} \frac{P_{п\nu}}{P_{п\nu} + P_н} = Q_\nu \frac{P_{п\nu}}{P_{п\nu} + P_н}.$$

Здесь Q_ν — добротность ненагруженного резонатора для ν-го типа колебаний; $P_{п\nu}$ — средняя мощность потерь в резонаторе; $P_н$ — средняя мощность, передаваемая в нагрузку.

Будем полагать, что входное сопротивление резонатора активно, т. е. что система настроена в резонанс. В этом случае

$$P_{п\nu} = \frac{U^2}{2R_{вх0}},$$

здесь $R_{вх0}$ — входное сопротивление резонатора без нагрузки;

$$P_{п\nu} + P_н = \frac{U^2}{2R_{вх}}.$$

Следовательно,

$$\frac{P_{п\nu}}{P_{п\nu} + P_н} = \frac{R_{вх}}{R_{вх0}}.$$

Учитывая далее, что $R_{вх0} = R_1 + R_0$, и принимая во внимание (13.114), получим

$$Q_{\nu н} = Q_\nu \frac{R_1 + \dfrac{R_0 R_2'}{R_0 + R_2'}}{R_1 + R_0}.$$

Так как обычно $\dfrac{R_1}{R_0} \ll 1$, то

$$Q_{\nu н} \approx Q_\nu \frac{1}{1 + \dfrac{R_0}{R_2'}} = \frac{Q_\nu}{1 + \dfrac{R_0}{R_2}\left(\dfrac{M_{\nu\,(2)}}{M_{\nu\,(1)}}\right)^2}. \qquad (13.115)$$

Из формулы (13.115) видно, что при увеличении связи резонатора с нагрузкой добротность его уменьшается.

Полученные выше результаты справедливы и для случая, когда в качестве элементов связи используются штыри.

11. Открытые резонаторы

Общие сведения

Рассмотрим снова прямоугольный (или цилиндрический) резонатор без потерь.

Анализ полученных в § 5, 6 этой главы выражений показывает, что основные (характеристические) размеры такого резонатора и собственные длины волн простейших типов колебаний при $\varepsilon \sim \varepsilon_0$ и $\mu \sim \mu_0$ имеют одинаковый порядок по величине*).

На основании этого можно утверждать, что в сантиметровом диапазоне волн подобный резонатор должен иметь характеристические размеры, исчисляемые сантиметрами, в миллиметровом диапазоне — миллиметрами и, наконец, в оптическом — микронами.

Совершенно ясно, что резонаторы с простейшими типами колебаний в оптическом диапазоне и даже в коротковолновой части миллиметрового диапазона волн неприменимы. Очевидно, здесь может идти речь лишь о возможностях применения резонаторов с высшими типами колебаний, характеризуемых более высокими собственными частотами.

Пусть нам дан прямоугольный резонатор с колебаниями TE_{mnp} или TM_{mnp}, причем хотя бы один из индексов, например p, много больше единицы. Физически это означает, что на стороне l резонатора (см. рис. 13.7) укладывается большое число полуволн поля.

При таком условии собственные частоты соседних типов колебаний с близкими значениями индексов m или n будут отличаться друг от друга, как вытекает из формулы (13.30), незначительно. Аналогичное утверждение, конечно, справедливо и для цилиндрического резонатора при $p \gg 1$.

В общем случае можно показать, что число собственных колебаний, приходящихся на полосу частот $\Delta\omega$, при достаточно больших ω равно

$$\Delta N = \frac{V}{2\pi^2 v^3}\,\omega^2\,\Delta\omega,$$

где V — объем резонатора; $v = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ — скорость распространения электромагнитной волны. Отсюда вытекает, что по мере повышения частоты число собственных колебаний, расположенных в единичной полосе частот, непрерывно увеличивается. В конце концов спектр собственных частот резонатора становится весьма плотным, т. е. расстояние между соседними значениями ω_{mnp} (на шкале частот) оказывается ничтожно малым.

*) Характеристическими мы называем размеры, от которых зависит собственная длина волны.

В реальных условиях, характеризуемых наличием потерь, любая колебательная система, в том числе и резонатор, имеет какую-то конечную добротность.

Но добротность колебательной системы, как известно, определяет ее избирательные свойства. Так, из теории колебательных контуров следует, что относительная ширина резонансной характеристики контура равна $\Delta f/f = 1/Q$.

В объемном резонаторе явление резонанса, как было показано выше, наступает при совпадении частоты колебаний источника с одной из собственных частот. В окрестностях каждой из этих частот резонатор ведет себя подобно простому колебательному контуру и, следовательно, имеет свою, так сказать, локальную резонансную характеристику.

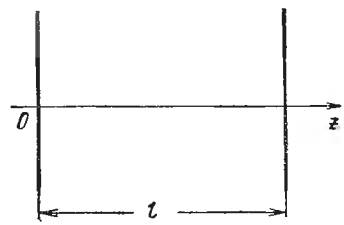


Рис. 13.23. Открытый резонатор с плоскими зеркалами.

В обычных условиях эти характеристики не перекрываются, и мы наблюдаем в системе множество резонансов.

Если же собственные частоты мало отличаются друг от друга, то даже при значительной добротности системы резонансные характеристики ее могут перекрываться. Именно такая картина наблюдается в резонаторе с колебаниями, характеризуемыми большими значениями индексов.

Чтобы использовать подобный резонатор в качестве колебательной системы, необходимо каким-то образом сделать спектр собственных частот более редким и по возможности увеличить добротность.

Оказывается, это можно осуществить путем удаления боковых стенок. В результате получается резонатор, называемый о т к р ы т ы м (рис. 13.23).

Физически возникновение колебаний того или иного типа в объемном резонаторе можно трактовать как результат многократных отражений электромагнитной волны от стенок, при этом каждому типу колебаний соответствует строго определенный ход лучей отраженной волны. (Аналогичные рассуждения мы уже проводили для волновода с волной TE_{10} в гл. X.)

Если в резонаторе боковые стенки удалить, то в нем, очевидно, могут существовать лишь те типы колебаний, которые образуются путем отражения волны от торцевых стенок. Все же другие типы колебаний при этом исчезнут.

В результате спектр собственных частот открытого резонатора оказывается более редким по сравнению со спектром аналогичного замкнутого резонатора.

Определим величину добротности открытого резонатора, используя формулу (13.21).

Основываясь на изложенном, представим поле резонатора в виде двух волн равных амплитуд, распространяющихся вдоль оси z в противоположных направлениях и взаимно переходящих при отражениях одна в другую. Совокупность таких волн, как известно, образует стоячую волну. В действительности же в резонаторе чисто стоячей волны нет, так как небольшая часть электромагнитной энергии поглощается отражающими стенками, а также излучается в окружающее пространство вследствие дифракции волн на этих стенках.

Пусть энергия электромагнитного поля резонатора равна W. Эта величина, естественно, разделяется поровну между полями прямой и обратной волн.

Нетрудно сообразить, что энергия прямой волны, заключенная на промежутке $0 \leqslant z \leqslant l$ (рис. 13.23), проходит через сечение $z = l$ за время $l/v_{\text{гр}}$, где $v_{\text{гр}} = 1/\sqrt{\varepsilon\mu} = v$. Следовательно, средний поток энергии этой волны через поперечное сечение резонатора за единицу времени равен $(W/2)\,(v/l)$. Эта величина определяет среднюю (за период колебаний) мощность падающей волны, ибо усреднение за время l/v, если длина резонатора $l = p\ (\lambda_0/2)$, где p — целое число, дает тот же результат, что и усреднение за период колебаний.

При падении волны на отражающую поверхность (зеркало) в плоскости $z = l$ часть энергии ее, как уже только что говорилось, теряется.

Средняя мощность потерь на зеркале в плоскости $z = l$ приближенно будет равна $\frac{W}{2l}\,v\,(1 - R)$; здесь R — коэффициент отражения плоской волны по мощности. Такая же мощность теряется и при отражении от зеркала в плоскости $z = 0$. Стало быть, полная мощность потерь в резонаторе определяется выражением

$$P_{\text{п}} = \frac{W}{l}\,v\,(1 - R).$$

Подставляя найденное значение $P_{\text{п}}$ в выражение (13.21) будем иметь

$$Q = \frac{\omega_0}{v}\,\frac{l}{1-R} = \frac{kl}{1-R} = \frac{2\pi l}{\lambda_0}\,\frac{1}{1-R}. \qquad (13.116)$$

Полученная формула характеризует добротность открытого резонатора без учета дифракционных потерь. Поэтому в действительности величина Q будет несколько ниже расчетной. Однако, если длина волны много меньше размеров отражающих поверхностей, дифракционные потери станут малыми.

Из выражения (13.116) видно, что при $l/\lambda_0 \gg 1$ и малых значениях R добротность может быть весьма большой.

Пусть, например, $l = 10$ *см*, $\lambda_0 = 1$ *мк* $= 10^{-4}$ *см* и $R = 0{,}98$. Такие величины являются типовыми для реальных резонаторов оптического диапазона волн. В этом случае

$$Q = \frac{6{,}28 \cdot 10}{10^{-4}} \frac{1}{1-0{,}98} = 3{,}14 \cdot 10^7.$$

Следует указать, что рассматриваемый резонатор весьма чувствителен к перекосам отражающих зеркал. Даже небольшое нарушение параллельности отражающих поверхностей приводит к появлению дополнительного излучения электромагнитной энергии во внешнее пространство и, стало быть, влечет за собой уменьшение добротности резонатора.

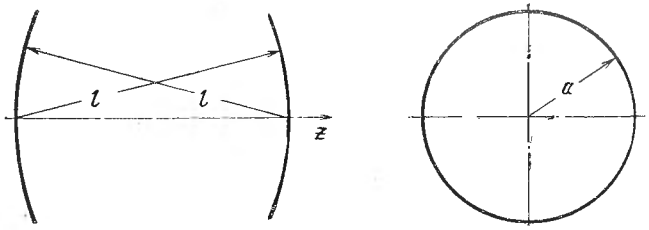


Рис. 13.24. Конфокальный открытый резонатор.

В этом отношении более удобным оказывается резонатор, образованный двумя одинаковыми отражающими поверхностями сферической формы. На рис. 13.24 изображен так называемый конфокальный сферический резонатор, у которого фокусы обоих отражающих зеркал лежат в одной точке. Резонатор такого типа, как показывает анализ, характеризуется меньшим уровнем потерь на излучение, нежели резонатор с плоскопараллельными зеркалами.

Типы колебаний в открытом резонаторе

Познакомимся более подробно с особенностями электромагнитного поля открытого резонатора в режиме собственных колебаний. Для конкретности рассуждений предположим, что резонатор имеет плоские зеркала.

Выше мы уже отмечали, что поле в открытом резонаторе можно представить как результат многократных отражений электромагнитной волны от торцевых стенок. В соответствии с этим будем полагать, что при М-ом отражении волны от левого зеркала в плоскости $z = 0 +$ образуется поле, характеризуемое волновой функцией $\psi_M(x, y, 0+)$. Под этой функцией можно подразумевать любую из проекций $\dot{E}_x$, $\dot{E}_y$ или $\dot{H}_x$, $\dot{H}_y$ векторов электромагнитного поля.

Предположим далее, что длина волны много меньше размеров отражающих зеркал.

Если бы поле в резонаторе точно подчинялось законам геометрической оптики, то волна, отраженная от левого зеркала, распространялась бы вдоль оси z в виде пучка с неизменным распределением поля в поперечном сечении. Однако на самом деле пучок по мере распространения будет расплываться.

Чтобы определить функцию $\psi_м$ в произвольной плоскости $z = \text{const}$, воспользуемся принципом Гюйгенса — Кирхгофа

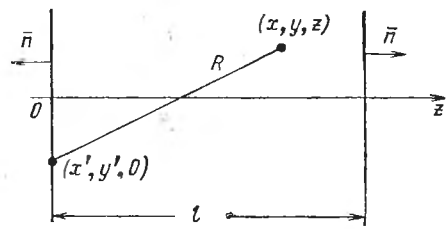


Рис. 13.25. К анализу собственных колебаний в открытом резонаторе.

(см. § 3 гл. IX). В соответствии с особенностями приближенного решения дифракционных задач будем считать, что неподалеку от плоскости $z = 0$ функция

$$\psi_м(x, y, z) \approx \psi_м(x, y, 0)\, e^{-ikz} = \psi_0(x, y)\, e^{-ikz}.$$

Это приближение означает, что вблизи отражающей плоскости еще справедливы законы геометрической оптики, т. е. отраженный пучок здесь еще не расплывается.

В рассматриваемом случае интеграл (9.20) принимает вид

$$\psi_м(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_S \left[\psi_м(x', y', 0)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikR}}{R}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial \psi_м(x', y', 0)}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikR}}{R}\right)\right] dS, \qquad (13.117)$$

здесь x', y', $z' = 0$ — координаты точки интегрирования; x, y, z — координаты точки наблюдения; $R = (x - x') + (y - y')^2 + z^2$ и $\partial/\partial n = -\partial/\partial z$ (рис. 13.25). Интегрирование в (13.117) происходит по поверхности отражающего зеркала, т. е. функция $\psi_м(x, y, 0)$ вне зеркала полагается равной нулю. А это значит, что на краях зеркала мы допускаем разрыв $\psi_м$ и, стало быть, имеем дело с функцией, не удовлетворяющей условиям применимости теоремы Грина. Для устранения подобного затруднения можно было бы применить более общий метод эквивалентных токов, который не накладывает таких жестких ограничений на функции распределения эквивалентных источников. Однако исследование аналогичных задач показывает, что при расчете поля методом эквивалент-

ных токов в направлениях, близких к направлению оси z, получаются результаты, мало отличающиеся от тех, которые дает принцип Гюйгенса — Кирхгофа.

Преобразуем интеграл (13.117). В нашем случае

$$\left.\frac{\partial \psi_м}{\partial n}\right|_{z'=0} = -\frac{\partial}{\partial z'}\left(\psi_м(x', y', 0)\, e^{-ikz'}\right)_{z'\to 0} = +ik\psi_м(x', y', 0),$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikR}}{R}\right) = -\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{e^{-ikR}}{R}\right)\left.\frac{\partial R}{\partial z'}\right|_{z'\to 0} =$$

$$= -\left(ik + \frac{1}{R}\right)\frac{e^{-ikR}}{R}\cos\left(\bar{i}_z, \bar{i}_R\right).$$

Если точка наблюдения удалена от плоскости $z = 0$ на расстояние $z \gg \lambda$, и , кроме того, z значительно больше поперечных размеров зеркала, то

$$\cos\left(\bar{i}_z, \bar{i}_R\right) \approx \cos\theta \approx 1, \quad k \gg \frac{1}{R};$$

$$R \approx z + \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2z}.$$

Последнее приближение справедливо при условии, что третий член степенного ряда для kR, равный $\frac{k[(x-x')^2+(y-y')^2]}{8z^3}$, много меньше единицы.

Подставляя эти соотношения в (13.117), получаем

$$\psi_м(x, y, z) = \frac{i}{\lambda}\,\frac{e^{-ikz}}{z}\int\limits_S \psi_м(x', y', 0) \times$$

$$\times e^{-\frac{ik}{2z}[(x-x')^2+(y-y')^2]}\, dS. \qquad (13.118)$$

При падении на второе зеркало в плоскости $z = l$ волна подвергнется $(M + 1)$-му отражению. Так как рассматриваемая система симметрична, естественно полагать, что после многократных отражений в ней установится режим, при котором распределение отраженного поля в плоскости $z = l$ с точностью до постоянного множителя будет повторять распределение исходного отраженного поля в плоскости $z = 0$. В соответствии с этим потребуем, чтобы волновая функция $\psi_{м+1}$ в плоскости $z = l$ при $M \gg 1$ была равна

$$\psi_{м+1}(x, y, l) = q\psi_м(x, y, 0); \qquad (13.119)$$

q — постоянный, в общем случае комплексный множитель, т. е. $q = |q|\, e^{i\varphi_q}$.

Из равенства (13.119) видно, что

$$|q| = \frac{|\psi_{M+1}(x, y, l-)|}{|\psi_M(x, y, 0+)|}.$$

Следовательно, модуль q характеризует ослабление поля за один проход волны, вызванное дифракционными потерями (а также потерями энергии в зеркале на отражение). Аргумент φ_q соответственно определяет фазовый сдвиг волны, причем $\varphi_q = -kl + \Delta$, где Δ — добавка к геометрическому фазовому сдвигу — kl.

Учитывая, что на идеально проводящем зеркале $\psi_{M+1}(x, y, l) = \psi_M(x, y, l)$, если ψ_M есть H_x или H_y и, используя (13.118), получаем

$$\int_S \psi(x', y') K(x, y, x', y')\, dx'\, dy' = q\psi(x, y), \qquad (13.120)$$

здесь мы обозначили $\psi(x, y) = \psi_M(x, y, 0)$,

$$K(x, y, x', y') = \frac{e^{-i(kl-\pi/2)}}{\lambda l} e^{-\frac{ik}{2l}[(x-x')^2+(y-y')^2]}. \qquad (13.121)$$

Равенство (13.120) представляет собой однородное интегральное уравнение второго рода*) с неизвестной функцией ψ и ядром $K(x, y, x', y')$. Последнее, как вытекает из (13.121), непрерывно и симметрично, т. е. $K(x, y, x', y') = K(x', y', x, y)$.

Значения q, при которых уравнение (13.120) имеет нетривальные решения, называются собственными значениями этого уравнения, а соответствующие им функции $\psi(x, y)$ — собственными функциями. (Подробнее о собственных значениях и собственных функциях см. в гл. XIV.)

Из математики известно, что однородное интегральное уравнение данного типа обладает множеством собственных значений и собственных функций. Согласно этому обозначим $q = q_\nu$; $\psi(x, y) = \psi_\nu(x, y)$ и будем называть в дальнейшем ψ_ν и q_ν собственными функциями и собственными значениями открытого резонатора**). Конечно, такие наименования в какой-то мере являются условными, ибо открытый резонатор представляет собой трехмерную систему; а функции ψ_ν характеризуют распределение поля лишь на поверхности зеркала.

*) Интегральным уравнением второго рода называется уравнение вида

$$\int_{x1}^{x2} \psi(x') K(x, x')\, dx' + \psi(x) = f(x),$$

где $\psi(x)$ — искомая, а $f(x)$ — заданная функция, x_1 и x_2 — пределы интегрирования.

**) Индекс ν не путать с номером отражения M.

Таким образом, в открытом резонаторе существует множество типов собственных колебаний. Каждый тип имеет свою специфическую структуру поля и свою собственную частоту.

Собственные частоты резонатора связаны с аргументами собственных значений q_ν соотношением

$$2\varphi_q = -2kl + 2\Delta = -2p\pi, \qquad (13.122)$$

где p — целое число. Физически последнее равенство означает, что фаза волны после двукратного прохода и отражения ее от правого и левого зеркал резонатора должна измениться на величину $-2p\pi$. Только при выполнении этого условия волны, движущиеся по оси z в одном направлении, будут после отражения последовательно повторять друг друга.

Из равенства (13.122) следует, что собственные частоты

$$\omega_\nu = \frac{v}{l}(\Delta_\nu + p\pi), \qquad (13.123)$$

где $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$.

Если отражающие зеркала имеют форму бесконечных плоскостей, то собственные частоты колебательной системы становятся равными

$$\omega_\nu = \omega_p = v\frac{p\pi}{l}.$$

В этом случае между отражающими плоскостями существует стоячая волна поперечного типа. В открытом резонаторе с зеркалами конечных размеров, электромагнитное поле, как будет пояснено далее, можно считать почти поперечным, или к в а з и п о п е р е ч н ы м.

Различные типы собственных колебаний открытого резонатора обозначаются символами TEM_{mn}. Индексы m и n, которые мы здесь написали взамен обобщенного индекса ν, характеризуют структуру поля, и соответственно тока на поверхности зеркала. (Здесь, конечно, правильнее было бы указывать не два, а три индекса: m, n и p. Однако значение p для открытых резонаторов обычно опускается, ибо эта величина много больше единицы.)

Конкретный вид собственных функций $\psi_{mn}(x, y)$ и собственные значения q_{mn}, естественно, находятся из решения интегрального уравнения (13.120) для заданного типа резонатора. Такое уравнение, как правило, решается численными методами. Поэтому мы ограничимся изложением лишь некоторых конечных результатов.

На рис. 13.26, *а* схематически изображено распределение поля (или тока) на поверхности зеркала квадратной формы для нескольких типов колебаний. Из рисунка видно, что различные типы полей характеризуются различным числом «полуволн», приходящихся на сторону зеркала. Следует однако учесть, что в данном

случае мы имеем картину, несколько отличную от той, которую наблюдали при изучении волноводов или обычных резонаторов. Так, например, простейший тип колебаний в открытом резонаторе, получающийся при $m = n = 0$, характеризуется неравномерным распределением поля (тока) по зеркалу. В то же время для волновода или замкнутого резонатора индекс m или n, равный нулю, свидетельствовал о том, что поле в направлении оси x или y не изменяется.

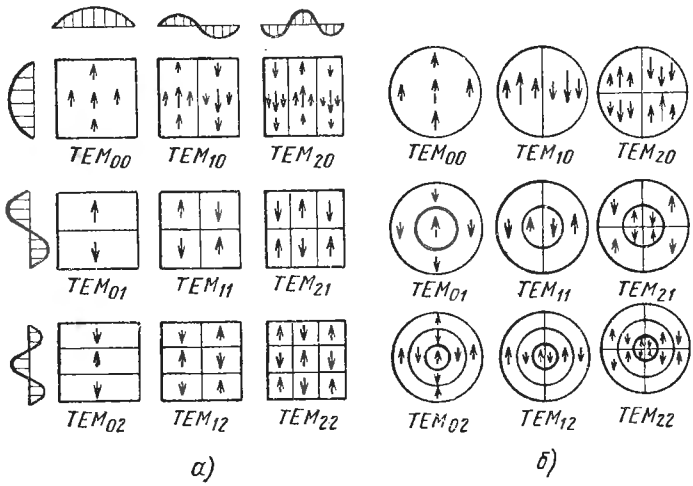


Рис. 13.26. Распределение поля на поверхности зеркала в открытом резонаторе:
а — квадратные зеркала; *б* — круглые зеркала.

На рис. 13.26, *б* показаны аналогичные распределения в резонаторе с круглыми зеркалами.

Необходимо отметить, что точные кривые, характеризующие изменение поля по зеркалу, не являются гладкими. На рис. 13.27 изображены графики распределения относительной амплитуды и фазы поля для колебаний TEM_{00} $\left(\text{т. е. функций } \frac{|\psi_{00}(\rho)|}{|\psi_{00\,\text{макс}}|}\right.$ и $\left.\arg \psi_{00}(\rho)\right)$ в резонаторе с круглыми зеркалами). Эти графики получены в результате численного решения интегрального уравнения (13.120) на электронной вычислительной машине для параметра $N = a^2/\lambda l = 20$ (a — радиус зеркала, l — длина резонатора).

Из графиков видно, что относительные амплитуды поля спадают по направлению к краям зеркала, но уменьшаются они немонотонно. Вместе с тем фаза поля в пределах зеркала не остается постоянной. На краях фазовый сдвиг приближается к величине —45°.

А это значит, что фронт отраженной волны в резонаторе несколько искажен и что, следовательно, рассматриваемое поле не является строго поперечным. Однако если радиус зеркала много больше длины волны, искажение фронта волны в общем оказывается несущественным.

Заметим, что у полей с бо́льшими значениями индексов m и n продольные составляющие векторов поля возрастают.

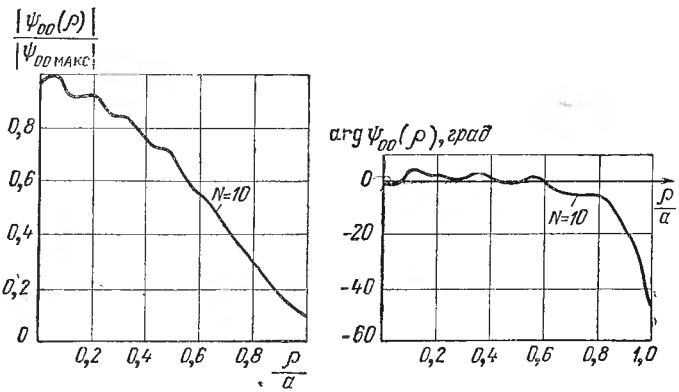


Рис. 13.27. Распределение относительной амплитуды и фазы поля TEM_{00} в резонаторе с плоскими круглыми зеркалами.

Чтобы иметь представление об уровне потерь электромагнитной энергии в резонаторе, необходимо знать модуль собственного числа q_{mn}. Из определения q следует, что относительные потери мощности на одно отражение равны

$$\delta_{\text{п}} = 1 - \frac{|\psi_{\text{м}+1}(x, y, l)|^2}{|\psi_{\text{м}}(x, y, l)|^2} = 1 - |q_{mn}|^2.$$

В резонаторе с идеально отражающими зеркалами эта величина, естественно, характеризует дифракционные потери.

На рис. 13.28 изображены графики зависимости $\delta_{\text{п}}$ от величины $N = a^2/\lambda l$ для резонатора с круглыми зеркалами (a — радиус зеркала). Как мы и полагали, дифракционные потери по мере роста поперечных размеров зеркала при неизменной длине волны уменьшаются. Следует отметить, что самые малые потери в резонаторе имеют колебания TEM_{00}. В связи с этим последние получили наименование колебаний основного типа.

Для оценки добротности открытого резонатора с учетом дифракционных потерь можно воспользоваться формулой (13.116). Действительно, в этой формуле величина $(1-R)$ характеризует относительные потери. Если к $(1 - R)$ добавить еще величину $\delta_{\text{п}}$, опре-

деляющую дифракционные потери тоже на одно отражение, то формула для Q принимает вид

$$Q = \frac{2\pi l}{\lambda_0} \frac{1}{1 - R + \delta_{\text{п}}}. \qquad (13.124)$$

На рис. 13.29 изображены еще два графика, характеризующие зависимость дополнительного фазового сдвига Δ от числа N в резонаторе с круглыми зеркалами для колебаний TEM_{00} и TEM_{01}. Эта величина связана с аргументом собственного значения q соотношением (13.122).

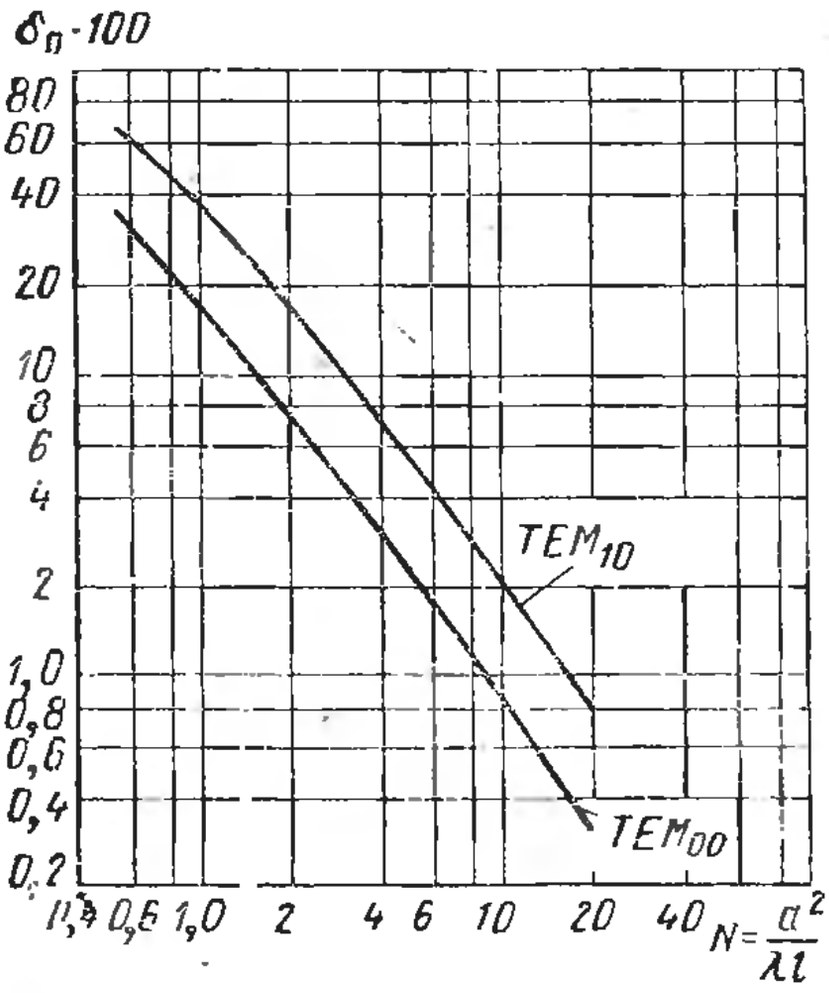


Рис. 13.28. Относительные потери мощности на одно отражение в резонаторе с плоскими круглыми зеркалами.

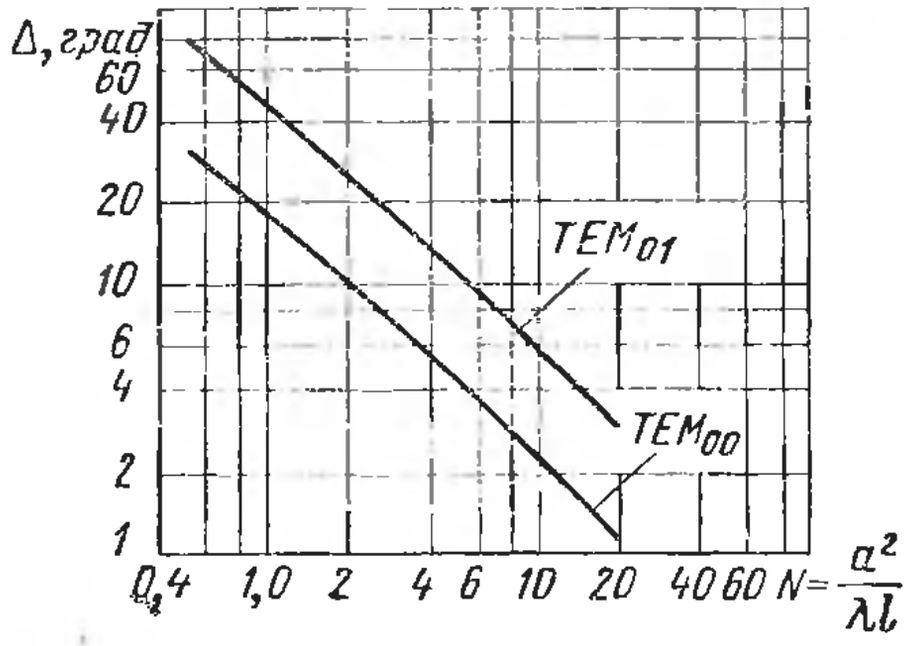


Рис. 13.29. Дополнительный фазовый сдвиг, вносимый зеркалом, в резонаторе с колебаниями TEM_{00}.

Изложенная выше теория собственных колебаний в открытом резонаторе была разработана американскими учеными Фоксом и Ли. Наиболее полная теория таких резонаторов создана в настоящее время советским ученым Л. А. Вайнштейном.

ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

1. Введение

В предыдущих главах книги мы рассматривали так называемую классическую теорию электромагнитного поля и ее некоторые практические приложения.

Классическая теория поля, как известно, утверждает, что поле имеет непрерывную структуру и что энергия его не может изменяться во времени скачком. Подобное утверждение является отражением общего принципа классической физики, отрицающего возможность скачков («природа не делает скачков»).

Анализ электромагнитных явлений на основе классической теории сводится к решению уравнений Максвелла в исходной области при известных источниках и граничных условиях. В качестве характеристик вещества, заполняющего заданную область, используются три величины: удельная электропроводность, диэлектрическая и магнитная проницаемости. Электромагнитные процессы в молекулах и атомах (а также других частицах) вещества при этом не рассматриваются; считается, что вещество как бы непрерывно. Иными словами, реальное вещество, состоящее из множества микрочастиц, при анализе заменяется некоторой непрерывной средой с известными параметрами g, ε и μ. В большинстве случаев не учитывается и дискретность источников поля, в действительности представляющих собой совокупность движущихся электронов или других заряженных микрочастиц.

Таким образом, классическая теория поля, в сущности, оперирует с макроскопическими характеристиками, т. е. величинами, получающимися в результате усреднения действительных физических величин по объемам малых размеров, которые, однако, значительно больше размеров молекул. Стало быть, она имеет макроскопический смысл.

Из решения уравнений Максвелла вытекает, что электромагнитное поле имеет волновой характер, т. е. оно может распространяться в виде электромагнитных волн, способно интерферировать, испытывать дифракцию и т. п.

Подобная макроскопическая теория поля дает объяснение многим электромагнитным процессам, интересным в теоретическом отношении и важным для практики. Поэтому она играет большую роль в современной теоретической и прикладной радиотехнике. Однако имеются электромагнитные процессы, изучение которых на основе классических представлений в общем случае оказывается невозможным. К их числу относится ряд явлений, наблюдаемых при взаимодействии поля с веществом, например: дисперсия и резонансное поглощение электромагнитных волн в веществе, индуцированное излучение и т. д. (Некоторые из них мы рассмотрим в следующей главе.)

Чтобы понять физическую сущность таких явлений, при анализе взаимодействия электромагнитного поля с веществом необходимо учитывать микроструктуру последнего, т. е. представлять вещество в виде ансамбля мельчайших частиц (молекул, атомов, электронов и т. п.) и рассматривать взаимодействия поля с ними.

Поведение частиц в веществе, как известно, определяется законами квантовой механики. Но квантовые законы характеризуют не только свойства частиц, но и свойства электромагнитного поля, ибо, как утверждает современная физика, поле представляет собой поток фотонов — «элементарных частиц» с массой покоя, равной нулю. Таким образом, электромагнитное поле помимо волновых свойств, описываемых классической теорией, обладает и свойствами частиц, характеризуемых квантовыми законами. Согласно этим представлениям изменение энергии поля происходит не непрерывно, а скачками, в виде отдельных порций, соответствующих энергии фотонов. Иными словами, электромагнитное поле квантовано, причем квантами поля и являются фотоны.

Впервые идею о дискретном, квантовом характере излучения электромагнитного поля выдвинул в 1900 г. известный немецкий физик Макс Планк. Исследуя тепловое излучение абсолютно черного тела, он предположил, что каждый излучаемый квант поля несет в себе энергию

$$W = h\omega, \tag{14.1}$$

где $h = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ *дж·сек* — постоянная, называемая ныне постоянной Планка*); ω — угловая частота колебаний.

В результате Планку удалось теоретическим путем сформулировать закон распределения энергии в спектре излучения абсолютно черного тела, весьма хорошо подтверждаемый на опыте.

---

*) В более старой литературе постоянной Планка называлась величина $2\pi h$, а используемая здесь величина обозначалась символом $\hbar$.

В 1905 г. А. Эйнштейн, изучая фотоэлектрические явления, развил гипотезу Планка, предположив, что электромагнитное поле поглощается тоже отдельными порциями — квантами. Эйнштейн установил, что каждый квант света (электромагнитного поля) наряду с определенной энергией должен обладать и импульсом

$$\bar{p} = h\bar{k}, \tag{14.2}$$

здесь $\bar{k}$ — волновой вектор (см. § 7 гл. VI).

Заметим, что тепловое излучение тел и фотоэлектрический эффект тоже принадлежат к числу тех явлений, которые не могла объяснить классическая физика прошлого века. Анализ их оказался возможным лишь на основе новых представлений, в корне отличных от используемых в обычной теории поля.

Идеи, выдвинутые Планком и Эйнштейном, сыграли большую роль в развитии науки; они положили начало новой отрасли физики — квантовой механике.

В заключение следует указать, что при анализе взаимодействия частиц с электромагнитным полем в ряде случаев можно пользоваться соотношениями классической механики и классической теории поля. Эти соотношения мы, в частности, применяли в гл. VII при изучении электромагнитных процессов в плазме. Исследования показывают, что такой приближенный подход дает хорошие результаты, если частицы обладают достаточно высокой кинетической энергией, а энергия каждого кванта поля мала, т. е. когда справедливо неравенство

$$mv_{\text{ср}}^2 \gg h\omega,$$

где m — масса частицы; $v_{\text{ср}}$ — среднеквадратичная скорость ее движения. Отсюда следует, что классические соотношения, как правило, могут быть использованы в диапазоне сравнительно невысоких частот.

2. Частицы и волны

Многочисленные экспериментальные исследования, проведенные в 20—30-х годах нашего столетия, показали, что микрочастицы ведут себя двойственным образом: в одних случаях они проявляют обычные корпускулярные свойства, а в других — неожиданно обнаруживают волновой характер. Так, например, в 1927 г. была открыта дифракция электронов — явление чисто волновое, казалось бы несовместимое с обычными «нормами поведения» частиц. Затем было установлено, что дифракцию могут испытывать нейтроны и другие частицы.

Для правильного истолкования этих явлений важное значение имели работы французского физика Луи де Бройля. В 1924 г. де

Бройль высказал идею о том, что квантовые соотношения Планка и Эйнштейна, характеризующие свет, справедливы и для частиц. В соответствии с этим движение свободной частицы де Бройль связал с волновой функцией

$$\psi = Ae^{i(\omega t - \bar{k}\bar{r})} = Ae^{i(\omega t - k\xi)}, \qquad (14.3)$$

представляющей плоскую волну (см. рис. 6.13).

Выражение (14.3) с учетом (14.1) и (14.2) можно переписать в виде

$$\psi(\bar{r}, t) = Ae^{i\left(\frac{W}{h}t - \frac{\bar{p}\bar{r}}{h}\right)}, \qquad (14.4)$$

здесь W — энергия частицы; $\bar{p}$ — импульс, равный $m\bar{v}$ ($\bar{v}$ — вектор скорости, m — масса частицы). Определяемая формулой (14.4) волна получила наименование волны де Бройля.

Таким образом, движению свободной микрочастицы соответствует волновой процесс с длиной волны $\lambda = 2\pi h/p$ и частотой колебаний $\omega = W/h$. Из этих соотношений видно, что волновые характеристики частицы (т. е. величины λ и ω) связаны с ее динамическими характеристиками $\bar{p}$ и W.

В общем случае волновые функции, очевидно, будут иметь более сложную структуру, чем плоские волны, характеризующие движение свободной частицы с постоянной энергией и постоянным импульсом.

Следует отметить, что физический смысл волн де Бройля был выяснен далеко не сразу. Вначале, например, одни ученые полагали, что эти волны являются волнами материи, а другие, наоборот, считали, что сами частицы есть сгустки волн. И только позднее стало ясно, что волновые функции имеют статистический, вероятностный смысл. М. Борном было установлено, что квадрат модуля волновой функции определяет вероятность нахождения частицы в момент времени t в данной точке пространства.

Пусть dV — бесконечно малый элемент пространства, в котором движется частица. Тогда в соответствии с теорией Борна вероятность локализации частицы в момент времени t в элементе объема dV будет равна

$$dF = |\psi(x, y, z, t)|^2 dV, \qquad (14.5)$$

здесь x, y, z — координаты точки, принадлежащей элементу dV. Для объема V конечных размеров вероятность

$$F(V, t) = \int_V |\psi(x, y, z, t)|^2 dV.$$

Если $V \to \infty$, то $\lim\limits_{V\to\infty} F(V, t) = \lim\limits_{V\to\infty} \int\limits_V |\psi(x, y, z, t)|^2 dV = 1$, ибо выражение $\int\limits_V |\psi(x, y, z, t)|^2 dV$ при $V \to \infty$ определяет вероятность достоверного события (частица обязательно где-то находится), которая, как известно, равна единице.

Заметим, кстати, что для волн де Бройля последнее соотношение не выполняется (интеграл расходится). Этот результат свидетельствует о том, что волна (14.4) является математической абстракцией.

Из выражения (14.5) видно, что $|\psi|^2 = dF/dV = f(x, y, z, t)$. Следовательно, величина $|\psi|^2$ представляет собой плотность вероятности локализации частицы в момент времени t в заданной точке наблюдения. Именно такое статистическое определение волновой функции и позволяет понять дуализм поведения частиц.

Таким образом, в квантовой теории волновые функции имеют совсем иной смысл, нежели аналогичные функции в классической теории поля. (В связи с этим волновые функции квантовой теории, если даже они и комплексны, мы будем обозначать буквами без точек над ними. Например, ψ, а не $\dot{\psi}$ и т. п.)

Чтобы нагляднее представить волновые свойства частиц, рассмотрим упомянутое выше явление дифракции электронов. Впервые эти явления наблюдали американские ученые Девиссон и Джермер. В их опыте электроны, вылетавшие из источника, направлялись на кристаллическую решетку, а затем регистрировались фотопластинкой. В результате наблюдений было установлено, что электроны, рассеянные решеткой, создают на фотопластинке типичную дифракционную картину в виде правильно чередующихся темных и светлых областей, аналогичную той, которая возникает при дифракции электромагнитных волн. При этом длина «электронной волны» получается такой же, как и длина волны де Бройля.

Позднее были проведены наблюдения над слабыми электронными пучками, в которых взаимодействие между отдельными электронами практически отсутствует. Подобные наблюдения показали, что дифракцию испытывают даже отдельные электроны. Действительно, местоположение отдельного электрона на регистрирующей пластинке каждый раз оказывалось случайным. Однако при многократном повторении опыта получается распределение, совпадающее с тем, которое дает электронный поток. А это значит, что волновыми свойствами обладает любой отдельный электрон.

Проведенные выше рассуждения говорят о том, что наблюдаемые при дифракции электронов и других микрочастиц интерференционные явления нельзя рассматривать как результат взаимодействия частиц. Интерференция с позиций квантовой теории проявляется как статистический, вероятностный процесс, присущий каждой частице в отдельности.

В заключение определим фазовую и групповую скорости волны де Бройля. Пусть частица и соответствующая ей волна движутся вдоль оси x. Тогда волновая функция будет иметь вид

$$\psi(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx)} = Ae^{i\left[\frac{W}{h}t - \frac{p}{h}x\right]}.$$

По определению фазовая скорость волны равна $v_\phi = \omega/k$, причем в рассматриваемом случае $\omega = W/h$. Но из теории относительности известно, что энергия движущейся частицы

$$W = \sqrt{m_п^2 c^4 + p^2 c^2} = m_п c^2 + \frac{p^2}{2m_п} + \dots,$$

где $m_п$ — масса покоя частицы; c — скорость света в вакууме. Если скорость движения частицы $v \ll c$, то W можно представить как сумму энергии покоя $m_п c^2$ и энергии движения $p^2/2m_п$ (кинетической энергии).

Следовательно,

$$\omega = \frac{m_п c^2}{h} + \frac{p^2}{2m_п h} = \frac{m_п c^2}{h} + \frac{hk^2}{2m_п}. \qquad (14.6)$$

Подставив найденное значение ω в формулу для фазовой скорости, получим

$$v_\phi = \frac{m_п c^2}{hk} + \frac{hk}{2m_п}.$$

Отсюда видно, что величина фазовой скорости зависит от волнового числа k, т. е. от длины волны. Стало быть, при распространении волны де Бройля наблюдается явление дисперсии независимо от того, в какой «среде» движется эта волна.

Групповая скорость волны $v_{гр} = d\omega/dk$. При $v \ll c$ с учетом 14.6) имеем $v_{гр} = hk/m_п$. Так как $hk = p = m_п v$, то

$$v_{гр} = v.$$

Таким образом, групповая скорость волны равна механической скорости движения частицы.

3. Соотношение неопределенностей

Из вероятностного смысла введенной выше волновой функции следует, что координаты движущейся частицы для наблюдателя в принципе оказываются неопределенными. В сущности, здесь можно говорить лишь о вероятности нахождения частицы в той или иной точке пространства.

Конечно, при некоторых условиях положение частицы удается определить точно. Такая ситуация получается, например, в момент

столкновения частицы с фотонами, когда местоположение ее фиксируется световой вспышкой, или при попадании частицы на регистрирующую фотопластинку. Однако в этих случаях изменяется импульс частицы и, следовательно, становится неопределенной величина импульса.

В других условиях удается определить импульс. Например, из опыта с дифракцией можно измерить длину волны, а затем с помощью формулы (14.2) вычислить величину $p = 2\pi\hbar/\lambda$. Что же касается координат частицы, то они теперь будут иметь совершенно случайные значения.

Таким образом, определенность положения частицы в пространстве для наблюдателя сопровождается полной неопределенностью ее импульса и наоборот.

Пусть координата x частицы может иметь любые значения, принадлежащие промежутку $[x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x]$, а импульс ее $p = p_x$ — любые значения из промежутка $[p_0 - \Delta p_x, p_0 + \Delta p_x]$, где x_0 и p_0 — некоторые средние значения x и p. Немецкий физик Гейзенберг установил, что неопределенность координаты частицы, т. е. величина Δx, и неопределенность составляющей импульса Δp_x связаны между собой соотношением

$$\Delta x\, \Delta p_x \approx h \text{ (или } \Delta x \Delta p_x \sim h), \qquad (14.7)$$

получившим в квантовой теории наименование соотношения неопределенностей. Разумеется, такими же соотношениями связаны между собой неопределенности Δy и Δp_y, а также Δz и Δp_z.

Из выражения (14.7) видно, что чем выше точность измерения координаты частицы, тем ниже принципиально возможная точность измерения величины ее импульса и наоборот.

Учитывая, что $\Delta p_x = \Delta p = m\Delta v$, где Δv — неопределенность скорости, перепишем (14.7) в виде

$$\Delta x\, \Delta v \approx \frac{h}{m}.$$

Если масса частицы велика, то произведение неопределенностей $\Delta x\, \Delta v$ становится малым. Вот почему в классической теории, оперирующей с макрочастицами, считается, что положение частицы в пространстве и скорость ее могут определяться точно в один и тот же момент времени.

Покажем справедливость изложенных выше рассуждений на примере волновой функции, имеющей вид волнового пакета (см. § 3 гл. X). В соответствии с этим предположим, что

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} A(k)\, e^{i(\omega t - kx)}\, dk, \quad \Delta k \ll k_0.$$

(В отличие от упомянутого параграфа переменную интегрирования мы обозначили здесь k, а не β. Кроме того, мы отбросили знак Re перед интегралом, так как волновая функция частицы является комплексной функцией.)

Проведя рассуждения, аналогичные уже изложенным в § 3 гл. X, получим

$$\psi(x, t) = \frac{2}{\pi} A(k_0) \frac{\sin\left(\frac{d\omega}{dk_0} t - x\right) \Delta k}{\frac{d\omega}{dk_0} t - x} \times$$

$$\times e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} = F(x, t) e^{i(\omega_0 t - k_0 x)}. \qquad (14.8)$$

Квадрат модуля волновой функции в данном случае равен

$$|\psi(x, t)|^2 = |F(x, t)|^2 = \frac{4}{\pi} |A(k_0)|^2 \frac{\sin^2\left(\frac{d\omega}{dk_0} t - x\right) \Delta k}{\left(\frac{d\omega}{dk_0} t - x\right)^2}.$$

График зависимости $|\psi|^2$ от переменной x изображен на рис. 14.1.

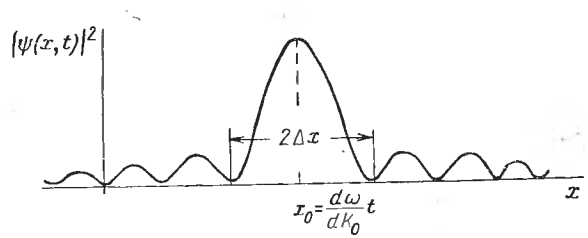


Рис. 14.1. Квадрат модуля волновой функции типа «волновой пакет».

Примем величину $2\Delta x$ за протяженность волнового пакета по оси x. Конечно, в действительности волновой пакет обладает бесконечной протяженностью. Однако на промежутке $[x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x]$ функция $|\psi(x, t)|^2$ имеет преобладающие значения, что, собственно, и оправдывает подобное допущение.

При измерении координаты частицы мы, очевидно, будем получать различные значения x, разбросанные относительно среднего ее значения x_0 в промежутке $\pm \Delta x$. Следовательно, Δx можно принять за величину неопределенности Δx координаты частицы.

Но из (14.8) видно, что $\Delta x \, \Delta k = \pi$. Умножая обе части последнего равенства на постоянную h и учитывая, что $h\Delta k = \Delta p$, будем иметь

$$\Delta x \, \Delta p = \pi h,$$

где Δp — неопределенность импульса, характеризующая, как уже указывалось выше, разброс его значений относительно среднего значения $p_0 = hk_0$.

Полученный результат по порядку величин согласуется с (14.7)*).

В дальнейшем было доказано, что энергия частицы W и время t тоже связаны между собой соотношением неопределенностей:

$$\Delta W \Delta t \approx h \ (\sim h). \tag{14.9}$$

Здесь ΔW — неопределенность энергии, а Δt — неопределенность времени, равная половине временно́го интервала, в течение которого частица может иметь энергию $W_0 \pm \Delta W$ (W_0 — некоторое среднее значение энергии).

Из этого соотношения видно, что для измерения энергии с высокой степенью точности (ΔW мала) потребуется весьма большой промежуток времени

$$\Delta t \approx \frac{h}{\Delta W}.$$

Так как $\Delta W = h\Delta\omega$, где $\Delta\omega$ — неопределенность частоты колебаний, то из (14.9) получим

$$\Delta\omega \Delta t \approx 1. \tag{14.10}$$

Соотношение типа (14.10) хорошо известно в радиотехнике. Оно устанавливает связь между продолжительностью сигнала и реальной шириной его частотного спектра. Физически (14.10) означает, что если сигнал существует в течение времени $2\Delta t$, то при измерении частоты можно получить любые ее значения, лежащие в пределах промежутка $\omega_0 \pm \Delta\omega$ (ω_0 — некоторая средняя частота).

В заключение следует отметить, что соотношение неопределенностей повлекло за собой появление различных философских точек зрения на возможности познания свойств микрочастиц. Многие буржуазные физики-идеалисты стали, например, говорить, что соотношение неопределенностей кладет предел познанию микромира. Разумеется, такие утверждения являются ложными.

Соотношение неопределенностей, конечно, не следует рассматривать как утверждение невозможности познания законов поведения микрочастиц. Здесь просто нужно иметь в виду, что закономерности микромира имеют вероятностный смысл, но эти вероятностные закономерности объективны и познаваемы. Изучение их и составляет задачу квантовой теории.

---

*) Более строгие рассуждения дает соотношение:

$$\sqrt{\overline{(\Delta x)^2}\ \overline{(\Delta p_x)^2}} \geqslant h/2,$$

где $\overline{(\Delta x)^2}$ и $\overline{(\Delta p_x)^2}$ — средние квадраты отклонений координаты x и импульса p_x (см., например, Д. И. Блохинцев. «Основы квантовой механики». Изд-во «Высшая школа», 1963, стр. 62—68).

4. Уравнение Шредингера

Вернемся вновь к рассмотрению волновой функции ψ свободной частицы. Из классической теории поля известно, что функция $\psi(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx)}$ удовлетворяет уравнению $\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0$.

Аналогично, функции

$$\psi = Ae^{i[\omega t - \bar{k}\bar{r}]} = Ae^{i[\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z)]}$$

соответствует уравнение

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + k^2\psi = 0,$$

или в иной форме записи $\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$, здесь $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$, k_x, k_y и k_z — проекции вектора $\bar{k}$ на оси прямоугольной системы координат.

Принимая во внимание, что для свободной частицы $k^2 = p^2/h^2$ и $p^2 = 2mW_к$, где $W_к$ — кинетическая энергия, будем иметь

$$\nabla^2\psi + \frac{2m}{h^2} W_к \psi = 0.$$

Полученное равенство является дифференциальным уравнением, характеризующим волновые свойства свободной частицы. Иными словами, оно является волновым уравнением частицы.

Если частица находится под воздействием внешних сил (движется в потенциальном поле внешних сил), то ее кинетическая энергия равна $W_к = W - U$. Здесь W есть полная энергия, а $U = U(x, y, z)$ — потенциальная энергия частицы. В этом случае уравнение, определяющее волновые функции, будет иметь вид

$$\nabla^2\psi + \frac{2m}{h^2}(W - U)\psi = 0. \qquad (14.11)$$

Однако уравнение (14.11) годится лишь для случая, когда временная зависимость характеризуется множителем $e^{i\omega t} = e^{i\frac{W}{h}t}$, и, следовательно, волновая функция

$$\psi(\bar{r}, t) = e^{i\frac{W}{h}t}\ \psi_0(\bar{r}). \qquad (14.12)$$

Продифференцируем равенство (14.12) по переменной t:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = i\frac{W}{h} e^{i\frac{W}{h}t}\ \psi_0(\bar{r}, t) = i\frac{W}{h}\psi(\bar{r}, t).$$

Отсюда следует, что $W\psi = -ih\,(\partial\psi/\partial t)$. Подставляя значение $W\psi$ в уравнение (14.11), будем иметь

$$ih\,\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{h^2}{2m}\nabla^2\psi - U\psi. \qquad (14.13)$$

Полученное равенство оказывается справедливым и при произвольной зависимости ψ от t.

Уравнения (14.11), (14.12) впервые были введены в квантовую теорию Шредингером и в настоящее время носят его имя.

Проведенные рассуждения, разумеется, нельзя рассматривать как вывод уравнения Шредингера. Мы, в сущности, здесь только убедились, что волновая функция (14.12) удовлетворяет уравнению вида (14.11) или (14.13). Сам Шредингер пришел к этим уравнениям в результате исследования аналогии между некоторыми законами классической механики и законами геометрической оптики.

Волновая функция ψ, определяемая в результате решения уравнения Шредингера, описывает, как мы увидим ниже, возможные состояния физической системы (т. е. частицы или совокупности частиц). Поэтому ψ иногда называют функцией состояния. Так, например, волна де Бройля описывает состояние свободной частицы, движущейся в пространстве с постоянной скоростью.

Состояния, представляемые волновыми функциями вида (14.12), в квантовой механике называются стационарными.

Уравнение Шредингера, как легко заметить, является линейным дифференциальным уравнением. Следовательно, для всех систем, к которым применимо это уравнение, справедлив принцип суперпозиции. Он означает, что если ψ_1 и ψ_2 есть волновые функции, изображающие два состояния системы, то сумма $a_1\psi_1 + a_2\psi_2$, где a_1 и a_2 — некоторые числа, тоже является волновой функцией.

Аналогичным образом можно образовать сумму любого числа волновых функций, которая также будет удовлетворять уравнению Шредингера.

Из физических соображений ясно, что волновая функция должна быть однозначной, конечной и непрерывной функцией пространственных координат и времени. В самом деле, мы уже говорили, что величина $|\psi|^2$ определяет плотность вероятности локализации частицы в заданной точке пространства в заданный момент времени. Если предположить, что ψ не удовлетворяет перечисленным требованиям, то величина $|\psi|^2$ лишается физического смысла. Например, при неоднозначности ψ получается, что вероятность нахождения частицы в окрестности заданной точки в данный момент времени имеет для одних и тех же условий несколько значений и т. д.

Уравнение Шредингера играет весьма большую роль в квантовой теории, так как оно позволяет проводить исследование свойств частиц аналитическим путем.

5. Энергетический спектр частицы. Квантование энергии

Рассмотрим простейший пример решения уравнения Шредингера для частицы, движущейся вдоль оси x между двумя плоскостями $x = 0$ и $x = a$ (рис. 14.2, *а*). Будем полагать, что потенциальная энергия U частицы на промежутке $0 < x < a$ равна нулю, а в плоскостях $x = 0$ и $x = a$ величина $U \to \infty$. При таких условиях частица, естественно, не может выйти за пределы промежутка

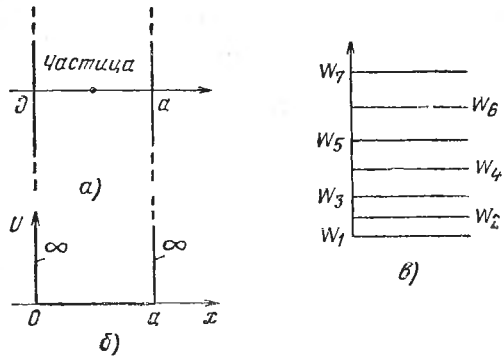


Рис. 14.2. К вопросу о квантовании энергии частицы:

а—частица в промежутке между двумя идеально отражающими плоскостями; *б*—распределение потенциальной функции вдоль оси x; *в*—энергетический спектр частицы.

между плоскостями, так как она не в состоянии преодолеть бесконечно высокий потенциальный барьер. Стало быть, плоскости $x = 0$ и $x = a$ будут для частицы идеально отражающими. В этом случае обычно говорят, что частица находится в бесконечно глубокой потенциальной яме.

Так как потенциальная функция в данном примере зависит только от координаты x (распределение функции U вдоль x изображено на рис. 14.2, *б*), уравнение Шредингера будет одномерным

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{h^2} W\psi = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant a. \tag{14.14}$$

На концах промежутка функция ψ обращается в нуль вследствие того, что плоскости $x = 0$ и $x = a$, как уже говорилось, являются идеально отражающими, и вероятность нахождения частицы на них должна быть равна нулю. В соответствии с этим граничные условия для волновой функции можно записать так:

$$\psi = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = a.$$

Решение уравнения (14.14) целесообразно представить в виде

$$\psi = (A\cos qx + B\sin qx)\,e^{i\frac{W}{\hbar}t}, \qquad (14.15)$$

где

$$q = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}W}. \qquad (14.16)$$

Удовлетворяя граничным условиям, получим:

$$A \equiv 0 \text{ и } q = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Подставив сюда значение q из (14.16), окончательно будем иметь

$$W = W_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2.$$

Таким, образом, полная энергия частицы в данном случае может принимать лишь строго определенные значения W_1, W_2, W_3, ..., соответствующие различным n. Эти значения образуют бесконечный ряд дискретных энергетических уровней, характеризующих различные состояния частицы (рис. 14.2, *в*). При переходе из одного состояния в другое энергия частицы должна меняться скачком. Стало быть, в рассматриваемой системе имеет место квантование энергии.

Каждому состоянию частицы с энергетическим уровнем W_n соответствует своя волновая функция ψ_n. С учетом полученных результатов выражение (14.15), определяющее ψ, принимает вид

$$\psi = \psi_n = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{i\frac{W_n}{\hbar}t}. \qquad (14.17)$$

Легко заметить, что (14.17) аналогична комплексной функции, описывающей стоячую волну.

Совокупность энергетических уровней частицы образует так называемый энергетический спектр. В рассматриваемом случае он оказывается дискретным. Однако существуют и сплошные спектры. Подобным спектром, например, обладает свободная частица с волновой функцией $\psi = Ae^{i\left(\frac{W}{\hbar}t - \bar{k}\bar{r}\right)}$.

6. Операторы

В предыдущем параграфе мы установили, что энергия частицы может быть квантована. Аналогичный вывод, как будет показано ниже, распространяется и на другие физические величины, с которыми имеет дело квантовая механика. Для математического описа-

ния таких величин обычные непрерывные функции, используемые в классической теории, оказываются непригодными. В связи с этим квантовая теория вынуждена использовать более общие математические методы, основанные на применении операторов.

Оператором, как известно, называется математический символ, определяющий совокупность действий, которые необходимо произвести над заданной функцией u для получения некоторой новой функции v. Иными словами, оператор представляет собой математическую запись действий, устанавливающих соответствие между функциями u и v.

В общем случае оператор произвольной формы мы будем обозначать символом $\hat{L}$ и действие его на функцию $u(x)$ изображать в виде «произведения» $\hat{L}\,u\,(x)$. Знак $\hat{L}$ в этом произведении может иметь, например, смысл умножения на x, т. е. $\hat{L}u = xu$, извлечения корня из u, т. е. $\hat{L} \equiv \sqrt{}$, дифференцирования по x, т. е. $\hat{L} \equiv \partial/\partial x$ и т. п.

Наибольший практический интерес для нас представляют так называемые линейные операторы, удовлетворяющие условию

$$\hat{L}\,[C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x)] = C_1 \hat{L}\,u_1(x) + C_2 \hat{L}\,u_2(x);$$

C_1 и C_2 — постоянные. К ним относятся оператор дифференцирования d/dx, оператор Гамильтона, Лапласа и др.

Линейный оператор $\hat{L}$, удовлетворяющий соотношению

$$\int u_1^*(x)\,\hat{L}\,u_2(x)\,dx = \int u_2(x)\,\hat{L}^*\,u_1^*(x)\,dx,$$

называется самосопряженным. Здесь $u^*(x)$ — функция, комплексно-сопряженная с $u(x)$; и $\hat{L}^*$ — оператор, комплексно-сопряженный с оператором $\hat{L}$ ($\hat{L}^*$ получается из $\hat{L}$ заменой в нем всех i на $-i$).

Пусть, например, $\hat{L} = i\,(\partial/\partial x)$, а функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ определены на промежутке $-\infty < x < \infty$, причем

$$u_1(\pm\infty) = u_2(\pm\infty) = 0.$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_1^*(x)\,i\,\frac{du_2}{dx}\,dx = i\int_{-\infty}^{+\infty} u_1^*(x)\,du_2 = iu_1^*(x)\,u_2(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} -$$

$$-i\int_{-\infty}^{+\infty} u_2(x)\,\frac{du_1^*}{dx}\,dx = -i\int_{-\infty}^{+\infty} u_2(x)\,\frac{du_1^*}{dx}\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} u_2(x)\,\hat{L}^*\,u_1^*(x)\,dx,$$

где $\hat{L}^* = -i\frac{d}{dx}$. Стало быть, оператор $\hat{L} = i\frac{d}{dx}$ — самосопряженный.

Операторы можно складывать, вычитать и перемножать по правилам обычной алгебры. Однако при перемножении их нельзя менять порядок сомножителей, т. е. в общем случае операторы некоммутативны. Так, если $\hat{A} = \hat{B}\hat{C}$ и $\hat{A}' = \hat{C}\hat{B}$, то в принципе $\hat{A}' \neq \hat{A}$. Однако иногда может оказаться, что $\hat{A} = \hat{A}'$, т. е. $\hat{B}\hat{C} = \hat{C}\hat{B}$.

В ряде случаев воздействие оператора $\hat{L}$ на функцию u эквивалентно умножению этой функции на некоторое постоянное число L:

$$\hat{L}u(x) = Lu(x). \tag{14.18}$$

Это число называется собственным значением оператора $\hat{L}$. Аналогично, функция $u(x)$, удовлетворяющая уравнению (14.18), называется собственной функцией оператора.

Уравнение (14.18) в случае линейного дифференциального оператора оказывается линейным дифференциальным уравнением. Из курса математики известно, что такое уравнение для заданных граничных условий имеет ненулевые решения лишь при определенных значениях L; последние и являются собственными значениями. Как правило, дифференциальный оператор имеет множество собственных значений и собственных функций. Совокупность всех собственных значений образует спектр, который может быть как дискретным, так и сплошным.

В предыдущем параграфе мы в сущности уже привели пример на вычисление собственных значений дифференциального оператора. Там шла речь о решении уравнения

$$\frac{d^2\psi}{\partial x^2} + q^2\psi = 0,$$

(т. е. о вычислении собственных значений $-q^2$ оператора d^2/dx^2) на промежутке $0 \leqslant x \leqslant a$ при нулевых граничных условиях. В результате было показано, что это уравнение определяет бесчисленное множество дискретных собственных значений:

$$L_n = -q_n^2 = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

и бесчисленное множество собственных функций ψ_1, ψ_2, ψ_3, ... Следовательно, оператор d^2/dx^2 в данном случае имеет дискретный спектр.

В качестве другого примера рассмотрим оператор d/dx. Согласно (14.18) дифференциальное уравнение, определяющее собственные значения этого оператора, имеет вид

$$\frac{du}{dx} - Lu = 0.$$

Отсюда сразу же получаем

$$u = Ae^{+Lx}. \tag{14.19}$$

Чтобы функция u имела физический смысл, она должна быть ограничена на бесконечности. Очевидно, это условие будет выполнено, если

$$L = \pm i|L|.$$

Таким образом, собственными значениями оператора d/dx являются все мнимые числа. Совокупность их образует сплошной спектр.

С аналогичными, но несколько более сложными задачами мы встречались также в теории волноводов и объемных резонаторов. Так, например, решая уравнения (10.51) и (10.52) в § 5 гл. X, мы определили собственные значения и собственные функции оператора $(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)$ в области $0 \leqslant x \leqslant a$; $0 \leqslant y \leqslant b$ при заданных граничных условиях и т. д.

В математике доказывается, что собственные значения самосопряженного оператора всегда вещественны. В рассмотренных здесь примерах самосопряженным являлся оператор d^2/dx^2. И действительно, собственные значения его оказались вещественными*). Что же касается оператора d/dx, то он не удовлетворяет условию самосопряженности, и соответственно, собственные значения его суть мнимые числа.

Собственные функции u_n линейного самосопряженного оператора удовлетворяют условию ортогональности, т. е.

$$\int_V u_m^* u_n \, dV = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n.$$

Обычно собственные функции нормируют. В этом случае

$$\int_V u_m^* u_n \, dV = \begin{cases} 1 & \text{при } m = n, \\ 0 & \text{при } m \neq n. \end{cases}$$

Совокупность собственных функций u_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ образует так называемую полную систему функций. Свойство полноты, как известно, характеризуется тем, что функцию φ,

---

*) То же самое можно сказать и об операторе $(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)$ в задачах § 5 гл. X.

заданную на том же интервале, что и u_n, и удовлетворяющую таким же граничным условиям, можно разложить в ряд

$$\varphi = \sum_n a_n u_n,$$

где a_n — коэффициенты разложения, определяемые формулой

$$a_n = \int_V \varphi u_n^* \, dV.$$

Этот ряд будет сходящимся, если $\int_V |\varphi|^2 \, dV$ существует.

Кстати говоря, подобные разложения в ряды по собственным функциям мы уже использовали в предыдущих главах при расчете электромагнитных полей в волноводах и резонаторах по заданным источникам.

7. Операторы и физические величины в квантовой механике

В квантовой механике для аналитического описания физических величин вводятся соответствующие им операторы. При этом квантовая теория опирается на постулат, согласно которому значения физической величины, точно определяемой при опыте, должны совпадать с собственными значениями соответствующего оператора. Так как всякая величина, имеющая физический смысл, представляется вещественным числом, то операторы физических величин обязательно должны быть самосопряженными.

Учитывая изложенное, перейдем к рассмотрению некоторых наиболее важных операторов квантовой механики. Прежде всего обратимся к уравнению Шредингера (14.11). Предварительно перепишем его следующим образом:

$$\left[-\frac{h^2}{2m}\nabla^2 + U(x, y, z)\right]\psi = W\psi. \qquad (14.20)$$

Из уравнения (14.20) видно, что воздействие оператора

$$\left[-\frac{h^2}{2m}\nabla^2 + U(x, y, z)\right]$$

на функцию ψ равносильно умножению ее на величину W. Следовательно, (14.20) является дифференциальным уравнением, определяющим собственные значения W. Но W есть полная энергия системы (частицы). Поэтому можно утверждать, что в левой части уравнения мы имеем оператор полной энергии. Последний называется гамильтонианом и обозначается символом $\hat{H}$.

Согласно изложенному выше принципу, функцию $U(x, y, z)$ в уравнении (14.20) следует заменить на оператор потенциальной энергии $\hat{U}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, который, очевидно, должен просто совпадать с $U(x, y, z)$.

Символами $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ здесь обозначены операторы координат точки наблюдения. Эти операторы определяются так, чтобы воздействие любого из них на функцию ψ было эквивалентно умножению ψ на соответствующую координату, например $\hat{x}\psi = x\psi$ и т. п. Иными словами, $\hat{x} = x$, $\hat{y} = y$ и $\hat{z} = z$.

Таким образом, оператор полной энергии равен

$$\hat{H} = -\frac{h^2}{2m}\nabla^2 + \hat{U}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}). = -\frac{h^2}{2m}\nabla^2 + U(x, y, z). \qquad (14.21)$$

Заметим, что этот оператор сохраняет свой смысл и в том случае, когда U есть функция времени, т. е. $U = U(x, y, z, t)$.

В соответствии с изложенным уравнение Шредингера для стационарных состояний окончательно можно записать в виде

$$\hat{H}\psi = W\psi, \qquad (14.22)$$

и для общего случая

$$-ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi. \qquad (14.23)$$

Так как полная энергия системы равна сумме кинетической и потенциальной энергий, то первое слагаемое в (14.21) следует рассматривать как оператор кинетической энергии:

$$\hat{W}_к = -\frac{h^2}{2m}\nabla^2 = -\frac{h^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right), \qquad (14.24)$$

Но величина

$$W_к = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}.$$

Следовательно,

$$\hat{W}_к = \frac{\hat{p}^2}{2m}, \qquad (14.25)$$

где $\hat{p}$ — оператор импульса.

Из сопоставления равенств (14.24) и (14.25) вытекает, что

$$\hat{p}^2 = -h^2\nabla^2.$$

Последнее равенство будет выполняться, если

$$\hat{p} = ih\nabla. \qquad (14.26)$$

Формула (14.26), таким образом, определяет оператор импульса частицы.

Для проекций оператора p на оси x, y, z имеем:

$$\hat{p}_x = ih\frac{\partial}{\partial x};\quad \hat{p}_y = ih\frac{\partial}{\partial y};\quad \hat{p}_z = ih\frac{\partial}{\partial z}. \tag{14.27}$$

Чтобы найти значения физической величины, которая при заданных условиях может быть определена точно, необходимо вычислить, как уже было указано выше, собственные значения соответствующего ей оператора. Определим, например, возможные значения проекций импульса частицы на оси x, y, z. Согласно общему правилу, приведенному в предыдущем параграфе, для собственных значений оператора $\hat{p}_x$ будем иметь уравнение

$$ih\frac{\partial\psi_{p_x}}{\partial x} = p_x\psi_{p_x},$$

где ψ_{p_x}—собственная функция оператора $\hat{p}_x$. Интегрируя это уравнение, для бесконечного интервала получим

$$\psi_{p_x} = A_x e^{-i\frac{p_x}{h}x}.$$

Аналогично, $\psi_{p_y} = A_y e^{-i\frac{p_y}{h}y}$ и $\psi_{pz} = A_z e^{-i\frac{p_z}{h}z}$.

Отсюда видно, что составляющие импульса могут быть равны по величине любому вещественному числу (функция ψ_p на бесконечности должна быть ограничена). Что же касается собственных функций операторов $\hat{p}_x$, $\hat{p}_y$ и $\hat{p}_z$, то они имеют вид плоских волн де Бройля.

Во многих случаях нам придется вычислять среднее значение физических величин. Известно, что если плотность вероятности непрерывной случайной величины x равна $f(x)$, то среднее значение (или математическое ожидание)

$$\tilde{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx.$$

Пусть x есть координата частицы. Тогда среднее значение величины x будет равно

$$\tilde{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\psi^*(x)\psi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x)\,x\psi(x)\,dx,$$

так как здесь $f(x) = |\psi(x)|^2 = \psi^*\psi$.

Таким же образом определяется среднее значение функции $F(x)$:

$$\overset{\sim}{F(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* F(x)\psi\,dx.$$

Если F зависит от трех координат, то

$$\widetilde{F(x, y, z)} = \int_V \psi^*(x, y, z) F \psi(x, y, z) dV.$$

Предположим, что интересующей нас физической величине L соответствует оператор $\hat{L}$. В квантовой механике принято, что среднее значение этой величины определяется выражением

$$\widetilde{L} = \int_V \psi^*(x, y, z) \hat{L} \psi(x, y, z) dV. \qquad (14.28)$$

Если $\psi = \psi_m$—собственная функция оператора $\hat{L}$, то $L\psi_m = L_m \psi_m$, где L_m—собственное значение. В этом случае

$$\widetilde{L} = \int_V \psi_m^* \hat{L} \psi_m dV = L_m \int_V \psi_m^* \psi_m dV = L_m.$$

Таким образом, операторы образуют математический аппарат, действительно отражающий квантовый характер физических величин.

8. О результатах измерения физических величин

Пусть состояние системы изображается волновой функцией ψ, удовлетворяющей уравнению Шредингера (14.22).

Предположим, что в некоторый момент времени производится измерение физической величины L, являющейся одной из характеристик системы.

Если функция ψ есть собственная функция φ_n оператора $\hat{L}$ этой величины, т. е. $\psi = \varphi_n$, то в результате измерений, как уже указывалось выше, получается величина, совпадающая с собственным значением L_n оператора $\hat{L}$.

Выясним, что же дадут измерения, когда волновая функция ψ не является собственной функцией $\hat{L}$. Очевидно, в этом случае в результате измерений при одних и тех же условиях получится набор собственных значений $L_1, L_2, \ldots, L_n$ оператора рассматриваемой величины. Иными словами, измерения будут давать случайную величину.

Чтобы установить, как часто будут получаться те или иные собственные значения, разложим функцию ψ в ряд по собственным функциям φ_n:

$$\psi = \sum_n C_n \varphi_n.$$

Подставляя это выражение в формулу для среднего значения величины L, получим

$$\overset{\frown}{L} = \int_V \psi^* \hat{L} \psi dV = \int_V \left[\sum_n C_n^* \varphi_n^* \hat{L} \left(\sum_m C_m \varphi_m \right) \right] dV =$$

$$= \sum_n \sum_m C_n^* C_m \int_V \varphi_n^* \hat{L} \varphi_m \, dV.$$

Так как $\hat{L} \varphi_m = L_m \varphi_m$, где L_m — собственное значение оператора, то с учетом ортогональности функций φ_m, будем иметь

$$\overset{\frown}{L} = \sum_n \sum_m C_n^* C_m L_m \int_V \varphi_n^* \varphi_m \, dV =$$

$$= \sum_n C_n^* C_n L_n = \sum_n |C_n|^2 L_n. \qquad (14.29)$$

Умножая далее $\psi = \sum_n C_n \varphi_n$ на $\psi^* = \sum_m C_m^* \varphi_m^*$ и интегрируя по всему пространству, получим

$$\int_V |\psi|^2 dV = \sum_n \sum_m C_n C_m^* \int_V \varphi_n \varphi_m^* dV = \sum_n |C_n|^2 \equiv 1.$$

Если измеряемая случайная величина L может принимать значения $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$, то по определению среднее этой величины равно

$$\overset{\frown}{L} = \sum_n P(L_n) L_n. \qquad (14.30)$$

Здесь $P(L_n)$ — вероятность события $L = L_n$, причем $\sum_n P(L_n)$, как вероятность достоверного события, равна единице.

Сравнивая (14.29) с (14.30), находим

$$P(L_n) = |C_n|^2.$$

Отсюда видно, что вероятность того, что величина L будет равна собственному значению L_n, совпадает с квадратом модуля коэффициента разложения C_n волновой функции ψ по собственным функциям оператора $\hat{L}$.

Аналогичный вывод справедлив также и для непрерывного спектра собственных значений оператора.

Таким образом, информация о возможных значениях величины L, которые можно наблюдать при измерении, содержится в волновой функции системы. Эта функция, стало быть, не только дает

представление о вероятности нахождения частицы в той или иной точке пространства, но и позволяет определить другие вероятностные ее характеристики. Иными словами, волновая функция дает весьма полное представление о состоянии системы.

9. Момент количества движения частицы

Важной физической характеристикой частицы является момент импульса или момент количества движения ее. По определению эта величина равна

$$\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p} = \bar{r} \times m\bar{v} = \bar{i}_x (yp_z - zp_y) + \bar{i}_y (zp_x - xp_z) + \bar{i}_z (xp_y - yp_x).$$

Здесь $\bar{r} = \bar{i}_x x + \bar{i}_y y + \bar{i}_z z$ — радиус-вектор, проведенный из заданного начала координат в точку с координатами x, y, z, где находится частица; $\bar{v}$ — скорость движения частицы; m — ее масса; p_x, p_y, p_z — проекции импульса на оси координат.

В квантовой теории, как обычно, вводится в рассмотрение оператор момента количества движения $\hat{\bar{L}} = \hat{\bar{r}} \times \hat{\bar{p}}$.

Операторы проекций вектора $\bar{L}$ на оси прямоугольной системы координат, очевидно, будут равны

$$\hat{L}_x = \hat{y}\,\hat{p}_z - \hat{z}\,\hat{p}_y; \quad \hat{L}_y = \hat{z}\,\hat{p}_x - \hat{x}\,\hat{p}_z; \quad \hat{L}_z = \hat{x}\,\hat{p}_y - \hat{y}\,\hat{p}_x.$$

Принимая во внимание соотношения (14.27), получим

$$\left.\begin{aligned} \hat{L}_x &= ih\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right), \\ \hat{L}_y &= ih\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right), \\ \hat{L}_z &= ih\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (14.31)$$

Определим возможные значения момента количества движения частицы. Для этого необходимо вычислить собственные значения соответствующего оператора. Рассмотрение удобно начать с величины L^2 (L^2 — квадрат модуля момента импульса).

Уравнение для собственных значений оператора $\hat{L}^2$ имеет вид

$$\hat{L}^2 u = L^2 u.$$

При решении этого уравнения целесообразно использовать сферическую систему координат (см. рис. 2.3).

Учитывая, что $x = r \sin\theta \cos\varphi$, $y = r \sin\theta \sin\varphi$ и $z = r\cos\theta$, производные по x, y, z в выражениях (14.31) представим через производные по r, θ, φ:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} =$$

$$= \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

и т. д.

В результате довольно громоздких преобразований (14.31) будем иметь:

$$\hat{L}_x = -ih\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \operatorname{ctg}\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),$$

$$\hat{L}_y = ih\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),$$

$$\hat{L}_z = ih\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Так как $\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$, то, принимая во внимание последние соотношения, получим

$$\hat{L}^2 = -h^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right].$$

Следовательно, уравнение для собственных значений $\hat{L}^2$ можно привести к виду

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = -\frac{L^2}{h^2}u. \qquad (14.32)$$

Решение его будем искать методом разделения переменных. В соответствии с этим положим:

$$u = Q(\theta)\,\Phi(\varphi),$$

где $Q(\theta)$ и $\Phi(\varphi)$ — неизвестные функции.

Подставляя u в (14.32) и произведя дифференцирование, получим

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dQ}{d\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}Q(\theta)\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -\frac{L^2}{h^2}Q\,\Phi.$$

Поделим обе части последнего равенства на $Q\,\Phi$, полагая, что $u \neq 0$, а затем умножим на $\sin^2\theta$. В результате будем иметь

$$-\frac{1}{Q}\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dQ}{d\theta}\right) + \frac{L^2}{h^2}\sin^2\theta = -\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}.$$

Отсюда следует, что функции $\Phi(\varphi)$ и $Q(\theta)$ должны удовлетворять дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \nu^2\Phi = 0, \qquad (14.33)$$

$$\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dQ}{d\theta}\right) + \left(\frac{L^2}{h^2}\sin^2\theta - \nu^2\right)Q = 0; \qquad (14.34)$$

ν^2 — постоянная разделения.

Решение уравнения (14.33), как известно, имеет вид

$$\Phi(\varphi) = e^{\pm i\nu\varphi}.$$

Так как u и Φ по условию — однозначные функции переменной φ, то ν должно быть целым числом.

С учетом этого обстоятельства для $Q(\theta)$ будем иметь

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dQ}{d\theta}\right)+\left(\eta-\frac{\nu^2}{\sin^2\theta}\right)Q=0. \qquad (14.35)$$

Здесь $\eta=L^2/\hbar^2$.

В математике доказывается, что решение уравнения (14.35) будет конечным на промежутке $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, если

$$\eta=l(l+1),$$

где l — целое положительное число.

Отсюда вытекает, что $L^2=L_l^2=\hbar^2 l(l+1)$. Стало быть, возможные абсолютные значения момента импульса будут равны

$$L=L_l=\hbar\sqrt{l(l+1)};\quad l=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \qquad (14.36)$$

Дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dQ}{d\theta}\right)+\left[l(l+1)-\frac{\nu^2}{\sin^2\theta}\right]Q=0, \qquad (14.37)$$

полученное из (14.35), с помощью подстановки $\xi=\cos\theta$ преобразуется в уравнение Лежандра, которое мы уже рассматривали в § 15 гл. VIII. На основании этого мы можем утверждать, что решением уравнения (14.37), конечным на интервале $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, являются присоединенные полиномы Лежандра $P_l^{\nu}(\cos\theta)$.

Выражения для нескольких таких полиномов с минимальными значениями l и $|\nu|$ приведены в § 14 гл. VIII.

Из теории полиномов Лежандра известно, что при $|\nu|>l$ функции $P_l^{\nu}(\cos\theta)$ не существуют. Следовательно, в уравнении (14.37) величина ν должна иметь значения:

$$\nu=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots,\ \pm l.$$

При $\nu=0$ присоединенные полиномы превращаются в обычные полиномы Лежандра $P_l(\cos\theta)$, рассмотренные нами в § 12 гл. II.

Итак, собственные функции оператора $\hat{L}^2$, удовлетворяющие уравнению (14.32), можно представить в виде

$$u=Y_{l\nu}(\theta,\ \varphi)=N_{l\nu}P_l^{\nu}(\cos\theta)\,e^{i\nu\varphi}, \qquad (14.38)$$

где $N_{l\nu}$ — нормирующий множитель; $l=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$; $\nu=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots,\ \pm l$. Эти функции получили наименование шаровых или сферических.

В рассматриваемом случае каждому собственному значению оператора $\hat{L}^2$, характеризуемому числом l, соответствует $2l+1$ собственных функций, с различными значениями ν. Подобные состояния, как обычно, называются вырожденными.

Перейдем к определению возможных значений проекции момента количества движений на ось z. Для этого найдем собственные значения оператора $\hat{L}_z$, используя уравнение $\hat{L}_z\,u=L_z\,u$, или в развернутом виде

$$ih\frac{\partial u}{\partial\varphi}=L_z\,u.$$

Подставляя сюда $u=Y_{l\nu}(\theta,\ \varphi)$, получим:

$$L_z=\nu h;\quad \nu=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots,\ \pm l. \qquad (14.39)$$

Таким образом, возможные абсолютные значения момента импульса и его проекции на произвольно выбранную ось z оказываются квантованными.

Интересно отметить, что в состоянии, при котором L^2 и L_z имеют точные значения, другие две проекции L_x и L_y точно не определяются. В самом деле, функции $Y_{lv}(\theta, \varphi)$ не являются собственными функциями операторов $\hat{L}_x$ и $\hat{L}_y$. Поэтому, согласно рассуждениям, проведенным в предыдущем параграфе, значения L_x и L_y оказываются неопределенными. Исключение составляет случай $l = 0$, когда $L^2 = L_x = L_y = L_z = 0$.

В квантовой механике доказывается также, что две величины могут быть измерены (определены) одновременно, если их операторы являются коммутирующими. Из выражений (14.31) следует, что операторы $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ и $\hat{L}_z$ между собой не коммутируют. В то же время любой из этих операторов коммутирует с $\hat{L}^2$.

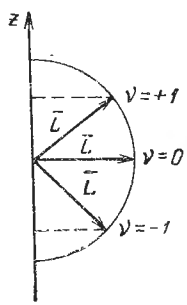


Рис. 14.3. Возможные направления момента количества движения частицы (пространственное квантование).

Выясним далее, как ориентирован в пространстве момент импульса частицы. Обозначив угол между осью z и вектором $\overline{L}$ символом θ_0, будем иметь

$$\cos\theta_0 = \frac{L_z}{L}.$$

Подставляя сюда значения L и L_z из выражений (14.36) и (14.39), получим

$$\cos\theta_0 = \frac{v}{\sqrt{l(l+1)}}.$$

Следовательно, вектор $\overline{L}$ при каждом значении l (кроме $l = 0$) может иметь только такие направления в пространстве, при которых проекция его на заданную ось z равна целому числу h. По-иному говоря, направление момента импульса может изменяться в пространстве лишь скачкообразно.

Отмеченное явление получило наименование п р о с т р а н с т в е н н о г о к в а н т о в а н и я. На рис. 14.3 изображены возможные направления вектора $\overline{L}$ при $l = 1$.

10. Электрон в центрально-симметричном электрическом поле

Рассмотрим движение электрона в потенциальном электрическом поле, обладающем сферической симметрией (центрально-симметричное поле). Примером такой системы может служить электрон в атоме водорода. Сюда же можно отнести электрон в ионизированном атоме гелия, дважды ионизированном атоме лития и т. п.

Потенциальная функция в случае центрально-симметричного поля является функцией только переменной r сферической системы координат, т. е. $U = U(r)$. Для электрона, движущегося в кулоновском поле атомного ядра,

$$U(r) = -\frac{Ze_0}{4\pi\varepsilon_0 r}\, e_0 = -\frac{Ze_0^2}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

где e_0 — абсолютное значение заряда электрона; $Z e_0$ — заряд ядра (у водорода $Z = 1$).

Уравнение Шредингера для электрона, находящегося в центрально-симметричном кулоновском поле, с учетом изложенного будет иметь вид

$$\nabla^2\psi + \frac{2m}{h^2}\left(W + \frac{Ze_0^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\psi = 0, \qquad (14.40)$$

$m = m_0$, где m_0 — масса электрона.

Так как в сферической системе координат оператор Лапласа

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{d\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{d\varphi^2},$$

то вместо (14.40) можно написать

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{d\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \\ + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{2m_0}{h^2}\left(W + \frac{Ze_0^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\psi = 0.$$

Полагая, что $\psi = R(r)\,Y(\theta, \varphi)$, после несложных преобразований получим

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{2m_0}{h^2}\left(W + \frac{Ze_0^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)r^2 = \\ = -\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right]\frac{1}{Y}.$$

В соответствии с методом разделения переменных можно утверждать, что левые и правые части последнего равенства представляют собой постоянную величину. Следовательно, функции $R(r)$ и $Y(\theta, \varphi)$ удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{2m_0}{h^2}\left(W + \frac{Ze_0^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)r^2R = gR, \qquad (14.41)$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} = -gY. \qquad (14.42)$$

Здесь g — постоянная разделения.

Уравнение (14.42) по виду аналогично уравнению (14.32) для шаровых функций, которое мы рассмотрели в предыдущем параграфе. Решение его оказывается всюду конечным, если постоянная разделения $g = l(l+1)$; $l = 0, 1, 2, \ldots$ Таким образом, для $Y(\theta, \varphi)$ будем иметь:

$$Y(\theta, \varphi) = Y_{lv}(\theta, \varphi); \quad v = 0; \quad \pm 1, \quad \pm 2, \ldots, \quad \pm l.$$

Выше уже указывалось, что число l определяет абсолютную величину момента количества движения частицы. В рассматриваемом случае частица (электрон) совершает орбитальное движение вокруг положительно заряженного ядра и, следовательно, характеризуется орбитальным моментом количества движения. В соответствии с этим число l получило название орбитального квантового числа.

Величина ν, как вытекает из (14.39), определяет проекцию момента количества движения на произвольно выбранную ось z. Заметим, что ν называется магнитным квантовым числом. (Смысл этого названия разъясняется ниже, в § 11 данной главы.)

Уравнение для радиальной функции $R(r)$ теперь можно переписать в виде

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}+\left[\frac{2m_0}{h^2}\left(W+\frac{Ze_0^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R=0. \qquad (14.43)$$

Используя далее подстановку $R(r)=v(r)/r$, получим

$$v''(r)+\left[\frac{2m_0}{h^2}\left(W+\frac{Ze_0^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]v(r)=0. \qquad (14.43')$$

При $r\to\infty$ это уравнение приближенно можно заменить уравнением

$$v''+\frac{2m_0}{h^2}Wv=0.$$

Если полная энергия электрона W отрицательна ($W<0$), то решение последнего уравнения дает

$$v|_{r\to\infty}=e^{\pm\sqrt{\frac{2m_0}{h^2}|W|}\,r}.$$

Так как волновая функция при $r\to\infty$ должна быть конечной, в качестве v следует выбрать функцию $e^{-\sqrt{\frac{2m_0}{h^2}|W|}\,r}$. Значит,

$$R|_{r\to\infty}=\frac{e^{-\alpha r}}{r},$$

где

$$\alpha=\sqrt{\frac{2m_0}{h^2}|W|}.$$

Исследование уравнения (14.43) показывает, что полная энергия W частицы в этом случае может иметь только дискретные значения W_1, W_2, W_3, ..., т. е. система имеет дискретный энергетический спектр *).

---

*) См., например, Д. И. Блохинцев. «Основы квантовой механики». стр. 182—194. Изд. «Высшая школа», 1963.

Если полная энергия электрона положительна ($W > 0$), то функцию v при $r \to \infty$ целесообразно представить в виде:

$$v|_{r\to\infty} = \begin{cases} \cos\left(\sqrt{\frac{2m_0}{h^2}}\, W\, r\right), \\ \sin\left(\sqrt{\frac{2m_0}{h^2}}\, W\, r\right). \end{cases}$$

Теперь, как показывает анализ, полная энергия может принимать любые положительные значения. Следовательно, при $W > 0$ система характеризуется сплошным энергетическим спектром.

Полная энергия электрона, как известно, складывается из кинетической и потенциальной энергии. Первая из них положительна, а вторая может быть и положительной, и отрицательной. У электрона, притягиваемого положительно заряженным ядром, потенциальная энергия отрицательна. Полная энергия такого электрона, очевидно, может иметь как положительные, так и отрицательные значения (рис. 14.4).

При $W < 0$ радиальная (а следовательно, и волновая) функция, как было



Рис. 14.4. Энергетические характеристики электрона в центрально-симметричном поле (атом водорода).

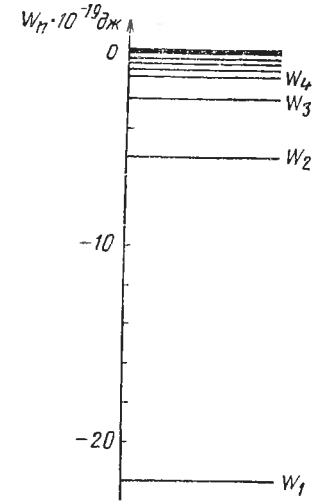


Рис. 14.5. Энергетический спектр электрона в атоме водорода.

установлено выше, убывает на бесконечности как $e^{-\alpha r}/r$, $\alpha > 0$. Стало быть, вероятность нахождения электрона вдали от ядра оказывается исчезающе малой. Иными словами, электрон, имеющий дискретный спектр, практически движется вблизи ядра.

При $W > 0$ радиальная (и волновая) функция на бесконечности убывает медленно (как $1/r$). Теперь уже электрон может находиться на больших расстояниях от атомного ядра, т. е. атом становится как бы ионизированным. Полная энергия такого электрона может иметь любые положительные значения.

Для случая $W < 0$ «разрешенные» значения полной энергии электрона оказываются равными

$$W = W_n = -\frac{Z^2 e_0^4 m_0}{2h^2} \frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2 n^2}, \quad n = 1, 2, 3 \ldots. \qquad (14.44)$$

На рис. 14.5 изображен энергетический спектр электрона в атоме водорода ($Z = 1$).

Из выражения (14.44) видно, что полная энергия частицы зависит от числа n. Последнее получило название главного квантового числа.

Орбитальное и магнитное квантовые числа на величину W_n в данном случае не влияют. Однако радиальные функции $R(r)$ от значений l, как видно из (14.43), зависят; поэтому в дальнейшем мы будем писать

$$R(r) = R_{nl}(r).$$

Кроме того, необходимо указать, что орбитальное квантовое число должно быть меньше главного квантового числа ($l = 0, 1, 2, \ldots, n-1$).

Простейшие радиальные функции, соответствующие начальным значениям n и l, имеют вид:

$$R_{10}(r) = \sqrt{\left(\frac{Z}{a_0}\right)^3}\, 2e^{-\frac{Z}{a_0} r},$$

$$R_{20}(r) = \sqrt{\left(\frac{Z}{a_0}\right)^3}\left(2 - \frac{Z}{a_0} r\right) e^{-\frac{Z}{2a_0} r},$$

$$R_{21}(r) = \sqrt{\left(\frac{Z}{a_0}\right)^3}\, \frac{Z}{\sqrt{3}\, a_0}\, r\, e^{-\frac{Z}{2a_0} r}.$$

Здесь

$$a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0 h^2}{m_0 e_0^2} = 0{,}529 \cdot 10^{-8}\ см.$$

Подставим для проверки одно из этих выражений, например $R_{10}(r)$, в уравнение (14.43). В результате получим равенство, определяющее значение W при $n = 1$:

$$\frac{Z^2}{a_0^2} - \frac{2}{r}\frac{Z}{a_0} + \frac{2m_0}{h^2} W + \frac{2m_0}{h^2}\frac{Ze_0^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = 0.$$

Легко убедиться, что второе и четвертое слагаемые в левой части этого равенства взаимно уничтожаются. Тогда для W будем иметь

$$W = -\frac{Z^2 h^2}{2m_0 a_0^2} = -\frac{Z^2 e_0^4 m_0}{2h^2 (4\pi\varepsilon_0)^2}.$$

Точно такой же результат вытекает из формулы (14.44), если в ней положить $n = 1$.

Волновые функции электрона в центрально-симметричном кулоновском поле характеризуются тремя квантовыми числами n, l и ν. При различных квантовых числах получаются функции, описывающие различные состояния системы. Следовательно,

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \psi_{nl\nu}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r)\, Y_{l\nu}(\theta, \varphi).$$

Этим функциям при одинаковых n, но разных l и ν, соответствуют (при $W < 0$) одни и те же энергетические уровни. Стало быть, здесь имеет место случай вырождения состояний по квантовым числам l и ν.

Заметим, что в общем случае центрально-симметричного (некулоновского) поля электроны в состояниях с различными l обладают неодинаковой энергией.

В квантовой механике состояния электрона, описываемые волновыми функциями с определенными значениями l, обозначаются соответствующими латинскими буквами. Так, например, при $l = 0$ мы имеем состояние, обозначаемое буквой s (s-состояние), при $l = 1$ имеем p-состояние, при $l = 2$ — d-состояние и т. д.

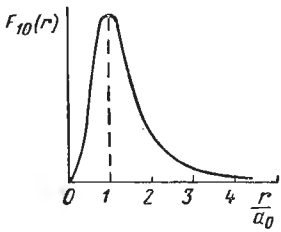


Рис. 14.6. Радиальное распределение электронов в атомах водорода (для электронов с квантовыми числами $n = 1$ и $l = 0$).

Перейдем теперь к вычислению вероятности местонахождения электрона в данной точке пространства для различных состояний. По определению плотность вероятности местонахождения частицы

$$f(x, y, z, t) = \psi\psi^* = |\psi(r, \theta, \varphi)|^2.$$

Подставляя сюда известное значение функции ψ_{nlv}, получим

$$f(x, y, z, t) = f_{nlv}(r, \theta, \varphi, t) = |R_{nl}(r)|^2 \times$$
$$\times |Y_{lv}(\theta, \varphi)|^2 = |R_{nl}(r)|^2 N_{lv}^2 \left| P_l^v(\theta) \right|^2.$$

Вероятность нахождения электрона в элементе объема dV сферической системы координат равна

$$f_{nlv}\, dv = dF = \left|R_{nl}(r)\right|^2 N_{lv}^2 \left|P_l^v(\theta)\right|^2 r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi.$$

Эта величина не зависит от координаты φ. Следовательно, «электронное облако», образующееся в результате движения электрона по некоторым вероятностным орбитам вокруг ядра, будет симметрично относительно оси z.

Выражение для dF можно преобразовать следующим образом:

$$dF = \left|R_{nl}(r)\right|^2 r^2\, dr N_{lv}^2 \left| P_l^v(\theta) \right|^2 d\Omega; \qquad (14.45)$$

$d\Omega = \sin\theta d\theta\, d\varphi$ — элементарный телесный угол. Обозначим величину $|R_{nl}(r)|^2 r^2\, dr$, определяющую вероятность локализации электрона в шаровом слое толщиной dr, через $F_{nl}(r)\, dr$.

Вид функции $F_{nl}(r) = |R_{nl}(r)|^2 r^2$, естественно, зависит от состояния электрона. Так, для атома водорода при $n = 1$ и $l = 0$ (s-состояние) она будет равна

$$F_{10}(r) = |R_{10}(r)|^2 r^2 = 4 \frac{r^2}{a_0^3} e^{-\frac{2r}{a_0}}.$$

График этой функции изображен на рис. 14.6.

Из графика видно, что $F_{10}(r)$ достигает максимума при $r = a_0 = 0{,}529 \times \times 10^{-8}$ *см*. Следовательно, вероятность локализации s-электрона оказывается максимальной на сфере весьма малого радиуса. Электрон в этом случае будет

обнаруживаться в основном вблизи ядра. Однако принципиально существует некоторая (хотя и малая) вероятность обнаружить электрон и на больших расстояниях от ядра.

Величина $N_{l\nu}^2 \left| P_l^{\nu}(\theta) \right|^2 d\Omega$ в выражении (14.45) определяет вероятность локализации электрона в бесконечно малом телесном угле $d\Omega$. Обозначим функцию $N_{l\nu}^2 \left| P_l^{\nu}(\theta) \right|^2$ значком $\Theta_{l\nu}(\theta)$.

При $l = 0$ (s-состояние) функция $\Theta_{0\nu}(\theta)$ оказывается постоянной, так как число ν в этом случае тоже должно быть равно нулю, а $P_0^0(\theta) = \text{const}$. График такой функции, построенный в полярных координатах, изображен на рис. 14.7, *а*. Любопытно, что у *s*-электрона орбитальный момент количества движения $\overline{L}$ равен нулю [см. формулу (14.36)].

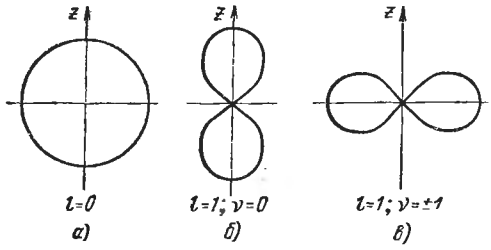


Рис. 14.7. Угловое распределение электронов в атомах водорода:
а — *s*-состояние ($l=0$); *б* — *p*-состояние ($\nu=0$); *в* — *p*-состояние ($\nu=\pm 1$).

Для электрона в *p*-состоянии ($l = 1$) магнитное квантовое число ν может иметь значения 0 и ± 1. При $\nu = 0$ функция $\Theta_{10}(\theta) = N_{10}^2 \cos^2\theta$. График этой функции изображен на рис. 14.7, *б*. Если $\nu = \pm 1$, то $\Theta_{1,\pm 1}(\theta) = N_{1,\pm 1}^2 \sin^2\theta$ (рис. 14.7, *в*).

Таким образом, электрон, движущийся в электрическом поле положительно заряженного ядра, обладает весьма специфическими свойствами. Эти свойства, разумеется, нельзя объяснить на основе представлений классической теории поля и классической механики.

11. Эффект Зеемана

Движение электрона в атоме водорода, а также в любом другом атоме, очевидно, можно рассматривать как электрический ток. Если электрон движется по круговой орбите, то величина тока

$$I = -e_0 \frac{v}{2\pi r},$$

где v — скорость движения электрона и r — радиус его орбиты *).

*) Знак «минус» здесь указывает, что направление тока противоположно направлению движения электрона.

Но электрический ток, как известно, создает в пространстве магнитное поле. Стало быть, электрон, совершающий орбитальное движение, будет иметь не только механический момент $\overline{L}$, но и магнитный момент $\overline{M}$.

В гл. IV уже говорилось, что величина магнитного момента замкнутого контура с током равна $M = \mu IS$, где S — площадь контура, μ — магнитная проницаемость среды. Для контура в виде окружности $S = \pi r^2$. Поэтому магнитный момент рассматриваемого электрона равен

$$M = -\mu_0 \frac{e_0 v}{2\pi r} \pi r^2 = -\mu_0 \frac{e_0 vr}{2}.$$

(Здесь мы полагаем, что $\mu = \mu_0$.)

Величина орбитального момента количества движения электрона

$$L = m_0 vr.$$

Определив отсюда значение vr и подставив его в формулу для M, получим

$$M = -\frac{\mu_0 e_0}{2m_0} L.$$

Что касается направления магнитного момента, то оно, как нетрудно сообразить, противоположно направлению механического момента. Следовательно,

$$\overline{M} = -\frac{\mu_0 e_0}{2m_0} \overline{L}. \qquad (14.46)$$

Выражение (14.46) мы получили на основе классических представлений. Однако оно оказывается справедливым и в квантовой теории. Только в этом случае величина L должна иметь значения, предписываемые ей соответствующими квантовыми законами.

Таким образом, орбитальный магнитный момент электрона пропорционален механическому моменту и противоположен ему по направлению.

Пусть электрон, совершающий орбитальное движение, находится в постоянном магнитном поле с напряженностью $\overline{H}$. Такой электрон, помимо электрической энергии взаимодействия с положительно заряженным ядром U_E, будет еще обладать дополнительной магнитной энергией $U_м$, обусловленной взаимодействием его с магнитным полем. Дополнительная магнитная энергия электрона, очевидно, равна энергии эквивалентного ему магнитного диполя в магнитном поле, т. е.

$$U_м = -\overline{M}\,\overline{H}.$$

Предположим, что вектор напряженности магнитного поля направлен по оси z. Тогда энергия взаимодействия

$$U_м = -M_z H = \frac{\mu_0 e_0}{2m_0} HL_z.$$

Но согласно (14.39) $L_z = \nu h$. Следовательно,

$$U_м = \mu_0 \frac{e_0 h}{2m_0} \nu H. \qquad (14.47)$$

Из этого выражения видно, что величина $U_м$ зависит от магнитного квантового числа ν, или, иными словами, от ориентации магнитного момента электрона относительно внешнего магнитного поля (этим и объясняется происхождение названия «магнитное квантовое число»).

В рассматриваемом случае полная энергия электрона W складывается из кинетической энергии, а также энергий взаимодействия U_E и $U_м$. Если магнитного поля нет ($H = 0$), то $U_м = 0$. Наличие магнитного поля приводит к тому, что величина $U_м$ (а следовательно, и W) при разных ν будет иметь различные значения. Так, например, у электрона, находящегося в p-состоянии, величина $U_м$ может быть равна либо нулю (при $\nu = 0$), либо $\pm \frac{\mu_0 e_0 h}{2m_0} H$ (при $\nu = \pm 1$). А это значит, что у p- электрона вместо какого-то одного исходного энергетического уровня под влиянием магнитного поля появляются три, разнесенных друг от друга на величину $\Delta W = (\mu_0 e_0 h) H/2m_0$, (рис. 14.8).

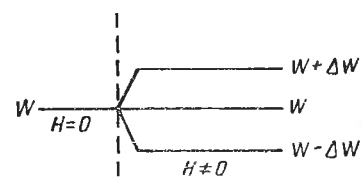


Рис. 14.8. Расщепление энергетических уровней P-электрона в постоянном магнитном поле (без учета спина).

У электрона в d-состоянии ($l = 2$) при аналогичных обстоятельствах появляется пять уровней, так как в этом случае число ν может принимать пять различных значений. И только у s-электрона число уровней в магнитном поле не изменяется, ибо орбитальный момент такого электрона равен нулю.

Таким образом, наличие магнитного поля приводит к расщеплению энергетических уровней электрона. Описанное явление носит название эффекта Зеемана.

Выше было установлено, что для электрона, движущегося в центрально-симметричном поле, состояния с различными магнитными квантовыми числами характеризуются одинаковыми энергетическими уровнями. Наличие магнитного поля, как мы только что убедились, снимает с электрона вырождение по магнитному

квантовому числу ν: теперь уже состояниям с различными ν будут соответствовать различные энергетические уровни.

Величина $\mu_0(e_0h)/2m_0$) в формуле (14.47) представляет собой минимально возможное значение магнитного момента — квант магнитного момента. В квантовой механике он называется магнетоном Бора.

12. Спин электрона

В предыдущем параграфе мы, в сущности, рассматривали вопрос о собственных значениях оператора полной энергии электрона в магнитном поле, которые, как известно, определяются уравнением Шредингера. В результате было выяснено, что энергетические уровни и характеризующие их спектральные линии под воздействием внешнего магнитного поля расщепляются в зависимости от исходного состояния электрона на 3, 5, 7 и т. д. уровней (линий).

Однако известны случаи, когда исходный уровень полной энергии электрона расщепляется в магнитном поле на четное число уровней (например, на 2, 4 и т. д.). Казалось бы, теория, основанная на решении уравнения Шредингера, не в состоянии дать правильные результаты для электронов в атомах, находящихся под воздействием магнитного поля. Иными словами, можно было бы думать, что уравнение Шредингера правильно описывает свойства частиц лишь в отсутствие магнитного поля.

Выход из затруднения, которое стала испытывать в связи с этим квантовая теория, нашли голландские физики Уленбек и Гаудсмит. Они предположили, что электрон, помимо орбитального движения, вращается вокруг собственной оси и, следовательно, наряду с орбитальным моментом количества движения $\overline{L}$ имеет еще и собственный механический момент, так называемый спин $\overline{L}_S$.

Но тогда вместе со спином у электрона появится определенный магнитный момент — собственный магнитный момент. Стало быть, расщепление энергетических уровней в магнитном поле принципиально должно зависеть не только от ориентации орбитального момента, но и от ориентации собственного магнитного момента.

Для характеристики спина электрона вводится спиновое квантовое число l_S. Очевидно, его следует определить так, чтобы имелась возможность теоретически объяснить расщепление спектральной линии на две.

Нам уже хорошо известно, что при взаимодействии орбитального магнитного момента с магнитным полем у электрона вместо одного появляется $2l + 1$ новых уровней. Подобно этому взаимодействие спинового магнитного момента с магнитным полем должно давать $2l_S + 1$ уровней. Совершенно ясно, что $2l_S + 1 = 2$, если $l_S = 1/2$.

По аналогии с формулой (14.36) можно утверждать, что величина спина $L_S = h\sqrt{l_S(l_S+1)}$. Проекция же спина на ось z равна

$$L_{Sz} = Sh, \tag{14.48}$$

где $S = \pm 1/2$. Знаки $\pm$ соответствуют двум возможным направлениям вращения электрона и, следовательно, определяют две возможные ориентации спина относительно выбранной оси.

Проекция собственного магнитного момента электрона на направление z равна

$$M_{Sz} = -\mu_0 \frac{e_0 h}{2m_0} 2S = \mp \beta, \tag{14.49}$$

где β — магнетон Бора.

Можно было бы предположить на основании аналогии с (14.46), что

$$M_{Sz} = -\mu_0 \frac{e_0}{2m_0} L_{Sz} = \mp \mu_0 \frac{e_0 h}{2m_0} \frac{1}{2}.$$

Однако это предположение неверно, так как согласно опытным данным $M_S/L_S = -\mu_0 e_0/m_0$.

Предположим, что координатная ось z, как обычно, направлена вдоль силовых линий магнитного поля. Тогда энергия взаимодействия электрона с магнитным полем с учетом собственного момента будет равна

$$U_м = -\bar{M}\bar{H} - \bar{M}_S \bar{H} = -(M_z H + M_{Sz} H) = \mu_0 \frac{e_0 h}{2m_0} (\nu + 2S) H.$$

Для электрона в s-состоянии ($l = \nu = 0$) это выражение дает два значения $U_м$, соответствующие $S = \pm 1/2$:

$$(U_м)_{1,2} = \pm \mu_0 \frac{e_0 h}{2m_0} H.$$

Отсюда видно, что энергетические уровни S-электрона при воздействии магнитного поля действительно расщепляется на два.

Определим теперь полный момент количества движения электрона $\bar{J}$ в атоме. Он, естественно, равен сумме векторов орбитального момента и спина:

$$\bar{J} = \bar{L} + \bar{L}_S.$$

Проекция этого вектора на ось z имеет вид

$$J_z = L_z + L_{Sz},$$

или с учетом соотношений (14.39) и (14.48)

$$J_z = \nu h + Sh = \left(\nu \pm \frac{1}{2}\right) h.$$

Пусть

$$\nu \pm \frac{1}{2} = \nu_j.$$

Тогда $J_z = \nu_j h$, причем $\nu_j = \pm 1/2,\ \pm 3/2,\ \pm 5/2, \ldots, \left(l \pm \frac{1}{2}\right)$.

Число $j = l \pm 1/2$ в квантовой механике носит наименование внутреннего квантового числа. Оно характеризует полный момент количества движения $\overline{J}$. Можно показать, что $J = h\sqrt{j(j+1)}$.

Рассмотрим для примера электрон в p-состоянии (орбитальное квантовое число $l = 1$). В этом случае внутреннее квантовое число j может иметь два значения $j = 1 + 1/2 = 3/2$ и $j = 1 - 1/2 = 1/2$.

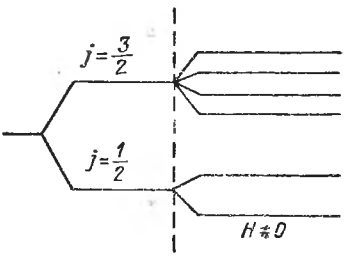


Рис. 14.9. Энергетические уровни p-электрона в постоянном магнитном поле (с учетом спина).

Следовательно, здесь фактически получается два состояния с различными внутренними квантовыми числами. Каждое из этих состояний имеет $(2\nu_j + 1)$-кратное вырождение по магнитному квантовому числу. При воздействии магнитного поля вырождение снимается, происходит уже известное нам расщепление спектральных линий.

Энергетические уровни p-электрона в магнитном поле изображены на рис. 14.9. Из рисунка видно, что состояния электрона с различными внутренними квантовыми числами ($j = 3/2$ и $j = 1/2$), даже в отсутствие внешнего поля, характеризуются, вообще говоря, различными энергетическими уровнями. Эта разница в уровнях обусловлена наличием взаимодействия между спиновым и орбитальным движением электрона. Энергия спин-орбитального взаимодействия, естественно, зависит от ориентации спинового магнитного момента относительно магнитного поля, созданного орбитальным движением электрона, причем величина такого взаимодействия оказывается весьма малой. Обычно говорят, что последнее, наряду с некоторыми другими факторами, определяет так называемую тонкую структуру энергетического спектра.

Итак, состояние электрона в атоме характеризуется совокупностью четырех квантовых чисел: главным квантовым числом n, орбитальным числом l, внутренним числом j и магнитным квантовым числом ν_j. Эти числа, как отмечалось выше, могут принимать следующие значения:

$$n = 1, 2, 3, \ldots; \quad l = 0, 1, 2, \ldots, n-1;$$

$$j = |l \pm 1/2| \text{ и } \nu_j = \pm 1/2,\ \pm 3/2, \ldots, \pm j.$$

Если в атоме имеется несколько электронов, то состояние их должно удовлетворять так называемому принципу исключения Паули. Этот принцип означает, что в атоме никогда не может быть двух и более электронов в одном и том же состоянии. Иными словами, электроны атома не могут иметь полностью одинаковых наборов квантовых чисел. Так, например, если два электрона находятся на одном и том же энергетическом уровне, то их спины должны обязательно иметь противоположные направления и т. д.

В заключение укажем, что собственным моментом обладают не только электроны, но и некоторые другие частицы. Спин, в частности, наблюдается у протонов, причем спиновое квантовое число протона равно 1/2. Спином, оказывается, обладают и фотоны, однако у них $l_S = 1$.

13. Гармонический осциллятор

Пусть мы имеем частицу массы m, движущуюся вдоль прямой под действием упругой силы. Классическое уравнение движения такой системы имеет вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F = -\alpha x, \tag{14.50}$$

где x — величина отклонения частицы от начального положения; $F = -\alpha x$ — упругая сила (α — коэффициент упругости). Из решения этого уравнения следует, что

$$x = A\cos\left(\sqrt{\frac{\alpha}{m}}t + \varphi\right),$$

т. е. частица совершает гармонические колебания с угловой частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{\alpha}{m}}.$$

Подобная система в теории колебаний называется гармоническим осциллятором. Она, очевидно, может служить моделью любой системы, совершающей гармонические колебания с малой амплитудой вблизи устойчивого состояния равновесия. (Сюда, например, можно отнести атом в молекуле, электрон в атоме и т. п.)

Из уравнения (14.50) и из определения импульса $p = m\frac{d}{dt}$ следует, что величины p и x связаны между собой соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -\alpha x, \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{m} p. \end{aligned}\right\} \tag{14.51}$$

Отсюда также вытекает, что p удовлетворяет уравнению, аналогичному (14.50).

Величина полной энергии осциллятора, как обычно, равна сумме кинетической $W_к$ и потенциальной U энергий. Выражение для кинетической энергии $W_к$ имеет вид

$$W_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}.$$

Потенциальная энергия U, как известно, связана с действующей на частицу силой $\bar{F}$ соотношением

$$\bar{F} = -\operatorname{grad} U.$$

В рассматриваемом случае

$$F = -\frac{dU}{dx} = -\alpha x.$$

Следовательно,

$$U = \frac{\alpha x^2}{2} + \text{const}.$$

Выбирая постоянную интегрирования равной нулю, получим:

$$U = \frac{\alpha x^2}{2},$$

$$W = \frac{p^2}{2m} + \frac{\alpha x^2}{2} = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \omega^2 x\right]. \tag{14.52}$$

С точки зрения квантовой теории состояние гармонического осциллятора характеризуется волновой функцией ψ, удовлетворяющей уравнению Шредингера. Последнее в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{h^2}\left(W - \frac{\alpha x^2}{2}\right)\psi = 0.$$

Исследование этого уравнения показывает, что решение его будет конечно и однозначно на промежутке $-\infty < x < \infty$, если

$$W = W_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\omega,$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$ *).

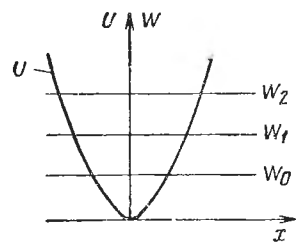


Рис. 14.10. Энергетические уровни осциллятора и график потенциальной функции $U(x)$.

Наименьшая величина энергии, которой может обладать гармонический осциллятор, равна

$$W_0 = \frac{1}{2} h\omega.$$

Она называется нулевой энергией осциллятора. При переходе из одного состояния в другое энергия системы изменяется скачком на величину $h\omega$. На рис. 14.10 изображены энергетические уровни осциллятора и график функции $U(x)$.

14. Квантование электромагнитного поля

Познакомимся с особенностями квантования электромагнитного поля. Для простоты рассуждений рассмотрим поле в объемном резонаторе без потерь, полагая, что сторонние источники в нем отсутствуют.

Основываясь на результатах предыдущей главы, мы можем утверждать, что любое поле в таком резонаторе можно представить в виде совокупности собственных полей различных типов. В соответствии с этим для комплексных векторов $\overline{E}_к$ и $\overline{H}_к$ резонатора с учетом выражений (13.12) и (13.12′) будем иметь:

$$\overline{E}_к = \sum_\nu e^{i\omega_\nu t}\, \dot{\overline{E}}_\nu(x, y, z),$$

$$\overline{H}_к = \sum_\nu e^{i\omega_\nu t}\, \dot{\overline{H}}_\nu(x, y, z).$$

*) См., например: В. И. Смирнов. «Курс высшей математики», ГИТТЛ, 1949, т. III, ч. II, стр. 564—565.

Переходя к вещественным значениям, получим:

$$\left.\begin{aligned} \bar{E} &= \sum_{\nu} f_{\nu}(t)\,\bar{E}_{\nu}(x, y, z), \\ \bar{H} &= \sum_{\nu} q_{\nu}(t)\,\bar{H}_{\nu}(x, y\, z), \end{aligned}\right\} \tag{14.53}$$

где

$$f_{\nu}(t) = \cos(\omega_{\nu} t + \varphi_{\nu});$$

$$q_{\nu}(t) = -\sin(\omega_{\nu} t + \varphi_{\nu})$$

и φ_{ν} — начальные фазы колебаний ν-го типа.

Функции $f_{\nu}(t)$ и $q_{\nu}(t)$, как известно, удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{d^2 f_{\nu}}{dt^2} + \omega_{\nu}^2 f_{\nu} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d^2 q_{\nu}}{dt^2} + \omega_{\nu}^2 q_{\nu} = 0. \tag{14.54}$$

Кроме того, для них справедливы соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{df_{\nu}}{dt} &= -\omega_{\nu} \sin(\omega_{\nu} t + \varphi_{\nu}) = \omega_{\nu} q_{\nu}, \\ \frac{dq_{\nu}}{dt} &= -\omega_{\nu} \cos(\omega_{\nu} t + \varphi_{\nu}) = -\omega_{\nu} f_{\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{14.55}$$

Что же касается функций $\bar{E}_{\nu}(x, y, z)$ и $\bar{H}_{\nu}(x, y, z)$, характеризующих распределение поля в резонаторе, то они подчиняются условиям ортогональности:

$$\int_V \bar{E}_{\nu} \bar{E}_{\nu'}\, dV = \begin{cases} N_{\nu e}^2 & \text{при } \nu' = \nu, \\ 0 & \text{при } \nu' \neq \nu; \end{cases}$$

$$\int_V \bar{H}_{\nu} \bar{H}_{\nu'}\, dV = \begin{cases} N_{\nu м}^2 & \text{при } \nu' = \nu, \\ 0 & \text{при } \nu' \neq \nu' \end{cases}$$

где V — объем резонатора.

Энергия электромагнитного поля в резонаторе с параметрами среды ε_0, μ_0 равна

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2)\, dV.$$

Подставляя сюда значения $\bar{E}$ и $\bar{H}$ на (14.53) и учитывая условия ортогональности векторов $\bar{E}_{\nu}$ и $\bar{H}_{\nu}$, будем иметь

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \sum_{\nu} N_{\nu e}^2 f_{\nu}^2(t) + \frac{1}{2} \mu_0 \sum_{\nu} N_{\nu м}^2 q_{\nu}^2(t).$$

Но для любого типа собственных колебаний максимальная энергия электрического поля в резонаторе равна максимальной энергии магнитного поля, т. е.

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_V E_\nu^2\, dV = \frac{1}{2}\mu_0 \int_V H_\nu^2\, dV,$$

или с учетом соотношений ортогональности

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 N_{\nu e}^2 = \frac{1}{2}\mu_0 N_{\nu \text{м}}^2 = \frac{1}{2}N_\nu^2.$$

Следовательно, выражение для энергии W можно переписать в виде

$$W = \sum_\nu W_\nu = \frac{1}{2}\sum_\nu N_\nu^2 (f_\nu^2 + q_\nu^2), \tag{14.56}$$

где W_ν — энергия собственных колебаний ν-го типа.

Учитывая далее соотношения (14.55), для W_ν получим

$$W_\nu = \frac{N_\nu^2}{2\omega_\nu^2}\left[\left(\frac{dq_\nu}{dt}\right)^2 + \omega_\nu^2 q_\nu^2\right]. \tag{14.57}$$

Из формулы (14.56) видно, что энергия поля в резонаторе равна сумме энергий всех существующих в нем типов собственных колебаний. А это значит, что различные типы колебаний в резонаторе взаимонезависимы, т. е. энергия одного типа колебаний не может перейти в энергию других типов.

Нетрудно заметить, что уравнения (14.54) и соотношения (14.55) аналогичны уравнению (14.56) и соотношениям (14.51), характеризующим гармонический осциллятор. Вместе с тем, выражение (14.57), определяющее W_ν, аналогично (14.52). Отсюда вытекает, что совокупность N типов собственных колебаний в резонаторе эквивалентна совокупности N независимых гармонических осцилляторов. Но энергия ν-го осциллятора, как известно, равна $\left(n_\nu + \frac{1}{2}\right)h\omega_\nu$, где $n_\nu = 0, 1, 2, \ldots$

Стало быть, на основании (14.56) будем иметь:

$$W = \sum_\nu \left(n_\nu + \frac{1}{2}\right) h\omega_\nu = \sum_\nu \frac{1}{2} h\omega_\nu + \sum_\nu n_\nu\, h\omega_\nu = W_0 + \sum_\nu n_\nu h\omega_\nu,$$

$$W_0 = \sum_\nu \frac{1}{2} h\omega_\nu.$$

Отсюда следует, что энергия поля при переходе из одного состояния с определенным n_ν в другое меняется скачком, т. е. поле в резонаторе квантовано.

Аналогичный вывод можно сделать для поля в свободном пространстве, а также и для полей в других системах *).

Энергия кванта электромагнитного поля (фотона) равна величине $\hbar\omega$. Эта величина по мере роста частоты возрастает. Стало быть, квант поля в диапазоне, например, световых волн обладает большей энергией, чем квант поля в диапазоне более длинных волн.

Свойства квантов электромагнитного поля должны описываться волновыми функциями, имеющими, как уже неоднократно указывалось выше, вероятностный смысл. Однако вероятность местоположения фотона в общем случае точно определить нельзя.

Чтобы убедиться в этом, воспользуемся так называемым п р и н ц и п о м с о о т в е т с т в и я, высказанным впервые Бором. Принцип соответствия утверждает, что законы квантовой теории при увеличении числа квантов, участвующих в процессе, должны давать предельные соотношения, совпадающие с уравнениями классической теории для усредненных величин.

В рассматриваемом случае выражение, определяющее энергию фотонов, должно в пределе согласовываться с классическим выражением для энергии электромагнитного поля. Подобное согласование, очевидно, может быть достигнуто, если вероятность локализации фотона в объеме dV определить с помощью соотношения

$$\hbar\omega f dV = dW = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2)\, dV,$$

здесь f — плотность вероятности локализации фотона в заданной точке; dW — энергия электромагнитного поля в объеме dV. Из этого выражения получается, что

$$f = \frac{\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2}{2\hbar\omega} = \frac{\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2}{4\pi hc}\lambda.$$

Таким образом, плотность вероятности нахождения фотона в данной точке зависит от длины волны. Но последнюю в точке или бесконечно малом элементе объема определить нельзя. Поэтому говорить о вероятности местонахождения фотона в заданной точке не имеет смысла. Фотон как бы «размазан» в пространстве. В этом смысле он значительно менее похож на классическую частицу, чем электрон, для которого вероятность локализации в данном элементе объема имеет вполне реальный смысл.

Другое отличие фотонов от электронов состоит в том, что они (фотоны) не подчиняются принципу исключения Паули. А это значит, что в один и тот же момент времени любое количество фотонов может находиться в одинаковых состояниях.

---

*) Переход от поля в резонаторе к полю свободного пространства можно, например, осуществить, устремив размеры резонатора к бесконечности.

Множество фотонов, движущихся в заданном направлении и имеющих одинаковые или почти одинаковые характеристики, можно рассмотреть как электромагнитную волну, распространяющуюся в пространстве в соответствии с законами классической теории поля.

15. Квантовые переходы

Известно, что частица, характеризующаяся определенным набором квантовых состояний, под влиянием внешних воздействий может переходить из одного состояния в другое. Анализ подобных квантовых переходов представляет большой интерес для квантовой теории.

Предположим, что мы имеем частицу, которая при $t < t_1$ находится в стационарном состоянии, описываемом волновой функцией $\psi_{0m}(\bar{r})\, e^{i\frac{W_m}{h}t}$. Пусть эта частица на промежутке времени $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ подвергается какому-то дополнительному внешнему воздействию (возмущению). По исчезновении возмущения, т. е. при $t > t_2$, она может оказаться в каком-то новом состоянии, характеризуемом, например, волновой функцией $\psi_{0n}(\bar{r})\, e^{i\frac{W_n}{h}t}$.

Переход частицы из одного состояния в другое, разумеется, представляет собой вероятностный процесс. Для количественной характеристики его введем в рассмотрение так называемую в е р о я т н о с т ь к в а н т о в о г о п е р е х о д а. В данном случае речь будет идти о вероятности перехода частицы из состояния с энергией W_m в состояние с энергией W_n, или, короче говоря, из состояния m в состояние n.

Чтобы вычислить эту вероятность, обратимся к уравнению Шредингера:

$$-ih\frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi.$$

При наличии возмущающего воздействия оператор Гамильтона системы целесообразно представить в виде

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{\Phi}(t).$$

Здесь $\hat{H}_0$ — гамильтониан невозмущенной системы, а

$$\hat{\Phi}(t) = \begin{cases} \hat{U}_в(t) & \text{при } t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \\ 0 & \text{при } t < t_1 \text{ и } t > t_2 \end{cases}$$

— оператор возмущения, характеризующий внешнее воздействие.

Функция возмущения $U_{\text{в}}(t)$, которой соответствует оператор $\hat{U}_{\text{в}}$, совпадает с выражением для энергии взаимодействия, т. е. она в какой-то степени аналогична функции, определяющей потенциальную энергию. С учетом этих обозначений уравнение Шредингера можно переписать так:

$$-ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[\hat{H}_0 + \hat{\Phi}(t)\right]\psi. \tag{14.58}$$

В дальнейшем для удобства будем полагать, что $t_1 = 0$, а $t_2 = \tau$. В этом случае $\Phi(t)$ будет отлична от нуля на промежутке $[0, \tau]$.

Уравнение (14.58) принадлежит к числу линейных дифференциальных уравнений. Следовательно, к нему применим принцип суперпозиции. В соответствии с этим решение уравнения (14.58) можно искать в виде

$$\psi(\bar{r}, t) = \sum_l a_l(t)\,\psi_l(\bar{r}, t) = \sum_l a_l(t)\,\psi_{0l}(\bar{r})\,e^{i\frac{W_l}{h}t}, \tag{14.59}$$

где $a_l(t)$ — неизвестные функции времени; $\psi_l(\bar{r}, t) = \psi_{0l}(\bar{r})\,e^{i\frac{W_l}{h}t}$ — волновые функции, описывающие стационарные состояния невозмущенной системы. Последние, как известно, являются собственными функциями невозмущенного оператора $\hat{H}_0$ и образуют полную систему функций.

Так как по условию частица до начала воздействия находилась в стационарном состоянии m, т. е. $\psi(\bar{r}, t)\big|_{t<0} = \psi_{0m}\,e^{i\frac{Wm}{h}t}$, то из (14.59) следует, что при $t < 0$

$$a_l(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } l = m, \\ 0, & \text{если } l \neq m. \end{cases}$$

При $t > \tau$ коэффициенты $a_l(t)$ в разложении (14.59) вновь должны иметь неизменные значения. В этом случае (14.59) принимает вид

$$\psi(\bar{r}, t)\big|_{t>\tau} = \sum_l a_l(\tau)\,\psi_{0l}(\bar{r})\,e^{i\frac{W_l}{h}t}.$$

На основании рассуждений, проведенных в § 8 этой главы, можно утверждать, что величина $|a_l(\tau)|^2$ определяет вероятность нахождения системы в состоянии с энергией W_l. Так как по условию система в начальный момент находилась в состоянии m, то вероятность перехода ее в новое состояние n будет равна

$$P_{mn} = |a_n(\tau)|^2. \tag{14.60}$$

16. Расчет вероятностей квантовых переходов. Метод возмущений

Чтобы определить коэффициенты $a_l(t)$ и, следовательно, вычислить вероятности квантовых переходов, необходимо решить уравнение (14.58).

Для этого подставим в (14.58) значение функции ψ, определяемое равенством (14.59). В результате будем иметь

$$-ih\sum_l \frac{da_l}{dt}\psi_{0l}e^{i\frac{W_l}{h}t}+\sum_l a_l W_l \psi_{0l}e^{i\frac{W_l}{h}t}=$$

$$=\hat{H}_0\sum_l a_l\psi_{0l}e^{i\frac{W_l}{h}t}+\hat{U}_{\text{в}}(t)\sum_l a_l\psi_{0l}e^{i\frac{W_l}{h}t}.$$

Принимая во внимание, что $\hat{H}_0\psi_{0l}=W_l\psi_{0l}$ и что вследствие этого

$$\sum_l a_l W_l\psi_{0l}e^{i\frac{W_l}{h}t}=\sum_l a_l(\hat{H}_0\psi_{0l})e^{i\frac{W_l}{h}t},$$

далее напишем

$$-ih\sum_l \frac{da_l}{dt}\psi_{0l}e^{i\frac{W_l}{h}t}=\hat{U}_{\text{в}}\sum_l a_l\psi_{0l}e^{i\frac{W_l}{h}t}.$$

Умножим обе части последнего равенства на $\psi^*_{0n}(\bar{r})e^{-i\frac{W_n}{h}t}$ и проинтегрируем по всему объему, в котором может находиться частица. Тогда, учитывая, что функции ψ_{0l} ортогональны и нормированы, получим систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных a_l:

$$-ih\frac{da_n}{dt}=\sum_l a_l U_{nl}e^{-i\omega_{nl}t}. \tag{14.61}$$

Здесь

$$U_{nl}=\int_V \psi^*_{0n}(\bar{r})\hat{U}_{\text{в}}\psi_{0l}(\bar{r})\,dV, \tag{14.62}$$

а

$$\omega_{nl}=\frac{W_n-W_l}{h}. \tag{14.63}$$

К уравнениям (14.61) необходимо добавить еще начальные условия

$$a_l(0)=\delta_{lm}=\begin{cases}1 & \text{при } l=m,\\ 0 & \text{при } l\neq m.\end{cases} \tag{14.64}$$

Коэффициенты U_{nl} носят название матричных элементов энергии возмущения, ибо совокупность их можно представить в виде соответствующей матрицы.

Систему уравнений (14.61) в общем виде решить весьма сложно. Поэтому обычно ограничиваются рассмотрением малых возмущений. В этом случае для решения уравнений целесообразно использовать метод последовательных приближений.

При малой энергии возмущения ($U_в \to 0$) в качестве нулевого приближения для неизвестных естественно выбрать значения коэффициентов $a_l(t)$, определяемые из начальных условий

$$a_l^{(0)}(t) = \delta_{lm}.$$

Уравнения первого приближения можно получить, если в правую часть системы (14.61) подставить значения $a_l^{(0)}(t)$. Эти уравнения имеют вид

$$-ih\frac{da_n^{(1)}}{dt} = \sum_l a_l^{(0)} U_{nl}(t)\, e^{-i\omega_{nl}(t)} = U_{nm}(t)\, e^{-i\omega_{nm}t}. \qquad (14.65)$$

Решение их дает следующий результат:

$$a_n^{(1)}(t) = -\frac{1}{ih}\int_0^t U_{nm}(\xi)\, e^{-i\omega_{nm}\xi}\, d\xi + \delta_{nm}. \qquad (14.66)$$

Развивая аналогичную методику далее, можно получить решение системы во втором приближении и т. д. Если определяемые таким способом последовательных приближений функции сходятся к некоторым предельным функциям, то последние представляют собой точное решение системы уравнений. На практике обычно ограничиваются отысканием первого приближения. Изложенный способ решения носит наименование метода возмущений.

При расчете коэффициента $a_n(t)$ матричный элемент U_{nm} может оказаться равным нулю. В этом случае $a_n(t)$ тоже будет равен нулю, и, следовательно, переход системы в состояние n невозможен. Такие переходы в квантовой механике называют запрещенными.

Итак, в дальнейшем мы будем полагать, что вероятность перехода частицы из состояния m в состояние n определяется выражением

$$P_{mn}(\tau) = |a_n^{(1)}(\tau)|^2 = \frac{1}{h^2}\left|\int_0^\tau U_{nm}(t)\, e^{-i\omega_{nm}t}\, dt\right|^2.$$

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ С ВЕЩЕСТВОМ

1. Постановка задачи

Перейдем теперь к изучению явлений, возникающих при взаимодействии электромагнитного излучения с веществом. Такие явления играют важную роль в современной радиоэлектронике. Поэтому изучение их имеет существенное практическое значение.

Строго говоря, взаимодействие электромагнитного поля с веществом следует рассматривать как взаимодействие двух квантовых систем: фотонов, образующих поле, и элементарных частиц вещества. Поведение и тех и других, как известно, описывается квантовыми законами. Однако во многих важных для практики случаях в целях упрощения анализа вместо квантованного электромагнитного поля вводят в рассмотрение поле, описываемое обычными законами классической теории. В такой приближенной постановке задачи речь уже будет идти о взаимодействии системы, описываемой классическими законами (электромагнитное поле), с квантовой системой, представляющей вещество. Подобный метод анализа процессов взаимодействия называется полуклассическим.

Под воздействием внешнего электромагнитного поля заряженные частицы в веществе, естественно, могут переходить с одного энергетического уровня на другой. Если частица совершает переход на более высокий энергетический уровень, она, очевидно, поглощает энергию электромагнитного поля. Внутренняя энергия атомов (или молекул) вещества в этом случае увеличивается. Если же частица переходит на более низкий уровень, энергия атомов (молекул) уменьшается, а энергия поля, наоборот, возрастает. Происходит так называемое индуцированное излучение электромагнитных волн.

Анализ индуцированного излучения и поглощения электромагнитных волн в дальнейшем будет осуществлен полуклассическим методом.

При изучении процессов взаимодействия мы ограничимся случаем сравнительно слабых полей, воздействие которых на вещество не нарушает связей между образующими его частицами.

2. Индуцированное излучение и поглощение электромагнитных волн. Электродипольное взаимодействие

Рассмотрим взаимодействие квантовой системы, например атома, с полем плоской электромагнитной волны. При этом будем полагать, что линейные размеры атома много меньше длины волны. Такое предположение в действительности справедливо вплоть до ультрафиолетовых волн и нарушается лишь в области рентгеновских лучей (напомним, что размер атома $a \approx 10^{-8}$ *см*, а наиболее короткая ультрафиолетовая волна имеет длину $\lambda \approx 10^{-6}$ *см*; a — радиус области, в которой величина волновой функции электрона заметно отлична от нуля; см. § 9 предыдущей главы).

Пусть волна распространяется вдоль оси x. Тогда напряженность электрического поля

$$E = E_0 \cos(\omega t - kx) = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right)$$

и напряженность магнитного поля

$$H = H_0 \cos(\omega t - kx) = \frac{E_0}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right).$$

При сделанном выше допущении фазы колебаний поля в различных точках квантовой системы практически остаются неизменными $\left(\frac{2\pi}{\lambda} a \ll 1\right)$. Поэтому приближенно можно полагать, что в пределах атома

$$E \approx E_0 \cos \omega t \quad \text{и} \quad H \approx H_0 \cos \omega t.$$

С другой стороны, совокупность электрических зарядов атома, распределенных в области малых размеров, можно представить в виде эквивалентного электрического диполя с моментом

$$\bar{d} = -\sum_n e_0 \bar{r}_n.$$

Здесь $\bar{r}_n$ — радиус-вектор, проведенный из начала координат, расположенного в центре тяжести системы, в точку, где находится n-й электрон.

Тогда энергия взаимодействия атома с электромагнитной волной приближенно будет определяться энергией взаимодействия электрического диполя с электрическим полем волны. Эта энергия равна

$$U_E = -\bar{d}\,\bar{E}.$$

Конечно, атом в действительности взаимодействует и с магнитным полем волны. Так, при движении в магнитном поле на электрон, как известно, действует лоренцова сила

$$\bar{F}_{\text{м}} = -e_0 \mu_0 [\bar{v} \times \bar{H}],$$

где $\bar{v}$ — скорость движения электрона. Но в то же время сила, приложенная к электрону со стороны электрического поля, равна $\bar{F}_E = -e_0 \bar{E}$. Отношение модулей этих векторов в поле плоской волны

$$\frac{|\bar{F}_{\text{м}}|}{|\bar{F}_E|} \leqslant \frac{\mu_0 v H_0}{E_0} = \frac{\mu_0 v}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}} = \frac{v}{c},$$

где $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$. Так как обычно скорость движения электронов значительно меньше скорости c, то $\frac{|\bar{F}_{\text{м}}|}{|\bar{F}_E|} \ll 1$. Следовательно, взаимодействием атома с магнитным полем волны можно пренебречь (исключение составляют некоторые случаи, о которых говорится в следующем параграфе).

Предположим, что атом до взаимодействия с волной (при $t < 0$) находился в состоянии с энергией W_m. Вычислим с помощью метода возмущений вероятность перехода системы в новое состояние с энергией W_n.

В рассматриваемом случае оператор возмущения $\hat{U}_{\text{в}}(t)$ имеет вид

$$\hat{U}_{\text{в}}(t) = U_E = -\bar{d}\,\bar{E} = -\bar{d}\,\bar{E}_0 \cos \omega t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau. \qquad (15.1)$$

Здесь $\bar{E}_0 = \bar{i}_E E_0$; $\bar{i}_E$ — орт, направленный параллельно вектору $\bar{E}$ при $t = 0$. Тогда в соответствии с (14.62) матричный элемент энергии взаимодействия (возмущения) будет равен

$$U_{nm} = -\int_V \psi^*_{0n}\, \bar{d}\, \bar{E}_0 \cos \omega t\, \psi_{0m}\, dV = -\bar{d}_{nm}\, \bar{E}_0 \cos \omega t, \qquad (15.2)$$

где $\bar{d}_{nm} = \int_V \psi^*_{0n}\, \bar{d}\, \psi_{0m}\, dV$ — матричный элемент момента эквивалентного электрического диполя.

Подставляя значение U_{nm} в формулу (14.60), найдем значение $a_n(\tau)$ при $n \neq m$:

$$a_n(\tau) = -\frac{1}{ih}\int_0^\tau U_{nm}(t)\, e^{-i\omega_{nm}t}\, dt = \frac{\overline{d}_{nm}\overline{E}_0}{ih}\int_0^\tau \cos\omega t\, e^{-i\omega_{nm}t}\, dt =$$

$$= \frac{\overline{d}_{nm}\overline{E}_0}{2h}\left[\frac{1-e^{i(\omega-\omega_{nm})\tau}}{\omega-\omega_{nm}} - \frac{1-e^{-i(\omega+\omega_{nm})\tau}}{\omega+\omega_{nm}}\right]. \qquad (15.3)$$

Легко сообразить, что модуль этого коэффициента будет иметь большие значения, если

$$\omega \approx \omega_{nm} = \frac{W_n - W_m}{h} \quad (\text{при } W_n > W_m)$$

или

$$\omega \approx -\omega_{nm} = \frac{W_m - W_n}{h} \quad (\text{при } W_m > W_n).$$

Последние соотношения целесообразно переписать в виде

$$W_n \approx W_m + h\omega, \qquad (15.4)$$

$$W_n \approx W_m - h\omega. \qquad (15.5)$$

Так как величина $h\omega$ определяет квант энергии электромагнитного поля, то можно заключить, что в случае (15.4) переход системы из состояния m в состояние n сопровождается поглощением фотона, а в случае (15.5) этот переход приводит к испусканию фотона. Иными словами, в первом случае имеет место поглощение энергии электромагнитного поля, а во втором — индуцированное излучение.

Частота $\omega_{nm} = W_n - W_m/h$ в квантовой механике называется частотой квантового перехода, или частотой Бора (здесь $W_n > W_m$).

Вычислим вероятность перехода P_{mn} системы из состояния m в состояние n, сопровождающегося поглощением энергии ($W_n \approx W_m + h\omega$). Из выражения (15.3) следует, что в этом случае

$$a_n(\tau) \approx \frac{\overline{d}_{nm}\overline{E}_0}{2h}\,\frac{1-e^{i(\omega-\omega_{nm})\tau}}{\omega-\omega_{nm}} =$$

$$= -i\,\frac{\overline{d}_{nm}\overline{E}_0}{h}\, e^{i\frac{\omega-\omega_{nm}}{2}\tau}\,\frac{\sin\dfrac{\omega-\omega_{nm}}{2}\tau}{\omega-\omega_{nm}}.$$

Подставляя найденное значение a_n в формулу (14.60), будем иметь

$$P_{mn}(\tau) = P^a_{mn}(\tau) \approx \left| \frac{\overline{d}_{nm}\overline{E}_0}{h} \right|^2 \frac{\sin^2 \frac{\omega-\omega_{nm}}{2}\tau}{(\omega-\omega_{nm})^2}. \qquad (15.6)$$

Значок a у вероятности P_{mn} означает, что происходит поглощение (абсорбция) энергии. Из этого выражения видно, что вероятность перехода имеет максимум при частоте колебаний внешнего поля, равной частоте квантового перехода.

График функции P_{mn} изображен на рис. 15.1.

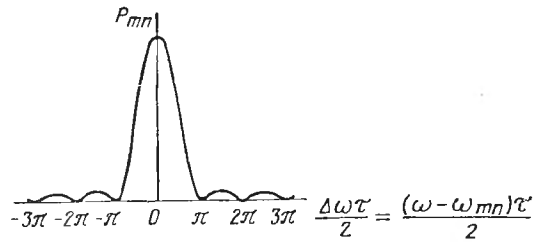


Рис. 15.1. Вероятность квантового перехода электродипольного типа.

Если переход $m \to n$ приводит к индуцированному излучению энергии ($W_n \approx W_m - h\omega$), то

$$a_n(\tau) \approx -\frac{\overline{d}_{nm}\overline{E}_0}{2h} \frac{1-e^{-i(\omega-\omega_{mn})\tau}}{\omega-\omega_{mn}} =$$

$$= -i\frac{\overline{d}_{nm}\overline{E}_0}{h} e^{\frac{-i(\omega-\omega_{mn})\tau}{2}} \frac{\sin\frac{\omega-\omega_{mn}}{2}\tau}{\omega-\omega_{mn}},$$

$$P_{mn}(\tau) = P^e_{mn}(\tau) \approx \left| \frac{\overline{d}_{nm}\overline{E}_0}{h} \right|^2 \frac{\sin^2\frac{\omega-\omega_{mn}}{2}\tau}{(\omega-\omega_{mn})^2};$$

$$\omega_{mn} = \frac{W_m - W_n}{h}.$$

Значок e у вероятности P_{mn} означает излучение (эмиссию) энергии. Полученное выражение, как и следовало ожидать, аналогично (15.6).

Предположим теперь, что в начальный момент времени (до взаимодействия с полем) система находилась в состоянии n. Вычислим вероятность перехода этой системы в состояние m, причем будем

полагать, что $W_n > W_m$, т. е. переход создает индуцированное излучение. Проводя рассуждения, аналогичные предыдущим, получим

$$P_{nm}(\tau) = P^e_{nm}(\tau) = |a_m(\tau)|^2 \approx \left| \frac{\bar{d}_{mn}\bar{E}_0}{h} \right|^2 \frac{\sin^2 \frac{\omega-\omega_{nm}}{2}\tau}{(\omega-\omega_{nm})^2}. \qquad (15.7)$$

Здесь $\bar{d}_{mn} = \int_V \psi^*_{0m}\bar{d}\,\psi_{0n}\,dV$. Сравнивая (15.7) и (15.6) и учитывая, что $|\bar{d}_{mn}\bar{E}_0| = |\bar{d}_{nm}\bar{E}_0|$, будем иметь $P^a_{nm}(\tau) = P^e_{mn}(\tau)$.

Таким образом, вероятность перехода частицы с уровня W_n на уровень W_m при взаимодействии с внешним электромагнитным полем равна вероятности обратного перехода ее с уровня W_m на уровень W_n. Другими словами, вероятности поглощения и индуцированного излучения одинаковы.

Изложенная здесь теория, разумеется, является приближенной. Но для «двухуровневых» систем известно точное решение уравнений (14.61). Последнее выглядит следующим образом:

$$P_{mn}(\tau) = |a_n(\tau)|^2 = \frac{\left|\frac{\bar{d}_{nm}\bar{E}_0}{h}\right|^2}{\left|\frac{\bar{d}_{nm}\bar{E}_0}{h}\right|^2 + (\omega-\omega_{nm})^2} \times$$

$$\times \sin^2\left\{\frac{\tau}{2}\left[\left|\frac{\bar{d}_{nm}\bar{E}_0}{h}\right|^2 + (\omega-\omega_{nm})^2\right]^{1/2}\right\}. \qquad (15.8)$$

При $\omega = \omega_{nm}$ величина $P_{mn}(\tau)$ оказывается равной

$$P_{mn}(\tau) = \sin^2\left[\frac{\tau}{2}\left|\frac{\bar{d}_{nm}\bar{E}_0}{h}\right|\right].$$

В то же время приближенная формула (15.6) при $\omega = \omega_{nm}$ дает

$$P_{mn}(\tau) \approx \left|\frac{\bar{d}_{nm}\bar{E}_0}{h}\right|^2 \frac{\tau^2}{4}.$$

Сравнивая два эти выражения, нетрудно убедиться, что приближенная теория будет достаточно верна, если

$$\left|\frac{\bar{d}_{nm}\bar{E}_0}{h}\right|\tau \ll 1.$$

В заключение следует указать, что формулы (15.6), (15.7) справедливы не только для поля плоской волны, но и для любого линейно-поляризованного поля, если энергия взаимодействия квантовой системы с полем имеет вид (15.1). Эти формулы определяют вероятность квантового перехода так называемого электродипольного типа, когда частица, взаимодействующая с полем, представляется в виде эквивалентного электрического диполя.

3. Магнитодипольное взаимодействие

В некоторых случаях может оказаться, что матричный элемент электрического диполя $\bar{d}_{nm}$ равен нулю, и, следовательно, вероятность квантового перехода $m \rightleftarrows n$ в таком электродипольном приближении тоже равна нулю (рассматриваемый переход запрещен). В этом случае при анализе процессов, естественно, приходится учитывать взаимодействие электромагнитного поля с магнитным полем частицы. (Иногда приходится также учитывать взаимодействие частицы с электрическим полем с более высокой степенью точности, нежели электродипольное приближение.)

Пусть магнитный момент атома равен $\bar{M}$. Тогда для энергии взаимодействия атома с волной в магнитодипольном приближении можно написать

$$U_{\text{м}} = -\bar{M}\bar{H},$$

где $\bar{H}$ — вектор напряженности переменного магнитного поля [см. формулу (4.58)].

Используя далее метод возмущений подобно тому, как это было сделано в предыдущем параграфе, для вероятности квантового перехода магнитодипольного типа получим

$$P_{mn} = \left| \frac{\bar{M}_{nm}\bar{H}_0}{h} \right|^2 \frac{\sin^2 \dfrac{\omega - \omega_{nm}}{2}\tau}{(\omega - \omega_{nm})^2}. \qquad (15.9)$$

Здесь $\bar{M}_{nm} = \int\limits_V \psi^*_{0n}\bar{M}\psi_{0m}\,dV$ — матричный элемент магнитного момента частицы; $\bar{H}_0 = \bar{i}_H H_0$; $\bar{i}_H$ — орт, направленный параллельно вектору $\bar{H}$ при $t=0$; H_0 — амплитуда напряженности магнитного поля.

Формула (15.9), как и следовало ожидать, аналогична формуле вероятности квантового перехода электродипольного типа.

4. Случай плоской волны с непрерывным частотным спектром

Определим вероятность квантового перехода при электродипольном взаимодействии частицы с плоской волной, имеющей непрерывный (сплошной) частотный спектр. Предварительно преобразуем формулу (15.6), выразив величину $|E|^2 = E_0^2$ через среднее значение вектора Пойнтинга. Так как

$$\Pi_{\text{ср}} = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}}, \quad \text{то} \quad E_0^2 = 2\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,\Pi_{\text{ср}}.$$

Но $\Pi_{\text{ср}} = wc$, где $w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2$ — объемная (средняя) плотность энергии поля. Следовательно,

$$E_0^2 = 2\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,wc = 2\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,w\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{2}{\varepsilon_0}w.$$

Подставляя найденное значение E_0^z в (15.6) или (15.7), будем иметь

$$P_{mn}(\tau) = \frac{2\left|\bar{d}_{nm}\bar{i}_E\right|^2}{\varepsilon_0 h^2} w \frac{\sin^2\frac{\omega-\omega_п}{2}\tau}{(\omega-\omega_п)^2}; \qquad (15.10)$$

здесь $\omega_п$ — угловая частота квантового перехода.

Формула (15.10), разумеется, определяет вероятность квантового перехода частицы в результате взаимодействия с монохроматической волной.

Если же волна имеет непрерывный спектр, то w в этой формуле необходимо заменить на $dw = \frac{\partial w}{\partial \omega} d\omega = \rho(\omega)\, d\omega$, где $\rho(\omega)$ — объемная плотность энергии поля в единичной полосе частот [спектральная плотность функции $w(\omega)$]. Тогда для бесконечно узкой полосы частот вероятность перехода

$$dP_{mn} = \frac{2\left|\bar{d}_{nm}\bar{i}_E\right|^2}{\varepsilon_0 h^2} \rho(\omega) \frac{\sin^2\frac{\omega-\omega_п}{2}\tau}{(\omega-\omega_п)^2} d\omega,$$

а полная вероятность перехода может быть определена путем интегрирования по всем частотам

$$P_{mn}(\tau) = \frac{2\left|\bar{d}_{nm}\bar{i}_E\right|^2}{\varepsilon_0 h^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\omega) \frac{\sin^2\frac{\omega-\omega_п}{2}\tau}{(\omega-\omega_п)^2} d\omega. \qquad (15.11)$$

Рассмотрим функцию

$$g(\omega, \tau) = \frac{\sin^2\frac{\omega\tau}{2}}{\omega^2}.$$

График этой функции аналогичен тому, который мы имеем на рис. 15.1.

Пусть τ здесь играет роль параметра, а независимой переменной является ω. Тогда при увеличении τ максимальное значение $g(\omega, \tau)$ в точке $\omega = 0$ будет также расти. Нулевые значения функции, находящиеся в точках $\omega_п = 2\pi n/\tau$, $n = \pm 1; \pm 2$, при этом смещаются к точке $\omega = 0$. В конце концов, при $\tau \to \infty$ получится, что функция $g(\omega, \tau)$ всюду равна нулю, за исключением $\omega = 0$, где она обращается в бесконечность. Стало быть, эта функция оказывается аналогичной дельта-функции. Но для последней известно, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega)\, d\omega = 1.$$

Вычисление подобного интеграла для $g(\omega, \tau)$ дает

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega, \tau)\, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \frac{\omega\tau}{2}}{\omega^2}\, d\omega = \frac{\pi\tau}{2}.$$

Учитывая изложенное, можно написать, что при $\tau \to \infty$

$$g(\omega, \tau) = \frac{\pi\tau}{2}\, \delta(\omega).$$

Аналогично,

$$g[(\omega - \omega_{\text{п}}), \tau]_{\tau\to\infty} = \frac{\pi\tau}{2}\, \delta(\omega - \omega_{\text{п}}). \qquad (15.12)$$

Итак, полагая, что время взаимодействия частицы с волной велико, из выражений (15.11) и (15.12) будем иметь

$$P_{mn}(\tau) = \frac{2\left|\bar{d}_{nm}\bar{i}_E\right|^2}{\varepsilon_0 h^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\omega) \frac{\pi\tau}{2}\, \delta(\omega - \omega_{\text{п}})\, d\omega =$$

$$= \pi \frac{\left|\bar{d}_{nm}\bar{i}_E\right|^2}{\varepsilon_0 h^2}\, \rho(\omega_{\text{п}})\, \tau. \qquad (15.13)$$

Отсюда вытекает, что вероятность квантового перехода пропорциональна продолжительности взаимодействия τ. Следовательно, здесь можно говорить о вероятности квантового перехода за единицу времени. Если обозначить эту вероятность p_{mn}, то

$$p_{mn} = \frac{P_{mn}}{\tau} = \pi \frac{\left|\bar{d}_{nm}\bar{i}_E\right|^2}{\varepsilon_0 h^2}\, \rho(\omega_{\text{п}}). \qquad (15.14)$$

Из этой формулы видно, что квантовый переход в данном случае возможен, если в спектре электромагнитной волны имеется составляющая с частотой $\omega_{\text{п}}$.

Формулы (15.11) и (15.13) применимы и к случаю магнитодипольного взаимодействия, если в них $\bar{d}_{nm}\bar{i}_E$ заменить на $\bar{M}_{nm}\bar{i}_H$, а ε_0 — на μ_0.

5. Взаимодействие теплового излучения с частицей

Известно, что любое тело, нагретое до определенной температуры, излучает в пространство электромагнитное поле. В то же время оно поглощает энергию из окружающей среды. Если при этом количество поглощаемой энергии равно количеству энергии излучаемой, в системе устанавливается состояние термодинамического равновесия.

Тело, поглощающее всю падающую на него энергию, называется абсолютно черным. Закон теплового излучения абсолютно черного тела установил, как уже отмечалось выше, Планк. Согласно этому закону объемная плотность энергии излучения в полосе частот $d\omega$ равна

$$\rho(\omega)\,d\omega = \frac{h\omega^3}{\pi^2 c^3}\,\frac{1}{e^{\frac{h\omega}{kT}}-1}\,d\omega. \qquad (15.15)$$

Здесь $h = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ *дж·сек* — постоянная Планка; $k = 1{,}38 \times \times 10^{-23}$ *дж/град* — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура.

Из выражения (15.15) видно, что абсолютно черное тело излучает колебания с широким частотным спектром (теоретически с бесконечно широким спектром), Известно также, что тепловое излучение неполяризовано, т. е. имеются три взаимно перпендикулярные составляющие векторов $\overline{E}$ и $\overline{H}$, мгновенные значения которых изменяются во времени случайным (хаотическим) образом. Такое поле, очевидно, может быть представлено в виде совокупности некогерентных плоских волн, распространяющихся в трех взаимно перпендикулярных направлениях x, y и z.

На основании этого можно утверждать, что в изотропном неполяризованном поле вся энергия распределяется поровну между тремя составляющими, поляризованными вдоль осей x, y и z. Объемная плотность энергии поля $w = w_x + w_y + w_z$, причем $w_x = w_y = w_z = (1/3)\,w$.

Соответственно этому

$$\rho_x(\omega) = \rho_y(\omega) = \rho_z(\omega) = \frac{1}{3}\rho(\omega).$$

Предположим, что частица взаимодействует с x составляющей поля теплового излучения. Тогда из формулы (15.13) для вероятности квантового перехода имеем

$$P^x_{mn} = \pi\,\frac{|d^x_{nm}|^2}{3\varepsilon_0 h^2}\,\rho(\omega_п)\,\tau.$$

При взаимодействии с y и z составляющими получаются аналогичные выражения:

$$P^y_{mn} = \pi\,\frac{|d^y_{nm}|^2}{3\varepsilon_0 h^2}\,\rho(\omega_п)\,\tau,$$

$$P^z_{mn} = \pi\,\frac{|d^z_{nm}|^2}{3\varepsilon_0 h}\,\rho(\omega_п)\,\tau.$$

Здесь d^x_{nm}, d^y_{nm} и d^z_{nm} — проекции матричного элемента дипольного момента частицы на направления x, y и z.

Полная вероятность квантового перехода, учитывающая взаимодействие со всеми тремя составляющими поля, будет равна

$$P_{mn}(\tau) = P^x_{mn} + P^y_{mn} + P^z_{mn} = \pi \frac{|d_{nm}|^2}{3\varepsilon_0 h^2} \rho(\omega_n)\tau,$$

где

$$|d_{nm}|^2 = |d^x_{nm}|^2 + |d^y_{nm}|^2 + |d^z_{nm}|^2.$$

Вероятность перехода за единицу времени

$$P_{mn} = \frac{P_{mn}}{\tau} = \pi \frac{|d_{nm}|^2}{3\varepsilon_0 h^2} \rho(\omega_n). \qquad (15.16)$$

6. Спонтанное излучение

Изложенная выше полуклассическая теория дает объяснение вынужденным явлениям, возникающим при взаимодействии частицы с внешним электромагнитным полем (индуцированное излучение или поглощение). Однако известно, что частица может переходить с более высокого энергетического уровня на нижний даже в отсутствие внешнего поля. Такой самопроизвольный квантовый переход сопровождается самопроизвольным, или, как говорят, с п о н т а н н ы м и з л у ч е н и е м электромагнитного поля.

Понятие об индуцированном и спонтанном излучении в физику ввел Эйнштейн еще до того, как были сформулированы основные положения квантовой теории. Ниже при выводе некоторых количественных характеристик для спонтанного излучения мы воспользуемся его методикой.

Рассмотрим совокупность частиц, находящихся в состоянии термодинамического равновесия с окружающей средой. В таком состоянии переходы частиц с верхнего энергетического уровня W_m на нижний уровень W_n, сопровождающиеся излучением квантов энергии электромагнитного поля, должны компенсироваться обратными переходами, характеризуемыми поглощением квантов энергии поля.

Вероятность перехода частиц из состояния m в состояние n за единицу времени по Эйнштейну равна

$$AN_m + CN_m \rho.$$

Первое слагаемое в этом выражении представляет вероятность спонтанных переходов, а второе — вероятность индуцированных (вынужденных) переходов, обусловленных взаимодействием частиц с полем теплового излучения; N_m определяет количество частиц, находящихся на m-уровне; коэффициенты A и C — постоянные,

характеризующие спонтанное и индуцированное излучения; ρ — плотность энергии поля теплового излучения в единичной полосе частот.

Вероятность обратных переходов $n \to m$ за единицу времени имеет вид $BN_n\,\rho$, где N_n — число частиц, находящихся на уровне n, и B — постоянная поглощения.

В соответствии с изложенным эти вероятности должны быть одинаковыми, т. е. $N_m(A+C\rho) = BN_n\,\rho$.

Отсюда следует, что

$$\frac{A}{B\rho} + \frac{C}{B} = \frac{N_n}{N_m}. \tag{15.17}$$

Если система частиц находится в состоянии термодинамического равновесия, то известно, что она подчиняется статистике Больцмана, согласно которой

$$\frac{N_n}{N_m} = e^{-\frac{W_n - W_m}{kT}} = e^{\frac{h\omega_п}{kT}}; \tag{15.18}$$

$$\omega_п = \frac{W_m - W_n}{h}$$

(более подробно об этом см. в § 7 данной главы).

Подставляя значение N_n/N_m из (15.18) в правую часть равенства (15.17), получаем

$$\frac{A}{B\rho\,(\omega_п)} + \frac{C}{B} = e^{\frac{h\omega_п}{kT}}.$$

Но величина ρ определяется законом Планка (15.15). Поэтому последнее равенство с учетом (15.15) можно переписать так:

$$\frac{A}{B}\,\frac{\pi^2 c^3}{h\omega_п^3}\left(e^{\frac{h\omega_п}{kT}} - 1\right) + \frac{C}{B} = e^{\frac{h\omega_п}{kT}}.$$

Легко сообразить, что оно будет выполняться при любой температуре, если

$$\frac{A}{B}\,\frac{\pi^2 c^3}{h\omega_п^3} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{C}{B} = 1.$$

Полученные равенства называются соотношениями Эйнштейна. Первое из них позволяет определить вероятность спонтанного излучения частицы за единицу времени p^S_{mn}. Действительно,

$$p^S_{mn} = A = B\,\frac{h\omega_п^3}{\pi^2 c^3}.$$

Но величина $B\rho$ есть вероятность вынужденного перехода частицы из состояния m в состояние n, определяемая выражением (15.16). Следовательно,

$$p^S_{mn} = \frac{|d_{nm}|^2 \omega_п^3}{3\pi c^3 \varepsilon_0 h}. \qquad (15.19)$$

Из выражения (15.19) видно, что вероятность спонтанного излучения резко увеличивается с ростом частоты квантового перехода.

Что касается второго соотношения Эйнштейна, то из него следует уже известный нам факт равенства вероятностей индуцированного излучения и поглощения при взаимодействии частицы с электромагнитным полем.

Наличие спонтанного излучения приводит к тому, что время пребывания частицы в возбужденном состоянии (т. е. на верхнем энергетическом уровне) оказывается ограниченным. Иными словами, возбужденные состояния системы не являются строго стационарными. Если вероятность спонтанного перехода частицы на более низкие энергетические уровни мала, возбужденное состояние называется квазистационарным.

Возбужденные состояния с весьма большой продолжительностью жизни получили наименование метастабильных. Аналогичное название имеют и уровни, на которых находятся такие частицы.

Пусть в некоторый момент времени t количество частиц, находящихся на верхнем энергетическом уровне W_m, равно N_m. В результате спонтанного излучения число частиц на этом уровне за время dt уменьшается в среднем на величину $p^S_{mn} N_m dt$. Следовательно,

$$dN_m = -p^S_{mn} N_m dt.$$

Из решения этого дифференциального уравнения получается, что

$$N_m = N_m^{(0)} e^{-P^S_{mn} t} = N_m^{(0)} e^{-t/\tau_{mn}},$$

где $N_m^{(0)}$ — число частиц на верхнем уровне в начальный момент, а

$$\tau_{mn} = \frac{1}{P^S_{mn}} = \frac{3\pi c^3}{|d_{nm}|^2 \omega_п^3} \varepsilon_0 h.$$

Для одиночной частицы закон распада возбужденного состояния имеет вид

$$f(t) = e^{-t/\tau_{mn}}. \qquad (15.20)$$

Здесь функция $f(t)$ определяет вероятность того, что через время t частица еще будет находиться на исходном энергетическом уровне.

Величина τ_{mn} характеризует среднюю продолжительность жизни частицы в возбужденном состоянии. Определим порядок этой величины в диапазоне световых колебаний ($\omega_0 \approx \approx 4 \cdot 10^{15}$ $1/сек$). Для d_{nm} можно полагать, что

$$|d_{nm}| \approx e_0 a,$$

где e_0 — заряд электрона (абсолютная величина); a — размер атома.

Подставляя в формулу для τ_{mn} соответствующие величины, получим

$$\tau_{mn} \approx \frac{3\pi (3 \cdot 10^8)^3}{(1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-9})^2 \cdot 4^3 \cdot 10^{45}} \frac{1}{36\pi} 10^9 \cdot 10{,}5 \cdot 10^{-34} \approx 10^{-8} \text{ сек.}$$

Найденное значение оказывается много больше периода колебаний

$$t_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{6{,}28}{4 \cdot 10^{15}} \approx 10^{-15} \text{ сек.}$$

7. Ширина линии взаимодействия

Предположим, что поле, взаимодействующее с частицей, имеет линейную поляризацию и является монохроматическим, т. е.

$$\rho(\omega) = \rho_x(\omega) = w_0 \delta(\omega - \omega_0).$$

Согласно (15.11) вероятность перехода частицы из состояния m в состояние n в этом случае равна

$$P_{mn}(\tau) = \frac{2|\bar{d}_{nm} \bar{i}_E|^2}{\varepsilon_0 h^2} \int_{-\infty}^{+\infty} w_0 \delta(\omega - \omega_0) \frac{\sin^2 \frac{\omega - \omega_\text{п}}{2} \tau}{(\omega - \omega_\text{п})^2} d\omega =$$

$$= \frac{2|\bar{d}_{nm} \bar{i}_E|^2}{\varepsilon_0 h^2} w \frac{\sin^2 \frac{\omega_0 - \omega_\text{п}}{2} \tau}{\omega_0 - \omega_\text{п}} = 2w_0 \frac{|\bar{d}_{nm} \bar{i}_E|^2}{\varepsilon_0 h^2} g(\Delta\omega, \tau); \qquad (15.21)$$

$$\Delta\omega = \omega_0 - \omega_\text{п}.$$

Если продолжительность взаимодействия неограниченно возрастает ($\tau \to \infty$), то функция $g(\Delta\omega, \tau)$, как уже отмечалось выше, превращается в δ-функцию

$$g(\Delta\omega, \tau) \to \frac{\pi\tau}{2} \delta(\omega_0 - \omega_\text{п}).$$

Следовательно, для достаточно больших τ можно написать

$$P_{mn}(\tau) = \pi w_0 \frac{|\bar{d}_{nm} \bar{i}_E|^2}{\varepsilon_0 h^2} \delta(\omega_0 - \omega_\text{п}) \tau.$$

Отсюда видно, что при $\tau \to \infty$ квантовый переход совершается только в том случае, когда частота колебаний поля совпадает с частотой перехода. Для всех других частот ω_0, не равных ω_n, вероятность перехода равна нулю. А это значит, что при большой продолжительности взаимодействия полоса частот, в которой возможен вынужденный квантовый переход, становится весьма узкой; в пределе при $\tau \to \infty$ эта полоса стремится к нулю. Иными словами, частотная характеристика квантового перехода принимает вид спектральной линии.

В действительности взаимодействие между полем и частицей, конечно, не может быть сколь угодно длительным. Продолжительность взаимодействия всегда по той или иной причине оказывается конечной. Так, например, в одних случаях она будет определяться временем пролета частицы через пространство взаимодействия, в других — процессами между самими частицами и т. д.

Одной из причин прекращения взаимодействия поля с частицей является спонтанное излучение. В самом деле, если частица находится на верхнем энергетическом уровне, то взаимодействие ее с полем может продолжаться до тех пор, пока не произойдет самопроизвольный переход на нижний уровень. Из выражения (15.20) следует, что вероятность спонтанного перехода частицы за промежуток времени dt в окрестностях заданного t равна

$$|f(t+dt)-f(t)| = |f'(t)|\,dt = \frac{1}{\tau_{mn}}\, e^{-t/\tau_{mn}}\, dt = \varphi(t)\, dt,$$

где

$$\varphi(t) = \frac{1}{\tau_{mn}}\, e^{-t/\tau_{mn}} \qquad (15.22)$$

— плотность этой вероятности.

Стало быть, при наличии самопроизвольного излучения продолжительность взаимодействия τ внешнего поля с частицей становится величиной случайной. Точно так же случайной оказывается и величина $P_{mn}(\tau)$. Теперь уже вероятность вынужденного квантового перехода частицы на нижний уровень с учетом спонтанного излучения, очевидно, может быть рассчитана путем усреднения функции $P_{mn}(\tau)$, определяемой формулой (15.20).

В соответствии с методами теории вероятностей будем иметь

$$\tilde{P}_{mn} = \int_0^\infty P_{mn}(\tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau.$$

Подставляя сюда значения $P_{mn}(\tau)$ и $\varphi(\tau)$ из выражений (15.21) и (15.22), получим

$$\widetilde{P}_{mn} = \int_0^\infty 2w_0 \frac{|\bar{d}_{nm}\bar{i}_E|^2}{\varepsilon_0 h^2} \frac{\sin^2\frac{\Delta\omega\tau}{2}}{(\Delta\omega)^2} \frac{1}{\tau_{mn}} e^{-\frac{\tau}{\tau_{mn}}} d\tau =$$

$$= 2w_0 \frac{|\bar{d}_{nm}\bar{i}_E|^2}{\varepsilon_0 h^2 \tau_{mn}} \int_0^\infty \frac{\sin^2\frac{\Delta\omega\tau}{2}}{(\Delta\omega)^2} e^{-\frac{\tau}{\tau_{mn}}} d\tau.$$

Но

$$\int_0^\infty \sin^2\frac{\Delta\omega\tau}{2} e^{-\frac{\tau}{\tau_{mn}}} d\tau = \frac{\tau_{mn}}{2\left[\left(\frac{1}{\Delta\omega\tau_{mn}}\right)^2 + 1\right]}.$$

Следовательно,

$$\widetilde{P}_{mn} = w_0 \frac{|\bar{d}_{nm}\bar{i}_E|^2}{\varepsilon_0 h^2} \frac{1}{\left[(\Delta\omega)^2 + \frac{1}{\tau_{mn}^2}\right]} =$$

$$= \pi w_0 \frac{|\bar{d}_{nm}\bar{i}_E|^2}{\varepsilon_0 h^2} \tau_{mn} K(\Delta\omega), \qquad (15.23)$$

где

$$K(\Delta\omega) = \frac{\frac{1}{\pi\tau_{mn}}}{(\Delta\omega)^2 + \frac{1}{\tau_{mn}^2}}. \qquad (15.24)$$

Функция $K(\Delta\omega)$ представляет собой частотную характеристику квантового перехода. График зависимости $K(\Delta\omega)$ изображен на рис. 15.2.

Итак, наличие спонтанного излучения приводит к тому, что спектральная линия расширяется. Взаимодействие поля с частицей теперь уже наблюдается не на одной частоте, а в некоторой полосе частот. Ширина частотной характеристики $\Delta\Omega_к$ квантового перехода, как обычно, определяется на уровне 0,5 от максимума.

Используя выражение (15.24), легко показать, что в рассматриваемом случае

$$\Delta\Omega_к = \frac{2}{\tau_{mn}}. \qquad (15.25)$$

В диапазоне световых колебаний эта величина имеет порядок $(10^8 — 10^9)$ *рад/сек*.

Спектральная характеристика перехода, изображенная на рис. 15.2, получила наименование лоренцовой линии.

Ширина частотной характеристики, обусловленной спонтанными переходами, называется естественной шириной линии взаимодействия (излучения).

Аналогичное уширение спектральной линии наблюдается при любом другом механизме прерывания взаимодействия поля с частицей, если этот механизм имеет случайный характер с законом, подобным (15.22). Например, такое же уширение возникает вследствие столкновений между частицами. Ширина частотной характеристики в последнем случае может быть рассчитана по формуле (15.24), только вместо τ_{mn} сюда необходимо подставлять время свободного пробега частицы.

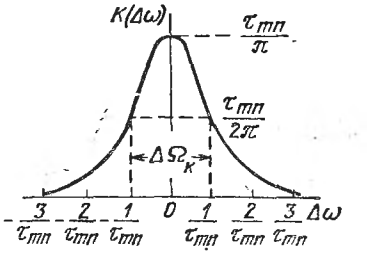


Рис. 15.2. Лоренцова линия

Несколько иной характер имеет расширение спектральной линии квантового перехода вследствие допплеровского эффекта. Это явление наиболее отчетливо наблюдается в газах. Известно, что в газе частицы (атомы или молекулы) непрерывно движутся в различных направлениях со случайными скоростями. При наблюдении индуцированной электромагнитной волны, распространяющейся, например, вдоль оси x, спектральная линия взаимодействия будет смещаться из-за эффекта Допплера на величину

$$\Delta\omega = \frac{\omega_{\text{п}} v_x}{c},$$

где v_x — проекция вектора скорости движения частицы на ось $x (v_x \ll c)$.

Так как распределение скоростей частиц в газе при температуре T подчиняется закону $e^{-\frac{v_x^2 m}{2kT}}$, частотная характеристика квантового перехода в этом случае принимает вид

$$K(\Delta\omega) = K_0 e^{-\frac{m^2 c}{2kT}\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_{\text{п}}}\right)^2},$$

здесь m — масса частицы; k — постоянная Больцмана.

Ширина линии взаимодействия на уровне 0,5 K_0 получается равной

$$\Delta\Omega_{\text{к}} = \omega_{\text{п}} \sqrt{\frac{2kT}{mc^2} \ln 2}. \qquad (15.26)$$

Итак, спектральные линии квантовых переходов всегда имеют конечную ширину. Относительная ширина линии $\Delta\Omega_к/\omega_0$ при этом, как правило, оказывается небольшой. Следовательно, взаимодействие поля с частицей в большинстве случаев имеет резонансный характер.

Приведем в качестве примера данные о ширине спектральной линии аммиака — газа, находящего применение в современной радиоэлектронике для генерирования электромагнитных колебаний в диапазоне сверхвысоких частот. Известно, что молекула аммиака имеет спектральную линию на частоте $f_п = 24\,000$ *Мгц* (разумеется, речь идет об одной из спектральных линий молекулы). Естественная ширина линии, обусловленная спонтанным излучением, на такой частоте оказывается равной приблизительно 1 *гц*. Эффект Допплера при $T = 300°$ К расширяет эту линию до 70 *кгц*. Наконец, наличие столкновений между молекулами приводит к тому, что при давлении 0,27 *мм рт. ст.* ширина ее становится равной 10 *Мгц*.

8. Электромагнитное поле и частицы в состоянии термодинамического равновесия

Рассмотрим совокупность частиц в некотором объеме, находящихся в состоянии термодинамического равновесия с окружающей средой.

Известно, что частицы, образующие равновесную систему, при одной и той же температуре могут обладать разными значениями энергии. Если данная система имеет дискретный энергетический спектр, то различные частицы соответственно будут располагаться на разных энергетических уровнях. Однако распределение их по уровням оказывается неравномерным. Оно, как уже отмечалось выше, удовлетворяет статистике Больцмана. Согласно этой статистике наиболее вероятное число частиц, находящихся на i-м энергетическом уровне при температуре T равно

$$N_i = N\frac{e^{-W_i/kT}}{\sum\limits_{\nu=1}^{M} e^{-W_\nu/kT}};\quad i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ M, \tag{15.27}$$

где N — общее число частиц в заданном объеме (или единице объема); M — число энергетических уровней; $\sum\limits_{\nu=1}^{M} e^{-W_\nu/kT}$ — нормирующая постоянная.

На рис. 15.3 изображен график, иллюстрирующий распределение частиц по уровням в соответствии с выражением (15.25).

Из графика видно, что чем выше энергетический уровень, тем меньше его населенность (тем меньшее количество частиц на нем находится).

Выделим из множества энергетических уровней, характеризующих исходную систему, два: W_m и W_n, где $W_m > W_n$.

Пусть эта система в момент времени $t = 0$ начинает взаимодействовать с электромагнитным полем, частота колебаний ω которого достаточно близка или равна частоте квантового перехода $\omega_п = (W_m - W_n)/h$. (Естественно, здесь мы полагаем, что между уровнями W_m и W_n возможны квантовые переходы.)

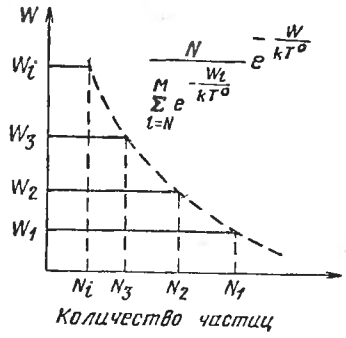


Рис. 15.3. Населенности электрических уровней системы и состоянии термодинамического равновесия.

Взаимодействуя с полем, частицы, находящиеся на n-м (нижнем) уровне, будут переходить на m-й (верхний) уровень, поглощая электромагнитную энергию, а частицы с m-го уровня — переселяться на n-й уровень, излучая энергию. Следовательно, с течением времени число частиц на верхнем и нижнем энергетических уровнях будет меняться, и система выходит из состояния равновесия.

Пусть при $t = 0$ в единице рассматриваемого объема имеется N_{m0} частиц с энергией W_m и N_{n0} частиц с энергией W_n. Тогда для любого $t > 0$ мы можем написать:

$$N_m(t) = N_{m0} - N_{m0} P_{mn}(t) + N_{n0} P_{nm}(t),$$
$$N_n(t) = N_{n0} - N_{n0} P_{nm}(t) + N_{m0} P_{mn}(t).$$

где $P_{mn}(t)$ и $P_{nm}(t)$ — вероятности квантовых переходов за время $\tau = t$, причем $P_{mn}(t) = P_{nm}(t)$.

Количество энергии поля, поглощаемое частицей при переходе на верхний уровень, как известно, равно $h\omega$. Если в момент t на нижнем уровне находится $N_n(t)$ частиц, то общая энергия, поглощаемая этими частицами, равна

$$W_1(t) = N_n(t)\, h\omega P_{nm}(t).$$

Подставляя сюда значение $N_n(t)$, получим

$$W_1(t) = [N_{n0} - N_{n0} P_{nm}(t)]\, h\omega P_{nm}(t) + N_{m0}\, h\omega P_{mn}(t)\, P_{nm}(t).$$

В случае электродипольного взаимодействия вероятности квантовых переходов определяются равенством (15.10). Так как обычно

$P_{mn}(t)=P_{nm}(t)\ll 1$, то $W_1(t)\approx N_{n0}\,h\omega P_{nm}(t)$, или с учетом (15.2)

$$W_1(t)\approx N_{n0}\,h\omega\left|\frac{\bar{d}_{mn}\bar{E}_0}{h}\right|^2\frac{\sin^2\frac{\Delta\omega}{2}\,t}{(\Delta\omega)^2},$$

где $\Delta\omega=|\omega-\omega_n|$.

Мгновенная мощность, поглощаемая частицами в единице объема,

$$p_1(t)=\frac{dW_1(t)}{dt}\approx N_{n0}\,h\omega\,\frac{dP_{nm}(t)}{dt}=$$

$$=\frac{1}{2}\,N_{n0}\left|\frac{\bar{d}_{mn}\bar{E}_0}{h}\right|h\omega\,\frac{\sin(\Delta\omega t)}{\Delta\omega}. \qquad (15.28)$$

Аналогичным образом определяется мгновенная мощность $p_2(t)$, излучаемая частицами, переходящими на нижний уровень: $p_2(t)\approx N_{m0}\,h\omega_n\,dP_{mn}(t)/dt$. Учитывая, что $\omega\approx\omega_n$, получим

$$p_2(t)\approx\frac{1}{2}\,N_{m0}\left|\frac{\bar{d}_{mn}\bar{E}_0}{h}\right|^2 h\omega\,\frac{\sin(\Delta\omega t)}{\Delta\omega} \qquad (15.29)$$

Так как продолжительность взаимодействия поля с частицами есть величина случайная, выражения (15.28) и (15.29) необходимо усреднить подобно тому, как это было сделано в предыдущем параграфе при расчете средней вероятности квантового перехода. Повторяя проведенные там рассуждения, находим:

$$\widetilde{P}_1=\int_0^\infty p_1(t)\,\frac{1}{\tau_0}\,e^{-\frac{t}{\tau_0}}\,dt\approx\frac{1}{2}\,N_{n0}\left|\frac{\bar{d}_{mn}\bar{E}_0}{h}\right|^2 h\omega\,\frac{1}{\Delta\omega\tau_0}\times$$

$$\times\int_0^\infty\sin(\Delta\omega t)\,e^{-\frac{t}{\tau_0}}\,dt=\frac{\pi}{2}\,N_{n0}\left|\frac{\bar{d}_{mn}\bar{E}_0}{h}\right|^2 h\omega K(\Delta\omega), \qquad (15.30)$$

$$\widetilde{P}_2=\int_0^\infty p_2(t)\,\frac{1}{\tau}\,e^{-\frac{t}{\tau_0}}\,dt\approx\frac{\pi}{2}\,N_{m0}\left|\frac{\bar{d}_{mn}\bar{E}_0}{h}\right|^2\times$$

$$\times\,h\omega K(\Delta\omega). \qquad (15.31)$$

Здесь τ_0 — средняя продолжительность жизни частицы в исходном состоянии *);

$$K(\Delta\omega)=\frac{\frac{1}{\pi\tau_0}}{(\Delta\omega)^2+\frac{1}{\tau_0^2}}.$$

*) Полагается, что значения τ_0 для верхнего и нижнего уровней одинаковы.

Но по условию $N_{n0} > N_{m0}$, ибо $W_n < W_m$. Следовательно, мощность поглощения в единице объема превышает мощность индуцированного излучения. Иными словами, система первоначально находящаяся в состоянии термодинамического равновесия, поглощает энергию электромагнитного поля. Величина поглощаемой мощности равна

$$P_{\text{погл}} = \widetilde{P}_1 - \widetilde{P}_2 \approx \frac{\pi}{2}(N_{n0} - N_{m0}) \left| \frac{\bar{d}_{mn}\bar{E}_0}{h} \right|^2 h\omega K(\Delta\omega). \qquad (15.32)$$

За счет этой мощности система и удерживается в неравновесном состоянии. Полученную формулу можно представить в виде

$$P_{\text{погл}} \approx (N_{n0} - N_{m0})\, h\omega \widetilde{p}_{nm},$$

где $\widetilde{p}_{nm}$ — вероятность (усредненная) квантового перехода за единицу времени. В нашем случае она равна

$$\widetilde{p}_{nm} = \frac{\pi}{2} \left| \frac{\bar{d}_{mn}\bar{E}_0}{h} \right|^2 K(\Delta\omega). \qquad (15.33)$$

Из выражения (15.32) видно, что поглощение энергии электромагнитного поля совокупностью частиц имеет резонансный характер; величина поглощаемой мощности достигает максимума на частоте квантового перехода, т. е. когда $\Delta\omega = \omega - \omega_{\text{п}} = 0$.

Согласно вышеизложенному конечное распределение частиц по уровням будет отличаться от больцмановского распределения, существовавшего до начала взаимодействия. Однако, если такую неравновесную систему в дальнейшем предоставить самой себе, она, естественно, будет стремиться вернуться в равновесное состояние.

Процессы возврата системы в исходное состояние равновесия получили наименование р е л а к с а ц и о н н ы х *). Они приводят к тому, что частицы, находящиеся в избыточном количестве на верхних энергетических уровнях, переходят на более низкие уровни, причем подобные переходы, как правило, не сопровождаются излучением. Высвобождающаяся при этом энергия передается среде, окружающей частицы.

К числу релаксационных процессов в веществе относятся: столкновения между частицами, взаимодействие частиц с кристаллической решеткой, электрическое и магнитное взаимодействие между самими частицами и т. п.

Во многих случаях релаксационные процессы развиваются по экспоненциальному закону e^{-t/τ_p} и, следовательно, характеризуются временем релаксации τ_p. В более сложных случаях законы релаксации можно представить в виде линейной комбинации экспоненциальных функций с различными значениями τ_p.

*) Слово «релаксация» в переводе с латинского языка означает «высвобождение».

Разумеется, релаксационные явления протекают в веществе и во время взаимодействия поля с частицами, прерывая его в какие-то моменты. Стало быть, они вызывают уширение спектральных линий квантовых переходов (о чем уже достаточно подробно говорилось в предыдущем параграфе).

9. Возможность усиления и генерирования электромагнитных колебаний квантовыми системами

Предположим, что ансамбль частиц, с которыми взаимодействует волна, не находится в равновесном состоянии. В частности, будем полагать, что населенность верхнего энергетического уровня выше населенности нижнего уровня, т. е. $N_{m0} > N_{n0}$.

Если частота колебаний поля по-прежнему равна или близка к частоте квантового перехода $\omega_{п}$, то при взаимодействии волны с такой неравновесной системой индуцированное излучение будет преобладать над поглощением. А это значит, что система в целом не поглощает, а выделяет какое-то количество энергии на частоте колебаний электромагнитного поля. В самом деле, из выражений (15.30) и (15.31) видно, что средняя мощность индуцированного излучения при условии $N_{m0} > N_{n0}$ превышает мощность поглощения в единице объема. Величина средней мощности, которую квантовая система отдает электромагнитному полю, равна

$$P_{изл} = \tilde{P}_2 - \tilde{P}_1 \approx (N_{m0} - N_{n0})\, h\omega\, \tilde{p}_{mn} =$$

$$= \frac{\pi}{2} (N_{m0} - N_{n0}) \left| \frac{\bar{d}_{nm} \bar{E}_0}{h} \right|^2 h\omega K(\Delta\omega). \qquad (15.34)$$

Отсюда вытекает принципиальная возможность использования подобных неравновесных квантовых систем для усиления и даже генерирования электромагнитных колебаний.

В обычных условиях (когда внешнее воздействие отсутствует) квантовая система находится в состоянии термодинамического равновесия и, следовательно, не может быть непосредственно использована для усиления (или генерирования) колебаний. Чтобы превратить такую систему в усилитель (генератор), необходимо изменить начальные равновесные населенности энергетических уровней или, по-иному говоря, осуществить возбуждение квантовой системы. В результате должно быть получено неравновесное состояние с населенностью верхнего энергетического уровня, превышающей населенность нижнего уровня.

Идея использования квантовых систем для усиления электромагнитных колебаний впервые была выдвинута в Советском Союзе Фабрикантом, Вудынским и Бутаевой в 1951 г.

Принципы построения квантовых генераторов и усилителей детально исследовали советские ученые Н. Г. Басов и А. М. Прохоров в 1951—1954 гг. В 1954 г. они создали первый квантовый генератор на пучке молекул аммиака, генерирующий электромагнитные колебания с частотой, примерно равной 24 000 *Мгц*. Аналогичный генератор в США построили Гордон, Цайгер и Таунс также в 1954 г.

За выдающиеся исследования в области квантовых систем и создание первого квантового генератора Н. Г. Басов и А. М. Прохоров в 1958 г. были удостоены звания лауреатов Ленинской премии. В 1964 г. они вместе с Ч. Таунсом были награждены Нобелевской премией.

В 1957 г. был создан квантовый усилитель электромагнитных колебаний сверхвысоких частот, использующий парамагнитное вещество в постоянном магнитном поле — так называемый «м а з е р». Наименование этого усилителя произошло от начальных букв английских слов «microwave amplification by stimulated emission of radiation», что в русском переводе означает «усиление микроволн путем индуцированного излучения».

В 1960 г. Мейман в США на основе теоретических исследований Таунса и Шавлова построил оптический квантовый генератор (ОКГ), создающий когерентные световые колебания в виде кратковременных импульсов. В 1961 г. появляется первый ОКГ непрерывного действия. Оптический квантовый генератор получил также и другое наименование — «л а з е р». По смыслу и происхождению это слово аналогично «мазеру». Только буква «м» здесь заменена на «л» — начальную букву английского слова light — свет. Стало быть, термин «лазер» в переводе означает прибор для усиления гармонических световых колебаний. Однако на практике такой прибор, как правило, работает в качестве генератора световых колебаний.

Таким образом, в последние годы зародилась и стала быстро развиваться новая отрасль науки — к в а н т о в а я р а д и о э л е к т р о н и к а.

10. Возбуждение квантовых систем. Двухуровневые квантовые устройства

В современных квантовых устройствах применяются различные методы возбуждения частиц.

Принципиально для возбуждения квантовых систем достаточно изменить населенности только тех двух уровней, которые предназначены для получения индуцированного излучения на частоте усиливаемых или генерируемых колебаний. Населенности других уровней при этом могут оставаться неизменными. Устройства, работающие подобным образом, получили наименование д в у х у р о в н е в ы х.

На практике часто в целях возбуждения системы изменяют населенности не двух, а трех энергетических уровней. В результате два из них могут быть приведены в неравновесное по населенности состояние и, следовательно, могут быть использованы для усиления или генерирования колебаний. Устройства такого типа и соответствующие методы возбуждения называются трехуровневыми.

В этом параграфе мы познакомимся с некоторыми способами возбуждения двухуровневых квантовых систем. Трехуровневый метод возбуждения будет изложен в следующем параграфе.

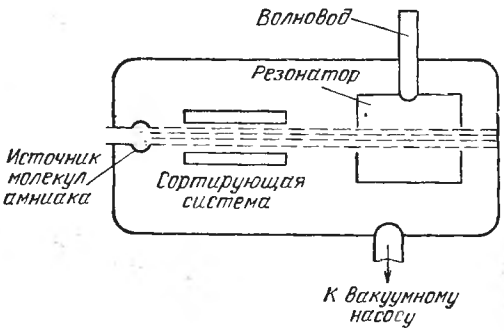


Рис. 15.4. Схематическое устройство квантового генератора на аммиаке.

В двухуровневых устройствах процесссы возбуждения и усиления (генерирования) колебаний, очевидно, должны быть разделены во времени или в пространстве. При временном разделении процессов устройство в непрерывном режиме функционировать не может. Возбуждение частиц в нем осуществляется импульсами, и только в промежутках между ними происходит усиление или генерирование колебаний. В случае пространственного разделения возможна работа в непрерывном режиме.

Примером устройства с пространственным разделением процессов может служить квантовый генератор на пучке молекул аммиака. Схематически этот генератор изображен на рис. 15.4. В состав генератора входят: источник молекул, сортирующая система, резонатор, а также другие элементы, обеспечивающие необходимые условия для работы устройства.

Принцип действия генератора состоит в следующем. Молекулы аммиака, как известно, имеют различные энергетические уровни и соответственно могут совершать различные квантовые переходы. В рассматриваемом устройстве используются два уровня с частотой квантового перехода 24 000 *Мгц*, или, точнее, 23870,14 *Мгц*.

Пучок молекул, находящихся в равновесном состоянии, из источника направляется в сортирующую систему. Последняя осуще-

ствляет выделение молекул, находящихся на верхнем энергетическом уровне, которые в небольшом количестве содержатся во входном пучке. Для этого в сортирующей системе применяется неоднородное электростатическое поле, создаваемое так называемым квадрупольным конденсатором, т. е. конденсатором, имеющим четыре электрода (рис. 15.5).

Известно, что электрическое поле при воздействии на частицы вызывает смещение их энергетических уровней. Подобное явление в физике получило наименование штарк-эффекта. У молекул аммиака штарк-эффект, в частности, проявляется в том, что под действием электрического поля «расстояние» между упомяну-

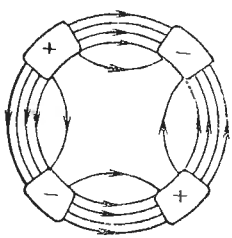


Рис. 15.5. Квадрупольный конденсатор.

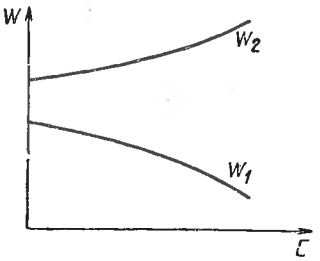


Рис. 15.6. К рассмотрению штарк-эффекта в молекуле аммиака.

тыми энергетическими уровнями увеличивается: с ростом напряженности электрического поля E верхний уровень W_2 еще более повышается, а нижний W_1, наоборот, понижается (рис. 15.6).

Перемещаясь в неоднородном электрическом поле, частицы, естественно, будут стремиться занять положение, в котором их энергия окажется минимальной. В соответствии с этим молекулы, находящиеся на верхнем уровне (возбужденные молекулы, должны смещаться к оси конденсатора, а молекулы, занимающие нижний уровень, — отклоняться к электродам. Действительно, напряженность электрического поля (рис. 15.5) равна нулю на оси конденсатора и возрастает по мере приближения к электродам. Поэтому для частиц, находящихся на верхнем уровне минимум, энергии получается на оси, а для частиц, занимающих нижний уровень — вблизи электродов конденсатора.

Таким образом, в сортирующей системе молекулы аммиака, расположенные на нижнем энергетическом уровне, отклоняются, а возбужденные молекулы будут двигаться в осевом направлении. В результате на выходе получается пучок частиц, большинство которых находится в возбужденном состоянии. При этом число частиц в выходном пучке по сравнению с их числом на входе уменьшается.

После сортировки молекулы попадают в резонатор, настроенный на частоту квантового перехода. В резонаторе на этой частоте

имеется небольшое по величине электромагнитное поле теплового излучения или поле, возникающее вследствие спонтанного излучения частиц.

При взаимодействии поля с возбужденными частицами происходит индуцированное излучение. Если мощность индуцированного излучения превышает общую мощность потерь, устройство превращается в генератор. Создаваемые им электромагнитные колебания выводятся из резонатора при помощи волновода.

Рассмотрим теперь один из возможных методов возбуждения двухуровневого устройства, использующий временное разделение — так называемый метод импульсной инверсии населенностей.

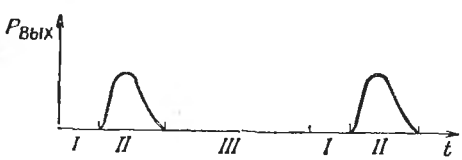


Рис. 15.7. Временна́я диаграмма работы квантового усилителя с импульсной инверсией.

При импульсной инверсии квантовая система, находящаяся в состоянии термодинамического равновесия, подвергается воздействию электромагнитных импульсов с несущей частотой колебаний, равной частоте квантового перехода. Во время такого воздействия частицы с нижнего энергетического уровня переходят на верхний и с верхнего уровня — на нижний. Следовательно, система к какому-то моменту времени будет приведена в возбужденное состояние. Вероятность переходов в данном случае может быть определена по формуле (15.8). Из этой формулы видно, что величина $P_{mn}(\tau)$ достигает максимума, равного единице, если

$$\frac{\tau}{2}\left|\frac{\bar{d}_{nm}\bar{E}_0}{h}\right| = \frac{\pi}{2},$$

т. е. если продолжительность импульса

$$\tau = \frac{\pi h}{|\bar{d}_{nm}\bar{E}_0|}.$$

Для эффективного осуществления инверсии необходимо, чтобы продолжительность импульса была меньше времени релаксации. В противном случае изменение населенностей будет неполным, ибо за время воздействия некоторые частицы успеют вернуться в исходное энергетическое состояние.

После того как система будет приведена в возбужденное состояние, ее можно использовать для усиления или генерирования импульсных электромагнитных колебаний.

На рис. 15.7 изображена временна́я диаграмма, иллюстрирующая работу подобного устройства. По оси абсцисс здесь отложено время, а по оси ординат — мощность выходных колебаний. Интервалы времени, соответствующие периодам инверсии, обозначены цифрами *I*. Интервалы *II* соответствуют рабочим промежуткам, в течение которых происходит усиление импульсных колебаний, и, наконец, интервалы *III* характеризуют промежутки между импульсами. Из рисунка видно, что мощность выходных колебаний на протяжении рабочего периода не остается постоянной. Изменение ее обусловлено уменьшением населенности верхнего уровня за время взаимодействия с усиливаемыми колебаниями вследствие релаксационных процессов и спонтанного излучения.

11. Трехуровневый метод возбуждения

Трехуровневый метод возбуждения квантовых систем впервые был предложен в Советском Союзе Н. Г. Басовым и А. М. Прохоровым. Основы теории его впоследствии были развиты Блумбергеном (США).

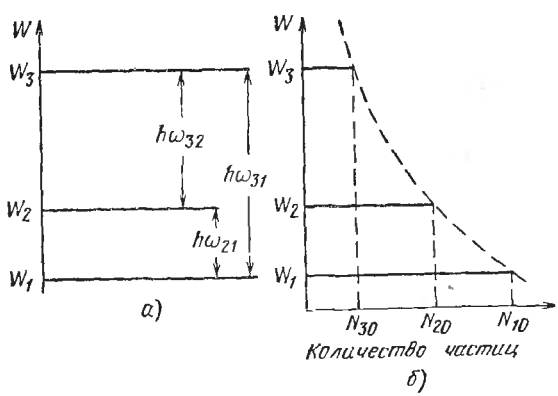


Рис. 15.8. К анализу трехуровневого метода возбуждения:
а — используемые уровни; *б* — населенности уровней в равновесном состоянии.

Рассмотрим сущность этого метода. Пусть в энергетическом спектре квантовой системы имеется три нужных нам уровня W_1, W_2 и W_3, причем $W_1 < W_2 < W_3$ (рис. 15.8, *а*). В состоянии термодинамического равновесия населенности этих уровней (в единице объема) равны соответственно N_{10}, N_{20} и N_{30} (рис. 15.8, *б*). Между

всеми тремя уровнями возможны квантовые переходы, которым соответствуют частоты

$$\omega_{21}=\frac{W_2-W_1}{h};\quad \omega_{31}=\frac{W_3-W_1}{h};\quad \omega_{32}=\frac{W_3-W_2}{h}.$$

Предположим, что данная квантовая система взаимодействует с достаточно интенсивным электромагнитным полем, частота колебаний которого равна ω_{31}. В дальнейшем будем называть его полем накачки. В равновесном состоянии система, естественно, поглощает электромагнитную энергию, так как $N_{30}<N_{10}$. В результате поглощения энергии населенность нижнего уровня должна уменьшаться, а верхнего — расти. Подобный процесс будет развиваться до тех пор, пока населенности этих уровней не станут одинаковыми, т. е. пока не наступит так называемое насыщение верхнего уровня.

В состоянии насыщения населенность верхнего уровня W_3 может оказаться больше населенности промежуточного уровня W_2. Определим условия, при которых подобное состояние может иметь место.

В отсутствие поля накачки населенности всех трех уровней связаны между собой соотношениями:

$$\frac{N_{30}}{N_{10}}=e^{-\frac{W_3-W_1}{kT}}\quad\text{и}\quad\frac{N_{20}}{N_{10}}=e^{-\frac{W_2-W_1}{kT}}$$

[см. формулу (15.27)]. Отсюда следует, что

$$N_{20}=N_{10}e^{-\frac{W_2-W_1}{kT}}\quad\text{и}\quad N_{30}=N_{10}e^{-\frac{W_3-W_1}{kT}}.$$

Полагая для простоты рассуждений, что $W_3-W_1\ll kT$ и $W_2-W_1\ll kT$, разложим экспоненциальные функции в степенные ряды и ограничимся двумя первыми членами разложений. В результате получим:

$$\left.\begin{aligned}N_{20}&\approx N_{10}\left(1-\frac{W_2-W_1}{kT}\right)=N_{10}\left(1-\frac{\Delta W}{kT}\right),\\ N_{30}&\approx N_{10}\left(1-\frac{W_3-W_1}{kT}\right)=N_{10}\left(1-\alpha\frac{\Delta W}{kT}\right),\end{aligned}\right\}\qquad(15.35)$$

где $\Delta W=W_2-W_1$ и $\alpha=\dfrac{W_3-W_1}{W_2-W_1}$ — величина порядка нескольких единиц.

В состоянии насыщения новые населенности нижнего $N_{1н}$ и верхнего $N_{3н}$ уровней будут, как уже отмечалось выше, одинаковы

$$N_{1н}=N_{10}-\Delta N=N_{3н}=N_{30}+\Delta N.\qquad(15.36)$$

Здесь ΔN — число частиц, переходящих с нижнего уровня на верхний. Из выражений (15.35) и (15.36) получается, что

$$\Delta N = \frac{N_{10} - N_{30}}{2} \approx \frac{1}{2} \alpha \frac{\Delta W}{kT} N_{10}.$$

Следовательно,

$$N_{3н} = N_{1н} = N_{10} \left(1 - \frac{1}{2} \alpha \frac{\Delta W}{kT} \right).$$

Населенность промежуточного уровня W_2 при взаимодействии с полем накачки (без учета релаксационных процессов) можно считать неизменной

$$N_{2н} \approx N_{20} = N_{10} \left(1 - \frac{\Delta W}{kT} \right).$$

Сравнивая значения $N_{3н}$ и $N_{2н}$, нетрудно заметить, что $N_{3н}$ получается больше $N_{2н}$, если $\frac{1}{2}\alpha < 1$, т. е. $\alpha < 2$. Последнее неравенство эквивалентно условию

$$\frac{W_3 - W_1}{W_2 - W_1} < 2$$

или

$$\frac{W_3 + W_1}{2} < W_2.$$

Следовательно, на спектральной диаграмме невозбужденной квантовой системы линия $(W_1 + W_3)/2$ должна располагаться ниже

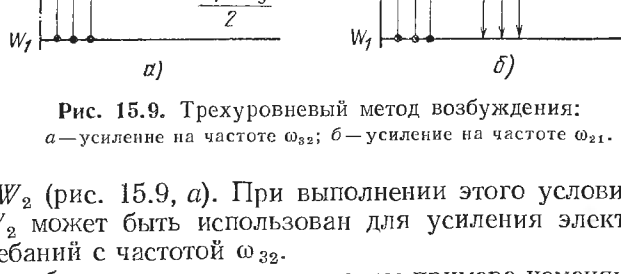


Рис. 15.9. Трехуровневый метод возбуждения:
а — усиление на частоте ω_{32}; *б* — усиление на частоте ω_{21}.

уровня W_2 (рис. 15.9, *а*). При выполнении этого условия переход $W_3 \rightarrow W_2$ может быть использован для усиления электромагнитных колебаний с частотой ω_{32}.

Таким образом, в рассматриваемом примере изменяются населенности уровней W_1 и W_3, а для усиления или генерирования колебаний используются уровни W_3 и W_2.

Усиление, оказывается, можно осуществить и на переходе $W_2 \rightarrow W_1$. Разумеется, частота усиливаемых колебаний при этом должна быть равна ω_{21}. Только теперь в отличие от предыдущего случая линия $(W_1 + W_3)/2$ на диаграмме уровней должна располагаться выше линии W_2 (рис. 15.9, *б*). При выполнении этого требования населенность уровня W_2 возбужденной системы будет превышать населенность уровня W_1.

Трехуровневый метод возбуждения находит широкое практическое применение в квантовых усилителях — мазерах. Устройства аналогичного типа, очевидно, могут работать и в импульсном, и в непрерывном режиме. Однако они требуют, как это видно из изложенного, дополнительного источника электромагнитных колебаний накачки.

В заключение следует указать, что рассмотренные выше методы, конечно, не исчерпывают всех возможных методов возбуждения квантовых систем, используемых в квантовых усилителях и генераторах.

12. Принцип действия лазера

В состав любого квантового генератора должна входить так называемая активная среда (рабочее вещество), которая может быть приведена в возбужденное состояние. Другой неотъемлемой частью генератора является колебательная система. Именно в ней возникают электромагнитные колебания, взаимодействующие с рабочим веществом. Наконец, квантовый генератор должен иметь устройство для возбуждения активной среды.

В современных лазерах находят применение различные виды активных сред. Так, например, в некоторых лазерах используются твердые вещества (лазеры на твердом теле), в других применяются инертные или какие-либо другие газы (газовые лазеры) и т. д.

В первом лазере, построенном в 1960 г., в качестве рабочего вещества были использованы кристаллы розового рубина. По химическому составу розовый рубин представляет собой окись алюминия с небольшой примесью хрома (около 0,05%). В явлениях, обеспечивающих генерирование световых колебаний, активное участие принимают только атомы (или, точнее говоря, ионы) хрома.

Познакомимся с принципом действия лазера на рубине. На рис. 15.10 изображена упрощенная диаграмма энергетических уровней розового рубина. Характерной особенностью ее является наличие двух широких (заштрихованных) полос поглощения зеленого ($\lambda = 5600$ Å) и синего ($\lambda = 4100$ Å) света.

Установлено, что если кристаллы рубина облучать светом, содержащим зеленую и синюю составляющие, то атомы хрома, находящиеся на нижнем (основном) энергетическом уровне, будут со-

вершать вынужденные переходы на верхние уровни, в заштрихованные полосы, поглощая энергию зеленых и синих световых колебаний. Практически рубин приводится в возбужденное состояние за счет света, содержащего «зеленую» спектральную составляющую.

Обратный переход значительной части возбужденных ионов хрома на нижний энергетический уровень осуществляется двумя последовательными этапами. Сначала ионы без какого-либо излучения переходят на промежуточный метастабильный уровень, отдавая избыток энергии кристаллической решетке. На этом уровне частицы в отсутствие воздействия внешнего поля могут находиться в течение нескольких миллисекунд, а затем переходят на нижний

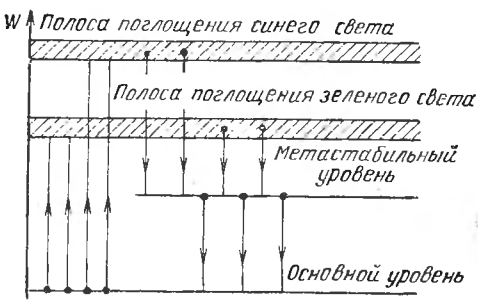


Рис. 15.10. Упрощенная диаграмма энергетических уровней розового рубина.

уровень, излучая красный свет ($\lambda = 6943$ Å). Подобное излучение представляет собой красную флюоресценцию кристаллов рубина. Оно не является монохроматическим, так как переходы частиц происходят самопроизвольно, в случайные моменты времени.

Иная картина будет наблюдаться, если возбужденный рубиновый элемент поместить в объемный резонатор, настроенный на волну $\lambda = 6943$ Å. В этом случае любой самопроизвольный переход хотя бы одного из ионов хрома на нижний уровень приводит к появлению в резонаторе электромагнитных колебаний на заданной волне. Последние, взаимодействуя с ионами, находящимися на метастабильном уровне, вызывают индуцированное излучение. Следовательно, поле в резонаторе становится более интенсивным. А это, в свою очередь, влечет за собой усиление интенсивности вынужденных квантовых переходов, причем большинство частиц будет совершать их почти одновременно. В конце концов в системе при определенных условиях могут возникнуть когерентные световые колебания. Процесс установления колебаний, естественно, развивается очень быстро.

Таким образом, резонатор здесь не только выполняет функции колебательной системы, но и создает еще своеобразную обратную связь, обеспечивающую нарастание колебаний, или, как говорят, самовозбуждение системы. Следует, однако, иметь в виду, что рассмотренные процессы возможны лишь в том случае, когда источник

колебаний накачки передает рубину достаточное количество энергии возбуждения.

В оптическом диапазоне волн в качестве колебательных систем, как известно, применяются открытые резонаторы (см. гл. XIII).

Рубиновый элемент лазера обычно имеет вид цилиндрического стерженька диаметром около одного сантиметра и длиной 10—20 *см*. Плоские торцевые поверхности такого элемента часто покрываются серебром и используются в качестве отражающих пластин. В результате получается открытый резонатор с плоскими зеркалами, заполненный активной средой (рис. 15.11). Одно из зеркал выполняется полупрозрачным с коэффициентом отражения около

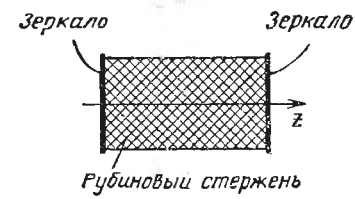


Рис. 15.11. Открытый резонатор с активной средой.

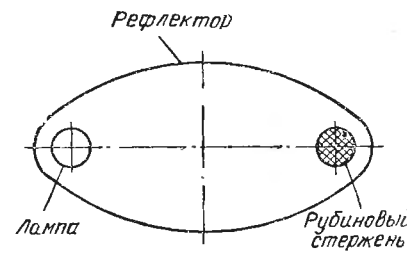


Рис. 15.12. Устройство для возбуждения активной среды в лазере на рубине.

0,98. Поэтому часть электромагнитного поля, создаваемого лазером, излучается через такое зеркало во внешнее пространство в виде узкого луча. Иногда зеркала, образующие резонатор, делаются выносными, а торцевые поверхности рубинового элемента просто полируются.

При изготовлении открытого резонатора подобного типа особое внимание, как уже говорилось ранее, обращается на параллельность пластин, ибо отсутствие параллельности увеличивает дифракционные потери и может привести к срыву колебаний в лазере.

В качестве источника энергии накачки в большинстве случаев используется газоразрядная лампа с рефлектором, излучающая белый свет импульсами малой продолжительности. Если лампа имеет цилиндрическую форму, то целесообразно применить рефлектор в виде эллиптического цилиндра. В одной из фокальных осей такого рефлектора располагается лампа, а в другой — рубиновый стержень (рис. 15.12). Благодаря этому световой поток, отраженный от поверхности рефлектора, будет фокусироваться в точках, где находится рабочее вещество. Под воздействием световой вспышки рубиновый элемент приводится в возбужденное состояние, и лазер испускает импульс когерентного красного света малой продолжительности (около 1 *мксек*).

Таким образом, в рассматриваемом лазере происходит преобразование энергии широкополосных световых колебаний накачки

в энергию колебаний с весьма узким частотным спектром. Чтобы подобное преобразование было достаточно эффективным, энергетический спектр активного вещества должен иметь широкие полосы поглощения. К сожалению, при облучении рубинового элемента белым светом значительная часть световой энергии расходуется на тепло, и лишь небольшая часть ее идет на возбуждение ионов хрома. Поэтому к. п. д. подобного преобразования получается весьма низким. Для рубинового лазера, работающего в обычных условиях, отношение полезной мощности, излучаемой в пространство, к мощности, отдаваемой источником накачки, составляет всего лишь несколько десятых процента.

Однако лазер как генератор электромагнитных колебаний обладает рядом положительных особенностей. Большим достоинством его является способность излучать электромагнитные (световые) волны в виде чрезвычайно узкого луча. Если полагать, что распределение поля на поверхности полупрозрачного зеркала в лазере равномерно, то ширина главного лепестка диаграммы направленности такой антенны, как вытекает из формулы (8.109), будет равна

$$2\theta_0 = \frac{1{,}22\lambda}{a}, \qquad (15.37)$$

где a — радиус рубинового стержня, равный радиусу излучающей поверхности.

Пусть, например, радиус стержня $a = 0{,}5$ *см*. Тогда из формулы (15.37) следует, что на волне $\lambda = 6943$ Å $= 0{,}6943$ *мк* ширина луча

$$2\theta_0 = 2{,}44 \cdot 0{,}6943 \cdot 10^{-4} = 1{,}695 \cdot 10^{-4} \text{ рад} \approx 0{,}01^\circ \text{ *)}.$$

Таким образом, оптический квантовый генератор позволяет осуществить весьма высокую концентрацию электромагнитной энергии в пространстве. Вместе с тем он обеспечивает и высокую концентрацию энергии по частоте. Так, например, лазер может создавать поток излучения в несколько киловатт и даже несколько мегаватт на один квадратный сантиметр в сравнительно узкой полосе частот. Любопытно, что солнце в зеленой части спектра, т. е. там, где его светоотдача максимальна, с каждого квадратного сантиметра поверхности излучает всего лишь 0,0001 *вт* на 1 *Мгц*.

13. Условие самовозбуждения лазера

Из теории объемных резонаторов вытекает, что в режиме собственных колебаний комплексные векторы напряженности электри-

---

*) В действительности распределение поля на излучающей поверхности оказывается неравномерным, и луч, формируемый лазером, получается более широким.

ческого и магнитного полей имеют вид

$$\vec{E}_{\text{к}} = \dot{\vec{E}}_{\nu} e^{i\omega_{\nu} t} e^{-\alpha_{\nu} t},$$

$$\vec{H}_{\text{к}} = \dot{\vec{H}}_{\nu} e^{i\omega_{\nu} t} e^{-\alpha_{\nu} t}.$$

Коэффициент затухания α_{ν} колебаний ν-го типа, как известно, связан с добротностью Q_{ν} резонатора соотношением

$$\alpha_{\nu} = \frac{\omega_{\nu}}{2Q_{\nu}},$$

а последняя, в свою очередь, равна

$$Q_{\nu} = \omega_{\nu} \frac{W_{\nu}}{P_{\nu}}.$$

Напомним, что здесь W_{ν} — энергия, запасенная в резонаторе, а P_{ν} — средняя мощность потерь.

Подставляя в формулу для α_{ν} значение Q_{ν}, можно написать, что

$$\alpha_{\nu} = \frac{P_{\nu}}{2W_{\nu}}.$$

Таким образом, изменение амплитуд собственных колебаний резонатора во времени характеризуется множителем

$$e^{-\alpha_{\nu} t} = e^{-\frac{P_{\nu}}{2W_{\nu}} t}.$$

Если $\alpha_{\nu} > 0$, то амплитуды колебаний убывают по экспоненциальному закону; при $\alpha_{\nu} < 0$, наоборот, происходит нарастание амплитуд колебаний.

Но условие $\alpha_{\nu} < 0$ может быть выполнено лишь в том случае, когда мощность потерь P_{ν} в резонаторе имеет отрицательный знак. Физически это означает, что в колебательной системе должен присутствовать элемент, который не поглощает энергию, а отдает ее, т. е. является источником энергии на частоте колебаний.

Функции подобного источника в резонаторе лазера, а также в резонаторе любого другого квантового генератора, выполняет возбужденная активная среда. При наличии возбужденной среды средняя мощность, «теряемая» резонатором, равна

$$P_{\nu} = P_{\text{п}} - P_{\text{изл}}.$$

Здесь $P_{\text{п}}$ — мощность потерь (сюда же входит и полезная мощность, испускаемая лазером в окружающее пространство); $P_{\text{изл}}$ — мощность, излучаемая в резонатор активной средой. При $P_{\text{п}} < P_{\text{изл}}$ величина $P_{\nu} < 0$.

Итак, колебания, возникающие в лазере, с течением времени будут нарастать, если

$$P_{\text{изл}} > P_{\text{п}}. \tag{15.38}$$

Это неравенство можно назвать условием самовозбуждения лазера.

Величина мощности, излучаемая единицей объема активной среды при взаимодействии с монохроматическим электромагнитным полем, определяется формулой (15.34).

В резонаторе лазера «начальное» поле, возникающее в результате спонтанных переходов или теплового излучения, может быть поляризовано относительно эквивалентных электрических диполей частиц произвольным образом. В связи с этим в формулу (15.34) необходимо ввести дополнительный множитель $^1/_3$ (см. аналогичные рассуждения в § 5). Этот множитель можно также получить, если в (15.34) вычислить среднее (в пределах полного телесного угла) значение $|\bar{d}_{nm}\bar{E}_0|^2 = |d_{nm}E_0|^2\cos^2\alpha$, где α — угол между векторами $\bar{d}_{nm}$ и $\bar{E}_0$. В самом деле,

$$\overbrace{(\cos^2\alpha)} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{4\pi}\cos^2\alpha\, d\Omega = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\alpha\sin\alpha\, d\alpha\, d\varphi = \frac{1}{3}.$$

Учитывая последнее соотношение, для полной мощности излучения в резонаторе будем иметь

$$P_{\text{изл}} \approx \frac{1}{3}\,\frac{\pi}{2}\,(N_{m0}-N_{n0})\,\frac{|d_{nm}|^2}{h}\,\omega K(\Delta\omega)\int\limits_V E_0^2\, dV. \tag{15.39}$$

Здесь E_0 — амплитуда напряженности электрического поля в резонаторе; V — объем активной среды; N_{m0} и N_{n0} — начальные населенности верхнего и нижнего уровней в единице объема.

Формула (15.39) написана в предположении, что активная среда возбуждается равномерно, и что вследствие этого разность $N_{m0} - N_{n0}$ всюду одинакова.

Величина мощности, теряемой колебательной системой лазера, равна $P = \omega\frac{W}{Q}$ (значок ν мы здесь опускаем). Так как энергия, запасенная в резонаторе

$$W = \frac{1}{2}\,\varepsilon\int\limits_V E_0^2\, dV,$$

то

$$P_{\text{п}} = \frac{1}{2}\,\varepsilon\omega\,\frac{1}{Q}\int\limits_V E_0^2\, dV, \tag{15.40}$$

ε — диэлектрическая проницаемость активной среды.

Подставляя выражения (15.39) и (15.40) в неравенство (15.38), получим

$$(N_{m0}-N_{n0})>\frac{3\varepsilon}{\pi}\ \frac{h}{Q\,|\,d_{nm}\,|^2\,K\,(\Delta\omega)}\ .$$

Если собственная частота ω_v резонатора совпадает с частотой квантового перехода ($\Delta\omega = 0$), то в соответствии с (15.24) и (15.25)

$$K\,(\Delta\omega)\,|_{\Delta\omega=0}=\frac{\tau_{mn}}{\pi}=\frac{2}{\pi\Delta\,\Omega_{\text{к}}},$$

где $\Delta\Omega_{\text{к}}$ — ширина частотной характеристики квантового перехода. Следовательно, условие самовозбуждения лазера можно записать в виде

$$(N_{m0}-N_{n0})>\frac{3}{2}\,\varepsilon\,\frac{h\,\Delta\Omega_{\text{к}}}{|\,d_{nm}\,|^2\,Q}\,. \qquad (15.41)$$

Из формулы (15.41) видно, что лазер в принципе может генерировать электромагнитные колебания, если активная среда его находится в достаточно возбужденном состоянии, т. е. если разность между числом частиц на верхнем энергетическом уровне и их числом на нижнем уровне будет превышать некоторое минимально допустимое значение. Последнее оказывается тем больше, чем ниже добротность резонатора и чем шире спектральная линия квантового перехода. Расчеты показывают, что условие (15.41) в реальных системах выполняется без особых затруднений.

При выполнении условия самовозбуждения амплитуды световых колебаний, возникающих в лазере, с течением времени нарастают. Такое нарастание, конечно, происходит не беспредельно. По мере увеличения интенсивности колебаний разность населенностей верхнего и нижнего уровней в активной среде уменьшается. Поэтому в системе либо устанавливается стационарный режим, либо даже происходит уменьшение амплитуд колебаний; в последнем случае колебания за время работы лазера получаются как бы пульсирующими.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Калибровочные преобразования запаздывающих потенциалов

Пусть мы имеем запаздывающие потенциалы $\overline{A}_0$ и U_0 электромагнитного поля в однородной среде.

Известно, что векторы $\overline{E}$ и $\overline{B}$ поля связаны с потенциалами $\overline{A}_0$ и U_0 соотношениями:

$$\overline{E} = -\frac{\partial \overline{A}_0}{\partial t} - \operatorname{grad} U_0; \quad \overline{B} = \operatorname{rot} \overline{A}_0. \tag{П.1}$$

Введем в рассмотрение новые потенциалы $\overline{A}$ и U:

$$\overline{A} = \overline{A}_0 + \operatorname{grad} \Psi,$$
$$U = U_0 - \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \tag{П.2}$$

где Ψ — произвольная функция, зависящая в общем случае от координат точки наблюдения и времени.

Подставляя в правые части равенств (П.1) вместо $\overline{A}_0$ и U_0 значения $\overline{A}$ и U, получим:

$$\overline{E} = -\frac{\partial \overline{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} U = -\frac{\partial \overline{A}_0}{\partial t} - \operatorname{grad} U_0,$$

$$\overline{B} = \operatorname{rot} \overline{A} = \operatorname{rot} \overline{A}_0.$$

Отсюда следует, что векторы $\overline{E}$ и $\overline{B}$ инвариантны относительно преобразования запаздывающих потенциалов по формулам (П.2). Это свойство электромагнитного поля получило наименование **калибровочной инвариантности** поля.

Повторяя рассуждения, проводившиеся в § 2 гл. VIII, мы можем убедиться, что потенциалы $\overline{A}$ и U удовлетворяют уравнениям:

$$\nabla^2 \overline{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \overline{A}}{\partial t^2} - \operatorname{grad}\left(\operatorname{div} \overline{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial U}{\partial t}\right) = -\mu \overline{j}, \tag{П.3}$$

$$\nabla^2 U + \operatorname{div} \frac{\partial \overline{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Потребуем, как и ранее, чтобы $\overline{A}$ и U удовлетворяли условию

$$\operatorname{div}\overline{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial U}{\partial t}=0. \tag{П.4}$$

Подставляя сюда $\overline{A}$ и U из (П.2), получим

$$\operatorname{div}\overline{A}_0+\nabla^2\Psi+\varepsilon\mu\frac{\partial U_0}{\partial t}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=0.$$

Значит, уравнение (П.4) будет справедливо если

$$\nabla^2\Psi-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=-\left(\operatorname{div}\overline{A}_0+\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2}\right), \tag{П.5}$$

где $\overline{A}_0$ и U_0 — одно из возможных частных решений системы (П.3).

Но функцию Ψ, в силу ее произвольности, всегда можно выбрать так, чтобы условие (П.5) действительно выполнялось.

Иногда при расчете электромагнитного поля вместо уравнения (П.4) вводят условие

$$\operatorname{div}\overline{A}=0 \tag{П.6}$$

(см., например, рассуждения в § 8 гл. XIII). В этом случае функция Ψ должна удовлетворять равенству

$$\operatorname{div}(\overline{A}_0+\operatorname{grad}\Psi)=0$$

или

$$\nabla^2\Psi=-\operatorname{div}\overline{A}_0, \tag{П.7}$$

а уравнение для U принимает вид

$$\nabla^2 U=-\frac{\rho}{\varepsilon}. \tag{П.8}$$

Предположим, что область, в которой определяется поле, не имеет сторонних зарядов, тогда вместо (П.8) мы получим уравнение

$$\nabla^2 U=0. \tag{П.9}$$

Если на поверхности S, ограничивающей область, касательные составляющие вектора $\overline{E}$ равны нулю, то потенциал U должен быть постоянным на S. Но при таком условии U будет иметь одинаковые значения в любой точке заданной области, ибо функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа, не имеет экстремумов. Не ограничивая общности рассуждений, мы можем полагать, что потенциал U в этом случае всюду равен нулю.

Таким образом, в области, где нет зарядов, поле при нулевых граничных условиях определяется только вектор-потенциалом $\overline{A}$:

$$\overline{E}=-\frac{\partial\overline{A}}{\partial t},\quad \overline{B}=\operatorname{rot}\overline{A} \tag{П.10}$$

Подходя к этому выводу с несколько иных позиций, мы, очевидно, можем утверждать, что в данном примере функция Ψ, удовлетворяющая уравнению (П.7), выбрана так, что она компенсирует скалярный потенциал U.

Аналогичный вывод будет также справедлив и для случая однородного безграничного пространства без сторонних зарядов.

Рассмотренные соотношения представляют собой примеры различной калибровки запаздывающих потенциалов электромагнитного поля.

Литература

1. Тамм И. Е. Основы теории электричества. ГИТТЛ, 1956.
2. Никольский В. В. Теория электромагнитного поля. Изд-во «Высшая школа», 1964.
3. Стрэттон Дж. А. Теория электромагнетизма. ГИТТЛ, 1948.
4. Рамо С., Уиннери Дж. Поля и волны в современной радиотехнике. ГИТТЛ, 1950.
5. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. Изд-во «Советское радио», 1957.
6. Кисунько Г. В. Электродинамика полых систем. Изд. ВКАС, 1949.
7. Каценеленбаум Б. З. Высокочастотная электродинамика. Изд-во «Наука», 1966.
8. Пистолькорс А. А. Антенны. Связьиздат, 1947.
9. Потехин А. А. Некоторые задачи дифракции электромагнитных волн. Изд-во «Советское радио», 1948.
10. Антенны сантиметровых волн, ч. 1 (перевод книги «Microwave Antenna Theory and Design»). Изд-во «Советское радио», 1950.
11. Фельд Я. Н. Основы теории щелевых аитенн. Изд-во «Советское радио», 1948.
12. Введенский Б. А., Аренберг А. Г. Радиоволноводы, ч. 1. Гостехиздат, 1946.
13. Силин Р. А., Сазонов В. П. Замедляющие системы. Изд-во «Советское радио», 1966.
14. Фокс А., Ли Т. Резонансные колебания в интерферометре квантового генератора. Сб. статей «Лазеры». Изд-во иностранной литературы, 1963.
15. Вайнштейн Л. А. Открытые резонаторы и волноводы. Изд-во «Советское радио», 1966.
16. Микаэлян А. Л. Теория и применение ферритов на сверхвысоких частотах. Госэнергоиздат, 1963.
17. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. Изд-во «Наука», 1967.
18. Блохинцев Д. И. Основы квантовой механики. Изд-во «Высшая школа», 1963.
19. Бом Д. Квантовая теория. Изд-во «Наука», 1965.
20. Вейлстеке А. Основы теории квантовых усилителей и генераторов. Изд-во иностранной литературы, 1961.
21. Shawlow A. L. and Townes C. H. Infrared and Optical masers. The Physical Review, 1958, v. 112, № 6.

Указатель

А

Абсолютно черное тело 618
Амплитуда поля комплексная 187
Анизотропная среда 11, 253
Антенна 285, 286
—, диаграмма направленности 319
— дифракционная плоская 202, 203, 386
— над проводящим экраном 288
— рамочная 306
— сферическая 348
— сфероидальная 357
— щелевая 388, 389

Б

Басов Н. Г. 631, 635
Бернулли Д. 77
Бесселя уравнение 84, 85, 352, 353
— функция 84, 85, 87, 334, 480
Био — Савара закон 130, 131
— формула для элемента постоянного тока 300, 301
Бонч-Бруевич М. А. 124
Бора частота 612
Бриллуен 343
де Бройль 565, 566
Брюстера угол 240

В

Вакуум 115
Вайнштейн Л. А. 395, 505
Васильев Е. Н. 357
Вейсса область 167
Вектор базисный 64
— волновой 232
— магнитной поляризации 168
— напряженности поля 14
— Пойнтинга 181, 182, 185, 210, 320, 615
— — комплексный 190
— —, среднее значение 190
— электрической индукции 14, 15
— — поляризации 17, 18
Векторная величина 8
Векторное произведение 130, 148
Вектор-площадка 19
Вектор-потенциал 155
— запаздывающий 293
Вероятность квантового перехода 605, 614, 616
Вещество активное 638
Вибратор 286
— симметричный 322
Виток с током 159
Вихрь вектора (ротор) 140, 173, 201
Волна 207
— бегущая 211, 228, 236
— де Бройля 566, 568, 581
— затухающая 437
— направляемая 391
— необыкновенная 281
— неоднородная 241
— обратная (отраженная) 209, 210
— обыкновенная 280, 284
— основная 473, 481, 482
— плоская 204, 207 209, 227, 231
— — в диэлектрике 215
— — — — с конечной проводимостью 215

— поперечно магнитного типа ТМ 311, 396—404
— — электрического типа ТЕ 311, 404—407, 416—421
— поперечная электромагнитная ТЕМ 311, 421—423, 473
— преломленная 227, 236
— прямая (падающая) 210
— поверхностная 467
— расходящаяся 292
— собственная в волноводе 437
— с круговой поляризацией 224
— — линейной поляризацией 223, 224
— — эллиптической поляризацией 222
— сходящаяся 292
— типа TE_{10} 423—428
Весовой множитель 92
Волновая теория поля 369
Волновод 393, 413
— диэлектрический 394, 467
Волноводный переход 449, 450
Волновое сопротивление 209, 216, 217, 218
— уравнение частицы 572
Волновой пакет 409
Вольт 35
Восприимчивость магнитная 168, 169
— электрическая 18, 168, 261
Время жизни частицы в возбужденном состоянии 622
Вырожденный тип поля 455,

Г

Гармонические функции 41
Гамильтониан 579
Гаудсмит 596
Гаусса — Остроградского равенство 22, 26, 47, 70
— теорема 30, 31
Генератор оптический квантовый (лазер) 631
— — — на рубине 638
Геометрическая тень 378
Герц 125, 178, 179
Герца диполь 295, 304, 308
Глубина проникновения 244
Годограф вектора напряженности поля 222, 223
Градиент в криволинейных координатах 64
— потенциала 36, 37
— скалярной величины 36
Граничная задача электродинамики
Граничные условия 41, 44—47, 60, 71, 72, 77, 91, 101, 106
Грина теорема 366
Группа волн 409
Групповая скорость 410
Гюйгенса источник 335, 379
— Кирхгофа принцип 369

Д

Даламбера уравнение 290, 291, 293
Дальняя зона 298, 301—305
Двухпроводная линия передачи открытая 392
— — — экранированная 392
Джоуля—Ленца закон 120, 184
Диаграмма направленности антенны 319, 320, 322—324
— — вторичного поля при дифракции 365
— — горизонтальной рамки 310
— — диполя Герца 303, 304
— — источника Гюйгенса 335
— — полуволнового вибратора 323, 324
— — прямоугольника с поверхностными токами 333
— — проводника с бегущей волной 326
— — симметричных вибраторов 322, 323
Диамагнетик 166
Дивергенция вектора индукции 27, 140
— напряженности электрического поля 25, 27, 28
— — — — в криволинейных координатах 64
Диполь Герца 295—308
— магнитный 156
— электрический 38, 159

Дисперсия 411, 412
Дисперсная среда 411
Дифференциальное уравнение поля постоянного тока 146
Дифракция электромагнитных волн 358, 565
— — — на бесконечном цилиндре 359—365
— — — — теле произвольной формы 381
— — — — отверстии в проводящем экране 382—386
Дифракционной задачи приближенное решение 380
— — строгое решение 359
Диэлектрик 15, 16, 115, 212, 213, 218
— совершенный 115
Диэлектрическая проницаемость 11
— — различных материалов 12
Длина волны критическая 402, 406
— — в прямоугольном волноводе 419
Добротность резонатора 501—503, 512, 518, 529, 554
Драбкин А. Л. 395

Е

Единственность решения уравнения Лапласа 59, 60
— — уравнений Максвелла 193
Емкость 48, 122, 123
— конденсатора 48, 56, 69
— — плоского 69
— — сферического 71
— — цилиндрического 73, 186
— одиночного провода 48
— уединенной сферы 70
Емкостной ток 125

З

Задача электростатики обратная 25, 29
— — прямая 25, 40
Заземление 44
Закон Био — Савара 130, 131, 154
— Джоуля—Ленца 120, 184
— Кирхгофа 116, 118, 120
— Кулона 10, 11, 154
— отражения 473—475
— Ома 115, 118, 119, 121
— полного тока 173, 177
— преломления 473—475, 476
— сохранения электричества 113, 114, 171
— — энергии в электромагнитном поле 180
— Фарадея 174
— электромагнитной индукции обобщенный 177
Замедляющая система 392, 393, 394
Запаздывающий потенциал векторный 293
— — скалярный 293
Заряд индуцированный 42, 106
— объемный 13
— связанный 15, 28
— точечный 11, 12, 13, 35
— фиктивный 106, 107
Затухание в волноводе с конечной проводимостью 437—442
Затухающее поле 401, 402, 489
Защита электростатическая 44
Зеемана эффект 595
Зона ближняя (индукции) 298, 299
— дальняя (излучения) 298, 301, 316

И

Излучение вынужденное (индуцированное) 609
— из открытого конца коаксиальной линии 336
— рамочной антенны 306—310
— спонтанное 619
— электромагнитных волн 285
— элемента плоскости с поверхностными токами 330—336
Изображение относительно плоскости 106—110
— — сложной поверхности 112
— — сферы 110
Изображений электрических метод 106
Изотропная среда 11
Инвариант 9
Инверсия населенностей 634

Индуктивность коаксиального кабеля 151
Индукция электромагнитная 174
Интерференция частиц 568
Исток магнитного поля 201
— электростатического поля 151, 201
Источник Гюйгенса 335
— поля магнитный 202
— — электрический 202

К

Квант 364, 565, 604, 612
— магнитного момента 596
Квантовая радиоэлектроника 631
— система двухуровневая 631, 632
— — трехуровневая 632, 635, 638
Квантование пространственное 587
Кирхгофа закон второй 120
— — первый 116
Кисунько Г. В. 395, 452, 505
Клистрон 536
Кляцкин И. Г. 343
Коаксиальная линия передачи 303, 478—484
Колебания вырожденные 508
— гармонические 187
Колебательный контур 501
Комплекс мгновенный 187
Комплексная диэлектрическая проницаемость 211—214
Композиция решений 77, 90
Конденсатор 47, 48
— квадрупольный 633
Консервативное поле 33
Консервативная сила 33
Координата пространственная 8
Координатная линия 63
— поверхность 62
Коэффициент взаимной индуктивности 160, 162
— затухания 216, 217, 219, 220, 244, 439, 443
— — в волноводе 441, 443, 444, 445, 448
— — — коаксиальной линии передачи 484
— —, зависимость от частоты 220
— магнитной проницаемости 128
— масштабный (метрический) 203
— отражения 230, 235, 239, 491, 493, 640
— преломления (прохождения) 230, 235, 239, 284, 491
— разложения 92, 94
— фазы 211
Критическая частота 401
— длина волны 402
Кулон 10, 11
Кулона закон 10, 11, 154

Л

Лебедев П. Н. 179
Левин М. Л. 357
Лежандра полином 96, 97, 99, 350
— — присоединенный 350, 351
— уравнение 97, 350
— функция 352
Леонтович М. А. 203, 353, 357, 413
Леонтовича граничные условия 249, 250, 440, 510
Линия индукции 14, 15
— — магнитной 129
— лоренцова 625
— передачи 392
— — неоднородная 490
— — регулярная 487
— тока 123
Лоренца лемма 199
— сила 261
Луч 370

М

Магнетизм 126—128
Магнетон Бора 596
Магнит 127
Магнитная индукция 129
— постоянная 128
— проницаемость 128
Магнитостатика 128—130
Максвелл 123, 170, 175
Максвелла уравнения 151—154, 200, 508

Максвелла уравнения в комплексном виде 187—192
— — — ортогональных криволинейных координатах 203
— — для стационарных полей 151—154
— уравнение первое 171
— — второе 174
Масса магнитная фиктивная 127
Метод наводимых э. д. с. 343—347
— полуклассический 609
— символический 187
— фиктивных зарядов 107
— эквивалентных токов 329
— электрических изображений 107
Момент вращения 257
— импульса частицы 584, 589
— магнитный витка с током 159
— — орбитальный электрона 166, 594
— — спиновый 256
— электрический 16, 17
— — диполя 39, 102
Мощность электрического тока 120
— источника реактивная 192

Н

Набла 147
Накачка 636
Намагничивание веществ 165
Напряженность магнитного поля 129
— поля сторонних сил 119
— — электрического 12, 38, 42, 129
Направляющая система 391, 392, 403
Нейман М. С. 530
Неймана функция 84, 85, 87, 480
Нейтральная молекула 16
Неоднородность в линии передачи 487
— плоская 490, 497
— —, расчет параметров 497—500
Непрерывность вектора напряженности поля 14, 44, 135
Нулевой потенциал 34

О

Обратная волна 209—210
— задача электростатики 25, 29
Окружность эквипотенциальная 74
Ома закон 115, 117, 118
Оператор дифференциальный 64
— импульса частицы 580
— линейный 576
— — самосопряженный 576
— полной энергии 579
Остроградского — Гаусса равенство 22—47
— — теорема 30, 31
Отраженная волна 210
Отражение волн при наклонном падении 232—237
— — — нормальном падении 227
Ось влияния 75

П

Падающая волна 210
Парамагнетик 166, 167
Паули принцип исключения 599, 604
Передача энергии по проводам 184, 185
Переход запрещенный 608
Петля гистерезиса 169
Пистолькорс А. А. 343, 386
Плазма 255, 260, 261, 263
Планк М. 564, 565, 566
Планка закон 618
— постоянная 564, 618
Плоскость падения 232
— поляризации 221, 222, 223
Плотность зарядов объемная 27, 28, 123
— — поверхностная 35, 224
— тока проводимости 114
— — смещения 123
— энергии магнитной 179
— — электрической 179
Поверхностный эффект 245, 392
Поверхность волновая 207
— граничная 224, 225

— координатная 62, 65
— эквипотенциальная 39, 43
Показатель преломления среды 238, 284
Поле величины векторной 9
— — скалярной 9
— в диэлектрике 17
— — конденсаторе 47
— вторичное электромагнитное 359—363, 381—386
— двух заряженных полусфер 102
— — коаксиальных цилиндров 72,
— — концентрических сфер 70
— — цилиндров с несовпадающими осями 73—75
— двухпроводной линии 155
— диполя электрического 39
— дифракционное 359
— заземленного желоба 80
— заряженного кольца 104, 105
— — плоского конденсатора 67, 68
— — цилиндра 23
— заряженной плоскости 24
— — сферы 22
— затухающее 401, 493
— квазипериодическое 559
— магнитное коаксиального кабеля 136—137
— неполяризованное 221
— несимметричное 481
— поляризованное 221
— поперечное (TEM) 310, 311, 399
— поперечно-магнитное (TM) 311, 360, 401, 404, 421
— поперечно-электрическое (TE) 311, 360, 416
— — электромагнитное 311, 400
— симметричное 481
— собственное в волноводе 454
— — кругового витка 156
— — прямолинейного 132, 321
— — — цилиндра 134
— — между двумя токонесущими плоскостями 138
— — полой цилиндрической трубки 138
Полином Лежандра 96, 97
Полный ток 124
Полуволновый вибратор 324, 342
Полупроводник 211, 212
Поляризация линейная 221
— магнитная 169
Постоянная распространения волны 228, 236, 398,
— — — затухающей 438
— — — типа TEM 473
Попов А. С. 125, 178
Постоянный ток 115
Потенциал 33
— запаздывающий 293
Поток вектора магнитной индукции 129
— — электростатической индукции 15, 19, 20, 27
Принцип взаимности 56, 447, 459
— двойственности 202, 203, 386
— излучения 196
— композиции решения 77
— суперпозиции 44
— Ферма 473
— эквивалентных токов 326
Прецессия магнитного момента 256, 258, 259
Проводник 211, 212, 218
— идеальный 41, 227
Проводимость излучения 389
— меди 219
— почвы влажной 214
— — сухой 213
— пресной воды 214
— среды удельная 115
— между электродами 122
Производная по направлению 37
Проницаемость диэлектрическая 11
— — вакуума 11
— — воздуха 213
— — комплексная 213, 215
— — металлов 213
— — относительная 11, 12
— — плазмы 261, 269
— магнитная 128, 158, 214
— — плазмы 270
— — феррита 263, 265
Пространство дрейфа 536
Прохоров А. М. 631, 635
Прямая волна 209, 210

— задача электростатики 25, 32, 40
Пуассона уравнение 41, 59, 62, 292

Р

Работа сил электрического поля 32
— — — тока 120
Разность потенциалов 34
Рамка 306, 307, 347
Расстояние макроскопическое 15
Расходящаяся волна 292
Релаксация 629
Рожанский Д. А. 343
Резонатор коаксиальный 527
— конфокальный 555
— объемный 503
— прямоугольный 504, 513, 552
— с квазисосредоточенными параметрами 530
— — малым зазором 532
— тороидальный 503, 530
—, характеристика резонансная 542
— цилиндрический 504, 521, 552
Резонанс гиромагнитный 258
— ферромагнитный 276, 277
Ротор вектора 140
— магнитного поля 146
Ряды Фурье — Бесселя 90—92

С

Самарский А. А. 395, 452
Световод 472
Сила потенциальная 119
Силовая линия 9, 14
Система координат ортогональная обобщенная 203
— — сферическая 65, 66, 143
— — цилиндрическая 65, 66, 75, 143
— СИ 5
Скаляр 8
Скорость групповая 410
— — в волноводе круглом 435
— — — — прямоугольном 420
движения энергии 412, 413
— распространения электромагнитной волны 178, 209, 407
— фазовая 216, 220, 398, 403, 406, 407, 408, 410, 411
— — необыкновенной волны в плазме 283
— — в волноводе диэлектрическом 471
— — — круглом 435
— — в замедляющей системе 466, 467
Смещения ток 123
Собственное значение интегрального уравнения 558
— — оператора 577
Собственная функция интегрального уравнения 558
— —, полная система 578
Согласование линий передачи 489, 494
Соответствия принцип 604
Сопротивление проводника 118, 123
— волновое линии передачи 478, 483, 484
— вносимое 544
— входное двухполюсника 339
— — петли связи 537, 544, 545
— — штыря связи 548
— излучения диполя Герца 305
— — источника 341, 345, 346
— — — в волноводе 459
— — полуволнового вибратора 342, 343
— — рамочной антенны 310, 347
— поверхностное 246, 247, 444
— потерь 341
— характеристическое 399, 407, 435
Соотношение неопределенностей 569, 579
Состояние квазистационариое 621
— метастабильное 621
Спектр энергетический 575
— — сплошной 590
— функции 408
Спин электрона 166, 256, 596
Среда гиротропная 275, 279
— дисперсионная 411
— линейная и нелинейная 14
—, согласование 231

Стокса теорема 144, 145, 173, 175
Сторонний ток 198
Сферическая антенна 348
— волна 292
— функция 586
Сходящаяся волна 292

Т

Таунс Ч. 631
Телеграфное уравнение 475, 477
Тензор проницаемости 254, 266, 267
Теорема Гаусса—Остроградского 19, 130
— Грина 51
— единственности 193—195, 286, 327, 329
— Стокса 130
— Умова — Пойнтинга 181, 182, 191, 196
Теория электромагнитного поля 179
Термодинамическое равновесие 617, 627
Тихонов А. Н. 395
Ток электрический 113
— поверхностный 224
— постоянный 115
— проводимости и смещения 212, 213
— сторонний 198
Тонкая структура спектра 598
Точка истока 12, 13, 28
— наблюдения 12, 13, 28
— стационарной фазы 379

У

Угол полного внутреннего отражения 238
— преломления 237, 240, 241
— поляризации 240
Угловая скорость вращения электрона 262
Уленбек 596
Умов Н. А. 181
Уравнение волновое 206, 290, 291
— связи 290
— силовой линии 9, 10
— телеграфное 475, 477
— Шредингера 572, 580, 596
Усилитель парамагнитный квантовый (мазер) 631
Условие самовозбуждения ОКГ 643
Уширение спектральной линии 625, 630

Ф

Фаза волновой функции 207
Фазовый множитель 211, 215, 216, 217, 218
Фарадей М. 170
Фарадея закон 174
— постоянная 275, 276
Фельд Я. Н. 203
Феррит 255, 263, 271, 279
Ферромагнетик 166, 167
Ферма принцип 373, 375, 376
Фидер 285, 392
Фиктивные магнитные масса и ток 200, 312
Фотон 564, 604, 612
Фраунгофера дифракция 386
Френеля дифракция 386
Фурье метод 77

Х

Ханкеля функция 352, 361
Характеристическое сопротивление направляющей системы 399

Ц

Циркуляция напряженности магнитного поля 132, 134
— — электрического поля 119, 120

Ч

Частота гиромагнитного резонанса 258, 262, 281
— квантового перехода 612, 624
— критическая 401, 406, 436, 471, 480
Число квантовое внутреннее 598
— — главное 591
— — магнитное 589
— — орбигальное 589

Ш

Ширина линии взаимодействия 625
Шредингер 573
Штарк-эффект 633

Э

Эйнштейн А. 565, 566
Эйнштейна соотношение 620
Электродвижущая сила индукции 174
— — сторонняя 287
Электродинамика 179, 193
—, краевая задача 197
Электростатика 128—130
Электронная теория материи 126
Энергия взаимодействия системы точечных зарядов с полем 50
— диполя 51
— кванта 604
— одиночного проводника 49
— осциллятора нулевая 601
— электромагнитных волн в анизотропной среде 255
— электрического поля 130
Энергетический уровень 598
Эрстед 126
Эфир 170

Я

Ядро интегрального уравнения 558

Оглавление

Предисловие ко 2-му изданию 3
Из предисловия к 1-му изданию 3
Список обозначений и единиц измерений применяемых величин (в системе СИ) 5

Глава I. **Основы теории электрического поля**

1. Закон Кулона 10
2. Напряженность поля 12
3. Вектор электрической индукции 13
4. Электрическая поляризация 15
5. Поток вектора индукции. Теорема Гаусса — Остроградского . 19
6. Применение равенства Гаусса — Остроградского к расчету электрических полей 22
   Поле заряженной сферы 22
   Поле заряженного цилиндра 23
   Поле заряженной плоскости 24
7. Дивергенция напряженности поля 25
8. Работа сил электрического поля. Потенциал 32
9. Градиент потенциала, поверхности уровня 36
10. Дифференциальные уравнения Пуассона и Лапласа 40
11. Свойства проводников в электростатическом поле 41
12. Граничные условия в электростатическом поле 44
13. Конденсатор. Электрическая емкость 47
14. Энергия электростатического поля 48
15. Теорема Грина и ее применение 51
16. Распределение энергии в электростатическом поле 57

Глава II. **Основы расчета электрических полей**

1. Единственность решения уравнения Лапласа 59
2. Криволинейные ортогональные координаты 62
   Цилиндрическая система координат 65
   Сферическая система координат 66
3. Простейшие примеры применения уравнения Лапласа для расчета поля 67
   Поле плоского конденсатора 67
   Поле заряженной сферы 69
   Поле двух концентрических сфер 70
   Поле заряженного круглого цилиндра 71
   Поле двух коаксиальных цилиндров 72
   Поле двух параллельных цилиндров с несовпадающими осями 73
4. Поле двух параллельных цилиндрических проводов конечного радиуса с несовпадающими осями 75
5. Решение уравнения Лапласа для трехмерного электрического поля 77

6. Решение уравнения Лапласа в прямоугольной системе координат 78
7. Решение уравнения Лапласа в цилиндрической системе координат 82
8. Решение дифференциального уравнения Бесселя 84
9. Ортогональность бесселевых функций и ряды Фурье — Бесселя 90
10. Пример решения уравнения Лапласа в цилиндрической системе координат 92
11. Решение уравнения Лапласа в сферической системе координат 95
12. Полиномы Лежандра 97
13. Диэлектрический шар в однородном электрическом поле . . 100
14. Поле двух заряженных полусфер 102
15. Поле заряженного кольца 104
16. Метод электрических изображений 106
Изображение относительно плоскости 106
Изображение относительно сферы 110
Изображение относительно сложной поверхности 112

Глава III. Электрический ток

1. Электрический ток и плотность тока 113
2. Основные законы электрического тока 114
3. Сторонние электродвижущие силы 119
4. Работа и мощность тока 120
5. Аналогия между электростатическим полем и полем постоянного тока 121
6. Ток смещения. 123

Глава IV. Основы теории постоянного магнитного поля

1. Основные законы магнетизма. 128
2. Магнитное поле постоянного тока 130
3. Теорема о циркуляции напряженности магнитного поля . . 132
Поле тока круглого цилиндра 134
Поле коаксиального кабеля 136
Поле полой цилиндрической трубки 138
Поле между двумя токонесущими плоскостями 138
4. Ротор вектора. Теорема Стокса 139
5. Дифференциальные уравнения магнитного поля постоянного тока 146
6. Символический вектор ∇ и некоторые формулы векторного анализа 147
Умножение ∇ на скаляр U 147
Скалярное умножение вектора ∇ на вектор $\overline{a}$ 148
Векторное умножение вектора ∇ на вектор $\overline{a}$ 148
7. Уравнения Максвелла для стационарных полей и их решение . 151
8. Применение вектор-потенциала для расчета магнитного поля постоянного тока 154
Поле двухпроводной линии 155
Поле кругового витка. Магнитный диполь 156
9. Собственная и взаимная индуктивность 160
10. Энергия магнитного поля тока 163
11. Намагничивающиеся среды 165

Глава V. Основы теории переменных электромагнитных полей

1. Первое уравнение Максвелла 171
2. Второе уравнение Максвелла 174
3. Полная система уравнений Максвелла 176
4. Теорема Умова — Пойнтинга о сохранении энергии в электромагнитном поле 179
5. Уравнения Максвелла и теорема Умова — Пойнтинга в комплексном виде 187
6. Единственность решения уравнений Максвелла 193
7. Принцип взаимности 197
8. Перестановочная двойственность уравнений Максвелла . . . 200
9. Уравнения Максвелла в ортогональных криволинейных координатах 203

Глава VI. Плоские электромагнитные волны

1. Основные соотношения для плоской электромагнитной волны в однородном диэлектрике 205
2. Комплексная диэлектрическая проницаемость среды 211
3. Плоские волны в однородной среде с конечной проводимостью . 215
4. Поляризация плоских волн 221
5. Граничные условия в переменном электромагнитном поле . . 224
6. Отражение плоских волн при нормальном падении 227
7. Уравнение плоской волны, движущейся в произвольном направлении 231
8. Отражение плоских волн при наклонном падении 232
   Случай поляризации волны, нормальной к плоскости падения 233
   Случай поляризации волны в плоскости падения 236
9. Наклонное падение плоской волны на границу двух диэлектриков 237
10. Наклонное падение плоской волны на границу раздела диэлектрик — проводник 240
11. Поверхностный эффект в проводниках 243
12. Приближенные граничные условия Леонтовича 248
13. Граничные условия на поверхности идеального проводника . 250

Глава VII. Электромагнитные волны в анизотропных средах

1. Анизотропные среды 253
2. Свойства феррита и плазмы в постоянном магнитном поле . . 255
3. Электрические параметры феррита и плазмы в постоянном магнитном поле. Уравнения Максвелла 263
4. Продольное распространение электромагнитных волн в гиротропных средах. Эффект Фарадея 271
5. Поперечное распространение электромагнитных волн в гиротропных средах 279

Глава VIII. Излучение электромагнитных волн

1. Введение 285
2. Решение уравнений электромагнитного поля. Запаздывающие потенциалы 288
3. Диполь Герца 295
4. Излучение рамочной антенны 306
5. Типы электромагнитных волн 310
6. Электромагнитное поле электрических и магнитных токов . . 312
7. Электромагнитное поле источников в дальней зоне
   Диаграмма направленности 316

8. Электромагнитное поле прямолинейного тока 321
Симметричный вибратор 322
Провод с бегущей волной 325
9. Принцип эквивалентных токов 326
10. Излучение элемента плоскости с поверхностными электрическими и магнитными токами 330
11. Излучение из открытого конца коаксиальной линии 336
12. Входное сопротивление источника электромагнитного поля . 338
13. Метод наводимых э. д. с. 343
14. Теория сферической антенны 348

Глава IX. **Дифракция электромагнитных волн**

1. Введение 358
2. Дифракция электромагнитных волн на бесконечном круглом цилиндре (строгое решение) 359
3. Волновая теория электромагнитного поля. Принцип Гюйгенса—Кирхгофа 365
4. Геометрическая оптика. Основное уравнение 369
5. Законы геометрической оптики 372
6. Переход от волновой теории поля к законам геометрической оптики 376
7. Принципы приближенного решения дифракционных задач . . 380
8. Дифракция плоской электромагнитной волны на отверстии в плоском проводящем экране 382
9. Основы теории плоских дифракционных антенн 386

Глава X. **Электромагнитные волны в направляющих системах**

1. Введение 391
2. Электромагнитные волны между параллельными идеально-проводящими плоскостями 395
Поперечно-магнитные поля 396
Поперечно-электрические поля 404
3. Скорости распространения электромагнитных волн 407
4. Волноводы 413
5. Прямоугольный волновод 414
Поперечно-электрические поля 416
Поперечно-магнитные поля 421
6. Волна TE_{10} в прямоугольном волноводе 423
7. Круглый цилиндрический волновод 429
Поперечно-электрические поля 430
Поперечно-магнитные поля 435
8. Затухание электромагнитных волн в волноводах с потерями . 437
9. Затухание электромагнитных волн в прямоугольном волноводе 442
10. Затухание электромагнитных волн в круглом волноводе . . . 445
11. Возбуждение волноводов 447
12. Расчет электромагнитного поля в волноводе по заданным источникам 451
13. Возбуждение волноводов через щели 459
14. Замедляющие системы 464
Ребристая структура 464
Диэлектрический волновод 467

Глава XI. **Поперечные волны в направляющих системах**

1. Общие свойства поперечных волн в направляющих системах . 473
2. Уравнения тока и напряжения в линии с поперечной волной . . 475

3. Коаксиальная линия 478
4. Полосковая линия 484

Глава XII. Основы теории нерегулярных линий передачи

1. Введение 487
2. Распространение волн в линиях со скачкообразно изменяющимися параметрами 490
3. Расчет параметров плоских неоднородностей 497

Глава XIII. Объемные резонаторы

1. Введение 501
2. Собственные колебания в объемном резонаторе без потерь . . 505
3. Собственные колебания в резонаторе с потерями
Добротность объемного резонатора 509
4. Прямоугольный резонатор 513
Поперечно-электрические колебания 513
Поперечно-магнитные колебания 517
Добротность прямоугольного резонатора 518
5. Цилиндрический резонатор 521
6. Коаксиальный резонатор 527
7. Объемные резонаторы с квазисосредоточенными параметрами . 529
8. Возбуждение объемных резонаторов 534
9. Вынужденные колебания в резонаторе. Входное сопротивление источника 537
10. Входное сопротивление и добротность нагруженного резонатора 548
11. Открытые резонаторы 552
Общие сведения 552
Типы колебаний в открытом резонаторе 555

Глава XIV. Основы квантовой теории

1. Введение 563
2. Частицы и волны 565
3. Соотношение неопределенностей 568
4. Уравнение Шредингера 572
5. Энергетический спектр частицы. Квантование энергии . . 574
6. Операторы 575
7. Операторы и физические величины в квантовой механике . . 579
8. О результатах измерения физических величин 582
9. Момент количества движения частицы 584
10. Электрон в центрально-симметричном электрическом поле . . 587
11. Эффект Зеемана 593
12. Спин электрона 596
13. Гармонический осциллятор 599
14. Квантование электромагнитного поля 601
15. Квантовые переходы 605
16. Расчет вероятностей квантовых переходов. Метод возмущений 607

Глава XV. Взаимодействие электромагнитного поля с веществом

1. Постановка задачи 609
2. Индуцированное излучение и поглощение электромагнитных волн. Электродипольное взаимодействие 610
3. Магнитодипольное взаимодействие 615

4. Случай плоской волны с непрерывным частотным спектром . 615
5. Взаимодействие теплового излучения с частицей 617
6. Спонтанное излучение 619
7. Ширина линии взаимодействия 622
8. Электромагнитное поле и частицы в состоянии термодинамического равновесия 626
9. Возможность усиления и генерирования электромагнитных колебаний квантовыми системами 630
10. Возбуждение квантовых систем. Двухуровневые квантовые устройства 631
11. Трехуровневый метод возбуждения 635
12. Принцип действия лазера 638
13. Условие самовозбуждения лазера 641
Приложение 645
Литература 647
Указатель 648

Готовятся к выпуску в издательстве «Советское радио»

Гайдук В. И., Палатов К. И., Петров Д. М. **Физические основы электроники сверхвысоких частот.**

Излагаются основные идеи электроники СВЧ и их современное техническое воплощение. Рассматриваются принципы действия, классификация электронных приборов СВЧ, основные тенденции их развития и области применения. Анализируются процессы взаимодействия электронов со сверхвысокочастотными полями в прямопролетных и отражательных клистронах, лампах бегущей и обратной волны, в магнетронах и магнетронных усилителях, в системах с центробежной электростатической фокусировкой, плазменных системах и других приборах. Освещается физика явлений в приборах СВЧ, приводятся формулы, иллюстрирующие основные зависимости и порядок величин параметров. С единой точки зрения проводится достаточно подробный теоретический анализ уравнений поля и движения электронов и находятся различные способы их решения.

Книга предназначена для специалистов, работающих в различных областях физики, электроники и радиотехники, студентов и инженеров смежных специальностей, желающих углубить свои знания.

Корсунский Л. Н. **Распространение радиоволн при связи с искусственными спутниками Земли.**

Излагаются основные вопросы распространения радиоволн при осуществлении радиосвязи с искусственными спутниками Земли (ИСЗ). Описывается дестабилизирующее влияние земной атмосферы на рабочую частоту, поляризацию, дальность и направление распространения волны при радиосвязи с высоколетящими ИСЗ; условия распространения волны в волноводе, образованном поверхностью Земли и ионосферным слоем F_2, при радиосвязи с низколетящими ИСЗ. Приводятся необходимые данные для энергетического расчета линии радиосвязи с ИСЗ. Рассматриваются вопросы, связанные с движением спутников и временем их существования на орбите, влиянием направленности антенн, выбором наивыгоднейшего участка рабочего диапазона частот и др.

Книга предназначена для инженеров, занимающихся вопросами распространения радиоволн и связи, а также для студентов высших радиотехнических учебных заведений.

Квантовая электроника. Сборник статей. Под ред. Н. Г. Басова.

В сборнике публикуются теоретические работы и результаты экспериментальных исследований отечественных авторов в области квантовых генераторов и их применения.

В сборнике имеются следующие основные разделы:

— физические явления в квантовых генераторах; теория процессов генерации и усиления лазерного излучения; нелинейные и параметрические явления; исследования лазерных материалов; техника квантовых генераторов; вопросы разработки, конструирования и эксплуатации генераторов различных типов;

— применения квантовых генераторов в различных областях науки и техники; приборы и аппаратура, использующие принципы квантовой электроники.

Кроме того, в сборнике публикуются результаты исследований по вопросам, примыкающим к лазерной технике: распространение когерентного излучения в атмосфере; взаимодействие с веществом; голография; методы приема и измерения лазерного излучения; когерентные оптоэлектронные устройства; системы управления лазерным излучением.

Сборник рассчитан на широкий круг физиков и инженеров, работающих в области квантовой электроники и в смежных областях.

Литвиненко О. Н., Сошников В. И. **Расчет колебательных систем из отрезков неоднородных линий.**

Приводится расчет колебательных систем из отрезков неоднородных линий, обладающих большим входным сопротивлением и добротностью, а также хорошей фильтрацией. Излагаются методы синтеза отрезков неоднородных линий по заданному распределению резонансных частот. Рассматриваются потери в колебательных системах из отрезков неоднородных линий и конструктивные особенности этих систем. Излагаются методы увеличения входного сопротивления и добротности, а также способы улучшения фильтрации.

Книга рассчитана на радиоинженеров, научных работников, аспирантов и может быть полезна студентам радиотехнических вузов.

Сканирующие антенны системы СВЧ. Том III. Пер. с англ., под ред. Г. Т. Маркова и А. Ф. Чаплина.

Книга является третьим томом монографии, посвященной теории и технике остронаправленных сканирующих антенн (перевод первого тома вышел в свет в 1966 г., второго — в 1969 г.).

В этом томе изложены вопросы реализации сканирующих антенных решеток и описаны различные методы электрического сканирования. Содержание книги соответствует уровню современной антенной техники, для которой проблема создания фазированных решеток является наиболее актуальной. Описаны методы сканирования, основанные на регулировке фазы элементов антенной решетки, сделан большой обзор по частотному сканированию, рассмотрены матричные и гетеродинные методы сканирования. Приведены методы сканирования, основанные на модуляции параметров антенны во времени и на обработке сигнала. Рассмотрены самонастраивающиеся решетки.

Книга предназначена для широкого круга радиоспециалистов. Она может быть рекомендована студентам радиотехнических вузов в качестве пособия для курсового и дипломного проектирования.

Указанные книги можно заказать и купить в магазинах Книготорга или в магазине «Книга — почтой» по адресу: Москва, К-50 ул. Медведева, 1. Магазин № 8 «Техническая книга».

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

№ п/п	Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
1	76	3-я снизу	$D_1 = \dfrac{D^2+R_1^2-R_2^2}{2D}$.	$D_1 = -\dfrac{D^2+R_1^2-R_2^2}{2D}$
2	89	7-я сверху	v_{mn}	$\varkappa_{mn}$
3	116	1-я снизу	$\int\limits_{S_1} \bar{j}\, d\bar{S} + \int\limits_{S_2} \bar{j}\, d\bar{S} = 0.$	$\int\limits_{S_1} \bar{j}\, d\bar{S}_1 + \int\limits_{S_2} \bar{j}\, d\bar{S}_2 = 0.$
4	164	13-я сверху	(4.75) с (4.70)	(4.71) с (4.70)
5	215	2-я снизу	$E_{\text{пад}}\, e^{-az}$	$E_{\text{пад}\, m}\, e^{-az}$
6	284	в формуле (7.104)	$n_{\text{об}} = \dfrac{c}{v_{\text{об}}} \sqrt{\dfrac{\varepsilon_z}{\varepsilon_0}} =$	$n_{\text{об}} = \dfrac{c}{v_{\text{об}}} = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_z}{\varepsilon_0}} =$
7	309	На рис. 8.11	$+m \quad -m$	$+q_{\text{м}} \quad -q_{\text{м}}$
8	333	4-я снизу	S.	S. Отрицательные значения амплитудной функции $E_m(0)$ означают, что в данной области фаза колебаний меняется на 180°.
9	440	в формуле (10.110)	Z_0	Z_0'
10	457	3-я снизу	(точки $z \geqslant 0$)	(точки $z \geqslant -z_0$)
11	510	3-я снизу	$\dfrac{1}{2}\delta_0 \delta\omega_{0\nu}^* \mu_1 \cdots$	$\dfrac{1}{2}\delta_0 \omega_{0\nu} \mu_1 \cdots$
12	510	6-я снизу	$\sqrt{\dfrac{\omega_{0\nu}^* \mu_1}{2g}} \cdots$	$\sqrt{\dfrac{\omega_{0\nu} \mu_1}{2g}} \cdots$
13	557	14-я сверху	$\dfrac{k[(x-x')^2+(y-y')^2]}{8z^3}$	$-\dfrac{k[(x-x')^2+(y-y')^2]}{8z^3}$
14	600	1-я сверху	$p = m\dfrac{d}{dt}$	$p = m\dfrac{dx}{dt}$
15	626	1-я снизу	(15.25)	(15.27)