

Федеральное агентство по образованию

---

Санкт-Петербургский государственный электротехнический  
университет "ЛЭТИ"

---

О. Г. ВЕНДИК Т. Б. САМОЙЛОВА

**ЭЛЕКТРОДИНАМИКА**

*Учебное пособие*

Санкт-Петербург  
Издательство СПбГЭТУ “ЛЭТИ”  
2006

УДК 537.8(07)

ББК В 3

В 29

Вендик О. Г., Самойлова Т.Б.

В 29 Электродинамика: Конспект лекций. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ “ЛЭТИ”, 2006. 144

с.

ISBN 5-7629-0687-6

Изложен материал лекционного курса “Электродинамика”.

Содержит сведения о свойствах и распространении электромагнитных полей как в свободном пространстве, так и в различных линиях передачи. Рассмотрено использование электродинамики как основы техники сверхвысоких частот.

Предназначено для студентов дневного отделения, обучающихся по направлению 550700, специальностям 071400, 200100.

УДК 537.8(07)

ББК В 3

Рецензенты: кафедра технологии электронных средств, микроэлектроники и материалов СПГУТ им. М. А. Бонч-Бруевича; д-р техн. наук проф. В. М. Балашов (Холдинговая компания “Ленинец”).

Утверждено  
редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного пособия

Вендик Орест Генрихович, Самойлова Татьяна Борисовна

Электродинамика

Учебное пособие

Компьютерная верстка Калинин Б.В.  
Публикуется в авторской редакции

---

Подписано к печати 25.10.06. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.  
Печать офсетная. Гарнитура «Times New Roman». Печ. л. 9,0. Тираж 150 экз. Заказ

---

Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»  
197376, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5

ISBN 5-7629-0687-6

© Вендик О. Г., Самойлова Т. Б., 2006

## ВВЕДЕНИЕ

Электродинамика – это наука о свойствах быстроменяющихся во времени электромагнитных полей. Главный *объект* электродинамики – колебания и волны. Колебания могут возбуждаться в колебательных контурах и в объемных резонаторах, являющихся важнейшей составной частью любого радиопередающего или радиоприемного устройства. Электромагнитные волны переносят энергию или сигналы (информацию) в свободном пространстве либо в линии передачи (в коаксиальном кабеле, волноводе и т. п.).

Электродинамика наряду с квантовой механикой и статистической физикой образует фундаментальные основы современной физики, дает теоретические основы важнейших технических приложений, используемых современной цивилизацией.

Электродинамика также служит основой описания и объяснения явлений, которые используются в сотовых телефонах, системах спутникового телевидения, радиолокации, радионавигации, космической связи, радиорелейных линиях и т. д.

Целью предлагаемого курса является рассмотрение использования электродинамики как основы техники сверхвысоких частот (СВЧ). На практике в технике СВЧ применяются электромагнитные колебания в диапазоне частот от 100 МГц до 100 ГГц или длин волн от 3 м до 3 мм соответственно. По-русски, этот диапазон частот принято называть сверхвысокими частотами, по-английски – Microwaves (микроволны). (В качестве примера использования диапазона СВЧ в быту можно привести бытовую печь с магнетронным нагревом. Такая печь имеет встроенный СВЧ-генератор с частотой 2...4 ГГц мощностью 500 Вт. В России это кухонное приспособление обычно называют «Микроволновка».)

Спутниковое телевидение использует частоты 7...12 ГГц; в системах телефонной связи с движущимися объектами (сотовые телефоны) применяются частоты 0,9...1,8 ГГц. Напомним еще об использовании СВЧ в автодорожной сфере деятельности – это, в частности, полицейский радар (частота 23 ГГц), радиолокационная защита автомобиля от столкновений и т. п.

Таким образом, техника СВЧ служит не только основой профессиональных систем (РЛС и т. п.), но широко входит и в повседневный быт.

Устройства СВЧ наряду с телевизорами и персональными компьютерами становятся основой современной цивилизации.

Знание основ электродинамики важно для будущего инженера или научного работника (магистра, кандидата наук) как знание основ фундаментальной физики и в то же время как основ, на которых построены многие технические средства, широко используемые в различных областях человеческой деятельности. Поэтому в соответствии с программой курса студент должен:

- Знать основы электродинамики (уравнения Максвелла, теорема Пойнгтинга, теорема взаимности).
- Знать теоретические основы описания и расчета электромагнитного поля в направляющих системах и объемных резонаторах.
- Уметь применять теоретические знания к расчету параметров направляющих систем и объемных резонаторов с целью их использования при конструировании элементов и устройств СВЧ-электроники.
- Иметь представление о характерных особенностях материалов, используемых при конструировании элементов и устройств электроники СВЧ.

## **1. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА И ТЕЛЕГРАФНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ**

Волновые и колебательные процессы в электромагнитном поле описываются *уравнениями Максвелла*. Выводы, сделанные исходя из уравнений Максвелла, послужили основой представлений о единстве электрического и магнитного полей, что стало одной из фундаментальных основ физики XX в. Джеймс Кларк Максвелл (1831 – 1879) в 1861 – 1864 г. получил уравнения для векторов электрического и магнитного полей. В 1873 г. был издан его трактат об электричестве и о магнетизме, обобщивший уравнения электромагнитного поля, который был использован его современниками как основной источник, положивший начало современной электродинамике. В окончательной форме, принятой в наше время, уравнения Максвелла были сформулированы Генрихом Рудольфом Герцем (1857 – 1994). (Указание на это можно найти в книге И. Е. Тамма «Основы теории электричества». М.: Наука, 1986.)

Дифференциальные уравнения в частных производных, описывающие распространение сигнала в виде волны электрического тока и напряжения в линии передачи, называются *телеграфными уравнениями*, полученными в 1855 – 1860 гг. Уильямом Томсоном (он же лорд Кельвин) (1824 – 1907). Способ вывода уравнений был уточнен Густавом Робертом Кирхгофом (1824 – 1887). Причиной появления и исследования телеграфных уравнений послужил ряд проблем, связанных с прокладкой и освоением первого трансатлантического телеграфного кабеля, неожиданно познакомивших электротехников того времени с понятием распространения волновых процессов в линии передачи с распределенными параметрами.

Как уравнения Максвелла, так и телеграфные уравнения описывают распространение волновых процессов в соответствующих средах. В первом случае – это свободное пространство, во втором – проводники линии передачи, но форма уравнений и их решение во многом сходны. Важно, однако, подчеркнуть, что уравнения Максвелла появились при решении задач фундаментальной физики, а телеграфные уравнения – это результат решения инженерной задачи прокладки и использования трансатлантического кабеля. Здесь уместно вспомнить, что определение цикла Карно и дальнейшее развитие термодинамики как фундаментальной науки были результатами стремления ученых объяснить и оптимизировать работу паровой машины, стремления решить чисто инженерную задачу.

## 1.1. Описание электромагнитного поля

Прежде чем приступить к изучению названных выше уравнений для электромагнитного поля, токов и напряжений в проводниках, вспомним и уточним способ описания векторов электрического и магнитного полей, токов и разности электрических потенциалов.

Для описания электромагнитного поля используются следующие векторы:

1.  $\vec{E}$  – напряженность электрического поля. Количественно напряженность электрического поля равна силе, с которой электрическое поле действует на единичный точечный заряд. Единица измерения напряженности электрического поля  $\vec{E}$  – вольт на метр (В/м).

Интеграл от напряженности электрического поля вдоль любого контура  $C$ , соединяющего две точки ( $A$  и  $B$ ), определяет разность электрических потенциалов и между этими точками:  $\int_C \vec{E} d\vec{l} = U$ .

Разность потенциалов равна взятой с обратным знаком работе, совершенной силами электрического поля при перемещении вдоль контура единичного положительного заряда. Единица измерения разности потенциалов  $U$  – вольт (В).

2.  $\vec{D}$  – *электрическая индукция*. Вектор электрической индукции вводится как

$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ , где  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$  – диэлектрическая проницаемость среды ( $\epsilon_0$  – диэлектрическая постоянная вакуума ( $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \text{ Ф/м}$  (фарада на метр)),  $\epsilon_r$  – относительная диэлектрическая проницаемость материала (для вакуума  $\epsilon_r = 1$ )). Единица измерения электрической индукции  $\vec{D}$  – кулон на квадратный метр ( $\text{Кл/м}^2$ ).

Вектор электрической индукции определяется также распределением

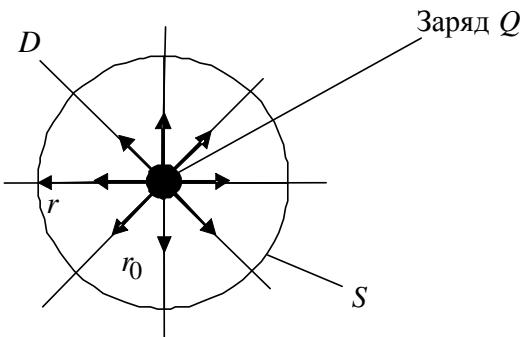


Рис. 1.1. Сечение сферы вертикальной плоскостью. Пример использования теоремы Гаусса – Остроградского для определения поля точечного заряда  $Q$ :  $S$  – поверхность сферы радиуса  $r$  с центром в месте расположения заряда,  $\vec{r}_0$  – единичный вектор (орт)

электрических зарядов. В случае заданных электрических зарядов вектор электрической индукции не зависит от свойств среды, а определяется величиной и взаимным расположением зарядов относительно точки наблюдения. Его введение облегчает рассмотрение полей в неоднородных средах и при этом позволяет получить соотношения, справедливые для любой среды независимо от ее диэлектрической проницаемости  $\epsilon$ .

Согласно *теореме Гаусса – Остроградского*, поток вектора электрической индукции через произвольную замкнутую поверхность  $S$  равен алгебраической сумме зарядов  $Q$ , находящихся внутри объема  $V$ , ограниченного этой поверхностью (рис.1.1):

$$\iint_S \vec{D} d\vec{S} = \iint_S D_n dS = Q.$$

Единица измерения заряда  $Q$  – кулон (Кл).

Найдем вектор электрической индукции на поверхности сферы радиуса  $r$  с центром в месте расположения заряда:

$$\iint_S \vec{D} d\vec{S} = 4\pi r^2 D = Q; \vec{D} = \hat{e}_r Q / 4\pi r^2.$$

3.  $\vec{H}$  – напряженность магнитного поля. Проявления магнитных явлений удобно связать с движением электрических зарядов, т. е. с током. Для магнитного поля справедлива *теорема о циркуляции* (закон полного тока, или закон Ампера<sup>\*</sup>): циркуляция вектора  $\vec{H}$  по замкнутому контуру  $l$  равна алгебраической сумме токов, пронизывающих поверхность, ограниченную этим контуром (рис. 1.2):

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \sum_n I_n. \quad (1.1)$$

Единица измерения напряженности магнитного поля  $\vec{H}$  – ампер на метр (А/м). Формула (1.1) носит название *закона полного тока*.

В качестве контура  $l$  используем концентрическую окружность радиуса  $r$  с центром на линии тока, лежащую в плоскости, перпендикулярной линии тока:

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = H 2\pi r = I.$$

Отсюда получим формулу для напряженности магнитного поля, окружающего ток  $I$ :  $H = I / 2\pi r$ .

4.  $\vec{B}$  – магнитная индукция. Вектор магнитной индукции связан с напряженностью магнитного поля соотношением

$$\vec{B} = \mu \vec{H}.$$

Единица измерения магнитной индукции  $\vec{B}$  – тесла (Тл).

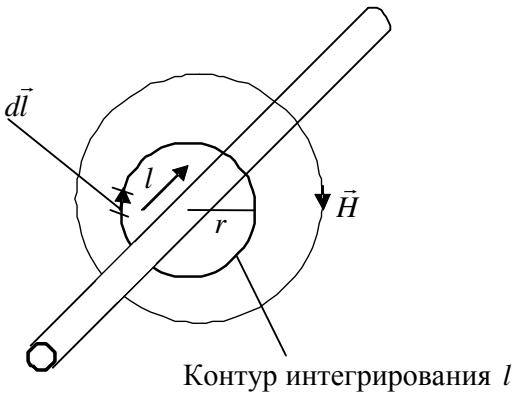


Рис. 1.2. Пример использования теоремы о циркуляции напряженности магнитного поля для определения распределения магнитного поля прямолинейного тока

---

<sup>\*</sup>Ампер, Андре Мари (1775 – 1836) – французский физик и математик.

$\mu = \mu_0 \mu_r$  – магнитная проницаемость среды,  $\mu_r$  – относительная магнитная проницаемость (для вакуума  $\mu_r = 1$ ),  $\mu_0$  – магнитная проницаемость вакуума ( $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м).

Поток магнитной индукции через поверхность  $S$  (рис. 1.3) :

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}.$$

Единица измерения потока магнитной индукции  $\Phi$  – вебер (Вб).

Согласно закону электромагнитной индукции Фарадея\*, изменение магнитного потока во времени создает электродвижущую силу (ЭДС) в проводящем контуре, помещенном в магнитное поле. Эта ЭДС равна взятой с обратным знаком скорости изменения магнитного потока:

$$e = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

5.  $\vec{j}$  – плотность электрического тока. Характеризует силу тока, протекающего через единичную площадку, которая перпендикулярна направлению тока (рис.1.3):

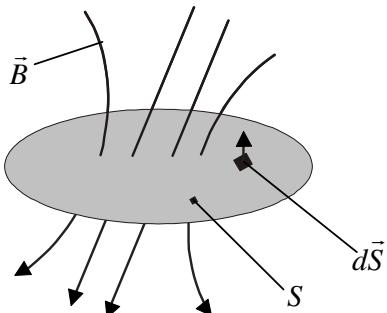


Рис. 1.3. Иллюстрация к определению потока вектора магнитной индукции

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S}.$$

Единица измерения плотности электрического тока  $\vec{j}$  – ампер на квадратный метр ( $A/m^2$ ).

Заметим, что согласно закону сохранения заряда,

$$I = -\frac{\partial Q}{\partial t}, \quad (1.2)$$

т. е. количество электричества, прошедшее за единицу времени через поверхность, ограничивающую некоторый объем  $V$ , равно убыли заряда в объеме  $V$  за единицу времени.

Электрический заряд в объеме  $V$  определяется интегралом от объемной плотности заряда:

$$Q = \int_V \rho(x, y, z) dV. \quad (1.3)$$

---

\*Фарадей, Майкл (1791 – 1867) – английский физик.

Итак, электромагнитное поле описывается четырьмя векторами:  $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}$ . Кроме того, эти векторы связаны с электрическим током  $I$  или его плотностью  $\vec{j}$ , а также с электрическим зарядом  $Q$  и его плотностью  $\rho$ .

## 1.2. Исходные положения к получению уравнений Максвелла

Уравнения Максвелла нельзя вывести строго, можно лишь повторить рассуждения, которые использовал Дж. Максвелл, и таким путем получить уравнения, основанные на экспериментальных фактах.

К тому моменту, когда Максвелл начал искать уравнения поля, в физике были известны два экспериментальных факта:

1) закон полного тока

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S}. \quad (1.4)$$

2) закон электромагнитной индукции Фарадея:

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{S}. \quad (1.5)$$

Уравнение (1.4) представляет собой *закон полного тока* и не содержит производной по времени.

Согласно *закону Фарадея* (1.5), циркуляция вектора  $\vec{E}$  по произвольному контуру  $l$  равна взятой с обратным знаком скорости изменения магнитного потока через поверхность  $S$ , ограниченную этим контуром.

В обоих случаях  $l$  – произвольный контур, на который опирается произвольная поверхность площадью  $S$ .

Максвелл рассуждал так: пусть имеется проводник, по которому течет ток  $I$ , изменяющийся во времени, и пусть проводник разорван (рис. 1.4).

Переменный ток может протекать через емкость, образованную разрывом проводника. В соответствии с (1.2) ток определяется производной от заряда по времени.

Заменим  $I$  и  $Q$  интегралами, соответственно, от плотности тока проводимости в проводнике и от индукции электрического поля в разрыве проводника:

$$\int_S \vec{j} d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} d\vec{S}.$$

Отсюда получим, что плотность тока проводимости равна взятой с обратным знаком скорости изменения электрической индукции в разрыве проводника:

$$\vec{j} = -\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

В случае разрыва проводника (рис. 1.4) непрерывность тока обеспечивается тем, что  $\vec{j}$  переходит в производную по времени от индукции электрического поля  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ , которую принято называть *током смещения*. Обычно принято говорить, что термин «ток смещения» связан с тем, что производная по времени от индукции электрического поля возникает при смещении

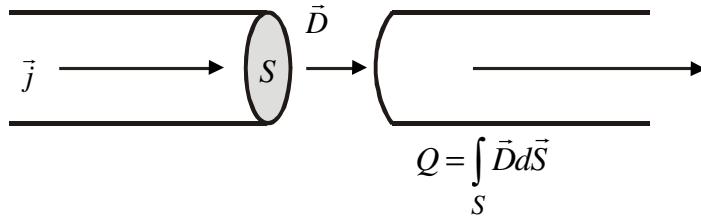


Рис.1.4. Разрыв проводника, иллюстрирующий переход тока проводимости в ток смещения.  $S$  – площадь поперечного сечения проводника. Внутри проводника имеется только  $\vec{j}$ , в разрыве –  $\vec{D}$

зарядов в веществе. А как же быть с током смещения в вакууме, где нет никаких зарядов? Поскольку термин этот возник более ста лет тому назад первоначально в английской терминологии, то в английских текстах используется термин «displacement current». Слово «displacement» в англо-русских словарях переводится как «смещение» или «замещение». Возможно, что более правильным русским термином мог бы быть термин «ток замещения» в том смысле, что производная по времени от индукции электрического поля  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  замещает ток проводимости  $\vec{j}$  там, где нет носителей заряда, т. е. в диэлектрике или вакууме. Однако, естественно, что в данном курсе лекций будет использоваться общепринятый термин «ток смещения».

Основная идея Максвелла состояла в том, что он ввел в рассмотрение обобщенный ток  $\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ , дополнив ток проводимости током смещения, причем ток смещения и ток проводимости могут не только переходить друг в друга, но и существовать одновременно (рис. 1.5). Более того, ток смещения существует даже в вакууме при отсутствии движущихся зарядов. Тогда закон полного тока (1.4) следует записать так:

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} d\vec{S} + \int_S \vec{j} d\vec{S}. \quad (1.6)$$

Силовые линии магнитного поля существуют вокруг тока смещения так же, как и вокруг тока проводимости (рис. 1.5).

Сравним интегралы (1.6) с законом электромагнитной индукции:

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{S}.$$

Здесь отсутствует магнитный ток проводимости. В природе магнитные заряды не существуют и в данном смысле электромагнитное поле несимметрично. Почему это так, пока не известно. Может быть, магнитные заряды существуют в иных, значительно удаленных от нас областях Вселенной.

Итак, была получена интегральная форма уравнений, связывающих векторы электромагнитного поля:

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} d\vec{S} + \int_S \vec{j} d\vec{S}; \quad \oint_l \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{S}. \quad (1.7)$$

Кроме экспериментально установленных законов полного тока и электромагнитной индукции в данных уравнениях содержится ток смещения. Ток смещения не был экспериментально найден или как-либо экспериментально установлен — эта часть уравнений является гениальной интуитивной догадкой Максвелла.

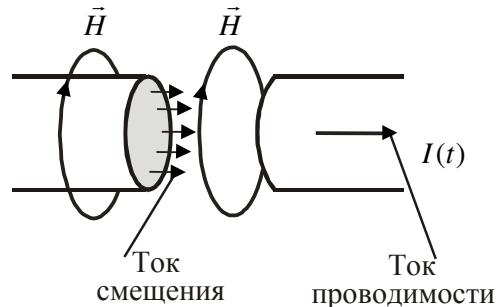


Рис. 1.5. Эквивалентность тока проводимости и тока смещения по отношению к магнитному полю, которое возбуждается текущим током

Дифференциальная форма записи приведенных уравнений, связывающих векторы электромагнитного поля, представляет собой общепринятую в настоящее время форму уравнений Максвелла.

### 1.3. Уравнения Максвелла и волновое уравнение для электромагнитной волны в вакууме

Используем формулу Стокса, согласно которой циркуляция вектора по замкнутому контуру  $l$  равна потоку ротора этого вектора через поверхность, опирающуюся на этот контур. Тогда

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot} \vec{H} d\vec{S}; \quad \oint_l \vec{E} d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot} \vec{E} d\vec{S}.$$

Пусть  $S$  – произвольная неизменная во времени поверхность, ограниченная контуром  $l$ . Тогда система уравнений (1.7) перепишется так:

$$\int_S \left\{ \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{j} \right\} d\vec{S} = 0; \quad \int_S \left\{ \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right\} d\vec{S} = 0.$$

Поскольку контур интегрирования в полученных интегралах произведен, равенство нулю интегралов возможно только при равенстве нулю подынтегральных выражений. Тогда

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}. \quad (1.8)$$

Уравнения (1.8) и есть уравнения Максвелла.

В большей части настоящего курса лекций будут рассматриваться поля, изменяющиеся во времени по гармоническому закону:  $\vec{E} = \vec{E}_m \cos(\omega t - \phi)$ , для которых принята комплексная форма записи:  $\vec{E} = \vec{E}_m e^{i\omega t}$ , где  $\vec{E}_m$  – комплексная амплитуда. При комплексной форме записи гармонических полей производная по времени заменяется умножением на  $i\omega$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega.$$

Тогда уравнения Максвелла (1.8) для полей, изменяющихся по гармоническому закону, примут вид

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -i\omega \mu_0 \mu_r \vec{H}; \quad \operatorname{rot} \vec{H} = i\omega \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} + \vec{j}. \quad (1.9)$$

Найдем решение уравнений Максвелла для простейшего случая распространения электромагнитной волны в вакууме.

В вакууме  $\mu_r = \epsilon_r = 1$ ,  $\vec{j} = 0$ . Поэтому для вакуума уравнения Максвелла (1.9) примут вид

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -i\omega\mu_0 \vec{H}; \quad \operatorname{rot} \vec{H} = i\omega\epsilon_0 \vec{E}. \quad (1.10)$$

Исключим  $\vec{H}$  из (1.10). Для этого применим операцию  $\operatorname{rot}$  к обеим частям первого уравнения:  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -i\omega\mu_0 \operatorname{rot} \vec{H}$ . Теперь подставим значение  $\operatorname{rot} \vec{H}$  из второго уравнения. В результате получим

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \vec{E} \quad (1.11)$$

Используем известное соотношение векторной алгебры:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} \quad (1.12)$$

Вспомним, что в соответствии с теоремой Гаусса–Остроградского

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}, \quad (1.13)$$

и учтем, что в вакууме свободных зарядов нет (т. е.  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ ). Подставим (1.12) и (1.13) в (1.11). В результате получим

$$\Delta \vec{E} + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \vec{E} = 0. \quad (1.14)$$

Данное уравнение носит название *волнового уравнения*. Аналогичным образом можно получить волновое уравнение относительно вектора магнитного поля  $\vec{H}$ .

Наиболее наглядным решением волнового уравнения является сферическая волна, распространяющаяся вокруг точечного излучателя. Чтобы получить решение для сферической волны, нужно представить оператор Лапласа в уравнении (1.14) в сферической системе координат, что приведет к достаточно громоздким математическим выражениям. С целью упрощения математических процедур рассмотрим решение волнового уравнения для плоской волны, являющейся функцией одной координаты.

На рис. 1.6 показана схема расположения силовых линий сферической электромагнитной волны. Рисунком иллюстрируется тот факт, что на больших расстояниях от излучателя электромагнитное поле можно рассматривать как плоскую волну, распространяющуюся вдоль направления, перпендикулярного плоскости постоянной фазы, причем характеристики волны зависят только от одной координаты вдоль направления распростране-

ния. Несмотря на то, что в общем случае волна имеет сферическую симметрию, в ограниченной области, обозначенной квадратом, можно говорить о плоской волне, характеристики которой зависят только от одной координаты.

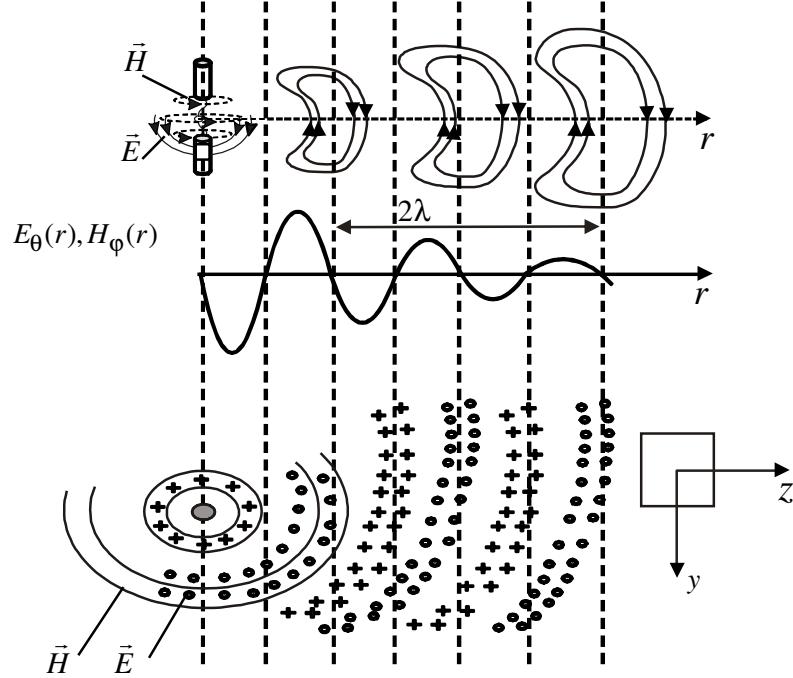


Рис. 1.6. Схема силовых линий напряженности электрического и магнитного полей сферической электромагнитной волны

Примем во внимание, что одномерный оператор Лапласа имеет следующий вид:

$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \vec{E}$$

и получим одномерное волновое уравнение для плоской волны:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \vec{E} = 0. \quad (1.15)$$

Любое дифференциальное уравнение приобретает физический смысл, если заданы граничные условия для его решения. Решение уравнения (1.15) получается в виде двух волн, распространяющихся вдоль положительного и отрицательного направлений оси  $z$ . Примем в качестве граничных условий утверждение, что в рассматриваемой среде плоская волна может распространяться только в одном направлении. Итак, имеем реше-

ние уравнения (1.15) для плоской волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси  $z$ :

$$\vec{E}(z, t) = \vec{e}_x E_m e^{i(\omega t - kz)} \quad (1.16)$$

Фаза волны

$$\phi = \omega(t - t_0) - kz, \quad (1.17)$$

где  $k$  – волновое число (в общем случае – волновой вектор).

Фиксированная ориентация вектора напряженности поля вдоль заданной координатной оси носит название *поляризации волны*. Соотношение (1.16) задает поляризацию напряженности электрического поля вдоль оси  $x$ .

На рис. 1.7 показано положение плоскости постоянной фазы для двух моментов времени.

Для плоскости постоянной фазы ( $\phi = \text{const}$ ), которая движется вдоль оси  $z$ , ее производная по времени равна нулю:  $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ .

В соответствии с (1.15) получим  $\frac{\partial \phi}{\partial t} = \omega - k \frac{\partial z}{\partial t} = 0$ , так что

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\omega}{k} = v_{\text{ph}}, \quad (1.18)$$

где  $v_{\text{ph}}$  — скорость движения поверхности неизменной фазы, или *фазовая скорость*.

Подставив (1.16) в (1.15), получим

$$-k^2 E_m e^{-ikz} + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 E_m e^{-ikz} = 0,$$

и, сократив  $E_m e^{-ikz}$ , получим *дисперсионное уравнение для плоской волны в свободном пространстве*:

$$k^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0, \quad k = \pm \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}. \quad (1.19)$$

Разные знаки в выражении для  $k$  соответствуют волнам, распространяющимся вдоль оси  $z$  в разных направлениях. В соответствии с (1.18):

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}.$$

В свободном пространстве  $v_{\text{ph}} = c$ , где  $c$  – скорость света.

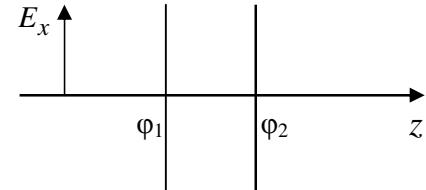


Рис.1.7. Движение плоскости постоянной фазы

Таким образом, из уравнений Максвелла следует, что скорость света (м/с) в свободном пространстве определяется диэлектрической и магнитной проницаемостями вакуума:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{36\pi} 10^{-9} 4\pi \cdot 10^{-7}}} = 3 \cdot 10^8. \quad (1.20)$$

Диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума – это характеристики пространства, связанные со статическими полями. Первая из них характеризует только диэлектрические свойства среды, а вторая – только её магнитные свойства. Результат решения уравнений Максвелла, представленный формулой (1.20), связывает воедино электростатику, магнитостатику и динамический процесс распространения света.

Действительно, диэлектрическую проницаемость можно получить экспериментально измерением силы взаимодействия двух известных зарядов  $q_1$  и  $q_2$ , расположенных на расстоянии  $r$  друг от друга:

$$f_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \text{ (закон Кулона).}$$

Таким образом, из статического эксперимента можно найти численное значение  $\epsilon_0$ .

Магнитную проницаемость можно получить, измерив силу взаимодействия двух проводников длинами  $dl_1$  и  $dl_2$  с токами  $I_1$  и  $I_2$  соответственно, расположенных на расстоянии  $r$  друг от друга:

$$\vec{f}_I = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{r^2} \left[ dl_2 \left[ d\vec{l}_1 \cdot \vec{E}_r \right] \right] \text{ (закон Био–Савара–Лапласа).}$$

Таким образом, из статического эксперимента можно определить численное значение  $\mu_0$ .

Следовательно, уравнения Максвелла позволяют выразить скорость света через характеристики, полученные с помощью статических измерений.

Уравнения Максвелла связывают воедино электрическое поле, магнитное поле и электромагнитные волны (свет). Создание концепции электромагнитного поля и формулировка уравнений, его описывающих, послужили одной из важнейших отправных точек физики XX в.

## 1.4. Телеграфные уравнения для волны в линии передачи

Простейшим примером линии передачи может служить коаксиальный кабель. На рис.1.8 показаны размеры коаксиальной линии передачи.

Погонные параметры линии (емкость на единицу длины линии и индуктивность на единицу длины линии) следующие:

$$C_1 = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln \frac{R}{a}}, \quad L_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R}{a}.$$

Кроме погонной емкости и погонной индуктивности следует ввести в рассмотрение погонное сопротивление и погонную проводимость, которые отражают поглощение энергии в активном последовательном сопротивлении проводников и поглощении энергии в параллельной проводимости, возникающей вследствие утечки тока через изолятор, заполняющий внутреннее пространство коаксиальной линии.

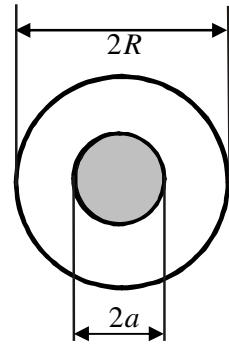


Рис. 1.8. Основные размеры коаксиальной линии передачи

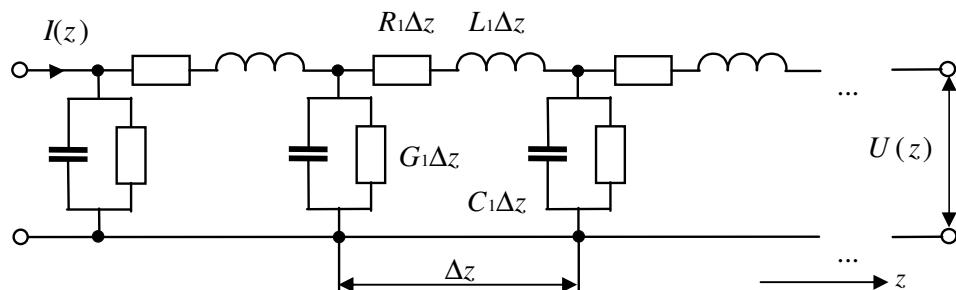


Рис. 1.9. Эквивалентная схема отрезка линии передачи

Линия передачи характеризуется следующими погонными параметрами: индуктивностью  $L_1$ ; сопротивлением  $R_1$ ; емкостью  $C_1$ ; проводимостью  $G_1$  (рис. 1.9).

Запишем выражения для тока в проводнике и разности потенциалов между проводниками на отрезке линии длиной  $\Delta z$ :

$$\Delta U = -(i\omega L_1 + R_1)\Delta z I; \quad \Delta I = -(i\omega C_1 + G_1)\Delta z U.$$

Устремляя  $\Delta z$  к нулю и перейдя к производным, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial z} = -(i\omega L_1 + R_1)I; \\ \frac{\partial I}{\partial z} = -(i\omega C_1 + G_1)U. \end{cases} \quad (1.21)$$

Дифференциальные уравнения в частных производных (1.21), описывающие распространение сигнала в линии передачи, называются *теле-графными уравнениями*. История их появления излагалась в самом начале лекций.

Исключим ток из уравнений (1.21), получим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = (i\omega C_1 + G_1)(i\omega L_1 + R_1)U. \quad (1.22)$$

Аналогичным образом из (1.21) может быть получено уравнение для тока

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = (i\omega C_l + G_l)(i\omega L_l + R_l)I. \quad (1.23)$$

Рассмотрим вначале случай линии без потерь, т. е.  $R_l = 0$  и  $G_l = 0$ . При отсутствии потерь (1.22) и (1.23) примут вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \omega^2 L_l C_l U = 0; \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} + \omega^2 L_l C_l I = 0. \quad (1.25)$$

Оба уравнения (1.24) и (1.25) есть *волновые уравнения*. Сравним уравнение (1.24) с уравнением (1.15). Разница между ними заключается в том, что при переходе от волнового уравнения (1.15) к волновому уравнению (1.24), нужно заменить  $\mu_0$  на  $L_l$  и  $\epsilon_0$  на  $C_l$ . Заметим, что единицы измерения заменяемых величин одни и те же:  $\mu_0$  на  $L_l$  измеряются в генри на метр ( $\text{Гн}/\text{м}$ ), а  $\epsilon_0$  на  $C_l$  – измеряются в фарадах на метр ( $\Phi/\text{м}$ ). Проницаемости  $\mu_0$  и  $\epsilon_0$  – магнитная и электрическая характеристики вакуума, погонные индуктивность и емкость  $L_l$  и  $C_l$  – магнитная и электрическая характеристики линии передачи (в рассматриваемом случае коаксиального кабеля).

Решение уравнения (1.24) может быть представлено в виде суммы падающей и отраженной волн, выраженных разностью электрических потенциалов между проводниками линии передачи:

$$U = U_{\text{пад}} e^{-i\beta z} + U_{\text{отр}} e^{i\beta z},$$

где

$$\beta = \omega \sqrt{L_1 C_1} = \frac{\omega}{v}. \quad (1.26)$$

Соотношение между амплитудами подающей и отраженной волн ( $U_{\text{пад}}, U_{\text{отр}}$ ) определяется граничными условиями на концах отрезка линии передачи. Влияние граничных условий на волновые процессы в линии передачи будет рассмотрено далее.

Введенный здесь параметр  $\beta$  есть фазовая постоянная распространения,  $v$  – фазовая скорость волны в линии передачи. Если в уравнениях (1.22) и (1.23) сохранить сопротивление  $R_1$  и проводимость  $G_1$ , то вместо вещественной фазовой постоянной  $\beta$  получим комплексное волновое число:

$$i\beta - \alpha = \sqrt{(i\omega L_1 + R_1)(i\omega C_1 + G_1)} \quad (1.27)$$

С учетом того, что потеря энергии при распространении волны в линии передачи, как правило, невелика, примем во внимание следующие неравенства:

$$R_1 \ll \omega L_1; \quad G_1 \ll \omega C_1.$$

Это позволяет преобразовать (1.27) следующим образом:

$$\beta + i\alpha = \omega \sqrt{L_1 C_1} \left[ 1 + i \frac{R_1}{2\omega L_1} + i \frac{G_1}{2\omega C_1} \right].$$

Отсюда непосредственно следуют уже полученное соотношение (1.26) для фазовой постоянной  $\beta$  и выражение для *декремента затухания* волны  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[ R_1 \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} + G_1 \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \right].$$

Для волны, бегущей в направлении положительных  $z$ , производная по координате даст

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -i\beta U e^{-i\beta z}.$$

В то же время из (1.21) получим:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -i\omega L_1 I e^{-i\beta z}.$$

Приравняем правые части двух последних равенств. Произведя простейшие сокращения, получим для падающей волны или для отраженной волны следующее соотношение между напряжением и током:

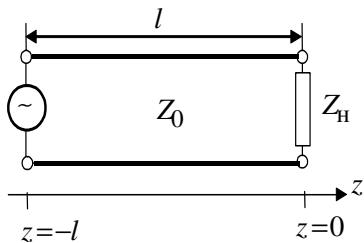


Рис. 1.10. Отрезок линии передачи с волновым сопротивлением  $Z_0$ . На одном конце отрезка линии включен генератор напряжения с частотой  $\omega$ , на другом конце – нагрузка, обладающая импедансом  $Z_h$

$$\frac{U}{I} = \frac{i\omega L_1}{i\beta} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}.$$

Введем обозначение:  $Z_0 = \sqrt{L_1/C_1}$ .

Полученная величина называется *волновым сопротивлением линии передачи*. Волновое сопротивление линии передачи есть отношение напряжения к току в бегущей волне. Это отношение следует брать только в падающей волне или только в отраженной волне. Используя соотношение (1.26), можем получить полезную для дальнейшего формулу для  $Z_0$ :

$$Z_0 = \beta/\omega C_1. \quad (1.28)$$

Запишем решения телеграфных уравнений в виде суммы падающей и отраженной волн для разности потенциалов и для тока в проводниках:

$$U(z) = U_{\text{пад}} e^{-i\beta z} + U_{\text{отр}} e^{i\beta z}; I(z) = I_{\text{пад}} e^{-i\beta z} + I_{\text{отр}} e^{i\beta z};$$

$$I_{\text{пад}} = \frac{U_{\text{пад}}}{Z_0} \quad I_{\text{отр}} = -\frac{U_{\text{отр}}}{Z_0}.$$

Если в линии присутствуют и падающая и отраженная волны, то импеданс в данном сечении линии является функцией координат:

$$Z(z) = \frac{U(z)}{I(z)} = \frac{U_{\text{пад}} e^{-i\beta z} + U_{\text{отр}} e^{i\beta z}}{I_{\text{пад}} e^{-i\beta z} + I_{\text{отр}} e^{i\beta z}} = Z_0 \frac{U_{\text{пад}} e^{-i\beta z} + U_{\text{отр}} e^{i\beta z}}{U_{\text{пад}} e^{-i\beta z} - U_{\text{отр}} e^{i\beta z}}. \quad (1.29)$$

Обратимся к граничным условиям на концах отрезка линии передачи. Учет граничных условий позволит установить связь между напряжениями и токами в падающей и в отраженной волнах, т. е. получить полное решение задачи о распределении токов и напряжений в линии. Воспользуемся схемой, изображенной на рис. 1.10, где представлены граничные условия в точках  $z=0$  и  $z=-l$ . В точке  $z=-l$  включен генератор напряжения, обеспечивающий питание рассматриваемого отрезка линии передачи напряже-

нием  $U_{\text{ген}}$  с частотой  $\omega$ . В точке  $z=0$  включена нагрузка с комплексным сопротивлением  $Z_H$ .

Для точки  $z=0$  соотношение (1.29) дает следующее равенство:

$$Z_H = Z_0 \frac{U_{\text{пад}} + U_{\text{отр}}}{U_{\text{пад}} - U_{\text{отр}}}.$$

Для точки  $z=-l$  соотношение (1.28) дает следующее равенство:

$$U_{\text{ген}} = U_{\text{пад}} e^{i\beta l} + U_{\text{отр}} e^{-i\beta l}.$$

Из двух последних равенств получим систему уравнений относительно амплитуды падающей и отраженной волн:

$$U_{\text{пад}} e^{i\beta l} + U_{\text{отр}} e^{-i\beta l} = U_{\text{ген}};$$

$$U_{\text{пад}} (Z_0 - Z_H) + U_{\text{отр}} (Z_0 + Z_H) = 0.$$

Решение полученной системы уравнений имеет следующий вид:

$$U_{\text{пад}} = U_{\text{ген}} \frac{Z_H + Z_0}{2(iZ_0 \sin \beta l + Z_H \cos \beta l)}, \quad (1.30)$$

$$U_{\text{отр}} = U_{\text{ген}} \frac{Z_H - Z_0}{2(iZ_0 \sin \beta l + Z_H \cos \beta l)}. \quad (1.31)$$

В технике СВЧ широко используется понятие «коэффициент отражения», который есть отношение комплексной амплитуды отраженной волны к комплексной амплитуде падающей волны. Коэффициент отражения принято обозначать через  $\Gamma$  (гамма). В точке подключения нагрузки ( $z=0$ )

$$\Gamma = \frac{Z_H - Z_0}{Z_H + Z_0}.$$

Подставим (1.30) и (1.31) в (1.29) и найдем входное комплексное сопротивление отрезка линии передачи длиной  $l$  (см. рис. 1.10).

$$Z(-l) = Z_0 \frac{(Z_H + Z_0)e^{i\beta l} + (Z_H - Z_0)e^{-i\beta l}}{(Z_H + Z_0)e^{i\beta l} - (Z_H - Z_0)e^{-i\beta l}}. \quad (1.32)$$

Назовем  $Z(-l)$  *входным комплексным сопротивлением* отрезка линии передачи длиной  $l$ . Использование формулы Эйлера позволяет получить из (1.32) следующее выражение для входного комплексного сопротивления, которое широко используется при анализе СВЧ-цепей:

$$Z_{\text{bx}} = Z_0 \frac{Z_h + iZ_0 \operatorname{tg} \beta l}{Z_0 + iZ_h \operatorname{tg} \beta l}.$$

Рассмотрим общий случай, когда в линии распространяются падающая и отраженная волны. Тогда напряжение в сечении линии с координатой  $z$  можно записать как

$$U(z) = U_{\text{пад}}(z) + U_{\text{отр}}(z) = |U_{\text{пад}}| e^{-i(\beta z + \phi_{\text{пад}})} + |U_{\text{отр}}| e^{-i(\beta z + \phi_{\text{отр}})}.$$

Найдем квадрат модуля напряжения  $|U(z)|^2 = U(z) \cdot U(z)^*$  (индекс «\*» означает комплексное сопряжение):

$$|U(z)|^2 = |U_{\text{пад}}|^2 + |U_{\text{отр}}|^2 + 2|U_{\text{пад}}| \cdot |U_{\text{отр}}| \cdot \cos(2\beta z + \phi_{\text{пад}} - \phi_{\text{отр}}). \quad (1.33)$$

Заметим, что функция координаты  $z$ , описывающая разность потенциалов между проводниками линии передачи в виде стоячей волны, получена в результате решения телеграфных уравнений с граничными условиями для токов и напряжений на концах рассматриваемого отрезка линии.

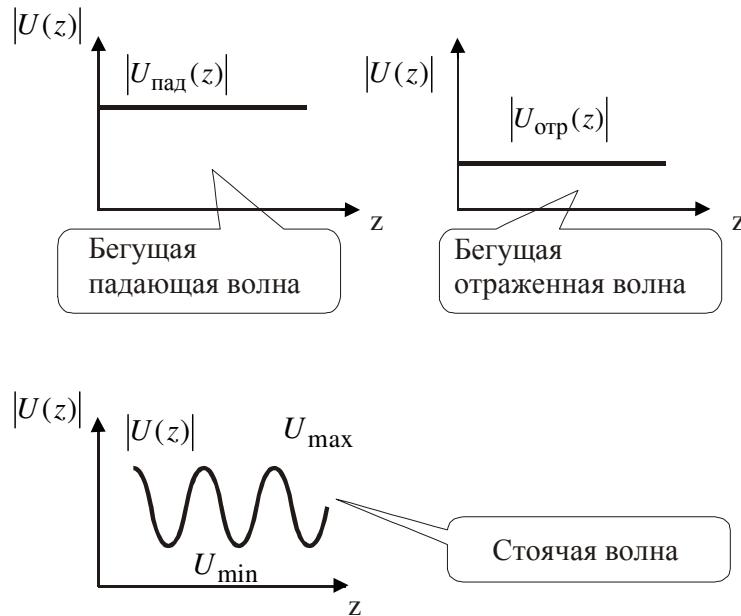


Рис.1.11. Формирование стоячей волны (см. выражение (1.33))

Результаты расчётов представлены на рис. 1.11. В частном случае при  $Z_h = Z_0$  (см. (1.31)) отраженная волна будет отсутствовать, и тогда в рассматриваемом отрезке линии амплитуда напряжения не зависит от координаты.

## 2. ПЕРЕНОС ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Электромагнитное поле физически реально. Реальность электромагнитного поля проявляется в том, что оно обладает энергией, которая определяется векторами  $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}$ . Далее будут рассмотрены вопросы о том, как электромагнитное поле запасает и переносит энергию, и, главное, как энергия переносится электромагнитной волной. Перенос энергии электромагнитным полем или электромагнитной волной используется не только при решении проблем энергетики (нагрев, приведение в действие машин, движение транспортных средств и т. д.), но и для передачи сигналов. Простейшими примерами передачи сигнала являются передача прямоугольного импульса напряжения или тока (с этого началась работа электрического телеграфа в середине XIX в.) или передача прямоугольного пакета электромагнитных волн (простейшие виды радиолокации, кодово-импульсная модуляция в системах связи).

Говоря о передаче сигналов, необходимо ответить на вопрос о скорости переноса сигнала электромагнитной волной. Скорость распространения в свободном пространстве или по линии передачи пакета электромагнитных волн носит название *групповой скорости*, которая может совпадать, а может и сильно отличаться от рассмотренной в предыдущей главе фазовой скорости.

Здесь не будет обсуждаться вопрос о скорости распространения по линии передачи импульса тока или напряжения, не содержащего высокочастотного заполнения. Этот вопрос очень интересовал конструкторов трансатлантического коаксиального кабеля в середине XIX в. и занимает в настоящее время конструкторов цифровых интегральных схем, в которых импульсы тока распространяются по связям между блоками интегральных схем, причем время распространения импульса может быть больше длительности самого импульса. Но данные процессы не связаны с распространением волн, и поэтому их изучение выходит за рамки настоящего курса.

## 2.1. Дисперсия фазовой скорости волны. Групповая скорость

Пространство, в котором распространяется электромагнитная волна, может содержать свободные носители заряда (электроны, ионы), а также электрические или магнитные диполи, которые могут двигаться под действием электрического и магнитного полей. Рассмотрим среду, в которой имеются свободные носители заряда и, следовательно, ненулевой ток проводимости  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ . Тогда уравнение Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{H} = i\omega\epsilon_0\epsilon_r \vec{E} + \vec{j}$$

может быть записано как

$$\operatorname{rot} \vec{H} = i\omega\epsilon_0(\epsilon' - i\frac{\sigma}{\omega\epsilon_0}) \vec{E} = i\omega\epsilon_0\epsilon_k \vec{E},$$

где

$$\epsilon_k = \epsilon' - i\frac{\sigma}{\omega\epsilon_0}. \quad (2.1)$$

Эта величина носит название *относительной комплексной диэлектрической проницаемости* среды.

Если в среде имеются магнитные диполи, то магнитная проницаемость среды также оказывается комплексной:  $\mu_k = \mu' - i\mu''$  и уравнения Максвелла в комплексной форме примут вид

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -i\omega\mu_0\mu_k \vec{H}; \operatorname{rot} \vec{H} = i\omega\epsilon_0\epsilon_k \vec{E}.$$

Вещественные части проницаемостей характеризуют запасаемую в электрическом или в магнитном поле энергию. Мнимые части проницаемостей характеризуют рассеяние (потери) энергии в среде. Как вещественные, так и мнимые части проницаемостей среды зависят от частоты. Из формулы (2.1) видно, что в частном случае наличия свободных носителей заряда с ростом частоты увеличивается мнимая часть относительной диэлектрической проницаемости среды. И во всех других случаях наличия ненулевых мнимых частей проницаемости эти мнимые части увеличиваются с ростом частоты, поскольку с её ростом увеличивается интенсивность движения носителей заряда или диполей и, следовательно, растет поглощение энергии электромагнитного поля.

Для плоской волны, распространяющейся в среде с комплексной диэлектрической и магнитной проницаемостями, волновое уравнение для напряженности электрического поля примет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E(z) + \omega^2 \epsilon_0 \epsilon_k \mu_0 \mu_k E(z) = 0.$$

Из дисперсионного уравнения получим:

$$k^2 = \omega^2 \epsilon_0 \epsilon_k \mu_0 \mu_k.$$

Из того, что  $\epsilon_k$  и  $\mu_k$  комплексны, следует, что волновое число  $k$  также комплексно:

$$k = \omega \sqrt{\epsilon_0 \epsilon'_k \mu_0 \mu'_k} \sqrt{\left(1 - i \frac{\epsilon''_k}{\epsilon'_k}\right) \left(1 - i \frac{\mu''_k}{\mu'_k}\right)}.$$

Пусть  $\epsilon''_k \ll \epsilon'_k$  и  $\mu''_k \ll \mu'_k$ . Тогда воспользовавшись формулами приближенных вычислений, получим

$$k = \omega \sqrt{\epsilon_0 \epsilon'_k \mu_0 \mu'_k} \left(1 - \frac{1}{2} i \frac{\epsilon''_k}{\epsilon'_k} - \frac{1}{2} i \frac{\mu''_k}{\mu'_k}\right) = \beta - i\alpha,$$

где  $\beta$  – постоянная распространения;  $\alpha$  – постоянная (или декремент) затухания. Здесь

$$\beta = \omega \sqrt{\epsilon_0 \epsilon'_k \mu_0 \mu'_k}, \quad \alpha = \frac{1}{2} \beta (\operatorname{tg} \delta_\epsilon + \operatorname{tg} \delta_\mu),$$

где использовано общепринятое обозначение (тангенс дельта):

$$\operatorname{tg} \delta_\epsilon = \frac{\epsilon''_k}{\epsilon'_k}, \quad \operatorname{tg} \delta_\mu = \frac{\mu''_k}{\mu'_k}.$$

Использовав введенные обозначения, запишем решение уравнений Максвелла для плоской волны в следующем виде:

$$E(z, t) = E_m e^{i(\omega t - \beta z)} e^{-\alpha z}.$$

$e^{-\alpha z}$  – множитель в решении уравнений Максвелла, который определяет затухание волны, вызванное поглощением энергии за счет движения свободных носителей заряда и «трения» при переполяризации среды в переменном поле. Параметр  $\alpha$ , называемый *декрементом*, или *постоянной затухания волны*, является функцией частоты. С ростом частоты затухание волны, как правило, растет.

В вакууме  $\epsilon'_k = \mu'_k = 1$  и  $\epsilon''_k = \mu''_k = 0$ , соответственно,  $\alpha = 0$ , т. е. в вакууме волна не затухает. Таким образом, если  $\epsilon$  или  $\mu$  содержат в себе мнимую часть ( $\epsilon = \epsilon' - i\epsilon''$ ,  $\mu = \mu' - i\mu''$ ), то волновое число становится комплексным, а это означает появление затухания волны.

Рассмотрим два понятия, важных для исследования и описания распространения волн: а) дисперсию фазовой скорости волны, б) групповую скорость.

Напомним, что постоянная распространения волны  $\beta = \omega/v_{ph}$ , где фазовая скорость

$$v_{ph} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon'(\omega) \mu'(\omega)}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon'(\omega) \mu'(\omega)}}.$$

Здесь  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  – скорость света в вакууме.

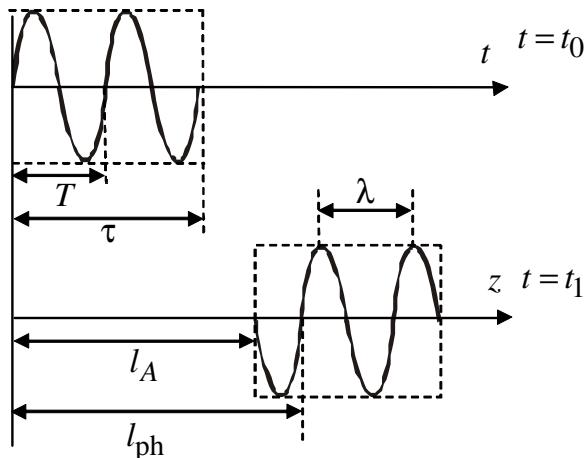


Рис. 2.1. Движение поверхностей постоянной фазы и постоянной амплитуды

В среде, содержащей заряды и диполи, фазовая скорость волны зависит от частоты (см., например, соотношение (2.1)). Зависимость фазовой скорости от частоты колебаний называют *дисперсией*, а среду, в которой это явление наблюдается, – *дисперсионной средой*. В дисперсионных средах скорость распространения сложных сигналов характеризуется *групповой скоростью*, которая определяется как скорость движения огибающей сигнала, или скорость перемещения максимальной амплитуды сигнала.

Рассмотрим распространение вдоль оси  $z$  радиоимпульса длительностью  $\tau$  с несущей частотой  $f = 1/T$  (рис. 2.1). На рисунке использованы следующие обозначения:  $l_A$  – путь, который поверхность постоянной ам-

плитуды прошла за промежуток времени  $t_1 - t_0$ ;  $l_{\text{ph}}$  – путь, который за время  $t_1 - t_0$  прошла поверхность постоянной фазы ( $l_{\text{ph}} > l_A$ , потому что  $v_{\text{ph}} > v_{\text{gr}}$ ). Заметим, что длина пути, который поверхность постоянной фазы прошла за промежуток времени  $t_1 - t_0$ , определяется фазовой скоростью:  $l_{\text{ph}} = v_{\text{ph}}(t_1 - t_0)$ , а длина пути, который поверхность постоянной амплитуды прошла за промежуток времени  $t_1 - t_0$ , определяется групповой скоростью:  $l_A = v_{\text{gr}}(t_1 - t_0)$ .

Остановимся на происхождении определения «групповая скорость». *Импульс сигнала* – это группа волн. Если наблюдать за импульсом достаточно продолжительное время, то можно заметить, что фазовые соотношения между волнами в составе группы изменяются, поэтому происходит движение «заполнения» импульса по отношению к его границам, т. е. изменяется взаимное расположение поверхностей постоянной фазы и постоянной амплитуды. Это и означает, что  $v_{\text{ph}}$  и  $v_{\text{gr}}$  не равны. Отметим также, что импульс претерпевает два вида изменений – затухает и расплывается. Волны в «группе» затухают, а их фазы становятся разными, потому что  $l_{\text{ph}}$  становится разной для разных волн (так расплывается облако, двигаясь в небе). Рис. 2.2 иллюстрирует расплывание огибающей радиоимпульса при его распространении в дисперсионной среде.

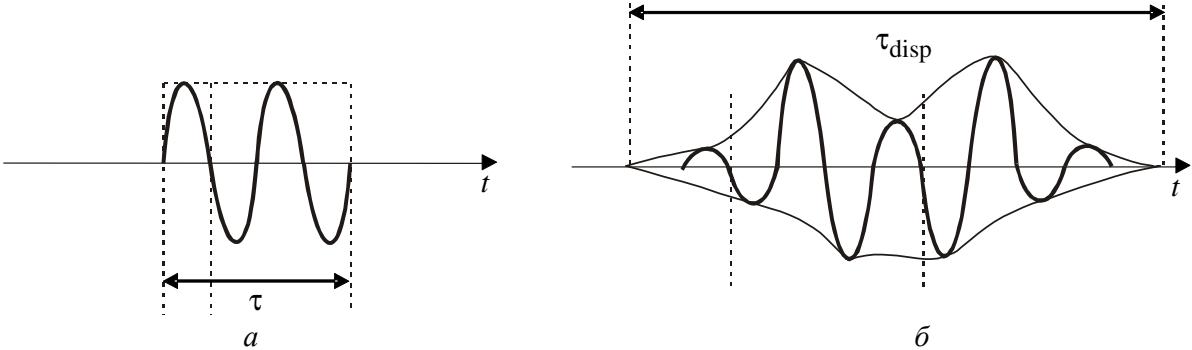


Рис. 2.2. «Расплывание» огибающей группы волн в результате дисперсии фазовой скорости: *а* – группа волн в начале процесса распространения в среде с дисперсией; *б* – та же группа через некоторое время

Для волн со слабым затуханием ( $\alpha \ll \beta$ ) теория сигналов дает следующее выражение для  $v_{\text{gr}}$ :

$$v_{\text{gr}} = \frac{1}{d\beta/d\omega}. \quad (2.2)$$

Поскольку для дисперсионной среды

$$\beta = \frac{\omega}{v_{\text{ph}}(\omega)}, \quad \frac{d\beta}{d\omega} = \frac{v_{\text{ph}} - \frac{dv_{\text{ph}}}{d\omega}\omega}{v_{\text{ph}}^2},$$

то, таким образом,

$$v_{\text{gr}} = \frac{v_{\text{ph}}}{1 - \frac{\omega}{v_{\text{ph}}} \frac{dv_{\text{ph}}}{d\omega}}.$$

В большинстве случаев в среде с дисперсией  $\frac{dv_{\text{ph}}}{d\omega} < 0$ . Это случай *нормальной дисперсии*. В остальных случаях, например в периодических структурах, может оказаться, что  $\frac{dv_{\text{ph}}}{d\omega} > 0$ . Это случай *аномальной дисперсии*.

Для среды со слабой нормальной дисперсией

$$\left| \frac{dv_{\text{ph}}}{d\omega} \right| \ll \frac{v_{\text{ph}}}{\omega} \quad \text{и} \quad v_{\text{gr}} \approx v_{\text{ph}} + \omega \frac{dv_{\text{ph}}}{d\omega}.$$

В вакууме  $v_{\text{gr}} = v_{\text{ph}} = c$ . Всегда  $v_{\text{gr}} \leq c$ .

Известный физик-теоретик Ричард Филлипс Фейнман (1918 – 1988) в своем знаменитом курсе физики описывает то, как можно представить себе электромагнитное поле (см. Фейнмановские лекции по физике. Т. 6. Электродинамика. М.: Мир, 1966). В частности, вот что он говорил об искажении спектра световых колебаний, вызванного дисперсией фазовой скорости света, при рассеянии света на каплях дождя: «Хватит ли у вас воображения, чтобы в спектральных кривых увидеть всю ту красоту, которую мы видим, смотря на радугу? У меня – нет». Тем не менее, если вы возьмете в библиотеке «Фейнмановские лекции по физике» и начнете их читать, то увидите, что они представляют собой не только строгое изложение основ теоретической физики, но и несут в себе красоту построения способов познания окружающей нас Природы.

## 2.2. Теорема Пойнтига

Далее будет рассмотрено, как электромагнитное поле запасает и переносит энергию, в частности, как энергия переносится электромагнитной волной. Перенос энергии электромагнитным полем был впервые изучен английским физиком Джоном Генри Пойнтигом (1852 – 1914).

**Энергия, запасенная электростатическим и магнитостатическими полями.** Напомним, что в разделах курса физики, посвященных электростатике и магнитостатике, выводятся соотношения для объемной плотности энергии, запасенной электрическим и магнитным полями.

Объемная плотность энергии электрического поля:

СИ (Дж/м <sup>3</sup> )	СГС (эр/см <sup>3</sup> )
$W_{\vec{E}} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r  \vec{E} ^2}{2};$	$W_{\vec{E}} = \frac{\epsilon  \vec{E} ^2}{8\pi}.$

Объемная плотность энергии магнитного поля:

СИ (Дж/м <sup>3</sup> )	СГС (эр/см <sup>3</sup> )
$W_{\vec{H}} = \frac{\mu_0 \mu_r  \vec{H} ^2}{2}$	$W_{\vec{H}} = \frac{\mu  \vec{H} ^2}{8\pi}$

Очевидно, что полная энергия, запасенная электрическим и магнитным полями в объеме  $V_0$ , определяется интегралами по объему:

$$W_{\vec{E} \text{ total}} = \int_{V_0} \frac{\epsilon_0 \epsilon_r |\vec{E}|^2}{2} dV; \quad (2.3)$$

$$W_{\vec{H} \text{ total}} = \int_{V_0} \frac{\mu_0 \mu_r |\vec{H}|^2}{2} dV. \quad (2.4)$$

Записанные выражения полезно сопоставить с выражениями для энергии, запасенной в конденсаторе с емкостью  $C$  и в катушке с индуктивностью  $L$ , если к конденсатору приложена разность потенциалов  $U$ , а через катушку протекает ток  $I$ :

$$W_C = CU^2/2; W_L = LI^2/2.$$

**Плотность потока энергии, переносимой электромагнитным полем.** При рассмотрении энергетических характеристик полей, меняющихся

по гармоническому закону, нельзя использовать сразу комплексную форму записи, так как энергетические характеристики связаны с напряженностью полей нелинейной операцией  $|\vec{E}|^2$ ,  $|\vec{H}|^2$ . Будем использовать уравнения

Максвелла в исходной форме:  $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ;  $\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$ .

Умножим скалярно первое уравнение на  $\vec{H}$ , второе – на  $\vec{E}$ . Поскольку  $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$  и  $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$ , то

$$\operatorname{rot} \vec{H} \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} + \vec{j} \cdot \vec{E}; \quad \operatorname{rot} \vec{E} \cdot \vec{H} = -\mu_0 \mu_r \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot \vec{H}.$$

Учтем, что  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\vec{E}|^2$  и  $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\vec{H}|^2$ . Вычтем одно уравнение из другого. Получим

$$\operatorname{rot} \vec{H} \cdot \vec{E} - \operatorname{rot} \vec{E} \cdot \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon_0 \epsilon_r |\vec{E}|^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu_r |\vec{H}|^2}{2} \right) + j \cdot \vec{E}.$$

Используем векторное тождество:

$$\operatorname{div} [\vec{E} \vec{H}] = -\vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{H} + \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{E}.$$

Тогда

$$\operatorname{div} [\vec{E} \vec{H}] = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon_0 \epsilon_r |\vec{E}|^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu_r |\vec{H}|^2}{2} \right) - j \cdot \vec{E}. \quad (2.5)$$

В результате проделанных преобразований получен новый вектор, образованный векторным произведением вектора напряженности электрического поля на вектор напряженности магнитного поля  $[\vec{E}, \vec{H}]$ .

Вектор  $[\vec{E}, \vec{H}]$  принято обозначать особым вектором: СИ  $[\vec{E}, \vec{H}] = \vec{\Pi}$ , СГС  $\frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}] = \vec{\Pi}$ .

Вектор  $\vec{\Pi}$  называется *вектором Пойнтинга*. Единица измерения вектора Пойнтинга  $[\vec{\Pi}]$  в СИ:  $(\text{В/м}) \cdot (\text{А/м}) = \text{Вт/м}^2$ . В системе СГС  $[\vec{\Pi}]$  изменяется в эрг/( $\text{с} \cdot \text{см}^2$ ).

Вектор Пойнтинга перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ . Направление вектора Пойнтинга совпадает с направлением переноса энергии электромагнитной волной.

- Модуль вектора Пойнтинга равен потоку энергии, переносимому электромагнитной волной в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению потока. Или, другими словами:
- вектор Пойнтинга представляет собой плотность потока энергии, переносимой электромагнитным полем.

Таким образом, выражение (2.5) представляет собой локальное уравнение баланса энергии, справедливое в данной точке пространства в данный момент времени.

Проинтегрируем (2.5) по объему  $V$  и используем теорему Гаусса–Остроградского ( $\int_V \operatorname{div} \vec{M} dV = \oint_S \vec{M} d\vec{S}$ ). Получим

$$\oint_S \vec{\Pi} d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \frac{\epsilon_0 \epsilon_r |\vec{E}|^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu_r |\vec{H}|^2}{2} \right) dV - \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV. \quad (2.6)$$

Слагаемые в правой части (2.6) представляют собой

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \frac{\epsilon_0 \epsilon_r |\vec{E}|^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu_r |\vec{H}|^2}{2} \right) dV - \text{скорость изменения энергии, запасенной электрическим и магнитным полями в объеме } V;$$

$\int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV$  – энергию, которая выделяется (или поглощается) в объеме за единицу времени за счет протекания тока;

$$\oint_S \vec{\Pi} d\vec{S} - \text{поток энергии, переносимой электромагнитным полем за единицу времени через поверхность } S.$$

В соответствии с формулами (2.3) и (2.4) соотношение (2.6) можно переписать так:

$$-\frac{\partial}{\partial t} (W_E \text{ total} + W_H \text{ total}) = \oint_S \vec{\Pi} d\vec{S} + \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV. \quad (2.7)$$

Выражение (2.7) – математическая запись *теоремы Пойнтинга* – закона сохранения энергии для электромагнитного поля. Теорема Пойнтинга формулируется следующим образом:

- *скорость изменения электромагнитной энергии, запасенной в объеме, равна сумме потока мощности через поверхность, ограничивающую этот объем, и мощности, поглощаемой или выделяемой протекающими в объеме токами.*

Вектор Пойнтинга показывает, насколько внутренние процессы в объеме неуравновешены: при  $\iint_S \vec{\Pi} d\vec{S} > 0$  энергия вытекает из объема  $V$ ; при

$\iint_S \vec{\Pi} d\vec{S} < 0$  энергия поступает в объем  $V$  извне.

**Теорема Пойнтинга в комплексной форме (баланс энергии при гармонических колебаниях).** Техника высоких частот использует быстрые гармонические колебания, поэтому мгновенные значения энергии практически неинтересны – нужны усредненные во времени энергетические характеристики.

Напомним из курса ТОЭ выражение для мощности в комплексной форме записи. Пусть ток и разность потенциалов имеют следующие физические описания и представления:

$$I(t) = I_m \cos \omega t, \text{ или } I(t) = I_m e^{i\omega t}; U(t) = U_m \cos(\omega t - \varphi), \text{ или } U(t) = U_m e^{i(\omega t - \varphi)}.$$

Мощность, переносимая током при заданной разности потенциалов:

$$I(t)U(t) = I_m U_m \frac{1}{2} [\cos \varphi + \cos(2\omega t - \varphi)].$$

Первое слагаемое, содержащее  $\cos \varphi$ , равно усредненному за период колебаний значению мощности:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T I(t)U(t) dt = \frac{1}{2} I_m U_m \cos \varphi.$$

Второе слагаемое – колеблющаяся с удвоенной частотой реактивная мощность:  $I_m U_m \cos 2\omega t$ .

Проведем усреднение гармонических колебаний  $U$  и  $I$ :

$$\overline{UI} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(U_m I_m^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(U_m^* I_m)$$

где  $U_m$  – комплексная амплитуда гармонического колебания: «\*» – знак комплексного сопряженная. Для векторных величин:

$$\overline{|\vec{E}|^2} = \frac{1}{2} \vec{E}_m \vec{E}_m^*,$$

$$\overline{\vec{E}\vec{H}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{E}_m \vec{H}_m^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{E}_m^* \vec{H}_m).$$

Тогда среднюю мощность  $P = \frac{1}{T} \int_0^T I(t) U(t) dt$  можно записать как

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(I_m U_m^*) = \frac{1}{2} |I_m| |U_m| \operatorname{Re} e^{i\varphi} = \frac{1}{2} |I_m| |U_m| \cos \varphi.$$

Перейдем теперь к теореме Пойнтига для гармонических колебаний. Взяв уравнения Максвелла в комплексной форме, произведем над ними следующие операции:

1. Произведем комплексное сопряжение над вторым уравнением.

2. Умножим скалярно первое уравнение на  $\vec{H}_m^*$ , второе на  $\vec{E}_m$ :

$$\operatorname{rot} \vec{E}_m = -i\omega \mu_0 \mu_r \vec{H}_m \text{ умножим на } \vec{H}_m^*,$$

$$\operatorname{rot} \vec{H}_m^* = -i\omega \epsilon_0 \epsilon_k \vec{E}_m^* + \vec{j}_m^* \text{ умножим на } \vec{E}_m.$$

3. Вычтем первое уравнение из второго:

$$\vec{E}_m \operatorname{rot} \vec{H}_m^* - \vec{H}_m^* \operatorname{rot} \vec{E} = -i\omega \epsilon_0 \epsilon_k \vec{E}_m^* \vec{E}_m + i\omega \mu_0 \mu_r \vec{H}_m \vec{H}_m^* + \vec{j}_m^* \vec{E}_m. \quad (2.8)$$

4. Используя векторное тождество (2.6), проинтегрируем (2.8) по объему  $V$  с учетом теоремы Гаусса и в результате получим:

$$i\omega \int_V \left( \frac{\epsilon_0 \epsilon_k \vec{E}_m^* \vec{E}_m}{2} - \frac{\mu_0 \mu_r \vec{H}_m \vec{H}_m^*}{2} \right) dV = \frac{1}{2} \oint_S [\vec{E}_m \vec{H}_m^*] d\vec{S} + \frac{1}{2} \int_V \vec{E}_m \vec{j}_m^* dV. \quad (2.9)$$

Для полей, изменяющихся во времени по гармоническому закону, вводится комплексный вектор Пойнтига:

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{2} [\vec{E}_m \cdot \vec{H}_m^*].$$

Среднее значение комплексного вектора Пойнтига

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \vec{E}_m \cdot \vec{H}_m^* \right] = \operatorname{Re} \vec{\Pi}.$$

Соотношение (2.9) представляет собой теорему Пойнтига в *комплексной форме*.

Чтобы понять физический смысл теоремы Пойнтига в комплексной форме, разделим вещественные и мнимые части выражения (2.9). Учтем, что  $\epsilon^* = \epsilon' + i\epsilon''$ ,  $\mu^* = \mu' - i\mu''$ . Тогда из (2.9) получим

$$\operatorname{Re} \oint_S \vec{\Pi} d\vec{S} = -\omega \oint_V \left( \frac{\epsilon_0 \epsilon'' \vec{E}_m^* \vec{E}_m}{2} + \frac{\mu_0 \mu'' \vec{H}_m^* \vec{H}_m}{2} \right) dV - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_V \vec{E}_m \vec{j}_m^* dV; \quad (2.10)$$

$$\operatorname{Im} \oint_S \vec{\Pi} d\vec{S} = \omega \oint_V \left( \frac{\epsilon_0 \epsilon' \vec{E}_m^* \vec{E}_m}{2} - \frac{\mu_0 \mu' \vec{H}_m^* \vec{H}_m}{2} \right) dV - \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_V \vec{E}_m \vec{j}_m^* dV. \quad (2.11)$$

Выражение (2.10) есть уравнение среднего баланса энергии при гармонических колебаниях. Левая часть уравнения дает средний поток активной мощности через поверхность  $S$ , ограничивающую рассматриваемый объем  $V$ . Первый член в правой части равен средней мощности потерь в объеме  $V$ , обусловленной потерями проводимости, потерями переполяризации диэлектрика ( $\epsilon'' \neq 0$ ) или потерями перемагничивания ( $\mu'' \neq 0$ ). В частности, если потери обусловлены только проводимостью среды, то  $\epsilon'' = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0}$ ,  $\mu'' \neq 0$  и первый член в правой части (2.10) приобретает привычный вид

$$\bar{P}_{\text{пот}} = \frac{1}{2} \int_V \sigma \vec{E}_m \vec{E}_m^* dV.$$

Второе слагаемое правой части уравнения (2.10) характеризует среднюю мощность источников, если они имеются в объеме. В частности, если потери в среде, заполняющей объем, отсутствуют, т. е.  $\epsilon'' = 0$  и  $\mu'' = 0$ , то вся мощность источников идет на излучение через поверхность объема:

$$\operatorname{Re} \oint_S \vec{\Pi} d\vec{S} = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_V \vec{E}_m \vec{j}_m^* dV.$$

Если объем заполнен средой с потерями, а источники внутри объема отсутствуют, то активная мощность, рассеиваемая в объеме, поступает в объем через его поверхность:

$$\operatorname{Re} \iint_S \vec{\Pi} d\vec{S} = -\omega \iint_V \left( \frac{\epsilon_0 \epsilon'' \vec{E}_m^* \vec{E}_m}{2} + \frac{\mu_0 \mu'' \vec{H}_m^* \vec{H}_m}{2} \right) dV.$$

Из приведенного рассмотрения выражения (2.10) следует, что средним значением комплексного вектора Пойнтига характеризуется плотность потока активной мощности. По аналогии с теорией электрических цепей величины, входящие в выражение (2.11), называют *реактивным потоком мощности и реактивными мощностями*.

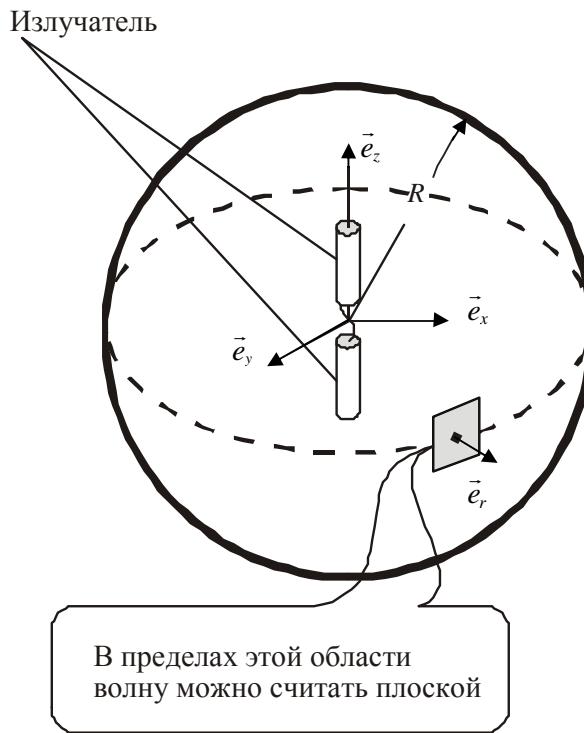


Рис. 2.3. Сферическая волна, излучаемая диполем. Выделен квадрат, в пределах которого волну можно считать плоской

**Вектор Пойнтига волны в свободном пространстве.** На рис. 2.3 показана схема образования сферической волны, излученной диполем, расположенным в начале сферической системы координат. Ограничимся рассмотрением выделенной области, в пределах которой волну можно считать плоской.

Рассмотрим плоскую электромагнитную волну, вектор  $\vec{E}$  которой в декартовой системе координат имеет только одну составляющую (см. рис. 2.4):

$$\vec{E} = \vec{e}_x E_m e^{i(\omega t - \vec{k}z)}.$$

Чтобы найти напряженность магнитного поля  $\vec{H}$ , используем уравнение Максвелла:  $\text{rot } \vec{E} = -i\omega\mu_0 \vec{H}$ .

Подставив в это уравнение  $\text{rot } \vec{E} = \vec{e}_y \frac{\partial E_x}{\partial z}$ , получим

$$\vec{H} = \vec{e}_y \frac{1}{-i\omega\mu_0} \frac{\partial E_x}{\partial z} = \vec{e}_y \frac{-ik}{-i\omega\mu_0} E_m e^{i(\omega t - \vec{k}z)}.$$

Воспользовавшись выражением для волнового вектора  $k = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ , получим

$$\frac{E_x}{H_y} = \frac{\omega\mu_0}{k} = \frac{\omega\mu_0}{\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}.$$

Отношение напряженностей электрического и магнитного полей плоской волны имеет единицу измерения сопротивления, обозначается буквой  $Z_0$  и называется *волновым сопротивлением свободного пространства*:

$$Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}.$$

( $Z_0$  – очень важная величина в электродинамике);

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{\frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}}} = 120\pi \text{ Ом} = 377 \text{ Ом.}$$

Итак, для плоской волны в свободном пространстве

$$\vec{E} = \vec{e}_x E_m e^{-ikz} e^{i\omega t}; \vec{H} = \vec{e}_y \frac{E_m}{Z_0} e^{-ikz} e^{i\omega t}.$$

Таким значениям векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  соответствует вектор Пойнтинга

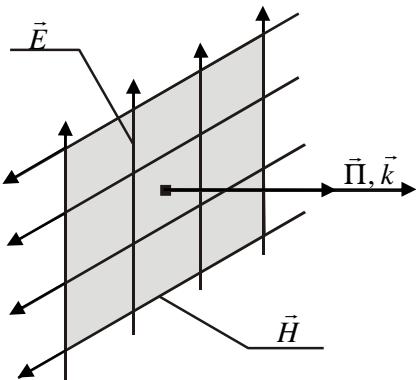


Рис. 2.4. Взаимная ориентация векторов напряженности электрического и магнитного полей, вектора Пойнтинга и волнового вектора для плоской волны в свободном пространстве

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{2} [\vec{E}, H^*] = \bar{e}_z \frac{|E_m|^2}{2Z_0}.$$

По направлению вектор Пойнтига совпадает с направлением волнового вектора  $\vec{k}$ . На рис. 2.4 показана взаимная ориентация векторов  $\vec{E}, \vec{H}, \vec{\Pi}, \vec{k}$ .

В качестве примера оценим, какова максимально возможная плотность мощности электромагнитной волны в сухом воздухе при атмосферном давлении (пробивная напряженность воздуха при этих условиях  $E_{\text{пр}} = 3 \cdot 10^6$  В/м):

$$\Pi = \frac{E_m^2}{2Z_0} = \frac{9 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 377} = 1,2 \cdot 10^{10} \text{ Вт/м}^2 = 1,2 \text{ МВт/см}^2.$$

Еще одна оценка величин. Поток мощности света от Солнца, находящегося в зените, составляет  $1,5 \text{ кВт/м}^2$ . Это значение соответствует амплитуде напряженности электрического поля световой волны

$$E_m = \sqrt{2Z_0\Pi} = \sqrt{2 \cdot 377 \cdot 1500} \cong 10^3 \text{ В/м}.$$

Распространение группы волн (волнового пакета) сопровождается переносом энергии. Группа волн распространяется с групповой скоростью  $v_{\text{grp}}$ . Отсюда можно заключить, что и перенос энергии электромагнитной волной происходит с групповой скоростью. В свободном пространстве (вакууме) групповая скорость равна скорости света.

Перенос энергии электромагнитной волной означает и перенос механического импульса. При любом отражении волна передает отражателю импульс. Передача импульса образует давление волны на предмет, от которого она отражается. Русский физик Петр Николаевич Лебедев (1855 – 1912) в 1899 г. экспериментально обнаружил и измерил давление света. Эксперименты П. Н. Лебедева стали важнейшим подтверждением правильности теории Дж. К. Максвелла.

### 2.3. Теорема взаимности в электродинамике

Перенос энергии или передача сигнала происходят от источника энергии к потребителю энергии или от источника сигнала к приемнику. Возникает вопрос, изменяются ли свойства среды либо электрических цепей, по которым происходит передача энергии или сигнала, от направления этой передачи. В природе существуют электрические цепи и такие среды, в которых распространяются электромагнитные волны, что их свойства не зависят от направления распространения волны или направления протекания тока. Такие цепи и среды называются *взаимными*. Существуют цепи и среды, свойства которых зависят от направления распространения волны или от направления протекания тока. Такие цепи и среды называются *невзаимными*.

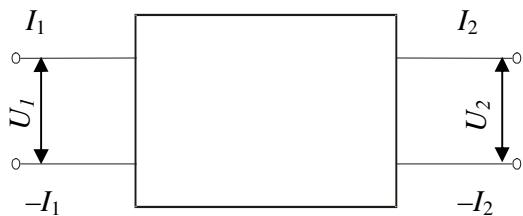


Рис. 2.5. Напряжение и ток на входе и на выходе четырехполюсника



Рис. 2.6. Генератор ЭДС и нагрузка в виде амперметра с нулевым внутренним сопротивлением (к определению свойств взаимного четырехполюсника)



Рис. 2.7. Генератор ЭДС и амперметр переставлены. Если показания амперметра не меняются, четырехполюсник взаимен

Рассмотрим линейный четырехполюсник (рис. 2.5). Электрическая цепь описывается Y- или Z-матрицей:

$$I_1 = U_1 y_{11} + U_2 y_{12};$$

$$I_2 = U_1 y_{21} + U_2 y_{22};$$

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \|Y\| \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}.$$

Определение: электрическая цепь называется *взаимной*, если ее Y- или Z-матрица симметрична, т. е.

$$Y_{12} = Y_{21}, \quad Z_{12} = Z_{21}. \quad (2.12)$$

Следствие: если во взаимной цепи поменять местами источник ЭДС и амперметр, то показания амперметра не изменятся.

Это утверждение иллюстрируется рис. 2.6 и 2.7. Полагаем, что ЭДС источника  $e_0$ , а внутреннее сопротивление амперметра равно нулю. Тогда  $U_1 = e_0$ , следовательно,

$$U_2 = 0; \quad I_2 = e_0 y_{21}.$$

Поменяем местами источник ЭДС и амперметр. Тогда  $U_1 = 0$ ;  $I_1 = e_0 y_{12}$ .

Если условие (2.12) выполнено, то  $I_2 = I_1$ .

Аналогично обстоит дело и в случае СВЧ-канала передачи сигналов (рис. 2.8): если цепи питания антенн и среда между антеннами обладают свойствами взаимности и если поменять местами генератор и приемник излучения, то показания индикатора на шкале приемника не изменятся.

В электродинамике доказывается *теорема взаимности*. Эта теорема определяет условия, при которых электрическая цепь или среда, в которой распространяется волна, обладают свойствами взаимности.

При обсуждении экспериментальных иллюстраций проявления взаимности электрических цепей нужно помнить о сформулированном ранее условии, что цепи линейны. В противном случае можно представить себе эксперимент, когда генератор мощностью несколько киловатт меняется местами с высокочувствительным приемником (рис. 2.8), связанным с небольшой антенной. При такой замене небольшая антенна приемника под действием мощности генератора просто сгорит, это будет проявление *нелинейности* электродинамических свойств небольшой антенны приемника.

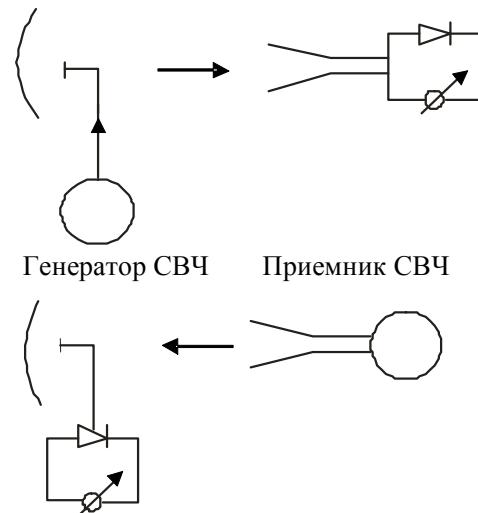


Рис. 2.8. Иллюстрация проявления взаимности при передаче СВЧ-сигнала. Если цепи антенн и среда между антеннами обладают взаимностью, перестановка генератора и приемника ничего не меняет

Теорема:

- если электродинамическая система (цепь) заполнена средой со скалярной диэлектрической и магнитной проницаемостями, то такая система (цепь) взаимна.

Прежде чем доказать сформулированную теорему, рассмотрим следующее соотношение, известное в электродинамике как лемма Лоренца\*, которая формулируется так:

- если имеются два источника когерентных колебаний, то в линейной среде, имеющей скалярную диэлектрическую и магнитную проницаемости, справедливо следующее соотношение:

$$\operatorname{div}\left\{\left[\vec{E}_a \vec{H}_b\right]-\left[\vec{E}_b \vec{H}_a\right]\right\}=0, \quad (2.13)$$

где  $\vec{E}_a$ ,  $\vec{H}_a$  – электромагнитное поле, созданное источником  $a$ ;  $\vec{E}_b$ ,  $\vec{H}_b$  – поле, созданное источником  $b$ . Источники могут быть расположены произвольно.

Соотношение (2.13) верно, если диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, в которой существует поля, возбужденные источниками  $a$  и  $b$ , скалярны, т. е.  $\epsilon$  и  $\mu$  – скаляры. Лемма Лоренца является следствием уравнений Максвелла.

Применим к формуле (2.13) соотношение из векторной алгебры, которым уже неоднократно пользовались:

$$\operatorname{div}\left\{\left[\vec{E}_a \vec{H}_b\right]-\left[\vec{E}_b \vec{H}_a\right]\right\}=\vec{H}_b \operatorname{rot} \vec{E}_a-\vec{E}_a \operatorname{rot} \vec{H}_b-\vec{H}_a \operatorname{rot} \vec{E}_b+\vec{E}_b \operatorname{rot} \vec{H}_a.$$

Используя уравнения Максвелла, исключим роторы из полученного соотношения.

Тогда получим

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\left\{\left[\vec{E}_a \vec{H}_b\right]-\left[\vec{E}_b \vec{H}_a\right]\right\} &= \\ &=\vec{H}_b\left(-i \omega \mu \vec{H}_a\right)-\vec{E}_a\left(i \omega \epsilon \vec{E}_b\right)-\vec{H}_a\left(-i \omega \mu \vec{H}_b\right)+\vec{E}_b\left(i \omega \epsilon \vec{E}_a\right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Если магнитная и диэлектрическая проницаемости являются скалярами, можно записать следующие равенства:  $\vec{H}_b \mu \vec{H}_a = \vec{H}_a \mu \vec{H}_b$  и  $\vec{E}_b \epsilon \vec{E}_a = \vec{E}_a \epsilon \vec{E}_b$ .

Подставив данные равенства в правую часть равенства (2.14), убедимся, что эта часть равенства равна нулю. Таким образом, справедливость

---

\*Хендрик Антон Лоренц (1853 – 1928) – нидерландский физик-теоретик.

леммы Лоренца доказана.

Используя теорему Гаусса–Остроградского к соотношению (2.14), получим

$$\int_S \left\{ \left[ \vec{E}_a \vec{H}_b \right] - \left[ \vec{E}_b \vec{H}_a \right] \right\} dS = 0.$$

Пусть изображенный на рис. 2.9 четырехполюсник имеет два плеча, затянутые поверхностими  $S_p$  и  $S_q$ . Интеграл по каждой из поверхностей можно заменить произведением напряжения на ток:

$$\int_{S_p} \left[ \vec{E}_a \vec{H}_b \right] dS = u_p^a i_p^b.$$

Тогда (2.13) может быть переписано в следующем виде:

$$(u_p^a i_p^b - u_p^b i_p^a) - (u_q^a i_q^b - u_q^b i_q^a) = 0. \quad (2.15)$$

Запишем токи через напряжения, используя компоненты  $Y$ -матрицы:

$$\begin{cases} i_p^a = u_p^a y_{pp} + u_q^a y_{pq}, \\ i_q^a = u_p^a y_{qp} + u_q^a y_{qq} \end{cases}$$

– от генератора  $a$ ;

$$\begin{cases} i_p^b = u_p^b y_{pp} + u_q^b y_{pq}, \\ i_q^b = u_p^b y_{qp} + u_q^b y_{qq} \end{cases}$$

– от генератора  $b$ .

Подставим  $i_p^a, i_q^a, i_p^b, i_q^b$  в (2.15). Приведя подобные члены, получим

$$(u_p^a u_q^a - u_p^b u_q^b)(y_{pq} - y_{qp}) = 0.$$

Поскольку  $u_p^a, u_q^a, u_p^b, u_q^b$  могут быть любыми, то  $y_{pq} - y_{qp} = 0$ , т. е.

$Y$ -матрица симметрична.

В соответствии с данным в начале 2.3 определением рассматриваемая среда взаимна. Или, другими словами, если среда, заполняющая систему,



Рис. 2.9. Напряжения и токи от источников  $a$  и  $b$  на входах  $p$  и  $q$  четырехполюсника (к выводу теоремы о взаимности)

описывается скалярными диэлектрической и магнитной проницаемостями, то  $Y$ - и  $Z$ -матрицы системы симметричны, т. е. система взаимна.

Если диэлектрическая и магнитная проницаемости материала – скаляры, то материал является изотропным, т. е. его свойства не зависят от направления векторов поля.

Приведенное определение теоремы взаимности несколько сужено. В более полной формулировке теорема взаимности формулируется так:

- если среда, заполняющая систему, описывается симметричными тензорами диэлектрической и магнитной проницаемостей, то  $Y$ - и  $Z$ -матрицы системы симметричны, т. е. система взаимна.

Для упрощения изложения материала здесь не используется тензорное описание диэлектрической и магнитной проницаемостей среды.

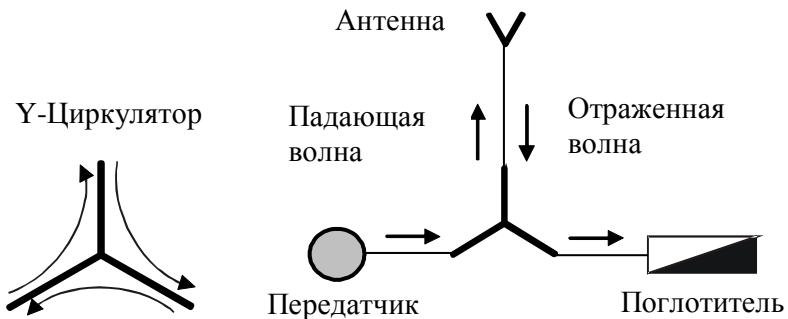


Рис. 2.10.  $Y$ -Циркулятор как пример невзаимной цепи. Если антenna недостаточно хорошо согласована, то отраженная от антены мощность не нарушает работу передатчика, а просто поглощается в нагрузке, что очень важно в радиолокации.

В гл. 7, в которой будут рассмотрены СВЧ-свойства намагниченного феррита, речь пойдёт о тензоре магнитной проницаемости феррита. Этот тензор окажется несимметричным, и, соответственно, СВЧ-устройства, содержащие намагниченный феррит, невзаимны. Действительно, для осуществления невзаимного устройства нужна среда с проницаемостью, описываемой несимметричным тензором. Такой средой служит намагниченный феррит. Забегая вперед, приведем пример невзаимной СВЧ-цепи, которая имеет название « $Y$ -циркулятор». Рис. 2.10 иллюстрирует пример невзаимной цепи с  $Y$ -циркулятором, который широко используется в технике СВЧ, в частности для защиты СВЧ-передатчика от волны, отраженной от несогласованной нагрузки.

Вернемся к цепям и средам, обладающим взаимностью, т. е. удовлетворяющим условиям реализации теоремы взаимности. Например, любая антenna, не содержащая в своей конструкции намагниченного феррита, имеет одинаковые свойства как в режиме приема, так и в режиме передачи. Поэтому расчет антенн производится, как правило, в режиме передачи, т. е. в режиме излучения волн.

### **3. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ, ПОТЕНЦИАЛЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ПОЛЕЙ**

Устройства или приборы, в которых происходит передача, усиление, преобразование спектра (фильтрация) пакетов электромагнитного поля, сформированы в виде объемов или поверхностей, образованных материалами с различными диэлектрическими, магнитными свойствами или параметрами проводимости. В состав устройства или прибора могут входить объемные элементы, занятые диэлектрическими или магнитными материалами, а также поверхности, образованные проводниками (медь, серебро, золото, сплавы) или сверхпроводниками. Для анализа действия приборов или их проектирования нужно понимать, что происходит с векторами электромагнитного поля на границе объемов или поверхностей, образованных средами с различными диэлектрическими, магнитными или проводниковыми параметрами. Количественная связь между компонентами векторов электромагнитного поля на границе раздела сред с различными свойствами определяется граничными условиями, о которых здесь и пойдет речь.

Далее будут рассмотрены потенциалы электрического и магнитного полей. Из традиционного курса электротехники известно, что напряженность электрического поля  $\vec{E}$  связана с электростатическим потенциалом  $\phi$ :  $\vec{E} = -\text{grad } \phi$ .

В практической электротехнике широко используется понятие разности потенциалов или электрической напряженности, измеряемых в вольтах. Напряженность электрического поля привлекается к практическому использованию, когда нужно охарактеризовать прочность изоляционных материалов по отношению к электрическому пробою. Для более широкого

представления об электромагнитном поле в электродинамике используются как потенциалы, так и напряженности поля. В курсе физики установлено, что потенциал определяет энергию заряженной частицы в электромагнитном поле, напряженность же поля определяет силу, с которой поле действует на частицу. При решении задач электродинамики или техники СВЧ в одних случаях удобнее пользоваться описанием поля с помощью напряженности поля, а в других – с помощью потенциалов. Поэтому важно знать оба способа описания свойств электромагнитного поля, а также переходы от одного способа описания к другому.

### 3.1. Граничные условия для векторов электрического и магнитного полей на границе раздела двух сред

*Граничные условия для вектора электрической индукции.* Рассмотрим границу раздела двух сред с различными диэлектрическими проницаемостями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ . Выделим на границе элементарный цилиндр (рис. 3.1).

Согласно теореме Гаусса–Остроградского, поток вектора электрической индукции  $\vec{D}$  через замкнутую поверхность  $S$  равен алгебраической сумме зарядов внутри объема  $V$ , ограниченного этой поверхностью:

$$\iint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV. \quad (3.1)$$

Устремим высоту цилиндра к нулю ( $\delta \rightarrow 0$ ). Тогда (3.1) преобразуется так:

$$-D_{1,n}S + D_{2,n}S = \rho\delta S, \quad (3.2)$$

где  $D_{1,n}$ ,  $D_{2,n}$  – компоненты вектора индукции, перпендикулярные границе раздела;  $S$  – площадь основания цилиндра.

Введем поверхностную плотность заряда:  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \rho\delta = \rho_{\text{sur}}$ .

Единица измерения поверхностной плотности заряда  $\rho_{\text{sur}}$  – кулон на квадратный метр ( $\text{Кл}/\text{м}^2$ ).

Тогда (3.2) можно переписать в виде

$$D_{2,n} - D_{1,n} = \rho_{\text{sur}}.$$

Если плотность поверхностного заряда равна нулю ( $\rho_{\text{sur}} = 0$ ), то

$$D_{1,n} = D_{2,n}.$$

Можно сформулировать следующее важное утверждение:

- на границе раздела, не содержащей поверхностных зарядов, нормальная составляющая вектора электрической индукции непрерывна.

**Границные условия для вектора магнитной индукции.** Рассмотрим границу раздела двух сред, обладающих различной магнитной проницаемостью. Исходя из тех же соображений, что и ранее, и если принять во внимание, что магнитных зарядов не существует, можно записать:

$$B_{1,n} = B_{2,n}.$$

Это равенство равносильно следующему утверждению:

- на границе раздела двух сред нормальная составляющая вектора магнитной индукции всегда непрерывна.

**Границные условия для вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$ .** Рассмотрим снова границу раздела двух сред с различными диэлектрическими проницаемостями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ . Выделим на границе замкнутый контур в соответствии с рис. 3.2 и используем закон электромагнитной индукции:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{L} = -i\omega \int_S \vec{B} d\vec{S},$$

где  $L$  – выбранный контур;  $L = 2(1 + \delta)$ ;  $S$  – площадь поверхности, ограниченная контуром  $L$ .

Устремим ширину контура  $\delta$  к нулю, тогда поток вектора  $\vec{B}$  через поверхность  $S$  обратится в нуль, а значит получим

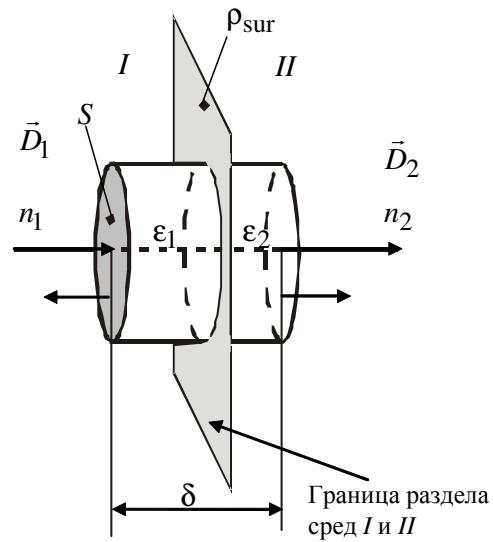


Рис. 3.1. Элементарный цилиндр, выделенный на границе раздела двух сред для определения граничных условий на вектор электрической индукции.  $n_1$  и  $n_2$  – нормали к поверхности  $S$ .

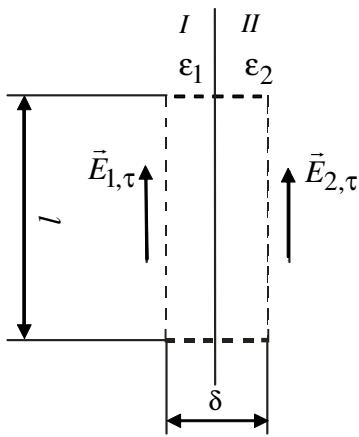


Рис. 3.2. Контур на границе раздела двух сред, используемый при определении граничных условий для векторов напряженности электрического поля

$$\oint_L \vec{E} d\vec{L} = 0$$

или  $E_{1,\tau}l - E_{2,\tau}l = 0$ , откуда следует, что

$$E_{1,\tau} = E_{2,\tau}.$$

Это равенство равносильно следующему утверждению:

- на границе раздела двух сред касательная составляющая вектора напряженности электрического поля всегда непрерывна.

**Границные условия для вектора напряженности магнитного поля  $\vec{H}$ .** Как и в предыдущем случае, выделим на границе раздела двух сред замкнутый контур  $L$  (см. рис. 3.2). Воспользуемся законом полного тока

$$\oint_L \vec{H} d\vec{L} = \int_S \vec{j} d\vec{S}, \quad (3.3)$$

где  $\vec{j}$  – плотность тока, протекающего через поверхность  $S$ , ограниченную контуром  $L$ .

Учтем, что вдоль границы раздела может течь ток проводимости, тогда при стремлении  $\delta \rightarrow 0$  следует ввести поверхностную плотность тока:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} j_{\tau} \delta = j_{\text{sur}}.$$

Единицы измерения поверхностной плотности тока  $j_{\text{sur}}$  – ампер на метр (А/м). Теперь (3.3) можно переписать так:

$$H_{1,\tau}l - H_{2,\tau}l = j_{\text{sur}}l,$$

откуда следует, что

$$H_{1,\tau} - H_{2,\tau} = j_{\text{sur}}.$$

Это равенство равносильно следующему утверждению:

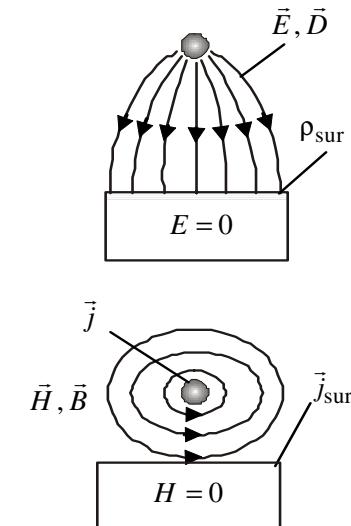


Рис. 3.3. Силовые линии электрического и магнитного полей вблизи поверхности идеального проводника

- на границе раздела двух сред разность касательных составляющих напряженности магнитного поля равна поверхностной плотности тока.

При отсутствии поверхностного тока

$$H_{1,\tau} = H_{2,\tau}.$$

Это равенство равносильно следующему утверждению:

- на границе раздела двух сред, по которой поверхностный ток не течет, касательная составляющая магнитного поля непрерывна.

**Границные условия на поверхности идеального проводника.** Определим идеальный проводник как проводник, внутрь которого не может проникать электромагнитное поле ( $E_{in} = 0, H_{in} = 0$ ). Для полей СВЧ-диапазона хорошие проводники (серебро, медь) можно в первом приближении рассматривать как идеальные. На поверхности такого проводника, тем не менее, может течь ток проводимости и формироваться поверхностный заряд. Поэтому на поверхности идеального проводника  $E_\tau = 0$ ,  $D_n = \rho_{sur}, B_n = 0, H_\tau = j_{sur}$ .

Силовые линии электрического поля перпендикулярны к поверхности идеального проводника; силовые линии магнитного поля касательны к поверхности идеального проводника (рис. 3.3).

### 3.2. Поверхностное сопротивление металла по отношению к электромагнитному полю

Рассмотрим случай, когда электромагнитная волна падает на поверхность, образованную неидеальным металлом. Проводимость металла велика, но не бесконечна. Волна может проникать в металл на небольшую глубину и в нём быстро затухает. Ставится задача определить граничные условия для волны со стороны свободного пространства (вакуума).

На рис. 3.4 показана граница раздела «металл – вакуум». Граничные условия для касательных составляющих векторов напряженности электрического и магнитного полей:  $E_{1,\tau} = E_{2,\tau}$  и  $H_{1,\tau} = H_{2,\tau}$ .

На поверхности металла со стороны вакуума отношение касательных компонентов  $\vec{E}$ - и  $\vec{H}$ -полей называется *поверхностным импедансом проводника* и выражается формулой  $Z_{sur} = E_{\tau 1}/H_{\tau 1}$ . Со стороны металла отношение касательных составляющих  $E$ - и  $H$ -полей дает волновое сопротивление металлической среды:

$$E_{\tau 2}/H_{\tau 2} = Z_{0\text{met}}.$$

С учётом непрерывности касательных составляющих электрического и магнитного полей на границе раздела получим  $Z_{\text{sur}} = Z_{0\text{met}}$ .

Чтобы найти волновое сопротивление металлической среды обратимся снова к уравнениям Максвелла:

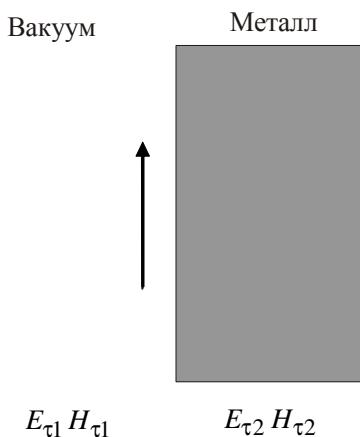


Рис. 3.4. Падение электромагнитной волны со стороны вакуума на неидеальный металл

и ввести обозначение

$$\varepsilon_{\text{ef}} = \varepsilon_0 + \frac{\sigma}{i\omega} \equiv \frac{\sigma}{i\omega},$$

где  $\varepsilon_{\text{ef}}$  – эффективная диэлектрическая проницаемость металла.

Напомним, что для вакуума волновое сопротивление  $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ .

Заменой  $\varepsilon_0$  на  $\varepsilon_{\text{ef}}$  получим для металла:

$$Z_{0\text{ met}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\sigma/i\omega}} = \sqrt{\frac{i\omega\mu_0}{\sigma}}.$$

Таким образом, поверхностный импеданс металла

$$Z_{\text{sur}} = \sqrt{\frac{i\omega\mu_0}{\sigma}} = R_{\text{sur}} + iX_{\text{sur}}.$$

Используя  $\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ , получим выражения для активной и реактивной составляющих поверхностного импеданса проводника:

$$R_{\text{sur}} = \sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\sigma}}; X_{\text{sur}} = \sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\sigma}}. \quad (3.4)$$

Аналогично найдем волновое число волны в металле:

$$k = \omega \sqrt{\frac{\sigma}{i\omega} \mu_0} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega\mu_0} \sigma = (1-i) \frac{1}{\delta_{\text{ск}}},$$

где

$$\delta_{\text{ск}} = \sqrt{2/\omega\mu_0\sigma}.$$

Декремент затухания волны в металле  $\alpha$  определяется найденным параметром  $\delta_{\text{ск}}$ :

$$\alpha = 1/\delta_{\text{ск}}.$$

На глубине  $l = \delta_{\text{ск}}$  амплитуды напряженности поля затухают в  $e$  раз. Параметр  $\delta_{\text{ск}}$  принято называть «*скиновая глубина*», или «*глубина проникновения волны в металл*». Для меди при  $f = 10$  ГГц и 300 К  $\delta_{\text{ск}} = 0.6$  мкм.

Поверхностное сопротивление для меди при тех же условиях в соответствии с формулой (3.4)  $R_{\text{sur}} = 0,025$  Ом.

### 3.3. Потенциалы электромагнитного поля

Напомним, что в теории статических полей вводятся вспомогательные функции – скалярный потенциал электрического поля  $\phi$  и векторный потенциал магнитного поля  $\vec{A}$  – таким образом, что

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi; \quad (3.5)$$

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A}. \quad (3.6)$$

В электродинамике для описания электромагнитных полей тоже вводятся скалярный  $\phi$  и векторный  $\vec{A}$  электродинамические потенциалы. Введение потенциалов электромагнитного поля позволяет значительно облегчить решение ряда задач электродинамики. В начале этой главы уже упоминалось о том, что потенциалы определяют энергию заряженной частицы в электромагнитном поле, а напряженность поля определяет силу, с которой поле действует на частицу. Сила, которая действует на частицу, движущуюся в электрическом и в магнитном полях, определяется формулой

$$\vec{F} = q(\vec{E} + [\vec{v} \vec{B}]),$$

где  $q$  – заряд частицы,  $v$  – её скорость.

Эта формула носит название *формулы Лоренца*. Она широко используется при динамическом расчете движения заряженных частиц (электро-

нов или ионов) в электрическом и в магнитном полях. При решении задач квантовой механики силы, действующие на частицы, как правило, в расчет не принимаются. Для расчета квантовых состояний частиц в электрическом и в магнитном полях в соответствующие уравнения вводятся скалярный  $\phi$  и векторный  $\vec{A}$  электродинамические потенциалы, которые определяют энергию частиц в соответствующих квантовых состояниях.

Роль, которую играют потенциалы  $\phi$  и  $\vec{A}$  в электродинамике и квантовой механике, хорошо описана в уже упомянутых «Фейнмановских лекциях по физике» (см. Т. 6 «Электродинамика» и Т. 9 «Квантовая механика» М.: Мир, 1966; 1967.).

Рассмотрим, как потенциалы  $\phi$  и  $\vec{A}$  связаны с векторами напряженности электрического и магнитного полей, и найдем уравнения, которым удовлетворяют указанные потенциалы. Для этого будем использовать уравнения Максвелла.

Зададим векторный потенциал  $\vec{A}$  так, как это делается для статических полей (3.6). Подстановка (3.6) в уравнение Максвелла:

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

приводит к следующему равенству:

$$\text{rot} \left( \vec{E} + \mu\mu_0 \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (3.7)$$

С использованием тождества векторной алгебры  $\text{rot grad } \vec{a} \equiv 0$  функцию, стоящую в (3.7) в скобках, можно приравнять градиенту некоторого скаляра:

$$\vec{E} + \mu\mu_0 \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad } \phi. \quad (3.8)$$

Разумно предположить, что этот скаляр есть скалярный потенциал электрического поля. Тогда в статическом случае, когда производная по времени равна нулю, соотношение (3.8) превращается в уже принятое соотношение (3.5).

Итак, получено выражение для напряженности электрического поля, изменяющегося во времени:

$$\vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi. \quad (3.9)$$

Согласно выражению (3.9), напряженность электрического поля может быть разделена на *вихревую* и *потенциальную* части, причем вихревая часть имеет место только в случае изменяющихся во времени полей.

Таким образом, напряженности поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  выражаются через электродинамические потенциалы  $\vec{A}$  и  $\varphi$  с помощью соотношений (3.6) и (3.9), и для описания электромагнитных полей достаточно знать четыре потенциальные функции – три проекции  $\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$  и  $\varphi$ .

Получим дифференциальные уравнения для электродинамических потенциалов  $\vec{A}$  и  $\varphi$ . Для этого в уравнения Максвелла

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}; \quad \text{div } \vec{D} = \rho$$

подставим выражения (3.6) и (3.9):

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \vec{A} &= \vec{j} - \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{grad } \varphi) - \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}; \\ -\text{div grad } \varphi - \mu \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{A} &= \frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Воспользуемся известным соотношением векторной алгебры:

$$\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A}.$$

Тогда (3.10) можно переписать так:

$$\begin{aligned} -\Delta \vec{A} + \text{grad} \left( \text{div } \vec{A} + \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= \vec{j}; \\ \Delta \varphi + \mu \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{A}) &= -\frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Дифференциальные уравнения (3.11) связывают электродинамические потенциалы ( $\vec{A}$  и  $\varphi$ ) с источниками – с зарядами и с токами ( $\rho$  и  $\vec{j}$ ).

Наложим дополнительное условие, позволяющее разделить уравнения для потенциалов:

$$\text{div } \vec{A} + \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (3.12)$$

Условие (3.12) называется *условием калибровки Лоренца*. Используя калибровку Лоренца, можем систему уравнений (3.11) переписать в более простом виде:

$$\begin{aligned}\Delta \vec{A} - \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\vec{j}; \\ \Delta \phi - \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0}.\end{aligned}\tag{3.13}$$

Эти уравнения описывают те же физические процессы, которые описываются уравнениями Максвелла. Система уравнений (3.13) образована двумя уравнениями. Такое разделение уравнений оправдано физически: в уравнение для  $\vec{A}$  входит плотность тока (токи являются источниками магнитных полей), а в уравнение для  $\phi$  входит плотность зарядов (заряды являются источниками и стоками электрического поля). Уравнения (3.13) могут быть записаны как четыре скалярных дифференциальных уравнения для потенциалов с одинаковой формой для всех четырех функций:  $\phi, A_x, A_y, A_z$ . При  $\vec{j} = 0$  и  $\phi = 0$  уравнения (3.13) переходят в волновые уравнения, которые для гармонических колебаний примут вид

$$\begin{aligned}\Delta \vec{A} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu \vec{A} &= 0; \\ \Delta \phi + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu \phi &= 0.\end{aligned}\tag{3.14}$$

В отсутствие временной зависимости ( $\omega \rightarrow 0$ ) уравнения (3.14) переходят, соответственно, в уравнения магнитостатики и уравнения Пуассона:

$$\Delta \vec{A} = -\vec{j}; \quad \Delta \phi = -\frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0}.$$

При отсутствии источников ( $\vec{j} = 0$  и  $\phi = 0$ ) уравнения Пуассона превращаются в уравнения Лапласа:

$$\Delta \vec{A} = 0; \quad \Delta \phi = 0.$$

В отсутствие временной зависимости ( $\omega \rightarrow 0$ ) калибровка Лоренца (3.12) примет следующий вид:

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0,$$

который носит название «*калибровка Кулона*».

При решении задач техники СВЧ, как правило, бывает достаточно решить задачу относительно одной из четырех функций координат:  $\phi, A_x, A_y, A_z$ . Выбранная функция является скаляром, что сильно упрощает решение используемых дифференциальных уравнений. Подчеркнем здесь, что решение дифференциальных уравнений требует формулировки граничных условий. В следующих главах настоящего курса лекций будут рассмотрены различные волноведущие структуры и найдены их свойства решением дифференциальных уравнений относительно одной из названных ранее четырех функций координат  $(\phi, A_x, A_y, A_z)$ . При решении этих задач будут сформулированы необходимые граничные условия. Получив решение относительно избранного электродинамического потенциала, компоненты векторов электрического и магнитного полей можно найти с помощью приведенных соотношений (3.6) и (3.9).

Рассмотрим еще один векторный потенциал. При решении некоторых задач техники СВЧ заранее известно, что электрическое поле носит вихревой характер, т. е. скалярный потенциал  $\phi = 0$ . При этом из (3.9) и (3.12) получим

$$\vec{E} = -i\omega\mu_0 \vec{A}; \quad (3.15)$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0. \quad (3.16)$$

Имея в виду, что  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{M}) = 0$ , где  $\vec{M}$  – произвольная векторная функция, можно заключить, что из (3.16) и (3.15) следует:

$$\vec{A} = \operatorname{rot} \vec{F}, \quad \vec{E} = -i\omega\mu_0 \operatorname{rot} \vec{F}. \quad (3.17)$$

Здесь вектор  $\vec{F}$  представляет собой «электрический» векторный потенциал в отличие от традиционного «магнитного» векторного потенциала  $\vec{A}$ . Подставив (3.17) в уравнения Максвелла, найдем, что вектор  $\vec{F}$ , как и вектор  $\vec{A}$ , удовлетворяет волновому уравнению. Найдя решение волнового уравнения для одного из компонентов  $F_x, F_y, F_z$ , определим компоненты вектора напряженности электрического поля с помощью соотношения (3.17) и далее компоненты вектора напряженности магнитного поля с помощью соответствующего уравнения Максвелла. В конкретных случаях использование «электрического» векторного потенциала  $\vec{F}$  облегчает решение соответствующих электродинамических задач.

## 4. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ВОЛНОВОДАХ

Волновод – канал с резкими границами, по которому распространяется волна. Волноводы бывают оптические, акустические и радиоволноводы. Радиоволноводы представляют собой металлические трубы или диэлектрические стержни (диэлектрические волноводы). В своем рассмотрении ограничимся волноводами в виде металлических труб и начнем с простейшего примера – прямоугольного волновода с основным типом поля.

### 4.1. Основной тип поля в прямоугольном волноводе

На рис. 4.1 показан прямоугольный волновод, представляющий собой прямоугольную металлическую трубу с тщательно отполированной внутренней поверхностью.

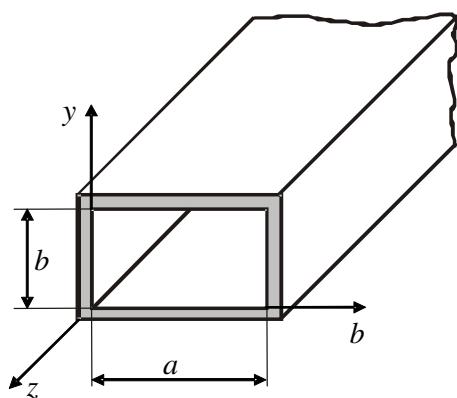


Рис. 4.1. Волновод – металлическая труба, внутри которой распространяется электромагнитная волна

Для определения распределения напряженностей электрического и магнитного полей в составе электромагнитной волны в волноводе необходимо решить уравнения Максвелла с учетом граничных условий ( $E_\tau = 0$ ) на металлических стенках волновода. Будем искать поля через векторный потенциал  $\vec{A}$ , который удовлетворяет векторному волновому уравнению

$$\Delta \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0.$$

Положим, что в волноводе нет диэлектрических или магнитных вкладышей, поэтому диэлектрическая и магнитная проницаемости в волновом уравнении представлены проницаемостями свободного пространства (вакуума).

*Решение уравнений Максвелла для прямоугольного волновода при  $E_y \neq 0$ ,  $E_z = E_x = 0$ .* Будем искать простейшее решение. Положим векторный потенциал равным

$$\vec{A} = \vec{e}_y A_y(x, z) e^{i\omega t},$$

а скалярный потенциал независящим от координат и времени. Заданному таким образом векторному потенциалу соответствует  $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ .

Связь потенциалов и напряженностей полей:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -i\omega\mu_0 \vec{A} - \operatorname{grad} \varphi = \vec{e}_y \left[ -i\omega\mu_0 A_y(x, z) \right], \\ \vec{H} &= \operatorname{rot} \vec{A}.\end{aligned}$$

Отсюда получим:

$$\begin{aligned}E_z &= E_x = 0; \\ E_y &= -i\omega\mu_0 A_y(x, z); \\ H_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = -\frac{\partial A_y}{\partial z}; \\ H_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0; \\ H_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial x}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Будем искать решение в виде волны, распространяющейся вдоль оси волновода  $Z$ :

$$A_y = A_0 f(x) e^{-i\beta z}.\tag{4.2}$$

Тогда векторное волновое уравнение превращается в скалярное волновое уравнение относительно  $A_y$ :

$$\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 A_y = 0.\tag{4.3}$$

с граничными условиями:  $A_y = 0$  при  $x = 0, x = a$  (так как  $E_y = 0$  при  $x = 0, x = a$ ) или для введенной функции  $f(x)$ :

$$f(x) = 0\tag{4.4}$$

при  $x = 0, x = a$ .

Так как

$$\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} = -\beta A_0 f(x) e^{-i\beta z},$$

то уравнение (4.3) можно переписать в виде

$$A_0 \left[ f''(x) - \beta^2 f(x) + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 f(x) \right] e^{-i\beta z} = 0.$$

Отсюда

$$f''(x) + k_x^2 f(x) = 0, \quad (4.5)$$

где  $k_x^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - \beta^2$  ( $k_x$  – поперечное волновое число):  $\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 = k^2$  ( $k$  – волновое число волны в свободном пространстве);  $\beta$  – продольное волновое число для волновода или фазовая постоянная распространяющейся волны:

$$\beta^2 = k^2 - k_x^2. \quad (4.6)$$

Полученное уравнение (4.6) носит название *дисперсионного уравнения*.

Для волновода принято обозначение  $\beta = 2\pi/\lambda_g$ , где  $\lambda_g$  – длина волны в волноводе, так что дисперсионное уравнение связывает длину волны в волноводе с длиной волны в свободном пространстве на той же частоте.

Найдем  $f(x)$  из (4.5). Решение (4.5) ищем в виде

$$f(x) = C_1 e^{-ik_x x} + C_2 e^{ik_x x}.$$

Используя граничные условия (4.6), получим систему алгебраических уравнений относительно  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0; \\ C_1 e^{-ik_x a} + C_2 e^{ik_x a} = 0. \end{cases}$$

Система однородных алгебраических уравнений имеет решение, если определитель системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-ik_x a} & e^{ik_x a} \end{vmatrix} = 0,$$

откуда  $e^{ik_x a} - e^{-ik_x a} = 0$  или  $\sin k_x a = 0$ .

Это условие может быть выполнено, если  $k_x a = n\pi$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots$

Разные  $n$  дают различные картины распределения поля в поперечном сечении волновода. Это – условие квантования решений уравнений Максвелла:  $k_x = n\pi/a$ .

Вспомним, что  $k = 2\pi/\lambda$ , где  $\lambda$  – длина волны в свободном пространстве. Тогда

$$k_z = \beta^2 = (2\pi/\lambda)^2 - (n\pi/a)^2; \quad (4.7)$$

$$f(x) = C \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right). \quad (4.8)$$

При  $n = 1$  функция  $f(x)$  определяет простейший тип поля прямоугольного волновода.

**Распределение поля в прямоугольном волноводе в случае простейшего типа поля.** Объединив (4.3) и (4.8), получим для случая  $n = 1$

$$A_y = A_0 \left( \sin \frac{\pi}{a} x \right) e^{-i\beta z}.$$

Используя (4.1), (4.2) и (4.7) получим:

$$\begin{aligned} E_z &= E_x = 0; \\ E_y &= -i\omega\mu_0 A_y \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-i\beta z}; \\ H_x &= i\beta A_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-i\beta z}; \\ H_y &= 0; \\ H_z &= A_0 \frac{n\pi}{a} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-i\beta z}; \end{aligned} \quad (4.9)$$

Данное решение имеет продольную компоненту магнитного поля. Такое решение принято называть магнитным типом поля и обозначать символом  $H_{n,m}$ , где  $n$  и  $m$  – порядок квантования полученных решений вдоль осей  $x$  и  $y$ . Полученное решение отвечает магнитному типу поля при  $n = 1$  и  $m = 0$ .

Эпюры полей в прямоугольном волноводе при волне типа  $H_{1,0}$  приведены на рис. 4.2.

Назовем отношение  $E_y$  к  $H_x$  *волновым сопротивлением волновода*:

$$E_z/H_x = Z_g.$$

Из (4.9) получим:

$$Z_g = \omega\mu_0/\beta. \quad (4.10)$$

На рис. 4.2 показано распределение поля в фиксированный момент времени. Картина поля смещается вдоль оси  $z$  со скоростью  $v_g$ :

$$v_g = \frac{\omega}{\beta} = v_{ph}.$$

Здесь  $v_g$  – скорость движения поверхности равных фаз или фазовая скорость волны в волноводе.

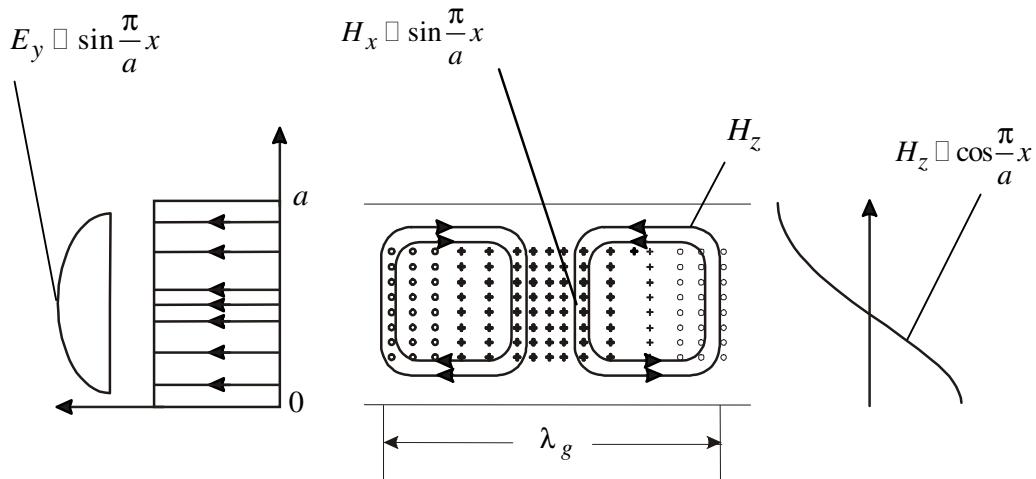


Рис. 4.2. Силовые линии электрического и магнитного полей основного типа поля в прямоугольном волноводе

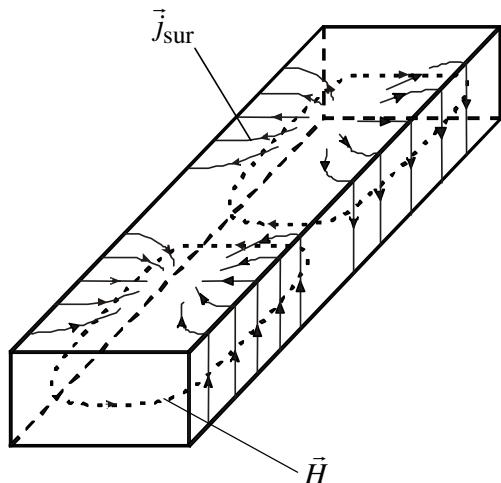


Рис. 4.3. Силовые линии тока проводимости на внутренней поверхности прямоугольного волновода с основным типом поля

Рис. 4.3 иллюстрирует распределение силовых линий поверхностного тока на внутренней поверхности волновода.

**Критическое значение длины волновода.** Для рассматриваемого простейшего случая  $n=1$  выражение (4.7) можно переписать следующим образом:

$$\left( \frac{2\pi}{\lambda_g} \right)^2 = \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 - \left( \frac{\pi}{a} \right)^2.$$

Тогда

$$\lambda_g = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{(2a)^2}}} \text{ или}$$

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}, \quad (4.11)$$

где  $\lambda$  – длина волны в свободном пространстве.

В случае заполнения волновода средой с проницаемостью  $\epsilon_r > 1$   $\lambda$  соответствует длине волны в среде, т. е.

$$2\pi/\lambda = \omega\sqrt{\epsilon_0\epsilon_r\mu_0}.$$

На рис. 4.4, а показана зависимость длины волны в волноводе  $\lambda_g$  от длины волны в свободном пространстве в случае вакуумного заполнения волновода.

- Электромагнитная волна, у которой длина волны в вакууме больше критической длины волны волновода ( $\lambda > \lambda_c$ ), не может распространяться в волноводе. Для основного типа поля в прямоугольном волноводе  $\lambda_c = 2a$ .

Фазовая постоянная волны в волноводе

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_g} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}. \quad (4.12)$$

При  $\lambda > \lambda_c$  фазовая постоянная волны в волноводе  $\beta$  становится минимальным числом, так что при  $\lambda > \lambda_c$  поле, возбуждающееся в волноводе, уже не представляет собой волну, а экспоненциально затухает без изменения фазы.

**Групповая скорость волны в волноводе.** Итак, фазовая скорость волны в волноводе найдена:

$$v_{ph} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\lambda\omega}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}},$$

или

$$v_{ph} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}}, \quad (4.13)$$

где  $c$  – скорость света в свободном пространстве;  $v_{ph} \rightarrow \infty$  при  $\lambda \rightarrow \lambda_c$ .

Чему же равна групповая скорость волны в волноводе? Ранее получено выражение для групповой скорости (2.2). Перепишем его еще раз:

$$v_{\text{gr}} = (\partial \beta / \partial \omega)^{-1}. \quad (4.14)$$

Представим критическую частоту  $\omega_c$  волновода как

$$\omega_c = 2\pi \frac{c}{\lambda_c} \quad (4.15)$$

и запишем  $\beta$  как функцию  $\omega$ , используя (4.12) и (4.15):

$$\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}$$

или

$$\beta^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2}. \quad (4.16)$$

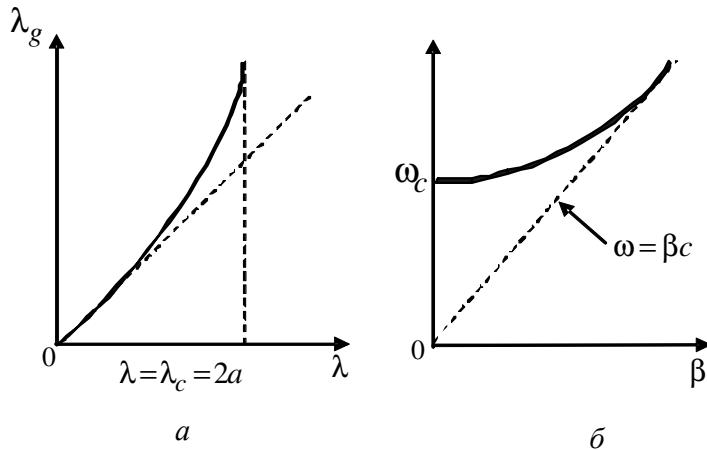


Рис. 4.4. Частотная дисперсия в радиоволноводе: *a* – длина волны в волноводе в функции от длины волны в вакууме; *б* – зависимость частоты от фазовой постоянной

Полученные соотношения иллюстрируются рис. 4.4, *б*. Они устанавливают ту же связь между частотой и фазовой постоянной, что и дисперсионное уравнение (4.6). Продифференцируем (4.16):

$$\frac{\partial \beta}{\partial \omega} = \frac{1}{2\beta} \frac{\partial(\beta^2)}{\partial \omega} = \frac{1}{2\beta} \frac{1}{c^2} 2\omega = \frac{\omega}{c^2 \beta}$$

и подставим в (4.14). Тогда зависимость групповой скорости волны в волноводе от частоты примет вид

$$v_{gr} = \frac{1}{\frac{\partial \beta}{\partial \omega}} = c \frac{\beta c^2}{\omega} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}. \quad (4.17)$$

Используя понятие критической частоты, выражение (4.13) для фазовой скорости можно записать как

$$v_{ph} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}}. \quad (4.18)$$

Тогда из (4.17) и (4.18) получим

$$v_{gr} v_{ph} = c^2. \quad (4.19)$$

При понижении частоты фазовая скорость в волноводе растет, а групповая – падает при  $\omega \rightarrow \omega_c$ ,

$v_{ph} \rightarrow \infty$ ,  $v_{gr} \rightarrow 0$ . Это означает, что сигнал в волноводе при  $\omega < \omega_c$  распространяться не может.

На рис. 4.5 показаны зависимости фазовой и групповой скоростей волн в волноводе при вакуумном заполнении от частоты.

Заметим, что связь между фазовой и групповой скоростями, которая определяется соотношением (4.19), не универсальна. Она справедлива только в частном случае волновода, несущего электромагнитную волну.

**Поток мощности через поперечное сечение волновода.** Воспользуемся вектором Пойнтинга (рис. 4.6). Согласно теореме Пойнтинга, средний по времени поток активной мощности  $P$ , проходящей через поперечное сечение  $S$  волновода в направлении его оси, может быть вычислен из соотношения

$$P = \iint_{00}^{ab} \vec{\Pi} d\vec{S},$$

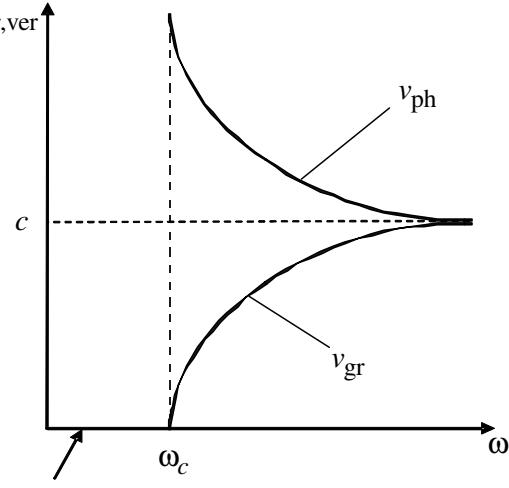


Рис. 4.5. Фазовая и групповая скорости волн в волноводе в функции от частоты

где  $\vec{\Pi}$  – вектор Пойнтинга ( $\vec{\Pi} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\vec{E}_m \cdot \vec{H}_m^*]$ );  $\vec{H}_m^*$  – комплексно-сопряженная амплитуда вектора напряженности магнитного поля.

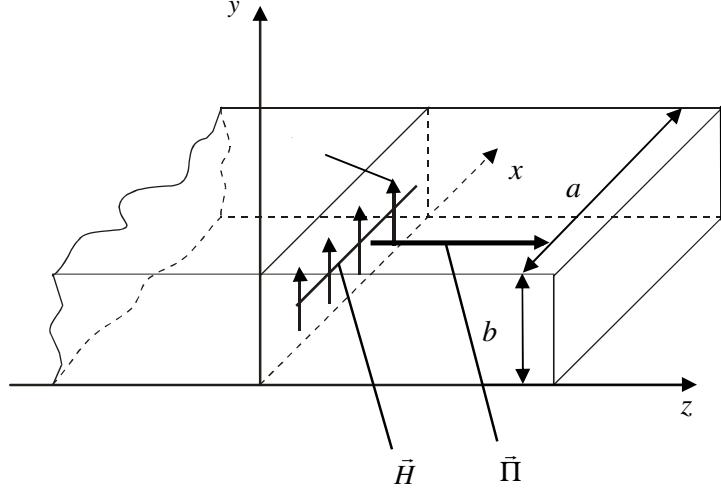


Рис. 4.6. Вектор Пойнтинга в прямоугольном волноводе с основным типом поля.

Для основного типа поля имеем:

$$E_y = E_m \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-i\beta z}; H_x = -\frac{E_m}{Z_g} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-i\beta z};$$

$$\vec{\Pi}(x) = \vec{e}_z \frac{E_m^2}{2Z_g} \sin^2 \frac{\pi}{a} x.$$

$$Z_g = \frac{\omega \mu_0}{\beta} \text{ – волновое сопротивление волновода.}$$

Тогда из (4.10) и (4.11) следует, что

$$Z_g = \frac{120\pi}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}}. \quad (4.20)$$

Вычислив интеграл от вектора Пойнтинга по поперечному сечению волновода, получим поток мощности вдоль оси волновода:

$$P = \iint_{00}^{ab} \frac{E_m^2}{2Z_g} \sin^2 \left( \frac{\pi}{a} x \right) dx dy; \quad P = \frac{E_m^2 ab}{2Z_g}, \quad (4.21)$$

где  $E_m$  – амплитуда напряженности электрического поля.

На рис. 4.7 показано распределение векторов напряженности электрического поля, магнитного поля и вектора Пойнтинга в поперечном сечении волновода.

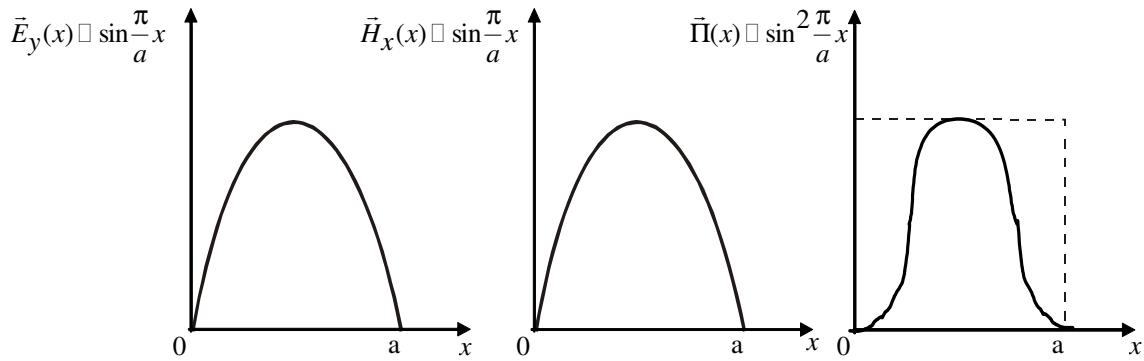


Рис. 4.7. Векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  и  $\vec{P}$  в поперечном сечении волновода в функции координаты  
Преобразуем выражение (4.21). Используя (4.20), получим

$$P = \frac{\epsilon_0 E_m^2}{2} \frac{ab}{2} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}.$$

С использованием выражения для групповой скорости (4.17) полученное соотношение для потока мощности через поперечное сечение волновода можно переписать так:

$$P = \frac{\epsilon_0 E_m^2}{2} \frac{ab}{2} v_{gr}. \quad (4.22)$$

Соотношение (4.22) можно интерпретировать следующим образом:

- при распространении волны объемная плотность энергии электромагнитного поля переносится через поперечное сечение волновода с групповой скоростью. В случае, когда  $v_{gr} \rightarrow 0$ , перенос энергии по волноводу прекращается.

Если изменить знак у  $\beta$ , то изменятся знаки у  $v_{ph}$  и  $v_{gr}$ , а также направление вектора Пойнтинга. Таким образом, если изменить направление распространения волны в смысле направления движения поверхности постоянной фазы, то изменится и направление потока мощности.

## 4.2. Высшие типы поля в прямоугольном волноводе

**Классификация типов поля прямоугольного волновода.** Основным признаком типа поля принято считать наличие силовых линий поля, имеющих продольную компоненту. Рассмотренные в 4.1 решения уравнений Максвелла имеют продольную компоненту  $\vec{H}$ , поэтому их принято называть *волнами магнитного типа*, или *волнами H-типа*. Для обозначения типа поля берется в расчет число полуволн изменения полей на поперечном сечении вдоль оси  $x$  и оси  $y$ . Волна, описываемая решением

$$A_y = A_0 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{-i\beta x},$$

содержит  $n$  полуволн вдоль оси  $x$ . В общем случае вводится символ  $H_{nm}$ , который означает, что в рассматриваемой волне имеется продольная компонента магнитного поля (при этом  $E_z = 0$ ; по оси  $x$  – укладывается  $n$  полуволны, по оси  $y$  укладывается  $m$  полуволны). Рассмотренный в 4.1 простейший тип поля прямоугольного волновода обозначался символом  $H_{10}$ .

В волноводе также возможны волны, у которых продольная компонента электрического поля  $E_z$  отлична от нуля, тогда как продольная компонента магнитного поля равна нулю ( $H_z = 0$ ). Такие типы поля обозначают символом  $E_{nm}$ . Этот символ означает, что в рассматриваемой волне имеется продольная компонента электрического поля, по оси  $x$  укладываются  $n$  полуволны, по оси  $y$  укладываются  $m$  полуволны.

*Волны E-типа* называют *продольно-электрическими волнами*; их также называют волнами *TM-типа*, или *поперечно-магнитными волнами*.

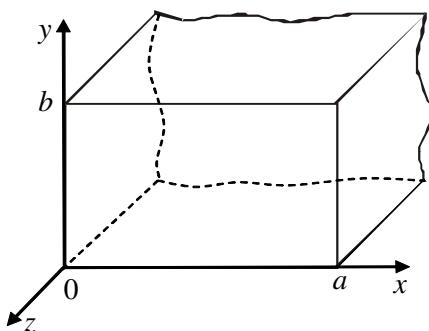


Рис. 4.8. Система координат и размеры волновода

Аналогично, волны *H-типа* называют *продольно-магнитными волнами*; их также называют волнами *TE-типа*, или *поперечно-электрическими волнами*.

*Волны электрического типа в прямоугольном волноводе (E<sub>mn</sub>-волны, или TM-волны).* На рис. 4.8 показаны система координат и размеры поперечного сечения прямоугольного волновода.

Нужно найти такое решение уравнений Максвелла, при котором  $H_z = 0$ , что по определению соответствует  $E$ -типу волн. Данное решение можно сформировать с помощью векторного потенциала. Известно, что  $\vec{H} = \text{rot } \vec{A}; \vec{E} = -i\omega\mu_0\vec{A} - \text{grad } \phi; \text{div } \vec{A} = -i\omega\epsilon_0\phi$ .

В пустом волноводе ток проводимости отсутствует ( $\vec{j} = 0$ ). Исключим  $\phi$ , тогда

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A}; \vec{E} = \frac{1}{i\omega\epsilon_0} \left( \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \vec{A} + \text{grad div } \vec{A} \right). \quad (4.23)$$

- Если выбрать векторный потенциал  $\vec{A}$  таким, что он имеет только продольную компоненту  $\vec{A} = \vec{e}_z A(x, y, z)$ , то  $H_z = 0$  благодаря свойствам операции  $\text{rot}$ .

Действительно, из (4.23) следует:

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{\partial A}{\partial y}; \\ H_y &= -\frac{\partial A}{\partial x}; \\ H_z &= 0; \\ E_x &= \frac{1}{i\omega\epsilon_0} \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial z}; \\ E_y &= \frac{1}{i\omega\epsilon_0} \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial z}; \\ E_z &= \frac{1}{i\omega\epsilon_0} \left( \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 A + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Дифференциальное уравнение для  $\vec{A}$  известно – это волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 A(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A(x, y, z)}{\partial z^2} + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 A(x, y, z) = 0. \quad (4.25)$$

Рассмотрим граничные условия. Нужно найти решения в виде бегущей вдоль волновода волны, поэтому  $A(x, y, z) = f(x, y) e^{-i\beta z}$ . Тогда выбранный вектор  $\vec{A}$  пропорционален продольной компоненте электрического поля  $E_z$ .  $E_z$  касательна стенкам и поэтому на них равна нулю, т. е.

$$f(x, y) \Big|_{x=0, a} = f(x, y) \Big|_{x=0, b} = 0.$$

Решение волнового уравнения при таких граничных условиях имеет вид

$$A(x, y, z) = A_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{-i\beta z}. \quad (4.26)$$

Граничные условия выполняются при  $n = 1, 2, 3\dots$ ;  $m = 1, 2, 3$ . Подставим решение (4.26) в (4.25). Получим дисперсионное уравнение

$$\beta^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \quad (4.27)$$

или

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda_g}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_c}\right)^2, \quad (4.28)$$

где

$$\left(\frac{1}{\lambda_c}\right)^2 = \left(\frac{n}{2a}\right)^2 + \left(\frac{m}{2b}\right)^2. \quad (4.29)$$

Чем больше значения  $n$  и  $m$ , тем меньше критическая длина волны  $\lambda_c$ .

Подставим найденное решение (4.26) в (4.24). Получим:

$$\begin{aligned} H_x &= A_{nm} \frac{m\pi}{b} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{-i\beta z}; \\ H_y &= A_{nm} \frac{n\pi}{a} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{-i\beta z}; \\ H_z &= 0; \\ E_x &= -A_{nm} Z_g^{(E)} \frac{n\pi}{a} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{-i\beta z}; \\ E_y &= -A_{nm} Z_g^{(E)} \frac{m\pi}{b} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{-i\beta z}; \\ E_z &= i A_{nm} Z_g^{(E)} \frac{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}{\beta} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{-i\beta z}, \end{aligned}$$

где  $Z_g^{(E)}$  – это волновое сопротивление волновода в случае волны  $E$ -типа:

$$Z_g^{(E)} = E_z / H_y = E_y / H_x.$$

Из (4.24) следует, что

$$Z_g^{(E)} = \frac{\beta}{\omega \epsilon_0}.$$

Заметим, что из (4.27) – (4.29) следует, что  $\beta = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}$ ,

тогда  $Z_g^{(E)} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}$ .

На рис. 4.9 показаны силовые линии электрического и магнитного полей волны типа  $E_{11}$  ( $n = 1, m = 1$ ).

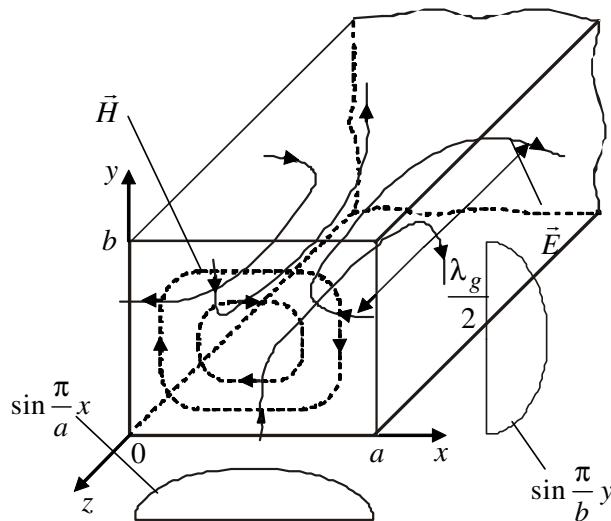


Рис. 4.9. Силовые линии электрического и магнитного полей типа поля  $E_{11}$  в прямоугольном волноводе

**Волны магнитного типа в прямоугольном волноводе ( $H_{nm}$ -волны, или  $TE_{nm}$ -волны).** Для получения решения вводят симметричный векторный потенциал  $\vec{A} \rightarrow \vec{A}'$ , соответствующий замене  $\epsilon_0$  на  $-\mu_0$ . Для волны  $E_{nm}$ :

$$E_{nm} \begin{cases} \vec{A} = \vec{e}_z A(x, y, z); \\ \vec{E} = \frac{1}{i\omega \epsilon_0} \left( \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \vec{A} + \text{grad div } \vec{A} \right); \\ \vec{H} = \text{rot } \vec{A}. \end{cases}$$

Тогда для волны  $H_{nm}$ :

$$H_{nm} \begin{cases} \vec{A}' = \vec{e}_z A'(x, y, z); \\ \vec{H} = \frac{1}{i\omega\mu_0} \left( \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \vec{A}' + \text{grad div } \vec{A}' \right); \\ \vec{E} = \text{rot } \vec{A}'. \end{cases}$$

В этом случае

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\partial A'}{\partial y}; \\ E_y &= \frac{\partial A'}{\partial x}; \\ E_z &= 0; \\ H_x &= -\frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial^2 A'}{\partial x \partial z}; \\ H_y &= -\frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial^2 A'}{\partial y \partial z}; \\ H_z &= -\frac{1}{i\omega\mu_0} \left( \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 A' + \frac{\partial^2 A'}{\partial z^2} \right). \end{aligned}$$

$A'(x, y, z)$  удовлетворяет такому же волновому уравнению, что и  $A(x, y, z)$ . Границные условия:

$$E_x = \frac{\partial A'}{\partial y} \Big|_{y=0,b} = 0; \quad E_y = \frac{\partial A'}{\partial x} \Big|_{y=0,a} = 0.$$

Решение волнового уравнения:

$$\begin{aligned} A' &= A'_{nm} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{-i\beta z}; \\ \beta^2 &= \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2. \end{aligned}$$

Далее проводят действия, аналогичные для случая  $E$ -волны, с той лишь разницей, что

$$Z_g^{(H)} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{E_y}{H_x} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}}.$$

Квантовые числа для  $H$ -волны могут начинаться от нуля ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $m = 0, 1, 2, \dots$ ). Решение уравнений Максвелла для случая  $n = 1, m = 0$  волны  $H_{10}$  подробно разобрано в 4.1. На рис. 4.10 показаны электрические и магнитные силовые линии для волны типа  $H_{11}$ .

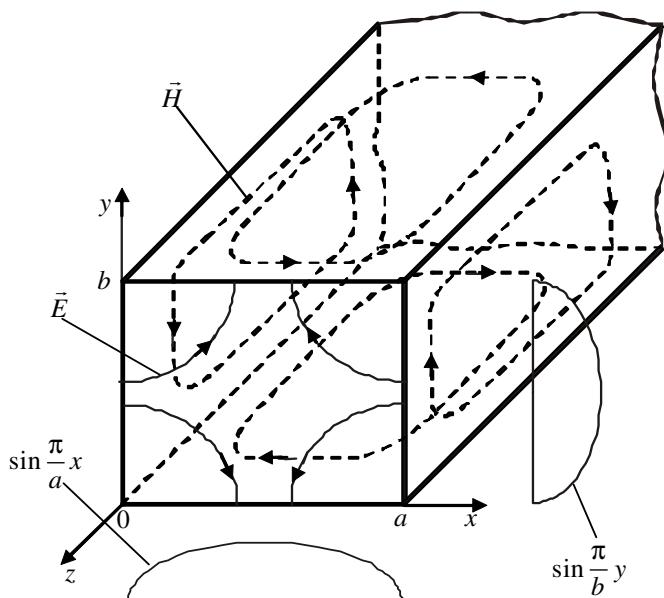


Рис. 4.10. Силовые линии электрического и магнитного полей типа  $H_{11}$  в прямоугольном волноводе

В этом случае продольная компонента магнитного поля  $H_z \propto \cos \frac{\pi}{a} x \cos \frac{\pi}{b} y$  касательна к стенкам волновода и максимальна на них.

Пример вычисления критической длины волны различных типов поля. Найти  $\lambda_c$  высших типов, ближайших к основному типу поля, при  $a = 23$  мм,  $b = 10$  мм.

Основной тип поля:  $H_{10}$ , для него  $\lambda_c = 2a = 4,6$  см.

Соседний магнитный тип поля:  $H_{01}$ ; для него  $\lambda_c = 2b = 2,0$  см.

Другие типы поля:

$$H_{11} \text{ и } E_{11}: \lambda_c = \frac{1}{\sqrt{1/(2a)^2 + 1/(2b)^2}} = 1,83 \text{ см};$$

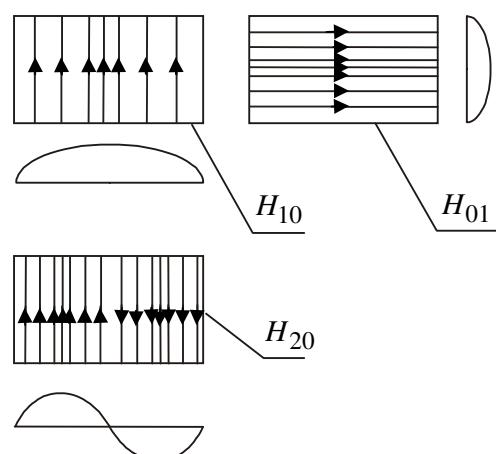


Рис. 4.11. Сопоставление распределения силовых линий электрического поля для волн  $H_{10}, H_{01}, H_{20}$

$H_{20}$ :  $\lambda_c = a = 2,3$  см;

$$H_{21} \text{ и } E_{21}: \lambda_c = \frac{1}{\sqrt{1/(2a)^2 + 1/(2b)^2}} = 1,52 \text{ см};$$

$$H_{12} \text{ и } E_{12}: \lambda_c = \frac{1}{\sqrt{1/(2a)^2 + 1/(2b)^2}} = 0,96 \text{ см.}$$

На рис. 4.11 показаны силовые линии электрического поля для трех вариантов волны  $H$ -типа.

### 4.3. Основной тип поля в круглом волноводе

В волноводе, образованном трубой в форме круглого цилиндра, также могут распространяться электромагнитные волны. Решение уравнений Максвелла в этом случае потребует использования цилиндрических координат  $\Phi, r, z$  и получается в виде комбинаций синусов или косинусов и функций Бесселя. На рис. 4.12 приведено распределение полей в поперечном сечении круглого волновода с волной  $H_{11}$ .

Принятое обозначение  $H_{11}$  соответствует тому, что волна имеет продольную компоненту магнитного поля, одну вариацию по углу  $\Phi$  и одну вариацию по радиусу  $r$ . Критическая длина волны типа  $H_{11}$  определяется диаметром трубы  $d$ :

$$\lambda_c = 1,71d.$$

Критическую длину волны типа  $H_{11}$  в круглом волноводе можно со-поставить с критической длиной волны типа  $H_{10}$  в прямоугольном волноводе:  $\lambda_c = 2a$ .

При  $d = a$  средняя ширина круглой трубы несколько меньше ширины прямоугольного волновода. Это обуславливает некоторое уменьшение критической длины волны круглого волновода по сравнению с таковой прямоугольного волновода при  $d = a$ .

Конфигурация силовых линий  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в круглом волноводе с волной  $H_{11}$  и конфигурация силовых линий  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в прямоугольном с волной  $H_{01}$  топологически подобны. Эти типы поля легко переходят один в другой при плавном трансформировании поперечного сечения прямоугольно-

го волновода в сечение кругового цилиндра, определяющее поперечное сечение круглого волновода.

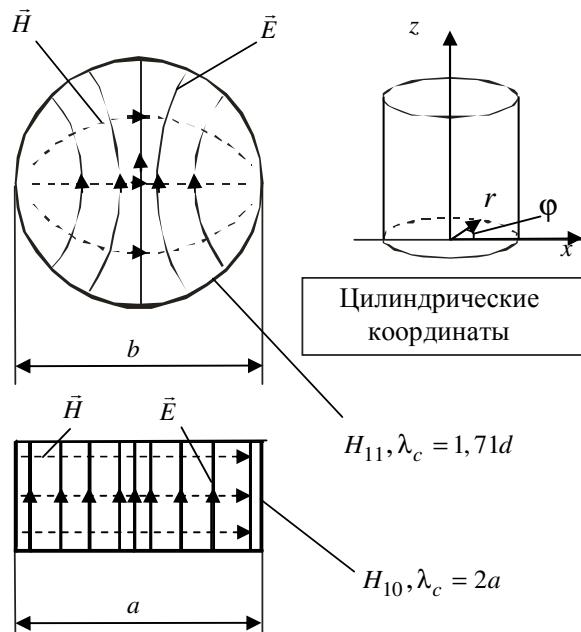


Рис. 4.12. Силовые линии электрического и магнитного полей круглого волновода с волной типа  $H_{11}$ . Для сравнения приведено распределение полей в прямоугольном волноводе с волной типа  $H_{01}$ . Эти типы поля топологически подобны и могут плавно переходить друг в друга

В круглом волноводе могут распространяться волны как  $E$ -типа, так и  $H$ -типа. Распределение поля в поперечном сечении волновода получается в результате решения волнового уравнения в цилиндрической системе координат с учетом граничных условий на внутренней поверхности волновода. Распределение поля в поперечном сечении волновода описывается в зависимости от радиуса функциями Бесселя и в зависимости от угловой координаты – синусом или косинусом.

## **5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ВОЛНОВЕДУЩИХ СТРУКТУРАХ С ПОПЕРЕЧНЫМИ ИЛИ КВАЗИПОПЕРЕЧНЫМИ ТИПАМИ ПОЛЯ**

Волноведущие структуры с поперечными или квазипоперечными типами поля отличаются от волноводов, рассмотренных в гл. 4. Принципиальными особенностями волновода являются наличие продольной компоненты электрического или магнитного поля и наличие критической длины волны (критической частоты). По волноводу нельзя передавать сигналы или переносить энергию на низких частотах или на постоянном токе. Также особенностью волновода является наличие частотной дисперсии, т. е. зависимости от частоты фазовой и групповой скоростей волны, которая распространяется по волноводу.

Волноведущие структуры с поперечными или квазипоперечными типами поля критической длины волны (критической частоты) не имеют. С их помощью можно передавать сигналы или переносить энергию на любой достаточно низкой частоте, в том числе и на постоянном токе. Волноведущие структуры с чисто поперечными типами поля не имеют продольных компонент электрического или магнитного поля и частотной дисперсии, т. е. фазовая и групповая скорости волны, которая распространяется по волноведущей структуре с чисто поперечными типами поля, не зависят от частоты подобно волне в свободном пространстве.

Волноведущие структуры с квазипоперечными типами поля также не имеют критической длины волны (критической частоты). Однако они имеют продольные компоненты электрического или магнитного поля и характеризуются частотной дисперсией, хотя и слабой по сравнению с волноводами.

### **5.1. Линии передачи с ТЕМ-волнами**

Символ «ТЕМ» означает чисто поперечную волну, которая не имеет продольных компонент электрического или магнитного поля. Линию передачи с идеальной ТЕМ-вольной можно представить в виде коаксиальной линии, изготовленной из проводящих материалов, обладающих бесконеч-

ной проводимостью. При этом на поверхностях проводников в такой идеальной коаксиальной линии касательная составляющая электрического поля равна нулю. В реальной коаксиальной линии всегда имеется слабая продольная компонента электрического поля на проводниках, которая возникает из-за падения напряжения вдоль проводников при протекании по ним тока. Этой слабой продольной компонентой электрического поля обычно пренебрегают или учитывают ее присутствие методами теории возмущений, когда это необходимо для расчета затухания волны в линии за счет потерь в ее стенках.

Для коаксиальной линии с идеальными граничными условиями ( $E_\phi = 0$  при  $r = a$  и  $r = R$  – см. рис. 5.1) возможно аналитическое решение уравнений Максвелла. Это связано с тем, что граничные условия на компоненты поля задаются на геометрических поверхностях объекта, которые совпадают с координатными поверхностями выбранной системы координат. В случае коаксиальной линии – это цилиндрическая система координат. Заметим, что в гл. 4 были получены достаточно простые аналитические решения для прямоугольного волновода благодаря тому, что его стенки совпадали с координатными поверхностями декартовой системы координат.

Пусть электрический потенциал центрального проводника равен нулю, а внешнего проводника равен  $U$ ; сила тока, текущего по проводникам коаксиальной линии, равна  $I$ . Тогда решение уравнений Максвелла получается в таком виде:

$$E_r(r, z) = \frac{U}{\ln(R/a)} \frac{1}{r} e^{-ikz};$$

$$H_\phi(r, z) = \frac{I}{2\pi r} e^{-ikz}. \quad (5.1)$$

Остальные компоненты поля равны нулю. Справедливость соотношений (5.1) легко проверить, подставив их в уравнения Максвелла. При этом попутно получим волновое число:  $k = \omega \sqrt{\epsilon_0 \epsilon_d \mu_0}$ , и волновое сопротивление коаксиальной линии ( $Z_0 = U/I$ ):

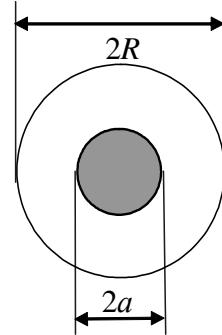


Рис. 5.1 Основные размеры коаксиальной линии передачи. Элементы конструкции описаны в цилиндрической системе координат  $\Phi, r, z$

$$Z_0 = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_{\text{д}}}} \ln(R/a),$$

где  $\epsilon_{\text{д}}$  – относительная диэлектрическая проницаемость материала, заполняющего коаксиальную линию.

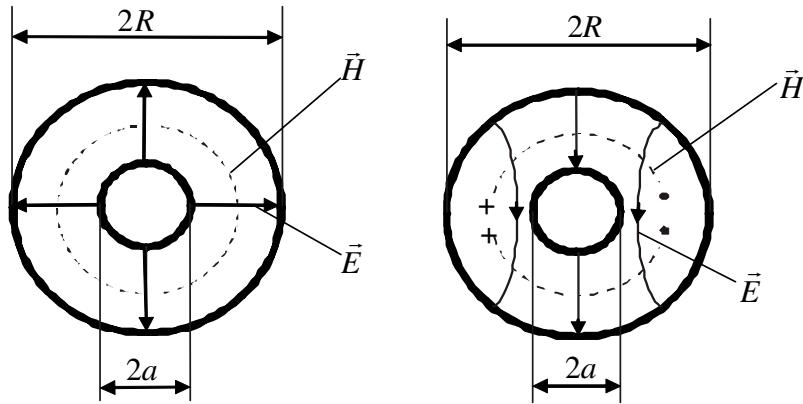


Рис. 5.2. Распределение поля в коаксиальной линии для ТЕМ-волны и волны типа  $H_{11}$

Итак, рассмотрена ТЕМ-волну в коаксиальной линии. Очень важно иметь в виду, что в коаксиальной линии могут распространяться высшие волноводные типы поля, обладающие всеми атрибутами волноводных типов полей: продольной компонентой поля, критической длиной волны, частотной дисперсией. На рис. 5.2 сопоставлены распределения поля в коаксиальной линии для ТЕМ-волны и волны типа  $H_{11}$ , близкой к волне типа  $H_{11}$  круглого волновода (см. рис. 4.12).

При  $R \gg a$  эта волна аналогична волне  $H_{11}$  круглого волновода:

$$\lambda_c \approx 1,71 \cdot 2R = 3,42R.$$

При  $R \approx a$  эта волна аналогична типу  $H_{10}$  в прямоугольном волноводе. Чтобы представить себе эту аналогию, нужно мысленно разрезать коаксиальную линию вдоль продольных компонент магнитного поля и образовавшиеся половинки развернуть, сделав их плоскими. Тогда получим критическую длину волны развернутых прямоугольных волноводов:

$$\lambda_c \approx 2\pi \frac{R+a}{2} = \pi(R+a).$$

Приведенные рассуждения важны не только с точки зрения представления о способах решения уравнений Максвелла. Они имеют и прямое практическое значение. Коаксиальную линию или коаксиальный кабель не

следует использовать в рабочих системах, если в кабеле может распространяться волноводный тип поля. Это вызовет рассогласование системы и нарушит условия передачи сигнала.

Рассмотрим теперь распространение электромагнитной волны между параллельными идеально проводящими пластинами. Такую структуру называют *полосковой линией* (рис. 5.3).

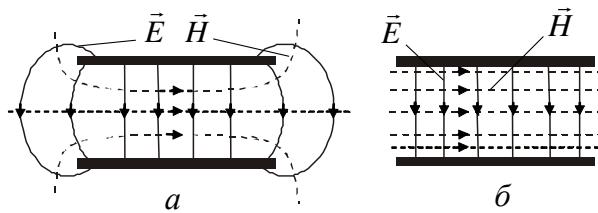


Рис. 5.3. Силовые линии электрического и магнитного полей в полосковой линии передачи: *а* – с учетом полей рассеяния, *б* – без учета полей рассеяния (идеализированный случай)

На рис. 5.4 показаны граничные условия на стенках полосковой линии. Поверхность, на которой касательная составляющая напряженности электрического поля равна нулю ( $E_\tau = 0$ ), принято называть *электрической стенкой*. Электрическая стенка физически реализуется в виде проводника с большой (бесконечно большой) проводимостью. Силовые линии

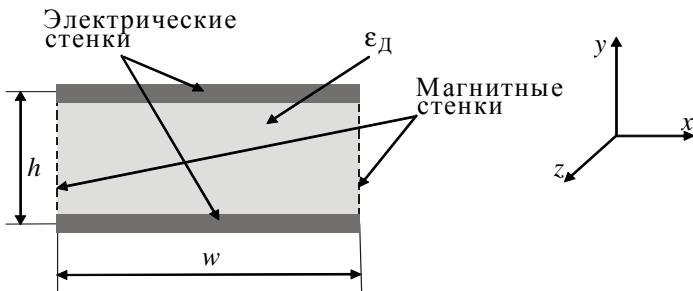


Рис. 5.4. Идеализированная полосковая линия с дизэлектрическим заполнением и условно показанными граничными условиями: электрическая стенка ( $E_\tau = 0$ ) и магнитная стенка ( $H_\tau = 0$ )

электрического поля заканчиваются на поверхностном заряде, формирующемся на проводящей поверхности стенки. Поверхность, на которой касательная составляющая напряженности магнитного поля равна нулю ( $H_\tau = 0$ ), принято называть *магнитной стенкой*.

Как видно на рис. 5.3, силовые линии магнитного поля обрываются на боковых поверхностях идеализированной полосковой линии. Такая картина будет оправдана, если напряженности электрического и магнитного полей за пределами внутреннего пространства полосковой линии много меньше, чем внутри полосковой линии. Другими словами, это будет правильно, если доля энергии электромагнитного поля, сосредоточенного внутри полосковой линии, значительно больше, чем в полях рассеяния. Данное условие будет выполнено, если

$$\epsilon_D \gg 1 \text{ и } w \gg h. \quad (5.2)$$

При выполнении этих условий полями рассеяния за пределами полосковой линии можно пренебречь.

Обрыв силовых линий магнитного поля на боковых поверхностях полосковой линии означает, что силовые линии нормальны к торцевым поверхностям. Это вынуждает допустить, что на этих поверхностях находятся поверхностные магнитные заряды подобно нахождению поверхностных электрических зарядов на проводящих поверхностях или на электрических стенках. Разумеется, на самом деле никаких магнитных зарядов не существует. Сделанное предположение просто обеспечивает удобные для приближенных вычислений граничные условия.

Таким образом, в дальнейших расчетах будем полагать, что идеализированная полосковая линия без учета полей рассеяния образована двумя электрическими и двумя магнитными стенками, на которых выполнены следующие граничные условия:

$$E_x|_{y=0, w} = 0, \quad H_y|_{x=0, h} = 0. \quad (5.3)$$

Поскольку теперь граничные условия заданы на координатных поверхностях, то можно получить аналитическое решение уравнений Максвелла. Для получения решения будем использовать векторный потенциал  $\vec{A}$ .

Пусть векторный потенциал имеет только одну составляющую, направленную вдоль оси  $z$ :

$$\vec{A} = \vec{e}_z A(x, y, z) e^{-i\beta z}.$$

Тогда, используя уравнения (3.9) и (3.12), получим:

$$\begin{aligned}
E_x &= \frac{1}{i\omega\epsilon_0} \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial z}; \quad E_y = \frac{1}{i\omega\epsilon_0} \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial z}; \\
E_z &= \frac{1}{i\omega\epsilon_0} \left( \omega^2 \epsilon_0 \epsilon_{\text{д}} \mu_0 A + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right); \\
H_x &= \frac{\partial A}{\partial y}; \quad H_y = -\frac{\partial A}{\partial x}; \quad H_z = 0.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Поскольку рассматривается ТЕМ-волна, то по условию  $E_z = 0$ . Применив данное условие к соотношению (5.4), получим дисперсионное уравнение

$$-\beta^2 + \omega^2 \epsilon_0 \epsilon_{\text{д}} \mu_0 = 0 \tag{5.5}$$

и уравнение Лапласа для поперечной части векторного потенциала:

$$\frac{\partial^2 A(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A(x, y)}{\partial y^2} = 0 \tag{5.6}$$

Подстановка (5.5) в (5.3) показывает, что продольная компонента электрического поля действительно равняется нулю ( $E_z = 0$ ). С учетом (5.3) убеждаемся, что получили чисто поперечную волну (ТЕМ).

Тем самым был получен важный теоретический результат:

- *решение волнового уравнения для ТЕМ-волны сводится к решению уравнения Лапласа, т. е. к решению электростатической задачи, которое, как правило, удается получить в аналитическом виде даже для случаев, когда границы рассматриваемой волноведущей структуры не совпадают с координатными поверхностями.*

Примем следующую функцию в качестве решения уравнения Лапласа (5.6), которое удовлетворит граничным условиям (5.3):  $A(x, y) = S_y$ , тогда найдем все компоненты поля:

$$\begin{aligned}
E_x &= 0, \quad E_y = -\frac{\beta}{\omega\epsilon_0\epsilon_{\text{д}}} S e^{-i\beta z}, \quad E_z = 0; \\
H_x &= S e^{i\beta z}, \quad H_y = 0, \quad H_z = 0.
\end{aligned}$$

Отношение напряженности полей в линии (волновое сопротивление по отношению к напряженности полей)

$$\frac{E_y}{H_x} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_d}} . \quad (5.7)$$

Это волновое сопротивление такое же, как и в неограниченной среде с относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_d$ . Таким образом, имеем поперечную волну, или волну типа ТЕМ. Можно считать ее принадлежащей к типу  $T_{00}$ .

Перечислим основные признаки волны поперечного типа.

Волна типа ТЕМ не имеет критической длины волны  $\lambda_c$  и не обладает дисперсией: волновое число ТЕМ-волны имеет вид

$$\beta = \omega \sqrt{\epsilon_0 \epsilon_d \mu_0} .$$

При таком волновом числе в волне отсутствуют продольные компоненты поля:  $E_z = 0$ ,  $H_z = 0$ .

Если  $\epsilon_d$  зависит от частоты, то волна будет иметь дисперсию, т. е. фазовая скорость волны  $v_{ph}$  также будет зависеть от частоты:

$$v_{ph}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_d(\omega) \mu_0}} .$$

В этом случае дисперсия является следствием особенности материала заполнения, а не типа волны.

Без учета полей рассеяния  $U = E_y h$ ;  $I = H_x w$ . Тогда с учетом (5.7) получим волновое сопротивление полосковой линии:

$$Z_0 = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_d}} \frac{h}{w} . \quad (5.8)$$

Напомним, что формула (5.8) получена для чистой ТЕМ-волны. Для количественных расчетов она может быть применена при выполнении условий (5.2).

## 5.2. Линии передачи с ТЕМ-волнами с учетом полей рассеяния

Рассмотрим ТЕМ-волну между параллельными идеально проводящими пластинами в среде с однородной диэлектрической проницаемостью

$\epsilon_{\text{д}}$ , т. е. положим, что поля рассеяния находятся в среде с той же диэлектрической проницаемостью, что и в среде внутри полосковой линии (рис. 5.5).

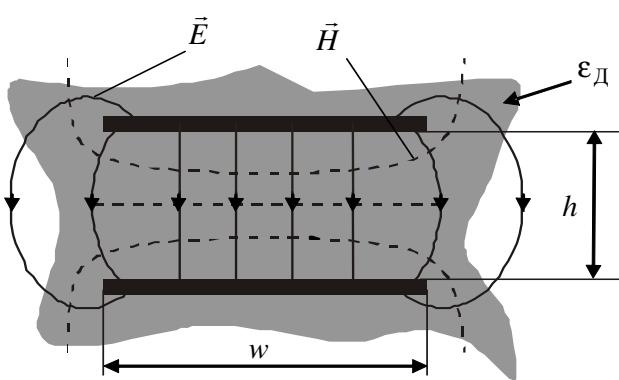


Рис. 5.5. Размеры полосковой линии в однородной среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_{\text{д}}$  для расчета волнового сопротивления полосковой линии

Поскольку  $\vec{E}_z = 0$ , то  $\beta^2 = \omega^2 \epsilon_0 \epsilon_{\text{д}} \mu_0$  и распределение поля в поперечном сечении подчиняется уравнению Лапласа. Для распределения поля в поперечном сечении задача решается методами электростатики. В частности, распространенным методом решения является метод *конформного отображения*, основанного на операциях, заимствованных из теории функций комплексной переменной. Решением уравнения Лапласа находим распределение напряженности электрического поля в поперечном сечении и, соответственно, распределение поверхностного заряда на проводниках линии. Следующим шагом будет нахождение погонной емкости линии, что при известной фазовой постоянной позволяет с помощью (1.28) найти волновое сопротивление  $Z_0$ :

$$Z_0 = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_{\text{д}}}} \left( \frac{h}{w} \right)_{\text{ef}}, \quad (5.9)$$

где эффективное отношение размеров полосковой линии (рис. 5.6) задается следующей формулой, полученной в виде аппроксимации точных, но громоздких решений:

$$\left( \frac{w}{h} \right)_{\text{ef}} = \frac{w}{h} + 1,21 - \frac{h}{9w} + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{h}{2w} \right)^6. \quad (5.10)$$

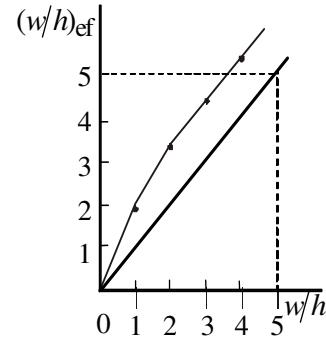


Рис. 5.6. Эффективные отношения размеров полосковой линии с учетом полей рассеяния

Заметим, что, как следует из формулы (5.10), при  $w/h > 10$  отличие  $(w/h)_{\text{ef}}$  от  $w/h$  не превышает 15%.

Фазовая скорость ТЕМ-волны между параллельными плоскостями в среде с однородным диэлектриком  $v_{\text{ph}} = c/\sqrt{\epsilon_{\text{д}}}$ .

### 5.3. КвазИТЕМ-волна в линии передачи

Рассмотрим проводящие пластины с таким диэлектрическим заполнением, что между пластинами находится диэлектрик с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_{\text{д}}$ , а вне пластин – вакуум с относительной диэлектрической проницаемостью, равной 1. При рассмотрении линии передачи также учтем поля рассеяния (рис. 5.7).

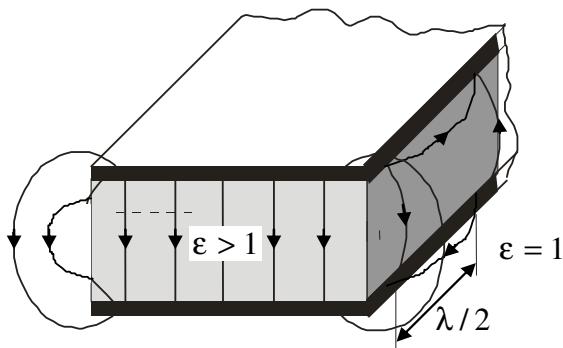


Рис. 5.7. Образование продольной компоненты электрического поля для случая квазИТЕМ-волны

Покажем, что в общем случае напряженность электрического поля в вакууме больше, чем в диэлектрике. Выпишем граничные условия для касательных составляющих напряженности поля и нормальных составляющих электрической индукции:

$$E_{\tau,1} = E_{\tau,2} \quad E_{n,1}\epsilon_{\text{д}} = E_{n,2}.$$

Найдем модули (длины) векторов напряженности электрического поля в диэлектрике и в вакууме. В соответствии с рис. 5.8 имеем:

$$E_{\tau,1} = |\vec{E}_1| \cos \theta; \quad E_{n,1} = |\vec{E}_1| \sin \theta.$$

Очевидно, что

$$|\vec{E}_1| = \sqrt{E_{\tau,1}^2 + E_{n,1}^2}; \quad |\vec{E}_2| = \sqrt{E_{\tau,2}^2 + E_{n,2}^2}.$$

В результате получим

$$|\vec{E}_2| = |\vec{E}_1| \sqrt{\cos^2 \theta + \epsilon_d \sin^2 \theta}.$$

Здесь  $\theta$  – угол наклона силовой линии электрического поля по отношению к границе раздела диэлектрика и вакуума (рис. 5.8). Из полученных соотношений следует, что при  $\theta > 0$  выполняется условие  $|\vec{E}_2| > |\vec{E}_1|$ , т. е. напряженность электрического поля в вакууме больше, чем в диэлектрике.

Таким образом, необходимо учесть, что при заполнении внутреннего пространства полосковой линии диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_d > 1$  напряженность поля за пределами диэлектрического заполнения достаточно велика и энергией поля, сосредоточенной за пределами внутреннего пространства полосковой линии, пренебречь нельзя.

Самая главная особенность распределения полей рассеяния при неоднородном диэлектрическом заполнении заключается в том, что силовая линия  $\vec{E}$  в вакууме замыкается не только на противоположный проводник линии передачи. Она может замыкаться также и на один и тот же проводник, но в точке, отстоящей от начала силовой линии на  $\lambda/2$ , где полярность поля меняется на обратную (см. рис. 5.7 и 5.9).

Таким образом, в случае неоднородного заполнения полосковой линии возникает продольная компонента поля, не равная нулю. Если, пользуясь численными методами расчета, тщательно рассчитать распределение поля в такой линии передачи, то обнаружим, что для многих конфигураций линий передачи подавляющая часть потока мощности находится во внутренним пространстве между проводящими поверх-

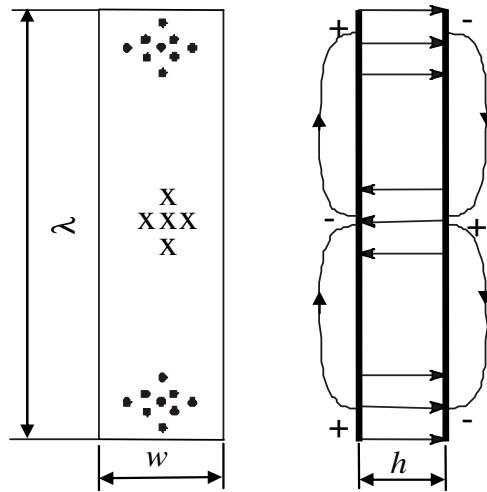


Рис. 5.9. Продольные компоненты силовых линий электрического поля в случае квазИTEM-волны

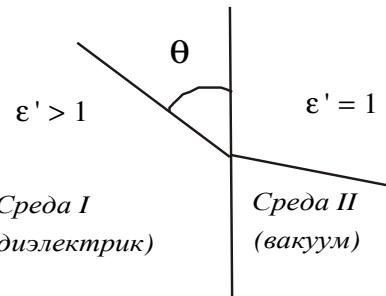


Рис.5.8. Силовые линии электрического поля на границе раздела сред с разной диэлектрической проницаемостью

ностями полосковой линии. Такой тип поля, у которого его основная часть поля сосредоточена в поперечном сечении линии передачи, но все же в нём также присутствует и продольная компонента поля, носит название *квазИTEM-типа поля*.

Вернемся к соотношению (5.4) и учтем, что продольная компонента поля не равна нулю:

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{1}{i\omega\epsilon_0} \left( \omega^2 \epsilon_0 \epsilon_d \mu_0 A_z + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) \neq 0; \\ (\omega^2 \epsilon_0 \epsilon_d \mu_0 - \beta) A_z &\neq 0; \\ \omega^2 \epsilon_0 \epsilon_d \mu_0 &\neq \beta^2. \end{aligned}$$

Теперь необходимо учесть, что фазовая постоянная волны в линии с квазИTEM-типом поля не равна фазовой постоянной свободной волны в среде, заполняющей внутреннее пространство линии.

Можем записать:

$$\begin{aligned} \beta^2 &= \omega^2 [\epsilon_0 \epsilon_d \mu_0 + \delta\epsilon(\omega) \epsilon_0 \mu_0]; \\ \beta &= \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \sqrt{\epsilon_d + \delta\epsilon(\omega)}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

В соответствии с (5.11) фазовая скорость волны квазИTEM-типа может быть записана в следующем виде:

$$v_{ph} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_d + \delta\epsilon(\omega)}}.$$

Представим  $\delta\epsilon(\omega)$  в виде ряда по четным степеням частоты. Тогда

$$v_{ph} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_d - a_0 + a_2 \omega^2 + \dots}}. \quad (5.12)$$

Параметр  $a_0$  определяет вклад полей рассеяния в значение эффективной диэлектрической проницаемости линии передачи, которая оказывается меньше, чем проницаемость материала, заполняющего пространство между проводящими поверхностями линии. Это объясняется тем, что энергия электромагнитного поля сосредоточена не только между проводящими поверхностями линии, но и в полях рассеяния, для которых  $\epsilon = 1$ . Поля рассеяния меняют свою структуру в зависимости от длины волны в полосковой линии; параметр  $a_2$  учитывает вклад полей рассеяния в дисперсию.

Для учета дисперсии квазИTEM-волны можно использовать аппроксимационную формулу

$$\epsilon_{\text{ef}}(\omega) = \epsilon_{\text{д}} - \frac{\epsilon_{\text{д}} - \epsilon_{\text{ef}}(0)}{1 + \left(\frac{\omega \mu_0 h}{Z_0}\right)^2}, \quad (5.13)$$

где  $\epsilon_{\text{ef}}(0)$  найдено для чистой TEM-волны с полями рассеяния, но без продольной компоненты поля, т. е. для случая низких частот;  $h$  – расстояние между проводящими поверхностями;  $Z_0$  – волновое сопротивление линии (5.9). Эта формула дает неплохие количественные результаты.

Сопоставлением (5.12) и (5.13) легко найти, что

$$a_0 = \epsilon_{\text{д}} - \epsilon_{\text{ef}}(0); a_2 \equiv [\epsilon_{\text{д}} - \epsilon_{\text{ef}}(0)] \left(\frac{\mu_0 h}{Z_0}\right)^2.$$

Итак, квазИTEM-волна близка по своей природе к TEM-волне, т. е. она не имеет критической длины волны и может существовать на самых низких частотах. Особенностью квазИTEM-волны является наличие продольных компонент поля, которые возникают из-за распределения диэлектрического заполнения линии передачи, неоднородного в поперечном сечении. Наличие продольных компонент поля приводит к возникновению зависимости фазовой скорости волны в линии от частоты или к зависимости эффективной диэлектрической проницаемости заполнения линии от частоты.

Сопоставив (5.13), (5.9) и (5.10), найдем, что

$$\frac{\omega \mu_0 h}{Z_0} \cong \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_{\text{д}}} (w + 1,21h + \dots), \quad (5.14)$$

а также

$$\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_{\text{д}}} = 2\pi/\lambda_{\text{д}}, \quad (5.15)$$

где  $\lambda_{\text{д}}$  – длина волны в среде, заполняющей линию передачи.

Частотной дисперсией в квазИTEM-линии передачи можно достаточно надежно пренебречь, если выполнено условие

$$\frac{\omega \mu_0 h}{Z_0} < 0,1. \quad (5.16)$$

Из соотношений (5.14) и (5.15) следует, что (5.16) выполнимо, если

$$w + 1,21h < \frac{1}{20\pi} \lambda_{\text{д}} . \quad (5.17)$$

Для простой оценки можно использовать неравенство  $w < 0,01\lambda_{\text{д}}$ .

Этим неравенством и определяется условие существования в линии передачи ТЕМ-волны без продольных компонент поля и без частотной дисперсии фазовой скорости.

#### 5.4. Микрополосковая и копланарная линии передачи

*Микрополосковой* линией передачи принято называть линию, попечное сечение которой показано на рис. 5.10. Микрополосковая линия располагается на достаточно широкой диэлектрической подложке, так что ширина подложки в расчет не принимается. Благодаря неоднородности диэлектрического заполнения волна в микрополосковой линии является волной квазиTEM-типа.

Длина волны в микрополосковой линии

$$\lambda = \lambda_0 / \sqrt{\epsilon_{\text{ef}}} ,$$

где  $\epsilon_{\text{ef}}$  – эффективная диэлектрическая проницаемость микрополосковой линии (пока без учета частотной дисперсии):

$$\epsilon_{\text{ef}} = \frac{\epsilon_{\text{д}} + 1}{2} + \frac{\epsilon_{\text{д}} - 1}{2} \frac{1}{\left(1 + 10 \frac{h}{w}\right)^{1/2}} . \quad (5.18)$$

Выражение (5.18) для эффективной диэлектрической проницаемости получено на основе квазистатического расчета без учета продольной компоненты поля и поэтому не учитывает дисперсию; оно справедливо при выполнении неравенства (5.17).

На рис. 5.11 показана зависимость эффективной диэлектрической проницаемости от частоты, полученная в результате численного расчета для двух микрополосковых линий разной ширины ( $w_1 = 1 \text{ мм}$ ,  $w_2 = 3,2 \text{ мм}$ ) на подложке толщиной  $h = 1 \text{ мм}$  с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_{\text{д}} = 9,6$  (сапфир, поликор). Пунктиром на рисунке показаны значения  $\epsilon_{\text{ef}}$ , полученные по формуле (5.18). Из рисунка видно, что квазистатическое при-

ближение верно для широкой линии на частотах  $f \leq 2$  ГГц и для узкой линии на частотах  $f \leq 1$  ГГц.

Сделанная оценка достаточно хорошо согласуется с неравенством (5.17).

Волновое сопротивление микрополосковой линии в квазистатическом приближении

$$Z_0 = \frac{\frac{120\pi h}{\sqrt{\epsilon_{\text{ef}} w}}}{1 + 2.42 \frac{h}{w} - 0.44 \left( \frac{h}{w} \right)^2 + \frac{h}{w} \left( 1 - \frac{h}{w} \right)^6}. \quad (5.19)$$

Сравним рис. 5.10, представляющий геометрию микрополосковой линии, и рис. 5.5, представляющий геометрию полосковой линии в однородной диэлектрической среде. В том и в другом случаях значительную роль играют поля рассеяния. А теперь заметим, что выражение для волнового сопротивления полосковой линии, заданное соотношениями (5.9) и (5.10), аналогично по форме выражению (5.19) для микрополосковой линии. И то и другое выражения являются аппроксимацией достаточно громоздких выражений, полученных на основе *метода конформных отображений*.

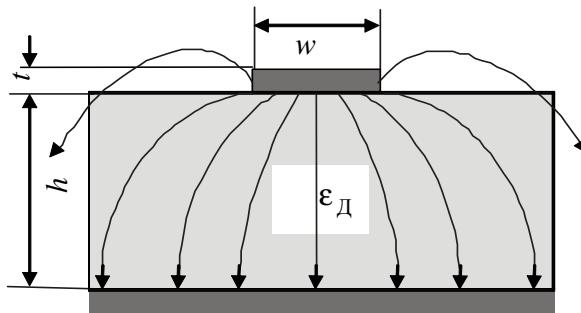


Рис. 5.10. Поперечное сечение микрополосковой линии. На рисунке показаны силовые линии электрического поля

Учет частотной дисперсии фазовой скорости требует использования приближенных формул типа (5.17) или применения численных методов решения уравнений Максвелла для заданной геометрической конфигурации.

Необходимо обратить внимание на три последовательные степени приближения при нахождении фазовой скорости волны в микрополосковой линии передачи:

1. *Полное пренебрежение полями рассеяния.* В этом случае внутреннее пространство микрополосковой линии ограничено электрическими и магнитными стенками; поперечное сечение линии, показанное на рис. 5.10, превращается в поперечное сечение линии, изображенное на рис. 5.4. Это справедливо при  $w < 0,01\lambda_d$  или  $w \gg h$ . В последнем случае эффективная диэлектрическая проницаемость, которая определяет фазовую скорость волны в линии, равна проницаемости материала, заполняющего поперечное сечение линии:

$$\epsilon_{ef} = \epsilon_d. \quad (*)$$

2. *Учет полей рассеяния, но в пренебрежении продольной компонентой поля.* В этом случае решение задачи ограничивается решением уравнения Лапласа для распределения поля в поперечном сечении. Эффективная диэлектрическая проницаемость линии определяется формулой

$$\epsilon_{ef} = \frac{\epsilon_d + 1}{2} + \frac{\epsilon_d - 1}{2} \frac{1}{\left(1 + 10 \frac{h}{w}\right)^{1/2}}. \quad (**)$$

Заметим, что  $(**)$  переходит в  $(*)$  при  $w \gg h$ .

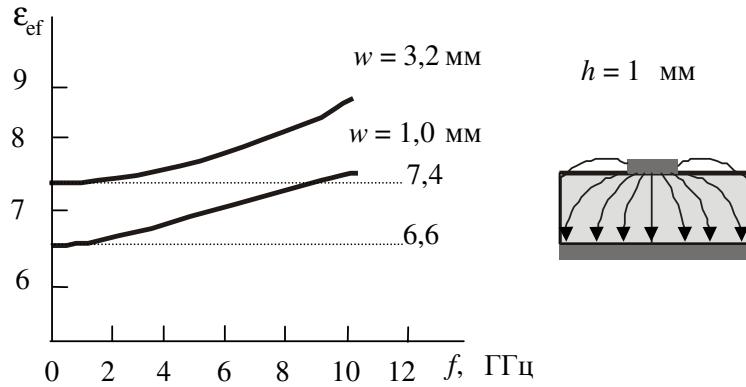


Рис. 5.11. Зависимость эффективной диэлектрической проницаемости микрополосковой линии от частоты

3. *Учет продольной компоненты поля или учет частотной дисперсии фазовой скорости и эффективной диэлектрической проницаемости линии.* При этом достаточно точное решение получается численным решением

уравнений Максвелла для конкретной конфигурации поперечного сечения линии передачи (заметим, что численное решение никогда не дает абсолютно точного решения). С приемлемой точностью можно воспользоваться аппроксимацией эффективной диэлектрической проницаемости линии:

$$\epsilon_{\text{ef}}(\omega) = \epsilon_{\text{д}} - \frac{\epsilon_{\text{д}} - \epsilon_{\text{ef}}(0)}{1 + \left(\frac{\omega \mu_0 h}{Z_0}\right)^2}. \quad (***)$$

Заметим, что при  $h \rightarrow 0$  формула (\*\*\*) переходит в (\*\*), которая, в свою очередь, переходит в (\*). Формула (\*\*\*) иллюстрируется рис. 5.11.

Продолжим рассмотрение линий передачи с ТЕМ-типовом поля.

Наряду с микрополосковой линией в технике СВЧ находит применение *копланарная линия*. Поперечное сечение копланарной линии показано на рис. 5.12. Такую линию передачи иногда называют *копланарным волноводом*.

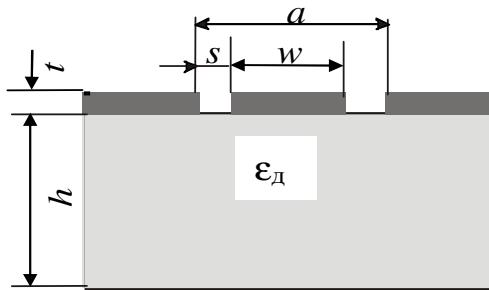


Рис. 5.12. Поперечное сечение копланарной линии передачи

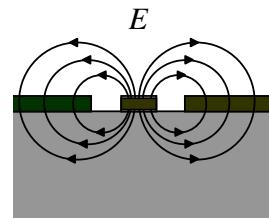


Рис. 5.13. Распределение силовых линий электрического поля волн ТЕМ-типа в копланарной линии

На рис. 5.13 показано распределение силовых линий электрического поля в копланарной линии передачи. Электрический потенциал внешних широких проводников одинаков на обоих проводниках и обычно считается равным нулю. Распределение поля в копланарной линии топологически совпадает с распределением поля в коаксиальной линии. Вот почему копланарная линия конструктивно просто соединяется с коаксиальной линией. При этом легко осуществляется согласование линий в широкой полосе частот.

Продольные компоненты поля в копланарной линии ничтожно малы, и поэтому принято считать, что в копланарной линии распространяется

ТЕМ-волна. ТЕМ-Тип поля в копланарной линии устойчив, если выполнено условие

$$w + 2s < \lambda / \sqrt{\epsilon_{\text{д}}}. \quad (5.20)$$

При невыполнении условий (5.20) в поперечном сечении копланарной линии возможно появление высших волноводных типов поля, имеющих продольную компоненту поля. В системе волн возникает дисперсия и интерференция различных типов поля. При выполнении условия (5.20) можно считать, что с достаточно высокой точностью можно использовать следующие соотношения:

$$\lambda = \lambda_0 / \sqrt{\epsilon_{\text{ef}}}; \epsilon_{\text{ef}} = (1 + \epsilon_{\text{д}})/2.$$

Заметим, что половина электромагнитной волны ТЕМ-типа находится в среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 1$ , а симметричная ей половина – в среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = \epsilon_{\text{д}}$ . При этом предполагается также, что толщина диэлектрической подложки  $h$  (см. рис. 5.12) должна быть велика настолько, чтобы силовые линии электрического поля

не выходили за пределы нижней поверхности подложки. Это условие выполняется, если при  $\epsilon_{\text{д}} = 10$  справедливо следующее неравенство:  $h > w + 2s$ . Кроме того, толщина металлизации  $t$  должна быть достаточно мала ( $t \ll s$  – см. рис. 5.12).

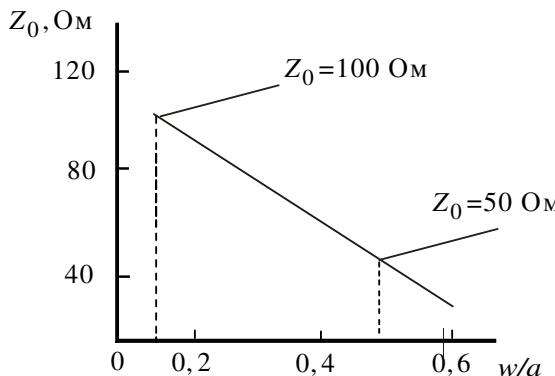
Решение уравнения Лапласа для распределения электрического поля в поперечном сечении копланарной линии позволяет

Рис. 5.14. Волновое сопротивление копланарной линии в функции от ее размеров при  $\epsilon_{\text{д}} = 10$

определить погонную емкость линии и при определенной ранее эффективной диэлектрической проницаемости найти аналитическое решение для волнового сопротивления линии:

$$Z_0 = \frac{30\pi}{\sqrt{\epsilon_{\text{ef}}}} \frac{K'(p)}{K(p)},$$

где  $K(p), K'(p)$  – эллиптические интегралы;  $p = w/a$  ( $a = w + 2s$ ).



Для упрощения расчетов применяется следующее аппроксимационное соотношение, которое обеспечивает аппроксимацию с точностью до 6-го знака:

$$\frac{K'(p)}{K(p)} = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \ln \left( 2 \cdot \frac{1 + \sqrt{p}}{1 - \sqrt{p}} \right) & \text{для } 0,707 \leq p \leq 1; \\ \left[ \frac{1}{\pi} \ln \left( 2 \cdot \frac{1 + \sqrt{p'}}{1 - \sqrt{p'}} \right) \right]^{-1} & \text{для } 0 \leq p \leq 0,707, \end{cases}$$

где  $p' = \sqrt{1 - p^2}$ .

Типичные параметры копланарной линии, используемой на частоте  $f = 10 \text{ ГГц}$ :  $\epsilon_D = 10$ ,  $h = 1 \text{ мм}$ ,  $w = 0.1 \text{ мм}$ ,  $a = 0.2 \text{ мм}$ ,  $s = 0.05 \text{ мм}$ ,  $Z_0 = 50 \text{ Ом}$ , что соответствует графику (рис. 5.14).

## 5.5. Затухание волн в линии передачи

Рассмотрим затухание в линии с ТЕМ-волной. Волновое уравнение для напряжения в линии с потерями имеет вид

$$\frac{\partial^2 U(z)}{\partial z^2} + \omega^2 \left( L_1 + \frac{R_1}{i\omega} \right) \left( C_1 + \frac{G_1}{i\omega} \right) U(z) = 0.$$

Постоянная распространения в линии с потерями – комплексная величина

$$k = \omega \sqrt{\left( L_1 + \frac{R_1}{i\omega} \right) \left( C_1 + \frac{G_1}{i\omega} \right)}; \quad (5.21)$$

$$k = \beta - i\alpha.$$

$$e^{-ikz} = e^{-i\beta z} e^{-\alpha z}$$

Здесь  $\alpha$  – декремент затухания,  $\beta$  – фазовая постоянная.

Обозначения, использованные в приведенных соотношениях, были введены в п. 1.4.

Если волна пробегает расстояние  $l$ , то ее амплитуда убывает:

$$\left| \frac{U(l)}{U(0)} \right| = e^{-\alpha l}.$$

Затухание [дБ] на длине  $l$

$$al = 20 \lg \left( \frac{U(l)}{U(0)} \right) = 20(-\alpha l) \lg e = -8,68 \alpha l.$$

Относительное затухание на единицу длины линии (измеренное в децибелах на метр):

$$a = 8,68 \alpha.$$

Преобразуем (5.21), учитывая, что затухание в линии невелико:  $R_l/\omega L_l \ll 1$ ,  $G_l/\omega C_l \ll 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} k &= \omega \sqrt{\left( L_l + \frac{R_l}{i\omega} \right) \left( C_l + \frac{G_l}{i\omega} \right)} = \omega \sqrt{L_l C_l} \left[ \left( 1 - i \frac{R_l}{2\omega L_l} \right) \left( 1 - i \frac{G_l}{2\omega C_l} \right) \right]; \\ k &= \omega \sqrt{L_l C_l} \left[ 1 - \frac{1}{2} i \left( \frac{R_l}{2\omega L_l} + \frac{G_l}{2\omega C_l} \right) \right]. \end{aligned}$$

И так как  $k = \beta - i\alpha$ , то

$$\alpha = \frac{1}{2} \omega \sqrt{L_l C_l} \left( \frac{R_l}{2\omega L_l} + \frac{G_l}{2\omega C_l} \right). \quad (5.22)$$

Поскольку  $\omega \sqrt{L_l C_l} = \beta$ , выражение (5.22) можно переписать для линии передачи, состоящей из двух проводников:

$$\alpha = \frac{\pi}{\lambda} \left( \frac{R_l}{\omega L_l} + \operatorname{tg} \delta \right).$$

Член  $G_l/\omega C_l = \operatorname{tg} \delta$  (тангенс дельта) характеризует потери в диэлектрике.

Чтобы найти декремент затухания волны в линии передача, нужно найти погонное сопротивление проводников линии, а для этого нужно учесть поверхностное сопротивление металла по отношению к электромагнитному полю. Поверхностное сопротивление найдено в 3.2.

Погонное сопротивление

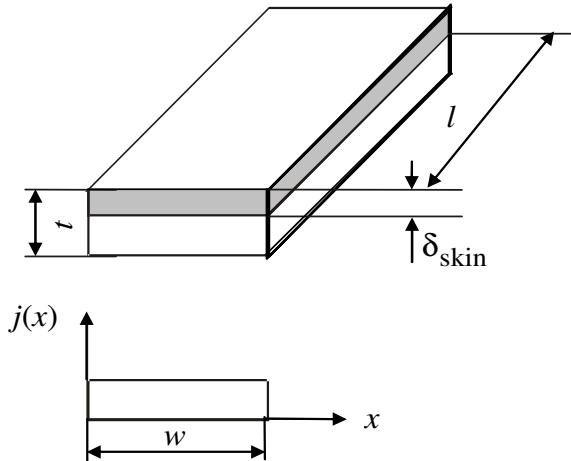


Рис. 5.15. Идеализированное распределение тока в проводнике линии передачи

линии – это сопротивление единицы ее длины. Рассмотрим поверхностный слой нижнего проводника толщиной  $t$  полосковой линии передачи длиной  $l$  и шириной  $w$  (рис. 5.15).

При условии, что плотность тока не зависит от поперечной координаты, для падения напряжения вдоль продольной оси линии  $\Delta U_z$  и тока  $I$  в линии справедливо:  $\Delta U_z = E_z l$ ,  $I = H_x w$ .

Обозначим через  $R(l)$  сопротивление отрезка линии длиной  $l$ . Решается квазистатическая задача, поэтому  $l \ll \lambda$ . В таком случае

$$R(l) = \frac{U}{I} = \frac{E_z l}{H_x w} = R_{\text{sur}} \frac{l}{w}.$$

Сопротивление единицы длины линии

$$R_1 = \frac{1}{l} R(l) = R_{\text{sur}} \frac{1}{w}.$$

Поверхностное сопротивление  $R_{\text{sur}}$  было определено в 3.2 выражением (3.3).

Рассмотрим также случай тонкого проводника (пленки) толщиной  $t < \delta_{\text{ск}}$ , где  $\delta_{\text{ск}}$  – скиновая глубина проникновения поля (тока) в толщу проводника. Сопротивление тонкой пленки длиной  $l$

$$R(l) = \frac{1}{\sigma t w} \frac{l}{w}.$$

Погонное сопротивление тонкой пленки:

$$R_1 = \frac{1}{\sigma t w} \frac{1}{w}.$$

Итак, погонное сопротивление полоски шириной  $w$  при равномерном распределении тока по ширине полоски:

$$R_1 = \begin{cases} \frac{1}{w} \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma}}, & t > \delta_{\text{ск}}; \\ \frac{1}{w} \frac{1}{\sigma t}, & t < \delta_{\text{ск}}. \end{cases} \quad (5.23)$$

Сопоставив выражения для поверхностного сопротивление (3.18) и скиновой глубины (3.20), можно переписать (5.23) в следующем виде:

$$R_1 = \begin{cases} \frac{1}{w} \frac{1}{\sigma \delta_{\text{ск}}}, & t > \delta_{\text{ск}}; \\ \frac{1}{w} \frac{1}{\sigma t}, & t < \delta_{\text{ск}}. \end{cases}$$

Для полосковой линии, образованной достаточно толстыми проводниками, для которых  $t > \delta_{\text{ск}}$ , в предположении равномерного распределения тока по сечению линии и в пренебрежении полями рассеяния имеем:

- погонное сопротивление одного проводника в составе линии

$$R_1 = \frac{1}{w} \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma}};$$

- погонную индуктивность линии, состоящей из двух проводников;

$$L_1 = \mu_0 \frac{h}{w}.$$

Тогда

$$\frac{R_1}{\omega L_1} = \frac{\frac{1}{w} \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma}}}{\frac{\omega \mu_0}{w} \frac{h}{h}} = \frac{1}{2h} \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}} = \frac{1}{2} \frac{\delta_{\text{ск}}}{h}.$$

Используя (5.22), найдем для линии передачи, состоящей из двух проводников:

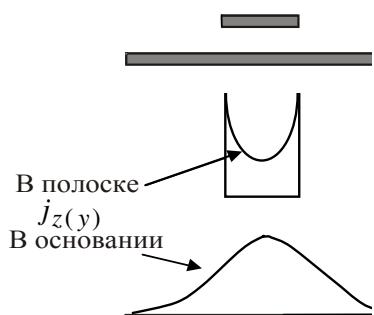


Рис. 5.16. Распределение плотности тока  $j$  в поперечном сечении полоска и проводящего основания микрополосковой линии

$$\alpha_{1/M} = \frac{\pi}{\lambda} \left( \frac{\delta_{\text{ск}}}{h} + \tan \delta_D \right),$$

или

$$a_{dB/m} = 27,3 \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\delta_{\text{ск}}}{h} + \tan \delta_D \right).$$

Приведенные оценки справедливы для случая однородного распределения тока в поперечном сечении проводников линии (см. рис. 5.15).

На рис. 5.16 схематически показано распределение плотности тока в поперечном сечении полоска и проводящего основания микрополосковой линии. Из рисунка можно заключить, что поперечное сечение полоска используется не эффективно: ток течет только по части поперечного сечения, и вклад полоска в потери реально больше,

чем это учтено при сделанных ранее оценках. Зато эффективное сечение проводящего основания в данном случае реально больше, чем при условном однородном распределении плотности тока. Это уменьшает вклад в вклад проводящего основания в суммарные потери линии. В результате, сделанная ранее оценка потерь оказывается не такой уж грубой.

Пример:

$$f = 10 \text{ ГГц}; \lambda_0 = 3 \text{ см}; \delta_{\text{ск}} = 0,6 \text{ мкм}; \operatorname{tg} \delta = 10^{-3};$$

$$h = 0,3 \text{ мм}; \epsilon_d = 2; \lambda = \frac{3}{\sqrt{2}} \cong 2 \text{ см}$$

$$a_{\text{дБ/м}} = \frac{27,3}{0,02} (2 \cdot 10^{-3} + 10^{-3}) = 4,1 \text{ дБ/м, или } a = 0,041 \text{ дБ/см.}$$

## 6. Объемные и планарные резонаторы

В теории электрических цепей изучаются свойства LCR-колебательных контуров, которые используется как основные элементы радиочастотных генераторов или составляющая часть радиочастотных фильтров в различных системах передачи и приема радиосигналов. Естественно, что на частотах радиодиапазонов конструктивные элементы LCR-колебательных контуров имеют размеры намного меньшие, чем длина волны используемых колебаний. В случае необходимости иметь LCR-колебательный контур в СВЧ-диапазоне, сохранив при этом катушку индуктивности и конденсатор как сосредоточенные элементы, их геометрические размеры должны быть много меньше длины волны в окружающей среде. Размеры элементов контура должны не превышать единиц или долей миллиметров. При этом размеры проводников становятся соизмеримыми с глубиной проникновения электромагнитного поля в проводники, а добротность такого колебательного контура становится малой.

Для реализации колебательного контура (резонатора) с достаточно большой добротностью на СВЧ используются отрезки передающих линий, имеющие ограниченную длину и заданные граничные условия на концах такой линии передачи. В качестве указанного резонатора может быть использован отрезок волновода, концы которого закрыты проводящими поверхностями. Таким образом, можно рассмотреть поведение электромагнитного поля в объеме, со всех сторон ограниченном проводящими по-

верхностями. Данный конструктивный элемент представляет собой *объемный резонатор*. Можно также использовать отрезки микрополосковой или копланарной линии ограниченной длины с заданными импедансом нагрузок на концах отрезков. В этом случае получают *планарные резонаторы*, которые находят применение в современной микроэлектронике СВЧ.

## 6.1. Электромагнитное поле в объемном резонаторе

Рассмотрим отрезок прямоугольного волновода с волной  $H_{10}$ , закороченного металлическими стенками с двух сторон (рис. 6.1).

Составляющие электрического поля в волноводе:

$$E_x = 0; \quad E_z = 0; \quad E_y = E_0 \sin \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta z}. \quad (6.1)$$

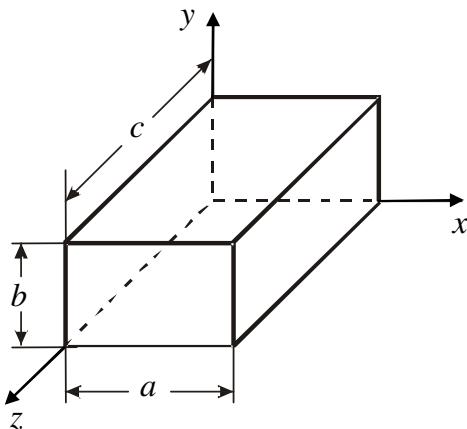


Рис. 6.1. Объемный резонатор, образованный отрезком прямоугольного волновода, закороченного с обеих сторон

Решения уравнений Максвелла для прямоугольного волновода удовлетворяют граничным условиям на боковых стенах волновода:

$$E_y|_{x=0, a} = 0.$$

Для прямоугольного резонатора добавляется граничное условие на торцевых стенах

$$E_y|_{z=0, c} = 0. \quad (6.2)$$

Чтобы удовлетворить граничным условиям (6.2), необходимо ввести в рассмотрение две волны в анализируемом отрезке волновода – отраженную и падающую:

$$E_y = E_0 \sin \frac{\pi x}{a} (e^{-i\beta z} + \Gamma e^{i\beta z}).$$

Положим  $\Gamma = -1$ , тогда

$$E_y = 2E_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \beta z.$$

Первая часть условия (6.2) удовлетворяется, так как  $\sin \beta z = 0$  и  $E_y|_{z=0} = 0$  при  $z = 0$ .

Чтобы выполнялось условие

$$E_y|_{z=c} = 0,$$

необходимо положить, чтобы  $\beta c = p\pi$  (где  $p = 1, 2, 3\dots$ ), отсюда  $\beta = p\pi/c$ .

В задаче появилось третье квантовое число, поэтому электромагнитное поле в объемном резонаторе характеризуется тремя квантовыми числами:

- $n$  – число полуволн вдоль оси  $x$ ;
- $m$  – число полуволн вдоль оси  $y$ ;
- $p$  – число полуволн вдоль оси  $z$ .

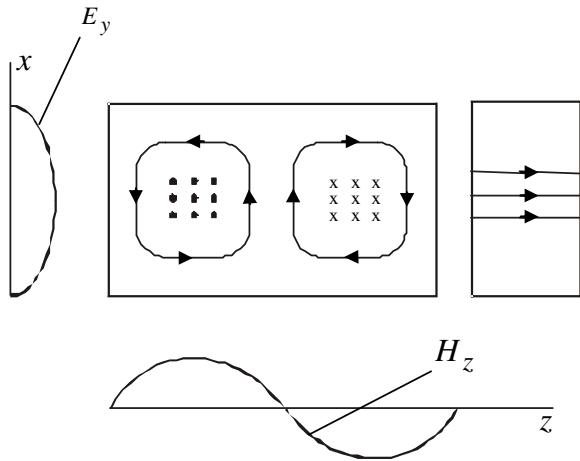


Рис. 6.2. Силовые линии электрического и магнитного полей в прямоугольном резонаторе с типом поля  $H_{102}$

В рассматриваемом частном случае имеем дело с волной  $H_{10}$ .

Пусть  $p = 2$ . Тогда

$$E_y = E_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi z}{c}. \quad (6.3)$$

Используя уравнения Максвелла, найдем компоненты поля:

$$H_x = -\frac{E_0}{i\omega\mu_0} \frac{2\pi}{c} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{2\pi z}{c};$$

$$H_y = 0;$$

$$H_z = \frac{E_0}{i\omega\mu_0} \frac{\pi}{a} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi z}{c}.$$

Распределение поля, отвечающее формулам (6.3), показано на рис. 6.2.

В резонаторе существует стоячая волна: компоненты поля  $H_x$  и  $H_z$  изменяются во времени синфазно. Напряженность поля  $E_y$  по отношению к  $H_x$  и  $H_z$  сдвинута по фазе на  $90^\circ$ .

В волноводе компоненты  $E_y$  и  $H_x$  совпадают в пространстве, образуя вектор Пойнтинга. В резонаторе максимумы  $E_y$  и  $H_x$  разнесены, а потому в резонаторе с идеально проводящими стенками вектор Пойнтинга равен нулю, и переноса энергии в резонаторе нет. В резонаторе электромагнитное поле только запасает энергию.

В общем случае в прямоугольном объемном резонаторе можно выделить волны двух классов – продольно-магнитные  $H_{nmp}$  и продольно-электрические  $E_{nmp}$ . Имеется в виду, что в первом случае продольная компонента магнитного поля направлена вдоль оси  $z$ , а во втором случае вдоль оси  $z$  направлена продольная компонента электрического поля.

Представим себе, что в объеме резонатора произошел кратковременный электрический разряд. В резонаторе после окончания разряда возникнут колебания электромагнитного поля на частоте, которая носит название «собственная частота объемного резонатора». Естественно, что после окончания возбуждающего импульса колебания будут медленно затухать – причём тем медленнее, чем меньше потери энергии в проводящих стенках резонатора.

Найдем собственную частоту прямоугольного объемного резонатора. Возьмем функцию  $Z$ , описывающую какой-нибудь вектор поля в объемном резонаторе:

$$Z(x, y, z) = Z_{nmp} \left[ \begin{array}{c} \cos \left[ \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \right] \\ \sin \left[ \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \right] \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \cos \left[ \left( \frac{n\pi y}{b} \right) \right] \\ \sin \left[ \left( \frac{n\pi y}{b} \right) \right] \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \cos \left[ \left( \frac{n\pi z}{c} \right) \right] \\ \sin \left[ \left( \frac{n\pi z}{c} \right) \right] \end{array} \right].$$

В рассматриваемом случае в качестве функции координат в равной мере могут быть использованы как  $\sin$ , так и  $\cos$ . Конкретный выбор функции определяется граничными условиями на стенках резонатора. Подставим взятую функцию в волновое уравнение:

$$\Delta Z + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 Z = 0,$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Получим:

$$\left[ -\left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 - \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 - \left( \frac{p\pi}{c} \right)^2 + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \right] Z(x, y, z) = 0.$$

Волновое уравнение имеет ненулевое решение только в том случае, если равно нулю выражение, стоящее в квадратных скобках. Отсюда следует, что

$$\omega_0^{(n,m,p)} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \sqrt{\left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 + \left( \frac{p\pi}{c} \right)^2}. \quad (6.4)$$

Это и есть собственная частота колебаний объемного резонатора, отвечающая типу колебаний с квантовыми числами  $n, m, p$ . Собственная частота колебаний объемного резонатора – его резонансная частота. Если внешнее воздействие (ток) имеет такую же частоту, то в резонаторе возбуждается поле самой большой амплитуды. Этую же формулу можно переписать для собственной частоты резонатора, выраженной в герцах:

$$f_0^{(n,m,p)} = c \sqrt{\left( \frac{n}{2a} \right)^2 + \left( \frac{m}{2b} \right)^2 + \left( \frac{p}{2c} \right)^2},$$

где  $c$  – скорость света.

## 6.2. Добротность объемного резонатора

Добротность объемного резонатора, как и добротность любого колебательного контура, это численная мера отношения запасенной энергии к энергии, поглощаемой за один период колебаний. Чем больше данное отношение, тем больше добротность. Для начала рассмотрим простейшую колебательную систему – LCR-контур.

**Добротность LCR-контура.** Импеданс контура (рис. 6.3), по отношению к внешней цепи

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{R_L + i\omega L} + i\omega C} = \frac{i\omega L + R_L}{1 - \omega^2 LC + i\omega CR_L}. \quad (6.5)$$

В случае  $\omega L \gg R$  резонансная частота контура

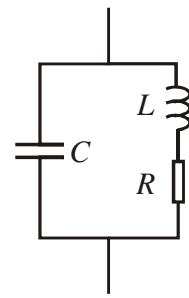


Рис.6.3. Схема RCL-колебательного контура

$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ , так что выражение для импеданса (6.5) можно переписать в более простом виде:

$$Z = \frac{i\omega L}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + i\omega CR_L}.$$

Вблизи резонанса  $\omega C \approx \frac{1}{\omega L}$ ,  $\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega^2} \approx \frac{2\Delta\omega}{\omega_0}$ , где  $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ . Здесь

$\Delta\omega$  – отклонение частоты внешнего источника колебаний от резонансной частоты контура, или, другими словами, – *расстройка контура*.

Импеданс контура вблизи резонанса как функция расстройки частоты имеет вид

$$Z = \frac{i\omega L}{\frac{2\Delta\omega}{\omega} + i\frac{R_L}{\omega L}}.$$

Введем обозначение для добродотности контура:

$$\omega L / R_L = Q, \quad (6.6)$$

тогда выражение для импеданса контура можно представить так:

$$Z = R_{eq} \frac{1}{1 - i \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} Q}.$$

где  $R_{eq} = R_L Q^2$  – эквивалентное резонансное сопротивление контура.

Теперь можно окончательно выделить вещественную и мнимую части импеданса контура:

$$Z = R_{eq} \frac{1 + i \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} Q}{1 + \left( \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} Q \right)^2}. \quad (6.7)$$

Формула (6.7) иллюстрируется рис. 6.4. Разность ( $\omega_2 - \omega_1 = 2\Delta\omega$ ) принято называть *полосой пропускания контура*. Характерные точки на рис. 6.4 определяются равенством

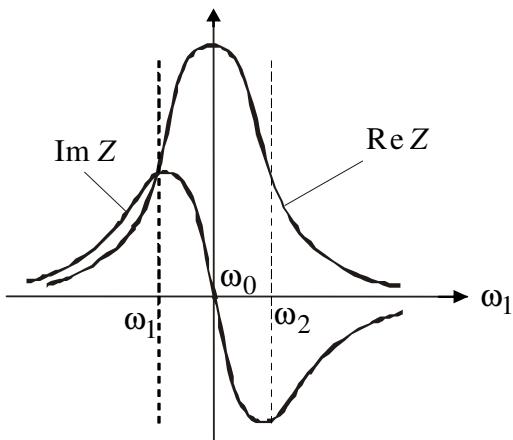


Рис. 6.4. Вещественная и мнимая компоненты импеданса параллельного LCR-контура как функции частоты

$$\frac{2\Delta\omega}{\omega_0}Q = 1,$$

в котором  $\omega_1 - \omega_0 = \Delta\omega$ ,  $\omega_0 - \omega_2 = \Delta\omega$ .

Добротность LCR-контура  $Q$  была определена формулой (6.6).

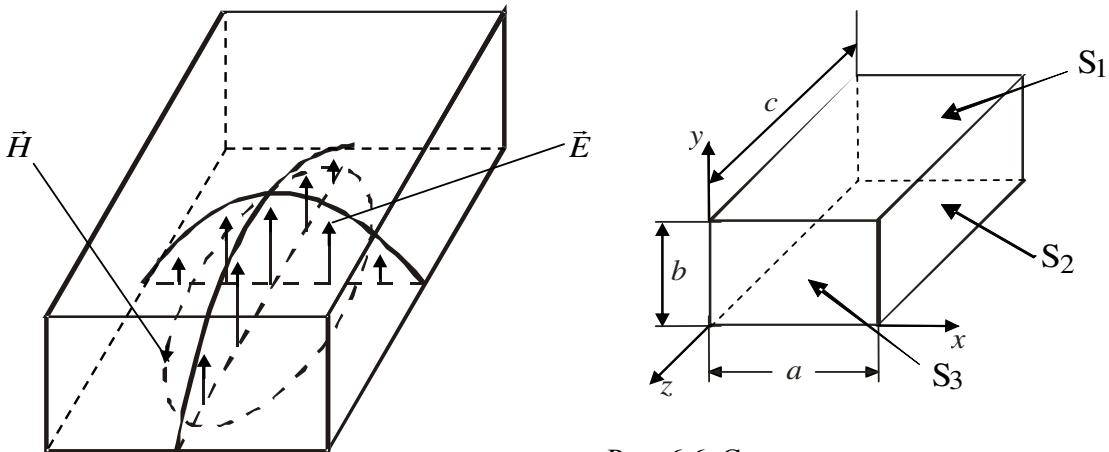


Рис. 6.5. Силовые линии электрического и магнитного полей в прямоугольном резонаторе с типом поля  $H_{101}$ .

Рис. 6.6. Система координат и размеры объемного резонатора к расчету геометрического фактора

**Обобщенная формула для добротности.** Умножим числитель и знаменатель (6.6) на  $1/2I_m^2$ , где  $I_m$  – амплитуда тока в контуре. Получим

$$Q = \omega \frac{I_m^2 L/2}{I_m^2 R/2}.$$

Заметим, что  $L I_m^2 / 2 = W$ ,  $R I_m^2 / 2 = P$ , где  $W$  – максимальная энергия, запасенная в контуре;  $P$  – мощность, поглощаемая в контуре на частоте резонанса.

Тогда

$$Q = \omega W / P, \quad (6.8)$$

или

$$Q = 2\pi \frac{W}{PT},$$

где  $PT$  – энергия, поглощенная за один период колебаний тока в контуре.

**Добротность объемного резонатора.** Максимальные энергии, запасаемые в резонаторе магнитным полем при  $H(t) = H_m$  и электрическим полем при  $E(t) = E_m$ , равны, соответственно,

$$W_H = \int_V \frac{\mu_0 H_m^2}{2} dV, \quad W_E = \int_V \frac{\epsilon_0 E_m^2}{2} dV.$$

При  $\omega = \omega_0$   $W_H = W_E = W$ , где  $W$  – полная энергия, запасенная в резонаторе.

Мощность, поглощаемая стенками резонатора:

$$P = \frac{1}{2} \int_S [\vec{E}_\tau \vec{H}_\tau^*] dS, \quad |\vec{E}_\tau| = |\vec{H}_\tau| R_{\text{sur}}, \quad (6.9)$$

где  $\vec{E}_\tau, \vec{H}_\tau$  – касательные составляющие векторов электрического и магнитного полей на стенах резонатора;  $R_{\text{sur}}$  – поверхностное сопротивление материала стенок.

Исключив из (6.9)  $\vec{E}_\tau$ , получим выражение для мощности, поглощаемой в стенах, и в соответствии с (6.8) и (6.9) найдем добротность объемного резонатора:

$$Q = \frac{\omega \mu_0 \int_V |\vec{H}|^2 dV}{R_{\text{sur}} \int_S |\vec{H}_\tau|^2 dS}.$$

Учтем, что  $\omega \mu_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} 120\pi$ , где  $\lambda_0$  – длина волн в вакууме. Тогда

$$Q = \frac{120\pi}{R_{\text{sur}}} \frac{\frac{2\pi}{\lambda_0} \int_V |\vec{H}|^2 dV}{\int_S |\vec{H}_\tau|^2 dS}. \quad (6.10)$$

Добротность резонатора определяется интегралами от напряженности магнитного поля по объему резонатора и по поверхности стенок, а также поверхностным сопротивлением материала стенок. Из (6.10) следует, что добротность зависит от геометрических размеров резонатора. Принято обозначать:

$$Q = G/R_{\text{sur}},$$

где  $G$  – геометрический фактор, или

$$Q = 120\pi \frac{g}{R_{\text{sur}}}. \quad (6.11)$$

Здесь  $g$  – безразмерный геометрический фактор:

$$g = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\int_V |\vec{H}|^2 dV}{\iint_S |\vec{H}|^2 dS}, \quad (6.12)$$

Где  $\lambda$  – длина волны в материале, заполняющем резонатор. Для пустого объемного резонатора – это длина волны в вакууме.

Пример расчета добротности резонатора с типом поля  $H_{101}$ . Распределение силовых линий показано на рис.6.5, а размеры резонатора приведены на рис. 6.6.

Пусть напряженность магнитного поля задана следующими соотношениями:

$$H_x = I_m \frac{1}{c} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi z}{c}, \quad H_y = 0, \quad H_z = I_m \frac{1}{a} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi z}{c}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_V |\vec{H}|^2 dV &= I_m^2 \left( \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \right) \frac{abc}{4}; \\ \int_{S_1} |\vec{H}|^2 dS &= I_m^2 \left( \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \right) \frac{ac}{4}; \\ \int_{S_2} |\vec{H}|^2 dS &= I_m^2 \frac{1}{a^2} \frac{bc}{2}; \\ \int_{S_3} |\vec{H}|^2 dS &= I_m^2 \frac{1}{c^2} \frac{ab}{2}; \\ \int_S |\vec{H}|^2 dS &= 2I_m^2 \left[ \left( \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \right) \frac{ac}{4} + \frac{1}{a^2} \frac{cb}{2} + \frac{1}{c^2} \frac{ab}{2} \right] = \\ &= I_m^2 \frac{1}{2a^2 c^2} \left[ (a^2 + c^2) ac + 2a^3 b + 2c^3 b \right]; \\ g &= \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{a^2 + c^2}{a^2 c^2} \frac{abc}{4} \frac{2a^2 c^2}{a^3 c + ac^3 + 2a^3 b + 2c^3 b}. \end{aligned}$$

В результате получим окончательное выражение для безразмерного геометрического фактора:

$$g = \frac{\pi}{\lambda_0} \frac{1}{\frac{2(a^3 + c^3)}{ac(a^2 + c^2)} + \frac{1}{b}}. \quad (6.13)$$

Зададим размеры резонатора:  $b = 1,0$  см;  $a = c = 2,0$  см.

В соответствии с (6.4)  $\frac{2}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}}$ , отсюда находим:  $\lambda_0 = 2\sqrt{2}$  см.

Подставив численные значения в (6.13), получим

$$g = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{1}{2 \cdot \frac{2 \cdot 16}{4 \cdot 8} + 1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2} \cdot 3} \approx 0,4.$$

При некоторой средней комбинации размеров объемного резонатора безразмерный геометрический фактор имеет значение порядка единицы ( $g \approx 1$ ); в цилиндрическом резонаторе можно получить  $g = 2$ .

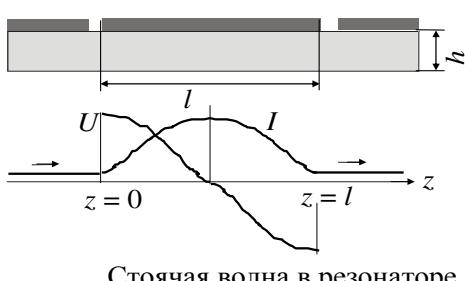
Приняв  $g \approx 1$ , найдем добротность медного резонатора на частоте 10 ГГц. При 10 ГГц, 300 К имеем в случае медных стенок резонатора  $R_{\text{sur}} = 0.025$  Ом, тогда в соответствии с (6.11) получим:

$$Q = \frac{377 \cdot 1,0}{0,025} \approx 15000.$$

Это ненагруженная (собственная) добротность объемного резонатора.

### 6.3. Резонатор на полосковой линии

На рис. 6.7 показан микрополосковый резонатор. Он образован отрезком микрополосковой линии длиной  $l$  и связан с внешними линиями передачи через зазоры, образующие планарные конденсаторы.



Стоячая волна в резонаторе

Рис. 6.7. Схема резонатора на отрезке микрополосковой линии

резонаторе:

$$U(z) = U_{\text{пад}} e^{-i\beta z} + U_{\text{отр}} e^{i\beta z},$$

где  $U_{\text{пад}}$  и  $U_{\text{отр}}$  – падающая и отраженная волны в резонаторе.

На разомкнутых концах отрезка микрополосковой линии коэффициент отражения  $\Gamma \approx 1$ .

При таких коэффициентах отражения получим следующие соотношения между падающей и отраженной волнами в резонаторе:

$$\begin{aligned} U_{\text{пад}} &= U_{\text{отр}}, \quad z = 0; \\ U_{\text{пад}} e^{-i\beta l} &= U_{\text{отр}} e^{i\beta l}, \quad z = l. \end{aligned} \quad (6.14)$$

$U_{\text{пад}}$  и  $U_{\text{отр}}$  не равны нулю, если определитель системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ e^{-i\beta l} & e^{i\beta l} \end{vmatrix} = e^{i\beta l} - e^{-i\beta l} = 2i \sin \beta l = 0.$$

Тогда

$$\beta l = n\pi, \quad (6.15)$$

где  $n = 1, 2, 3\dots$

Полученное соотношение (6.15) представляет собой условие резонанса. Оно справедливо при очень малой связи резонатора с внешними цепями, т. е. при малых значениях емкостей планарных конденсаторов, образованных зазорами на концах резонатора. При достаточно большой связи модуль коэффициента отражения от зазоров оказывается меньше 1 и соотношения (6.14) и (6.15) должны быть уточнены. Однако такое уточнение не повлияет на расчет собственной добротности резонатора.

На рис. 6.8 показаны размеры резонирующего отрезка линии.

Рассмотрим резонатор в приближении отсутствия полей рассеяния:

$$H_m = \frac{I_m}{w};$$

$$H(z) = \frac{I_m}{w} \sin \frac{\pi z}{l};$$

$$\int_V H^2(z) dV = \left( \frac{I_m}{w} \right)^2 \frac{hlw}{2};$$

$$\int_S H^2(z) dS = \left( \frac{I_m}{w} \right)^2 \cdot 2 \frac{lw}{2}.$$

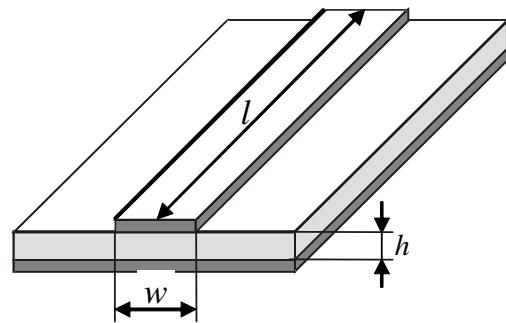


Рис. 6.8. Размеры отрезка микрополосковой линии к расчету геометрического фактора

В последней формуле площадь поверхности отрезка микрополосковой линии, образующей резонатор, умножена на два, так как резонатор образован двумя проводящими поверхностями. Обращаясь к формуле (6.12), найдем:

$$g = \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{I_m}{w} \right)^2 \frac{hlw}{2} = \frac{\pi h}{\lambda}, \quad (6.16)$$

где  $\lambda$  – длина волны в микрополосковой линии, образующей резонатор.

Пусть  $\epsilon = 10$ ;  $\epsilon_{ef} = 6.25$ ;  $h = 0,5$  мм;  $f = 10$  ГГц;  $\lambda_0 = 3$  см;  $\lambda = 1,2$  см;  $l = 0,6$  см. Тогда в соответствии с (6.16) получим  $g = \frac{\pi \cdot 0,5}{12} = 0,13$ .

Для напыленной меди на частоте 10 ГГц имеем поверхностное сопротивление  $R_{sur} = 0,04$  Ом. В соответствии с формулой (6.11) находим добротность микрополоскового резонатора на основе медной пленки, полученной методом вакуумного напыления:

$$Q_M = \frac{120\pi/\sqrt{\epsilon_{ef}}}{R_{sur}} g = \frac{377}{2,5 \cdot 0,04} \cdot 0,13 \cong 500.$$

Это значение добротности связано с потерями в металле. Кроме того, существуют потери в диэлектрике и потери на излучение. Результирующая добротность  $Q_\Sigma$  определяется выражением

$$\frac{1}{Q_\Sigma} = \frac{1}{Q_M} + \frac{1}{Q_D} + \frac{1}{Q_R},$$

где добротность  $Q_D$  обусловлена потерями в диэлектрике ( $\frac{1}{Q_D} = \operatorname{tg} \delta_D$ ). В

случае диэлектрической подложки, изготовленной из достаточно хорошего материала,  $\operatorname{tg} \delta_D \cong 10^{-3}$ . Добротность  $Q_R$  обусловлена потерями на излучение. Ее значение зависит от качества экранирования резонатора. В среднем, можно принять  $Q_R = 10^3 \dots 10^4$ . В результате получим:  $Q_\Sigma \cong 250$ . Это – ненагруженная добротность полуволнового микрополоскового резонатора с учетом потерь в металле, в диэлектрике и потерь на излучение.

Использованный безразмерный геометрический фактор был найден без учета полей рассеяния. Учет полей рассеяния при расчете добротности микрополоскового резонатора приведет к необходимости учета неоднородного распределения плотности СВЧ-тока по поперечному сечению микрополоска и металлизированного основания (см. рис. 5.16). Учет распределения плотности тока показывает, что поперечное сечение микрополоска используется плохо, так как только часть его сечения занята током. В результате погонное сопротивление микрополоска оказывается больше, чем сопротивление, которое учтено в формуле (6.16). Основание, напротив, занято током на большей площади, поэтому его вклад в потери СВЧ-энергии относительно невелик. Изменения этих двух величин в результате компенсируют друг друга, так что добротность микрополоскового резонатора может быть оценена без учета полей рассеяния.

#### 6.4. Возбуждение объемного резонатора

Представим себе, что к объемному резонатору подводится СВЧ-энергия от внешнего генератора, соединенного с резонатором коаксиальным кабелем или другой линией передачи. В резонаторе возбуждаются колебания, амплитуда которых может быть весьма большой при совпадении частоты колебаний генератора и собственной частоты резонатора, т. е. в условиях резонанса. При этом значительная часть энергии, подводимой к резонатору, поглощается в стенках резонатора. Если частота генератора не совпадает с собственной частотой резонатора, подводимая к резонатору энергия отражается от него. Основой описания перечисленных явлений служит теорема Пойнтинга, которая позволяет количественно описать перенос энергии по линии передачи к элементу возбуждения колебаний в резонаторе, сохранение колебательной энергии в объеме резонатора и поглощение энергии в стенках резонатора. Совокупность всех этих явлений принято называть *возбуждением объемного резонатора*.

На рис. 6.9 показана схема объемного резонатора. Резонатор возбуждается штырем, соединенным с коаксиальной линией.

Для определенности рассмотрим тип поля  $H_{101}$  (рис. 6.10).

Распределение поля задается следующими формулами:

$$\begin{aligned}
 E_y &= E_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi z}{c}; \\
 H_x &= -\frac{\pi/c}{i\omega\mu_0} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi z}{c}; \\
 H_z &= \frac{\pi/a}{i\omega\mu_0} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi z}{c}.
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

Зададим распределение тока вдоль штыря так, как это показано на рис. 6.11. Продольная ось штыря совпадает с координатой  $y$ .

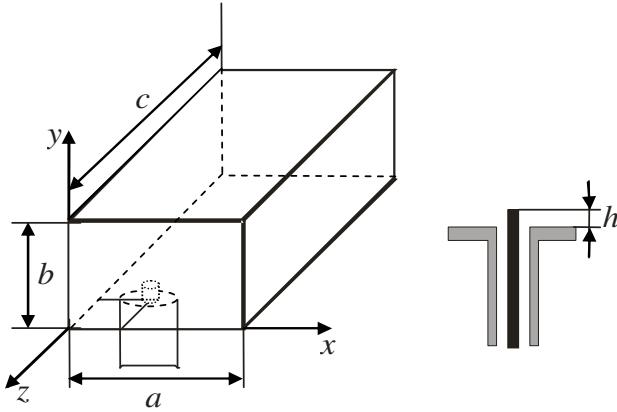


Рис. 6.9. Схема возбуждения прямоугольного объемного резонатора

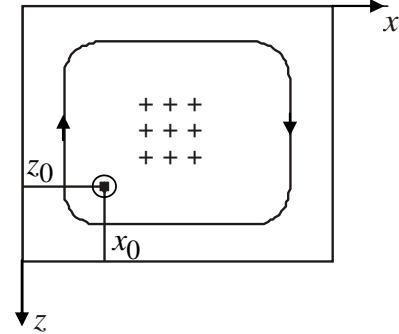


Рис. 6.10. Расположение штыревого возбудителя в прямоугольном резонаторе с типом поля  $H_{101}$

Такое «треугольное» распределение тока соответствует простейшему описанию, которое отвечает равенству нулю тока на свободном конце штыря и максимальному значению тока в точке подключения к питающей линии:

$$j_y(y) = \frac{I_0}{\pi R^2} \left( 1 - \frac{y}{h} \right). \tag{6.18}$$

Это справедливо, если длина штыря много меньше длины волны в среде, заполняющей резонатор:  $h \leq \lambda/8$ .

Используем теорему Пойнтинга:

$$i\omega \int_V \left( \frac{\epsilon_0 |E_m|^2}{2} - \frac{\mu_0 |H_m|^2}{2} \right) dV = \frac{1}{2} \int_S [\vec{E}_m H_m^*] d\vec{S} + \frac{1}{2} \int_V \vec{E}_m \cdot \vec{j}_m^* dV.$$

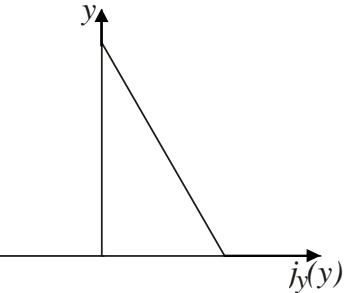


Рис. 6.11. Идеализированное распределение тока вдоль штыревого возбуждающего элемента

В записанных соотношениях имеются три интеграла:

- интеграл по объему резонатора, который количественно определяет колебательную энергию, запасенную в объеме резонатора;
- интеграл по стенкам резонатора, который количественно определяет энергию, поглощаемую в стенках резонатора;
- интеграл по объему возбуждающего штыря, который количественно определяет энергию, поступающую в резонатор со стороны питающей резонатор линии передачи.

Рассмотрим все перечисленные интегралы.

*Интеграл по объему резонатора:*

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\epsilon_0 |\vec{E}_m|^2}{2} dV &= \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \frac{abc}{4}; \\ \int_V \frac{\epsilon_0 |\vec{H}_m|^2}{2} dV &= \frac{E_0^2}{2\omega^2\mu_0} \left[ \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{c}\right)^2 \right] \frac{abc}{4} = \\ &= \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{abc}{4}. \end{aligned}$$

С учетом выражения для собственной частоты резонатора (6.4) при  $n=1, m=1, p=1, (\pi/a)^2 + (\pi/c)^2 = \omega_0^2 \epsilon_0 \mu_0$  получим:

$$i\omega \int_V \left( \frac{\epsilon_0 |E_m|^2}{2} - \frac{\mu_0 |H_m|^2}{2} \right) dV = i\omega \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \frac{abc}{4} \left( 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right).$$

Этот интеграл выражает резонансные свойства резонатора. При  $\omega = \omega_0$  интеграл обращается в нуль, поскольку энергия, запасенная в  $\vec{E}$ -поле, и энергия, запасенная в  $\vec{H}$ -поле, равны.

*Интеграл по поверхности резонатора:*

$$\frac{1}{2} \oint \left[ \vec{E}_m \vec{H}_m^* \right] d\vec{S} = \frac{1}{2} Z_{\text{sur}} \oint |\vec{H}_{m\tau}|^2 dS. \quad (6.19)$$

Здесь  $Z_{\text{sur}}$  – поверхностный импеданс металла, из которого сделаны стенки резонатора. Вспомним, что

$$g = \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{\int_V |\vec{H}|^2 dV}{\iint_S |\vec{H}|^2 dS},$$

тогда можно записать:

$$\frac{1}{2} \iint_S |\vec{H}_{m\tau}|^2 dS = \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{1}{g} \int_V \frac{|H_m|^2}{2} dV = \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{1}{g} \frac{1}{\mu_0} \int_V \frac{\mu_0 |H_m|^2}{2} dV.$$

Возвращаясь к формуле (6.19), получим

$$\frac{1}{2} \iint_S [\vec{E}_m \vec{H}_m^*] dS = Z_{\text{sur}} \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \frac{1}{g \mu_0} \int_V \frac{\mu_0 |H_m|^2}{2} dV.$$

*Интеграл по объему штыря.* Учтем, что интеграл по объему штыря распадается на интеграл по его поперечному сечению и интеграл по его длине. Интеграл по поперечному сечению от плотности тока даст полный ток, текущий по штырю. В результате получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_V \vec{E}_m j_m^* dV &= -\frac{1}{2} E_0 \sin \frac{\pi x_0}{a} \sin \frac{\pi z_0}{c} I_0 \int_0^h \left(1 - \frac{y}{h}\right) = \\ &= -\frac{1}{2} E_0 I_0 \frac{h}{2} \sin \frac{\pi x_0}{a} \sin \frac{\pi z_0}{c} = -\frac{1}{2} E_0 I_0 h_{\text{ef}}, \end{aligned}$$

где  $x_0, z_0$  – координаты центра штыря. Здесь введено обозначение:

$$h_{\text{ef}} = \frac{h}{2} \sin \frac{\pi}{a} x_0 \sin \frac{\pi}{c} z_0. \quad (6.20)$$

*Баланс энергии в объемном резонаторе.* Подставим все найденные интегралы в теорему Пойнтига и получим:

$$i\omega \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \frac{abc}{4} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) = Z_{\text{sur}} \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \frac{1}{g \mu_0} \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \frac{abc}{4} - \frac{1}{2} E_0 I_0 h_{\text{ef}}.$$

Заметим, что  $Z_{\text{sur}} = R_{\text{sur}} + iX_{\text{sur}}$ . Произведя некоторые алгебраические преобразования, получим:

$$E_0 \left\{ i\omega \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) - \omega \epsilon_0 \frac{R_{\text{sur}} + iX_{\text{sur}}}{120\pi g} \right\} \frac{abc}{4} = -I_0 h_{\text{ef}}.$$

Учтем также, что

$$\omega \epsilon_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{120\pi},$$

и тогда окончательный результат использования теоремы Пойнтинга оказывается таким:

$$E_0 \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{120\pi} \frac{abc}{4} \left[ i \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) - \frac{1}{Q} (1+i) \right] = I_0 h_{\text{ef}}. \quad (6.21)$$

Напомним, что добротность резонатора определяется геометрическим фактором и поверхностным сопротивлением стенок.

Проделанный здесь расчет показывает, как обобщенное теоретическое соотношение, каким является теорема Пойнтинга, превращается в расчетную формулу, содержащую размеры объемного резонатора и характеристику материала, из которого он изготовлен.

**Напряженность поля в резонаторе.** Из (6.21) легко получить:

$$E_0 = I_0 \frac{240 h_{\text{ef}} \lambda_0}{abc} \frac{1}{-i \left( 1 - \frac{1}{Q} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) + \frac{1}{Q}}. \quad (6.22)$$

Заметим, что произошел сдвиг резонансной частоты из-за ненулевой реактивной составляющей поверхностного импеданса стенок ( $X_{\text{sur}} \neq 0$ ):

$$1 - \frac{1}{Q} - \frac{\omega_{\text{res}}^2}{\omega_0^2} = 0, \quad \omega_{\text{res}}^2 = \omega_0^2 \left( 1 - \frac{1}{Q} \right).$$

Частота стала немного меньше. Это произошло из-за проникновения поля в стенки. Резонатор стал как бы несколько больше по размерам, и его резонансная частота соответственно уменьшилась.

При  $\omega = \omega_{\text{res}}$

$$E_{0,\text{res}} = I_0 \frac{240 h_{\text{ef}} \lambda}{abc} Q.$$

В общем случае напряженность электрического поля в резонаторе зависит от частоты:

$$E_0(\omega) = I_0 \frac{E_{0,\text{res}}}{1 - iQ \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{\text{res}}^2} \right)}. \quad (6.23)$$

**Сопротивление излучения штыря в резонатор.** Найдем поток мощности через поверхность, охватывающую штырь:

$$P = \frac{1}{2} \int \left[ \vec{E} \vec{H}^* \right] d\vec{S}. \quad (6.24)$$

Его можно определить как

$$P = \frac{1}{2} |I_0|^2 Z_{\text{input}}. \quad (6.25)$$

Здесь  $I_0$  – ток в основании штыря в соответствии с (6.18) и рис. 6.12;  $Z_{\text{input}}$  – импеданс излучения штыря в резонаторе. Подставим из (6.17) электрическое поле резонатора в точке  $(x_0, z_0)$  и магнитное поле на поверхности штыря, созданное током в штыре:  $H(y) = I(y)/2\pi r$ , где  $r$  – радиус штыря. Тогда интеграл (6.22) получится таким:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \left[ \vec{E} \vec{H}^* \right] dS &= E_0 \sin \frac{\pi x_0}{a} \sin \frac{\pi z_0}{c} \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} H(y) r d\phi dy = \\ &= \frac{1}{2} E_0 I_0 \underbrace{\frac{h}{2} \sin \frac{\pi}{a} x_0 \sin \frac{\pi}{c} z_0}_{h_{\text{ef}}}. \end{aligned}$$

Здесь эффективная длина штыря та же, что была определена формулой (6.20). Итак,

$$\frac{1}{2} \int \left[ \vec{E} \vec{H}^* \right] dS = \frac{1}{2} E_0 I_0 h_{\text{ef}}.$$

Подставив в эту формулу  $E_0$  из (6.22) и учитывая (6.24) и (6.25), получим

$$\frac{1}{2} I_0^2 Z_{\text{input}} = \frac{1}{2} I_0^2 \frac{240 h_{\text{ef}}^2 \lambda}{abc} \frac{1}{-i \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{\text{res}}^2} \right) + \frac{1}{Q}}.$$

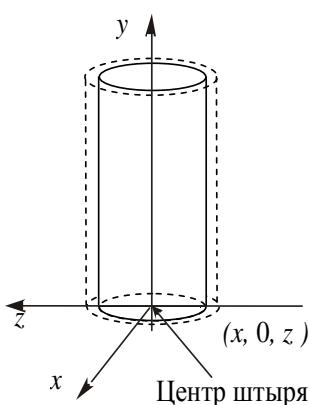


Рис. 6.12. Поверхностный слой штыревого возбуждающего элемента, занятый СВЧ-током

Итак, определён входной импеданс штыря:

$$Z_{\text{input}} = \frac{240 h_{\text{ef}}^2 \lambda}{abc} \frac{1}{-i \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{\text{res}}^2} \right) + \frac{1}{Q}}.$$

На резонансной частоте  $R_{\text{input}}$  [Ом]:

$$R_{\text{input}} = \frac{240 h_{\text{ef}}^2 \lambda}{abc} Q. \quad (6.26)$$

Произведем количественные оценки. Пусть  $a = c = 2$  см;  $b = 1$  см;  $h = 0,3$  см;  $x_0 = z_0 = 0,16$  см.

Тогда  $\lambda = 2\sqrt{2}$  см ( $f = 10,61$  ГГц);  $Q = 5000$ ;  $\sin \frac{\pi}{a} x_0 = \sin \frac{\pi}{c} z_0 = 0,26$ ;  $h_{\text{ef}} = 0,01$  см.

Подставив полученные в числовые значения (6.26), найдем, что для выбранных размеров и при заданной добротности на резонансной частоте входное сопротивление штыря, возбуждающего резонатор,  $R_{\text{input}} = 85$  Ом.

## 6.5. Цилиндрические объемные резонаторы

Решение уравнений Максвелла в цилиндрической системе координат (рис. 6.13) приводит, в частности, к традиционным тригонометрическим функциям, которые описывают зависимости напряженности поля в резонаторе от угловой координаты  $\phi$  и от продольной координаты  $z$ . Зависимость от радиальной координаты  $r$  описывается функциями Бесселя. В настоящем курсе лекций ограничимся качественным рассмотрением полей в цилиндрических объемных резонаторах, не прибегая к их детальному описанию.

Подобно полям в прямоугольном резонаторе, поля в цилиндрическом резонаторе также имеют три квантовых числа, которые являются целыми числами:  $n$ ,  $m$ ,  $p$ . При этом  $n$  определяет зависимость от угловой координаты  $\phi$ ;  $m$  определяет зависимость от радиуса  $r$ ;  $p$  определяет зависимость от продольной координаты  $z$ .

В цилиндрических объемных резонаторах, подобно прямоугольным резонаторам, можно выделить две группы волн – волны электрического и магнитного типов.

Рассмотрим в качестве примера простейшую волну  $E$ -типа  $E_{010}$ .

На рис. 6.14 представлена схема распределения силовых линий электрического и магнитного полей. При этом учитывается следующая следующая ситуация: изменений по  $\varphi$  нет ( $n = 0$ ); изменение по  $r$  одно ( $m = 1$ ); изменений по  $z$  нет ( $p = 0$ ).

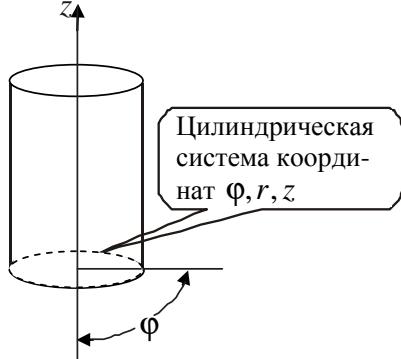


Рис. 6.13 Цилиндрическая система координат

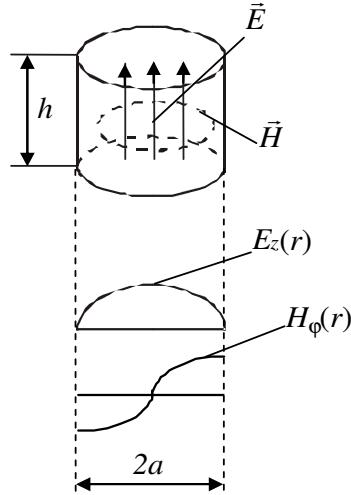


Рис. 6.14. Силовые линии полей в объемном цилиндрическом резонаторе с типом поля  $E_{010}$

В общем случае электрическое поле волны  $E_{010}$  описывается следующей формулой:

$$E_z(\varphi, r, z) = E_0 \cos(n\varphi) J_n\left(\frac{\alpha_{n,m}r}{a}\right) \cos\left(\frac{p\pi z}{h}\right), \quad (6.27)$$

где  $J_n(s)$  – функция Бесселя  $n$ -го порядка. Параметр  $\alpha_{n,m}$  подбирается таким образом, чтобы при  $r = a$  выполнялось условие  $J_n(\alpha_{n,m}) = 0$ , т. е. обеспечивается равенство нулю функции Бесселя. Число  $m$  – номер корня функции Бесселя.

В нижеследующей таблице приведены для примера несколько первых корней функции Бесселя нулевого и первого порядков (рис. 6.15):

$\alpha_{01} = 2,405$	$\alpha_{02} = 5,520$	$\alpha_{03} = 8,654$	$\alpha_{04} = 11,792$
$\alpha_{11} = 3,831$	$\alpha_{12} = 7,016$	$\alpha_{13} = 10,173$	$\alpha_{14} = 13,324$

Решение волнового уравнения позволяет получить выражение для собственной частоты цилиндрического резонатора:

$$\omega_0^{(n,m,p)} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \sqrt{\left(\frac{\alpha_{n,m}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{h}\right)^2}. \quad (6.28)$$

Для рассмотренного раньше типа поля  $E_{010}$  находим в таблице  $\alpha_{01} = 2,405$  и из формулы (6.28) получим:  $\omega_0 = c \frac{2,405}{a}$ , где  $c$  – скорость света, или  $f_0 = c \frac{1}{2,612a}$ . Отсюда легко находим длину волны в вакууме, отвечающую резонансной частоте рассматриваемого типа поля:  $\lambda_0 = 2,612a$ .

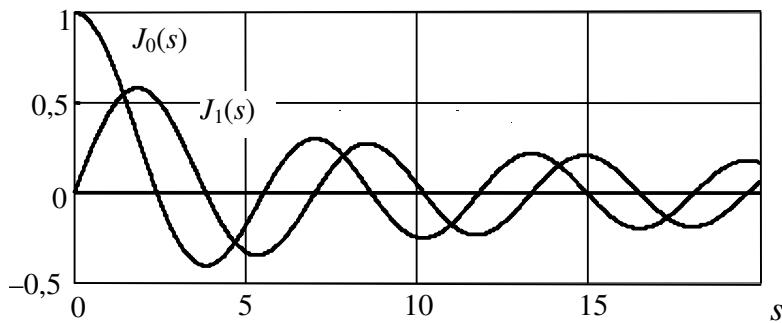


Рис. 6.15. Функции Бесселя нулевого и первого порядков.

Сравним рассмотренный цилиндрический резонатор с прямоугольным (квадратным) резонатором, сторона которого равна диаметру цилиндрического резонатора  $2a$ , а распределение поля топологически совпадает с распределением поля в цилиндрическом резонаторе (рис. 6.16). В этом случае

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \sqrt{\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2a}\right)^2}; f_0 = c \frac{1}{2\sqrt{2}a}; \lambda_0 = 2,82a.$$

Таким образом, резонансные частоты топологически подобных типов поля  $E_{010}$  круглого резонатора и поля  $H_{101}$  квадратного резонатора близки.

Рассмотрим еще два топологически подобных типа поля:  $E_{110}$  в круглом резонаторе (рис. 6.17) и  $H_{120}$  в прямоугольном (рис. 6.18).

На рис. 6.17 представлена следующая ситуация: изменение по  $\phi$  одно ( $n=1$ ); изменение по  $r$  одно ( $m=1$ ); изменений по  $z$  нет ( $l=0$ ).

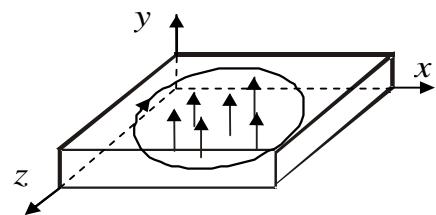


Рис. 6.16. Силовые линии полей в квадратном резонаторе с типом поля  $H_{101}$

Для типа поля  $E_{110}$  находим в таблице  $\alpha_{11} = 3,831$  и из формулы (6.27) получим:

$$\omega_0 = c \frac{3,831}{a}, \text{ где } c - \text{скорость света, или } f_0 = c \frac{1}{1,640a}. \text{ Отсюда легко}$$

находим длину волны в вакууме, отвечающую резонансной частоте рассматриваемого типа поля:  $\lambda_0 = 1,640a$ .

В квадратном резонаторе с типом поля  $H_{102}$ :

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \sqrt{\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} = c \frac{3,512}{a},$$

где  $c$  – скорость света, или  $f_0 = c \frac{1}{1,789a}$ . Отсюда легко находим длину

волны в вакууме, отвечающую резонансной частоте рассматриваемого типа поля:  $\lambda_0 = 1,789a$ .

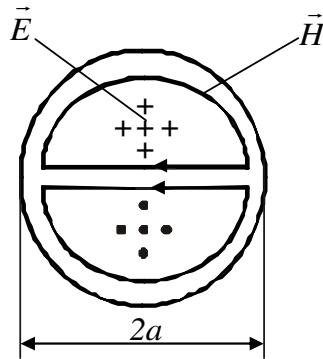
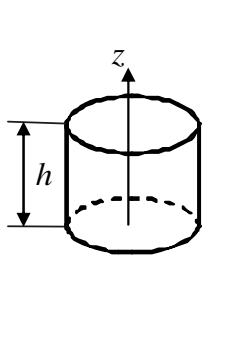


Рис. 6.17. Силовые линии полей в цилиндрическом резонаторе с типом поля  $E_{110}$

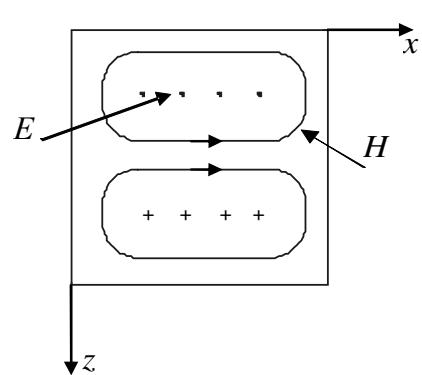


Рис. 6.18. Силовые линии полей в квадратном резонаторе с типом поля  $H_{102}$

Для топологически подобных типов поля в круглом ( $E_{010}$  и  $H_{101}$ ) и в квадратном ( $E_{110}$  и  $H_{102}$ ) резонаторах в обоих случаях длина волны в вакууме, отвечающая резонансной частоте рассматриваемых типов поля, в квадратном резонаторе несколько больше, чем в круглом. Это объясняется тем, что при выбранном равенстве диаметра круга и стороны квадрата эффективный размер (площадь) квадрата больше, чем эффективный размер (площадь) круга.

Рассмотрим теперь волну магнитного типа в цилиндрическом резонаторе  $H_{nml}$ ,  $H_z \neq 0$ ,  $E_z = 0$ . На рис. 6.19 представлено распределение сило-

вых линий полей цилиндрического объемного резонатора с типом поля  $H_{011}$ . В этом случае изменений по  $\phi$  нет ( $n = 0$ ); изменение по  $r$  одно ( $m = 1$ ); изменение по  $z$  одно ( $p = 1$ ).

Для типа поля  $H_{011}$  резонансная длина волны определяется следующей формулой:

$$\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2h}\right)^2 + \left(\frac{1}{1,64a}\right)^2}}.$$

Заметим, что силовые линии  $\vec{E}$  не замыкаются на стенки резонатора, ток в стенах минимален. Резонатор с таким типом поля имеет максимальную добротность. При  $h = 2a$  безразмерный геометрический фактор максимален ( $g = 2,07$ ). При  $h = 2a$  резонансная длина волны  $\lambda_0 = 1,52 a$ . Аналога типу поля  $H_{011}$  цилиндрического резонатора в прямоугольном резонаторе не существует.

Цилиндрический резонатор с типом поля  $H_{011}$  используется в измерительной аппаратуре, когда нужно получить высокую стабильность частоты и чистый спектр колебаний. В особых случаях стенки цилиндрического резонатора с типом поля  $H_{011}$  выполняются из сверхпроводникового материала, например ниобия (Nb). В этом случае при достаточно низкой температуре ( $T \leq 1 \text{ K}$ ) на частоте 10 ГГц такой резонатор может обеспечить весьма высокую собственную добротность ( $Q \leq 10^{10}$ ).

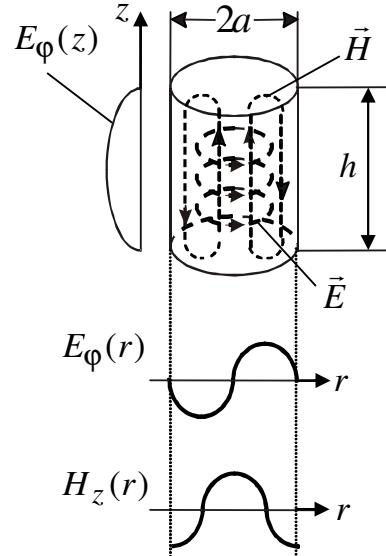


Рис.6.19. Силовые линии электрического и магнитного полей в цилиндрическом резонаторе с типом поля  $H_{011}$

## 7. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В СРЕДЕ, СОДЕРЖАЩЕЙ НАМАГНИЧЕННЫЙ ФЕРРИТ

Ферриты представляют собой сложные оксиды металлов, содержащие ионы железа. Благодаря наличию ионов железа ферриты являются *магнитными материалами*, они обладают спонтанной намагниченностью и

большой магнитной проницаемостью. В то же время ферриты являются диэлектриками (обладают малой электропроводностью). Электромагнитная волна может распространяться в объеме, заполненном ферритом. При этом магнитные свойства феррита создают характерные особенности распространения в нем волн СВЧ-диапазона. Если к ферриту приложено постоянное магнитное поле достаточно большой напряженности, то спиновые моменты ионов железа в составе феррита ориентируются вдоль направления приложенного постоянного магнитного поля. Такая ориентация спиновых моментов приводит к возникновению принципиально важных свойств материала по отношению к волнам СВЧ-диапазона:

- Поскольку в среде, содержащей феррит, существует выделенное направление, вдоль которого ориентированы спиновые моменты магнитных ионов, среда, содержащая феррит, анизотропна.
- Анизотропная среда, находящаяся под действием постоянного магнитного поля, обладает свойствами невзаимности, другими словами, в такой среде по отношению к СВЧ-волне нарушается теорема взаимности.
- Движение ориентированных спиновых моментов сопровождается явлением резонанса, что приводит к сильной частотной дисперсии магнитных свойств материала.

Движение спиновых моментов ионов железа в феррите под действием СВЧ-поля вокруг направления, заданного постоянным магнитным полем, представляет собой прецессию, т. е. вращательное движение. Вращательное движение спиновых моментов определяет основные электродинамические свойства феррита. В связи с этим намагниченный феррит называют *гиротропной средой*. Гиротропные свойства среды по отношению к электромагнитной волне могут быть обеспечены не только прецессией спиновых моментов, но и круговым движением электронов в полупроводнике или в газоразрядной плазме, находящихся во внешнем постоянном магнитном поле. В любой гиротропной среде нарушается теорема взаимности.

## 7.1. Магнитная проницаемость насыщенного феррита

Свойства ферритов в значительной степени определяются их структурой. Наибольшее применение получили ферриты со структурой шпинели и структурой граната. Ферриты со структурой шпинели представляют собой двойные оксиды, образуемые оксидом железа и оксидами двухвалентных металлов. Их химическая формула  $\text{Me}^{\text{II}}\text{O}\cdot\text{Fe}_2\text{O}_3$ , где  $\text{Me}^{\text{II}}$  – двухвалентный ион металла. Например,  $\text{NiFe}_2\text{O}_3$  – никелевый феррит,  $\text{MnO}\cdot\text{Fe}_2\text{O}_3$  – марганцевый феррит,  $(\text{Ni}_x\text{Mn}_{1-x})\text{-Fe}_2\text{O}_4$  – никельмарганцевый феррит. Пример феррита со структурой граната  $\text{Y}_3\text{Fe}_5\text{O}_{12}$  – железоиттриевый гранат (ЖИГ).

На рис. 7.1 показана кривая намагничивания типичного ферромагнитного материала. Важной характеристикой кривой намагничивания является индукция насыщения  $B_{\text{sat}}$ . Для чистого железа  $B_{\text{sat}} \approx 2$  Тл. Ферриты отличаются от железа тем, что ориентированные магнитные моменты в них образуют две подрешетки, имеющие разные направления ориентации. Такие

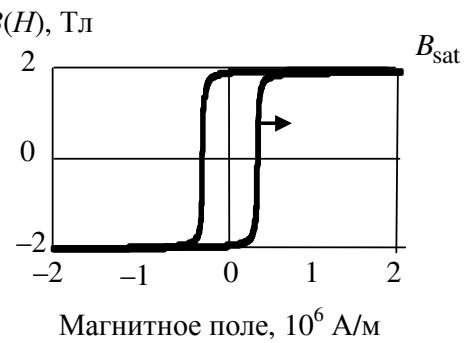


Рис. 7.1. Гистерезисная петля намагничивания типичного ферромагнитного материала

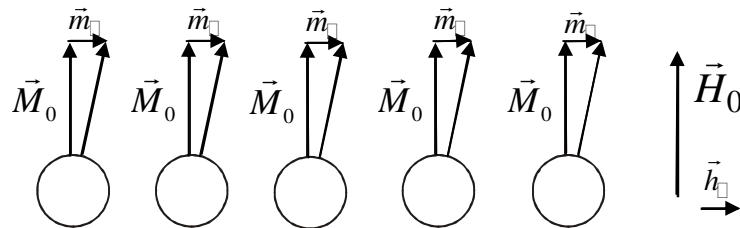


Рис. 7.2. Спиновые моменты электронов в атомах железа в сильном постоянном и слабом СВЧ-магнитных полях

материалы носят название «ферримагнетики». Благодаря разной ориентации подрешеток спиновых моментов индукция насыщения ферримагнетиков меньше индукции насыщения ферромагнетиков. Для ферритов индукция насыщения  $B_{\text{sat}}$  обычно составляет  $0,04\ldots 0,5$  Тл.

Пример расположения магнитных моментов электронов, находящихся в составе атома железа, показан на рис.7.2.

Постоянное магнитное поле  $\vec{H}_0$  ориентирует магнитные моменты по направлению поля, слабое переменное поле  $\vec{h}$  вызывает отклонения от положения равновесия. Электрон обладает механическим моментом, и поэтому ведет себя как волчок.

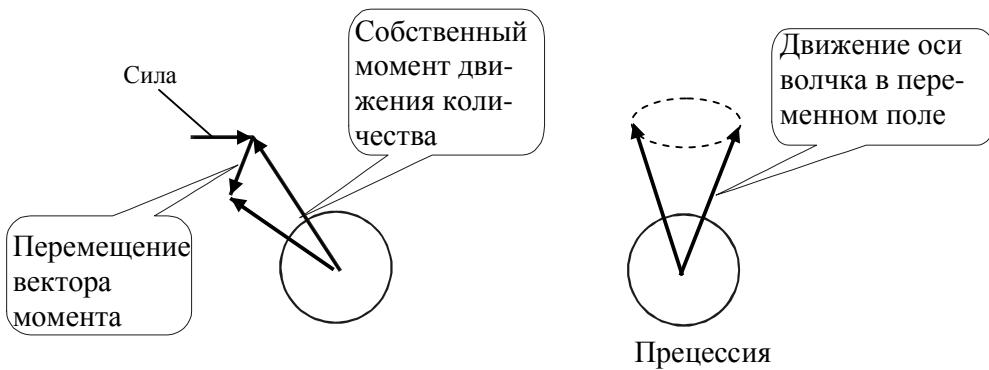


Рис. 7.3. Прецессия спинового момента электрона

Пусть  $M_0$  – намагниченность материала, которая определяется плотностью магнитных моментов отдельных атомов и непосредственно связана с индукцией насыщения  $B_{\text{sat}} = \mu_0 M_0$ . Уравнение движения вектора намагниченности непосредственно вытекает из уравнения движения волчка. Напомним, что электрон имеет собственный магнитный и механический моменты. Уравнение движения волчка известно из механики. Для описания намагниченности в этом уравнении внешнюю силу надо заменить напряженностью магнитного поля, а момент инерции волчка – намагниченностью материала. Тогда

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} = -\frac{e}{m}\mu [\vec{M} \cdot \vec{H}]. \quad (7.1)$$

Это уравнение было получено Л. Д. Ландау\* и Е. М. Лифшицем\*\* в 1935 г.

Внешнее постоянное магнитное поле  $H_0$  ориентирует магнитные моменты электронов, т. е.  $M_0 \parallel H_0$ . Переменное магнитное поле отклоняет магнитные моменты электронов от положения равновесия.

Пусть  $\vec{H}$  и  $\vec{M}$  – суммы постоянных  $H_0$ ,  $M_0$  и переменных во време-

\*Л.Д. Ландау (1908-1968) – выдающийся советский физик-теоретик.

\*\*Е. М. Лифшиц (1915-?) – советский физик-теоретик, сотрудник Ландау.

ни  $h$ -,  $m$ - составляющих:

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h}; \vec{M} = \vec{M}_0 + \vec{m}, \quad (7.2)$$

где

$$\begin{aligned}\vec{H}_0 &= \vec{e}_z H_0; \vec{h} = \vec{e}_x h_x + \vec{e}_y h_y, \\ \vec{M}_0 &= \vec{e}_z M_0, \vec{m} = \vec{e}_x m_x + \vec{e}_y m_y + \vec{e}_z m_z.\end{aligned}\quad (7.3)$$

Подставим (7.2) и (7.3) в (7.1) и выпишем проекции на оси координат:

$$\begin{aligned}i\omega m_x &= -\frac{e}{m} \mu_0 (H_0 m_y - M_0 h_y); \\ i\omega m_y &= \frac{e}{m} \mu_0 (H_0 m_x - M_0 h_x); \\ i\omega m_z &= 0.\end{aligned}\quad (7.4)$$

Обозначим:

$$\frac{e}{m} \mu_0 H_0 = \omega_0, \quad \frac{e}{m} \mu_0 M_0 = \omega_M. \quad (7.5)$$

Тогда система уравнений (7.4) перепишется так:

$$\begin{cases} i\omega m_x + \omega_0 m_y = \omega_M h_y; \\ -\omega_0 m_x + i\omega m_y = -\omega_M h_x; \\ m_z = 0. \end{cases} \quad (7.6)$$

Заметим, что  $M_0$ , а также  $\omega_0, \omega_M$  меняют знак при перемене направления  $H_0$ .

Найдем решение системы (7.6) относительно переменных составляющих намагниченности:

$$\begin{aligned}m_x &= -\frac{\omega_0 \omega_M}{\omega^2 - \omega_0^2} h_x - i \frac{\omega \omega_M}{\omega^2 - \omega_0^2} h_y; \\ m_y &= i \frac{\omega \omega_M}{\omega^2 - \omega_0^2} h_x - i \frac{\omega_0 \omega_M}{\omega^2 - \omega_0^2} h_y; \\ m_z &= 0.\end{aligned}\quad (7.7)$$

Введем обозначения:

$$-\frac{\omega_0 \omega_M}{\omega^2 - \omega_0^2} = \chi \quad (7.8)$$

(величина  $\chi$  носит название «магнитная восприимчивость»);

$$\frac{\omega\omega_M}{\omega^2 - \omega_0^2} = k. \quad (7.9)$$

Как будет показано далее, величина  $k$  – это недиагональная компонента тензора магнитной восприимчивости или магнитной проницаемости феррита. При перемене направления  $H_0$   $\chi$  не изменит знак,  $k$  знак изменит. Используя введенные обозначения, перепишем (7.7):

$$\begin{aligned} m_x &= \chi h_x - ikh_y; \\ m_y &= \chi h_y + ikh_x; \\ m_z &= 0. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Полученные соотношения (7.10) можно представить в виде произведения тензора восприимчивости насыщенного феррита на вектор переменного магнитного поля:

$$\begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} = \|\chi\| \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\|\chi\|$  – тензор магнитной восприимчивости насыщенного феррита:

$$\|\chi\| = \begin{vmatrix} \chi & -ik & 0 \\ ik & \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Введем теперь тензор магнитной проницаемости насыщенного феррита:

$$\begin{aligned} \vec{b} &= \mu_0 (\vec{h} + \vec{m}); \\ \vec{b} &= \|\mu\| \vec{h}; \\ \|\mu\| &= \|1\| + \|\chi\|. \end{aligned}$$

Здесь  $\vec{b}$  – магнитная индукция;  $\|1\|$  – единичная матрица;  $\|\mu\|$  – тензор магнитной проницаемости насыщенного феррита:

$$\|\mu\| = \mu_0 \begin{vmatrix} \mu' & -ik & 0 \\ ik & \mu' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (7.11)$$

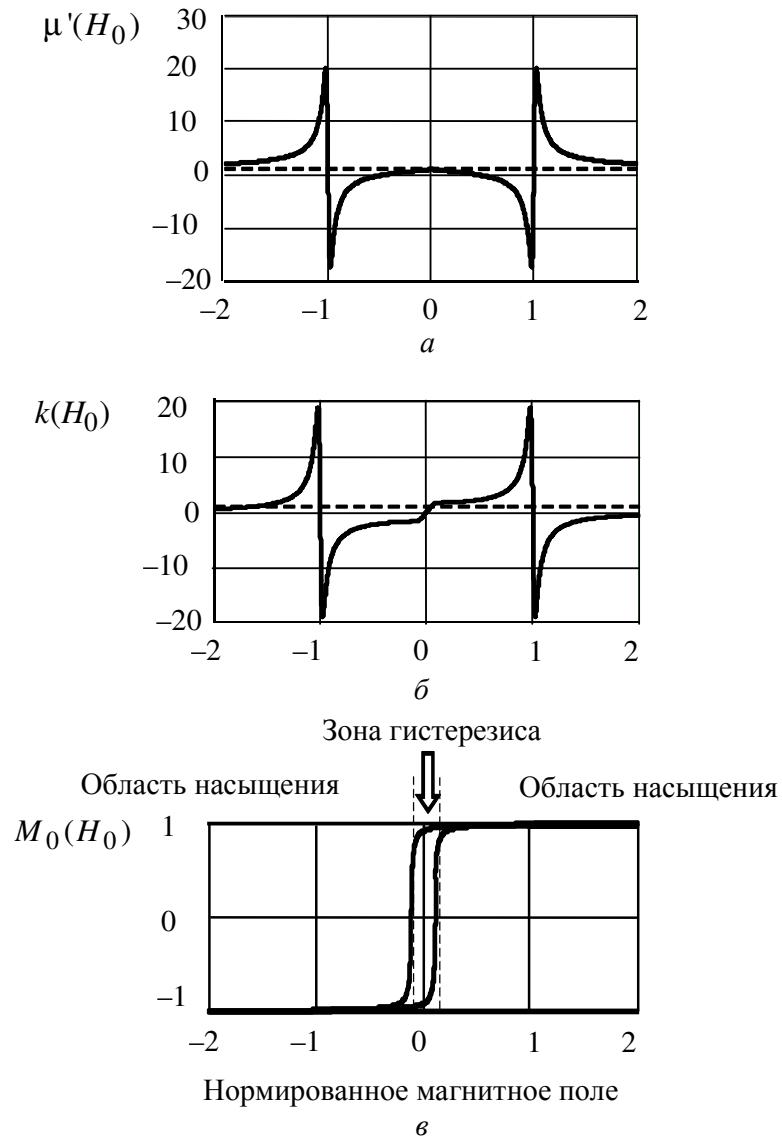


Рис. 7.4. Компоненты тензора магнитной проницаемости насыщенного феррита в функции нормированной напряженности постоянного магнитного поля. Постоянное магнитное поле нормировано на величину, отвечающую резонансу прецессии магнитного момента электрона при заданной частоте СВЧ-поля

Итак, тензор магнитной проницаемости насыщенного феррита *недиагонален и несимметричен*. Это означает, что он описывает анизотропные свойства среды и для волн, распространяющихся в такой среде, не выполняется теорема взаимности. Волна, распространяющаяся в этой среде по

одной и той же траектории, но в разных направлениях, будет приобретать разный фазовый сдвиг или разное затухание.

Выпишем компоненты вектора переменной во времени магнитной индукции:

$$b_x = \mu_0 (\mu' h_x - i k h_y); b_y = \mu_0 (\mu' h_y + i k h_x). \quad (7.12)$$

Из соотношений (7.12) видно, что у векторов  $\vec{h}$  и  $\vec{b}$  соотношения между компонентами различны, другими словами, векторы  $\vec{h}$  и  $\vec{b}$  не совпадают по направлению. Это является прямым следствием того, что  $\|\mu\|$  – недиагональный тензор. В соответствии с (7.8) и (7.9) заключаем, что компоненты тензора магнитной проницаемости резонансным образом зависят от частоты СВЧ-поля. Резонансная частота определяется соотношением (7.5):

$$\omega_0 = \frac{e}{m} \mu_0 H_0,$$

где  $\omega_0$  – собственная частота прецессии магнитного момента электрона в постоянном магнитном поле  $H_0$ :

$$\omega_0 = 2\pi f_0, f_0 = \gamma H_0, \gamma = 0,035 \text{ МГц/(А/м)} \text{ или } \gamma = 2,8 \text{ МГц/Э.}$$

Пусть

$$H_0 = 10^5 \text{ А/м (1256 Э), тогда } f_0 = 3,5 \text{ ГГц;}$$

$$H_0 = 2,86 \cdot 10^5 \text{ А/м (3570 Э), тогда } f_0 = 10 \text{ ГГц } (\lambda = 3 \text{ см}).$$

На рис. 7.4 показана зависимость компонентов тензора  $\|\mu\|$  от напряженности постоянного магнитного поля. Графики на рис. 7.4 построены по следующим формулам:

$$\mu' = 1 - \frac{\omega_0 \omega_M}{\omega^2 - \omega_0^2}; k = \frac{\omega \omega_M}{\omega^2 - \omega_0^2}; H_{\text{рез}} = \omega \frac{m}{e \mu_0}. \quad (7.13)$$

Эти формулы непосредственно следуют из формул (7.5), (7.8) и (7.9).

В формулах (7.13) не учтены потери энергии при прецессии. Учет потерь приведет к тому, что компоненты тензора магнитной проницаемости феррита станут комплексными числами. Формулы (7.13) получены для насыщенного феррита, т. е. для напряженности постоянного магнитного поля, превышающей напряженность *коэрцитивного* поля, т. е. лежащую на краю петли гистерезиса (рис. 7.4, в). Как видно из графиков рис. 7.4, а, диагональная компонента тензора магнитной проницаемости феррита при

напряженности поля, лежащей внутри петли гистерезиса, практически равна 1 и от напряженности постоянного поля не зависит. Из графиков рис. 7.4, б можно также заключить, что недиагональная компонента интенсивно изменяется при напряженности поля, лежащей внутри петли гистерезиса. Количественный расчет зависимости  $k$  от слабой напряженности постоянного магнитного поля формулами (7.13) не обеспечивается и требует более детального изучения проблемы.

## 7.2. Магнитная проницаемость намагниченного феррита по отношению к волне с круговой поляризацией

Особый интерес представляет случай, когда феррит взаимодействует с волной, имеющей круговую поляризацию.

Волна с круговой поляризацией может быть представлена в виде суммы двух волн с линейной поляризацией. На рис. 7.5 показано распределение полей в поперечном сечении круглого волновода с волной  $H_{11}$  для двух случаев, отвечающих взаимно ортогональным поляризациям.

Две такие волны распространяются по волноводу и не обмениваются потоком энергии. В центре левого волновода магнитное поле имеет компоненту

$$h_x^{(1)}(z, t) = h_m^{(1)} e^{i(\omega t - \beta z)}.$$

В центре правого волновода магнитное поле имеет компоненту

$$h_y^{(2)}(z, t) = h_m^{(2)} e^{i(\omega t - \beta z)}.$$

Положим теперь, что две такие волны имеют одинаковую частоту ( $\omega$ ), одинаковую постоянную распространения ( $\beta$ ), равные амплитуды:

$|h_m^{(1)}(z, t)| = |h_m^{(2)}(z, t)| = h_m$  и сдвинуты по фазе на  $90^\circ$ :

$$h_x^{(1)}(z, t) = h_m e^{i(\omega t - \beta z)}; \quad h_y^{(2)}(z, t) = h_m e^{i(\omega t - \beta z - \pi/2)}.$$

В фиксированной точке на оси  $z$  при  $z = 0$  можем записать закон изменения магнитного поля во времени:

$$\begin{aligned} h_x(0, t) &= h_m \cos \omega t; \\ h_y(0, t) &= h_m \sin \omega t. \end{aligned} \tag{7.14}$$

Рассмотрим изменение движения вектора магнитного поля, который имеет компоненты, представленные формулами (7.14).

Модуль (длина) такого вектора не зависит от времени. Положение вектора изменяется в пространстве. Легко установить (см. рис. 7.6), что

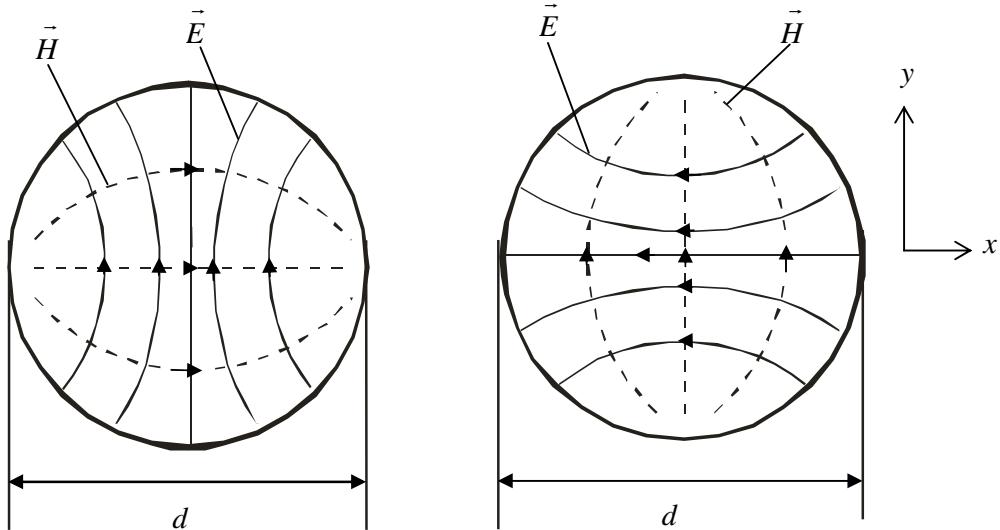


Рис. 7.5. Распределение поля в поперечном сечении волны  $H_{11}$  в круглом волноводе. На левой части рисунка показана волна с горизонтальной поляризацией магнитного поля; на правой части – волна с его вертикальной поляризацией

положение вектора по отношению к осям координат определяется углом  $\phi(t) = \omega t$ .

Волна, заданная соотношениями (7.14), называется *волной с круговой поляризацией*. Если учесть распространение волны вдоль оси  $z$ , то можно сказать, что вектор магнитного поля движется в пространстве по винтовой линии.

Пусть волна с круговой поляризацией распространяется вдоль оси  $z$  (напомним, что постоянное магнитное поле направлено вдоль оси  $z$ ). Тогда волна с положительным направлением вращения будет иметь следующие компоненты напряжённости магнитного поля:

$$\begin{aligned} h_x(z, t) &= h_m^+ e^{i(\omega t - \beta z)}; \\ h_y(z, t) &= h_m^+ e^{i(\omega t - \pi/2 - \beta z)}. \end{aligned} \quad (7.15)$$

и волна с отрицательным направлением вращения:

$$\begin{aligned} h_x(z,t) &= h_m^- e^{i(\omega t - \beta z)}; \\ h_y(z,t) &= h_m^- e^{i(\omega t + \pi/2 - \beta z)}. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Подставим (7.15) в (7.12) и получим для волн с положительным направлением вращения:

$$\begin{aligned} b_x^+(z,t) &= \mu_0(\mu' + k)h_m^+ e^{i(\omega t - \beta z)}; \\ b_y^+(z,t) &= \mu_0(\mu' + k)h_m^+ e^{i(\omega t - \pi/2 - \beta z)}, \end{aligned}$$

где представлены компоненты вектора магнитной индукции плоской волны с вращающейся поляризацией, имеющей положительное направление вращения. Подставив (7.16) в (7.12), получим аналогичные соотношения для волны с вращающейся поляризацией, имеющей отрицательное направление вращения. Итак, для комплексных амплитуд векторов волн с вращающейся поляризацией можем записать:

$$b_m^+ = \mu_0 \mu^{(+)} h_m^+;$$

$$b_m^- = \mu_0 \mu^{(-)} h_m^-,$$

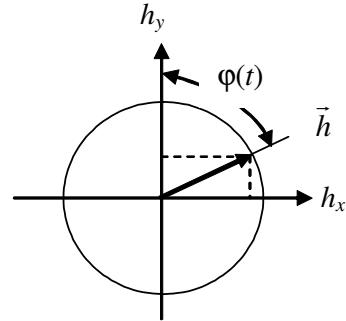


Рис. 7.6. Положение вектора магнитного поля по отношению к осям координат в случае вращающейся поляризации.  $\varphi(t) = \omega t$

где использованы следующие обозначения:

$$\mu^{(+)} = \mu' - k = 1 + \frac{\omega_M}{\omega_0 - \omega};$$

$$\mu^{(-)} = \mu' + k = 1 + \frac{\omega_M}{\omega_0 + \omega}.$$

Тензор магнитной проницаемости феррита по отношению к волне с круговой поляризацией, распространяющейся вдоль оси  $z$ , имеет следующий вид:

$$\|\mu\| = \mu_0 \begin{vmatrix} \mu^{(+)} & 0 & 0 \\ 0 & \mu^{(-)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

На рис. 7.7 показана зависимость  $\mu^{(+)}$  от напряжённости нормированного постоянного магнитного поля. График зависимости  $\mu^{(-)}$  можно получить заменой знака напряжённости постоянного магнитного поля, т. е.  $\mu^{(+)}$  и  $\mu^{(-)}$  обладают зеркальной симметрией относительно начала координат.

Обсудим нарушение теоремы взаимности для волн, распространяющихся в намагниченном феррите. Представим себе устройство в виде отрезка цилиндрического волновода с типом поля  $H_{11}$ , который частично

заполнен ферритом, намагниченным вдоль продольной оси волновода. Пусть по волноводу распространяется волна с круговой поляризацией слева направо. При этом магнитная проницаемость феррита  $\mu^{(+)}$  с учётом диэлектрической проницаемости феррита обеспечит некоторое замедление волны и сдвиг фазы  $\Delta\phi^{(+)}$ . Теперь поменяем местами вход и выход, т. е. поменяем местами источник СВЧ-излучения и приемник. При этом направление магнитного поля останется

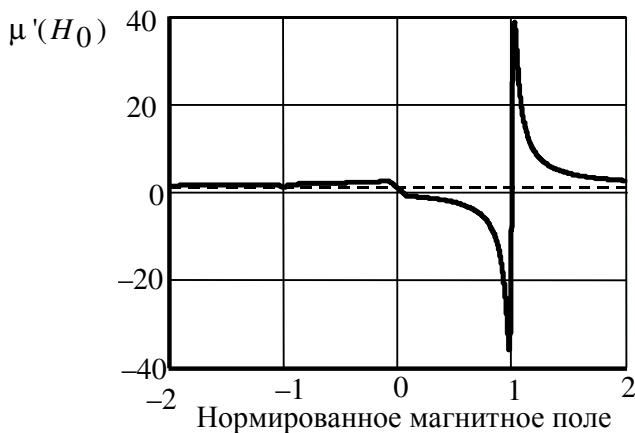


Рис. 7.7. Диагональная компонента тензора магнитной проницаемости феррита по отношению к врачающемуся магнитному полю СВЧ в функции от нормированной напряжённости постоянного магнитного поля. Пунктиром показана относительная магнитная проницаемость вакуума  $\mu'=1$

прежним, а изменится направление распространения волны, вместе с ним изменится и направление вращения вектора магнитного поля. В результате магнитная проницаемость феррита станет  $\mu^{(-)}$ , что обеспечит другое замедление волны и другой сдвиг фазы  $\Delta\phi^{(-)}$ . Поскольку пробегая устрой-

ство от входа до выхода или от выхода до входа волна приобретает разный сдвиг фазы, устройство следует считать невзаимным. Электродинамический анализ (см. 2.3) показывает, что невзаимность феррита определяется несимметрией его тензора магнитной проницаемости в прямоугольной системе координат (7.11).

Пусть при распространении волны в сторону положительных  $z$  направление вращения вектора магнитного поля совпадает с направлением прецессии магнитных моментов в составе феррита. При этом СВЧ-магнитное поле «раскручивает» спины, что приводит к отличной от нуля магнитной проницаемости среды. Когда напряженность постоянного магнитного поля такова, что собственная частота прецессии спинов совпадает с частотой СВЧ-поля, наблюдается явление резонанса, что хорошо видно из рис. 7.7. Если при неизменном направлении распространения волны направление постоянного магнитного поля изменить, то направление вращения вектора магнитного поля перестанет совпадать с направлением прецессии магнитных моментов в составе феррита: взаимодействие СВЧ-магнитного поля с ферритом почти полностью исчезает. Заметим, что по отношению к врачающемуся СВЧ-магнитному полю тензор магнитной проницаемости феррита имеет диагональную форму. Дело в том, что симметрия движения магнитного поля и симметрия движения спиновых моментов совпадают. При этом для адекватного описания в тензоре магнитной проницаемости недиагональные члены отсутствуют.

### **7.3. Вращение плоскости поляризации в волноводе, содержащем намагниченный феррит (эффект Фарадея)**

Вращение плоскости поляризации света при отражении от железного полюса включенного электромагнита было обнаружено в 1845 г. Майклом Фарадеем. Этот эффект был назван *эффектом Фарадея* и послужил доказательством связи между светом и магнетизмом.

Далее будет рассмотрено вращение плоскости поляризации СВЧ-волны при взаимодействии с намагниченным ферритом. Рассмотрим цилиндрический (круглый) волновод, содержащий ферритовый стержень, намагниченный продольно. Основной тип поля –  $H_{11}$  (рис. 7.8, 7.9).

Покажем, что за счет присутствия намагниченного феррита в волноводе происходит вращение плоскости поляризации волны, т. е. в разных сечениях волновода картина поля ориентирована вдоль разных осей. Углом  $\Delta\phi$  определяет поворот плоскости поляризации.

Чтобы объяснить и описать вращение плоскости поляризации линейно-поляризованной волны, распространяющейся в волноводе, содержащем намагниченный феррит, используем самую простую форму описания свойств феррита – диагональный тензор проницаемости феррита по отношению к волне с круговой поляризацией. Магнитное поле волны типа  $H_{11}$ , распространяющейся в волноводе, может быть описано суммой двух волн

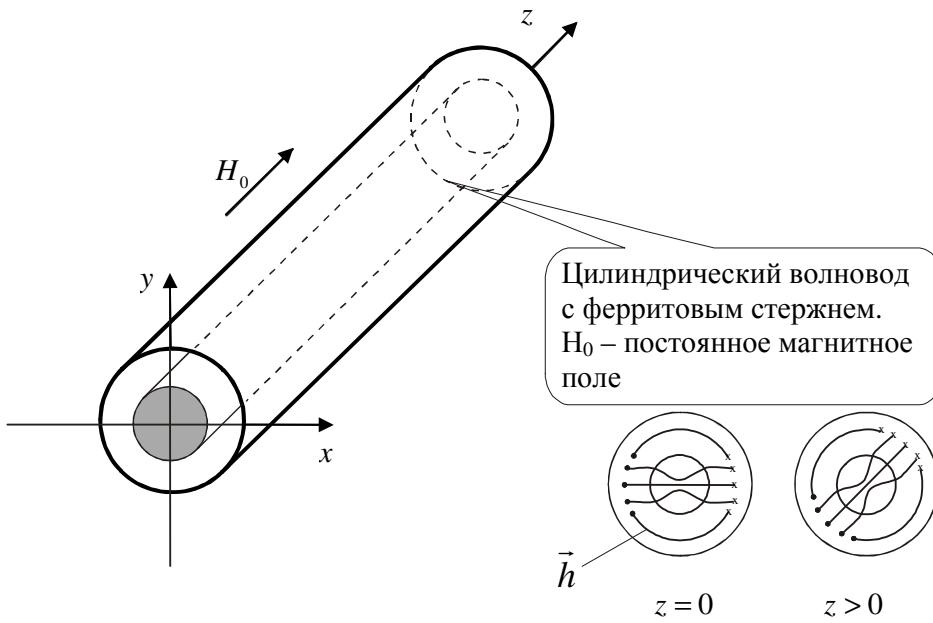


Рис.7.8. Цилиндрический волновод, содержащий ферритовый стержень. Волна в волноводе типа  $H_{11}$

с круговой поляризацией. Используя формулы (7.15) и (7.16), запишем компоненты линейно-поляризованной волны через амплитуды волн с круговой поляризацией (важно подчеркнуть, что при наличии магнитного поля волны с круговой поляризацией, имеющие разное направление вращения, будут иметь разные фазовые постоянные  $\beta^{(+)}$  и  $\beta^{(-)}$ ):

$$h_x(z,t) = h_m^+ e^{i(\omega t - \beta^{(+)} z)} + h_m^- e^{i(\omega t - \beta^{(-)} z)} \dots; \\ h_y(z,t) = h_m^+ e^{i(\omega t - \pi/2 - \beta^{(+)} z)} - h_m^- e^{i(\omega t + \pi/2 - \beta^{(-)} z)}. \quad (7.17)$$

Произведем следующие несложные алгебраические преобразования:

$$h_x(z,t) = h_m^+ e^{-i\frac{\beta^{(+)} - \beta^{(-)}}{2}z} e^{i(\omega t - \frac{\beta^{(+)} + \beta^{(-)}}{2}z)} + \\ + h_m^- e^{i\frac{\beta^{(+)} - \beta^{(-)}}{2}z} e^{i(\omega t - \frac{\beta^{(+)} + \beta^{(-)}}{2}z)}; \\ h_y(z,t) = h_m^+ e^{-i\frac{\beta^{(+)} - \beta^{(-)}}{2}z} e^{i(\omega t - \pi/2 - \frac{\beta^{(+)} + \beta^{(-)}}{2}z)} - \\ - h_m^- e^{i\frac{\beta^{(+)} - \beta^{(-)}}{2}z} e^{i(\omega t + \pi/2 - \frac{\beta^{(+)} + \beta^{(-)}}{2}z)}.$$

Положим

$$h_m^+ = h_m^- = h_m \quad (7.18)$$

и обозначим

$$\beta_0 = \frac{\beta^{(+)} + \beta^{(-)}}{2} \quad (7.19)$$

– среднюю величину фазовой постоянной;

$$\Delta\beta = \frac{\beta^{(+)} - \beta^{(-)}}{2} \quad (7.20)$$

– меру невзаимности двух волн с круговой поляризацией.

С использованием (7.18) – (7.20), перепишем (7.17) в окончательном виде:

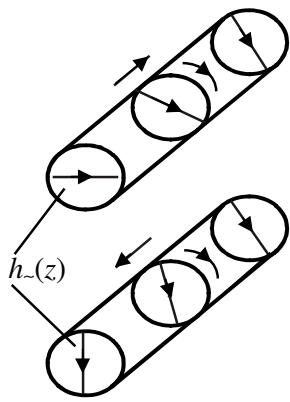
$$h_x(z,t) = 2h_m \cos(\Delta\beta z) e^{i(\omega t - \beta_0 z)}; \\ h_y(z,t) = 2h_m \sin(\Delta\beta z) e^{i(\omega t - \beta_0 z)}. \quad (7.21)$$

Полученные соотношения описывают составляющие вектора напряженности магнитного поля волны с линейной поляризацией. При этом модуль вектора равен  $h_m$  и не зависит от времени и от координаты  $z$ , а наклон вектора по отношению к системе координат зависит от координаты  $z$  и определяется углом

$$\varphi(z) = \Delta\beta z. \quad (7.22)$$

Для волн, бегущих в сторону возрастающих значений координаты  $z$ , и для волн, бегущих в сторону убывающих значений координаты  $z$ , все фазовые постоянные  $\beta^{(+)}$ ,  $\beta^{(-)}$ ,  $\beta_0$  и  $\Delta\beta$  имеют разный знак. Получается так потому, что при решении волнового уравнения волновое число получено в виде  $\beta_{ef} = \pm\omega\sqrt{\epsilon'_{ef}\epsilon_0\mu'_{ef}\mu_0}$ . Здесь разные знаки отвечают волнам, рас-

пространяющимся в разные стороны. Величины  $\epsilon'_{ef}$  и  $\mu'_{ef}$  несут информацию о диэлектрическом и магнитном возмущениях волновода, которые возникли из-за размещения в нем ферритового стержня. Таким образом, знак  $\Delta\beta$  зависит от направления распространения волны. На рис. 7.9 показано вращение плоскости поляризации волны при распространении в двух различных направлениях, причем в обоих случаях направление постоянного магнитного поля вдоль оси волновода остается неизменным. При распространении волны вдоль растущих  $z$  угол  $\phi(z)$  также будет расти, вращая плоскость поляризации по часовой стрелке. При распространении волны вдоль убывающих  $z$  угол  $\phi(z)$  также будет убывать, вращая плоскость поляризации против часовой стрелки по отношению к направлению распространения волны.



Направление вращения плоскости поляризации не зависит от направления распространения волны

Рис. 7.9 Невзаимное вращение плоскости поляризации волны  $H_{11}$  в круглом волноводе, содержащем продольно намагниченный ферритовый стержень

Рассмотрим направление вращения плоскости поляризации по отношению к направлению распространения волны.

Рассмотрим процессы распространения волны, проиллюстрированные на рис. 7.9. В верхней части рисунка показано, как на входе отрезка волновода возбуждается волна с горизонтальной магнитной поляризацией. После распространения по волноводу в сторону растущих  $z$  волна приобретает поворот плоскости поляризации на  $45^\circ$ . Теперь предположим, что волна отразилась от торца волновода и распространяется обратно, т. е. в сторону убывающих  $z$ . При этом она приобретает поворот плоскости поляризации в ту же сторону, что и при распространении в сторону растущих  $z$ . В точке возбуждения волновода поляризация отраженной волны оказывается перпендикулярной поляризации излученной волны. Это приводит к тому, что излучатель, возбудивший исходную волну, не может воспринять волну,

если оценивать направление вращения плоскости поляризации по отношению к фиксированной оси волновода, то можно утверждать, что в волноводе с продольно намагниченным ферритом направление вращения плоскости поляризации не зависит от направления распространения волны.

отраженную от торца волновода. Таким образом, рассмотренный отрезок волновода представляет собой невзаимную электродинамическую систему.

В технике СВЧ невзаимные волноведущие структуры, подобные рассмотренному отрезку круглого волновода, применяются для конструирования устройств защиты передатчика от волн, отраженных плохо согласованной антенной.

Рассмотрим некоторые количественные соотношения. Обращаясь к выражениям для диагональных компонент тензора магнитной проницаемости феррита, которые получены по отношению к волнам с круговой поляризацией, можем записать:

$$\begin{aligned}\beta^{(+)} &= \omega \sqrt{\epsilon \mu_0 \left( 1 + \kappa \frac{\omega_M}{\omega_0 - \omega} \right)}; \\ \beta^{(-)} &= \omega \sqrt{\epsilon \mu_0 \left( 1 + \kappa \frac{\omega_M}{\omega_0 + \omega} \right)}.\end{aligned}\quad (7.23)$$

Параметр  $\kappa$  – это коэффициент включения феррита в волновод. Чем больше диаметр ферритового стержня, тем больше коэффициент включения. Для простоты рассуждений положим, что  $\kappa \ll 1$ . Тогда можем использовать первые члены разложения (7.23) в ряд Тейлора. Подставив результат разложения в (7.20), получим

$$\Delta\beta = \omega \sqrt{\epsilon \mu_0} \frac{\kappa}{2} \frac{\omega \omega_M}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

В соответствии с полученным ранее выражением для угла поворота плоскости поляризации (7.22) можно рассматривать  $\Delta\beta$  как меру угла поворота плоскости поляризации, приходящегося на единицу длины волновода.

## 8. НАПРАВЛЕННЫЕ СВЧ-ИЗЛУЧАТЕЛИ (АНТЕННЫ)

Антenna СВЧ – это устройство, которое формирует поток излученной мощности в заданном направлении. Направленность излучения обеспечивается процессом дифракции, при котором волны, излученные отдельными элементами антennы в нужном направлении, складываются синфазно, в то время как в других направлениях они гасят друг друга. Рассматривая ан-

тенну, всегда можно выделить поверхность, через которую проходят весь поток излученной ею СВЧ-мощности. Такую поверхность обычно называют *апертурой антенны* (*от лат. apertura – «отверстие»*). Апертуру антенны можно рассматривать как совокупность излучающих элементов, формирующих направленное излучение. Анализ работы СВЧ-антенн принято разделять на два этапа:

- Нахождение распределения поля на апертуре антенны (*внутренняя задача антенной техники*).
- Нахождение поля вдали от антенны (*внешняя задача антенной техники*).

Рассмотрим на нескольких примерах подход к решению обеих составляющих задачи анализа СВЧ-антенн.

## 8.1. Внутренняя задача антенной техники

Внутренняя задача антенной техники состоит в формировании плоского фазового фронта волны на апертуре антенны достаточно большой площади.

**Линзовая антenna (линза).** Линза преобразует сферическую волну, излученную источником, в волну плоскую.

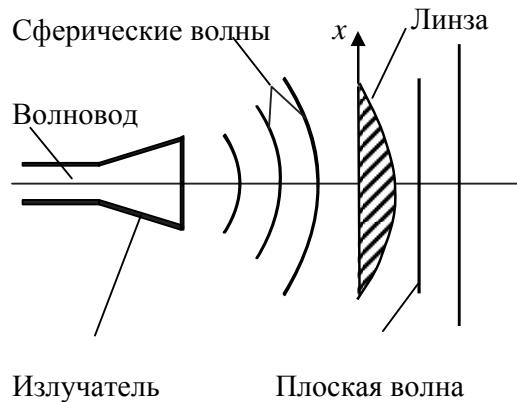


Рис. 8.1. Распространение волн во внутренней области антенны в случае (модель геометрической оптики)

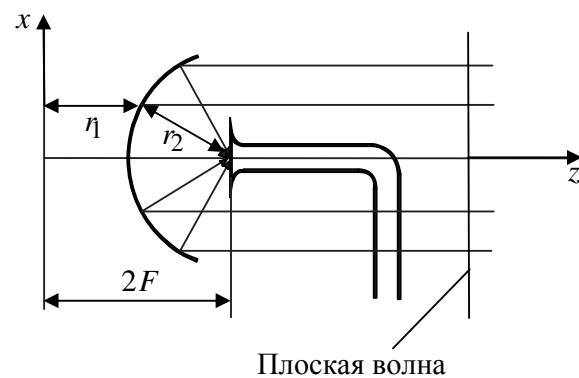


Рис. 8.2. Распространение волн во внутренней области зеркальной антенны в приближении геометрической оптики

У диэлектрического материала, из которого изготовлена линза (рис. 8.1), диэлектрическая проницаемость больше единицы ( $\epsilon_r > 1$ ). Волна внутри линзы замедляется, центральный луч проходит малый путь в воз-

духе и большой – в теле линзы. После прохождения линзы луч в точке  $x$  прошел путь с электрической длиной

$$l_{\text{ef}}(x) = r(x) + \frac{\epsilon_r}{\epsilon_0} \Delta z(x).$$

При правильно выбранной геометрии линзы можно получить  $l_{\text{ef}}(x) = \text{const}$ . Это означает, что в апертуре линзы имеем плоскую (синфазную) волну.

**Параболическое зеркало.** Рассмотрим ход лучей, выходящих из фокуса параболического зеркала и отражающихся от его поверхности (рис. 8.2).

Выделим два отрезка:

$$r_1 = z, \quad r_2 = \sqrt{(2F - z)^2 + x^2}.$$

Определим условие формирования плоского фронта волны после отражения от зеркала:  $r_1 = r_2$ .

Из полученных выражений следует:

$$z^2 = (2F - z)^2 + x^2,$$

что можно преобразовать так:

$$x^2 = (z - 2F)^2 - z^2;$$

$$x^2 = 4(z - F)F;$$

$$z = F + \frac{1}{F} \left( \frac{x}{2} \right)^2. \quad (8.1)$$

Полученное соотношение (8.1) представляет собой уравнение *параболы с фокусным расстоянием  $F$* . Параболическое зеркало преобразует сферическую волну в волну плоскую.

**Рупорная антенна.** На рис. 8.3 показан рупор, который питается волной из прямоугольного волновода с типом поля  $H_{01}$ . В рупоре формируется цилиндрическая или сферическая волна, и поэтому на выходе рупора фазовый фронт не синфазен.

Отклонение  $\Delta z$  фазового фронта на апертуре рупора от плоского фронта определяется следующей формулой:

$$\Delta z = \sqrt{L^2 + \left( \frac{D}{2} \right)^2} - L = L \sqrt{1 + \left( \frac{D}{2L} \right)^2} - L \cong L + \frac{L}{2} \left( \frac{D}{2L} \right)^2 - L = \frac{D^2}{8L}.$$

Волну можно считать почти плоской (синфазной), если отклонение фазового фронта от плоского не превосходит  $\lambda/8$ :

$$\Delta z \leq \lambda/8. \quad (8.2)$$

Отсюда следует

$$L > D^2/\lambda. \quad (8.3)$$

Это и есть условие получения синфазной поверхности на апертуре рупора.

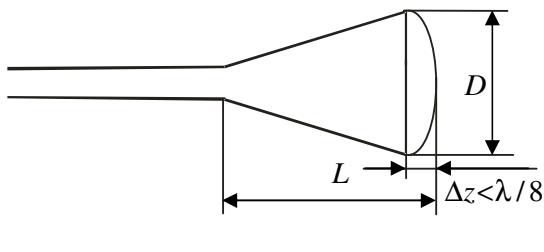


Рис. 8.3. Внутренняя область рупорной антенны. В апертуре рупора показан фазовый фронт волны

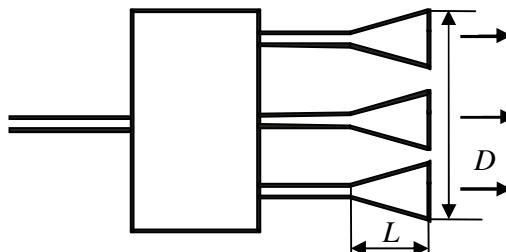


Рис. 8.4. Система рупорных излучателей

**Система рупоров.** При большой апертуре рупорной антенны условие (8.3) приводит к необходимости иметь слишком большую длину рупора  $L$ . Длину можно уменьшить, разделив апертуру на несколько рупорных излучателей (рис. 8.4). Из (8.2) легко видеть, что в случае трех рупоров при суммарном размере апертуры  $D$  длина каждого рупора уменьшится в девять раз.

## 8.2. Внешняя задача: формирование диаграммы направленности антенны

В «Трактате о свете» (1690) Гюйгенс\* изложил волновую теорию света. Теоретической основой расчета излучения электромагнитного поля, сформированного на апертуре антенны, служит принцип Гюйгенса:

- Каждая точка распространяющейся волны является излучателем новой волны в направлении распространения.

На рис. 8.5 показана апертура (раскрыв) антенны с поперечным размером  $D$ , каждая точка которого излучает самостоятельную сферическую

\*Христиан Гюйгенс (1629 – 1695) – голландский физик и математик.

волну. В соответствии со сформулированным принципом Гюйгенса эти волны распространяются и складываются в окружающем пространстве.

Рассмотрим прохождение волны из точки, лежащей на раскрыве антенны и имеющей координаты  $z = 0, x$ , в точку на удаленной плоскости с координатами  $(X, Z)$ . Расстояние между этими точками

$$R(x) = \sqrt{Z^2 + (X - x)^2} = \sqrt{Z^2 + X^2 - 2Xx} = \sqrt{R^2 - 2Xx}.$$

Здесь используется удаленность поверхности  $Z \gg x$ , а также вводится обозначение  $X^2 + Z^2 = R^2$ .

Тогда

$$R(x) = \sqrt{R^2 - 2R\sin\theta x} = R\sqrt{1 - 2\frac{x}{R}\sin\theta} \cong R - x\sin\theta. \quad (8.4)$$

Здесь  $\theta$  – угол, определяющий направление из центра антенны в точку  $(X, Z)$ . Теперь точка с координатами  $(X, Z)$  определяется полярными координатами  $R, \theta$ . Найдем в этой точке сумму полей, излученных всеми элементами апертуры антенны. Эта сумма задается интегралом по апертуре: пусть  $E(x)$  описывает распределение электрического поля по апертуре антенны. При интегрировании учтем изменение фаз волн, прошедших расстояние  $R(x)$ , считая, что амплитуда их ничтожно мало изменяется за счет различия  $R(x)$  при разных  $x$ . Поэтому, учитывая ослабление амплитуды волн с ростом расстояния от антенны до точки наблюдения,  $R$  можно считать не зависящим от  $x$  и записать его за пределами интеграла. Тогда напряженность поля в точке с координатами  $R, \theta$

$$E(R, \theta) = \frac{R_0}{R} \int_{-D/2}^{D/2} E(x) e^{-ik(R-x\sin\theta)} dx = \frac{R_0}{R} e^{-ikR} \int_{-D/2}^{D/2} E(x) e^{ikx\sin\theta} dx.$$

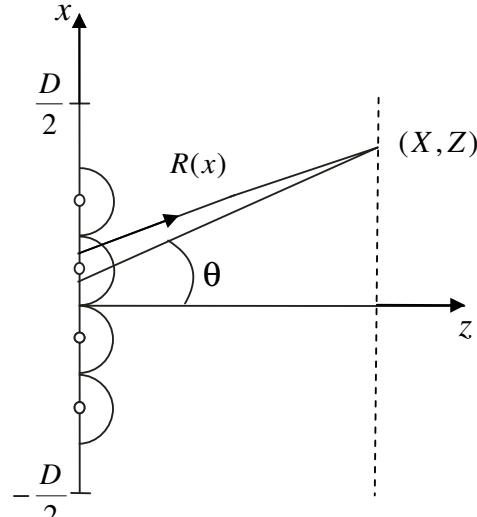


Рис.8.5. К пояснению принципа Гюйгенса

Здесь  $R_0$  – некоторое произвольное расстояние, относительно которого нормируется напряженность поля при удалении от антенны. Положим также для упрощения расчетов

$$E(x) = E_0 = \text{const.}$$

Тогда получим

$$\int_{-D/2}^{D/2} E(x) e^{ikx \sin \theta} dx = E_0 \frac{e^{ik\frac{D}{2} \sin \theta} - e^{-ik\frac{D}{2} \sin \theta}}{ik \sin \theta} = E_0 D \frac{\sin\left(k \frac{D}{2} \sin \theta\right)}{k \frac{D}{2} \sin \theta}.$$

Выделим функцию, определяющую зависимость напряженности поля от угла  $\theta$ :

$$F(\theta) = \frac{\sin\left(\frac{\pi D}{\lambda} \sin \theta\right)}{\frac{\pi D}{\lambda} \sin \theta}. \quad (8.5)$$

Функция, определяющая зависимость напряженности поля в дальней зоне от угловых координат, носит название «диаграмма направленности антенны».

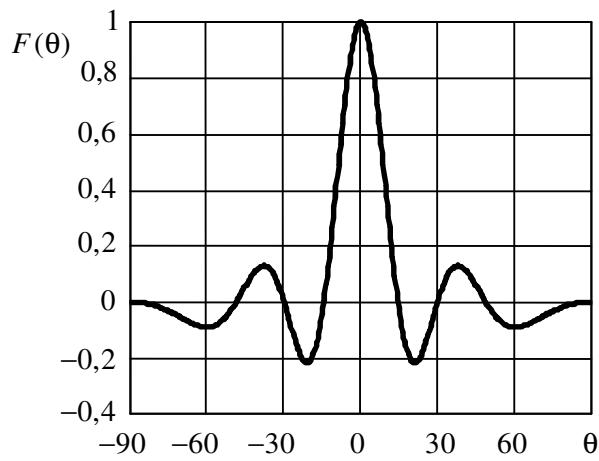


Рис. 8.6. Диаграмма направленности антенны с равномерным распределением излучающего поля по апертуре (раскрыву) при  $D=4\lambda$

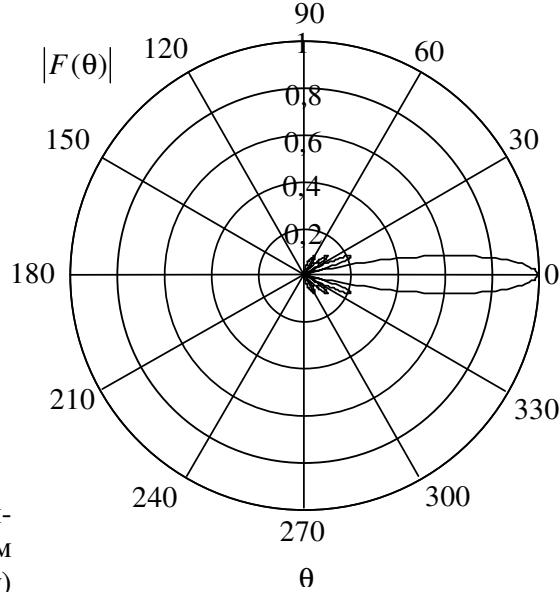


Рис. 8.7. То же, что на рис. 8.6, но в полярной системе координат

Полученная формула (8.5) – это частный случай диаграммы направленности антенны, имеющей размер  $D$ , при равномерном распределении поля по апертуре антенны (рис. 8.6, 8.7). Изменив распределение поля на

апертуре, можно управлять формой диаграммы направленности антенны, в частности изменять уровень боковых лепестков. Дальняя зона антенны – это зона, в которой справедливо приближение, использованное при выводе соотношения (8.4); при этом расстояние  $R(x)$  линейно связано с  $\sin \theta$ . На малых удалениях точки наблюдения от антенны данная простая связь нарушится и все вычисления окажутся более сложными. Дальняя зона антенны носит также название *зоны Фраунгофера*, в отличие от ближней зоны, носящей название *зоны Френеля*. Расчет дифракции волн в ближней зоне (зоне Френеля) математически гораздо более сложная задача, чем расчет дифракции в дальней зоне (зоне Фраунгофера). Расчет дифракции волн в дальней зоне сводится, фактически, к вычислению достаточно простых интегралов, определяющих диаграмму направленности антенны.

Выделим на главном лепестке диаграммы направленности точек, в которых  $F(\theta) = 2/\pi$ . Положим, что этим точкам соответствует  $\theta = \pm \frac{\Delta\theta}{2}$ . Назовем  $\Delta\theta$  шириной диаграммы направленности антенны. Из (8.5) следует

$$\frac{\pi D}{\lambda} \sin \frac{\Delta\theta}{2} \cong \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда для  $\Delta\theta \ll \pi$  получим:

$$\Delta\theta \cong \lambda/D. \quad (8.6)$$

Формула (8.6) представляет собой одно из фундаментальных соотношений волновой теории: если известны размер излучающей апертуры и длина волны излучения в среде, в которой формируется пучок излучения, то по данной формуле можно рассчитать угловую ширину пучка независимо от вида излучения. Это может быть звуковая волна в воздухе, в воде или в твердом теле; это может быть излучение лазера в воздухе или волна возмущения спиновых моментов (спиновая волна) в намагниченном феррите.

### 8.3. Коэффициент направленного действия антенны

Приведем определение:

- *коэффициент направленного действия антенны (КНД) – это отношение мощностей, которые должны излучить изотропный и реальный из-*

лучатели с тем, чтобы в точке приема создать одинаковую напряженность поля.

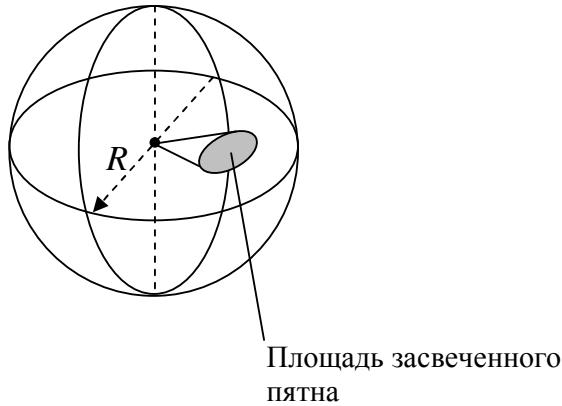


Рис. 8.8. Луч антенны, расположенной в центре сферы радиуса  $R \ll \lambda$  (к расчету КНД)

Легко видеть, что для изотропного излучателя вектор Пойнтинга направлен вдаль от него вдоль радиуса сферы. Для определения коэффициента направленного действия понятие об изотропном излучателе вводится искусственно для удобства формулировки определения.

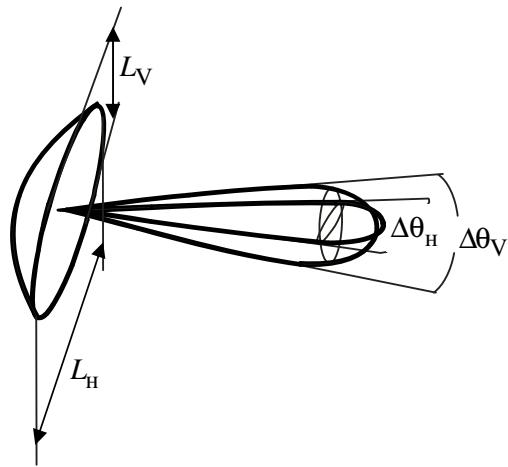


Рис. 8.9. Двумерная диаграмма направленности антенны (к расчету коэффициента направленного действия антенны). На рисунке показана ширина главного луча диаграммы направленности антенны в двух плоскостях

$P_1$  – мощность, равномерно (изотропно) рассеянная во всех направлениях:

Изотропный излучатель – это излучатель, который рассеивает подведенную к нему мощность равномерно во всех направлениях вокруг него. В реальной электродинамике ни в теории, ни в эксперименте осуществить изотропный излучатель нельзя. Всякий излучатель будет иметь секторы, в которые он не излучает никакие волны. В определение коэффициента направлений

Приведенное определение иллюстрируется рис. 8.8. Излученная мощность определяется потоком вектора Пойнтинга через поверхность площадью  $S$ :

$$P = \int_S [\vec{E} \cdot \vec{H}] d\vec{S} = \frac{E_0^2}{2Z_0} S.$$

Здесь  $E_0$  напряженность поля на сфере радиуса  $R$ , как в случае изотропного излучателя, так и в случае рассматриваемой антенны.

Сравним оба случая:

- Излучение равномерно распределено в пространстве. Тогда  $S_1 = 4\pi R^2$ .

$$P_1 = \frac{E_0^2}{2Z_0} 4\pi R^2.$$

- Излучение сосредоточено в пределах конуса, который задан диаграммой направленности рассматриваемой антенны. На рис. 8.9 показана ширина главного луча диаграммы направленности антенны в горизонтальной и в вертикальной плоскостях:  $\Delta\theta_H$  и  $\Delta\theta_V$ . Пересечение главного луча со сферой радиуса  $R$  образует «засвеченное пятно» (см. рис. 8.8). Площадь этого пятна  $S_2 = \Delta\theta_H \Delta\theta_V R^2$ . Теперь найдем  $P_2$  – мощность, сосредоточенную в главном луче антенны:

$$P_2 = \frac{E_0^2}{2Z_0} \Delta\theta_H \Delta\theta_V R^2.$$

Отношение  $P_1$  к  $P_2$  и есть коэффициент направленного действия антенны. Обозначим его через  $D_0$ :

$$D_0 = \frac{P_1}{P_2} = \frac{4\pi}{\Delta\theta_H \Delta\theta_V}.$$

Используем формулу (8.6) и перейдем от ширины диаграммы направленности к размерам апертуры. Тогда  $D_0 = 4\pi \frac{L_H L_V}{\lambda^2}$ .

В окончательном виде, используя площадь апертуры  $S = L_H L_V$ , получим

$$D_0 = 4\pi \frac{S}{\lambda^2}.$$

Пусть, например,  $L_H = L_V = 60\lambda$ .

Тогда

$$D_0 = 4\pi \cdot \frac{(60\lambda)^2}{\lambda^2} = 4\pi \cdot 3600 \cong 40000.$$

При использовании антенны неизбежны потери энергии за счет следующих причин:

- потеря в волноводном тракте;
- «переливания» энергии за края зеркала или линзы.

Обозначим коэффициент полезного действия (КПД) антенны через  $\eta$ , естественно, что  $\eta < 1$ . Обычно,  $0,5 \leq \eta \leq 0,9$ . Произведение КПД антенны

на коэффициент направленного действия называют *коэффициентом усиления антенны* и обозначают через  $G$ . Из изложенного следует, что  $G = D_0 \eta$ .

#### 8.4. Фазированная антенная решетка

На рис. 8.10 показана линейка (одномерная решетка) излучателей (в частном случае это могут быть рупорные излучатели), питание которых осуществляется через фазовращатели так, что фазы волн, излученных каждым излучателем, могут независимо изменяться.

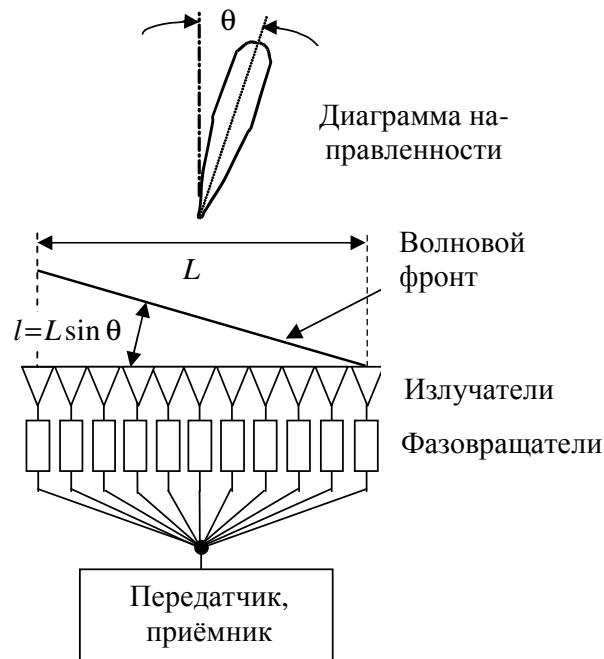


Рис.8.10. Схема фазированной антенной решетки.

Найдем в дальней зоне сумму волн, пришедших от всех излучателей, с учетом разности хода волн от каждого излучателя под заданным углом и фазовых сдвигов, заданных фазовращателями для каждого излучателя:

$$F(\theta) = F_0(\theta) \sum_{n=0}^{N-1} I_n e^{-i(kdn \sin \theta - \phi_n)}, \text{ где } F_0(\theta) - \text{диаграмма направленности отдельного (малого) излучателя, например рупора.}$$

Пусть  $I_0 = I_n = \text{const}$ ,  $\phi_n = \Phi_0 n$ .

Тогда

$$\Phi(0) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i(kd \sin \theta - \phi_n)n}. \quad (8.7)$$

Для преобразования суммы (8.7) используем формулу геометрической прогрессии:  $\Phi(\theta) = (1 - q^N)/(1 - q)$ .

В рассматриваемом случае  $q = e^{-i(kd \sin \theta - \phi_0)}$ . Тогда формула геометрической прогрессии даст:

$$\Phi(\theta) = \frac{1 - e^{-iN(kd \sin \theta - \phi_0)}}{1 - e^{-i(kd \sin \theta - \phi_0)}}.$$

Преобразуем числитель и знаменатель полученного соотношения:

$$\Phi(\theta) = \frac{e^{-i\frac{N}{2}(kd \sin \theta - \phi_0)} \left[ e^{i\frac{N}{2}(kd \sin \theta - \phi_0)} - e^{-i\frac{N}{2}(kd \sin \theta - \phi_0)} \right]}{e^{-i\frac{1}{2}(kd \sin \theta - \phi_0)} \left[ e^{i\frac{1}{2}(kd \sin \theta - \phi_0)} - e^{-i\frac{1}{2}(kd \sin \theta - \phi_0)} \right]}.$$

Сомножители, стоящие перед квадратными скобками в числителе и в знаменателе полученной формулы, влияют только на изменение фазы суммарной волны в точке наблюдения и не влияют на амплитуду поля в точке наблюдения, поэтому ими можно пренебречь.

Используем формулу Эйлера и получим:

$$\Phi(\theta) = \frac{\sin N \left( \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta - \frac{\phi_0}{2} \right)}{\sin \left( \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta - \frac{\phi_0}{2} \right)}.$$

Направление максимума определяется равенством

$$\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta = \frac{\phi_0}{2}.$$

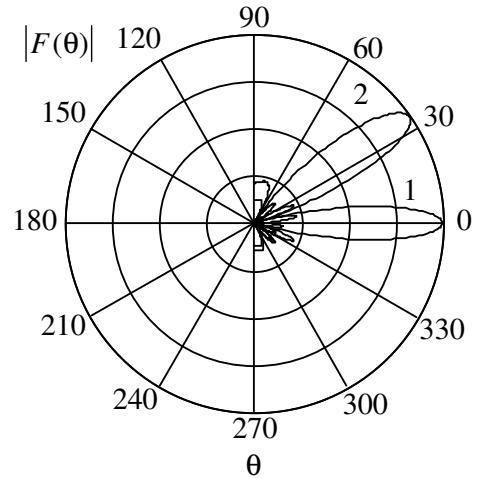


Рис. 8.11. Два положения главного луча фазированной антенной решетки при  $\phi_0=0$  (диаграмма 1) и  $\phi_0=90^\circ$  (диаграмма 2). Число элементов в одномерной решетке  $N=8$

Тогда угол, определяющий направление, в котором формируется главный луч антенны, находится из простого соотношения:

$$\sin \theta_0 = \frac{\lambda}{d} \frac{\phi_0}{2\pi}.$$

Рис. 8.11 иллюстрирует положение главного луча фазированной решетки излучателей при разных фазовых сдвигах между соседними излучателями.

Возможность управления лучом антенны за счет управления фазой в цепях питания излучателей используется при конструировании антенн с электронным сканированием, которые находят применение в системах связи, радиолокации и радионавигации.

Важной отраслью техники СВЧ является конструирование СВЧ-фазовращателей, т. е. компонентов СВЧ-цепи, способных изменять фазу волны под действием управляющего напряжения или тока.

## **Список литературы**

### *Основная*

- Вендик И. Б., Холодняк Д. В. Микроэлектроника СВЧ. Линии передачи и линейные многополюсники СВЧ: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2001.64 с.
- Микроэлектронные устройства СВЧ. М.: Высш. шк., 1988.
- Никольский В. Д., Никольская Т. И. Электродинамика и распространение радиоволн М.: Наука, 1989.

### *Дополнительная*

- Альтман Дж. Л. Устройства сверхвысоких частот. М.: Мир, 1968.
- Гольдштейн Л. Д., Зернов Н. В. Электромагнитные поля и волны. М.: Сов. радио, 1971.
- Гупта К., Гардж Р., Чадха Р. Машинальное проектирование СВЧ-устройств. М.: Радио и связь, 1987.
- Лебедев И. В. Техника и приборы сверхвысоких частот. М.-Л.: Госэнергоиздат, 1961. Т. 1.

## Оглавление

Введение.....	3
1. Уравнение Максвелла и телеграфные уравнения линии передачи.....	4
1.1. Описание электромагнитного поля.....	5
1.2. Исходные положения к получению уравнений Максвелла.....	9
1.3. Уравнения Максвелла и волновое уравнение для электромагнитной волны в вакууме.....	12
1.4. Телеграфные уравнения для волны в линии передачи.....	17
2. Перенос энергии электромагнитным полем.....	23
2.1. Дисперсия фазовой скорости волны. Групповая скорость.....	24
2.2. Теорема Пойнтинга.....	29
2.3. Теорема взаимности в электродинамике.....	38
3. Границные условия, потенциалы электрического и магнитного полей.....	43
3.1. Границные условия для векторов электрического и магнитного полей на границе раздела двух сред.....	44
3.2. Поверхностное сопротивление металла по отношению к электромагнитному полю.....	47
3.3. Потенциалы электромагнитного поля.....	49
4. Электромагнитные волны в волноводах.....	54
4.1. Основной тип поля в прямоугольном волноводе.....	54
4.2. Высшие типы поля в прямоугольном волноводе.....	64
4.3. Основной тип поля в круглом волноводе.....	70
5. Электромагнитные волны в волноведущих структурах с поперечными или квазипоперечными типами поля.....	72
5.1. Линии передачи с TEM-волнами.....	72
5.2. Линии передачи с TEM-волнами с учетом полей рассеяния.....	78
5.3. КвазитетМ-волны в линии передачи.....	80
5.4. Микрополосковая и копланарная линии передачи.....	84
5.5. Затухание волн в линии передачи.....	89
6. Объемные и планарные резонаторы.....	93
6.1. Электромагнитное поле в объемном резонаторе.....	94
6.2. Добротность объемного резонатора.....	97
6.3. Резонатор на полосковой линии.....	102
6.4. Возбуждение объемного резонатора.....	105
6.5. Цилиндрические объемные резонаторы.....	111
7. Электромагнитные волны в среде, содержащей намагниченный феррит.....	115
7.1. Магнитная проницаемость насыщенного феррита.....	117
7.2. Магнитная проницаемость намагниченного феррита по отношению к волне с круговой поляризацией.....	123
7.3. Вращение плоскости поляризации в волноводе, содержащем намагниченный феррит (эффект Фарадея).....	127
8. Направленные СВЧ-излучатели (антенны).....	131
8.1. Внутренняя задача антенной техники.....	132
8.2. Внешняя задача: формирование диаграммы направленности антенны.....	134
8.3. Коэффициент направленного действия антенны.....	137
8.4. Фазированная антenna решетка.....	140
Список литературы.....	143

Вендик Орест Генрихович  
Самойлова Татьяна Борисовна

Электродинамика

Конспект лекций

Редактор И.Б. Синишева

---

---

Подписано к печати 00.00.05. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.  
Печать офсетная. Гарнитура «Times New Roman». Печ. л. Тираж 150 экз. Заказ

---

---

Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»  
197376, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5