

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

---

Санкт-Петербургский государственный  
электротехнический университет «ЛЭТИ»

---

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН  
В НАПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМАХ

Методические указания  
к курсовой работе по дисциплине  
«Электродинамика»

Санкт-Петербург  
Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»  
2014

УДК 537.8(07)

Распространение электромагнитных волн в направляющих системах: методические указания к курсовой работе по дисциплине «Электродинамика» / сост.: С.П. Зубко, А.Г. Алтынников, А.Г. Гагарин, Н.Ю. Медведева, А.В. Дроздовский. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2014. 20 с.

Содержат основные положения теории закрытых волноводов, а также описание особенностей распространения электромагнитной волны в различных типах закрытых волноводов: в прямоугольном, в круглом и в коаксиальном.

Предназначены для студентов дневного отделения, обучающихся по направлению 210100.

Утверждено  
редакционно-издательским советом университета  
в качестве методических указаний

## 1. Основные положения

Направляющие устройства обеспечивают движение потока энергии, переносимого электромагнитной волной, в заданном направлении. В зависимости от вида направляющих устройств в них могут распространяться электромагнитные волны разных типов: чисто поперечные или *TEM*-волны, электрические или *E*-волны (*TM*-волны), магнитные или *H*-волны (*TE*-волны), а также гибридные волны. Отнесение электромагнитной волны к определённому типу определяется наличием продольных (вдоль оси направляющего устройства) и поперечных (лежащих в плоскости перпендикулярной оси) векторных компонент полей. В *TEM*-волнах векторы *E* и *H* имеют только поперечные составляющие; в *E*-волнах, распространяющихся в направляющих системах, вектор *E* имеет поперечную и продольную составляющие, а вектор *H* – только поперечную; в *H*-волнах – вектор *H* имеет поперечную и продольную составляющие, а вектор *E* – только поперечную; в гибридных волнах оба вектора имеют и продольные, и поперечные составляющие.

По наличию в конструкции замкнутого проводящего экрана принято разделять направляющие устройства на открытые и закрытые линии передачи (волноводы). По количеству изолированных проводящих поверхностей, входящих в состав конструкции направляющего устройства, различают односвязные, двухсвязные, многосвязные линии передачи и линии передачи нулевой связности. Так, прямоугольный (рис. 1) и круглый (рис. 2) волноводы относят к односвязным закрытым линиям передачи, а коаксиальный волновод (рис. 3) – к двухсвязным. Поперечные (*TEM*) волны могут распространяться только в двухсвязных или в многосвязных линиях передачи; электрические и магнитные волны – в любых линиях передачи. Гибридные волны могут существовать в неоднородных линиях передачи (заполненных неоднородной средой).

Метод изучения волновых процессов в волноводах основан на решении уравнений Гельмгольца для комплексных амплитуд электрического и магнитного полей:

$$\Delta \dot{\mathbf{E}} + k^2 \dot{\mathbf{E}} = 0; \quad \Delta \dot{\mathbf{H}} + k^2 \dot{\mathbf{H}} = 0, \quad (1)$$

где  $k = \omega \sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}$  – волновое число;  $\epsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ ,  $\mu_0 \approx 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$  – диэлектрическая и магнитная проницаемости свободного пространства;  $\epsilon_r$  и  $\mu_r$  – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости материала, заполняющего волновод.

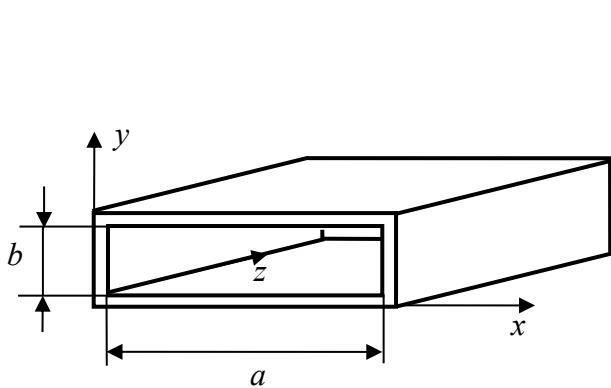


Рис. 1. Прямоугольный волновод

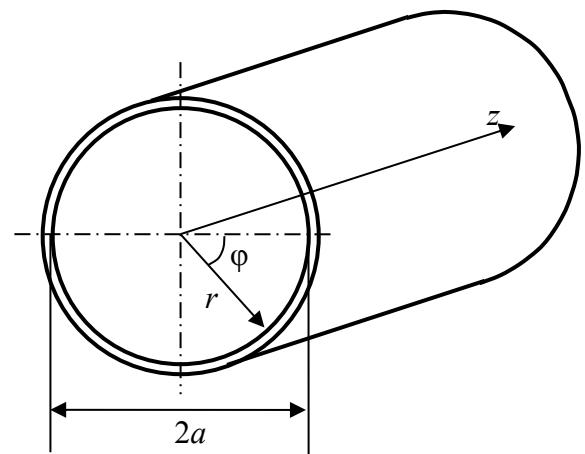


Рис. 2. Круглый волновод

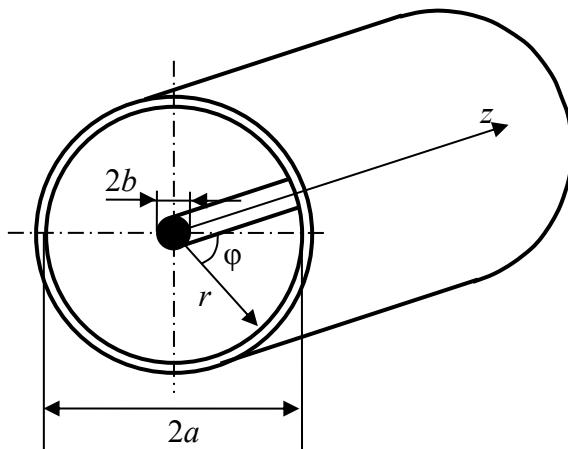


Рис. 3. Коаксиальный волновод

Для того, чтобы решить уравнение (1) необходимо сформулировать граничные условия для компонент электромагнитного поля. Пусть проводящие элементы волновода изготовлены из идеального проводника, тогда граничные условия на внутренней поверхности стенки волновода  $L$  имеют вид

$$E_z|_L = 0; \quad \frac{\partial H_z}{\partial n}|_L = 0, \quad (2)$$

где  $n$  – внешняя нормаль к  $L$ .

## 1.1. Распространение электромагнитной волны в прямоугольном волноводе

Специфической особенностью любого закрытого волновода независимо от формы его поперечного сечения и диэлектрического заполнения является дискретный характер спектра собственных мод, являющихся решениями уравнений Гельмгольца (1).

Найдем выражения для собственных мод – электрических и магнитных волн, распространяющихся в прямоугольном волноводе. Перепишем граничные условия (2) применительно к геометрии задачи:

$$\left. \dot{E}_z \right|_{\substack{x=0; \\ y=0;}} a = 0; \quad \left. \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial n} \right|_{\substack{x=0; \\ y=0;}} b = 0, \quad (3)$$

где  $a$  и  $b$  – поперечные размеры волновода (см. рис. 1).

Решением уравнения (1) с граничными условиями (3) являются выражения для компонент электромагнитного поля:

для электрических волн:

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= -\frac{i\beta}{k_t^2} \frac{m\pi}{a} E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-i\beta z}; \\ \dot{E}_y &= -\frac{i\beta}{k_t^2} \frac{n\pi}{b} E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-i\beta z}; \\ \dot{E}_z &= E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-i\beta z}; \\ \dot{H}_x &= \frac{i\omega\epsilon_0\epsilon_r}{k_t^2} \frac{n\pi}{b} E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-i\beta z}; \\ \dot{H}_y &= -\frac{i\omega\epsilon_0\epsilon_r}{k_t^2} \frac{m\pi}{a} E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-i\beta z}; \\ \dot{H}_z &= 0; \end{aligned}$$

для магнитных волн:

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= \frac{i\omega\mu_0\mu_r}{k_t^2} \frac{n\pi}{b} H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-i\beta z}; \\ \dot{E}_y &= -\frac{i\omega\mu_0\mu_r}{k_t^2} \frac{m\pi}{a} H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-i\beta z}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{E}_z &= 0; \\
\dot{H}_x &= \frac{i\beta}{k_t^2} \frac{m\pi}{a} H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-i\beta z}; \\
\dot{H}_y &= \frac{i\beta}{k_t^2} \frac{n\pi}{b} H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-i\beta z}; \\
\dot{H}_z &= H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-i\beta z}.
\end{aligned}$$

Моды  $E_{mn}$  и  $H_{mn}$ , называются собственными модами волновода; модальные индексы  $m$  и  $n$  характеризуют число вариаций компонент поля вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно. В поперечном сечении волновода электромагнитное поле представляет собой стоячие волны. Индекс  $m$  показывает, сколько полуволн стоячей волны укладывается вдоль широкой стенки волновода, а модальный индекс  $n$  – вдоль узкой стенки волновода. В закрытых волноводах для описания распространения волн в поперечном сечении волновода вводят поперечное волновое число  $k_{t_{mn}}$ .

Каждая мода имеет свою дисперсионную кривую, определяемую дисперсионным уравнением, причем каждой моде соответствует свое значение продольного волнового числа  $\beta_{mn}$ , характеризующего распространение волны вдоль волновода.

Спектр продольных волновых чисел для прямоугольного волновода определяется выражением:

$$\beta_{mn}(\omega) = \sqrt{k^2 - k_{t_{mn}}^2}, \quad (4)$$

где  $k = \omega \sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}$  – волновое число в неограниченном пространстве;  $k_{t_{mn}}$  – поперечное волновое число в волноводе (индексы  $m, n = 0, 1, 2, \dots$  характеризуют номер моды).

Волновое число также можно задать через длину волны в неограниченном пространстве  $\lambda_0$ :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \quad (5)$$

Выражение (4) называется дисперсионным уравнением, характеризующим связь временной и пространственной периодичности волны. Из этого выражения можно вывести законы дисперсии фазовой и групповой скорости, а также дисперсии длины волны в волноводе.

Поперечное волновое число  $k_{t mn}$  зависит лишь от геометрии поперечного сечения волноведущей структуры и в случае прямоугольного волновода определяется выражением:

$$k_{t mn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

Распространение электромагнитных волн в прямоугольном волноводе происходит лишь при частотах выше критической. Если посмотреть на решения уравнения (1) с граничными условиями (3) приведенные выше, то можно утверждать, что для наличия распространяющихся волн в волноведущей структуре продольное волновое число  $\beta_{mn}$  должно быть чисто вещественной, а не мнимой величиной. Исходя из дисперсионного уравнения (4), для выполнения этого условия необходимо чтобы волновое число в неограниченном пространстве  $k$  было больше поперечного волнового числа  $k_{t mn}$ . Граничным случаем является равенство нулю постоянной распространения  $\beta_{mn}$ , именно это условие соответствует критической частоте или, как ее еще называют, частоте отсечки. Откуда:

$$f_{kp} = \frac{k_{t mn}}{2\pi\sqrt{\epsilon_0\mu_0\epsilon_r\mu_r}} \quad (6)$$

Критической частоте  $f_{kp}$  соответствует критическая длина волны, которая может быть найдена из соотношения:

$$\lambda_{kp} = \frac{2\pi}{k_{t mn}} \quad (7)$$

В спектре мод  $E_{mn}$  и  $H_{mn}$  можно выделить так называемую «основную моду», которая имеет минимальную критическую частоту и, следовательно, максимальную критическую длину волны. Для прямоугольного волновода основной

модой является волна  $H_{10}$ . Существованию единственной – основной моды соответствует одномодовый режим работы волновода. Волновод, работающий в режиме отсечки (при частотах ниже критической) для всех мод, называют за-пределальным волноводом.

Волновое сопротивление в случае  $H_{mn}$  мод определяется с помощью выражения:

$$Z_{TE} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{k}{\beta_{mn}} \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{\omega \mu_0 \mu_r}{\beta_{mn}} \quad (8)$$

Волновое сопротивление в случае  $E_{mn}$  мод определяется с помощью выражения:

$$Z_{TM} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\beta_{mn}}{k} \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{\beta_{mn}}{\omega \epsilon_0 \epsilon_r} \quad (9)$$

## 1.2. Распространение электромагнитной волны в круглом волноводе

Круглый волновод – односвязный закрытый волновод, поперечное сечение которого имеет форму круга радиусом  $a$  (см. рис. 2). Уравнение Гельмгольца в общем виде в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 \dot{\Psi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{\Psi}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{\Psi}}{\partial \phi^2} + k_t^2 \dot{\Psi} = 0, \quad (10)$$

где  $\dot{\Psi}$  – комплексная амплитуда электрического или магнитного поля.

Решение уравнения (10) с учётом граничных условий (3) ищется в виде комбинации функций Бесселя первого рода и функций Бесселя второго рода (называемых функциями Неймана) порядка  $m$  (рис. 5) по радиальной координате  $r$  и тригонометрических функций по угловой координате  $\phi$ .

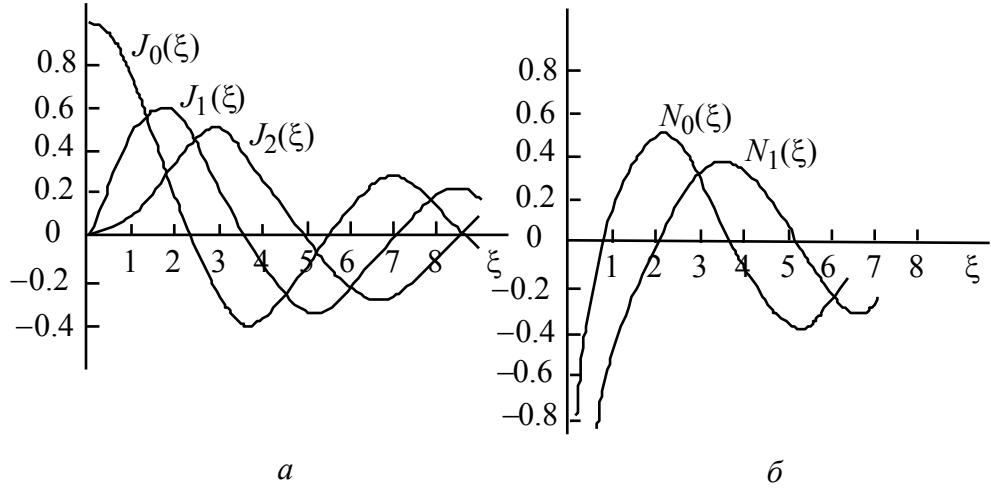


Рис. 5. Графики функций: *а* – Бесселя  $J_m$ ; *б* – Неймана  $N_m$

В общем виде решение уравнения Гельмгольца в цилиндрической системе координат для продольной компоненты поля имеет вид

$$\dot{\Psi}_z = [A_m J_m(k_t r) + B_m N_m(k_t r)] [C_m \cos(m\phi) + D_m \sin(m\phi)] e^{-i\beta z}. \quad (11)$$

Однако в силу условий физической задачи поле в центре волновода не может быть бесконечно большим, что навязывается значением функции Неймана при  $r = 0$ , следовательно, необходимо положить  $B_m = 0$  в (6). Кроме того, в (11) можем опустить  $\sin(m\phi)$ . Так как начало отсчета угла  $\phi$  может быть выбрано произвольно, выберем за начало отсчета полуплоскость  $\phi = \text{const}$ , в которой  $\dot{\Psi}_z$  имеет максимальное значение. Косинус имеет максимальное значение при  $m\phi = 0$ , а синус при этом равен нулю. Перепишем (11) в соответствии с изложенными ранее соображениями:

$$\dot{\Psi}_z = A_m J_m(k_t r) C_m \cos(m\phi) e^{-i\beta z}.$$

Запишем граничные условия для электромагнитного поля на стенке волновода, выполненного из идеального проводника:

$$\dot{E}_z|_{r=a} = 0; \dot{E}_\phi|_{r=a} = 0; \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r}|_{r=a} = 0.$$

Решения уравнения (10) для электрических волн:

$$\begin{aligned}
\dot{E}_r &= -\frac{i\beta^E}{k_t^E} E_0 J'_m(k_t^E r) \cos(m\varphi) e^{-i\beta^E z}; \\
\dot{E}_\varphi &= \frac{i\beta^E}{k_t^E} E_0 \frac{m J_m(k_t^E r)}{k_t^E r} \sin(m\varphi) e^{-i\beta^E z}; \\
\dot{E}_z &= E_0 J_m(k_t^E r) \cos(m\varphi) e^{-i\beta^E z}; \\
\dot{H}_r &= -\frac{i\omega\epsilon_0\epsilon_r}{k_t^E} m E_0 \frac{J_m(k_t^E r)}{k_t^E r} \sin(m\varphi) e^{-i\beta^E z}; \\
\dot{H}_\varphi &= -\frac{i\omega\epsilon_0\epsilon_r}{k_t^E} E_0 J'_m(k_t^E r) \cos(m\varphi) e^{-i\beta^E z}; \\
\dot{H}_z &= 0;
\end{aligned}$$

для магнитных волн:

$$\begin{aligned}
\dot{E}_r &= -\frac{i\omega\mu_0\mu_r}{k_t^H} H_0 \frac{m J_m(k_t^H r)}{k_t^H r} \sin(m\varphi) e^{-i\beta^H z}; \\
\dot{E}_\varphi &= \frac{i\omega\mu_0\mu_r}{k_t^H} H_0 J'_m(k_t^H r) \cos(m\varphi) e^{-i\beta^H z}; \\
\dot{E}_z &= 0; \\
\dot{H}_r &= -\frac{i\beta^H}{k_t^H} H_0 J'_m(k_t^H r) \cos(m\varphi) e^{-i\beta^H z}; \\
\dot{H}_\varphi &= \frac{i\beta^H}{k_t^H} H_0 \frac{m J_m(k_t^H r)}{k_t^H r} \sin(m\varphi) e^{-i\beta^H z}; \\
\dot{H}_z &= H_0 J_m(k_t^H r) \cos(m\varphi) e^{-i\beta^H z}.
\end{aligned}$$

В отличие от прямоугольного волновода в круглом волноводе поперечные волновые числа различны для электрических и для магнитных волн. Поперечные волновые числа для электрических волн находятся через корни функций Бесселя ( $\nu_{mn}$ ), а для магнитных – через корни производных функций Бесселя ( $\chi_{mn}$ ):

$$k_t^E = \frac{\nu_{mn}}{a}; \quad k_t^H = \frac{\chi_{mn}}{a}, \quad m = 0; 1; 2; \dots, \quad n = 1; 2; 3; \dots$$

Значения первых трех корней функций Бесселя и корней их производных приведены в табл. 1 и 2.

Таблица 1

Номер корня $\nu_{mn}(n)$	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$
1	2.405	3.832	5.135
2	5.520	7.016	8.417
3	8.654	10.173	11.620

Таблица 2

Номер корня $\chi_{mn}(n)$	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$
1	3.832	1.840	3.054
2	7.016	5.335	6.705
3	10.174	8.536	9.965

В остальном выражения для определения основных параметров волноведущей структуры, таких как критическая частота или частота отсечки, критическая длина волны, волновое сопротивление, а также дисперсионное уравнение идентичны тем, что приведены в параграфе 1.1, посвященном прямоугольному волноводу. Поэтому при выполнении задания курсовой работы по варианту круглого волновода можно использовать приведенные ранее соотношения (4 – 9).

### 1.3. Распространение электромагнитной волны в коаксиальном волноводе

Коаксиальная линия передачи состоит из круглого цилиндрического стержня, соосного с круглой цилиндрической оболочкой (см. рис. 3). Электромагнитные волны распространяются в пространстве между наружным и внутренним проводниками, заполненном диэлектриком. Радиус наружного проводника обозначим как  $a$ , внутреннего – как  $b$  (рис. 7). При анализе волн, распространяющихся внутри этой волноводной структуры, как и в случае круглого волновода, удобно использовать цилиндрическую систему координат ввиду ее аксиальной симметрии.

Так как коаксиальный волновод является двухсвязной линией передачи, в нем наряду с  $E$ - и  $H$ -волнами возможно распространение ТЕМ-волны, являющейся волной бездисперсионного типа, для которой  $\lambda_{\text{кр}} = \infty$  и  $\lambda_{\text{в}} = \lambda_0$ .

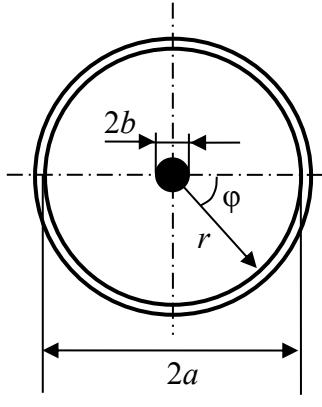


Рис. 7. Поперечное сечение коаксиальной линии

Составляющие векторов поля ТЕМ-волны в коаксиальном волноводе имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{E}_r &= \frac{\dot{A}}{r} e^{-i\beta z}; \\ \dot{E}_\varphi &= \dot{E}_z = 0; \\ \dot{H}_\varphi &= \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\mu_0 \mu_r}} \frac{\dot{A}}{r} e^{-i\beta z}; \\ \dot{H}_r &= \dot{H}_z = 0.\end{aligned}$$

Исходные выражения для компонент полей дисперсионного типа ( $E$ -волны,  $H$ -волны) в коаксиальной линии передачи совпадают с выражениями для круглого волновода. Общие выражения для составляющих векторов  $E$  и  $H$  имеют следующий вид:

магнитные волны

$$\begin{aligned}\dot{E}_r &= -\frac{1}{k_t^2} \frac{i\omega \mu_0 \mu_r}{r} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial \varphi}; \\ \dot{E}_\varphi &= \frac{i\omega \mu_0 \mu_r}{k_t^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r}; \\ \dot{H}_r &= -\frac{i\beta^H}{(k_t^H)^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r}; \\ \dot{H}_\varphi &= -\frac{i\beta^H}{(k_t^H)^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial \varphi}; \\ \dot{E}_z &= 0.\end{aligned}$$

электрические волны

$$\begin{aligned}\dot{E}_r &= -\frac{i\beta^E}{(k_t^E)^2} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r}; \\ \dot{E}_\varphi &= -\frac{i\beta^E}{(k_t^E)^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial \varphi}; \\ \dot{H}_r &= \frac{1}{(k_t^E)^2} \frac{i\omega \epsilon_0 \epsilon_r}{r} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \varphi}; \\ \dot{H}_\varphi &= -\frac{1}{(k_t^E)^2} i\omega \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r}; \\ \dot{H}_z &= 0.\end{aligned}$$

Однако в отличие от круглого волновода, рассмотренного ранее, область  $r \leq b$ , содержащая точку  $r = 0$ , из рассмотрения исключается, так как она занята

внутренним проводником. Поэтому решение уравнения (1), определяющее продольные составляющие  $H_z$  и  $E_z$ , следует искать в виде

$$\begin{aligned}\dot{H}_z &= \left[ \dot{A}_m J_m(k_t^H r) + \dot{B}_m N_m(k_t^H a) \right] \cos(m\phi) e^{-i\beta^H z}, \\ \dot{E}_z &= \left[ \dot{A}_m J_m(k_t^E r) + \dot{B}_m N_m(k_t^E a) \right] \cos(m\phi) e^{-i\beta^E z},\end{aligned}\quad (12)$$

где  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

Для магнитных волн граничные условия на идеально проводящих поверхностях коаксиальной линии имеют вид

$$\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r} \Big|_{r=a; b} = 0. \quad (13)$$

Подставив выражение для  $H_z$  из (12) в уравнение (13), получим систему уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{A}_m J'_m(k_t^H a) + \dot{B}_m N'_m(k_t^H a) &= 0; \\ \dot{A}_m J'_m(k_t^H b) + \dot{B}_m N'_m(k_t^H b) &= 0.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{N'_m(k_t^H a)}{J'_m(k_t^H a)} = \frac{N'_m(k_t^H b)}{J'_m(k_t^H b)}, \quad m = 0; 1; 2; \dots \quad (14)$$

Для электрических волн граничные условия на идеально проводящих поверхностях коаксиальной линии примут вид

$$\dot{E}_z \Big|_{r=a; b} = 0,$$

где  $a$  и  $b$  – радиусы внешнего и внутреннего проводников (см. рис. 7).

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}\dot{A}_m J_m(k_t^E a) + \dot{B}_m N_m(k_t^E a) &= 0; \\ \dot{A}_m J_m(k_t^E b) + \dot{B}_m N_m(k_t^E b) &= 0\end{aligned}$$

или

$$\frac{N_m(k_t^E a)}{J_m(k_t^E a)} = \frac{N_m(k_t^E b)}{J_m(k_t^E b)}, \quad m = 0; 1; 2; \dots \quad (15)$$

Для расчета поперечных составляющих электромагнитного поля в коаксиальной линии необходимо решить уравнение (14) или (15) в зависимости от типа поля. Решением данных уравнений является поперечное волновое число  $k_t$ . При каждом значении  $m$  эти уравнения имеют бесчисленное множество корней. Следовательно, в коаксиальной линии может существовать бесчисленное множество дисперсионных типов волн, определяемых величиной  $m$  и порядковым номером  $n$  корня соответствующего уравнения (волны  $E_{mn}, H_{mn}$ ).

Уравнения (14) и (15) решаются численным методом. Эти уравнения достаточно хорошо изучены, и значения их корней можно найти в справочной литературе. Некоторые их значения приведены в табл. 1 и 2.

В случае полей  $E_{mn}$  поперечное волновое число определится как

$$k_t^E \approx \frac{\pi n}{a - b}, \quad n = 1; 2; 3; \dots$$

Отсюда видно, что значения критических частот зависят от разности  $(a - b)$ . Если разность  $(a - b)$  мала, то критические частоты полей будут весьма высокими. На практике размеры поперечного сечения коаксиальной линии выбираются так, что поля  $E_{mn}$  оказываются сильно затухающими.

Поперечное волновое число поля  $H_{m1}$  может быть определено как

$$k_t^H \approx \frac{2m}{a + b}, \quad m = 1; 2; 3; \dots,$$

а для  $H_{mn}$ :

$$k_t^H \approx \frac{\pi(n-1)}{a-b}, \quad n = 2; 3; 4; \dots.$$

В остальном выражения для определения основных параметров волноведущей структуры, таких как критическая частота или частота отсечки, критическая длина волны, волновое сопротивление, а также дисперсионное уравнение идентичны тем, что приведены в параграфе 1.1, посвященном прямоугольному волноводу. Поэтому при выполнении задания курсовой работы по варианту коаксиального волновода с модами  $E$ - и  $H$ -типа можно использовать приведенные ранее соотношения (4-9).

## 1.4. Глубина проникновения электромагнитного поля в проводник

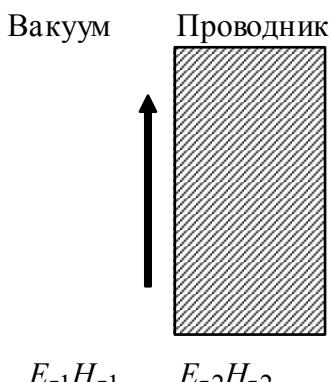


Рис. 8. Падение электромагнитной волны со стороны вакуума на неидеальный проводник

Рассмотрим случай, когда электромагнитная волна падает на поверхность, образованную неидеальным проводником, характеризующимся конечным значением удельной проводимости (рис. 8).

Электромагнитная волна может проникать на небольшую глубину в проводник и быстро в нем затухает. На глубине  $l = \delta_{\text{ск}}$  амплитуда напряженности поля затухает в  $e$  раз.

Таблица 3

Материал	$\sigma, 1/(\text{Ом}\cdot\text{м})$
Ag	$6.25 \cdot 10^7$
Cu	$5.72 \cdot 10^7$
Au	$3.57 \cdot 10^7$
Al	$2.62 \cdot 10^7$

Параметр  $\delta_{\text{ск}}$  принято называть толщиной скин-слоя или глубиной проникновения волны в проводник. Толщина скин-слоя является функцией частоты:

$$\delta_{\text{ск}} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}}.$$

В табл. 3 приведены значения удельной проводимости  $\sigma$  некоторых металлов.

## 1.5 Методика построения силовых линий векторов электромагнитного поля в волноведущих структурах.

Анализ структуры электромагнитного поля следует начинать с преобразования системы уравнений для векторных компонент электромагнитного поля с учетом конкретных значений индексов  $m$  и  $n$  рассматриваемой моды. После этого следует построить зависимости всех трёх компонент электрического и

магнитного полей от всех трёх координат в пределах, ограниченных стенками волновода, для поперечных координат ( $x$  и  $y$  – в прямоугольном волноводе;  $\varphi$  и  $r$  – в круглом и коаксиальном волноводах), и в пределах длины волны для продольной координаты  $z$ . Следует проверить соответствие графиков граничным условиям на металлических стенках. Касательные составляющие электрического поля и нормальные составляющие магнитного поля должны быть равны нулю в координатах, соответствующих стенкам, а соответствующие ортогональные составляющие должны быть максимальны.

Построение силовых линий следует начинать с поперечного поля, то есть с того, которое не имеет продольной компоненты для данной моды (с электрического поля для H-моды, и с магнитного для E-моды). Координаты, в которых компоненты поперечного поля обращаются в ноль, задают "узлы" поля и, соответственно, "узловые" поверхности, параллельные координатным поверхностям. Линии пересечения узловых поверхностей с поперечным и продольным сечениями отображаются узловыми линиями, которые представляют собой прямые для прямоугольного волновода (рис.9), и прямые или окружности для круглого и коаксиального волноводов. Узловыми линиями являются также стенки волноводов. Узловые линии разбивают сечение волновода на четырёхугольники (прямоугольники – для прямоугольного волновода, и криволинейные четырёхугольники с двумя прямыми и двумя дуговыми противолежащими сторонами – для круглого и коаксиального волноводов).

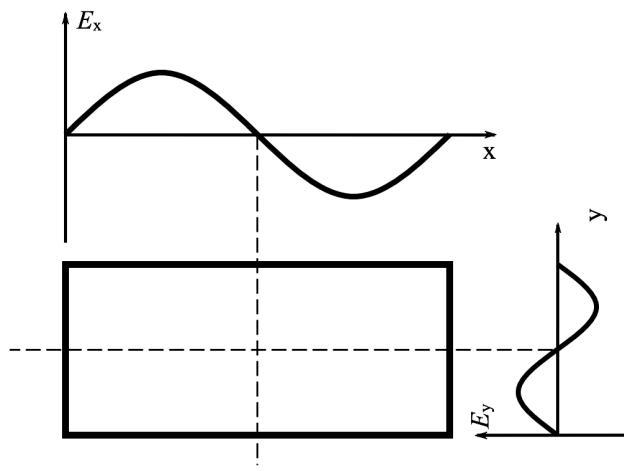


Рис.9 Построение "узловых" линий на примере электрического поля в прямоугольном волноводе при  $m = n = 2$ .

Силовые линии должны быть замкнуты. В случае представления полей в волноводе в виде Н и Е типов колебаний линии поля, не имеющего продольной компоненты, отображаются замкнутыми на поперечном сечении волновода, а линии поля, имеющего продольную компоненту, отображаются замкнутыми линиями на продольном сечении. Линии электрического поля, приходящие на стенки волновода, в соответствии с уравнением непрерывности замыкаются линиями электрического тока проводимости, текущего по стенкам волновода (рис.10). Направление замкнутой силовой линии сохраняется на всём контуре.

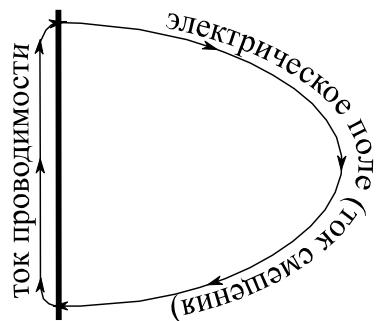


Рис.10. Замыкание силовой линии электрического поля через ток проводимости в стенке волновода.

Обращение векторной компоненты в ноль означает поворот вектора в направлении перпендикулярном соответствующей координатной оси, достижение компонентой максимума означает, что силовые линии отображаются плотнее (чаще).

Линии электрического поля подходят к узловым линиям перпендикулярно, линии магнитного поля – касательно. То есть, при изображении электрического поля следует нарисовать четыре линии, соединяющие прилежащие стороны четырёхугольника и перпендикулярные его сторонам, таким образом, что линии от двух противолежащих сторон сближаются в серединах двух других сторон (рис.11 а). При изображении магнитного поля в четырёхугольнике ограниченном узловыми линиями следует нарисовать "кольцо" (замкнутую линию) (рис.11 б).

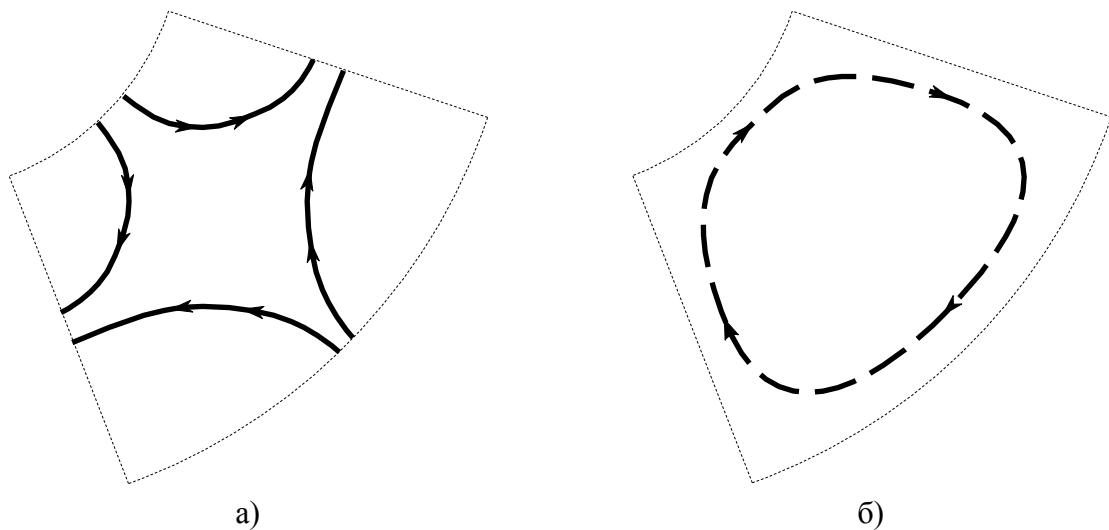
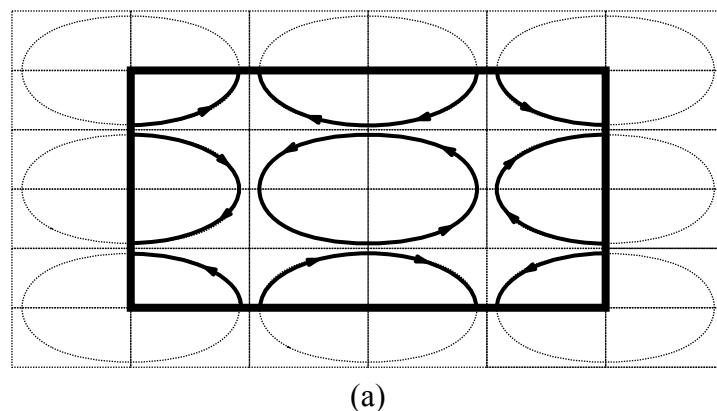
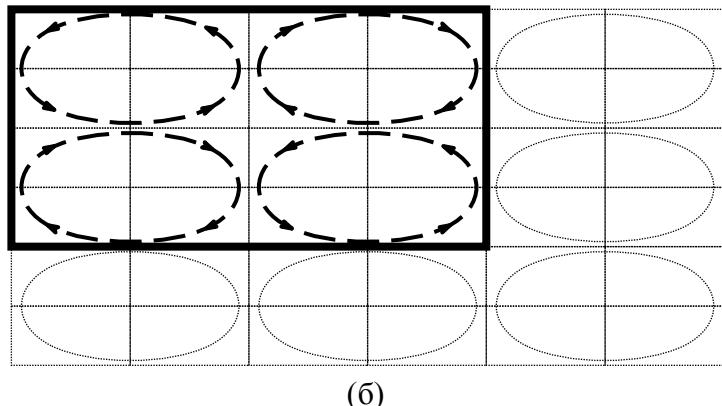


Рис.11. Построение силовых линий электрического (а) и магнитного (б) полей по отношению к узловым линиям на примере цилиндрической системы координат (криволинейные четырёхугольники в круглом или коаксиальном волноводах).

Для взаимного перехода между построениями волн различных типов можно использовать следующий метод. Смещение поперечного сечения волновода на четверть периода координатной зависимости векторных компонент (то есть на половину расстояния между узловыми линиями) по обеим поперечным координатам позволяет преобразовывать силовые линии поля типа  $H$  в линии поля типа  $E$ . На рисунке 12 на примере прямоугольного волновода показано преобразование силовых линий моды  $H_{22}$  (рис.12 а) в линии моды  $E_{22}$  (рис.12 б). При этом замкнутые на стенки линии электрического поля преобразуются в замкнутые на себя линии магнитного поля. Для круглого волновода такое преобразование требует более сложного пространственного представления, однако также может быть успешно применено.





(б)

Рис.12. Преобразование силовых линий поля *H*-типа (а) в силовые линии поля *E*-типа (б).

После построения силовых линий поперечного поля следует перейти к построению линий поля, имеющего все векторные компоненты (магнитного поля для *H*-типа и электрического поля для *E*-типа). Из координатных зависимостей векторных компонент полей следует, что максимумы поперечных компонент магнитного и электрического полей совпадают, в то время как максимумы продольной компоненты магнитного поля смещены на четверть длины волны. На рисунке 13 представлена схема взаимного пространственного расположения силовых линий для поля *H*-типа. Линии электрического поля полностью лежат в поперечном сечении (плоскости *XY*), для магнитного поля изображены только линии, лежащие в продольных координатных плоскостях (*XZ* и *YZ*).

Для наиболее полного отображения силовых линий в проекциях на плоскости следует использовать понятие "разреза" и изображать линии как находящиеся в сечении, так и лежащие за ним. Разрез волноводов следует изображать в плоскости *XY* (поперечное сечение) и плоскостях *YZ* и *XZ* (два продольных сечения). При изображении силовых линий перпендикулярных плоскости сечения следует пользоваться условными обозначениями вектора направленного от наблюдателя  $\otimes$  и вектора направленного к наблюдателю  $\odot$ . На рисунке 14 показан разрез электромагнитного поля, приведённого на рисунке 13, в плоскости *YZ* и в виде сверху (против оси *X*).

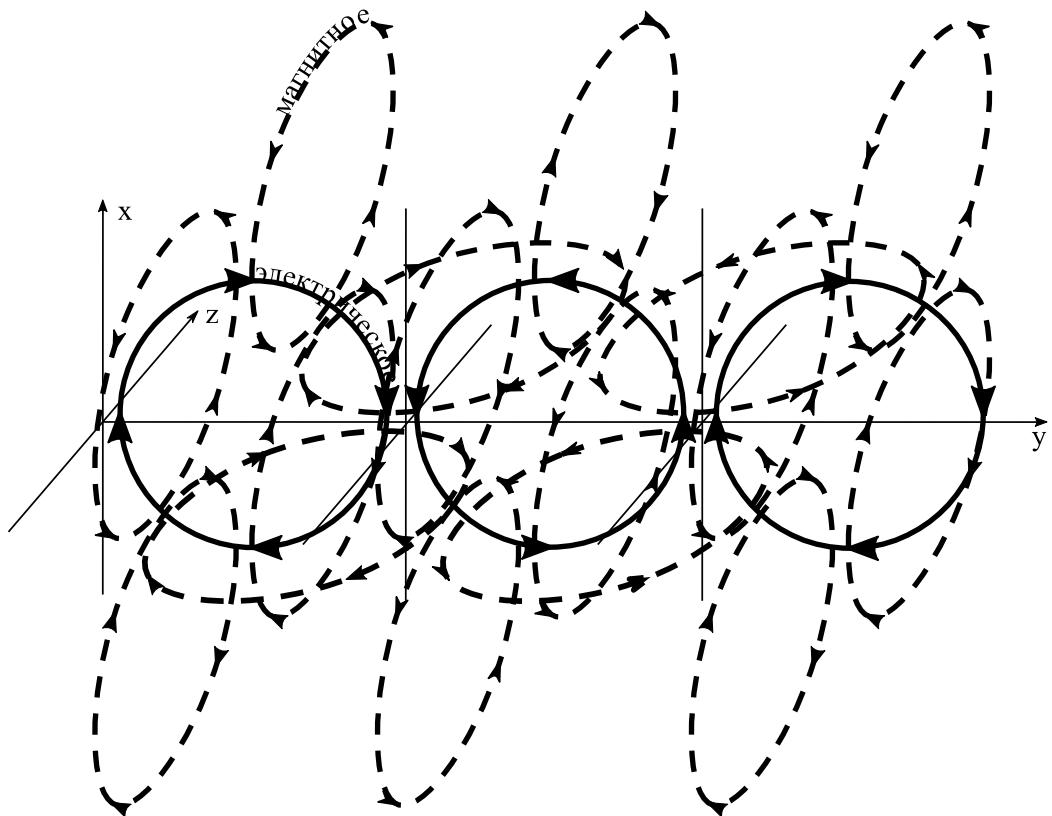


Рис.13. Схема взаимного расположения силовых линий электрического и магнитного поля на примере волны  $H$ -типа.

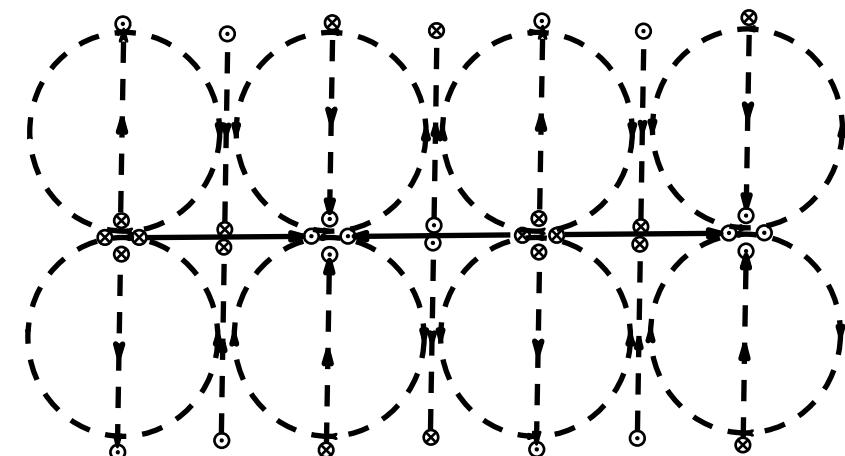


Рис.14. Разрез электромагнитного поля в продольной  $YZ$  плоскости.

**Физический смысл индексов  $m$  и  $n$ , входящих в обозначение собственных мод прямоугольного волновода.** Индексы  $m$  и  $n$  входят в качестве постоянного коэффициента в аргументы функций  $\cos (m \pi x/a)$ ,  $\sin (m \pi x/a)$  и

$\cos(n\pi x/b)$ ,  $\sin(n\pi x/b)$ . С точки зрения узловых линий это означает, что соответствующая сторона волновода (длинная для индекса  $m$  и короткая для индекса  $n$ ) делится узловыми линиями на  $m-1$  или  $n-1$  равных частей.

Индекс  $m$  или  $n$  равный нулю означает, что соответствующая координатная компонента или равна нулю (если зависимость определяется функцией  $\sin$ ), или постоянна и равна максимальной величине (если  $-\cos$ ). Это значит, что силовая линия представляет собой прямую параллельную короткой стенке волновода (при  $n = 0$ ), или длинной стенке (при  $m = 0$ ).

Индекс  $m$  или  $n$  равный единице означает, что соответствующая координатная компонента или изменяется от нуля до нуля, через максимальное значение (если зависимость определяется функцией  $\sin$ ), или изменяется от положительного максимума до отрицательного через ноль (если  $-\cos$ ).

На рисунке 15 приведены силовые линии электрического и магнитного полей, а также тока проводимости для основного типа колебаний прямоугольного волновода  $H_{10}$ .

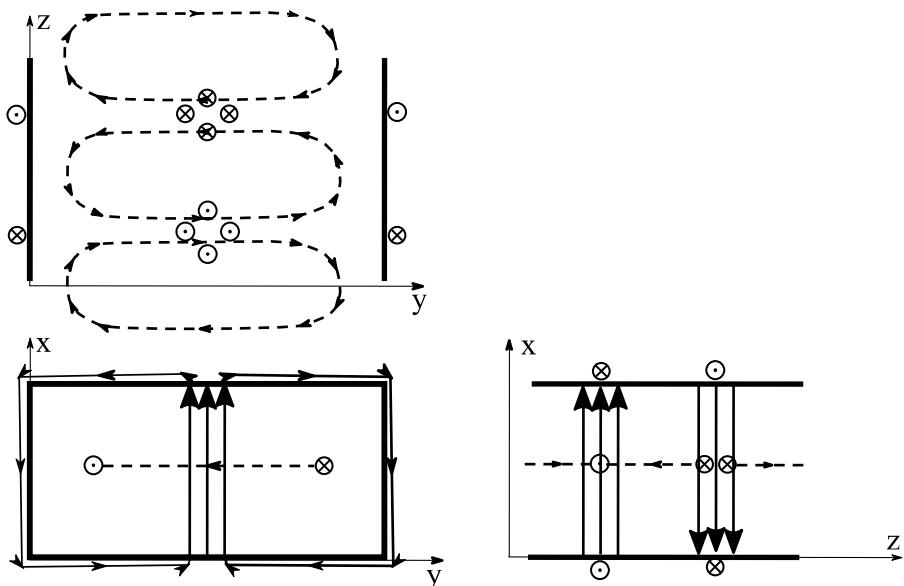


Рис.15. Силовые линии типа колебаний  $H_{10}$  в прямоугольном волноводе.

**Физический смысл индексов  $m$  и  $n$ , входящих в обозначение собственных мод круглого и коаксиального волновода.** Индекс  $m$  входит в качестве постоянного коэффициента в аргументы функций  $\cos(m\varphi)$  и  $\sin(m\varphi)$ , определяющих зависимость составляющих векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  собственных волн волновода от пространственной переменной  $\varphi$  – угла. Для выяснения общих

закономерностей, определяющих зависимость этих составляющих от величины коэффициента  $m$ , достаточно рассмотреть одну из этих функций, например  $\cos(m\varphi)$ .

При  $m = 0$  получаем  $\cos(0\varphi) = 1$  и рассматриваемая составляющая не зависит от угла  $\varphi$  (силовые линии соответствующего вектора представляют собой окружности).

При  $m = 1$  зависимость от угла  $\varphi$  определяется функцией  $\cos \varphi$ . В этом случае во всех точках диаметра  $\varphi = \pm (\pi/2)$  рассматриваемая составляющая будет равна нулю. Следовательно, во всех точках диаметра  $\varphi = \pm (\pi/2)$  будут находиться узлы (нулевые значения) указанной составляющей, то есть данный диаметр является узловой линией – узловым диаметром. При  $m = 2$  зависимость рассматриваемой составляющей от пространственной переменной  $\varphi$  определяется функцией  $\cos 2\varphi$  и узловых диаметров будет два:  $\varphi = \pm (\pi/4)$  и  $\varphi = \pm (3\pi/4)$ ; при  $m = 3$  – три и т. д.

Таким образом, индекс  $m$  определяет число узловых диаметров составляющих векторов **E** и **H** собственных волн круглого волновода и показывает, какое количество узлов этих составляющих укладывается на половине окружности в поперечном сечении волновода.

Индекс  $n$  опосредованно входит в аргументы функций Бесселя и их первых производных, которые определяют зависимость составляющих векторов **E** и **H** собственных волн круглого волновода от пространственной переменной  $r$  – радиуса. Величина  $n$  дает информацию о числе корней этих функций, приходящихся на диапазон изменения радиуса  $r$  от 0 до  $a$ , то есть определяет число узлов (нулевых значений) составляющих векторов **E** и **H**, укладывающихся вдоль радиуса волновода.

При  $n = 1$  узлы рассматриваемой составляющей будут находиться непосредственно на стенке волновода, поэтому величина  $(n - 1)$  будет определять количество узловых окружностей, радиусы которых равны  $a/v_{mn}$  или  $a/\chi_{mn}$ .

### **Рекомендуемый порядок действий при построении силовых линий:**

- 1) в соответствии с рассчитанными размерами волновода изображается его поперечное сечение, указывается масштаб; изображаются два продольных сечения (виды сверху и справа) на длину волны;

- 2) в соответствии со значениями индексов  $m$  и  $n$  в поперечном сечении волновода наносятся узловые линии, радиусы узловых окружностей задаются в соответствии с масштабом с точностью до 1 мм;
- 3) вдоль узловых линий наносятся силовые линии "поперечного" поля (линии электрического поля при необходимости дополняются линиями тока проводимости по стенкам волновода);
- 4) ортогонально полученным силовым линиям «поперечного» поля наносятся силовые линии другого поля, отмечаются места их перехода на чисто продольные составляющие;
- 5) если силовые линии вектора  $\mathbf{E}$  выходят из стенок волновода или входят в них, то на границе раздела они должны быть перпендикулярны этим стенкам;
- 6) если силовые линии вектора  $\mathbf{H}$  проходят вблизи стенок волновода, то на границе раздела они должны быть параллельны этим стенкам.

## 2. Задание и порядок выполнения работы

Варианты заданий приведены в таблице 4. Построение всех требуемых в заданиях зависимостей (кроме п.3) и распределения полей следует проводить только для мод, указанных в вашем варианте (см. графа тип поля в таблице 4). В каждом пункте (кроме п.1 и п.2) помимо графических представлений зависимостей необходимо приводить выводы по их характеру или наблюдаемым закономерностям.

- 1) Рассчитайте размеры волновода для заданного типа электромагнитного поля с учетом рабочих частот, указанного в варианте. Расчеты следует провести для волновода с воздушным заполнением. В случае прямоугольного волновода следует учесть, что широкая стенка волновода вдвое больше узкой, то есть:  $a = 2b$ . Для коаксиального волновода  $a = 5b$ .  
Рассчитанные в этом пункте размеры волновода необходимо использовать далее при выполнении курсового задания.
- 2) Постройте силовые линии векторов заданного типа электромагнитного поля и силовые линии токов в поперечном и в продольных сечениях волновода.
- 3) Исследуйте спектр мод, распространяющихся в волноводе в заданном диапазоне рабочих частот. Для этого рассчитайте критические частоты мод, и сравните полученные значения с рабочим диапазоном частот, указанном в

вашем варианте. Основываясь на результатах сравнения, постройте на одном графике дисперсионные кривые (в координатах Бриллюэна  $\omega(\beta)$ ) для всех мод, попадающих в диапазон рабочих частот. Зависимость  $\omega(\beta)$  выводится из дисперсионного уравнения (4).

- 4) Исследуйте влияние материала диэлектрического заполнения волновода на его волновое сопротивление. Рассчитайте и постройте частотные зависимости волнового сопротивления волновода для заданного типа поля с воздушным и с диэлектрическим заполнением (диэлектрик, соответствующий вашему варианту, указан в таблице 4).
- 5) Исследуйте дисперсию длины волны в волноводе в зависимости от его заполнения. Для этого выведите уравнение, описывающее зависимость длины волны в волноводе  $\lambda_B$ , от длины волны в вакууме. Это уравнение можно вывести, используя дисперсионное уравнение (4) и выражение для определения длины волны в волноводе:

$$\lambda_B = \frac{2\pi}{\beta_{mn}}$$

Используя полученное уравнение постройте на одном графике зависимости для волноводов с воздушным и диэлектрическим заполнением.

- 6) Исследуйте влияние диэлектрического заполнения на фазовую и групповую скорости. Фазовая скорость определяется как:

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta_{mn}}.$$

Групповая скорость определяется как:

$$v_{gp} = \frac{d\omega}{d\beta_{mn}}.$$

Постройте на одном графике зависимости фазовой и групповой скоростей волны и волнового пакета от частоты в волноводе с воздушным и диэлектрическим заполнением.

- 7) Исследуйте проникновение поля в стенки волновода. Постройте на одном графике частотные зависимости толщины скин-слоя для двух заданных материалов покрытия стенок волновода.

Таблица 4

Вариант	Тип волновода	Тип поля	Диапазон рабочих частот, ГГц	Диэлектрик	Материал покрытия стенок волновода
1	Круглый	$E_{11}$	1...5	LaAlO <sub>3</sub>	Ag, Au

2	То же	$E_{01}$	0.5...1.5	MgO	Al, Cu
3	«	$H_{01}$	30...35	Сапфир	Ag, Cu
4	«	$E_{02}$	1.5...5.5	LaAlO <sub>3</sub>	Al, Ag
5	«	$H_{02}$	1...6	Поликор	Au, Cu
6	«	$E_{12}$	20...25	MgO	Al, Au
7	«	$E_{21}$	6...12	Сапфир	Ag, Au
8	«	$H_{12}$	4...10	LaAlO <sub>3</sub>	Au, Cu
9	«	$H_{21}$	15...20	Поликор	Al, Cu
10	Прямоугольный	$H_{20}$	5...10	MgO	Ag, Cu
11	То же	$E_{12}$	0.9...6	Сапфир	Al, Ag
12	«	$H_{03}$	2...6	LaAlO <sub>3</sub>	Au, Cu
13	«	$E_{11}$	2...7	Поликор	Au, Al
14	Прямоугольный	$E_{21}$	0.5...1.8	Поликор	Al, Au
15	То же	$H_{12}$	30...35	MgO	Ag, Au
16	«	$H_{21}$	1.4...8	Сапфир	Au, Cu
17	«	$H_{22}$	1...7	LaAlO <sub>3</sub>	Al, Cu
18	Коаксиальный	$E_{01}$	25...30	Поликор	Ag, Cu
19	Тоже	$H_{11}$	6...10	MgO	Al, Ag
20	«	$E_{11}$	0.1...4	LaAlO <sub>3</sub>	Cu, Au

### 3. Содержание отчета

1. Результаты расчета размеров поперечного сечения направляющей системы с точностью до 0.1 мм.
2. Чертежи поперечного и продольных сечений волноведущей структуры с распределением силовых линий электромагнитного поля и токов.
3. Дисперсионные кривые в координатах Бриллюэна ( $\omega$ – $\beta$ ) для всех мод, распространяющихся в волноводе с воздушным заполнением в диапазоне рабочих частот.
4. График частотных зависимостей волнового сопротивления волновода с идеально проводящими стенками с воздушным заполнением и с диэлектриком для заданного типа поля.
5. График зависимостей длины волны в волноводе от длины волны в вакууме. Зависимости рассчитываются для волновода с воздушным и диэлектрическим заполнением.
5. График зависимостей фазовой скорости волны и групповой скорости волнового пакета от частоты в структуре с воздушным заполнением и с заданным диэлектрическим материалом.

6.График частотной зависимости глубины проникновения электромагнитного поля в стенки волновода с заданными покрытиями.

7. Выводы.

### **Список рекомендуемой литературы**

Гольдштейн Л. Д., Зернов Н. В. Электромагнитные поля и волны. М.: Сов. радио, 1971.

Никольский В. Д., Никольская Т. И. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1989.

Шимони К. Теоретическая электротехника. М.: Мир, 1964.

Григорьев А.Д. Электродинамика и микроволновая техника. СПб: Лань, 2007.

Вендик О. Г., Самойлова Т. Б. Электродинамика. СПб: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2006.

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Основные положения.....	3
1.1. Распространение электромагнитной волны в прямоугольном волноводе.....	5
1.2. Распространение электромагнитной волны в круглом волноводе.....	8
1.3. Распространение электромагнитной волны в коаксиальном волноводе.....	11
1.4. Глубина проникновения электромагнитного поля в проводник.....	14
1.5. Методика построения силовых линий векторов электромагнитного поля в волноведущих структурах.....	15
2. Задание.....	23
3. Содержание отчета.....	25
Список рекомендуемой литературы.....	25

Редактор И. Б. Синищева

---

Подписано в печать 09.06.2014. Формат 60x84/16. Бумага офсетная.

Печать цифровая. Гарнитура «TimesNewRoman».

Печ. л. 1,75. Тираж 65 экз. Заказ

---

Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»  
197376, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5