И. Н. БРОНШТЕЙН
К. А. СЕМЕНДЯЕВ

СПРАВОЧНИК по МАТЕМАТИКЕ

для инженеров и учащихся втузов

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР
2010

ББК 22.1я2
Б 88

Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.

Б 88 Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2010. — 608 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-0906-8

Справочник по математике И. Н. Бронштейна и К. А. Семендяева выдержал множество изданий. Благодаря краткости изложения, полноте и удачному построению материала он прочно завоевал популярность не только в России, но и за рубежом. Справочник предназначен студентам технических вузов, инженерам и всем, кто серьезно изучает математику.

ББК 22.1я2

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lpbl.spb.ru; www.lanbook.com; 192029, Санкт-Петербург,
Общественный пер., 5. Тел./факс: (812)412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

ГДЕ КУПИТЬ
ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИЙ:

по России и зарубежью
«ЛАНЬ-ТРЕЙД». 192029, Санкт-Петербург, ул. Крупской, 13
тел.: (812) 412-85-78, 412-14-45, факс: (812) 412-54-93; ICQ: 446-869-967
e-mail: trade@lanpbl.spb.ru; www.lanpbl.spb.ru/price.htm

в Москве и в Московской области
«ЛАНЬ-ПРЕСС». 109263, Москва, 7-ая ул. Текстильщиков, д. 6/19
тел.: (499) 178-65-85; e-mail: lanpress@ultimanet.ru

в Краснодаре и в Краснодарском крае
«ЛАНЬ-ЮГ». 350072, Краснодар, ул. Жлобы, д. 1/1
тел.: (861) 274-10-35; e-mail: lankrd98@mail.ru

ДЛЯ РОЗНИЧНЫХ ПОКУПАТЕЛЕЙ:
интернет-магазины:
Издательство «Лань»: http://www.lanbook.com
«Сова»: http://www.symplex.ru; «Ozon.ru»: http://www.ozon.ru
«Библион»: http://www.biblion.ru

Обложка
А. Ю. ЛАПШИН

© Издательство «Лань», 2010
© И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев, наследники, 2010
© Издательство «Лань»,
художественное оформление, 2010

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие к первому изданию 9
Предисловие к третьему изданию 10
Предисловие к десятому изданию 10
Математические обозначения 11
Латинский и греческий алфавиты 14

ОТДЕЛ ПЕРВЫЙ

ТАБЛИЦЫ И ГРАФИКИ

I. Таблицы

А. Таблицы основных (элементарных) функций 16
1. Некоторые часто встречающиеся постоянные 16
2. Квадраты, кубы, корни 17
3. Степени целых чисел от $n = 1$ до $n = 100$ 38
4. Обратные величины 40
5. Факториалы и обратные им величины 42
6. Некоторые степени чисел 2, 3 и 5 43
7. Десятичные логарифмы 44
8. Антилогарифмы 46
9. Натуральные значения тригонометрических функций 48
10. Показательные, гиперболические и тригонометрические функции (для x от 0 до 1,6) 52
11. Показательные функции (для x от 1,6 до 10,0) 56
12. Натуральные логарифмы 58
13. Длина окружности диаметра d 62
14. Площадь круга диаметра d 64
15. Элементы сегмента круга 66
16. Перевод градусной меры в радианную 71
17. Пропорциональные части 72
18. Таблица для квадратичного интерполирования 74

Б. Таблицы специальных функций 75
19. Гамма-функция 75
20. Бесселевы (цилиндрические) функции 76
21. Полиномы Лежандра (шаровые функции) 78
22. Эллиптические интегралы 79
23. Интеграл вероятности 81

II. Графики

А. Элементарные функции 83
1. Многочлены 83
2. Дробные рациональные функции 85
3. Иррациональные функции 90
4. Показательные и логарифмические функции 92
5. Тригонометрические функции 96

6. Обратные тригонометрические функции 98
7. Гиперболические функции 100
8. Обратные гиперболические функции 101

Б. Важнейшие кривые 102

9. Кривые третьего порядка 102
10. Кривые четвертого порядка 104
11. Циклоиды 107
12. Спирали 111
13. Некоторые другие кривые 113

ОТДЕЛ ВТОРОЙ

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

I. Приближенные вычисления

1. Правила приближенных вычислений 115
2. Приближенные формулы 118
3. Счетная линейка 120

II. Алгебра

А. Тождественные преобразования 127

1. Основные понятия 127
2. Целые рациональные выражения 128
3. Дробные рациональные выражения 129
4. Иррациональные выражения; преобразование степеней и корней 132
5. Показательные и логарифмические выражения 133

Б. Уравнения 135

6. Преобразование алгебраических уравнений к канонической форме 135
7. Уравнения 1-й, 2-й, 3-й и 4-й степеней 137
8. Уравнения n-й степени 140
9. Трансцендентные уравнения 143
10. Определители (детерминанты) 146
11. Решение системы линейных уравнений 149
12. Система уравнений высших степеней 155

В. Дополнительные главы алгебры 156

13. Неравенства 156
14. Прогрессии, конечные ряды и средние величины 159
15. Факториал и гамма-функция 161
16. Соединения 163
17. Бином Ньютона 163

III. Геометрия

А. Планиметрия 165
1. Плоские фигуры 165

Б. Стереометрия 170

2. Прямые и плоскости в пространстве 170
3. Пространственные углы 170
4. Многогранники 171
5. Круглые тела 174

IV. Тригонометрия

А. Прямолинейная тригонометрия 179
1. Тригонометрические функции 179
2. Основные формулы тригонометрии 182
3. Синусоидальные величины 184
4. Решение треугольников 186
5. Круговые (обратные тригонометрические) функции 188

Б. Сферическая тригонометрия 190
6. Геометрия на сфере 190
7. Решение сферических треугольников 192

В. Гиперболическая тригонометрия 193
8. Гиперболические функции 193
9. Основные формулы гиперболической тригонометрии 194
10. Обратные гиперболические функции 196
11. Геометрическое определение гиперболических функций . . . 196

ОТДЕЛ ТРЕТИЙ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

I. Аналитическая геометрия

А. Геометрия на плоскости 198
1. Основные понятия и формулы 198
2. Прямая линия 202
3. Окружность 205
4. Эллипс 206
5. Гипербола 208
6. Парабола 211
7. Кривые 2-го порядка (конические сечения) 213

Б. Геометрия в пространстве 216
8. Основные понятия и формулы 216
9. Плоскость и прямая в пространстве 221
10. Поверхности 2-го порядка (канонические уравнения) 228
11. Поверхности 2-го порядка (общая теория) 232

II. Дифференциальная геометрия

А. Плоские кривые 234
1. Способы задания кривой 234
2. Локальные элементы кривой 235
3. Точки специального типа 241
4. Асимптоты 246
5. Общее исследование кривой по ее уравнению 247
6. Эволюты и эвольвенты 248
7. Огибающие семейства кривых 249

Б. Пространственные кривые 250
8. Способы задания кривой 250
9. Сопровождающий трехгранник 251
10. Кривизна и кручение 254

В. Поверхности 256
11. Способы задания поверхности 256
12. Касательная плоскость и нормаль 257

13. Линейный элемент поверхности 259
14. Кривизна поверхности 261
15. Линейчатые и развертывающиеся поверхности 263
16. Геодезические линии на поверхности 264

ОТДЕЛ ЧЕТВЕРТЫЙ

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

I. Введение в анализ

1. Действительные числа 265
2. Последовательности и их пределы 267
3. Функции одной переменной 269
4. Предел функции 276
5. Бесконечно малые величины 280
6. Непрерывность и разрывы функций 281
7. Функции нескольких переменных 285
8. Числовые ряды 292
9. Функциональные ряды 298

II. Дифференциальное исчисление

1. Основные понятия 302
2. Техника дифференцирования 306
3. Замена переменных в дифференциальных выражениях 313
4. Основные теоремы дифференциального исчисления 315
5. Нахождение максимума и минимума 318
6. Разложение функций в степенные ряды 322

III. Интегральное исчисление

А. Неопределенные интегралы 330
1. Основные понятия и теоремы 330
2. Общие правила интегрирования 332
3. Интегрирование рациональных функций 334
4. Интегрирование иррациональных функций 340
5. Интегрирование тригонометрических функций 344
6. Интегрирование других трансцендентных функций 345
7. Таблица неопределенных интегралов 346

Б. Определенные интегралы 383
8. Основные понятия и теоремы 383
9. Вычисление определенных интегралов 387
10. Приложения определенных интегралов 393
11. Несобственные интегралы 398
12. Интегралы, зависящие от параметра 404
13. Таблица некоторых определенных интегралов 407

В. Криволинейные, кратные и поверхностные интегралы 412
14. Криволинейные интегралы первого типа 412
15. Криволинейные интегралы второго типа 415
16. Двойной и тройной интегралы 420
17. Вычисление кратных интегралов 422
18. Приложения кратных интегралов 428
19. Поверхностные интегралы первого типа 430
20. Поверхностные интегралы второго типа 432
21. Формулы Стокса, Грина и Остроградского-Гаусса 435

IV. Дифференциальные уравнения

1. Общие понятия 437

А. Обыкновенные дифференциальные уравнения 438

2. Уравнения 1-го порядка 438
3. Уравнения высших порядков и системы уравнений 449
4. Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами 453
5. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами 455
6. Операторный метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений 458
7. Линейные уравнения 2-го порядка 463
8. Краевые задачи 468

Б. Уравнения в частных производных 470

9. Уравнения 1-го порядка 470
10. Линейные уравнения 2-го порядка 476

ОТДЕЛ ПЯТЫЙ

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ АНАЛИЗА

I. Комплексные числа и функции комплексной переменной

1. Основные понятия 493
2. Алгебраические действия 495
3. Элементарные трансцендентные функции 497
4. Уравнения кривых в комплексной форме 501
5. Функции комплексной переменной 504
6. Простейшие конформные отображения 510
7. Интегралы в комплексной области 512
8. Разложение аналитических функций в степенные ряды . . . 515

II. Векторное исчисление

А. Векторная алгебра и вектор-функции скаляра 519

1. Основные понятия 519
2. Умножение векторов 522
3. Ковариантные и контравариантные координаты вектора . . . 526
4. Геометрические приложения векторной алгебры 527
5. Векторная функция скалярной переменной 528

Б. Теория поля 529

6. Скалярное поле 529
7. Векторное поле 531
8. Градиент 534
9. Криволинейный интеграл и потенциал в векторном поле . . 536
10. Поверхностные интегралы 539
11. Объемное дифференцирование 541
12. Дивергенция векторного поля 542
13. Ротация векторного поля 542
14. Операторы ∇ (Гамильтона) $(a\nabla)$ и Δ (Лапласа) 543
15. Интегральные теоремы 545
16. Безвихревые и соленоидальные векторные поля 546
17. Уравнения Лапласа и Пуассона 547

III. Ряды Фурье (гармонический анализ)

1. Общие сведения 549
2. Таблица некоторых разложений в ряд Фурье 554
3. Приближенный гармонический анализ 558

ОТДЕЛ ШЕСТОЙ

ОБРАБОТКА НАБЛЮДЕНИЙ

I. Основы теории вероятностей и теории ошибок

1. Теория вероятностей 562
2. Теория ошибок 565

II. Эмпирические формулы и интерполяция

1. Приближенное изображение функциональной зависимости . . 571
2. Параболическая интерполяция 574
3. Подбор эмпирических формул 578

Указатель литературы 585
Алфавитный указатель 589

Приложение (вкладка). Таблица пропорциональных частей

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Задача, которая стояла перед нами — дать в небольшом по объему справочнике основные сведения по математике, необходимые в учебной и практической работе инженерам и студентам втузов, — была чрезвычайно трудной. Стремясь к краткости изложения, мы все же пытались сделать справочник доступным, удобным для пользования и, по возможности, математически строгим (в той мере, в которой эту строгость следует предъявлять к инженерам).

Следует иметь в виду, что это — не учебная книга, не краткий конспект учебника, а справочник. Поэтому в нем нет той систематичности, которая должна быть в учебнике. Читателя не должно удивлять, что, например, правило Лопиталя попало в параграф о вычислении пределов, стоящий в главе «Введение в анализ», помещенной перед понятием о производной, а сведения о гамма-функции даны в главе «Алгебра» непосредственно после понятия факториала. Таких «несообразностей» в справочнике очень много. Поэтому при желании получить ту или иную справку читателю рекомендуется пользоваться не только оглавлением, но и алфавитным указателем, помещенным в конце книги.

Если в тексте справочника упоминается вопрос, более подробно освещенный в другом месте справочника, то об этом делается указание в виде ссылки на соответствующую страницу; если же дается указание на другую литературу, то приводится только автор книги и та страница справочника, где приведены полные библиографические сведения о книге («Указатель литературы» в конце справочника).

В справочнике возможны недостатки; в полной мере они могут быть обнаружены только в практической работе. Поэтому мы обращаемся с настоятельной просьбой ко всем, пользующимся справочником, писать в издательство (Москва, Орликов пер., 3, Гостехиздат) о всех недостатках, которые будут замечены. Все замечания будут учтены в следующих изданиях справочника.

Выражаем глубокую признательность товарищам А. М. Лопшицу, М. Н. Олевскому и М. Г. Шестопал, просмотревшим в рукописи отдельные главы справочника и внесшим ряд ценных указаний.

И. Бронштейн
К. Семендяев

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Для третьего издания был почти заново написан отдел IV — «Основы математического анализа» и внесено много дополнений в другие отделы. Исправлены замеченные ошибки и опечатки и пересмотрен указатель литературы.

Параграфы 8—10 главы «Дифференциальные уравнения» (краевые задачи и уравнения в частных производных) в основном написаны М. Р. Шура-Бура.

Выражаем благодарность многочисленным читателям, приславшим свои отзывы и сделавшим свои замечания и указания на ошибки и дефекты в предыдущих изданиях Справочника. Просим читателей содействовать своими отзывами дальнейшему улучшению Справочника при его переизданиях.

И. Бронштейн,
К. Семендяев.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ДЕСЯТОМУ ИЗДАНИЮ

Десятое издание, печатаемое с матриц, не отличается от предыдущих. Исправлены замеченные опечатки и заново составлен указатель литературы.

Со времени выхода третьего, переработанного издания книги прошло более 10 лет. За это время применения математики в технике стали глубже и разнообразнее, и содержание «Справочника по математике» уже не удовлетворяет полностью потребностям инженеров сегодняшнего дня. Многие читатели обращаются к нам с пожеланием включить в него новые разделы и главы. В немецком переводе книги издательство «Teubner» дополнило ее сначала главой «Вариационное исчисление», а в следующем издании — разделом «Интегральные уравнения». Имеется и много других разделов математики, которые не менее важны инженерам и учащимся втузов («Линейная алгебра», «Программирование» и т. д.). Справочник, включающий все эти разделы, уже невозможно выпускать в одном томе.

Новое издание «Справочника по математике» должно, по нашему мнению, отличаться от настоящей книги не только наличием дополнительного материала. Старый материал должен быть переработан и перераспределен — если бы мы начинали писать книгу теперь, то она во многом была бы другой. Осуществление этого издания потребует еще очень большого времени.

И. Бронштейн,
К. Семендяев

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ *

I. Соотношения величин

$=$	равно
$\equiv$	тождественно равно
$\neq$	не равно
$\approx$	приближенно равно
$<$	меньше
$>$	больше
$\leqslant$	меньше или равно
$\geqslant$	больше или равно

II Алгебра

$\lvert a \rvert$	абсолютная величина числа a
$+$	(плюс) — сложение
$-$	(минус) — вычитание
$\cdot$ или $\times$	умножение, например: $a \cdot b$ или $a \times b$; знак умножения часто опускается, например: ab
: или $-$	деление $\left(a : b \text{ или } \frac{a}{b}\right)$
a^m	a в степени m
$\sqrt{\ }$	квадратный корень, например: $\sqrt{a}$
$\sqrt[n]{\ }$	корень n-й степени, например: $\sqrt[n]{a}$
$\log_b$	логарифм при основании b, например: $5 = \log_2 32$ (стр. 134)
lg	десятичный логарифм, например: $2 = \lg 100$ (стр. 134)
ln	натуральный логарифм, например: $1 = \ln e$ (стр. 134)
( ), [ ], { }	скобки (последовательность действий)
!	факториал, например: $a!$; $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ (стр. 161)

III. Геометрия

$\perp$	перпендикулярно
$\parallel$	параллельно
#	равно и параллельно

---

* В скобках указываются страницы справочника, где соответствующие понятия разъяснены.

$\sim$	подобно, например: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$
$\triangle$	треугольник
$\angle$	угол (иногда $\sphericalangle$), например: $\angle ABC$, $\sphericalangle ABC$
$\smile$	дуга, например: $\overset{\smile}{AB}$
$^\circ$	градус
$'$	минута
$''$	секунда

} угловые или дуговые, например: $32^\circ 14' 11'',5$

IV. Тригонометрия, гиперболические функции

sin	синус	(стр. 179)
cos	косинус	
tg	тангенс	
ctg	котангенс	
sc	секанс	
csc	косеканс	
Arcsin	арксинус	(стр. 188)
Arccos	арккосинус	
Arctg	арктангенс	
Arcctg	арккотангенс	
arcsin	главное значение арксинуса	(стр. 188)
arccos	» » арккосинуса	
arctg	» » арктангенса	
arcctg	» » арккотангенса	
sh	синус гиперболический	(стр. 193—194)
ch	косинус гиперболический	
th	тангенс гиперболический	
cth	котангенс гиперболический	
sch	секанс гиперболический	
csch	косеканс гиперболический	
Arsh	ареа-синус гиперболический	(стр. 196)
Arch	ареа-косинус гиперболический	
Arth	ареа-тангенс гиперболический	
Arcth	ареа-котангенс гиперболический	

V. Обозначения констант

const	постоянная величина (константа)
$\pi = 3{,}14159\ldots$	отношение длины окружности к диаметру (стр. 169)
$e = 2{,}71828\ldots$	основание натуральных логарифмов (стр. 278)
$C = 0{,}57722\ldots$	эйлерова постоянная (стр. 278)

VI. Математический анализ

lim	предел (стр. 267, 276)	например: $\lim_{N \to \infty} \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N = e$
$\to$	стремится к...	
∞	бесконечность	
$\sum$	сумма	
$\sum_{i=1}^{n}$	сумма, в которой i изменяется от 1 до n	
$f(\ ), \varphi(\ )$	обозначения функций, например: $y = f(x)$, $u = \varphi(x, y, z)$	

Δ	приращение, например: Δx
d	дифференциал, например: dx (стр. 304)
d_x, d_y и т. д.	частный дифференциал, например: $d_x u$ (стр. 304)
$'$, $''$, $'''$, ^{IV}, или $\dot{}$, $\ddot{}$, $\dddot{}$, $\ddddot{}$ ...	обозначения последовательных производных от функции одного переменного: например, от функции $y = f(x)$: $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{IV}(x)$, y', y'', y''', y^{IV}, $\dot{y}$, $\ddot{y}$, $\dddot{y}$ (стр. 302, 305)
$\frac{d}{dx}$, $\frac{d^2}{dx^2}$	первая производная, вторая производная и т. д. — например: $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ и т. д. (стр. 302, 305)
D	знак производной (оператор дифференцирования, например: $Dy = y'$, $D^2y = y''$ и т. д. (стр. 302, 305)
f'_x, f''_{xx}, f''_{xy} или $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}$	частные производные, например: $f'_x(u)$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ и т. д. (стр. 303, 306)
$\int$	интеграл (стр. 331)
$\int_a^b$	определенный интеграл от нижнего предела a до верхнего предела b (стр. 384)
$\int_K$	криволинейный интеграл, взятый по отрезку K или по проекции отрезка K (стр. 412, 415)
$\int\int_S$, $\int_V$	интеграл, распространенный на площадь S, на объем V (стр. 420, 421)
$\int\int$	двойной интеграл (стр. 420, 421)
$\int\int\int$	тройной интеграл (стр. 420, 421)

VII. Комплексные числа

i (иногда j)	мнимая единица ($i^2 = -1$) (стр. 493)
$\mathrm{R}(a)$	действительная часть числа a (стр. 493)
$\mathrm{I}(a)$	мнимая часть числа a (стр. 493)
$\lvert a \rvert$	модуль a (стр. 494)
$\arg a$	аргумент a (стр. 494)
$\bar{a}$	число, сопряженное с a, например: $a = 2 + 3i$, $\bar{a} = 2 - 3i$ (стр. 495)
Ln	логарифм (натуральный) комплексного числа (стр. 499)

VIII. Векторное исчисление

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ или $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$	обозначения векторов (стр. 519)
$\mathbf{a}^0$	единичный вектор того же направления, что и вектор **a** (стр. 519)
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	координатные орты прямоугольной системы координат (стр. 521)
$\|\mathbf{a}\|$ или a	длина (абсолютная величина) вектора **a** (стр. 519)
$\mathbf{a} = \mathbf{b}$ $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ $\mathbf{a} - \mathbf{b}$	равенство, сложение, вычитание векторов (стр. 519—520)
$a\mathbf{a}$	умножение скаляра на вектор (стр. 519)
$\mathbf{ab}$	скалярное произведение векторов (стр. 522)
$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ или $[\mathbf{ab}]$	векторное произведение векторов (стр. 522)
$\mathbf{abc} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$	смешанное произведение трех векторов (стр. 522)
a_x, a_y, a_z	координаты вектора **a** в декартовой системе (стр. 521)
∇	дифференциальный оператор Гамильтона («набла») (стр. 543)
Δ	оператор Лапласа (стр. 544)
grad	градиент скалярного поля ($\operatorname{grad} \varphi = \nabla\varphi$) (стр. 535)
div	дивергенция векторного поля ($\operatorname{div} \mathbf{V} = \nabla \mathbf{V}$) (стр. 542)
rot	ротация векторного поля ($\operatorname{rot} \mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{V}$) (стр. 542)
$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{c}}$	производная скалярного поля по направлению **c** (стр. 535)

ЛАТИНСКИЙ АЛФАВИТ

Aa	— а	*Nn*	— эн
Bb	— бэ	*Oo*	— о
Cc	— цэ	*Pp*	— пэ
Dd	— дэ	*Qq*	— ку
Ee	— е	*Rr*	— эр
Ff	— эф	*Ss*	— эс
Gg	— ге (же)	*Tt*	— тэ
Hh	— ха (аш)	*Uu*	— у
Ii	— и	*Vv*	— вэ
Jj	— йот (жи)	*Ww*	— дубль-вэ
Kk	— ка	*Xx*	— икс
Ll	— эль	*Yy*	— игрек
Mm	— эм	*Zz*	— зэт

ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ

Αα	— альфа	Νν	— ню
Ββ	— бэта	Ξξ	— кси
Γγ	— гамма	Οο	— омикрон
Δδ	— дельта	Ππ	— пи
Εε	— эпсилон	Ρρ	— ро
Ζζ	— дзэта	Σσ	— сигма
Ηη	— эта	Ττ	— тау
Θϑ(θ)	— тэта	Φφ	— фи
Ιι	— иота	Χχ	— хи
Κκ	— каппа	Υυ	— ипсилон
Λλ	— ламбда	Ψψ	— пси
Μμ	— мю	Ωω	— омега

ОТДЕЛ ПЕРВЫЙ

ТАБЛИЦЫ И ГРАФИКИ

I. ТАБЛИЦЫ

И н т е р п о л я ц и я. Большинство помещенных ниже таблиц дает значения функций с четырьмя значащими цифрами для трехзначных значений аргумента. В тех случаях, когда аргумент задан с большей точностью и искомое значение функции не может быть найдено непосредственно в таблицах, необходимо прибегать к интерполяции. Наиболее простой является *линейная интерполяция*, при которой допускают, что приращение функции п р о п о р ц и о н а л ь н о приращению аргумента. Если заданное значение аргумента x лежит между помещенными в таблице значениями x_0 и $x_1 = x_0 + h$, которым соответствуют значения функции $y_0 = f(x_0)$ и $y_1 = f(x_1) = y_0 + \Delta$, то принимают

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{h}\,\Delta.$$

Интерполяционная поправка $\frac{x - x_0}{h}\,\Delta$ легко вычисляется при помощи таблицы пропорциональных частей на стр. 72—73, а также приложенной к справочнику, дающей произведения Δ (от 11 до 90) на 0,1, 0,2, ... 0,9.

Примеры: 1) $1{,}6754^2$? В таблицах (стр. 19) находим: $1{,}67^2 = 2{,}789$; $1{,}68^2 = 2{,}822$; $\Delta = 33$ *. Из таблицы пропорциональных частей $0{,}5 \cdot 33 = 16{,}5$; $0{,}04 \cdot 33 = 1{,}3$; $\frac{x - x_0}{h}\,\Delta = 16{,}5 + 1{,}3 \approx 18$; $1{,}6754^2 = 2{,}807$.

2) tg 79°24′? В таблицах (стр. 51 и 73) находим: tg 79°20′ = 5,309; tg 79°30′ = 5,396; $\Delta = 87$; $0{,}4 \cdot 87 \approx 35$, tg 79°24′ = 5,344.

Погрешность линейной интерполяции не превышает единицы разряда последней значащей цифры, если только две соседние разности Δ_0 и Δ_1 отличаются не больше, чем на 4 единицы (последнего знака). Если это условие не выполнено (как, например, в таблице tg x при $x > 80°$, стр. 51), необходимо пользоваться более сложными интерполяционными формулами. В большинстве случаев достаточной является *квадратичная интерполяция* по Бесселю:

$$f(x) = f(x_0) + k\Delta_0 - k_1(\Delta_1 - \Delta_{-1}),$$

где $k = \frac{x - x_0}{h}$, а $k_1 = \frac{k(1 - k)}{4}$, величина k_1 находится в таблице на стр. 74.

Пример: Требуется найти tg 85°33′ (таблица на стр. 51). Находим ($h = 10'$): $k = 0{,}3$, $k_1 = 0{,}052$; поправка равна $0{,}3 \cdot 491 - 0{,}052 \cdot 75 \approx 143$; tg 85°33′ = 12,849.

$x_{-1} = x_0 - h$	y_{-1}	Δ_{-1}
x_0	y_0	Δ_0
$x_1 = x_0 + h$	y_1	Δ_1
$x_2 = x_0 + 2h$	y_2	

x	tg x	Δ
85°20′	12,251	455
85°30′	12,706	491
85°40′	13,197	530
85°50′	13,727	

* Разность Δ и поправку обычно выражают в единицах разряда последней значащей цифры, не выписывая нулей и запятой впереди.

А. Таблицы основных (элементарных) функций

1. Некоторые часто встречающиеся постоянные

Величина	n	$\lg n$	Величина	n	$\lg n$
π	3,1415 93	0,49715	$1:\pi$	0,3183 10	$\bar{1}$,50285
2π	6,2831 85	0,79818	$1:2\pi$	0,1591 55	$\bar{1}$,20182
3π	9,4247 78	0,97427	$1:3\pi$	0,1061 03	$\bar{1}$,02573
4π	12,5663 71	1,09921	$1:4\pi$	0,0795 77	$\bar{2}$,90079
$\pi:2$	1,5707 96	0,19612	$2:\pi$	0,6366 20	$\bar{1}$,80388
$\pi:3$	1,0471 98	0,02003	$3:\pi$	0,9549 30	$\bar{1}$,97997
$\pi:4$	0,7853 98	$\bar{1}$,89509	$4:\pi$	1,2732 40	0,10491
$\pi:6$	0,5235 99	$\bar{1}$,71900	$6:\pi$	1,9098 59	0,28100
$\pi:180\ (=1°)$	0,0174 53	$\bar{2}$,24188	$180°:\pi$	57°,2957 80	1,75812
$\pi:10\ 800\ (=1')$	0,0002 91	$\bar{4}$,46373	$10\ 800':\pi$	3437',74 68	3,53627
$\pi:648\,000\ (=1'')$	0,0000 05	$\bar{6}$,68557	$648\,000'':\pi$	206264'',81	5,31443
π^2	9,8696 04	0,99430	$1:\pi^2$	0,1013 21	$\bar{1}$,00570
$\sqrt{\pi}$	1,7724 54	0,24857	$\sqrt{1:\pi}$	0,5641 90	$\bar{1}$,75143
$\sqrt{2\pi}$	2,5066 28	0,39909	$\sqrt{1:2\pi}$	0,3989 42	$\bar{1}$,60091
$\sqrt{\pi:2}$	1,2533 14	0,09806	$\sqrt{2:\pi}$	0,7978 85	$\bar{1}$,90194
$\sqrt[3]{\pi}$	1,4645 92	0,16572	$\sqrt[3]{1:\pi}$	0,6827 84	$\bar{1}$,83428
$\sqrt[3]{4\pi:3}$	1,6119 92	0,20736	$\sqrt[3]{3:4\pi}$	0,6203 50	$\bar{1}$,79264
e	2,7182 82	0,43429	$1:e$	0,3678 79	$\bar{1}$,56571
e^2	7,3890 56	0,86859	$1:e^2$	0,1353 35	$\bar{1}$,13141
$\sqrt{e}$	1,6487 21	0,21715	$\sqrt{1:e}$	0,6065 31	$\bar{1}$,78285
$\sqrt[3]{e}$	1,3956 12	0,14476	$\sqrt[3]{1:e}$	0,7165 32	$\bar{1}$,85524
$e^\pi:2$	4,8104 77	0,68219	$e-\pi:2$	0,2078 80	$\bar{1}$,31781
e^π	23,1406 93	1,36438	$e^{-\pi}$	0,0432 14	$\bar{2}$,63562
$e^{2\pi}$	535,4916 56	2,72875	$e^{-2\pi}$	0,0018 67	$\bar{3}$,27125
C *	0,5772 16	$\bar{1}$,76134	$\ln\pi$	1,1447 30	0,05870
$M=\lg e$	0,4342 94	$\bar{1}$,63778	$1:M=\ln 10$	2,3025 85	0,36222
g **	9,81	0,99167	$1:g$	0,10194	$\bar{1}$,00833
g^2	96,2361	1,98334	$1:2g$	0,050968	$\bar{2}$,70730
$\sqrt{g}$	3,13209	0,49583	$\pi\sqrt{g}$	9,83976	0,99298
$\sqrt{2g}$	4,42945	0,64635	$\pi\sqrt{2g}$	13,91552	1,14350

* C — постоянная Эйлера, см. стр. 278.

** g — ускорение силы тяжести в $м/сек^2$; здесь дано округленное значение g на уровне моря на широте 45—50°.

2. *Квадраты, кубы, корни*

Объяснения к таблице

Таблица, помещенная на стр. 18—37, позволяет находить квадраты, кубы, квадратные и кубические корни с четырьмя значащими цифрами. Для аргументов n, заключенных между 1 и 10, величины n^2, n^3 находятся непосредственно в таблице, если значение аргумента дано с тремя значащими цифрами. *Например*: $1{,}79^2 = 3{,}204$ (стр. 19). Если же значение аргумента задано более чем с тремя значащими цифрами, необходимо прибегнуть к интерполяции (см. стр. 15). Для этой таблицы погрешность линейной интерполяции нигде не превышает одной единицы последнего знака.

Для нахождения n^2, n^3 при $n > 10$ и $n < 1$ принимают во внимание, что при увеличении n в 10^k раз n^2 увеличивается в 10^{2k}, n^3 — в 10^{3k} раз, т. е. перенос запятой у n на k разрядов вправо вызывает переносы запятых у n^2 на $2k$ и у n^3 на $3k$ разрядов вправо. При этом, по мере надобности, к взятому из таблиц числу приписываются нули справа или слева. *Например*: $0{,}173^2 = 0{,}03204$; $173^3 = 5\,735\,000$ *.

Корни квадратные для n, заключенных между 1 и 100, могут быть найдены непосредственно из таблицы [с применением линейной интерполяции (стр. 15)], а для любых n по следующим правилам:

1) Подкоренное число разбивают в обе стороны от запятой на грани, содержащие по две цифры. 2) В зависимости от того, содержит ли первая слева, не состоящая из нулей, грань одну или две значащие цифры, значение корня находят в графе $\sqrt{n}$ или графе $\sqrt{10n}$. 3) В найденном значении корня запятую устанавливают, исходя из того, что каждая грань подкоренного числа, стоящая до запятой, дает для корня одну цифру до запятой, а для чисел, меньших 1, каждая состоящая из нулей грань после запятой дает для корня один нуль после запятой.

Примеры: 1) $\sqrt{23{,}9} = 4{,}889$; 2) $\sqrt{0{,}00'02'39} = 0{,}01546$; 3) $\sqrt{23'90'00} = 488.9$; 4) $\sqrt{0{,}00'3} = 0{,}05477$. (В последнем примере под корнем должен быть мысленно добавлен на конце еще один нуль до полной грани; поэтому корень следует искать в графе $\sqrt{10n}$.)

Корни кубические для n, заключенных между 1 и 1000, могут быть найдены непосредственно из таблицы (с применением линейной интерполяции), а для любых n по следующим правилам:

1) Подкоренное число разбивают в обе стороны от запятой на грани, содержащие по три цифры. 2) В зависимости от того, содержит ли первая слева, не состоящая из нулей, грань одну, две или три значащие цифры, значение корня находят в таблице соответственно в графах $\sqrt[3]{n}$, $\sqrt[3]{10n}$ или $\sqrt[3]{100n}$. 3) В найденном значении корня запятую устанавливают по тому же правилу, что и для квадратных корней.

Примеры: 1) $\sqrt[3]{23{,}9} = 2{,}880$ **; 2) $\sqrt[3]{239'000} = 62{,}06$; 3) $\sqrt[3]{0{,}000'002'39} = 0{,}01337$; 4) $\sqrt[3]{0{,}000'3} = 0{,}06694$; 5) $\sqrt[3]{0{,}03} = 0{,}3107$. (В последних двух примерах на конце нужно мысленно прибавить соответственно два и один нуль.)

---

* Лучше записать $173^3 = 5{,}735 \cdot 10^6$, избегая употребления нулей для замены неизвестных цифр (точно $173^3 = 5\,735\,339$).

** Нуль на конце нужно сохранить, так как он является значащей цифрой (см. стр. 115) и характеризует точность полученного значения корня.

Квадраты, кубы, квадратные и кубические корни

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
1,00	1,000	1,000	1,000	3,162	1,000	2,154	4,642
1,01	1,020	1,030	1,005	3,178	1,003	2,162	4,657
1,02	1,040	1,061	1,010	3,194	1,007	2,169	4,672
1,03	1,061	1,093	1,015	3,209	1,010	2,176	4,688
1,04	1,082	1,125	1,020	3,225	1,013	2,183	4,703
1,05	1,102	1,158	1,025	3,240	1,016	2,190	4,718
1,06	1,124	1,191	1,030	3,256	1,020	2,197	4,733
1,07	1,145	1,225	1,034	3,271	1,023	2,204	4,747
1,08	1,166	1,260	1,039	3,286	1,026	2,210	4,762
1,09	1,188	1,295	1,044	3,302	1,029	2,217	4,777
1,10	1,210	1,331	1,049	3,317	1,032	2,224	4,791
1,11	1,232	1,368	1,054	3,332	1,035	2,231	4,806
1,12	1,254	1,405	1,058	3,347	1,038	2,237	4,820
1,13	1,277	1,443	1,063	3,362	1,042	2,244	4,835
1,14	1,300	1,482	1,068	3,376	1,045	2,251	4,849
1,15	1,322	1,521	1,072	3,391	1,048	2,257	4,863
1,16	1,346	1,561	1,077	3,406	1,051	2,264	4,877
1,17	1,369	1,602	1,082	3,421	1,054	2,270	4,891
1,18	1,392	1,643	1,086	3,435	1,057	2,277	4,905
1,19	1,416	1,685	1,091	3,450	1,060	2,283	4,919
1,20	1,440	1,728	1,095	3,464	1,063	2,289	4,932
1,21	1,464	1,772	1,100	3,479	1,066	2,296	4,946
1,22	1,488	1,816	1,105	3,493	1,069	2,302	4,960
1,23	1,513	1,861	1,109	3,507	1,071	2,308	4,973
1,24	1,538	1,907	1,114	3,521	1,074	2,315	4,987
1,25	1,562	1,953	1,118	3,536	1,077	2,321	5,000
1,26	1,588	2,000	1,122	3,550	1,080	2,327	5,013
1,27	1,613	2,048	1,127	3,564	1,083	2,333	5,027
1,28	1,638	2,097	1,131	3,578	1,086	2,339	5,040
1,29	1,664	2,147	1,136	3,592	1,089	2,345	5,053
1,30	1,690	2,197	1,140	3,606	1,091	2,351	5,066
1,31	1,716	2,248	1,145	3,619	1,094	2,357	5,079
1,32	1,742	2,300	1,149	3,633	1,097	2,363	5,092
1,33	1,769	2,353	1,153	3,647	1,100	2,369	5,104
1,34	1,796	2,406	1,158	3,661	1,102	2,375	5,117
1,35	1,822	2,460	1,162	3,674	1,105	2,381	5,130
1,36	1,850	2,515	1,166	3,688	1,108	2,387	5,148
1,37	1,877	2,571	1,170	3,701	1,111	2,393	5,155
1,38	1,904	2,628	1,175	3,715	1,113	2,399	5,168
1,39	1,932	2,686	1,179	3,728	1,116	2,404	5,180
1,40	1,960	2,744	1,183	3,742	1,119	2,410	5,192
1,41	1,988	2,803	1,187	3,755	1,121	2,416	5,205
1,42	2,016	2,863	1,192	3,768	1,124	2,422	5,217
1,43	2,045	2,924	1,196	3,782	1,127	2,427	5,229
1,44	2,074	2,986	1,200	3,795	1,129	2,433	5,241
1,45	2,102	3,049	1,204	3,808	1,132	2,438	5,254

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
1,45	2,102	3,049	1,204	3,808	1,132	2,438	5,254
1,46	2,132	3,112	1,208	3,821	1,134	2,444	5,266
1,47	2,161	3,177	1,212	3,834	1,137	2,450	5,278
1,48	2,190	3,242	1,217	3,847	1,140	2,455	5,290
1,49	2,220	3,308	1,221	3,860	1,142	2,461	5,301
1,50	2,250	3,375	1,225	3,873	1,145	2,466	5,313
1,51	2,280	3,443	1,229	3,886	1,147	2,472	5,325
1,52	2,310	3,512	1,233	3,899	1,150	2,477	5,337
1,53	2,341	3,582	1,237	3,912	1,152	2,483	5,348
1,54	2,372	3,652	1,241	3,924	1,155	2,488	5,360
1,55	2,402	3,724	1,245	3,937	1,157	2,493	5,372
1,56	2,434	3,796	1,249	3,950	1,160	2,499	5,383
1,57	2,465	3,870	1,253	3,962	1,162	2,504	5,395
1,58	2,496	3,944	1,257	3,975	1,165	2,509	5,406
1,59	2,528	4,020	1,261	3,987	1,167	2,515	5,418
1,60	2,560	4,096	1,265	4,000	1,170	2,520	5,429
1,61	2,592	4,173	1,269	4,012	1,172	2,525	5,440
1,62	2,624	4,252	1,273	4,025	1,174	2,530	5,451
1,63	2,657	4,331	1,277	4,037	1,177	2,535	5,463
1,64	2,690	4,411	1,281	4,050	1,179	2,541	5,474
1,65	2,722	4,492	1,285	4,062	1,182	2,546	5,485
1,66	2,756	4,574	1,288	4,074	1,184	2,551	5,496
1,67	2,789	4,657	1,292	4,087	1,186	2,556	5,507
1,68	2,822	4,742	1,296	4,099	1,189	2,561	5,518
1,69	2,856	4,827	1,300	4,111	1,191	2,566	5,529
1,70	2,890	4,913	1,304	4,123	1,193	2,571	5,540
1,71	2,924	5,000	1,308	4,135	1,196	2,576	5,550
1,72	2,958	5,088	1,311	4,147	1,198	2,581	5,561
1,73	2,993	5,178	1,315	4,159	1,200	2,586	5,572
1,74	3,028	5,268	1,319	4,171	1,203	2,591	5,583
1,75	3,062	5,359	1,323	4,183	1,205	2,596	5,593
1,76	3,098	5,452	1,327	4,195	1,207	2,601	5,604
1,77	3,133	5,545	1,330	4,207	1,210	2,606	5,615
1,78	3,168	5,640	1,334	4,219	1,212	2,611	5,625
1,79	3,204	5,735	1,338	4,231	1,214	2,616	5,636
1,80	3,240	5,832	1,342	4,243	1,216	2,621	5,646
1,81	3,276	5,930	1,345	4,254	1,219	2,626	5,657
1,82	3,312	6,029	1,349	4,266	1,221	2,630	5,667
1,83	3,349	6,128	1,353	4,278	1,223	2,635	5,677
1,84	3,386	6,230	1,356	4,290	1,225	2,640	5,683
1,85	3,422	6,332	1,360	4,301	1,228	2,645	5,698
1,86	3,460	6,435	1,364	4,313	1,230	2,650	5,708
1,87	3,497	6,539	1,367	4,324	1,232	2,654	5,718
1,88	3,534	6,645	1,371	4,336	1,234	2,659	5,729
1,89	3,572	6,751	1,375	4,347	1,236	2,664	5,739
1,90	3,610	6,859	1,378	4,359	1,239	2,668	5,749

Объяснения к таблице см. на стр. 17.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
1,90	3,610	6,859	1,378	4,359	1,239	2,668	5,749
1,91	3,648	6,968	1,382	4,370	1,241	2,673	5,759
1,92	3,686	7,078	1,386	4,382	1,243	2,678	5,769
1,93	3,725	7,189	1,389	4,393	1,245	2,682	5,779
1,94	3,764	7,301	1,393	4,405	1,247	2,687	5,789
1,95	3,802	7,415	1,396	4,416	1,249	2,692	5,799
1,96	3,842	7,530	1,400	4,427	1,251	2,696	5,809
1,97	3,881	7,645	1,404	4,438	1,254	2,701	5,819
1,98	3,920	7,762	1,407	4,450	1,256	2,705	5,828
1,99	3,960	7,881	1,411	4,461	1,258	2,710	5,838
2,00	4,000	8,000	1,414	4,472	1,260	2,714	5,848
2,01	4,040	8,121	1,418	4,483	1,262	2,719	5,858
2,02	4,080	8,242	1,421	4,494	1,264	2,723	5,867
2,03	4,121	8,365	1,425	4,506	1,266	2,728	5,877
2,04	4,162	8,490	1,428	4,517	1,268	2,732	5,887
2,05	4,202	8,615	1,432	4,528	1,270	2,737	5,896
2,06	4,244	8,742	1,435	4,539	1,272	2,741	5,906
2,07	4,285	8,870	1,439	4,550	1,274	2,746	5,915
2,08	4,326	8,999	1,442	4,561	1,277	2,750	5,925
2,09	4,368	9,129	1,446	4,572	1,279	2,755	5,934
2,10	4,410	9,261	1,449	4,583	1,281	2,759	5,944
2,11	4,452	9,394	1,453	4,593	1,283	2,763	5,953
2,12	4,494	9,528	1,456	4,604	1,285	2,768	5,963
2,13	4,537	9,664	1,459	4,615	1,287	2,772	5,972
2,14	4,580	9,800	1,463	4,626	1,289	2,776	5,981
2,15	4,622	9,938	1,466	4,637	1,291	2,781	5,991
2,16	4,666	10,08	1,470	4,648	1,293	2,785	6,000
2,17	4,709	10,22	1,473	4,658	1,295	2,789	6,009
2,18	4,752	10,36	1,476	4,669	1,297	2,794	6,018
2,19	4,796	10,50	1,480	4,680	1,299	2,798	6,028
2,20	4,840	10,65	1,483	4,690	1,301	2,802	6,037
2,21	4,884	10,79	1,487	4,701	1,303	2,806	6,046
2,22	4,928	10,94	1,490	4,712	1,305	2,811	6,055
2,23	4,973	11,09	1,493	4,722	1,306	2,815	6,064
2,24	5,018	11,24	1,497	4,733	1,308	2,819	6,073
2,25	5,062	11,39	1,500	4,743	1,310	2,823	6,082
2,26	5,108	11,54	1,503	4,754	1,312	2,827	6,091
2,27	5,153	11,70	1,507	4,764	1,314	2,831	6,100
2,28	5,198	11,85	1,510	4,775	1,316	2,836	6,109
2,29	5,244	12,01	1,513	4,785	1,318	2,840	6,118
2,30	5,290	12,17	1,517	4,796	1,320	2,844	6,127
2,31	5,336	12,33	1,520	4,806	1,322	2,848	6,136
2,32	5,382	12,49	1,523	4,817	1,324	2,852	6,145
2,33	5,429	12,65	1,526	4,827	1,326	2,856	6,153
2,34	5,476	12,81	1,530	4,837	1,328	2,860	6,162
2,35	5,522	12,98	1,533	4,848	1,330	2,864	6,171

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
2,35	5,522	12,98	1,533	4,848	1,330	2,864	6,171
2,36	5,570	13,14	1,536	4,858	1,331	2,868	6,180
2,37	5,617	13,31	1,539	4,868	1,333	2,872	6,188
2,38	5,664	13,48	1,543	4,879	1,335	2,876	6,197
2,39	5,712	13,65	1,546	4,889	1,337	2,880	6,206
2,40	5,760	13,82	1,549	4,899	1,339	2,884	6,214
2,41	5,808	14,00	1,552	4,909	1,341	2,888	6,223
2,42	5,856	14,17	1,556	4,919	1,343	2,892	6,232
2,43	5,905	14,35	1,559	4,930	1,344	2,896	6,240
2,44	5,954	14,53	1,562	4,940	1,346	2,900	6,249
2,45	6,002	14,71	1,565	4,950	1,348	2,904	6,257
2,46	6,052	14,89	1,568	4,960	1,350	2,908	6,266
2,47	6,101	15,07	1,572	4,970	1,352	2,912	6,274
2,48	6,150	15,25	1,575	4,980	1,354	2,916	6,283
2,49	6,200	15,44	1,578	4,990	1,355	2,920	6,291
2,50	6,250	15,62	1,581	5,000	1,357	2,924	6,300
2,51	6,300	15,81	1,584	5,010	1,359	2,928	6,308
2,52	6,350	16,00	1,587	5,020	1,361	2,932	6,316
2,53	6,401	16,19	1,591	5,030	1,363	2,936	6,325
2,54	6,452	16,39	1,594	5,040	1,364	2,940	6,333
2,55	6,502	16,58	1,597	5,050	1,366	2,943	6,341
2,56	6,554	16,78	1,600	5,060	1,368	2,947	6,350
2,57	6,605	16,97	1,603	5,070	1,370	2,951	6,358
2,58	6,656	17,17	1,606	5,079	1,372	2,955	6,366
2,59	6,708	17,37	1,609	5,089	1,373	2,959	6,374
2,60	6,760	17,58	1,612	5,099	1,375	2,962	6,383
2,61	6,812	17,78	1,616	5,109	1,377	2,966	6,391
2,62	6,864	17,98	1,619	5,119	1,379	2,970	6,399
2,63	6,917	18,19	1,622	5,128	1,380	2,974	6,407
2,64	6,970	18,40	1,625	5,138	1,382	2,978	6,415
2,65	7,022	18,61	1,628	5,148	1,384	2,981	6,423
2,66	7,076	18,82	1,631	5,158	1,386	2,985	6,431
2,67	7,129	19,03	1,634	5,167	1,387	2,989	6,439
2,68	7,182	19,25	1,637	5,177	1,389	2,993	6,447
2,69	7,236	19,47	1,640	5,187	1,391	2,996	6,455
2,70	7,290	19,68	1,643	5,196	1,392	3,000	6,463
2,71	7,344	19,90	1,646	5,206	1,394	3,004	6,471
2,72	7,398	20,12	1,649	5,215	1,396	3,007	6,479
2,73	7,453	20,35	1,652	5,225	1,398	3,011	6,487
2,74	7,508	20,57	1,655	5,235	1,399	3,015	6,495
2,75	7,562	20,80	1,658	5,244	1,401	3,018	6,503
2,76	7,618	21,02	1,661	5,254	1,403	3,022	6,511
2,77	7,673	21,25	1,664	5,263	1,404	3,026	6,519
2,78	7,728	21,48	1,667	5,273	1,406	3,029	6,527
2,79	7,784	21,72	1,670	5,282	1,408	3,033	6,534
2,80	7,840	21,95	1,673	5,292	1,409	3,037	6,542

Объяснения к таблице см. на стр. 17.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
2,80	7,840	21,95	1,673	5,292	1,409	3,037	6,542
2,81	7,896	22,19	1,676	5,301	1,411	3,040	6,550
2,82	7,952	22,43	1,679	5,310	1,413	3,044	6,558
2,83	8,009	22,67	1,682	5,320	1,414	3,047	6,565
2,84	8,066	22,91	1,685	5,329	1,416	3,051	6,573
2,85	8,122	23,15	1,688	5,339	1,418	3,055	6,581
2,86	8,180	23,39	1,691	5,348	1,419	3,058	6,589
2,87	8,237	23,64	1,694	5,357	1,421	3,062	6,596
2,88	8,294	23,89	1,697	5,367	1,423	3,065	6,604
2,89	8,352	24,14	1,700	5,376	1,424	3,069	6,611
2,90	8,410	24,39	1,703	5,385	1,426	3,072	6,619
2,91	8,468	24,64	1,706	5,394	1,428	3,076	6,627
2,92	8,526	24,90	1,709	5,404	1,429	3,079	6,634
2,93	8,585	25,15	1,712	5,413	1,431	3,083	6,642
2,94	8,644	25,41	1,715	5,422	1,433	3,086	6,649
2,95	8,702	25,67	1,718	5,431	1,434	3,090	6,657
2,96	8,762	25,93	1,720	5,441	1,436	3,093	6,664
2,97	8,821	26,20	1,723	5,450	1,437	3,097	6,672
2,98	8,880	26,46	1,726	5,459	1,439	3,100	6,679
2,99	8,940	26,73	1,729	5,468	1,441	3,104	6,687
3,00	9,000	27,00	1,732	5,477	1,442	3,107	6,694
3,01	9,060	27,27	1,735	5,486	1,444	3,111	6,702
3,02	9,120	27,54	1,738	5,495	1,445	3,114	6,709
3,03	9,181	27,82	1,741	5,505	1,447	3,118	6,717
3,04	9,242	28,09	1,744	5,514	1,449	3,121	6,724
3,05	9,302	28,37	1,746	5,523	1,450	3,124	6,731
3,06	9,364	28,65	1,749	5,532	1,452	3,128	6,739
3,07	9,425	28,93	1,752	5,541	1,453	3,131	6,746
3,08	9,486	29,22	1,755	5,550	1,455	3,135	6,753
3,09	9,548	29,50	1,758	5,559	1,457	3,138	6,761
3,10	9,610	29,79	1,761	5,568	1,458	3,141	6,768
3,11	9,672	30,08	1,764	5,577	1,460	3,145	6,775
3,12	9,734	30,37	1,766	5,586	1,461	3,148	6,782
3,13	9,797	30,66	1,769	5,595	1,463	3,151	6,790
3,14	9,860	30,96	1,772	5,604	1,464	3,155	6,797
3,15	9,922	31,26	1,775	5,612	1,466	3,158	6,804
3,16	9,986	31,55	1,778	5,621	1,467	3,162	6,811
3,17	10,05	31,86	1,780	5,630	1,469	3,165	6,818
3,18	10,11	32,16	1,783	5,639	1,471	3,168	6,826
3,19	10,18	32,46	1,786	5,648	1,472	3,171	6,833
3,20	10,24	32,77	1,789	5,657	1,474	3,175	6,840
3,21	10,30	33,08	1,792	5,666	1,475	3,178	6,847
3,22	10,37	33,39	1,794	5,675	1,477	3,181	6,854
3,23	10,43	33,70	1,797	5,683	1,478	3,185	6,861
3,24	10,50	34,01	1,800	5,692	1,480	3,188	6,868
3,25	10,56	34,33	1,803	5,701	1,481	3,191	6,875

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
3,25	10,56	34,33	1,803	5,701	1,481	3,191	6,875
3,26	10,63	34,65	1,806	5,710	1,483	3,195	6,882
3,27	10,69	34,97	1,808	5,718	1,484	3,198	6,889
3,28	10,76	35,29	1,811	5,727	1,486	3,201	6,896
3,29	10,82	35,61	1,814	5,736	1,487	3,204	6,903
3,30	10,89	35,94	1,817	5,745	1,489	3,208	6,910
3,31	10,96	36,26	1,819	5,753	1,490	3,211	6,917
3,32	11,02	36,59	1,822	5,762	1,492	3,214	6,924
3,33	11,09	36,93	1,825	5,771	1,493	3,217	6,931
3,34	11,16	37,26	1,828	5,779	1,495	3,220	6,938
3,35	11,22	37,60	1,830	5,788	1,496	3,224	6,945
3,36	11,29	37,93	1,833	5,797	1,498	3,227	6,952
3,37	11,36	38,27	1,836	5,805	1,499	3,230	6,959
3,38	11,42	38,61	1,838	5,814	1,501	3,233	6,966
3,39	11,49	38,96	1,841	5,822	1,502	3,236	6,973
3,40	11,56	39,30	1,844	5,831	1,504	3,240	6,980
3,41	11,63	39,65	1,847	5,840	1,505	3,243	6,986
3,42	11,70	40,00	1,849	5,848	1,507	3,246	6,993
3,43	11,76	40,35	1,852	5,857	1,508	3,249	7,000
3,44	11,83	40,71	1,855	5,865	1,510	3,252	7,007
3,45	11,90	41,06	1,857	5,874	1,511	3,255	7,014
3,46	11,97	41,42	1,860	5,882	1,512	3,259	7,020
3,47	12,04	41,78	1,863	5,891	1,514	3,262	7,027
3,48	12,11	42,14	1,865	5,899	1,515	3,265	7,034
3,49	12,18	42,51	1,868	5,908	1,517	3,268	7,041
3,50	12,25	42,88	1,871	5,916	1,518	3,271	7,047
3,51	12,32	43,24	1,873	5,925	1,520	3,274	7,054
3,52	12,39	43,61	1,876	5,933	1,521	3,277	7,061
3,53	12,46	43,99	1,879	5,941	1,523	3,280	7,067
3,54	12,53	44,36	1,881	5,950	1,524	3,283	7,074
3,55	12,60	44,74	1,884	5,958	1,525	3,287	7,081
3,56	12,67	45,12	1,887	5,967	1,527	3,290	7,087
3,57	12,74	45,50	1,889	5,975	1,528	3,293	7,094
3,58	12,82	45,88	1,892	5,983	1,530	3,296	7,101
3,59	12,89	46,27	1,895	5,992	1,531	3,299	7,107
3,60	12,96	46,66	1,897	6,000	1,533	3,302	7,114
3,61	13,03	47,05	1,900	6,008	1 534	3,305	7,120
3,62	13,10	47,44	1,903	6,017	1,535	3,308	7,127
3,63	13,18	47,83	1,905	6,025	1,537	3,311	7,133
3,64	13,25	48,23	1,908	6,033	1,538	3,314	7,140
3,65	13,32	48,63	1,910	6,042	1,540	3,317	7,147
3,66	13,40	49,03	1,913	6,050	1,541	3,320	7,153
3,67	13,47	49,43	1,916	6,058	1,542	3,323	7,160
3,68	13,54	49,84	1,918	6,066	1,544	3,326	7,166
3,69	13,62	50,24	1,921	6,075	1,545	3,329	7,173
3,70	13,69	50,65	1,924	6,083	1,547	3,332	7,179

Объяснения к таблице см. на стр. 17.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
3,70	13,69	50,65	1,924	6,083	1,547	3,332	7,179
3,71	13,76	51,06	1,926	6,091	1,548	3,335	7,186
3,72	13,84	51,48	1,929	6,099	1,549	3,338	7,192
3,73	13,91	51,90	1,931	6,107	1,551	3,341	7,198
3,74	13,99	52,31	1,934	6,116	1,552	3,344	7,205
3,75	14,06	52,73	1,936	6,124	1,554	3,347	7,211
3,76	14,14	53,16	1,939	6,132	1,555	3,350	7,218
3,77	14,21	53,58	1,942	6,140	1,556	3,353	7,224
3,78	14,29	54,01	1,944	6,148	1,558	3,356	7,230
3,79	14,36	54,44	1,947	6,156	1,559	3,359	7,237
3,80	14,44	54,87	1,949	6,164	1,560	3,362	7,243
3,81	14,52	55,31	1,952	6,173	1,562	3,365	7,250
3,82	14,59	55,74	1,954	6,181	1,563	3,368	7,256
3,83	14,67	56,18	1,957	6,189	1,565	3,371	7,262
3,84	14,75	56,62	1,960	6,197	1,566	3,374	7,268
3,85	14,82	57,07	1,962	6,205	1,567	3,377	7,275
3,86	14,90	57,51	1,965	6,213	1,569	3,380	7,281
3,87	14,98	57,96	1,967	6,221	1,570	3,382	7,287
3,88	15,05	58,41	1,970	6,229	1,571	3,385	7,294
3,89	15,13	58,86	1,972	6,237	1,573	3,388	7,300
3,90	15,21	59,32	1,975	6,245	1,574	3,391	7,306
3,91	15,29	59,78	1,977	6,253	1,575	3,394	7,312
3,92	15,37	60,24	1,980	6,261	1,577	3,397	7,319
3,93	15,44	60,70	1,982	6,269	1,578	3,400	7,325
3,94	15,52	61,16	1,985	6,277	1,579	3,403	7,331
3,95	15,60	61,63	1,987	6,285	1,581	3,406	7,337
3,96	15,68	62,10	1,990	6,293	1,582	3,409	7,343
3,97	15,76	62,57	1,992	6,301	1,583	3,411	7,350
3,98	15,84	63,04	1,995	6,309	1,585	3,414	7,356
3,99	15,92	63,52	1,997	6,317	1,586	3,417	7,362
4,00	16,00	64,00	2,000	6,325	1,587	3,420	7,368
4,01	16,08	64,48	2,002	6,332	1,589	3,423	7,374
4,02	16,16	64,96	2,005	6,340	1,590	3,426	7,380
4,03	16,24	65,45	2,007	6,348	1,591	3,428	7,386
4,04	16,32	65,94	2,010	6,356	1,593	3,431	7,393
4,05	16,40	66,43	2,012	6,364	1,594	3,434	7,399
4,06	16,48	66,92	2,015	6,372	1,595	3,437	7,405
4,07	16,56	67,42	2,017	6,380	1,597	3,440	7,411
4,08	16,65	67,92	2,020	6,387	1,598	3,443	7,417
4,09	16,73	68,42	2,022	6,395	1,599	3,445	7,423
4,10	16,81	68,92	2,025	6,403	1,601	3,448	7,429
4,11	16,89	69,43	2,027	6,411	1,602	3,451	7,435
4,12	16,97	69,93	2,030	6,419	1,603	3,454	7,441
4,13	17,06	70,44	2,032	6,427	1,604	3,457	7,447
4,14	17,14	70,96	2,035	6,434	1,606	3,459	7,453
4,15	17,22	71,47	2,037	6,442	1,607	3,462	7,459

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
4,15	17,22	71,47	2,037	6,442	1,607	3,462	7,459
4,16	17,31	71,99	2,040	6,450	1,608	3,465	7,465
4,17	17,39	72,51	2,042	6,458	1,610	3,468	7,471
4,18	17,47	73,03	2,045	6,465	1,611	3,471	7,477
4,19	17,56	73,56	2,047	6,473	1,612	3,473	7,483
4,20	17,64	74,09	2,049	6,481	1,613	3,476	7,489
4,21	17,72	74,62	2,052	6,488	1,615	3,479	7,495
4,22	17,81	75,15	2,054	6,496	1,616	3,482	7,501
4,23	17,89	75,69	2,057	6,504	1,617	3,484	7,507
4,24	17,98	76,23	2,059	6,512	1,619	3,487	7,513
4,25	18,06	76,77	2,062	6,519	1,620	3,490	7,518
4,26	18,15	77,31	2,064	6,527	1,621	3,493	7,524
4,27	18,23	77,85	2,066	6,535	1,622	3,495	7,530
4,28	18,32	78,40	2,069	6,542	1,624	3,498	7,536
4,29	18,40	78,95	2,071	6,550	1,625	3,501	7,542
4,30	18,49	79,51	2,074	6,557	1,626	3,503	7,548
4,31	18,58	80,06	2,076	6,565	1,627	3,506	7,554
4,32	18,66	80,62	2,078	6,573	1,629	3,509	7,560
4,33	18,75	81,18	2,081	6,580	1,630	3,512	7,565
4,34	18,84	81,75	2,083	6,588	1,631	3,514	7,571
4,35	18,92	82,31	2,086	6,595	1,632	3,517	7,577
4,36	19,01	82,88	2,088	6,603	1,634	3,520	7,583
4,37	19,10	83,45	2,090	6,611	1,635	3,522	7,589
4,38	19,18	84,03	2,093	6,618	1,636	3,525	7,594
4,39	19,27	84,60	2,095	6,626	1,637	3,528	7,600
4,40	19,36	85,18	2,098	6,633	1,639	3,530	7,606
4,41	19,45	85,77	2,100	6,641	1,640	3,533	7,612
4,42	19,54	86,35	2,102	6,648	1,641	3,536	7,617
4,43	19,62	86,94	2,105	6,656	1,642	3,538	7,623
4,44	19,71	87,53	2,107	6,663	1,644	3,541	7,629
4,45	19,80	88,12	2,110	6,671	1,645	3,544	7,635
4,46	19,89	88,72	2,112	6,678	1,646	3,546	7,640
4,47	19,98	89,31	2,114	6,686	1,647	3,549	7,646
4,48	20,07	89,92	2,117	6,693	1,649	3,552	7,652
4,49	20,16	90,52	2,119	6,701	1,650	3,554	7,657
4,50	20,25	91,12	2,121	6,708	1,651	3,557	7,663
4,51	20,34	91,73	2,124	6,716	1,652	3,560	7,669
4,52	20,43	92,35	2,126	6,723	1,653	3,562	7,674
4,53	20,52	92,96	2,128	6,731	1,655	3,565	7,680
4,54	20,61	93,58	2,131	6,738	1,656	3,567	7,686
4,55	20,70	94,20	2,133	6,745	1,657	3,570	7,691
4,56	20,79	94,82	2,135	6,753	1,658	3,573	7,697
4,57	20,88	95,44	2,138	6,760	1,659	3,575	7,703
4,58	20,98	96,07	2,140	6,768	1,661	3,578	7,708
4,59	21,07	96,70	2,142	6,775	1,662	3,580	7,714
4,60	21,16	97,34	2,145	6,782	1,663	3,583	7,719

Объяснения к таблице см. на стр. 17.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
4,60	21,16	97,34	2,145	6,782	1,663	3,583	7,719
4,61	21,25	97,97	2,147	6,790	1,664	3,586	7,725
4,62	21,34	98,61	2,149	6,797	1,666	3,588	7,731
4,63	21,44	99,25	2,152	6,804	1,667	3,591	7,736
4,64	21,53	99,90	2,154	6,812	1,668	3,593	7,742
4,65	21,62	100,5	2,156	6,819	1,669	3,596	7,747
4,66	21,72	101,2	2,159	6,826	1,670	3,599	7,753
4,67	21,81	101,8	2,161	6,834	1,671	3,601	7,758
4,68	21,90	102,5	2,163	6,841	1,673	3,604	7,764
4,69	22,00	103,2	2,166	6,848	1,674	3,606	7,769
4,70	22,09	103,8	2,168	6,856	1,675	3,609	7,775
4,71	22,18	104,5	2,170	6,863	1,676	3,611	7,780
4,72	22,28	105,2	2,173	6,870	1,677	3,614	7,786
4,73	22,37	105,8	2,175	6,877	1,679	3,616	7,791
4,74	22,47	106,5	2,177	6,885	1,680	3,619	7,797
4,75	22,56	107,2	2,179	6,892	1,681	3,622	7,802
4,76	22,66	107,9	2,182	6,899	1,682	3,624	7,808
4,77	22,75	108,5	2,184	6,907	1,683	3,627	7,813
4,78	22,85	109,2	2,186	6,914	1,685	3,629	7,819
4,79	22,94	109,9	2,189	6,921	1,686	4,632	7,824
4,80	23,04	110,6	2,191	6,928	1,687	3,634	7,830
4,81	23,14	111,3	2,193	6,935	1,688	3,637	7,835
4,82	23,23	112,0	2,195	6,943	1,689	3,639	7,841
4,83	23,33	112,7	2,198	6,950	1,690	3,642	7,846
4,84	23,43	113,4	2,200	6,957	1,692	3,644	7,851
4,85	23,52	114,1	2,202	6,964	1,693	3,647	7,857
4,86	23,62	114,8	2,205	6,971	1,694	3,649	7,862
4,87	23,72	115,5	2,207	6,979	1,695	3,652	7,868
4,88	23,81	116,2	2,209	6,986	1,696	3,654	7,873
4,89	23,91	116,9	2,211	6,993	1,697	3,657	7,878
4,90	24,01	117,6	2,214	7,000	1,698	3,659	7,884
4,91	24,11	118,4	2,216	7,007	1,700	3,662	7,889
4,92	24,21	119,1	2,218	7,014	1,701	3,664	7,894
4,93	24,30	119,8	2,220	7,021	1,702	3,667	7,900
4,94	24,40	120,6	2,223	7,029	1,703	3,669	7,905
4,95	24,50	121,3	2,225	7,036	1,704	3,672	7,910
4,96	24,60	122,0	2,227	7,043	1,705	3,674	7,916
4,97	24,70	122,8	2,229	7,050	1,707	3,677	7,921
4,98	24,80	123,5	2,232	7,057	1,708	3,679	7,926
4,99	24,90	124,3	2,234	7,064	1,709	3,682	7,932
5,00	25,00	125,0	2,236	7,071	1,710	3,684	7,937
5,01	25,10	125,8	2,238	7,078	1,711	3,686	7,942
5,02	25,20	126,5	2,241	7,085	1,712	3,689	7,948
5,03	25,30	127,3	2,243	7,092	1,713	3,691	7,953
5,04	25,40	128,0	2,245	7,099	1,715	3,694	7,958
5,05	25,50	128,8	2,247	7,106	1,716	3,696	7,963

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
5,05	25,50	128,8	2,247	7,106	1,716	3,696	7,963
5,06	25,60	129,6	2,249	7,113	1,717	3,699	7,969
5,07	25,70	130,3	2,252	7,120	1,718	3,701	7,974
5,08	25,81	131,1	2,254	7,127	1,719	3,704	7,979
5,09	25,91	131,9	2,256	7,134	1,720	3,706	7,984
5,10	26,01	132,7	2,258	7,141	1,721	3,708	7,990
5,11	26,11	133,4	2,261	7,148	1,722	3,711	7,995
5,12	26,21	134,2	2,263	7,155	1,724	3,713	8,000
5,13	26,32	135,0	2,265	7,162	1,725	3,716	8,005
5,14	26,42	135,8	2,267	7,169	1,726	3,718	8,010
5,15	26,52	136,6	2,269	7,176	1,727	3,721	8,016
5,16	26,63	137,4	2,272	7,183	1,728	3,723	8,021
5,17	26,73	138,2	2,274	7,190	1,729	0,725	8,026
5,18	26,83	139,0	2,276	7,197	2,730	3,728	8,031
5,19	26,94	139,8	2,278	7,204	1,731	3,730	8,036
5,20	27,04	140,6	2,280	7,211	1,732	3,733	8,041
5,21	27,14	141,4	2,283	7,218	1,734	3,735	8,047
5,22	27,25	142,2	2,285	7,225	1,735	3,737	8,052
5,23	27,35	143,1	2,287	7,232	1,736	3,740	8,057
5,24	27,46	143,9	2,289	7,239	1,737	3,742	8,062
5,25	27,56	144,7	2,291	7,246	1,738	3,744	8,067
5,26	27,67	145,5	2,293	7,253	1,739	3,747	8,072
5,27	27,77	146,4	2,296	7,259	1,740	3,749	8,077
5,28	27,88	147,2	2,298	7,266	1,741	3,752	8,082
5,29	27,98	148,0	2,300	7,273	1,742	3,754	8,088
5,30	28,09	148,9	2,302	7,280	1,744	3,756	8,093
5,31	28,20	149,7	2,304	7,287	1,745	3,759	8,098
5,32	28,30	150,6	2,307	7,294	1,746	3,761	8,103
5,33	28,41	151,4	2,309	7,301	1,747	3,763	8,108
5,34	28,52	152,3	2,311	7,308	1,748	3,766	8,113
5,35	28,62	153,1	2,313	7,314	1,749	3,768	8,118
5,36	28,73	154,0	2,315	7,321	1,750	3,770	8,123
5,37	28,84	154,9	2,317	7,328	1,751	3,773	8,128
5,38	28,94	155,7	2,319	7,335	1,752	3,775	8,133
5,39	29,05	156,6	2,322	7,342	1,753	3,777	8,138
5,40	29,16	157,5	2,324	7,348	1,754	3,780	8,143
5,41	29,27	158,3	2,326	7,355	1,755	3,782	8,148
5,42	29,38	159,2	2,328	7,362	1,757	3,784	8,153
5,43	29,48	160,1	2,330	7,369	1,758	3,787	8,158
5,44	29,59	161,0	2,332	7,376	1,759	3,789	8,163
5,45	29,70	161,9	2,335	7,382	1,760	3,791	8,168
5,46	29,81	162,8	2,337	7,389	1,761	3,794	8,173
5,47	29,92	163,7	2,339	7,396	1,762	3,796	8,178
5,48	30,03	164,6	2,341	7,403	1,763	3,798	8,183
5,49	30,14	165,5	2,343	7,409	1,764	3,801	8,188
5,50	30,25	166,4	2,345	7,416	1,765	3,803	8,193

Объяснения к таблице см. на стр. 17.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
5,50	30,25	166,4	2,345	7,416	1,765	3,803	8,193
5,51	30,36	167,3	2,347	7,423	1,766	3,805	8,198
5,52	30,47	168,2	2,349	7,430	1,767	3,808	8,203
5,53	30,58	169,1	2,352	7,436	1,768	3,810	8,208
5,54	30,69	170,0	2,354	7,443	1,769	3,812	8,213
5,55	30,80	171,0	2,356	7,450	1,771	3,814	8,218
5,56	30,91	171,9	2,358	7,457	1,772	3,817	8,223
5,57	31,02	172,8	2,360	7,463	1,773	3,819	8,228
5,58	31,14	173,7	2,362	7,470	1,774	3,821	8,233
5,59	31,25	174,7	2,364	7,477	1,775	3,824	8,238
5,60	31,36	175,6	2,366	7,483	1,776	3,826	8,243
5,61	31,47	176,6	2,369	7,490	1,777	3,828	8,247
5,62	31,58	177,5	2,371	7,497	1,778	3,830	8,252
5,63	31,70	178,5	2,373	7,503	1,779	3,833	8,257
5,64	31,81	179,4	2,375	7,510	1,780	3,835	8,262
5,65	31,92	180,4	2,377	7,517	1,781	3,837	8,267
5,66	32,04	181,3	2,379	7,523	1,782	3,839	8,272
5,67	32,15	182,3	2,381	7,530	1,783	3,842	8,277
5,68	32,26	183,3	2,383	7,537	1,784	3,844	8,282
5,69	32,38	184,2	2,385	7,543	1,785	3,846	8,286
5,70	32,49	185,2	2,387	7,550	1,786	3,849	8,291
5,71	32,60	186,2	2,390	7,556	1,787	3,851	8,296
5,72	32,72	187,1	2,392	7,563	1,788	3,853	8,301
5,73	32,83	188,1	2,394	7,570	1,789	3,855	8,306
5,74	32,95	189,1	2,396	7,576	1,790	3,857	8,311
5,75	33,06	190,1	2,398	7,583	1,792	3,860	8,316
5,76	33,18	191,1	2,400	7,589	1,793	3,862	8,320
5,77	33,29	192,1	2,402	7,596	1,794	3,864	8,325
5,78	33,41	193,1	2,404	7,603	1,795	3,866	8,330
5,79	33,52	194,1	2,406	7,609	1,796	3,869	8,335
5,80	33,64	195,1	2,408	7,616	1,797	3,871	8,340
5,81	33,76	196,1	2,410	7,622	1,798	3,873	8,344
5,82	33,87	197,1	2,412	7,629	1,799	3,875	8,349
5,83	33,99	198,2	2,415	7,635	1,800	3,878	8,354
5,84	34,11	199,2	2,417	7,642	1,801	3,880	8,359
5,85	34,22	200,2	2,419	7,649	1,802	3,882	8,363
5,86	34,34	201,2	2,421	7,655	1,803	3,884	8,368
5,87	34,46	202,3	2,423	7,662	1,804	3,886	8,373
5,88	34,57	203,3	2,425	7,668	1,805	3,889	8,378
5,89	34,69	204,3	2,427	7,675	1,806	3,891	8,382
5,90	34,81	205,4	2,429	7,681	1,807	3,893	8,387
5,91	34,93	206,4	2,431	7,688	1,808	3,895	8,392
5,92	35,05	207,5	2,433	7,694	1,809	3,897	8,397
5,93	35,16	208,5	2,435	7,701	1,810	3,900	8,401
5,94	35,28	209,6	2,437	7,707	1,811	3,902	8,406
5,95	35,40	210,6	2,439	7,714	1,812	3,904	8,411

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
5,95	35,40	210,6	2,439	7,714	1,812	3,904	8,411
5,96	35,52	211,7	2,441	7,720	1,813	3,906	8,416
5,97	35,64	212,8	2,443	7,727	1,814	3,908	8,420
5,98	35,76	213,8	2,445	7,733	1,815	3,911	8,425
5,99	35,88	214,9	2,447	7,740	1,816	3,913	8,430
6,00	36,00	216,0	2,449	7,746	1,817	3,915	8,434
6,01	36,12	217,1	2,452	7,752	1,818	3,917	8,439
6,02	36,24	218,2	2,454	7,759	1,819	3,919	8,444
6,03	36,36	219,3	2,456	7,765	1,820	3,921	8,448
6,04	36,48	220,3	2,458	7,772	1,821	3,924	8,453
6,05	36,60	221,4	2,460	7,778	1,822	3,926	8,458
6,06	36,72	222,5	2,462	7,785	1,823	3,928	8,462
6,07	36,84	223,6	2,464	7,791	1,824	3,930	8,467
6,08	36,97	224,8	2,466	7,797	1,825	3,932	8,472
6,09	37,09	225,9	2,468	7,804	1,826	3,934	8,476
6,10	37,21	227,0	2,470	7,810	1,827	3,936	8,481
6,11	37,33	228,1	2,472	7,817	1,828	3,939	8,486
6,12	37,45	229,2	2,474	7,823	1,829	3,941	8,490
6,13	37,58	230,3	2,476	7,829	1,830	3,943	8,495
6,14	37,70	231,5	2,478	7,836	1,831	3,945	8,499
6,15	37,82	232,6	2,480	7,842	1,832	3,947	8,504
6,16	37,95	233,7	2,482	7,849	1,833	3,949	8,509
6,17	38,07	234,9	2,484	7,855	1,834	3,951	8,513
6,18	38,19	236,0	2,486	7,861	1,835	3,954	8,518
6,19	38,32	237,2	2,488	7,868	1,836	3,956	8,522
6,20	38,44	238,3	2,490	7,874	1,837	3,958	8,527
6,21	38,56	239,5	2,492	7,880	1,838	3,960	8,532
6,22	38,69	240,6	2,494	7,887	1,839	3,962	8,536
6,23	38,81	241,8	2,496	7,893	1,840	3,964	8,541
6,24	38,94	243,0	2,498	7,899	1,841	3,966	8,545
6,25	39,06	244,1	2,500	7,906	1,842	3,969	8,550
6,26	39,19	245,3	2,502	7,912	1,843	3,971	8,554
6,27	39,31	246,5	2,504	7,918	1,844	3,973	8,559
6,28	39,44	247,7	2,506	7,925	1,845	3,975	8,564
6,29	39,56	248,9	2,508	7,931	1,846	3,977	8,568
6,30	39,69	250,0	2,510	7,937	1,847	3,979	8,573
6,31	39,82	251,2	2,512	7,944	1,848	3,981	8,577
6,32	39,94	252,4	2,514	7,950	1,849	3,983	8,582
6,33	40,07	253,6	2,516	7,956	1,850	3,985	8,586
6,34	40,20	254,8	2,518	7,962	1,851	3,987	8,591
6,35	40,32	256,0	2,520	7,969	1,852	3,990	8,595
6,36	40,45	257,3	2,522	7,975	1,853	3,992	8,600
6,37	40,58	258,5	2,524	7,981	1,854	3,994	8,604
6,38	40,70	259,7	2,526	7,987	1,855	3,996	8,609
6,39	40,83	260,9	2,528	7,994	1,856	3,998	8,613
6,40	40,96	262,1	2,530	8,000	1,857	4,000	8,618

Объяснения к таблице см. на стр. 17.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
6,40	40,96	262,1	2,530	8,000	1,857	4,000	8,618
6,41	41,09	263,4	2,532	8,006	1,858	4,002	8,622
6,42	41,22	264,6	2,534	8,012	1,859	4,004	8,627
6,43	41,34	265,8	2,536	8,019	1,860	4,006	8,631
6,44	41,47	267,1	2,538	8,025	1,860	4,008	8,636
6,45	41,60	268,3	2,540	8,031	1,861	4,010	8,640
6,46	41,73	269,6	2,542	8,037	1,862	4,012	8,645
6,47	41,86	270,8	2,544	8,044	1,863	4,015	8,649
6,48	41,99	272,1	2,546	8,050	1,864	4,017	8,653
6,49	42,12	273,4	2,548	8,056	1,865	4,019	8,658
6,50	42,25	274,6	2,550	8,062	1,866	4,021	8,662
6,51	42,38	275,9	2,551	8,068	1,867	4,023	8,667
6,52	42,51	277,2	2,553	8,075	1,868	4,025	8,671
6,53	42,64	278,4	2,555	8,081	1,869	4,027	8,676
6,54	42,77	279,7	2,557	8,087	1,870	4,029	8,680
6,55	42,90	281,0	2,559	8,093	1,871	4,031	8,685
6,56	43,03	282,3	2,561	8,099	1,872	4,033	8,689
6,57	43,16	283,6	2,563	8,106	1,873	4,035	8,693
6,58	43,30	284,9	2,565	8,112	1,874	4,037	8,698
6,59	43,43	286,2	2,567	8,118	1,875	4,039	8,702
6,60	43,56	287,5	2,569	8,124	1,876	4,041	8,707
6,61	43,69	288,8	2,571	8,130	1,877	4,043	8,711
6,62	43,82	290,1	2,573	8,136	1,878	4,045	8,715
6,63	43,96	291,4	2,575	8,142	1,879	4,047	8,720
6,64	44,09	292,8	2,577	8,149	1,880	4,049	8,724
6,65	44,22	294,1	2,579	8,155	1,881	4,051	7,729
6,66	44,36	295,4	2,581	8,161	1,881	4,053	8,733
6,67	44,49	296,7	2,583	8,167	1,882	4,055	8,737
6,68	44,62	298,1	2,585	8,173	1,883	4,058	8,742
6,69	44,76	299,4	2,587	8,179	1,884	4,060	8,746
6,70	44,89	300,8	2,588	8,185	1,885	4,062	8,750
6,71	45,02	302,1	2,590	8,191	1,886	4,064	8,755
6,72	45,16	303,5	2,592	8,198	1,887	4,066	8,759
6,73	45,29	304,8	2,594	8,204	1,888	4,068	8,763
6,74	45,43	306,2	2,596	8,210	1,889	4,070	8,768
6,75	45,56	307,5	2,598	8,216	1,890	4,072	8,772
6,76	45,70	308,9	2,600	8,222	1,891	4,074	8,776
6,77	45,83	310,3	2,602	8,228	1,892	4,076	8,781
6,78	45,97	311,7	2,604	8,234	1,893	4,078	8,785
6,79	46,10	313,0	2,606	8,240	1,894	4,080	8,789
6,80	46,24	314,4	2,608	8,246	1,895	4,082	8,794
6,81	46,38	315,8	2,610	8,252	1,895	4,084	8,798
6,82	46,51	317,2	2,612	8,258	1,896	4,086	8,802
6,83	46,65	318,6	2,613	8,264	1,897	4,088	8,807
6,84	46,79	320,0	2,615	8,270	1,898	4,090	8,811
6,85	46,92	321,4	2,617	8,276	1,899	4,092	8,815

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
6,85	46,92	321,4	2,617	8,276	1,899	4,092	8,815
6,86	47,06	322,8	2,619	8,283	1,900	4,094	8,819
6,87	47,20	324,2	2,621	8,289	1,901	4,096	8,824
6,88	47,33	325,7	2,623	8,295	1,902	4,098	8,828
6,89	47,47	327,1	2,625	8,301	1,903	4,100	8,832
6,90	47,61	328,5	2,627	8,307	1,904	4,102	8,837
6,91	47,75	329,9	2·629	8,313	1,905	4,104	8,841
6,92	47,89	331,4	2,631	8,319	1,906	4,106	8,845
6,93	48,02	332,8	2,632	8,325	1,907	4,108	8,849
6,94	48,16	334,3	2,634	8,331	1,907	4,109	8,854
6,95	48,30	335,7	2,636	8,337	1,908	4,111	8,858
6,96	48,44	337,2	2,638	8,343	1,909	4,113	8,862
6,97	48,58	338,6	2,640	8,349	1,910	4,115	8,866
6,98	48,72	340,1	2,642	8,355	1,911	4,117	8,871
6,99	48,86	341,5	2,644	8,361	1,912	4,119	8,875
7,00	49,00	343,0	2,646	8,367	1,913	4,121	8,879
7,01	49,14	344,5	2,648	8,373	1,914	4,123	8,883
7,02	49,28	345,9	2,650	8,379	1,915	4,125	8,887
7,03	49,42	347,4	2,651	8,385	1,916	4,127	8,892
7,04	49,56	348,9	2,653	8,390	1,917	4,129	8,896
7,05	49,70	350,4	2,655	8,396	1,917	4,131	8,900
7,06	49,84	351,9	2,657	8,402	1,918	4,133	8,904
7,07	49,98	353,4	2,659	8,408	1,919	4,135	8,909
7,08	50,13	354,9	2,661	8,414	1,920	4,137	8,913
7,09	50,27	356,4	2,663	8,420	1,921	4,139	8,917
7,10	50,41	357,9	2,665	8,426	1,922	4,141	8,921
7,11	50,55	359,4	2,666	8,432	1,923	4,143	8,925
7,12	50,69	360,9	2,668	8,438	1,924	4,145	8,929
7,13	50,84	362,5	2,670	8,444	1,925	4,147	8,934
7,14	50,98	364,0	2,672	8,450	1,926	4,149	8,938
7,15	51,12	365,5	2,674	8,456	1,926	4,151	8,942
7,16	51,27	367,1	2,676	8,362	1,927	4,152	8,946
7,17	51,41	368,6	2,678	8,468	1,928	4,154	8,950
7,18	51,55	370,1	2,680	8,473	1,929	4,156	8,955
7,19	51,70	371,7	2,681	8,479	1,930	4,158	8,959
7,20	51,84	373,2	2,683	8,485	1,931	4,160	8,963
7,21	51,98	374,8	2,685	8,491	1,932	4,162	8,967
7,22	52,13	376,4	2,687	8,497	1,933	4,164	8,971
7,23	52,27	377,9	2,689	8,503	1,934	4,166	8,975
7,24	52,42	379,5	2,691	8,509	1,935	4,168	8,979
7,25	52,56	381,1	2,693	8,515	1,935	4,170	8,984
7,26	52,71	382,7	2,694	8,521	1,936	4,172	8,988
7,27	52,85	384,2	2,696	8,526	1,937	4,174	8,992
7,28	53,00	385,8	2,698	8,532	1,938	4,176	8,996
7,29	53,14	387,4	2,700	8,538	1,939	4,177	9,000
7,30	53,29	389,0	2,702	8,544	1,940	4,179	9,004

Объяснения к таблице см. на стр. 17.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
7,30	53,29	389,0	2.702	8,544	1,940	4,179	9,004
7,31	53.44	390,6	2.704	8,550	1,941	4,181	9,008
7,32	53,58	392.2	2.706	8,556	1,942	4,183	9,012
7,33	53.73	393,8	2.707	8,562	1,943	4,185	9,016
7,34	53,88	395,4	2.709	8,567	1,943	4,187	9,021
7,35	54,02	397,1	2.711	8,573	1,944	4,189	9,025
7,36	54,17	398,7	2.713	8,579	1,945	4,191	9,029
7,37	54,32	400,3	2.715	8,585	1,946	4,193	9,033
7,38	54,46	401,9	2.717	8,591	1,947	4,195	9,037
7,39	54,61	403,6	2.718	8,597	1,948	4,196	9,041
7,40	54,76	405,2	2.720	8,602	1,949	4,198	9,045
7,41	54,91	406,9	2.722	8,608	1,950	4,200	9,049
7,42	55,06	408,5	2.724	8,614	1,950	4,202	9,053
7,43	55,20	410,2	2.726	8,620	1,951	4,204	9,057
7,44	55,35	411,8	2.728	8,626	1,952	4,206	9,061
7,45	55,50	413,5	2.729	8,631	1,953	4,208	9,065
7,46	55,65	415,2	2.731	8,637	1,954	4,210	9,069
7,47	55,80	416,8	2.733	8,643	1,955	4,212	9,073
7,48	55,95	418,5	2.735	8,649	1,956	4,213	9,078
7,49	56,10	420,2	2.737	8,654	1,957	4,215	9,082
7,50	56,25	421,9	2.739	8,660	1,957	4,217	9,086
7,51	56,40	423,6	2.740	8,666	1,958	4,219	9,090
7,52	56,55	425,3	2.742	8,672	1,959	4,221	9,094
7,53	56,70	427,0	2.744	8,678	1,960	4,223	9,098
7,54	56,85	428,7	2.746	8,683	1,961	4,225	9,102
7,55	57,00	430,4	2.748	8,689	1,962	4,227	9,106
7,56	57,15	432,1	2.750	8,695	1,963	4,228	9,110
7,57	57,30	433,8	2.751	8,701	1,964	4,230	9,114
7,58	57,46	435,5	2.753	8,706	1,964	4,232	9,118
7,59	57,61	437,2	2.755	8,712	1,965	4,234	9,122
7,60	57,76	439,0	2.757	8,718	1,966	4,236	9,126
7,61	57,91	440,7	2.759	8,724	1,967	4,238	9,130
7,62	58,06	442,5	2.760	8,729	1,968	4,240	9,134
7,63	58,22	444,2	2.762	8,735	1,969	4,241	9,138
7,64	58,37	445,9	2.764	8,741	1,970	4,243	9,142
7,65	58,52	447,7	2.766	8,746	1,970	4,245	9,146
7,66	58,68	449,5	2.768	8,752	1,971	4,247	9,150
7,67	58,83	451,2	2.769	8,758	1,972	4,249	9,154
7,68	58,98	453,0	2.771	8,764	1,973	4,251	9,158
7,69	59,14	454,8	2.773	8,769	1,974	4,252	9,162
7,70	59,29	456,5	2.775	8,775	1,975	4,254	9,166
7,71	59,44	458,3	2.777	8,781	1,976	4,256	9,170
7,72	59,60	460,1	2.778	8,786	1,976	4,258	9,174
7,73	59,75	461,9	2.780	8,792	1,977	4,260	9,178
7,74	59,91	463,7	2.782	8,798	1,978	4,262	9,182
7,75	60,06	465,5	2.784	8,803	1,979	4,264	9,185

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
7,75	60,06	465,5	2,784	8,803	1,979	4,264	9,185
7,76	60,22	467,3	2,786	8,809	1,980	4,265	9,189
7,77	60,37	469,1	2,787	8,815	1,981	4,267	9,193
7,78	60,53	470,9	2,789	8,820	1,981	4,269	9,197
7,79	60,68	472,7	2,791	8,826	1,982	4,271	9,201
7,80	60,84	474,6	2,793	8,832	1,983	4,273	9,205
7,81	61,00	476,4	2,795	8,837	1,984	4,274	9,209
7,82	61,15	478,2	2,796	8,843	1,985	4,276	9,213
7,83	61,31	480,0	2,798	8,849	1,986	4,278	9,217
7,84	61,47	481,9	2,800	8,854	1,987	4,280	9,221
7,85	61,62	483,7	2,802	8,860	1,987	4,282	9,225
7,86	61,78	485,6	2,804	8,866	1,988	4,284	9,229
7,87	61,94	487,4	2,805	8,871	1,989	4,285	9,233
7,88	62,09	489,3	2,807	8,877	1,990	4,287	9,237
7,89	62,25	491,2	2,809	8,883	1,991	4,289	9,240
7,90	62,41	493,0	2,811	8,888	1,992	4,291	9,244
7,91	62,57	494,9	2,812	8,894	1,992	4,293	9,248
7,92	62,73	496,8	2,814	8,899	1,993	4,294	9,252
7,93	62,88	498,7	2,816	8,905	1,994	4,296	9,256
7,94	63,04	500,6	2,818	8,911	1,995	4,298	9,260
7,95	63,20	502,5	2,820	8,916	1,996	4,300	9,264
7,96	63,36	504,4	2,821	8,922	1,997	4,302	9,268
7,97	63,52	506,3	2,823	8,927	1,997	4,303	9,272
7,98	63,68	508,2	2,825	8,933	1,998	4,305	9,275
7,99	63,84	510,1	2,827	8,939	1,999	4,307	9,279
8,00	64,00	512,0	2,828	8,944	2,000	4,309	9,283
8,01	64,16	513,9	2,830	8,950	2,001	4,311	9,287
8,02	64,32	515,8	2,832	8,955	2,002	4,312	9,291
8,03	64,48	517,8	2,834	8,961	2,002	4,314	9,295
8,04	64,64	519,7	2,835	8,967	2,003	4,316	9,299
8,05	64,80	521,7	2,837	8,972	2,004	4,318	9,302
8,06	64,96	523,6	2,839	8,978	2,005	4,320	9,306
8,07	65,12	525,6	2,841	8,983	2,006	4,321	9,310
8,08	65,29	527,5	2,843	8,989	2,007	4,323	9,314
8,09	65,45	529,5	2,844	8,994	2,007	4,325	9,318
8,10	65,61	531,4	2,846	9,000	2,008	4,327	9,322
8,11	65,77	533,4	2,848	9,006	2,009	4,329	9,326
8,12	65,93	535,4	2,850	9,011	2,010	4,330	9,329
8,13	66,10	537,4	2,851	9,017	2,011	4,332	9,333
8,14	66,26	539,4	2,853	9,022	2,012	4,334	9,337
8,15	66,42	541,3	2,855	9,028	2,012	4,336	9,341
8,16	66,59	543,3	2,857	9,033	2,013	4,337	9,345
8,17	66,75	545,3	2,858	9,039	2,014	4,339	9,348
8,18	66,91	547,3	2,860	9,044	2,015	4,341	9,352
8,19	67,08	549,4	2,862	9,050	2,016	4,343	9,356
8,20	67,24	551,4	2,864	9,055	2,017	4,344	9,360

Объяснения к таблице см. на стр. 17.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
8,20	67,24	551,4	2,864	9,055	2,017	4,344	**9,360**
8,21	67,40	553,4	2,865	9,061	2,017	4,346	9,364
8,22	67,57	555,4	2,867	9,066	2,018	4,348	9,368
8,23	67,73	557,4	2,869	9,072	2,019	4,350	9,371
8,24	67,90	559,5	2,871	9,077	2,020	4,352	9,375
8,25	68,06	561,5	2,872	9,083	2,021	4,353	9,379
8,26	68,23	563,6	2,874	9,088	2,021	4,355	9,383
8,27	68,39	565,6	2,876	9,094	2,022	4,357	9,386
8,28	68,56	567,7	2,877	9,099	2,023	4,359	9,390
8,29	68,72	569,7	2,879	9,105	2,024	4,360	9,394
8,30	68,89	571,8	2,881	9,110	2,025	4,362	9,398
8,31	69,06	573,9	2,883	9,116	2,026	4,364	9,402
8,32	69,22	575,9	2,884	9,121	2,026	4,366	9,405
8,33	69,39	578,0	2,886	9,127	2,027	4,367	9,409
8,34	69,56	580,1	2,888	9,132	2,028	4,369	9,413
8,35	69,72	582,2	2,890	9,138	2,029	4,371	9,417
8,36	69,89	584,3	2,891	9,143	2,030	4,373	9,420
8,37	70,06	586,4	2,893	9,149	2,030	4,374	9,424
8,38	70,22	588,5	2,895	9,154	2,031	4,376	9,428
8,39	70,39	590,6	2,897	9,160	2,032	4,378	9,432
8,40	70,56	592,7	2,898	9,165	2,033	4,380	9,435
8,41	70,73	594,8	2,900	9,171	2,034	4,381	9,439
8,42	70,90	596,9	2,902	9,176	2,034	4,383	9,443
8,43	71,06	599,1	2,903	9,182	2,035	4,385	9,447
8,44	71,23	601,2	2,905	9,187	2,036	4,386	9,450
8,45	71,40	603,4	2,907	9,192	2,037	4,388	9,454
8,46	71,57	605,5	2,909	9,198	2,038	4,390	9,458
8,47	71,74	607,6	2,910	9,203	2,038	4,392	9,462
8,48	71,91	609,8	2,912	9,209	2,039	4,393	9,465
8,49	72,08	612,0	2,914	9,214	2,040	4,395	9,469
8,50	72,25	614,1	2,915	9,220	2,041	4,397	9,473
8,51	72,42	616,3	2,917	9,225	2,042	4,399	9,476
8,52	72,59	618,5	2,919	9,230	2,042	4,400	9,480
8,53	72,76	620,7	2,921	9,236	2,043	4,402	9,484
8,54	72,93	622,8	2,922	9,241	2,044	4,404	9,488
8,55	73,10	625,0	2,924	9,247	2,045	4,405	9,491
8,56	73,27	627,2	2,926	9,252	2,046	4,407	9,495
8,57	73,44	629,4	2,927	9,257	2,046	4,409	9,499
8,58	73,62	631,6	2,929	9,263	2,047	4,411	9,502
8,59	73,79	633,8	2,931	9,268	2,048	4,412	9,506
8,60	73,96	636,1	2,933	9,274	2,049	4,414	9,510
8,61	74,13	638,3	2,934	9,279	2,050	4,416	9,513
8,62	74,30	640,5	2,936	9,284	2,050	4,417	9,517
8,63	74,48	642,7	2,938	9,290	2,051	4,419	9,521
8,64	74,65	645,0	2,939	9,295	2,052	4,421	9,524
8,65	74,82	647,2	2,941	9,301	2,053	4,423	9,528

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
8,65	74,82	647,2	2,941	9,301	2,053	4,423	9,528
8,66	75,00	649,5	2,943	9,306	2,054	4,424	9,532
8,67	75,17	651,7	2,944	9,311	2,054	4,426	9,535
8,68	75,34	654,0	2,946	9,317	2,055	4,428	9,539
8,69	75,52	656,2	2,948	9,322	2,056	4,429	9,543
8,70	75,69	658,5	2,950	9,327	2,057	4,431	9,546
8,71	75,86	660,8	2,951	9,333	2,057	4,433	9,550
8,72	76,04	663,1	2,953	9,338	2,058	4,434	9,554
8,73	76,21	665,3	2,955	9,343	2,059	4,436	9,557
8,74	76,39	667,6	2,956	9,349	2,060	4,438	9,561
8,75	76,56	669,9	2,958	9,354	2,061	4,440	9,565
8,76	76,74	672,2	2,960	9,359	2,061	4,441	9,568
8,77	76,91	674,5	2,961	9,365	2,062	4,443	9,572
8,78	77,09	676,8	2,963	9,370	2,063	4,445	9,576
8,79	77,26	679,2	2,965	9,375	2,064	4,446	9,579
8,80	77,44	681,5	2,966	9,381	2,065	4,448	9,583
8,81	77,62	683,8	2,968	9,386	2,065	4,450	9,586
8,82	77,79	686,1	2,970	9,391	2,066	4,451	9,590
8,83	77,97	688,5	2,972	9,397	2,067	4,453	9,594
8,84	78,15	690,8	2,973	9,402	2,068	4,455	9,597
8,85	78,32	693,2	2,975	9,407	2,068	4,456	9,601
8,86	78,50	695,5	2,977	9,413	2,069	4,458	9,605
8,87	78,68	697,9	2,978	9,418	2,070	4,460	9,608
8,88	78,85	700,2	2,980	9,423	2,071	4,461	9,612
8,89	79,03	702,6	2,982	9,429	2,072	4,463	9,615
8,90	79,21	705,0	2,983	9,434	2,072	4,465	9,619
8,91	79,39	707,3	2,985	9,439	2,073	4,466	9,623
8,92	79,57	709,7	2,987	9,445	2,074	4,468	9,626
8,93	79,74	712,1	2,988	9,450	2,075	4,470	9,630
8,94	79,92	714,5	2,990	9,455	2,075	4,471	9,633
8,95	80,10	716,9	2,992	9,460	2,076	4,473	9,637
8,96	80,28	719,3	2,993	9,466	2,077	4,475	9,641
8,97	80,46	721,7	2,995	9,471	2,078	4,476	9,644
8,98	80,64	724,2	2,997	9,476	2,079	4,478	9,648
8,99	80,82	726,6	2,998	9,482	2,079	4,480	9,651
9,00	81,00	729,0	3,000	9,487	2,080	4,481	9,655
9,01	81,18	731,4	3,002	9,492	2,081	4,483	9,658
9,02	81,36	733,9	3,003	9,497	2,082	4,485	9,662
9,03	81,54	736,3	3,005	9,503	2,082	4,486	9,666
9,04	81,72	738,8	3,007	9,508	2,083	4,488	9,669
9,05	81,90	741,2	3,008	9,513	2,084	4,490	9,673
9,06	82,08	743,7	3,010	9,518	2,085	4,491	9,676
9,07	82,26	746,1	3,012	9,524	2,085	4,493	9,680
9,08	82,45	748,6	3,013	9,529	2,086	4,495	9,683
9,09	82,63	751,1	3,015	9,534	2,087	4,496	9,687
9,10	82,81	753,6	3,017	9,539	2,088	4,498	9,691

Объяснения к таблице см. на стр. 17.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
9,10	82,81	753,6	3,017	9,539	2,088	4,498	9,691
9,11	82,99	756,1	3,018	9,545	2,089	4,500	9,694
9,12	83,17	758,6	3,020	9,550	2,089	4,501	9,698
9,13	83,36	761,0	3,022	9,555	2,090	4,503	9,701
9,14	83,54	763,6	3,023	9,560	2,091	4,505	9,705
9,15	83,72	766,1	3,025	9,566	2,092	4,506	9,708
9,16	83,91	768,6	3,027	9,571	2,092	4,508	9,712
9,17	84,09	771,1	3,028	9,576	2,093	4,509	9,715
9,18	84,27	773,6	3,030	9,581	2,094	4,511	9,719
9,19	84,46	776,2	3,032	9,586	2,095	4,513	9,722
9,20	84,64	778,7	3,033	9,592	2,095	4,514	9,726
9,21	84,82	781,2	3,035	9,597	2,096	4,516	9,729
9,22	85,01	783,8	3,036	9,602	2,097	4,518	9,733
9,23	85,19	786,3	3,038	9,607	2,098	4,519	9,736
9,24	85,38	788,9	3,040	9,612	2,098	4,521	9,740
9,25	85,56	791,5	3,041	9,618	2,099	4,523	9,743
9,26	85,75	794,0	3,043	9,623	2,100	4,524	9,747
9,27	85,93	796,6	3,045	9,628	2,101	4,526	9,750
9,28	86,12	799,2	3,046	9,633	2,101	4,527	9,754
9,29	86,30	801,8	3,048	9,638	2,102	4,529	9,758
9,30	86,49	804,4	3,050	9,644	2,103	4,531	9,761
9,31	86,68	807,0	3,051	9,649	2,104	4,532	9,764
9,32	86,86	809,6	3,053	9,654	2,104	4,534	9,768
9,33	87,05	812,2	3,055	9,659	2,105	4,536	9,771
9,34	87,24	814,8	3,056	9,664	2,106	4,537	9,775
9,35	87,42	817,4	3,058	9,670	2,107	4,539	9,778
9,36	87,61	820,0	3,059	9,675	2,107	4,540	9,782
9,37	87,80	822,7	3,061	9,680	2,108	4,542	9,785
9,38	87,98	825,3	3,063	9,685	2,109	4,544	9,789
9,39	88,17	827,9	3,064	9,690	2,110	4,545	9,792
9,40	88,36	830,6	3,066	9,695	2,110	4,547	9,796
9,41	88,55	833,2	3,068	9,701	2,111	4,548	9,799
9,42	88,74	835,9	3,069	9,706	2,112	4,550	9,803
9,43	88,92	838,6	3,071	9,711	2,113	4,552	9,806
9,44	89,11	841,2	3,072	9,716	2,113	4,553	9,810
9,45	89,30	843,9	3,074	9,721	2,114	4,555	9,813
9,46	89,49	846,6	3,076	9,726	2,115	4,556	9,817
9,47	89,68	849,3	3,077	9,731	2,116	4,558	9,820
9,48	89,87	852,0	3,079	9,737	2,116	4,560	9,824
9,49	90,06	854,7	3,081	9,742	2,117	4,561	9,827
9,50	90,25	857,4	3,082	9,747	2,118	4,563	9,830
9,51	90,44	860,1	3,084	9,752	2,119	4,565	9,834
9,52	90,63	862,8	3,085	9,757	2,119	4,566	9,837
9,53	90,82	865,5	3,087	9,762	2,120	4,568	9,841
9,54	91,01	868,3	3,089	9,767	2,121	4,569	9,844
9,55	91,20	871,0	3,090	9,772	2,122	4,571	9,848

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
9,55	91,20	871,0	3,090	9,772	2,122	4,571	9,848
9,56	91,39	873,7	3,092	9,778	2,122	4,572	9,851
9,57	91,58	876,5	3,094	9,783	2,123	4,574	9,855
9,58	91,78	879,2	3,095	9,788	2,124	4,576	9,858
9,59	91,97	882,0	3,097	9,793	2,125	4,577	9,861
9,60	92,16	884,7	3,098	9,798	2,125	4,579	9,865
9,61	92,35	887,5	3,100	9,803	2,126	4,580	9,868
9,62	92,54	890,3	3,102	9,808	2,127	4,582	9,872
9,63	92,74	893,1	3,103	9,813	2,128	4,584	9,875
9,64	92,93	895,8	3,105	9,818	2,128	4,585	9,879
9,65	93,12	898,6	3,106	9,823	2,129	4,587	9,882
9,66	93,32	901,4	3,108	9,829	2,130	4,588	9,885
9,67	93,51	904,2	3,110	9,834	2,130	4,590	9,889
9,68	93,70	907,0	3,111	9,839	2,131	4,592	9,892
9,69	93,90	909,9	3,113	9,844	2,132	4,593	9,896
9,70	94,09	912,7	3,114	9,849	2,133	4,595	9,899
9,71	94,28	915,5	3,116	9,854	2,133	4,596	9,902
9,72	94,48	918,3	3,118	9,859	2,134	4,598	9,906
9,73	94,67	921,2	3,119	9,864	2,135	4,599	9,909
9,74	94,87	924,0	3,121	9,869	2,136	4,601	9,913
9,75	95,06	926,9	3,122	9,874	2,136	4,603	9,916
9,76	95,26	929,7	3,124	9,879	2,137	4,604	9,919
9,77	95,45	932,6	3,126	9,884	2,138	4,606	9,923
9,78	95,65	935,4	3,127	9,889	2,139	4,607	9,926
9,79	95,84	938,3	3,129	9,894	2,139	4,609	9,930
9,80	96,04	941,2	3,130	9,899	2,140	4,610	9,933
9,81	96,24	944,1	3,132	9,905	2,141	4,612	9,936
9,82	96,43	947,0	3,134	9,910	2,141	4,614	9,940
9,83	96,63	949,9	3,135	9,915	2,142	4,615	9,943
9,84	96,83	952,8	3,137	9,920	2,143	4,617	9,946
9,85	97,02	955,7	3,138	9,925	2,144	4,618	9,950
9,86	97,22	958,6	3,140	9,930	2,144	4,620	9,953
9,87	97,42	961,5	3,142	9,935	2,145	4,621	9,956
9,88	97,61	964,4	3,143	9,940	2,146	4,623	9,960
9,89	97,81	967,4	3,145	9,945	2,147	4,625	9,963
9,90	98,01	970,3	3,146	9,950	2,147	4,626	9,967
9,91	98,21	973,2	3,148	9,955	2,148	4,628	9,970
9,92	98,41	976,2	3,150	9,960	2,149	4,629	9,973
9,93	98,60	979,1	3,151	9,965	2,149	4,631	9,977
9,94	98,80	982,1	3,153	9,970	2,150	4,632	9,980
9,95	99,00	985,1	3,154	9,975	2,151	4,634	9,983
9,96	99,20	988,0	3,156	9,980	2,152	4,635	9,987
9,97	99,40	991,0	3,158	9,985	2,152	4,637	9,990
9,98	99,60	994,0	3,159	9,990	2,153	4,638	9,993
9,99	99,80	997,0	3,161	9,995	2,154	4,640	9,997
10,00	100,00	1 000,0	3,162	10,000	2,154	4,642	10,000

Объяснения к таблице см. на стр. 17

3. Степени целых чисел от $n = 1$ до $n = 100$

n	n^2	n^3	n^4	n^5
1	1	1	1	1
2	4	8	16	32
3	9	27	81	243
4	16	64	256	1 024
5	25	125	625	3 125
6	36	216	1 296	7 776
7	49	343	2 401	16 807
8	64	512	4 096	32 768
9	81	729	6 561	59 049
10	100	1 000	10 000	100 000
11	121	1 331	14 641	161 051
12	144	1 728	20 736	248 832
13	169	2 197	28 561	371 293
14	196	2 744	38 416	537 824
15	225	3 375	50 625	759 375
16	256	4 096	65 536	1 048 576
17	289	4 913	83 521	1 419 857
18	324	5 832	104 976	1 889 568
19	361	6 859	130 321	2 476 099
20	400	8 000	160 000	3 200 000
21	441	9 261	194 481	4 084 101
22	484	10 648	234 256	5 153 632
23	529	12 167	279 841	6 436 343
24	576	13 824	331 776	7 962 624
25	625	15 625	390 625	9 765 625
26	676	17 576	456 976	11 881 376
27	729	19 683	531 441	14 348 907
28	784	21 952	614 656	17 210 368
29	841	24 389	707 281	20 511 149
30	900	27 000	810 000	24 300 000
31	961	29 791	923 521	28 629 151
32	1 024	32 768	1 048 576	33 554 432
33	1 089	35 937	1 185 921	39 135 393
34	1 156	39 304	1 336 336	45 435 424
35	1 225	42 875	1 500 625	52 521 875
36	1 296	46 656	1 679 616	60 466 176
37	1 369	50 653	1 874 161	69 343 957
38	1 444	54 872	2 085 136	79 235 168
39	1 521	59 319	2 313 441	90 224 199
40	1 600	64 000	2 560 000	102 400 000
41	1 681	68 921	2 825 761	115 856 201
42	1 764	74 088	3 111 696	130 691 232
43	1 849	79 507	3 418 801	147 008 443
44	1 936	85 184	3 748 096	164 916 224
45	2 025	91 125	4 100 625	184 528 125
46	2 116	97 336	4 477 456	205 962 976
47	2 209	103 823	4 879 681	229 345 007
48	2 304	110 592	5 308 416	254 803 968
49	2 401	117 649	5 764 801	282 475 249

n	n^2	n^3	n^4	n^5
50	2 500	125 000	6 250 000	312 500 000
51	2 601	132 651	6 765 201	345 025 251
52	2 704	140 608	7 311 616	380 204 032
53	2 809	148 877	7 890 481	418 195 493
54	2 916	157 464	8 503 056	459 165 024
55	3 025	166 375	9 150 625	503 284 375
56	3 136	175 616	9 834 496	550 731 776
57	3 249	185 193	10 556 001	601 692 057
58	3 364	195 112	11 316 496	656 356 768
59	3 481	205 379	12 117 361	714 924 299
60	3 600	216 000	12 960 000	777 600 000
61	3 721	226 981	13 845 841	844 596 301
62	3 844	238 328	14 776 336	916 132 832
63	3 969	250 047	15 752 961	992 436 543
64	4 096	262 144	16 777 216	1 073 741 824
65	4 225	274 625	17 850 625	1 160 290 625
66	4 356	287 496	18 974 736	1 252 332 576
67	4 489	300 763	20 151 121	1 350 125 107
68	4 624	314 432	21 381 376	1 453 933 563
69	4 761	328 509	22 667 121	1 564 031 349
70	4 900	343 000	24 010 000	1 680 700 000
71	5 041	357 911	25 411 681	1 804 229 351
72	5 184	373 248	26 873 856	1 934 917 632
73	5 329	389 017	28 398 241	2 073 071 593
74	5 476	405 224	29 986 576	2 219 006 624
75	5 625	421 875	31 640 625	2 373 046 875
76	5 776	438 976	33 362 176	2 535 525 376
77	5 929	456 533	35 153 041	2 706 784 157
78	6 084	474 552	37 015 056	2 887 174 368
79	6 241	493 039	38 950 081	3 077 056 399
80	6 400	512 000	40 960 000	3 276 800 000
81	6 561	531 441	43 046 721	3 486 784 401
82	6 724	551 368	45 212 176	3 707 398 432
83	6 889	571 787	47 458 321	3 939 040 643
84	7 056	592 704	49 787 136	4 182 119 424
85	7 225	614 125	52 200 625	4 437 053 125
86	7 396	636 056	54 700 816	4 704 270 176
87	7 569	658 503	57 289 761	4 984 209 207
88	7 744	681 472	59 969 536	5 277 319 168
89	7 921	704 969	62 742 241	5 584 059 449
90	8 100	729 000	65 610 000	5 904 900 000
91	8 281	753 571	68 574 961	6 240 321 451
92	8 464	778 688	71 639 296	6 590 815 232
93	8 649	804 357	74 805 201	6 956 883 693
94	8 836	830 584	78 074 896	7 339 040 224
95	9 025	857 375	81 450 625	7 737 809 375
96	9 216	884 736	84 934 656	8 153 726 976
97	9 409	912 673	88 529 281	8 587 340 257
98	9 604	941 192	92 236 816	9 039 207 963
99	9 801	970 299	96 059 601	9 509 900 499
100	10 000	1 000 000	100 000 000	10 000 000 000

4. *Обратные величины*

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	10000	9901	9804	9709	9615	9524	9434	9346	9259	9174
1,1	9091	9009	8929	8850	8772	8696	8621	8547	8475	8403
1,2	8333	8264	8197	8130	8065	8000	7937	7874	7812	7752
1,3	7692	7634	7576	7519	7463	7407	7353	7299	7246	7194
1,4	7143	7092	7042	6993	6944	6897	6849	6803	6757	6711
1,5	6667	6623	6579	6536	6494	6452	6410	6369	6329	6289
1,6	6250	6211	6173	6135	6098	6061	6024	5988	5952	5917
1,7	5882	5848	5814	5780	5747	5714	5682	5650	5618	5587
1,8	5556	5525	5495	5464	5435	5405	5376	5348	5319	5291
1,9	5263	5236	5208	5181	5155	5128	5102	5076	5051	5025
2,0	5000	4975	4950	4926	4902	4878	4854	4831	4808	4785
2,1	4762	4739	4717	4695	4673	4651	4630	4608	4587	4566
2,2	4545	4525	4505	4484	4464	4444	4425	4405	4386	4367
2,3	4348	4329	4310	4292	4274	4255	4237	4219	4202	4184
2,4	4167	4149	4132	4115	4098	4082	4065	4049	4032	4016
2,5	4000	3984	3968	3953	3937	3922	3906	3891	3876	3861
2,6	3846	3831	3817	3802	3788	3774	3759	3745	3731	3717
2,7	3704	3690	3676	3663	3650	3636	3623	3610	3597	3584
2,8	3571	3559	3546	3534	3521	3509	3497	3484	3472	3460
2,9	3448	3436	3425	3413	3401	3390	3378	3367	3356	3344
3,0	3333	3322	3311	3300	3289	3279	3268	3257	3247	3236
3,1	3226	3215	3205	3195	3185	3175	3165	3155	3145	3135
3,2	3125	3115	3106	3096	3086	3077	3067	3058	3049	3040
3,3	3030	3021	3012	3003	2994	2985	2976	2967	2959	2950
3,4	2941	2933	2924	2915	2907	2899	2890	2882	2874	2865
3,5	2857	2849	2841	2833	2825	2817	2809	2801	2793	2786
3,6	2778	2770	2762	2755	2747	2740	2732	2725	2717	2710
3,7	2703	2695	2688	2681	2674	2667	2660	2653	2646	2639
3,8	2632	2625	2618	2611	2604	2597	2591	2584	2577	2571
3,9	2564	2558	2551	2545	2538	2532	2525	2519	2513	2506
4,0	2500	2494	2488	2481	2475	2469	2463	2457	2451	2445
4,1	2439	2433	2427	2421	2415	2410	2404	2398	2392	2387
4,2	2381	2375	2370	2364	2358	2353	2347	2342	2336	2331
4,3	2326	2320	2315	2309	2304	2299	2294	2288	2283	2278
4,4	2273	2268	2262	2257	2252	2247	2242	2237	2232	2227
4,5	2222	2217	2212	2208	2203	2198	2193	2188	2183	2179
4,6	2174	2169	2165	2160	2155	2151	2146	2141	2137	2132
4,7	2128	2123	2119	2114	2110	2105	2101	2096	2092	2088
4,8	2083	2079	2075	2070	2066	2062	2058	2053	2049	2045
4,9	2041	2037	2033	2028	2024	2020	2016	2012	2008	2004
5,0	2000	1996	1992	1988	1984	1980	1976	1972	1969	1965
5,1	1961	1957	1953	1949	1946	1942	1938	1934	1931	1927
5,2	1923	1919	1916	1912	1908	1905	1901	1898	1894	1890
5,3	1887	1883	1880	1876	1873	1869	1866	1862	1859	1855
5,4	1852	1848	1845	1842	1838	1835	1832	1828	1825	1821

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,5	1818	1815	1812	1808	1805	1802	1799	1795	1792	1789
5,6	1786	1783	1779	1776	1773	1770	1767	1764	1761	1757
5,7	1754	1751	1748	1745	1742	1739	1736	1733	1730	1727
5,8	1724	1721	1718	1715	1712	1709	1706	1704	1701	1698
5,9	1695	1692	1689	1686	1684	1681	1678	1675	1672	1669
6,0	1667	1664	1661	1658	1656	1653	1650	1647	1645	1642
6,1	1639	1637	1634	1631	1629	1626	1623	1621	1618	1616
6,2	1613	1610	1608	1605	1603	1600	1597	1595	1592	1590
6,3	1587	1585	1582	1580	1577	1575	1572	1570	1567	1565
6,4	1562	1560	1558	1555	1553	1550	1548	1546	1543	1541
6,5	1538	1536	1534	1531	1529	1527	1524	1522	1520	1517
6,6	1515	1513	1511	1508	1506	1504	1502	1499	1497	1495
6,7	1493	1490	1488	1486	1484	1481	1479	1477	1475	1473
6,8	1471	1468	1466	1464	1462	1460	1458	1456	1453	1451
6,9	1449	1447	1445	1443	1441	1439	1437	1435	1433	1431
7,0	1429	1427	1425	1422	1420	1418	1416	1414	1412	1410
7,1	1408	1406	1404	1403	1401	1399	1397	1395	1393	1391
7,2	1389	1387	1385	1383	1381	1379	1377	1376	1374	1372
7,3	1370	1368	1366	1364	1362	1361	1359	1357	1355	1353
7,4	1351	1350	1348	1346	1344	1342	1340	1339	1337	1335
7,5	1333	1332	1330	1328	1326	1325	1323	1321	1319	1318
7,6	1316	1314	1312	1311	1309	1307	1305	1304	1302	1300
7,7	1299	1297	1295	1294	1292	1290	1289	1287	1285	1284
7,8	1282	1280	1279	1277	1276	1274	1272	1271	1269	1267
7,9	1266	1264	1263	1261	1259	1258	1256	1255	1253	1252
8,0	1250	1248	1247	1245	1244	1242	1241	1239	1238	1236
8,1	1235	1233	1232	1230	1229	1227	1225	1224	1222	1221
8,2	1220	1218	1217	1215	1214	1212	1211	1209	1208	1206
8,3	1205	1203	1202	1200	1199	1198	1196	1195	1193	1192
8,4	1190	1189	1188	1186	1185	1183	1182	1181	1179	1178
8,5	1176	1175	1174	1172	1171	1170	1168	1167	1166	1164
8,6	1163	1161	1160	1159	1157	1156	1155	1153	1152	1151
8,7	1149	1148	1147	1145	1144	1143	1142	1140	1139	1138
8,8	1136	1135	1134	1133	1131	1130	1129	1127	1126	1125
8,9	1124	1122	1121	1120	1119	1117	1116	1115	1114	1112
9,0	1111	1110	1109	1107	1106	1105	1104	1103	1101	1100
9,1	1099	1098	1096	1095	1094	1093	1092	1091	1089	1088
9,2	1087	1086	1085	1083	1082	1081	1080	1079	1078	1076
9,3	1075	1074	1073	1072	1071	1070	1068	1067	1066	1065
9,4	1064	1063	1062	1060	1059	1058	1057	1056	1055	1054
9,5	1053	1052	1050	1049	1048	1047	1046	1045	1044	1043
9,6	1042	1041	1040	1038	1037	1036	1035	1034	1033	1032
9,7	1031	1030	1029	1028	1027	1026	1025	1024	1022	1021
9,8	1020	1019	1018	1017	1016	1015	1014	1013	1012	1011
9,9	1010	1009	1008	1007	1006	1005	1004	1003	1002	1001

Объяснения к таблице см. на следующей странице

Объяснения к таблице обратных величин.

В таблице 4 на стр. 40—41 даны с четырьмя знаками значения величины $10\,000 : n$ для трехзначных значений аргумента, заключенных между 1 и 10. Каждое число в таблице помещено в строчке, соответствующей первым двум значащим цифрам аргумента (указанным в столбце n), и в столбце, соответствующем третьей цифре аргумента. Например, $10\,000 : 2{,}26 = 4425$. Если аргумент дан с четырьмя знаками, то необходимо прибегнуть к линейной интерполяции (см. стр. 15). Следует обратить внимание на то, что здесь интерполяционные поправки не прибавляются, а вычитаются.

Помещенные в таблице числа можно рассматривать как десятичные знаки, следующие за запятой в дроби $1 : n$; например, $1 : 2{,}26 = 0{,}4425$. Для нахождения $1 : n$ при $n > 10$ и $n < 1$ принимают во внимание, что при умножении n на 10^k величина $1 : n$ умножается на 10^{-k}, т. е. перенос запятой у n на k разрядов вправо вызывает перенос запятой у $1 : n$ на k разрядов влево, и наоборот. Например, $1 : 22{,}6 = 0{,}04425$; $1 : 0{,}0226 = 44{,}25$.

5. Факториалы и обратные им величины

n	$n!$	n	$n!$
1	1	11	39 916 800
2	2	12	479 001 600
3	6	13	6 227 020 800
4	24	14	87 178 291 200
5	120	15	1 307 674 368 000
6	720	16	20 922 789 888 000
7	5 040	17	355 687 428 096 000
8	40 320	18	6 402 373 705 728 000
9	362 880	19	121 645 100 408 832 000
10	3 628 800	20	2 432 902 008 176 640 000

Величины, обратные факториалам*

n	$1 : n!$	n	$1 : n!$	n	$1 : n!$
1	1,000000	11	0,0725052	21	0,01019573
2	0,500000	12	0,0820877	22	0,02188968
3	0,166667	13	0,0916059	23	0,02238682
4	0,041667	14	0,01011471	24	0,02316117
5	0,0283333	15	0,01276472	25	0,02564470
6	0,0213889	16	0,01347795	26	0,02024796
7	0,0319841	17	0,01423115	27	0,02891837
8	0,0424802	18	0,01515619	28	0,02932793
9	0,0527557	19	0,01782206	29	0,03011310
10	0,0627557	20	0,01841103	30	0,03237700

* Для $1 : n!$ применена сокращенная запись нулей после запятой. Так, $1 : 8! = 0{,}00024802$.

6. *Некоторые степени чисел 2, 3 и 5*

n	2^n	3^n	5^n
1	2	3	5
2	4	9	25
3	8	27	125
4	16	81	625
5	32	243	3 125
6	64	729	15 625
7	128	2 187	78 125
8	256	6 561	390 625
9	512	19 683	1 953 125
10	1 024	59 049	9 765 625
11	2 048	177 147	48 828 125
12	4 096	531 441	244 140 625
13	8 192	1 594 323	1 220 703 125
14	16 384	4 782 969	6 103 515 625
15	32 768	14 348 907	30 517 578 125
16	65 536	43 046 721	152 587 890 625
17	131 072	129 140 163	762 939 453 125
18	262 144	387 420 489	3 814 697 265 625
19	524 288	1 162 261 467	19 073 486 328 125
20	1 048 576	3 486 784 401	95 367 431 640 625

Объяснения к таблицам логарифмов и антилогарифмов

Таблица 7 (стр. 44—45) служит для нахождения десятичных логарифмов чисел. Сначала для данного числа находится в соответствии с правилами, приведенными на стр. 135, *характеристика* его логарифма, а затем — *мантисса* из таблицы. Для трехзначных чисел мантисса находится на пересечении строки, в начале которой (графа N) стоят две первые цифры данного числа, и столбца, озаглавленного третьей цифрой. Если заданное число имеет больше трех значащих цифр, необходимо применить линейную интерполяцию (см. стр. 15). При этом интерполяционная поправка находится только на четвертую значащую цифру; поправку на пятую цифру имеет смысл делать только тогда, когда первая значащая цифра данного числа равна 1 или 2.

Пример: $\lg 254{,}3 = 2{,}4053$ (к 4048 прибавляется $0{,}3 \cdot 17 = 5{,}1$).

Для нахождения числа по его десятичному логарифму служит таблица 8 (стр. 46—47) (антилогарифмов *). Аргументом в этой таблице является мантисса заданного логарифма. На пересечении строки, определяемой двумя первыми цифрами мантиссы (графа m), и столбца, озаглавленного ее третьей цифрой, в таблице антилогарифмов находится цифровой состав искомого числа. На четвертую цифру должна быть внесена интерполяционная поправка. Характеристика логарифма позволяет поставить в полученном результате запятую на основании правил, данных на стр. 135.

Примеры: $\lg x = 1{,}2763$; $x = 18{,}89$ (к 1888, найденному в таблице, прибавляется $0{,}3 \cdot 4 = 1{,}2$; в результате отделяется запятой два знака, так как характеристика равна единице). Если $\lg x = \bar{2}{,}2763$, то $x = 0{,}01889$. Эти результаты могут быть записаны также следующим образом: $10^{1{,}2763} = 18{,}89$; $10^{-1{,}7237} = 0{,}01889$ (так как $\bar{2}{,}2763 = -1{,}7237$).

* Число y, десятичный логарифм которого равен x, называют *антилогарифмом* x. В силу определения логарифма (см. стр. 134) эта функция совпадает с показательной функцией $y = 10^x$.

7. *Десятичные логарифмы*

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

Объяснения к таблице см. на стр. 43.

8. *Антилогарифмы*

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021
01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045
02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069
03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094
04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119
05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146
06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172
07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199
08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227
09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256
10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285
11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315
12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346
13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377
14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409
15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442
16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476
17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510
18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545
19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581
20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618
21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656
22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694
23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734
24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774
25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816
26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858
27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901
28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945
29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991
30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037
31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084
32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133
33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183
34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234
35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286
36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339
37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393
38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449
39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506
40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564
41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624
42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685
43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748
44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812
45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877
46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944
47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013
48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083
49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228
51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304
52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381
53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459
54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540
55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622
56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707
57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793
58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882
59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972
60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064
61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159
62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256
63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355
64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457
65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560
66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667
67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775
68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887
69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000
70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117
71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236
72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358
73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483
74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610
75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741
76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875
77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012
78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152
79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295
80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442
81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592
82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745
83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902
84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063
85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228
86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396
87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568
88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745
89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925
90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110
91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299
92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492
93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690
94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892
95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099
96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311
97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528
98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750
99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977

Объяснения к таблице см. на стр. 43.

9. *Натуральные значения тригонометрических функций*

Синусы

Градусы	0′ →	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	0,0000	0,0029	0,0058	0,0087	0,0116	0,0145	0,0175	89
1 ↓	0,0175	0,0204	0,0233	0,0262	0,0291	0,0320	0,0349	**88**
2	0,0349	0,0378	0,0407	0,0436	0,0465	0,0494	0,0523	**87**
3	0,0523	0,0552	0,0581	0,0610	0,0640	0,0669	0,0698	86
4	0,0698	0,0727	0,0756	0,0785	0,0814	0,0843	0,0872	**85**
5	0,0872	0,0901	0,0929	0,0958	0,0987	0,1016	0,1045	84
6	0,1045	0,1074	0,1103	0,1132	0,1161	0,1190	0,1219	83
7	0,1219	0,1248	0,1276	0,1305	0,1334	0,1363	0,1392	82
8	0,1392	0,1421	0,1449	0,1478	0,1507	0,1536	0,1564	81
9	0,1564	0,1593	0,1622	0,1650	0,1679	0,1708	0,1736	**80**
10	0,1736	0,1765	0,1794	0,1822	0,1851	0,1880	0,1908	79
11	0,1908	0,1937	0,1965	0,1994	0,2022	0,2051	0,2079	78
12	0,2079	0,2108	0,2136	0,2164	0,2193	0,2221	0,2250	77
13	0,2250	0,2278	0,2306	0,2334	0,2363	0,2391	0,2419	76
14	0,2419	0,2447	0,2476	0,2504	0,2532	0,2560	0,2588	**75**
15	0,2588	0,2616	0,2644	0,2672	0,2700	0,2728	0,2756	74
16	0,2756	0,2784	0,2812	0,2840	0,2868	0,2896	0,2924	73
17	0,2924	0,2952	0,2979	0,3007	0,3035	0,3062	0,3090	72
18	0,3090	0,3118	0,3145	0,3173	0,3201	0,3228	0,3256	71
19	0,3256	0,3283	0,3311	0,3338	0,3365	0,3393	0,3420	**70**
20	0,3420	0,3448	0,3475	0,3502	0,3529	0,3557	0,3584	69
21	0,3584	0,3611	0,3638	0,3665	0,3692	0,3719	0,3746	68
22	0,3746	0,3773	0,3800	0,3827	0,3854	0,3881	0,3907	67
23	0,3907	0,3934	0,3961	0,3987	0,4014	0,4041	0,4067	66
24	0,4067	0,4094	0,4120	0,4147	0,4173	0,4200	0,4226	**65**
25	0,4226	0,4253	0,4279	0,4305	0,4331	0,4358	0,4384	64
26	0,4384	0,4410	0,4436	0,4462	0,4488	0,4514	0,4540	63
27	0,4540	0,4566	0,4592	0,4617	0,4643	0,4669	0,4695	62
28	0,4695	0,4720	0,4746	0,4772	0,4797	0,4823	0,4848	61
29	0,4848	0,4874	0,4899	0,4924	0,4950	0,4975	0,5000	**60**
30	0,5000	0,5025	0,5050	0,5075	0,5100	0,5125	0,5150	59
31	0,5150	0,5175	0,5200	0,5225	0,5250	0,5275	0,5299	58
32	0,5299	0,5324	0,5348	0,5373	0,5398	0,5422	0,5446	57
33	0,5446	0,5471	0,5495	0,5519	0,5544	0,5568	0,5592	56
34	0,5592	0,5616	0,5640	0,5664	0,5688	0,5712	0,5736	**55**
35	0,5736	0,5760	0,5783	0,5807	0,5831	0,5854	0,5878	54
36	0,5878	0,5901	0,5925	0,5948	0,5972	0,5995	0,6018	53
37	0,6018	0,6041	0,6065	0,6088	0,6111	0,6134	0,6157	**52**
38	0,6157	0,6180	0,6202	0,6225	0,6248	0,6271	0,6293	51
39	0,6293	0,6316	0,6338	0,6361	0,6383	0,6406	0,6428	**50**
40	0,6428	0,6450	0,6472	0,6494	0,6517	0,6539	0,6561	49
41	0,6561	0,6583	0,6604	0,6626	0,6648	0,6670	0,6691	48
42	0,6691	0,6713	0,6734	0,6756	0,6777	0,6799	0,6820	47
43	0,6820	0,6841	0,6862	0,6884	0,6905	0,6926	0,6947	46
44	0,6947	0,6967	0,6988	0,7009	0,7030	0,7050	0,7071	↑ **45**
45	0,7071	0,7092	0,7112	0,7133	0,7153	0,7173	0,7193	↑ 44
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′ ←	Градусы

Косинусы

Синусы

Градусы	0′ →	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
45 ↓	0,7071	0,7092	0,7112	0,7133	0,7153	0,7173	0,7193	44
46	0,7193	0,7214	0,7234	0,7254	0,7274	0,7294	0,7314	43
47	0,7314	0,7333	0,7353	0,7373	0,7392	0,7412	0,7431	42
48	0,7431	0,7451	0,7470	0,7490	0,7509	0,7528	0,7547	41
49	0,7547	0,7566	0,7585	0,7604	0,7623	0,7642	0,7660	**40**
50	0,7660	0,7679	0,7698	0,7716	0,7735	0,7753	0,7771	39
51	0,7771	0,7790	0,7808	0,7826	0,7844	0,7862	0,7880	38
52	0,7880	0,7898	0,7916	0,7934	0,7951	0,7969	0,7986	37
53	0,7986	0,8004	0,8021	0,8039	0,8056	0,8073	0,8090	36
54	0,8090	0,8107	0,8124	0,8141	0,8158	0,8175	0,8192	**35**
55	0,8192	0,8208	0,8225	0,8241	0,8258	0,8274	0,8290	34
56	0,8290	0,8307	0,8323	0,8339	0,8355	0,8371	0,8387	33
57	0,8387	0,8403	0,8418	0,8434	0,8450	0,8465	0,8480	32
58	0,8480	0,8496	0,8511	0,8526	0,8542	0,8557	0,8572	31
59	0,8572	0,8587	0,8601	0,8616	0,8631	0,8646	0,8660	**30**
60	0,8660	0,8675	0,8689	0,8704	0,8718	0,8732	0,8746	29
61	0,8746	0,8760	0,8774	0,8788	0,8802	0,8816	0,8829	28
62	0,8829	0,8843	0,8857	0,8870	0,8884	0,8897	0,8910	27
63	0,8910	0,8923	0,8936	0,8949	0,8962	0,8975	0,8988	26
64	0,8988	0,9001	0,9013	0,9026	0,9038	0,9051	0,9063	**25**
65	0,9063	0,9075	0,9088	0,9100	0,9112	0,9124	0,9135	24
66	0,9135	0,9147	0,9159	0,9171	0,9182	0,9194	0,9205	23
67	0,9205	0,9216	0,9228	0,9239	0,9250	0,9261	0,9272	22
68	0,9272	0,9283	0,9293	0,9304	0,9315	0,9325	0,9336	21
69	0,9336	0,9346	0,9356	0,9367	0,9377	0,9387	0,9397	**20**
70	0,9397	0,9407	0,9417	0,9426	0,9436	0,9446	0,9455	19
71	0,9455	0,9465	0,9474	0,9483	0,9492	0,9502	0,9511	18
72	0,9511	0,9520	0,9528	0,9537	0,9546	0,9555	0,9563	17
73	0,9563	0,9572	0,9580	0,9588	0,9596	0,9605	0,9613	16
74	0,9613	0,9621	0,9628	0,9636	0,9644	0,9652	0,9659	**15**
75	0,9659	0,9667	0,9674	0,9681	0,9689	0,9696	0,9703	14
76	0,9703	0,9710	0,9717	0,9724	0,9730	0,9737	0,9744	13
77	0,9744	0,9750	0,9757	0,9763	0,9769	0,9775	0,9781	12
78	0,9781	0,9787	0,9793	0,9799	0,9805	0,9811	0,9816	11
79	0,9816	0,9822	0,9827	0,9833	0,9838	0,9843	0,9848	**10**
80	0,9848	0,9853	0,9858	0,9863	0,9868	0,9872	0,9877	9
81	0,9877	0,9881	0,9886	0,9890	0,9894	0,9899	0,9903	8
82	0,9903	0,9907	0,9911	0,9914	0,9918	0,9922	0,9925	7
83	0,9925	0,9929	0,9932	0,9936	0,9939	0,9942	0,9945	6
84	0,9945	0,9948	0,9951	0,9954	0,9957	0,9959	0,9962	**5**
85	0,9962	0,9964	0,9967	0,9969	0,9971	0,9974	0,9976	4
86	0,9976	0,9978	0,9980	0,9981	0,9983	0,9985	0,9986	3
87	0,9986	0,9988	0,9989	0,9990	0,9992	0,9993	0,9994	2
88	0,9994	0,9995	0,9996	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	1
89	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	↑ **0**
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′ ←	Градусы

Косинусы

Тангенсы

Градусы ↓	0′ →	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	0,0000	0,0029	0,0058	0,0087	0,0116	0,0145	0,0175	89
1	0,0175	0,0204	0,0233	0,0262	0,0291	0,0320	0,0349	88
2	0,0349	0,0378	0,0407	0,0437	0,0466	0,0495	0,0524	87
3	0,0524	0,0553	0,0582	0,0612	0,0641	0,0670	0,0699	86
4	0,0699	0,0729	0,0758	0,0787	0,0816	0,0846	0,0875	**85**
5	0,0875	0,0904	0,0934	0,0963	0,0992	0,1022	0,1051	84
6	0,1051	0,1080	0,1110	0,1139	0,1169	0,1198	0,1228	83
7	0,1228	0,1257	0,1287	0,1317	0,1346	0,1376	0,1405	82
8	0,1405	0,1435	0,1465	0,1495	0,1524	0,1554	0,1584	81
9	0,1584	0,1614	0,1644	0,1673	0,1703	0,1733	0,1763	**80**
10	0,1763	0,1793	0,1823	0,1853	0,1883	0,1914	0,1944	79
11	0,1944	0,1974	0,2004	0,2035	0,2065	0,2095	0,2126	78
12	0,2126	0,2156	0,2186	0,2217	0,2247	0,2278	0,2309	77
13	0,2309	0,2339	0,2370	0,2401	0,2432	0,2462	0,2493	76
14	0,2493	0,2524	0,2555	0,2586	0,2617	0,2648	0,2679	**75**
15	0,2679	0,2711	0,2742	0,2773	0,2805	0,2836	0,2867	74
16	0,2867	0,2899	0,2931	0,2962	0,2994	0,3026	0,3057	73
17	0,3057	0,3089	0,3121	0,3153	0,3185	0,3217	0,3249	72
18	0,3249	0,3281	0,3314	0,3346	0,3378	0,3411	0,3443	71
19	0,3443	0,3476	0,3508	0,3541	0,3574	0,3607	0,3640	**70**
20	0,3640	0,3673	0,3706	0,3739	0,3772	0,3805	0,3839	69
21	0,3839	0,3872	0,3906	0,3939	0,3973	0,4006	0,4040	68
22	0,4040	0,4074	0,4108	0,4142	0,4176	0,4210	0,4245	67
23	0,4245	0,4279	0,4314	0,4348	0,4383	0,4417	0,4452	66
24	0,4452	0,4487	0,4522	0,4557	0,4592	0,4628	0,4663	**65**
25	0,4663	0,4699	0,4734	0,4770	0,4806	0,4841	0,4877	64
26	0,4877	0,4913	0,4950	0,4986	0,5022	0,5059	0,5095	63
27	0,5095	0,5132	0,5169	0,5206	0,5243	0,5280	0,5317	62
28	0,5317	0,5354	0,5392	0,5430	0,5467	0,5505	0,5543	61
29	0,5543	0,5581	0,5619	0,5658	0,5696	0,5735	0,5774	**60**
30	0,5774	0,5812	0,5851	0,5890	0,5930	0,5969	0,6009	59
31	0,6009	0,6048	0,6088	0,6128	0,6168	0,6208	0,6249	58
32	0,6249	0,6289	0,6330	0,6371	0,6412	0,6453	0,6494	57
33	0,6494	0,6536	0,6577	0,6619	0,6661	0,6703	0,6745	56
34	0,6745	0,6787	0,6830	0,6873	0,6916	0,6959	0,7002	**55**
35	0,7002	0,7046	0,7089	0,7133	0,7177	0,7221	0,7265	54
36	0,7265	0,7310	0,7355	0,7400	0,7445	0,7490	0,7536	53
37	0,7536	0,7581	0,7627	0,7673	0,7720	0,7766	0,7813	52
38	0,7813	0,7860	0,7907	0,7954	0,8002	0,8050	0,8098	51
39	0,8098	0,8146	0,8195	0,8243	0,8292	0,8342	0,8391	**50**
40	0,8391	0,8441	0,8491	0,8541	0,8591	0,8642	0,8693	49
41	0,8693	0,8744	0,8796	0,8847	0,8899	0,8952	0,9004	48
42	0,9004	0,9057	0,9110	0,9163	0,9217	0,9271	0,9325	47
43	0,9325	0,9380	0,9435	0,9490	0,9545	0,9601	0,9657	46
44	0,9657	0,9713	0,9770	0,9827	0,9884	0,9942	1,0000	**45**
45	1,0000	1,0058	1,0117	1,0176	1,0235	1,0295	1,0355	↑44
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′ ←	Градусы

Котангенсы

Тангенсы

Градусы ↓	0′ →	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
45	1,000	1,006	1,012	1,018	1,024	1,030	1,036	44
46	1,036	1,042	1,048	1,054	1,060	1,066	1,072	43
47	1,072	1,079	1,085	1,091	1,098	1,104	1,111	42
48	1,111	1,117	1,124	1,130	1,137	1,144	1,150	41
49	1,150	1,157	1,164	1,171	1,178	1,185	1,192	**40**
50	1,192	1,199	1,206	1,213	1,220	1,228	1,235	39
51	1,235	1,242	1,250	1,257	1,265	1,272	1,280	38
52	1,280	1,288	1,295	1,303	1,311	1,319	1,327	37
53	1,327	1,335	1,343	1,351	1,360	1,368	1,376	36
54	1,376	1,385	1,393	1,402	1,411	1,419	1,428	**35**
55	1,428	1,437	1,446	1,455	1,464	1,473	1,483	34
56	1,483	1,492	1,501	1,511	1,520	1,530	1,540	**33**
57	1,540	1,550	1,560	1,570	1,580	1,590	1,600	32
58	1,600	1,611	1,621	1,632	1,643	1,653	1,664	31
59	1,664	1,675	1,686	1,698	1,709	1,720	1,732	**30**
60	1,732	1,744	1,756	1,767	1,780	1,792	1,804	29
61	1,804	1,816	1,829	1,842	1,855	1,868	1,881	28
62	1,881	1,894	1,907	1,921	1,935	1,949	1,963	**27**
63	1,963	1,977	1,991	2,006	2,020	2,035	2,050	26
64	2,050	2,066	2,081	2,097	2,112	2,128	2,145	**25**
65	2,145	2,161	2,177	2,194	2,211	2,229	2,246	24
66	2,246	2,264	2,282	2,300	2,318	2,337	2,356	23
67	2,356	2,375	2,394	2,414	2,434	2,455	2,475	22
68	2,475	2,496	2,517	2,539	2,560	2,583	2,605	21
69	2,605	2,628	2,651	2,675	2,699	2,723	2,747	**20**
70	2,747	2,773	2,798	2,824	2,850	2,877	2,904	19
71	2,904	2,932	2,960	2,989	3,018	3,047	3,078	18
72	3,078	3,108	3,140	3,172	3,204	3,237	3,271	17
73	3,271	3,305	3,340	3,376	3,412	3,450	3,487	16
74	3,487	3,526	3,566	3,606	3,647	3,689	3,732	**15**
75	3,732	3,776	3,821	3,867	3,914	3,962	4,011	14
76	4,011	4,061	4,113	4,165	4,219	4,275	4,331	13
77	4,331	4,390	4,449	4,511	4,574	4,638	4,705	12
78	4,705	4,773	4,843	4,915	4,989	5,066	5,145	11
79	5,145	5,226	5,309	5,396	5,485	5,576	5,671	**10**
80	5,671	5,769	5,871	5,976	6,084	6,197	6,314	9
81	6,314	6,435	6,561	6,691	6,827	6,968	7,115	**8**
82	7,115	7,269	7,429	7,596	7,770	7,953	8,144	**7**
83	8,144	8,345	8,556	8,777	9,010	9,255	9,514	6
84	9,514	9,788	10,078	10,385	10,712	11,059	11,430	**5**
85	11,430	11,826	12,251	12,706	13,197	13,727	14,301	4
86	14,301	14,924	15,605	16,350	17,169	18,075	19,081	**3**
87	19,081	20,206	21,470	22,904	24,542	26,432	28,636	**2**
88	28,636	31,242	34,368	38,188	42,964	49,104	57,290	**1**
89	57,290	68,750	85,940	114,59	171,89	343,77	∞	↑ **0**
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′ ←	Градусы

Котангенсы

10. Показательные, гиперболические и тригонометрические функции

Для x от 0 до 1,6 (аргумент в дуговых единицах)

x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x	sin x	cos x	tg x
0,00	1,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000
01	1,0101	0,9900	0,0100	1,0001	0,0100	0,0100	1,0000	0,0100
02	1,0202	0,9802	0,0200	1,0002	0,0200	0,0200	0,9998	0,0200
03	1,0305	0,9704	0,0300	1,0005	0,0300	0,0300	0,9996	0,0300
04	1,0408	0,9608	0,0400	1,0008	0,0400	0,0400	0,9992	0,0400
0,05	1,0513	0,9512	0,0500	1,0013	0,0500	0,0500	0,9988	0,0500
06	1,0618	0,9418	0,0600	1,0018	0,0599	0,0600	0,9982	0,0601
07	1,0725	0,9324	0,0701	1,0025	0,0699	0,0699	0,9976	0,0701
08	1,0833	0,9231	0,0801	1,0032	0,0798	0,0799	0,9968	0,0802
09	1,0942	0,9139	0,0901	1,0041	0,0898	0,0899	0,9960	0,0902
0,10	1,1052	0,9048	0,1002	1,0050	0,0997	0,0998	0,9950	0,1003
11	1,1163	0,8958	0,1102	1,0061	0,1096	0,1098	0,9940	0,1104
12	1,1275	0,8869	0,1203	1,0072	0,1194	0,1197	0,9928	0,1206
13	1,1388	0,8781	0,1304	1,0085	0,1293	0,1296	0,9916	0,1307
14	1,1503	0,8694	0,1405	1,0098	0,1391	0,1395	0,9902	0,1409
0,15	1,1618	0,8607	0,1506	1,0113	0,1489	0,1494	0,9888	0,1511
16	1,1735	0,8521	0,1607	1,0128	0,1586	0,1593	0,9872	0,1614
17	1,1853	0,8437	0,1708	1,0145	0,1684	0,1692	0,9856	0,1717
18	1,1972	0,8353	0,1810	1,0162	0,1781	0,1790	0,9838	0,1820
19	1,2092	0,8270	0,1911	1,0181	0,1877	0,1889	0,9820	0,1923
0,20	1,2214	0,8187	0,2013	1,0201	0,1974	0,1987	0,9801	0,2027
21	1,2337	0,8106	0,2115	1,0221	0,2070	0,2085	0,9780	0,2131
22	1,2461	0,8025	0,2218	1,0243	0,2165	0,2182	0,9759	0,2236
23	1,2586	0,7945	0,2320	1,0266	0,2260	0,2280	0,9737	0,2341
24	1,2712	0,7866	0,2423	1,0289	0,2355	0,2377	0,9713	0,2447
0,25	1,2840	0,7788	0,2526	1,0314	0,2449	0,2474	0,9689	0,2553
26	1,2969	0,7711	0,2629	1,0340	0,2543	0,2571	0,9664	0,2660
27	1,3100	0,7634	0,2733	1,0367	0,2636	0,2667	0,9638	0,2768
28	1,3231	0,7558	0,2837	1,0395	0,2729	0,2764	0,9611	0,2876
29	1,3364	0,7483	0,2941	1,0423	0,2821	0,2860	0,9582	0,2984
0,30	1,3499	0,7408	0,3045	1,0453	0,2913	0,2955	0,9553	0,3093
31	1,3634	0,7334	0,3150	1,0484	0,3004	0,3051	0,9523	0,3203
32	1,3771	0,7261	0,3255	1,0516	0,3095	0,3146	0,9492	0,3314
33	1,3910	0,7189	0,3360	1,0549	0,3185	0,3240	0,9460	0,3425
34	1,4049	0,7118	0,3466	1,0584	0,3275	0,3335	0,9428	0,3537
0,35	1,4191	0,7047	0,3572	1,0619	0,3364	0,3429	0,9394	0,3650
36	1,4333	0,6977	0,3678	1,0655	0,3452	0,3523	0,9359	0,3764
37	1,4477	0,6907	0,3785	1,0692	0,3540	0,3616	0,9323	0,3879
38	1,4623	0,6839	0,3892	1,0731	0,3627	0,3709	0,9287	0,3994
39	1,4770	0,6771	0,4000	1,0770	0,3714	0,3802	0,9249	0,4111
0,40	1,4918	0,6703	0,4108	1,0811	0,3799	0,3894	0,9211	0,4228
41	1,5068	0,6637	0,4216	1,0852	0,3885	0,3986	0,9171	0,4346
42	1,5220	0,6570	0,4325	1,0895	0,3969	0,4078	0,9131	0,4466
43	1,5373	0,6505	0,4434	1,0939	0,4053	0,4169	0,9090	0,4586
44	1,5527	0,6440	0,4543	1,0984	0,4136	0,4259	0,9048	0,4708
0,45	1,5683	0,6376	0,4653	1,1030	0,4219	0,4350	0,9004	0,4831

x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x	sin x	cos x	tg x
0,45	1,5683	0,6376	0,4653	1,1030	0,4219	0,4350	0,9004	0,4831
46	1,5841	0,6313	0,4764	1,1077	0,4301	0,4439	0,8961	0,4954
47	1,6000	0,6250	0,4875	1,1125	0,4382	0,4529	0,8916	0,5080
48	1,6161	0,6188	0,4986	1,1174	0,4462	0,4618	0,8870	0,5206
49	1,6323	0,6126	0,5098	1,1225	0,4542	0,4706	0,8823	0,5334
0,50	1,6487	0,6065	0,5211	1,1276	0,4621	0,4794	0,8776	0,5463
51	1,6653	0,6005	0,5324	1,1329	0,4699	0,4882	0,8727	0,5594
52	1,6820	0,5945	0,5438	1,1383	0,4777	0,4969	0,8678	0,5726
53	1,6989	0,5886	0,5552	1,1438	0,4854	0,5055	0,8628	0,5859
54	1,7160	0,5827	0,5666	1,1494	0,4930	0,5141	0,8577	0,5994
0,55	1,7333	0,5769	0,5782	1,1551	0,5005	0,5227	0,8525	0,6131
56	1,7507	0,5712	0,5897	1,1609	0,5080	0,5312	0,8473	0,6269
57	1,7683	0,5655	0,6014	1,1669	0,5154	0,5396	0,8419	0,6410
58	1,7860	0,5599	0,6131	1,1730	0,5227	0,5480	0,8365	0,6552
59	1,8040	0,5543	0,6248	1,1792	0,5299	0,5564	0,8309	0,6696
0,60	1,8221	0,5488	0,6367	1,1855	0,5370	0,5646	0,8253	0,6841
61	1,8404	0,5434	0,6485	1,1919	0,5441	0,5729	0,8196	0,6989
62	1,8589	0,5379	0,6605	1,1984	0,5511	0,5810	0,8139	0,7139
63	1,8776	0,5326	0,6725	1,2051	0,5581	0,5891	0,8080	0,7291
64	1,8965	0,5273	0,6846	1,2119	0,5649	0,5972	0,8021	0,7445
0,65	1,9155	0,5220	0,6967	1,2188	0,5717	0,6052	0,7961	0,7602
66	1,9348	0,5169	0,7090	1,2258	0,5784	0,6131	0,7900	0,7761
67	1,9542	0,5117	0,7213	1,2330	0,5850	0,6210	0,7838	0,7923
68	1,9739	0,5066	0,7336	1,2402	0,5915	0,6288	0,7776	0,8087
69	1,9937	0,5016	0,7461	1,2476	0,5980	0,6365	0,7712	0,8253
0,70	2,0138	0,4966	0,7586	1,2552	0,6044	0,6442	0,7648	0,8423
71	2,0340	0,4916	0,7712	1,2628	0,6107	0,6518	0,7584	0,8595
72	2,0544	0,4868	0,7838	1,2706	0,6169	0,6594	0,7518	0,8771
73	2,0751	0,4819	0,7966	1,2785	0,6231	0,6669	0,7452	0,8949
74	2,0959	0,4771	0,8094	1,2865	0,6291	0,6743	0,7385	0,9131
0,75	2,1170	0,4724	0,8223	1,2947	0,6351	0,6816	0,7317	0,9316
76	2,1383	0,4677	0,8353	1,3030	0,6411	0,6889	0,7248	0,9505
77	2,1598	0,4630	0,8484	1,3114	0,6469	0,6961	0,7179	0,9697
78	2,1815	0,4584	0,8615	1,3199	0,6527	0,7033	0,7109	0,9893
79	2,2034	0,4538	0,8748	1,3286	0,6584	0,7104	0,7038	1,0092
0,80	2.2255	0,4493	0,8881	1,3374	0,6640	0,7174	0,6967	1,0296

Кратные значения π и $\frac{\pi}{2}$ для вычисления тригонометрических функций при $x > 1{,}6$:

n	$n \cdot \frac{\pi}{2}$	$n \cdot \pi$	n	$n \cdot \frac{\pi}{2}$	$n \cdot \pi$
1	1,57080	3,14159	6	9,42478	18,84956
2	3,14159	6,28319	7	10,99557	21,99115
3	4,71239	9,42478	8	12,56637	25,13274
4	6,28319	12,56637	9	14,13717	28,27433
5	7,85398	15,70796	10	15,70796	31,41593

Примеры:

1) $\sin 7{,}5 =$

$= \sin\left(5 \cdot \frac{\pi}{2} - 0{,}35398\right) =$

$= \cos 0{,}35398 = 0{,}9380$

(линейная интерполяция!)

2) $\sin 29 = \sin(9\pi + 0{,}72567) =$

$= -\sin 0{,}72567 = -0{,}6637.$

(линейная интерполяция!)

x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x	sin x	cos x	tg x
0,80	2,2255	0,4493	0,8881	1,3374	0,6640	0,7174	0,6967	1,0296
81	2,2479	0,4449	0,9015	1,3464	0,6696	0,7243	0,6895	1,0505
82	2,2705	0,4404	0,9150	1,3555	0,6751	0,7311	0,6822	1,0717
83	2,2933	0,4360	0,9286	1,3647	0,6805	0,7379	0,6749	1,0934
84	2,3164	0,4317	0,9423	1,3740	0,6858	0,7446	0,6675	1,1156
0,85	2,3396	0,4274	0,9561	1,3835	0,6911	0,7513	0,6600	1,1383
86	2,3632	0,4232	0,9700	1,3932	0,6963	0,7578	0,6524	1,1616
87	2,3869	0,4190	0,9840	1,4029	0,7014	0,7643	0,6448	1,1853
88	2,4109	0,4148	0,9981	1,4128	0,7064	0,7707	0,6372	1,2097
89	2,4351	0,4107	1,0122	1,4229	0,7114	0,7771	0,6294	1,2346
0,90	2,4596	0,4066	1,0265	1,4331	0,7163	0,7833	0,6216	1,2602
91	2,4843	0,4025	1,0409	1,4434	0,7211	0,7895	0,6137	1,2864
92	2,5093	0,3985	1,0554	1,4539	0,7259	0,7956	0,6058	1,3133
93	2,5345	0,3946	1,0700	1,4645	0,7306	0,8016	0,5978	1,3409
94	2,5600	0,3906	1,0847	1,4753	0,7352	0,8076	0,5898	1,3692
0,95	2,5857	0,3867	1,0995	1,4862	0,7398	0,8134	0,5817	1,3984
96	2,6117	0,3829	1,1144	1,4973	0,7443	0,8192	0,5735	1,4284
97	2,6379	0,3791	1,1294	1,5085	0,7487	0,8249	0,5653	1,4592
98	2,6645	0,3753	1,1446	1,5199	0,7531	0,8305	0,5570	1,4910
99	2,6912	0,3716	1,1598	1,5314	0,7574	0,8360	0,5487	1,5237
1,00	2,7183	0,3679	1,1752	1,5431	0,7616	0,8415	0,5403	1,5574
01	2,7456	0,3642	1,1907	1,5549	0,7658	0,8468	0,5319	1,5922
02	2,7732	0,3606	1,2063	1,5669	0,7699	0,8521	0,5234	1,6281
03	2,8011	0,3570	1,2220	1,5790	0,7739	0,8573	0,5148	1,6652
04	2,8292	0,3535	1,2379	1,5913	0,7779	0,8624	0,5062	1,7036
1,05	2,8577	0,3499	1,2539	1,6038	0,7818	0,8674	0,4976	1,7433
06	2,8864	0,3465	1,2700	1,6164	0,7857	0,8724	0,4889	1,7844
07	2,9154	0,3430	1,2862	1,6292	0,7895	0,8772	0,4801	1,8270
08	2,9447	0,3396	1,3025	1,6421	0,7932	0,8820	0,4713	1,8712
09	2,9743	0,3362	1,3190	1,6552	0,7969	0,8866	0,4625	1,9171
1,10	3,0042	0,3329	1,3356	1,6685	0,8005	0,8912	0,4536	1,9648
11	3,0344	0,3296	1,3524	1,6820	0,8041	0,8957	0,4447	2,0143
12	3,0649	0,3263	1,3693	1,6956	0,8076	0,9001	0,4357	2,0660
13	3,0957	0,3230	1,3863	1,7093	0,8110	0,9044	0,4267	2,1198
14	3,1268	0,3198	1,4035	1,7233	0,8144	0,9086	0,4176	2,1759
1,15	3,1582	0,3166	1,4208	1,7374	0,8178	0,9128	0,4085	2,2345
16	3,1899	0,3135	1,4382	1,7517	0,8210	0,9168	0,3993	2,2958
17	3,2220	0,3104	1,4558	1,7662	0,8243	0,9208	0,3902	2,3600
18	3,2544	0,3073	1,4735	1,7808	0,8275	0,9246	0,3809	2,4273
19	3,2871	0,3042	1,4914	1,7957	0,8306	0,9284	0,3717	2,4979
1,20	3,3201	0,3012	1,5095	1,8107	0,8337	0,9320	0,3624	2,5722
21	3,3535	0,2982	1,5276	1,8258	0,8367	0,9356	0,3530	2,6503
22	3,3872	0,2952	1,5460	1,8412	0,8397	0,9391	0,3436	2,7328
23	3,4212	0,2923	1,5645	1,8568	0,8426	0,9425	0,3342	2,8198
24	3,4556	0,2894	1,5831	1,8725	0,8455	0,9458	0,3248	2,9119
1,25	3,4903	0,2865	1,6019	1,8884	0,8483	0,9490	0,3153	3,0096

x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x	sin x	cos x	tg x
1,25	3,4903	0,2865	1,6019	1,8884	0,8483	0,9490	0,3153	3,0096
26	3,5254	0,2837	1,6209	1,9045	0,8511	0,9521	0,3058	3,1133
27	3,5609	0,2808	1,6400	1,9208	0,8538	0,9551	0,2963	3,2236
28	3,5966	0,2780	1,6593	1,9373	0,8565	0,9580	0,2867	3,3413
29	3,6328	0,2753	1,6788	1,9540	0,8591	0,9608	0,2771	3,4672
1,30	3,6693	0,2725	1,6984	1,9709	0,8617	0,9636	0,2675	3,6021
31	3,7062	0,2698	1,7182	1,9880	0,8643	0,9662	0,2579	3,7471
32	3,7434	0,2671	1,7381	2,0053	0,8668	0,9687	0,2482	3,9033
33	3,7810	0,2645	1,7583	2,0228	0,8692	0,9711	0,2385	4,0723
34	3,8190	0,2618	1,7786	2,0404	0,8717	0,9735	0,2288	4,2556
1,35	3,8574	0,2592	1,7991	2,0583	0,8741	0,9757	0,2190	4,4552
36	3,8962	0,2567	1,8198	2,0764	0,8764	0,9779	0,2092	4,6734
37	3,9354	0,2541	1,8406	2,0947	0,8787	0,9799	0,1994	4,9131
38	3,9749	0,2516	1,8617	2,1132	0,8810	0,9819	0,1896	5,1774
39	4,0149	0,2491	1,8829	2,1320	0,8832	0,9837	0,1798	5,4707
1,40	4,0552	0,2466	1,9043	2,1509	0,8854	0,9854	0,1700	5,7979
41	4,0960	0,2441	1,9259	2,1700	0,8875	0,9871	0,1601	6,1654
42	4,1371	0,2417	1,9477	2,1894	0,8896	0,9887	0,1502	6,5811
43	4,1787	0,2393	1,9697	2,2090	0,8917	0,9901	0,1403	7,0555
44	4,2207	0,2369	1,9919	2,2288	0,8937	0,9915	0,1304	7,6018
1,45	4,2631	0,2346	2,0143	2,2488	0,8957	0,9927	0,1205	8,2381
46	4,3060	0,2322	2,0369	2,2691	0,8977	0,9939	0,1106	8,9886
47	4,3492	0,2299	2,0597	2,2896	0,8996	0,9949	0,1006	9,8874
48	4,3929	0,2276	2,0827	2,3103	0,9015	0,9959	0,0907	10,983
49	4,4371	0,2254	2,1059	2,3312	0,9033	0,9967	0,0807	12,350
1,50	4,4817	0,2231	2,1293	2,3524	0,9051	0,9975	0,0707	14,101
51	4,5267	0,2209	2,1529	2,3738	0,9069	0,9982	0,0608	16,428
52	4,5722	0,2187	2,1768	2,3955	0,9087	0,9987	0,0508	19,670
53	4,6182	0,2165	2,2008	2,4174	0,9104	0,9992	0,0408	24,498
54	4,6646	0,2144	2,2251	2,4395	0,9121	0,9995	0,0308	32,461
1,55	4,7115	0,2122	2,2496	2,4619	0,9138	0,9998	0,0208	48,078
56	4,7588	0,2101	2,2743	2,4845	0,9154	0,9999	0,0108	92,620
57	4,8066	0,2080	2,2993	2,5073	0,9170	1,0000	+0,0008	1255,8
58	4,8550	0,2060	2,3245	2,5305	0,9186	1,0000	−0,0092	−108,65
59	4,9037	0,2039	2,3499	2,5538	0,9201	0,9998	−0,0192	−52,067
1,60	4,9530	0,2019	2,3756	2,5775	0,9217	0,9996	−0,0292	−34,233

Кратные значения π и $\frac{\pi}{2}$ для вычисления тригонометрических функций при $x > 1{,}6$:

n	$n \cdot \frac{\pi}{2}$	$n \cdot \pi$	n	$n \cdot \frac{\pi}{2}$	$n \cdot \pi$
1	1,57080	3,14159	6	9,42478	18,84956
2	3,14159	6,28319	7	10,99557	21,99115
3	4,71239	9,42478	8	12,56637	25,13274
4	6,28319	12,56637	9	14,13717	28,27433
5	7,85398	15,70796	10	15,70796	31,41593

Для $x > 1{,}6$ значения e^x, e^{-x}, sh x, ch x и th x находятся из табл. 11; значения же тригонометрических функций находятся по формулам приведения (см. стр. 182). Примеры см. на стр. 53.

11. Показательные функции (для x от 1,6 до 10,0) *

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
1,60	4,9530	0,2019	**2,00**	7,3891	0,1353	**2,40**	11,023	0,09072
1,61	5,0028	0,1999	2,01	7,4633	0,1340	2,41	11,134	0,08982
1,62	5,0531	0,1979	2,02	7,5383	0,1327	2,42	11,246	0,08892
1,63	5,1039	0,1959	2,03	7,6141	0,1313	2,43	11,359	0,08804
1,64	5,1552	0,1940	2,04	7,6906	0,1300	2,44	11,473	0,08716
1,65	5,2070	0,1920	**2,05**	7,7679	0,1287	**2,45**	11,588	0,08629
1,66	5,2593	0,1901	2,06	7,8460	0,1275	2,46	11,705	0,08543
1,67	5,3122	0,1882	2,07	7,9248	0,1262	2,47	11,822	0,08458
1,68	5,3656	0,1864	2,08	8,0045	0,1249	2,48	11,941	0,08374
1,69	5,4195	0,1845	2,09	8,0849	0,1237	2,49	12,061	0,08291
1,70	5,4739	0,1827	**2,10**	8,1662	0,1225	**2,50**	12,182	0,08208
1,71	5,5290	0,1809	2,11	8,2482	0,1212	2,51	12,305	0,08127
1,72	5,5845	0,1791	2,12	8,3311	0,1200	2,52	12,429	0,08046
1,73	5,6407	0,1773	2,13	8,4149	0,1188	2,53	12,554	0,07966
1,74	5,6973	0,1755	2,14	8,4994	0,1177	2,54	12,680	0,07887
1,75	5,7546	0,1738	**2,15**	8,5849	0,1165	**2,55**	12,807	0,07808
1,76	5,8124	0,1720	2,16	8,6711	0,1153	2,56	12,936	0,07730
1,77	5,8709	0,1703	2,17	8,7583	0,1142	2,57	13,066	0,07654
1,78	5,9299	0,1686	2,18	8,8463	0,1130	2,58	13,197	0,07577
1,79	5,9895	0,1670	2,19	8,9352	0,1119	2,59	13,330	0,07502
1,80	6,0496	0,1653	**2,20**	9,0250	0,1108	**2,60**	13,464	0,07427
1,81	6,1104	0,1637	2,21	9,1157	0,1097	2,61	13,599	0,07353
1,82	6,1719	0,1620	2,22	9,2073	0,1086	2,62	13,736	0,07280
1,83	6,2339	0,1604	2,23	9,2999	0,1075	2,63	13,874	0,07208
1,84	6,2965	0,1588	2,24	9,3933	0,1065	2,64	14,013	0,07136
1,85	6,3598	0,1572	**2,25**	9,4877	0,1054	**2,65**	14,154	0,07065
1,86	6,4237	0,1557	2,26	9,5831	0,1044	2,66	14,296	0,06995
1,87	6,4883	0,1541	2,27	9,6794	0,1033	2,67	14,440	0,06925
1,88	6,5535	0,1526	2,28	9,7767	0,1023	2,68	14,585	0,06856
1,89	6,6194	0,1511	2,29	9,8749	0,1013	2,69	14,732	0,06788
1,90	6,6859	0,1496	**2,30**	9,9742	0,10026	**2,70**	14,880	0,06721
1,91	6,7531	0,1481	2,31	10,074	0,09926	2,71	15,029	0,06654
1,92	6,8210	0,1466	2,32	10,176	0,09827	2,72	15,180	0,06587
1,93	6,8895	0,1451	2,33	10,278	0,09730	2,73	15,333	0,06522
1,94	6,9588	0,1437	2,34	10,381	0,09633	2,74	15,487	0,06457
1,95	7,0287	0,1423	**2,35**	10,486	0,09537	**2,75**	15,643	0,06393
1,96	7,0993	0,1409	2,36	10,591	0,09442	2,76	15,800	0,06329
1,97	7,1707	0,1395	2,37	10,697	0,09348	2,77	15,959	0,06266
1,98	7,2427	0,1381	2,38	10,805	0,09255	2,78	16,119	0,06204
1,99	7,3155	0,1367	2,39	10,913	0,09163	2,79	16,281	0,06142
2,00	7,3891	0,1353	**2,40**	11,023	0,09072	**2,80**	16,445	0,06081

* Для вычисления гиперболических функций при $x > 1{,}6$ можно пользоваться формулами:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\ ;\ \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\ ;\ \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
2,80	16,445	0,06081	**3,25**	25,799	0,03877	**3,70**	40,447	0,02472
2,81	16,610	0,06020	3,26	26,050	0,03839	3,71	40,854	0,02448
2,82	16,777	0,05961	3,27	26,311	0,03801	3,72	41,264	0,02423
2,83	16,945	0,05901	3,28	26,576	0,03763	3,73	41,679	0,02399
2,84	17,116	0,05843	3,29	26,843	0,03725	3,74	42,098	0,02375
2,85	17,288	0,05784	**3,30**	27,113	0,03688	**3,75**	42,521	0,02352
2,86	17,462	0,05727	3,31	27,385	0,03652	3,76	42,948	0,02328
2,87	17,637	0,05670	3,32	27,660	0,03615	3,77	43,380	0,02305
2,88	17,814	0,05613	3,33	27,938	0,03579	3,78	43,816	0,02282
2,89	17,993	0,05558	3,34	28,219	0,03544	3,79	44,256	0,02260
2,90	18,174	0,05502	**3,35**	28,503	0,03508	**3,80**	44,701	0,02237
2,91	18,357	0,05448	3,36	28,789	0,03474	3,81	45,150	0,02215
2,92	18,541	0,05393	3,37	29,079	0,03439	3,82	45,604	0,02193
2,93	18,728	0,05340	3,38	29,371	0,03405	3,83	46,063	0,02171
2,94	18,916	0,05287	3,39	29,666	0,03371	3,84	46,525	0,02149
2,95	19,106	0,05234	**3,40**	29,964	0,03337	**3,85**	46,993	0,02128
2,96	19,298	0,05182	3,41	30,265	0,03304	3,86	47,465	0,02107
2,97	19,492	0,05130	3,42	30,569	0,03271	3,87	47,942	0,02086
2,98	19,688	0,05079	3,43	30,877	0,03239	3,88	48,424	0,02065
2,99	19,886	0,05029	3,44	31,187	0,03206	3,89	48,911	0,02045
3,00	20,086	0,04979	**3,45**	31,500	0,03175	**3,90**	49,402	0,02024
3,01	20,287	0,04929	3,46	31,817	0,03143	3,91	49,899	0,02004
3,02	20,491	0,04880	3,47	32,137	0,03112	3,92	50,400	0,01984
3,03	20,697	0,04832	3,48	32,460	0,03081	3,93	50,907	0,01964
3,04	20,905	0,04783	3,49	32,786	0,03050	3,94	51,419	0,01945
3,05	21,115	0,04736	**3,50**	33,115	0,03020	**3,95**	51,935	0,01925
3,06	21,328	0,04689	3,51	33,448	0,02990	3,96	52,457	0,01906
3,07	21,542	0,04642	3,52	33,784	0,02960	3,97	52,985	0,01887
3,08	21,758	0,04596	3,53	34,124	0,02930	3,98	53,517	0,01869
3,09	21,977	0,04550	3,54	34,467	0,02901	3,99	54,055	0,01850
3,10	22,198	0,04505	**3,55**	34,813	0,02872	**4,0**	54,598	0,01832
3,11	22,421	0,04460	3,56	35,163	0,02844	4,1	60,340	0,01657
3,12	22,646	0,04416	3,57	35,517	0,02816	4,2	66,686	0,01500
3,13	22,874	0,04372	3,58	35,874	0,02788	4,3	73,700	0,01357
3,14	23,104	0,04328	3,59	36,234	0,02760	4,4	81,451	0,01228
3,15	23,336	0,04285	**3,60**	36,598	0,02732	**4,5**	90,017	0,01111
3,16	23,571	0,04243	3,61	36,966	0,02705	4,6	99,484	0,01005
3,17	23,807	0,04200	3,62	37,338	0,02678	4,7	109,95	0,00910
3,18	24,047	0,04159	3,63	37,713	0,02652	4,8	121,51	0,00823
3,19	24,288	0,04117	3,64	38,092	0,02625	4,9	134,29	0,00745
3,20	24,533	0,04076	**3,65**	38,475	0,02599	**5,0**	148,41	0,00674
3,21	24,779	0,04036	3,66	38,861	0,02573	5,1	164,02	0,00610
3,22	25,028	0,03996	3,67	39,252	0,02548	5,2	181,27	0,00552
3,23	25,280	0,03956	3,68	39,646	0,02522	5,3	200,34	0,00499
3,24	25,534	0,03916	3,69	40,045	0,02497	5,4	221,41	0,00452
3,25	25,790	0,03877	**3,70**	40,447	0,02472	**5,5**	244,69	0,00409

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
5,5	244,69	0,00409	**7,0**	1096,6	0,000912	**8,5**	4914,8	0,000203
5,6	270,43	0,00370	7,1	1212,0	0,000825	8,6	5431,7	0,000184
5,7	298,87	0,00335	7,2	1339,4	0,000747	8,7	6002,9	0,000167
5,8	330,30	0,00303	7,3	1480,3	0,000676	8,8	6634,2	0,000151
5,9	365,04	0,00274	7,4	1636,0	0,000611	8,9	7332,0	0,000136
6,0	403,43	0,002479	**7,5**	1808,0	0,000553	**9,0**	8103,1	0,000123
6,1	445,86	0,002243	7,6	1998,2	0,000500	9,1	8955,3	0,000112
6,2	492,75	0,002029	7,7	2208,3	0,000453	9,2	9897,1	0,000101
6,3	544,57	0,001836	7,8	2440,6	0,000410	9,3	10938	0,000091
6,4	601,85	0,001662	7,9	2697,3	0,000371	9,4	12088	0,000083
6,5	665,14	0,001503	**8,0**	2981,0	0,000335	**9,5**	13360	0,000075
6,6	735,10	0,001360	8,1	3294,5	0,000304	9,6	14765	0,000068
6,7	812,41	0,001231	8,2	3641,0	0,000275	9,7	16318	0,000061
6,8	897,85	0,001114	8,3	4023,9	0,000249	9,8	18034	0,000055
6,9	992,27	0,001008	8,4	4447,1	0,000225	9,9	19930	0,000050
7,0	1096,6	0,000912	**8,5**	4914,8	0,000203	**10,0**	22026	0,000045

12. Натуральные логарифмы

Объяснения к таблице см. на стр. 61.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	0,0000	0,0100	0,0198	0,0296	0,0392	0,0488	0,0583	0,0677	0,0770	0,0862
1,1	0,0953	0,1044	0,1133	0,1222	0,1310	0,1398	0,1484	0,1570	0,1655	0,1740
1,2	0,1823	0,1906	0,1989	0,2070	0,2151	0,2231	0,2311	0,2390	0,2469	0,2546
1,3	0,2624	0,2700	0,2776	0,2852	0,2927	0,3001	0,3075	0,3148	0,3221	0,3293
1,4	0,3365	0,3436	0,3507	0,3577	0,3646	0,3716	0,3784	0,3853	0,3920	0,3988
1,5	0,4055	0,4121	0,4187	0,4253	0,4318	0,4383	0,4447	0,4511	0,4574	0,4637
1,6	0,4700	0,4762	0,4824	0,4886	0,4947	0,5008	0,5068	0,5128	0,5188	0,5247
1,7	0,5306	0,5365	0,5423	0,5481	0,5539	0,5596	0,5653	0,5710	0,5766	0,5822
1,8	0,5878	0,5933	0,5988	0,6043	0,6098	0,6152	0,6206	0,6259	0,6313	0,6366
1,9	0,6419	0,6471	0,6523	0,6575	0,6627	0,6678	0,6729	0,6780	0,6831	0,6881
2,0	0,6931	0,6981	0,7031	0,7080	0,7129	0,7178	0,7227	0,7275	0,7324	0,7372
2,1	0,7419	0,7467	0,7514	0,7561	0,7608	0,7655	0,7701	0,7747	0,7793	0,7839
2,2	0,7885	0,7930	0,7975	0,8020	0,8065	0,8109	0,8154	0,8198	0,8242	0,8286
2,3	0,8329	0,8372	0,8416	0,8459	0,8502	0,8544	0,8587	0,8629	0,8671	0,8713
2,4	0,8755	0,8796	0,8838	0,8879	0,8920	0,8961	0,9002	0,9042	0,9083	0,9123
2,5	0,9163	0,9203	0,9243	0,9282	0,9322	0,9361	0,9400	0,9439	0,9478	0,9517
2,6	0,9555	0,9594	0,9632	0,9670	0,9708	0,9746	0,9783	0,9821	0,9858	0,9895
2,7	0,9933	0,9969	1,0006	1,0043	1,0080	1,0116	1,0152	1,0188	1,0225	1,0260
2,8	1,0296	1,0332	1,0367	1,0403	1,0438	1,0473	1,0508	1,0543	1,0578	1,0613
2,9	1,0647	1,0682	1,0716	1,0750	1,0784	1,0818	1,0852	1,0886	1,0919	1,0953

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,0	1,0986	1,1019	1,1053	1,1086	1,1119	1,1151	1,1184	1,1217	1,1249	1,1282
3,1	1,1314	1,1346	1,1378	1,1410	1,1442	1,1474	1,1506	1,1537	1,1569	1,1600
3,2	1,1632	1,1663	1,1694	1,1725	1,1756	1,1787	1,1817	1,1848	1,1878	1,1909
3,3	1,1939	1,1969	1,2000	1,2030	1,2060	1,2090	1,2119	1,2149	1,2179	1,2208
3,4	1,2238	1,2267	1,2296	1,2326	1,2355	1,2384	1,2413	1,2442	1,2470	1,2499
3,5	1,2528	1,2556	1,2585	1,2613	1,2641	1,2669	1,2698	1,2726	1,2754	1,2782
3,6	1,2809	1,2837	1,2865	1,2892	1,2920	1,2947	1,2975	1,3002	1,3029	1,3056
3,7	1,3083	1,3110	1,3137	1,3164	1,3191	1,3218	1,3244	1,3271	1,3297	1,3324
3,8	1,3350	1,3376	1,3403	1,3429	1,3455	1,3481	1,3507	1,3533	1,3558	1,3584
3,9	1,3610	1,3635	1,3661	1,3686	1,3712	1,3737	1,3762	1,3788	1,3813	1,3838
4,0	1,3863	1,3888	1,3913	1,3938	1,3962	1,3987	1,4012	1,4036	1,4061	1,4085
4,1	1,4110	1,4134	1,4159	1,4183	1,4207	1,4231	1,4255	1,4279	1,4303	1,4327
4,2	1,4351	1,4375	1,4398	1,4422	1,4446	1,4469	1,4493	1,4516	1,4540	1,4563
4,3	1,4586	1,4609	1,4633	1,4656	1,4679	1,4702	1,4725	1,4748	1,4770	1,4793
4,4	1,4816	1,4839	1,4861	1,4884	1,4907	1,4929	1,4951	1,4974	1,4996	1,5019
4,5	1,5041	1,5063	1,5085	1,5107	1,5129	1,5151	1,5173	1,5195	1,5217	1,5239
4,6	1,5261	1,5282	1,5304	1,5326	1,5347	1,5369	1,5390	1,5412	1,5433	1,5454
4,7	1,5476	1,5497	1,5518	1,5539	1,5560	1,5581	1,5602	1,5623	1,5644	1,5665
4,8	1,5686	1,5707	1,5728	1,5748	1,5769	1,5790	1,5810	1,5831	1,5851	1,5872
4,9	1,5892	1,5913	1,5933	1,5953	1,5974	1,5994	1,6014	1,6034	1,6054	1,6074
5,0	1,6094	1,6114	1,6134	1,6154	1,6174	1,6194	1,6214	1,6233	1,6253	1,6273
5,1	1,6292	1,6312	1,6332	1,6351	1,6371	1,6390	1,6409	1,6429	1,6448	1,6467
5,2	1,6487	1,6506	1,6525	1,6544	1,6563	1,6582	1,6601	1,6620	1,6639	1,6658
5,3	1,6677	1,6696	1,6715	1,6734	1,6752	1,6771	1,6790	1,6808	1,6827	1,6845
5,4	1,6864	1,6882	1,6901	1,6919	1,6938	1,6956	1,6974	1,6993	1,7011	1,7029
5,5	1,7047	1,7066	1,7084	1,7102	1,7120	1,7138	1,7156	1,7174	1,7192	1,7210
5,6	1,7228	1,7246	1,7263	1,7281	1,7299	1,7317	1,7334	1,7352	1,7370	1,7387
5,7	1,7405	1,7422	1,7440	1,7457	1,7475	1,7492	1,7509	1,7527	1,7544	1,7561
5,8	1,7579	1,7596	1,7613	1,7630	1,7647	1,7664	1,7681	1,7699	1,7716	1,7733
5,9	1,7750	1,7766	1,7783	1,7800	1,7817	1,7834	1,7851	1,7867	1,7884	1,7901
6,0	1,7918	1,7934	1,7951	1,7967	1,7984	1,8001	1,8017	1,8034	1,8050	1,8066
6,1	1,8083	1,8099	1,8116	1,8132	1,8148	1,8165	1,8181	1,8197	1,8213	1,8229
6,2	1,8245	1,8262	1,8278	1,8294	1,8310	1,8326	1,8342	1,8358	1,8374	1,8390
6,3	1,8405	1,8421	1,8437	1,8453	1,8469	1,8485	1,8500	1,8516	1,8532	1,8547
6,4	1,8563	1,8579	1,8594	1,8610	1,8625	1,8641	1,8656	1,8672	1,8687	1,8703
6,5	1,8718	1,8733	1,8749	1,8764	1,8779	1,8795	1,8810	1,8825	1,8840	1,8856
6,6	1,8871	1,8886	1,8901	1,8916	1,8931	1,8946	1,8961	1,8976	1,8991	1,9006
6,7	1,9021	1,9036	1,9051	1,9066	1,9081	1,9095	1,9110	1,9125	1,9140	1,9155
6,8	1,9169	1,9184	1,9199	1,9213	1,9228	1,9242	1,9257	1,9272	1,9286	1,9301
6,9	1,9315	1,9330	1,9344	1,9359	1,9373	1,9387	1,9402	1,9416	1,9430	1,9445
7,0	1,9459	1,9473	1,9488	1,9502	1,9516	1,9530	1,9544	1,9559	1,9573	1,9587
7,1	1,9601	1,9615	1,9629	1,9643	1,9657	1,9671	1,9685	1,9699	1,9713	1,9727
7,2	1,9741	1,9755	1,9769	1,9782	1,9796	1,9810	1,9824	1,9838	1,9851	1,9865
7,3	1,9879	1,9892	1,9906	1,9920	1,9933	1,9947	1,9961	1,9974	1,9988	2,0001
7,4	2,0015	2,0028	2,0042	2,0055	2,0069	2,0082	2,0096	2,0109	2,0122	2,0136
7,5	2,0149	2,0162	2,0176	2,0189	2,0202	2,0215	2,0229	2,0242	2,0255	2,0268

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7,5	2,0149	2,0162	2,0176	2,0189	2,0202	2,0215	2,0229	2,0242	2,0255	2,0268
7,6	2,0281	2,0295	2,0308	2,0321	2,0334	2,0347	2,0360	2,0373	2,0386	2,0399
7,7	2,0412	2,0425	2,0438	2,0451	2,0464	2,0477	2,0490	2,0503	2,0516	2,0528
7,8	2,0541	2,0554	2,0567	2,0580	2,0592	2,0605	2,0618	2,0631	2,0643	2,0656
7,9	2,0669	2,0681	2,0694	2,0707	2,0719	2,0732	2,0744	2,0757	2,0769	2,0782
8,0	2,0794	2,0807	2,0819	2,0832	2,0844	2,0857	2,0869	2,0882	2,0894	2,0906
8,1	2,0919	2,0931	2,0943	2,0956	2,0968	2,0980	2,0992	2,1005	2,1017	2,1029
8,2	2,1041	2,1054	2,1066	2,1078	2,1090	2,1102	2,1114	2,1126	2,1138	2,1150
8,3	2,1163	2,1175	2,1187	2,1199	2,1211	2,1223	2,1235	2,1247	2,1258	2,1270
8,4	2,1282	2,1294	2,1306	2,1318	2,1330	2,1342	2,1353	2,1365	2,1377	2,1389
8,5	2,1401	2,1412	2,1424	2,1436	2,1448	2,1459	2,1471	2,1483	2,1494	2,1506
8,6	2,1518	2,1529	2,1541	2,1552	2,1564	2,1576	2,1587	2,1599	2,1610	2,1622
8,7	2,1633	2,1645	2,1656	2,1668	2,1679	2,1691	2,1702	2,1713	2,1725	2,1736
8,8	2,1748	2,1759	2,1770	2,1782	2,1793	2,1804	2,1815	2,1827	2,1838	2,1849
8,9	2,1861	2,1872	2,1883	2,1894	2,1905	2,1917	2,1928	2,1939	2,1950	2,1961
9,0	2,1972	2,1983	2,1994	2,2006	2,2017	2,2028	2,2039	2,2050	2,2061	2,2072
9,1	2,2083	2,2094	2,2105	2,2116	2,2127	2,2138	2,2148	2,2159	2,2170	2,2181
9,2	2,2192	2,2203	2,2214	2,2225	2,2235	2,2246	2,2257	2,2268	2,2279	2,2289
9,3	2,2300	2,2311	2,2322	2,2332	2,2343	2,2354	2,2364	2,2375	2,2386	2,2396
9,4	2,2407	2,2418	2,2428	2,2439	2,2450	2,2460	2,2471	2,2481	2,2492	2,2502
9,5	2,2513	2,2523	2,2534	2,2544	2,2555	2,2565	2,2576	2,2586	2,2597	2,2607
9,6	2,2618	2,2628	2,2638	2,2649	2,2659	2,2670	2,2680	2,2690	2,2701	2,2711
9,7	2,2721	2,2732	2,2742	2,2752	2,2762	2,2773	2,2783	2,2793	2,2803	2,2814
9,8	2,2824	2,2834	2,2844	2,2854	2,2865	2,2875	2,2885	2,2895	2,2905	2,2915
9,9	2,2925	2,2935	2,2946	2,2956	2,2966	2,2976	2,2986	2,2996	2,3006	2,3016

m	$\ln 10^m$
1	2,3026
2	4,6052
3	6,9078
4	9,2103
5	11,5129

Примеры: $\ln 862 = \ln 8{,}62 + \ln 10^2 = 2{,}1541 + 4{,}6052 = 6{,}7593$;
$\ln 0{,}0862 = \ln 8{,}62 - \ln 10^2 = 2{,}1541 - 4{,}6052 = -2{,}4511$.

Объяснения к таблице см. на следующей странице

Объяснения к таблице 12 натуральных логарифмов

В таблице 12 (стр. 58—60) даны натуральные логарифмы. В отличие от таблиц десятичных логарифмов здесь даны как мантиссы, так и характеристики. Логарифмы чисел, заключенных между 1 и 10, находятся непосредственно в таблице, причем на третий и четвертый десятичные знаки должна быть внесена интерполяционная поправка (см. стр. 15). Для чисел, имеющих до запятой больше или меньше одного знака, натуральные логарифмы находятся с помощью помещенных в конце таблицы *значений логарифмов степеней 10* (см. примеры на стр. 60).

Объяснения к таблицам 13, 14 и 15

Таблицы 13 и 14 (стр. 62—65) дают с четырьмя значащими цифрами значения длин окружностей и площадей кругов для диаметров d от $d = 1{,}00$ до $d = 9{,}99$. Если размеры диаметра выходят за эти границы, то находят площадь круга или длину окружности для диаметра, большего или меньшего в 10^k раз, чем заданный. При уменьшении или увеличении d в 10^k раз длина окружности также уменьшается или увеличивается в 10^k, а площадь круга соответственно в 10^{2k} раз. Если число значащих цифр у d больше трех, необходимо прибегнуть к интерполяции (см. стр. 15).

Примеры: 1) Для $d = 69{,}3$ длина окружности равна 217,7, а площадь круга 3772. 2) Для $d = 0{,}693$ длина окружности равна 2,177, а площадь круга 0,3772.

В таблице 15 (стр. 66—70) даны элементы сегмента круга (рис. 1). Таблица а) относится к сегментам кругов различных радиусов.

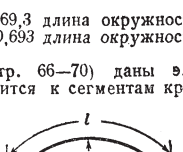


Рис. 1.

с длиной хорды, равной единице. Если при заданном подъеме (отношении стрелы к хорде) длина хорды равна a, то помещенное в таблице значение длины дуги должно быть умножено на a, а площадь сегмента на a^2.

Таблица б) содержит данные, относящиеся к различным сегментам одной и той же окружности радиуса, равного единице. Если длина радиуса равна r, то табличные значения l, h и a должны быть умножены на r, а площадь сегмента — на r^2. Если задается длина дуги l (или хорда a) и стрелка h, то радиус сегмента r равен отношению l (или a) к табличному значению длины дуги (или хорды), соответствующему заданному значению l/h (или a/h).

Пример: Если в сегменте длина хорды $a = 40$ *см*, а стрела $h = 6$ *см*, то для нахождения длины дуги l вычисляем $h/a = 0{,}15$ и умножаем на 40 соответствующее табличное значение l, взятое из таблицы а): $l = 40 \cdot 1{,}0590 = 42{,}36$ *см*. Радиус сегмента r и центральный угол α определяются при помощи таблицы б). Для $a/h = 6{,}67$ табличное значение a равно 1,1010, а $\alpha = 66{,}8°$ (линейная интерполяция!). Отсюда $r = 40 : 1{,}1010 = 36{,}33$ *см*. Теперь можно найти длину дуги l с помощью таблицы б): $l = 36{,}33 \cdot 1{,}1661 = 42{,}36$ *см*.

13. Длина окружности диаметра d

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	3,142	3,173	3,204	3,236	3,267	3,299	3,330	3,362	3,393	3,424
1,1	3,456	3,487	3,519	3,550	3,581	3,613	3,644	3,676	3,707	3,738
1,2	3,770	3,801	3,833	3,864	3,896	3,927	3,958	3,990	4,021	4,053
1,3	4,084	4,115	4,147	4,178	4,210	4,241	4,273	4,304	4,335	4,367
1,4	4,398	4,430	4,461	4,492	4,524	4,555	4,587	4,618	4,650	4,681
1,5	4,712	4,744	4,775	4,807	4,838	4,869	4,901	4,932	4,964	4,995
1,6	5,027	5,058	5,089	5,121	5,152	5,184	5,215	5,246	5,278	5,309
1,7	5,341	5,372	5,404	5,435	5,466	5,498	5,529	5,561	5,592	5,623
1,8	5,655	5,686	5,718	5,749	5,781	5,812	5,843	5,875	5,906	5,938
1,9	5,969	6,000	6,032	6,063	6,095	6,126	6,158	6,189	6,220	6,252
2,0	6,283	6,315	6,346	6,377	6,409	6,440	6,472	6,503	6,535	6,566
2,1	6,597	6,629	6,660	6,692	6,723	6,754	6,786	6,817	6,849	6,880
2,2	6,912	6,943	6,974	7,006	7,037	7,069	7,100	7,131	7,163	7,194
2,3	7,226	7,257	7,288	7,320	7,351	7,383	7,414	7,446	7,477	7,508
2,4	7,540	7,571	7,603	7,634	7,665	7,697	7,728	7,760	7,791	7,823
2,5	7,854	7,885	7,917	7,948	7,980	8,011	8,042	8,074	8,105	8,137
2,6	8,168	8,200	8,231	8,262	8,294	8,325	8,357	8,388	8,419	8,451
2,7	8,482	8,514	8,545	8,577	8,608	8,639	8,671	8,702	8,734	8,765
2,8	8,796	8,828	8,859	8,891	8,922	8,954	8,985	9,016	9,048	9,079
2,9	9,111	9,142	9,173	9,205	9,236	9,268	9,299	9,331	9,362	9,393
3,0	9,425	9,456	9,488	9,519	9,550	9,582	9,613	9,645	9,676	9,708
3,1	9,739	9,770	9,802	9,833	9,865	9,896	9,927	9,959	9,990	10,02
3,2	10,05	10,08	10,12	10,15	10,18	10,21	10,24	10,27	10,30	10,34
3,3	10,37	10,40	10,43	10,46	10,49	10,52	10,56	10,59	10,62	10,65
3,4	10,68	10,71	10,74	10,78	10,81	10,84	10,87	10,90	10,93	10,96
3,5	11,00	11,03	11,06	11,09	11,12	11,15	11,18	11,22	11,25	11,28
3,6	11,31	11,34	11,37	11,40	11,44	11,47	11,50	11,53	11,56	11,59
3,7	11,62	11,66	11,69	11,72	11,75	11,78	11,81	11,84	11,88	11,91
3,8	11,94	11,97	12,00	12,03	12,06	12,10	12,13	12,16	12,19	12,22
3,9	12,25	12,28	12,32	12,35	12,38	12,41	12,44	12,47	12,50	12,53
4,0	12,57	12,60	12,63	12,66	12,69	12,72	12,75	12,79	12,82	12,85
4,1	12,88	12,91	12,94	12,97	13,01	13,04	13,07	13,10	13,13	13,16
4,2	13,19	13,23	13,26	13,29	13,32	13,35	13,38	13,41	13,45	13,48
4,3	13,51	13,54	13,57	13,60	13,63	13,67	13,70	13,73	13,76	13,79
4,4	13,82	13,85	13,89	13,92	13,95	13,98	14,01	14,04	14,07	14,11
4,5	14,14	14,17	14,20	14,23	14,26	14,29	14,33	14,36	14,39	14,42
4,6	14,45	14,48	14,51	14,55	14,58	14,61	14,64	14,67	14,70	14,73
4,7	14,77	14,80	14,83	14,86	14,89	14,92	14,95	14,99	15,02	15,05
4,8	15,08	15,11	15,14	15,17	15,21	15,24	15,27	15,30	15,33	15,36
4,9	15,39	15,43	15,46	15,49	15,52	15,55	15,58	15,61	15,65	15,68
5,0	15,71	15,74	15,77	15,80	15,83	15,87	15,90	15,93	15,96	15,99
5,1	16,02	16,05	16,08	16,12	16,15	16,18	16,21	16,24	16,27	16,30
5,2	16,34	16,37	16,40	16,43	16,46	16,49	16,52	16,56	16,59	16,62
5,3	16,65	16,68	16,71	16,74	16,78	16,81	16,84	16,87	16,90	16,93
5,4	16,96	17,00	17,03	17,06	17,09	17,12	17,15	17,18	17,22	17,25

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,5	17,28	17,31	17,34	17,37	17,40	17,44	17,47	17,50	17,53	17,56
5,6	17,59	17,62	17,66	17,69	17,72	17,75	17,78	17,81	17,84	17,88
5,7	17,91	17,94	17,97	18,00	18,03	18,06	18,10	18,13	18,16	18,19
5,8	18,22	18,25	18,28	18,32	18,35	18,38	18,41	18,44	18,47	18,50
5,9	18,54	18,57	18,60	18,63	18,66	18,69	18,72	18,76	18,79	18,82
6,0	18,85	18,88	18,91	18,94	18,98	19,01	19,04	19,07	19,10	19,13
6,1	19,16	19,20	19,23	19,26	19,29	19,32	19,35	19,38	19,42	19,45
6,2	19,48	19,51	19,54	19,57	19,60	19,63	19,67	19,70	19,73	19,76
6,3	19,79	19,82	19,85	19,89	19,92	19,95	19,98	20,01	20,04	20,07
6,4	20,11	20,14	20,17	20,20	20,23	20,26	20,29	20,33	20,36	20,39
6,5	20,42	20,45	20,48	20,51	20,55	20,58	20,61	20,64	20,67	20,70
6,6	20,73	20,77	20,80	20,83	20,86	20,89	20,92	20,95	20,99	21,02
6,7	21,05	21,08	21,11	21,14	21,17	21,21	21,24	21,27	21,30	21,33
6,8	21,36	21,39	21,43	21,46	21,49	21,52	21,55	21,58	21,61	21,65
6,9	21,68	21,71	21,74	21,77	21,80	21,83	21,87	21,90	21,93	21,96
7,0	21,99	22,02	22,05	22,09	22,12	22,15	22,18	22,21	22,24	22,27
7,1	22,31	22,34	22,37	22,40	22,43	22,46	22,49	22,53	22,56	22,59
7,2	22,62	22,65	22,68	22,71	22,75	22,78	22,81	22,84	22,87	22,90
7,3	22,93	22,97	23,00	23,03	23,06	23,09	23,12	23,15	23,19	23,22
7,4	23,25	23,28	23,31	23,34	23,37	23,40	23,44	23,47	23,50	23,53
7,5	23,56	23,59	23,62	23,66	23,69	23,72	23,75	23,78	23,81	23,84
7,6	23,88	23,91	23,94	23,97	24,00	24,03	24,06	24,10	24,13	24,16
7,7	24,19	24,22	24,25	24,28	24,32	24,35	24,38	24,41	24,44	24,47
7,8	24,50	24,54	24,57	24,60	24,63	24,66	24,69	24,72	24,76	24,79
7,9	24,82	24,85	24,88	24,91	24,94	24,98	25,01	25,04	25,07	25,10
8,0	25,13	25,16	25,20	25,23	25,26	25,29	25,32	25,35	25,38	25,42
8,1	25,45	25,48	25,51	25,54	25,57	25,60	25,64	25,67	25,70	25,73
8,2	25,76	25,79	25,82	25,86	25,89	25,92	25,95	25,98	26,01	26,04
8,3	26,08	26,11	26,14	26,17	26,20	26,23	26,26	26,30	26,33	26,36
8,4	26,39	26,42	26,45	26,48	26,52	26,55	26,58	26,61	26,64	26,67
8,5	26,70	26,73	26,77	26,80	26,83	26,86	26,89	26,92	26,95	26,99
8,6	27,02	27,05	27,08	27,11	27,14	27,17	27,21	27,24	27,27	27,30
8,7	27,33	27,36	27,39	27,43	27,46	27,49	27,52	27,55	27,58	27,61
8,8	27,65	27,68	27,71	27,74	27,77	27,80	27,83	27,87	27,90	27,93
8,9	27,96	27,99	28,02	28,05	28,09	28,12	28,15	28,18	28,21	28,24
9,0	28,27	28,31	28,34	28,37	28,40	28,43	28,46	28,49	28,53	28,56
9,1	28,59	28,62	28,65	28,68	28,71	28,75	28,78	28,81	28,84	28,87
9,2	28,90	28,93	28,97	29,00	29,03	29,06	29,09	29,12	29,15	29,19
9,3	29,22	29,25	29,28	29,31	29,34	29,37	29,41	29,44	29,47	29,50
9,4	29,53	29,56	29,59	29,63	29,66	29,69	29,72	29,75	29,78	29,81
9,5	29,85	29,88	29,91	29,94	29,97	30,00	30,03	30,07	30,10	30,13
9,6	30,16	30,19	30,22	30,25	30,28	30,32	30,35	30,38	30,41	30,44
9,7	30,47	30,50	30,54	30,57	30,60	30,63	30,66	30,69	30,72	30,76
9,8	30,79	30,82	30,85	30,88	30,91	30,94	30,98	31,01	31,04	31,07
9,9	31,10	31,13	31,16	31,20	31,21	31,26	31,29	31,32	31,35	31,38
10,0	31,42									

Объяснения к таблице см. на стр. 61.

14. *Площадь круга диаметра d*

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	0,7854	0,8012	0,8171	0,8332	0,8495	0,8659	0,8825	0,8992	0,9161	0,9331
1,1	0,9503	0,9677	0,9852	1,003	1,021	1,039	1,057	1,075	1,094	1,112
1,2	1,131	1,150	1,169	1,188	1,208	1,227	1,247	1,267	1,287	1,307
1,3	1,327	1,348	1,368	1,389	1,410	1,431	1,453	1,474	1,496	1,517
1,4	1,539	1,561	1,584	1,606	1,629	1,651	1,674	1,697	1,720	1,744
1,5	1,767	1,791	1,815	1,839	1,863	1,887	1,911	1,936	1,961	1,986
1,6	2,011	2,036	2,061	2,087	2,112	2,138	2,164	2,190	2,217	2,243
1,7	2,270	2,297	2,324	2,351	2,378	2,405	2,433	2,461	2,488	2,516
1,8	2,545	2,573	2,602	2,630	2,659	2,688	2,717	2,746	2,776	2,806
1,9	2,835	2,865	2,895	2,926	2,956	2,986	3,017	3,048	3,079	3,110
2,0	3,142	3,173	3,205	3,237	3,269	3,301	3,333	3,365	3,398	3,431
2,1	3,464	3,497	3,530	3,563	3,597	3,631	3,664	3,698	3,733	3,767
2,2	3,801	3,836	3,871	3,906	3,941	3,976	4,011	4,047	4,083	4,119
2,3	4,155	4,191	4,227	4,264	4,301	4,337	4,374	4,412	4,449	4,486
2,4	4,524	4,562	4,600	4,638	4,676	4,714	4,753	4,792	4,831	4,870
2,5	4,909	4,948	4,988	5,027	5,067	5,107	5,147	5,187	5,228	5,269
2,6	5,309	5,350	5,391	5,433	5,474	5,515	5,557	5,599	5,641	5,683
2,7	5,726	5,768	5,811	5,853	5,896	5,940	5,983	6,026	6,070	6,114
2,8	6,158	6,202	6,246	6,290	6,335	6,379	6,424	6,469	6,514	6,560
2,9	6,605	6,651	6,697	6,743	6,789	6,835	6,881	6,928	6,975	7,022
3,0	7,069	7,116	7,163	7,211	7,258	7,306	7,354	7,402	7,451	7,499
3,1	7,548	7,596	7,645	7,694	7,744	7,793	7,843	7,892	7,942	7,992
3,2	8,042	8,093	8,143	8,194	8,245	8,296	8,347	8,398	8,450	8,501
3,3	8,553	8,605	8,657	8,709	8,762	8,814	8,867	8,920	8,973	9,026
3,4	9,079	9,133	9,186	9,240	9,294	9,348	9,402	9,457	9,511	9,566
3,5	9,621	9,676	9,731	9,787	9,842	9,898	9,954	10,01	10,07	10,12
3,6	10,18	10,24	10,29	10,35	10,41	10,46	10,52	10,58	10,64	10,69
3,7	10,75	10,81	10,87	10,93	10,99	11,04	11,10	11,16	11,22	11,28
3,8	11,34	11,40	11,46	11,52	11,58	11,64	11,70	11,76	11,82	11,88
3,9	11,95	12,01	12,07	12,13	12,19	12,25	12,32	12,38	12,44	12,50
4,0	12,57	12,63	12,69	12,76	12,82	12,88	12,95	13,01	13,07	13,14
4,1	13,20	13,27	13,33	13,40	13,46	13,53	13,59	13,66	13,72	13,79
4,2	13,85	13,92	13,99	14,05	14,12	14,19	14,25	14,32	14,39	14,45
4,3	14,52	14,59	14,66	14,73	14,79	14,86	14,93	15,00	15,07	15,14
4,4	15,21	15,27	15,34	15,41	15,48	15,55	15,62	15,69	15,76	15,83
4,5	15,90	15,98	16,05	16,12	16,19	16,26	16,33	16,40	16,47	16,55
4,6	16,62	16,69	16,76	16,84	16,91	16,98	17,06	17,13	17,20	17,28
4,7	17,35	17,42	17,50	17,57	17,65	17,72	17,80	17,87	17,95	18,02
4,8	18,10	18,17	18,25	18,32	18,40	18,47	18,55	18,63	18,70	18,78
4,9	18,86	18,93	19,01	19,09	19,17	19,24	19,32	19,40	19,48	19,56
5,0	19,63	19,71	19,79	19,87	19,95	20,03	20,11	20,19	20,27	20,35
5,1	20,43	20,51	20,59	20,67	20,75	20,83	20,91	20,99	21,07	21,16
5,2	21,24	21,32	21,40	21,48	21,57	21,65	21,73	21,81	21,90	21,98
5,3	22,06	22,15	22,23	22,31	22,40	22,48	22,56	22,65	22,73	22,82
5,4	22,90	22,99	23,07	23,16	23,24	23,33	23,41	23,50	23,59	23,67

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,5	23,76	23,84	23,93	24,02	24,11	24,19	24,28	24,37	24,45	24,54
5,6	24,63	24,72	24,81	24,89	24,98	25,07	25,16	25,25	25,34	25,43
5,7	25,52	25,61	25,70	25,79	25,88	25,97	26,06	26,15	26,24	26,33
5,8	26,42	26,51	26,60	26,69	26,79	26,88	26,97	27,06	27,15	27,25
5,9	27,34	27,43	27,53	27,62	27,71	27,81	27,90	27,99	28,09	28,18
6,0	28,27	28,37	28,46	28,56	28,65	28,75	28,84	28,94	29,03	29,13
6,1	29,22	29,32	29,42	29,51	29,61	29,71	29,80	29,90	30,00	30,09
6,2	30,19	30,29	30,39	30,48	30,58	30,68	30,78	30,88	30,97	31,07
6,3	31,17	31,27	31,37	31,47	31,57	31,67	31,77	31,87	31,97	32,07
6,4	32,17	32,27	32,37	32,47	32,57	32,67	32,78	32,88	32,98	33,08
6,5	33,18	33,29	33,39	33,49	33,59	33,70	33,80	33,90	34,00	34,11
6,6	34,21	34,32	34,42	34,52	34,63	34,73	34,84	34,94	35,05	35,15
6,7	35,26	35,36	35,47	35,57	35,68	35,78	35,89	36,00	36,10	36,21
6,8	36,32	36,42	36,53	36,64	36,75	36,85	36,96	37,07	37,18	37,28
6,9	37,39	37,50	37,61	37,72	37,83	37,94	38,05	38,16	38,26	38,37
7,0	38,48	38,59	38,70	38,82	38,93	39,04	39,15	39,26	39,37	39,48
7,1	39,59	39,70	39,82	39,93	40,04	40,15	40,26	40,38	40,49	40,60
7,2	40,72	40,83	40,94	41,06	41,17	41,28	41,40	41,51	41,62	41,74
7,3	41,85	41,97	42,08	42,20	42,31	42,43	42,54	42,66	42,78	42,89
7,4	43,01	43,12	43,24	43,36	43,47	43,59	43,71	43,83	43,94	44,06
7,5	44,18	44,30	44,41	44,53	44,65	44,77	44,89	45,01	45,13	45,25
7,6	45,36	45,48	45,60	45,72	45,84	45,96	46,08	46,20	46,32	46,45
7,7	46,57	46,69	46,81	46,93	47,05	47,17	47,29	47,42	47,54	47,66
7,8	47,78	47,91	48,03	48,15	48,27	48,40	48,52	48,65	48,77	48,89
7,9	49,02	49,14	49,27	49,39	49,51	49,64	49,76	49,89	50,01	50,14
8,0	50,27	50,39	50,52	50,64	50,77	50,90	51,02	51,15	51,28	51,40
8,1	51,53	51,66	51,78	51,91	52,04	52,17	52,30	52,42	52,55	52,68
8,2	52,81	52,94	53,07	53,20	53,33	53,46	53,59	53,72	53,85	53,98
8,3	54,11	54,24	54,37	54,50	54,63	54,76	54,89	55,02	55,15	55,29
8,4	55,42	55,55	55,68	55,81	55,95	56,08	56,21	56,35	56,48	56,61
8,5	56,75	56,88	57,01	57,15	57,28	57,41	57,55	57,68	57,82	57,95
8,6	58,09	58,22	58,36	58,49	58,63	58,77	58,90	59,04	59,17	59,31
8,7	59,45	59,58	59,72	59,86	59,99	60,13	60,27	60,41	60,55	60,68
8,8	60,82	60,96	61,10	61,24	61,38	61,51	61,65	61,79	61,93	62,07
8,9	62,21	62,35	62,49	62,63	62,77	62,91	63,05	63,19	63,33	63,48
9,0	63,62	63,76	63,90	64,04	64,18	64,33	64,47	64,61	64,75	64,90
9,1	65,04	65,18	65,33	65,47	65,61	65,76	65,90	66,04	66,19	66,33
9,2	66,48	66,62	66,77	66,91	67,06	67,20	67,35	67,49	67,64	67,78
9,3	67,93	68,08	68,22	68,37	68,51	68,66	68,81	68,96	69,10	69,25
9,4	69,40	69,55	69,69	69,84	69,99	70,14	70,29	70,44	70,58	70,73
9,5	70,88	71,03	71,18	71,33	71,48	71,63	71,78	71,93	72,08	72,23
9,6	72,38	72,53	72,68	72,84	72,99	73,14	73,29	73,44	73,59	73,75
9,7	73,90	74,05	74,20	74,36	74,51	74,66	74,82	74,97	75,12	75,28
9,8	75,43	75,58	75,74	75,89	76,05	76,20	76,36	76,51	76,67	76,82
9,9	76,98	77,13	77,29	77,44	77,60	77,76	77,91	78,07	78,23	78,38
10,0	78,54									

Объяснение к таблице см. на стр. 61.

15. Элементы сегмента круга

а) Длина дуги и площадь сегмента для хорды, равной единице

Подъем (отношение стрелы к хорде) $\frac{h}{a}$	Длина дуги l	Площадь сегмента	Подъем (отношение стрелы к хорде) $\frac{h}{a}$	Длина дуги l	Площадь сегмента
—	—	—	**0,25**	1,1591	0,1747
0,01	1,0003	0,0067	0,26	1,1715	0,1824
0,02	1,0011	0,0133	0,27	1,1843	0,1901
0,03	1,0024	0,0200	0,28	1,1975	0,1979
0,04	1,0043	0,0267	0,29	1,2110	0,2058
0,05	1,0067	0,0334	**0,30**	1,2250	0,2137
0,06	1,0096	0,0401	0,31	1,2393	0,2218
0,07	1,0130	0,0468	0,32	1,2539	0,2299
0,08	1,0170	0,0536	0,33	1,2689	0,2381
0,09	1,0215	0,0604	0,34	1,2843	0,2464
0,10	1,0265	0,0672	**0,35**	1,3000	0,2548
0,11	1,0320	0,0740	0,36	1,3160	0,2633
0,12	1,0380	0,0809	0,37	1,3323	0,2719
0,13	1,0445	0,0878	0,38	1,3490	0,2806
0,14	1,0515	0,0948	0,39	1,3660	0,2893
0,15	1,0590	0,1018	**0,40**	1,3832	0,2982
0,16	1,0669	0,1088	0,41	1,4008	0,3072
0,17	1,0754	0,1159	0,42	1,4186	0,3162
0,18	1,0843	0,1231	0,43	1,4367	0,3254
0,19	1,0936	0,1303	0,44	1,4551	0,3347
0,20	1,1035	0,1375	**0,45**	1,4738	0,3441
0,21	1,1137	0,1448	0,46	1,4927	0,3536
0,22	1,1244	0,1522	0,47	1,5118	0,3632
0,23	1,1356	0,1596	0,48	1,5313	0,3729
0,24	1,1471	0,1671	0,49	1,5509	0,3828
0,25	1,1591	0,1747	**0,50**	1,5708	0,3927

Объяснения к таблице см. на стр. 61.

Формулы, относящиеся к сегменту, см. на стр. 169.

б) Длина дуги, стрелка, длина хорды и площадь сегмента для радиуса, равного единице

Центр. угол $\alpha°$	Длина дуги l	Стрелка h	$\frac{l}{h}$	Длина хорды a	$\frac{a}{h}$	Площадь сегмента
1	0,0175	0,0000	458,37	0,0175	458,36	0,00000
2	0,0349	0,0002	229,19	0,0349	229,18	0,00000
3	0,0524	0,0003	152,80	0,0524	152,78	0,00001
4	0,0698	0,0006	114,60	0,0698	114,58	0,00003
5	0,0873	0,0010	91,69	0,0872	91,66	0,00006
6	0,1047	0,0014	76,41	0,1047	76,38	0,00010
7	0,1222	0,0019	65,50	0,1221	65,46	0,00015
8	0,1396	0,0024	57,32	0,1395	57,27	0,00023
9	0,1571	0,0031	50,96	0,1569	50,90	0,00032
10	0,1745	0,0038	45,87	0,1743	45,81	0,00044
11	0,1920	0,0046	41,70	0,1917	41,64	0,00059
12	0,2094	0,0055	38,23	0,2091	38,16	0,00076
13	0,2269	0,0064	35,30	0,2264	35,22	0,00097
14	0,2443	0,0075	32,78	0,2437	32,70	0,00121
15	0,2618	0,0086	30,60	0,2611	30,51	0,00149
16	0,2793	0,0097	28,69	0,2783	28,60	0,00181
17	0,2967	0,0110	27,01	0,2956	26,91	0,00217
18	0,3142	0,0123	25,52	0,3129	25,41	0,00257
19	0,3316	0,0137	24,18	0,3301	24,07	0,00302
20	0,3491	0,0152	22,98	0,3473	22,86	0,00352
21	0,3665	0,0167	21,89	0,3645	21,77	0,00408
22	0,3840	0,0184	20,90	0,3816	20,77	0,00468
23	0,4014	0,0201	20,00	0,3987	19,86	0,00535
24	0,4189	0,0219	19,17	0,4158	19,03	0,00607
25	0,4363	0,0237	18,41	0,4329	18,26	0,00686
26	0,4538	0,0256	17,71	0,4499	17,55	0,00771
27	0,4712	0,0276	17,06	0,4669	16,90	0,00862
28	0,4887	0,0297	16,45	0,4838	16,29	0,00961
29	0,5061	0,0319	15,89	0,5008	15,72	0,01067
30	0,5236	0,0341	15,37	0,5176	15,19	0,01180
31	0,5411	0,0364	14,88	0,5345	14,70	0,01301
32	0,5585	0,0387	14,42	0,5513	14,23	0,01429
33	0,5760	0,0412	13,99	0,5680	13,79	0,01566
34	0,5934	0,0437	13,58	0,5847	13,38	0,01711
35	0,6109	0,0463	13,20	0,6014	12,99	0,01864
36	0,6283	0,0489	12,84	0,6180	12,63	0,02027
37	0,6458	0,0517	12,50	0,6346	12,28	0,02198
38	0,6632	0,0545	12,17	0,6511	11,95	0,02378
39	0,6807	0,0574	11,87	0,6676	11,64	0,02568
40	0,6981	0,0603	11,58	0,6840	11,34	0,02767
41	0,7156	0,0633	11,30	0,7004	11,06	0,02976
42	0,7330	0,0664	11,04	0,7167	10,79	0,03195
43	0,7505	0,0696	10,79	0,7330	10,53	0,03425
44	0,7679	0,0728	10,55	0,7492	10,29	0,03664
45	0,7854	0,0761	10,32	0,7654	10,05	0,03915

Объяснения к таблице см. на стр. 61.
Формулы, относящиеся к сегменту, см. на стр. 169.

Центр. угол α°	Длина дуги l	Стрелка h	$\frac{l}{h}$	Длина хорды a	$\frac{a}{h}$	Площадь сегмента
45	0,7854	0,0761	10,32	0,7654	10,05	0,03915
46	0,8029	0,0795	10,10	0,7815	9,83	0,04176
47	0,8203	0,0829	9,89	0,7975	9,62	0,04448
48	0,8378	0,0865	9,69	0,8135	9,41	0,04731
49	0,8552	0,0900	9,50	0,8294	9,21	0,05025
50	0,8727	0,0937	9,31	0,8452	9,02	0,05331
51	0,8901	0,0974	9,14	0,8610	8,84	0,05649
52	0,9076	0,1012	8,97	0,8767	8,66	0,05978
53	0,9250	0,1051	8,80	0,8924	8,49	0,06319
54	0,9425	0,1090	8,65	0,9080	8,33	0,06673
55	0,9599	0,1130	8,50	0,9235	8,17	0,07039
56	0,9774	0,1171	8,35	0,9389	8,02	0,07417
57	0,9948	0,1212	8,21	0,9543	7,88	0,07808
58	1,0123	0,1254	8,07	0,9696	7,73	0,08212
59	1,0297	0,1296	7,94	0,9848	7,60	0,08629
60	1,0472	0,1340	7,82	1,0000	7,46	0,09059
61	1,0647	0,1384	7,69	1,0151	7,34	0,09502
62	1,0821	0,1428	7,58	1,0301	7,21	0,09958
63	1,0996	0,1474	7,46	1,0450	7,09	0,10428
64	1,1170	0,1520	7,35	1,0598	6,97	0,10911
65	1,1345	0,1566	7,24	1,0746	6,86	0,11408
66	1,1519	0,1613	7,14	1,0893	6,75	0,11919
67	1,1694	0,1661	7,04	1,1039	6,65	0,12443
68	1,1868	0,1710	6,94	1,1184	6,54	0,12982
69	1,2043	0,1759	6,85	1,1328	6,44	0,13535
70	1,2217	0,1808	6,76	1,1472	6,34	0,14102
71	1,2392	0,1859	6,67	1,1614	6,25	0,14683
72	1,2566	0,1910	6,58	1,1756	6,16	0,15279
73	1,2741	0,1961	6,50	1,1896	6,07	0,15889
74	1,2915	0,2014	6,41	1,2036	5,98	0,16514
75	1,3090	0,2066	6,33	1,2175	5,89	0,17154
76	1,3265	0,2120	6,26	1,2313	5,81	0,17808
77	1,3439	0,2174	6,18	1,2450	5,73	0,18477
78	1,3614	0,2229	6,11	1,2586	5,65	0,19160
79	1,3788	0,2284	6,04	1,2722	5,57	0,19859
80	1,3963	0,2340	5,97	1,2856	5,49	0,20573
81	1,4137	0,2396	5,90	1,2989	5,42	0,21301
82	1,4312	0,2453	5,83	1,3121	5,35	0,22045
83	1,4486	0,2510	5,77	1,3252	5,28	0,22804
84	1,4661	0,2569	5,71	1,3383	5,21	0,23578
85	1,4835	0,2627	5,65	1,3512	5,14	0,24367
86	1,5010	0,2686	5,59	1,3640	5,08	0,25171
87	1,5184	0,2746	5,53	1,3767	5,01	0,25990
88	1,5359	0,2807	5,47	1,3893	4,95	0,26825
89	1,5533	0,2867	5,42	1,4018	4,89	0,27675
90	1,5708	0,2929	5,36	1,4142	4,83	0,28540

Центр. угол $\alpha°$	Длина дуги l	Стрелка h	$\frac{l}{h}$	Длина хорды a	$\frac{a}{h}$	Площадь сегмента
90	1,5708	0,2929	5,36	1,4142	4,83	0,28540
91	1,5882	0,2991	5,31	1,4265	4,77	0,29420
92	1,6057	0,3053	5,26	1,4387	4,71	0,30316
93	1,6232	0,3116	5,21	1,4507	4,66	0,31226
94	1,6406	0,3180	5,16	1,4627	4,60	0,32152
95	1,6581	0,3244	5,11	1,4746	4,55	0,33093
96	1,6755	0,3309	5,06	1,4863	4,49	0,34050
97	1,6930	0,3374	5,02	1,4979	4,44	0,35021
98	1,7104	0,3439	4,97	1,5094	4,39	0,36008
99	1,7279	0,3506	4,93	1,5208	4,34	0,37009
100	1,7453	0,3572	4,89	1,5321	4,29	0,38026
101	1,7628	0,3639	4,84	1,5432	4,24	0,39058
102	1,7802	0,3707	4,80	1,5543	4,19	0,40104
103	1,7977	0,3775	4,76	1,5652	4,15	0,41166
104	1,8151	0,3843	4,72	1,5760	4,10	0,42242
105	1,8326	0,3912	4,68	1,5867	4,06	0,43333
106	1,8500	0,3982	4,65	1,5973	4,01	0,44439
107	1,8675	0,4052	4,61	1,6077	3,97	0,45560
108	1,8850	0,4122	4,57	1,6180	3,93	0,46695
109	1,9024	0,4193	4,54	1,6282	3,88	0,47845
110	1,9199	0,4264	4,50	1,6383	3,84	0,49008
111	1,9373	0,4336	4,47	1,6483	3,80	0,50187
112	1,9548	0,4408	4,43	1,6581	3,76	0,51379
113	1,9722	0,4481	4,40	1,6678	3,72	0,52586
114	1,9897	0,4554	4,37	1,6773	3,68	0,53806
115	2,0071	0,4627	4,34	1,6868	3,65	0,55041
116	2,0246	0,4701	4,31	1,6961	3,61	0,56289
117	2,0420	0,4775	4,28	1,7053	3,57	0,57551
118	2,0595	0,4850	4,25	1,7143	3,53	0,58827
119	2,0769	0,4925	4,22	1,7233	3,50	0,60116
120	2,0944	0,5000	4,19	1,7321	3,46	0,61418
121	2,1118	0,5076	4,16	1,7407	3,43	0,62734
122	2,1293	0,5152	4,13	1,7492	3,40	0,64063
123	2,1468	0,5228	4,11	1,7576	3,36	0,65404
124	2,1642	0,5305	4,08	1,7659	3,33	0,66759
125	2,1817	0,5383	4,05	1,7740	3,30	0,68125
126	2,1991	0,5460	4,03	1,7820	3,26	0,69505
127	2,2166	0,5538	4,00	1,7899	3,23	0,70897
128	2,2340	0,5616	3,98	1,7976	3,20	0,72301
129	2,2515	0,5695	3,95	1,8052	3,17	0,73716
130	2,2689	0,5774	3,93	1,8126	3,14	0,75144
131	2,2864	0,5853	3,91	1,8199	3,11	0,76584
132	2,3038	0,5933	3,88	1,8271	3,08	0,78034
133	2,3213	0,6013	3,86	1,8341	3,05	0,79497
134	2,3387	0,6093	3,84	1,8410	3,02	0,80970
135	2,3562	0,6173	3,82	1,8478	2,99	0,82454

Объяснения к таблице см. на стр. 61.

Центр. угол $\alpha°$	Длина дуги l	Стрелка h	$\frac{l}{h}$	Длина хорды a	$\frac{a}{h}$	Площадь сегмента
135	2,3562	0,6173	3,82	1,8478	2,99	0,82454
136	2,3736	0,6254	3,80	1,8544	2,97	0,83949
137	2,3911	0,6335	3,77	1,8608	2,94	0,85455
138	2,4086	0,6416	3,75	1,8672	2,91	0,86971
139	2,4260	0,6498	3,73	1,8733	2,88	0,88497
140	2,4435	0,6580	3,71	1,8794	2,86	0,90034
141	2,4609	0,6662	3,69	1,8853	2,83	0,91580
142	2,4784	0,6744	3,67	1,8910	2,80	0,93135
143	2,4958	0,6827	3,66	1,8966	2,78	0,94700
144	2,5133	0,6910	3,64	1,9021	2,75	0,96274
145	2,5307	0,6993	3,62	1,9074	2,73	0,97858
146	2,5482	0,7076	3,60	1,9126	2,70	0,99449
147	2,5656	0,7160	3,58	1,9176	2,68	1,01050
148	2,5831	0,7244	3,57	1,9225	2,65	1,02658
149	2,6005	0,7328	3,55	1,9273	2,63	1,04275
150	2,6180	0,7412	3,53	1,9319	2,61	1,05900
151	2,6354	0,7496	3,52	1,9363	2,58	1,07532
152	2,6529	0,7581	3,50	1,9406	2,56	1,09171
153	2,6704	0,7666	3,48	1,9447	2,54	1,10818
154	2,6878	0,7750	3,47	1,9487	2,51	1,12472
155	2,7053	0,7836	3,45	1,9526	2,49	1,14132
156	2,7227	0,7921	3,44	1,9563	2,47	1,15799
157	2,7402	0,8006	3,42	1,9598	2,45	1,17472
158	2,7576	0,8092	3,41	1,9633	2,43	1,19151
159	2,7751	0,8178	3,39	1,9665	2,40	1,20835
160	2,7925	0,8264	3,38	1,9696	2,38	1,22525
161	2,8100	0,8350	3,37	1,9726	2,36	1,24221
162	2,8274	0,8436	3,35	1,9754	2,34	1,25921
163	2,8449	0,8522	3,34	1,9780	2,32	1,27626
164	2,8623	0,8608	3,33	1,9805	2,30	1,29335
165	2,8798	0,8695	3,31	1,9829	2,28	1,31049
166	2,8972	0,8781	3,30	1,9851	2,26	1,32766
167	2,9147	0,8868	3,29	1,9871	2,24	1,34487
168	2,9322	0,8955	3,27	1,9890	2,22	1,36212
169	2,9496	0,9042	3,26	1,9908	2,20	1,37940
170	2,9671	0,9128	3,25	1,9924	2,18	1,39671
171	2,9845	0,9215	3,24	1,9938	2,16	1,41404
172	3,0020	0,9302	3,23	1,9951	2,14	1,43140
173	3,0194	0,9390	3,22	1,9963	2,13	1,44878
174	3,0369	0,9477	3,20	1,9973	2,11	1,46617
175	3,0543	0,9564	3,19	1,9981	2,09	1,48359
176	3,0718	0,9651	3,18	1,9988	2,07	1,50101
177	3,0892	0,9738	3,17	1,9993	2,05	1,51845
178	3,1067	0,9825	3,16	1,9997	2,04	1,53589
179	3,1241	0,9913	3,15	1,9999	2,02	1,55334
180	3,1416	1,0000	3,14	2,0000	2,00	1,57080

16. Перевод градусной меры в радианную

Длина дуг окружности радиуса 1

Угол	Дуга	Угол	Дуга	Угол	Дуга
1″	0,000005	1°	0,017453	31°	0,541052
2	0,000010	2	0,034907	32	0,558505
3	0,000015	3	0,052360	33	0,575959
4	0,000019	4	0,069813	34	0,593412
5	0,000024	5	0,087266	35	0,610865
6	0,000029	6	0,104720	36	0,628319
7	0,000034	7	0,122173	37	0,645772
8	0,000039	8	0,139626	38	0,663225
9	0,000044	9	0,157080	39	0,680678
10	0,000048	10	0,174533	40	0,698132
20	0,000097	11	0,191985	45	0,785398
30	0,000145	12	0,209440	50	0,872665
40	0,000194	13	0,226893	55	0,959931
50	0,000242	14	0,244346	60	1,047198
		15	0,261799	65	1,134464
1′	0,000291	16	0,279253	70	1,221730
2	0,000582	17	0,296706	75	1,308997
3	0,000373	18	0,314159	80	1,396263
4	0,001164	19	0,331613	85	1,483530
5	0,001454	20	0,349066	90	1,570796
6	0,001745	21	0,366519	100	1,745329
7	0,002036	22	0,383972	120	2,094395
8	0,002327	23	0,401426	150	2,617994
9	0,002618	24	0,418879	180	3,141593
10	0,002909	25	0,436332	200	3,490659
20	0,005818	26	0,453786	250	4,363323
30	0,008727	27	0,471239	270	4,712389
40	0,011636	28	0,488692	300	5,235988
50	0,014544	29	0,506145	360	6,283185
		30	0,523599	400	6,981317

Примеры:

1) 52°37′23″

50°	= 0,872665
2°	= 0,034907
30′	= 0,008727
7′	= 0,002036
20″	= 0,000097
3″	= 0,000015
	0,918447

52°37′23″ = 0,91845 рад.

Вычисления удобно проводить на счетах.

2) 5,645 рад.

5,235988	= 300°
0,409012	
0,401426	= 23°
0,007586	
0,005818	= 20′
0,001768	
0,001745	= 6′
0,000023	= 5″

5,645 рад. = 323°26′5″

Дуга, равная радиусу, имеет 57°17′44″,8 (= 1 радиан).

17. Пропорциональные части

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	1
2	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	2
3	3,3	3,6	3,9	4,2	4,5	4,8	5,1	5,4	5,7	6,0	3
4	4,4	4,8	5,2	5,6	6,0	6,4	6,8	7,2	7,6	8,0	4
5	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0	5
6	6,6	7,2	7,8	8,4	9,0	9,6	10,2	10,8	11,4	12,0	6
7	7,7	8,4	9,1	9,8	10,5	11,2	11,9	12,6	13,3	14,0	7
8	8,8	9,6	10,4	11,2	12,0	12,8	13,6	14,4	15,2	16,0	8
9	9,9	10,8	11,7	12,6	13,5	14,4	15,3	16,2	17,1	18,0	9

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
1	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	1
2	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0	5,2	5,4	5,6	5,8	6,0	2
3	6,3	6,6	6,9	7,2	7,5	7,8	8,1	8,4	8,7	9,0	3
4	8,4	8,8	9,2	9,6	10,0	10,4	10,8	11,2	11,6	12,0	4
5	10,5	11,0	11,5	12,0	12,5	13,0	13,5	14,0	14,5	15,0	5
6	12,6	13,2	13,8	14,4	15,0	15,6	16,2	16,8	17,4	18,0	6
7	14,7	15,4	16,1	16,8	17,5	18,2	18,9	19,6	20,3	21,0	7
8	16,8	17,6	18,4	19,2	20,0	20,8	21,6	22,4	23,2	24,0	8
9	18,9	19,8	20,7	21,6	22,5	23,4	24,3	25,2	26,1	27,0	9

	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	
1	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	1
2	6,2	6,4	6,6	6,8	7,0	7,2	7,4	7,6	7,8	8,0	2
3	9,3	9,6	9,9	10,2	10,5	10,8	11,1	11,4	11,7	12,0	3
4	12,4	12,8	13,2	13,6	14,0	14,4	14,8	15,2	15,6	16,0	4
5	15,5	16,0	16,5	17,0	17,5	18,0	18,5	19,0	19,5	20,0	5
6	18,6	19,2	19,8	20,4	21,0	21,6	22,2	22,8	23,4	24,0	6
7	21,7	22,4	23,1	23,8	24,5	25,2	25,9	26,6	27,3	28,0	7
8	24,8	25,6	26,4	27,2	28,0	28,8	29,6	30,4	31,2	32,0	8
9	27,9	28,8	29,7	30,6	31,5	32,4	33,3	34,2	35,1	36,0	9

	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	
1	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0	1
2	8,2	8,4	8,6	8,8	9,0	9,2	9,4	9,6	9,8	10,0	2
3	12,3	12,6	12,9	13,2	13,5	13,8	14,1	14,4	14,7	15,0	3
4	16,4	16,8	17,2	17,6	18,0	18,4	18,8	19,2	19,6	20,0	4
5	20,5	21,0	21,5	22,0	22,5	23,0	23,5	24,0	24,5	25,0	5
6	24,6	25,2	25,8	26,4	27,0	27,6	28,2	28,8	29,4	30,0	6
7	28,7	29,4	30,1	30,8	31,5	32,2	32,9	33,6	34,3	35,0	7
8	32,8	33,6	34,4	35,2	36,0	36,8	37,6	38,4	39,2	40,0	8
9	36,9	37,8	38,7	39,6	40,5	41,4	42,3	43,2	44,1	45,0	9

	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	
1	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6,0	1
2	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8	12,0	2
3	15,3	15,6	15,9	16,2	16,5	16,8	17,1	17,4	17,7	18,0	3
4	20,4	20,8	21,2	21,6	22,0	22,4	22,8	23,2	23,6	24,0	4
5	25,5	26,0	26,5	27,0	27,5	28,0	28,5	29,0	29,5	30,0	5
6	30,6	31,2	31,8	32,4	33,0	33,6	34,2	34,8	35,4	36,0	6
7	35,7	36,4	37,1	37,8	38,5	39,2	39,9	40,6	41,3	42,0	7
8	40,8	41,6	42,4	43,2	44,0	44,8	45,6	46,4	47,2	48,0	8
9	45,9	46,8	47,7	48,6	49,5	50,4	51,3	52,2	53,1	54,0	9

	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	
1	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	7,0	1
2	12,2	12,4	12,6	12,8	13,0	13,2	13,4	13,6	13,8	14,0	2
3	18,3	18,6	18,9	19,2	19,5	19,8	20,1	20,4	20,7	21,0	3
4	24,4	24,8	25,2	25,6	26,0	26,4	26,8	27,2	27,6	28,0	4
5	30,5	31,0	31,5	32,0	32,5	33,0	33,5	34,0	34,5	35,0	5
6	36,6	37,2	37,8	38,4	39,0	39,6	40,2	40,8	41,4	42,0	6
7	42,7	43,4	44,1	44,8	45,5	46,2	46,9	47,6	48,3	49,0	7
8	48,8	49,6	50,4	51,2	52,0	52,8	53,6	54,4	55,2	56,0	8
9	54,9	55,8	56,7	57,6	58,5	59,4	60,3	61,2	62,1	63,0	9

	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	
1	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9	8,0	1
2	14,2	14,4	14,6	14,8	15,0	15,2	15,4	15,6	15,8	16,0	2
3	21,3	21,6	21,9	22,2	22,5	22,8	23,1	23,4	23,7	24,0	3
4	28,4	28,8	29,2	29,6	30,0	30,4	30,8	31,2	31,6	32,0	4
5	35,5	36,0	36,5	37,0	37,5	38,0	38,5	39,0	39,5	40,0	5
6	42,6	43,2	43,8	44,4	45,0	45,6	46,2	46,8	47,4	48,0	6
7	49,7	50,4	51,1	51,8	52,5	53,2	53,9	54,6	55,3	56,0	7
8	56,8	57,6	58,4	59,2	60,0	60,8	61,6	62,4	63,2	64,0	8
9	63,9	64,8	65,7	66,6	67,5	68,4	69,3	70,2	71,1	72,0	9

	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	
1	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9	9,0	1
2	16,2	16,4	16,6	16,8	17,0	17,2	17,4	17,6	17,8	18,0	2
3	24,3	24,6	24,9	25,2	25,5	25,8	26,1	26,4	26,7	27,0	3
4	32,4	32,8	33,2	33,6	34,0	34,4	34,8	35,2	35,6	36,0	4
5	40,5	41,0	41,5	42,0	42,5	43,0	43,5	44,0	44,5	45,0	5
6	48,6	49,2	49,8	50,4	51,0	51,6	52,2	52,8	53,4	54,0	6
7	56,7	57,4	58,1	58,8	59,5	60,2	60,9	61,6	62,3	63,0	7
8	64,8	65,6	66,4	67,2	68,0	68,8	69,6	70,4	71,2	72,0	8
9	72,9	73,8	74,7	75,6	76,5	77,4	78,3	79,2	80,1	81,0	9

18. Таблица для квадратичного интерполирования

k	k_1	k	k	k_1	k	k	k_1	k	k	k_1	k
0,000		1,000	0,066		0,934	0,147		0,853	0,255		0,745
	0,000			0,016			0,032			0,048	
0,002		0,998	0,071		0,929	0,153		0,847	0,263		0,737
	0,001			0,017			0,033			0,049	
0,006		0,994	0,075		0,925	0,159		0,841	0,271		0,729
	0,002			0,018			0,034			0,050	
0,010		0,990	0,080		0,920	0,165		0,835	0,280		0,720
	0,003			0,019			0,035			0,051	
0,014		0,986	0,085		0,915	0,171		0,829	0,290		0,710
	0,004			0,020			0,036			0,052	
0,018		0,982	0,090		0,910	0,177		0,823	0,300		0,700
	0,005			0,021			0,037			0,053	
0,022		0,978	0,095		0,905	0,183		0,817	0,310		0,690
	0,006			0,022			0,038			0,054	
0,026		0,974	0,100		0,900	0,190		0,810	0,321		0,679
	0,007			0,023			0,039			0,055	
0,030		0,970	0,105		0,895	0,196		0,804	0,332		0,668
	0,008			0,024			0,040			0,056	
0,035		0,965	0,110		0,890	0,203		0,797	0,345		0,655
	0,009			0,025			0,041			0,057	
0,039		0,961	0,115		0,885	0,210		0,790	0,358		0,642
	0,010			0,026			0,042			0,058	
0,043		0,957	0,120		0,880	0,217		0,783	0,373		0,627
	0,011			0,027			0,043			0,059	
0,048		0,952	0,125		0,875	0,224		0,776	0,390		0,610
	0,012			0,028			0,044			0,060	
0,052		0,948	0,131		0,869	0,231		0,769	0,410		0,590
	0,013			0,029			0,045			0,061	
0,057		0,943	0,136		0,864	0,239		0,761	0,436		0,564
	0,014			0,030			0,046			0,062	
0,061		0,939	0,142		0,858	0,247		0,753	0,500		0,500
	0,015			0,031			0,047				
0,066		0,934	0,147		0,853	0,255		0,745			

О квадратичном интерполировании см. стр. 15.

Всем значениям k, заключенным между смежными числами столбца k (как правого, так и левого), соответствует одно и то же значение k_1, помещенное между этими смежными значениями k. «Критическим» (табличным) значениям k соответствует вышележащее k_1.

Примеры:

1) для $k = 0{,}8$ $k_1 = 0{,}040$ (так же, как и для всех других k, заключенных между 0,797 и 0,804 или между 0,196 и 0,203);

2) для $k = 0{,}3$ (или для $k = 0{,}7$) $k_1 = 0{,}052$.

Б. Таблицы специальных функций

19. Гамма-функция *

x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$
1,00	1,00000	**1,25**	0,90640	**1,50**	0,88623	**1,75**	0,91906
01	0,99433	26	0,90440	51	0,88659	76	0,92137
02	0,98884	27	0,90250	52	0,88704	77	0,92376
03	0,98355	28	0,90072	53	0,88757	78	0,92623
04	0,97844	29	0,89904	54	0,88818	79	0,92877
1,05	0,97350	**1,30**	0,89747	**1,55**	0,88887	**1,80**	0,93138
06	0,96874	31	0,89600	56	0,88964	81	0,93408
07	0,96415	32	0,89464	57	0,89049	82	0,93685
08	0,95973	33	0,89338	58	0,89142	83	0,93969
09	0,95546	34	0,89222	59	0,89243	84	0,94261
1,10	0,95135	**1,35**	0,89115	**1,60**	0,89352	**1,85**	0,94561
11	0,94740	36	0,89018	61	0,89468	86	0,94869
12	0,94359	37	0,88931	62	0,89592	87	0,95184
13	0,93993	38	0,88854	63	0,89724	88	0,95507
14	0,93642	39	0,88785	64	0,89864	89	0,95838
1,15	0,93304	**1,40**	0,88726	**1,65**	0,90012	**1,90**	0,96177
16	0,92980	41	0,88676	66	0,90167	91	0,96523
17	0,92670	42	0,88636	67	0,90330	92	0,96877
18	0,92373	43	0,88604	68	0,90500	93	0,97240
19	0,92089	44	0,88581	69	0,90678	94	0,97610
1,20	0,91817	**1,45**	0,88566	**1,70**	0,90864	**1,95**	0,97988
21	0,91558	46	0,88560	71	0,91057	96	0,98374
22	0,91311	47	0,88563	72	0,91258	97	0,98768
23	0,91075	48	0,88575	73	0,91467	98	0,99171
24	0,90852	49	0,88595	74	0,91683	99	0,99581
1,25	0,90640	**1,50**	0,88623	**1,75**	0,91906	**2,00**	1,00000

Значения гамма-функции для $x < 1$ и для $x > 2$ могут быть вычислены с помощью формул:

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}, \qquad \Gamma(x) = (x-1)\,\Gamma(x-1).$$

Примеры: 1) $\Gamma(0{,}7) = \dfrac{\Gamma(1{,}7)}{0{,}7} = \dfrac{0{,}90864}{0{,}7} = 1{,}2981.$

2) $\Gamma(3{,}5) = 2{,}5 \cdot \Gamma(2{,}5) = 2{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot \Gamma(1{,}5) =$
$= 2{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}88623 = 3{,}32336.$

---

* Определение, формулы и графики см. стр. 162.

20. Бесселевы (цилиндрические) функции *

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$K_0(x)$	$K_1(x)$
0,0	+1,0000	+0,0000	− ∞	− ∞	+1,000	0,0000	∞	∞
0,1	0,9975	0,0499	−1,5342	−6,4590	1,003	+0,0501	2,4271	9,8538
0,2	0,9900	0,0995	1,0811	3,3238	1,010	0,1005	1,7527	4,7760
0,3	0,9776	0,1483	0,8073	2,2931	1,023	0,1517	1,3725	3,0560
0,4	0,9604	0,1960	0,6060	1,7809	1,040	0,2040	1,1145	2,1844
0,5	+0,9385	+0,2423	−0,4445	−1,4715	1,063	0,2579	0,9244	1,6564
0,6	0,9120	0,2867	0,3085	1,2604	1,092	0,3137	0,7775	1,3028
0,7	0,8812	0,3290	0,1907	1,1032	1,126	0,3719	0,6605	1,0503
0,8	0,8463	0,3688	−0,0868	0,9781	1,167	0,4329	0,5653	0,8618
0,9	0,8075	0,4059	+0,0056	0,8731	1,213	0,4971	0,4867	0,7165
1,0	+0,7652	+0,4401	+0,0883	−0,7812	1,266	0,5652	0,4210	0,6019
1,1	0,7196	0,4709	0,1622	0,6981	1,326	0,6375	0,3656	0,5098
1,2	0,6711	0,4983	0,2281	0,6211	1,394	0,7147	0,3185	0,4346
1,3	0,6201	0,5220	0,2865	0,5485	1,469	0,7973	0,2782	0,3725
1,4	0,5669	0,5419	0,3379	0,4791	1,553	0,8861	0,2437	0,3208
1,5	+0,5118	+0,5579	+0,3824	−0,4123	1,647	0,9817	0,2138	0,2774
1,6	0,4554	0,5699	0,4204	0,3476	1,750	1,085	0,1880	0,2406
1,7	0,3980	0,5778	0,4520	0,2847	1,864	1,196	0,1655	0,2094
1,8	0,3400	0,5815	0,4774	0,2237	1,990	1,317	0,1459	0,1826
1,9	0,2818	0,5812	0,4968	0,1644	2,128	1,448	0,1288	0,1597
2,0	+0,2239	+0,5767	+0,5104	−0,1070	2,280	1,591	0,1139	0,1399
2,1	0,1666	0,5683	0,5183	−0,0517	2,446	1,745	0,1008	0,1227
2,2	0,1104	0,5560	0,5208	+0,0015	2,629	1,914	0,08927	0,1079
2,3	0,0555	0,5399	0,5181	0,0523	2,830	2,098	0,07914	0,09498
2,4	0,0025	0,5202	0,5104	0,1005	3,049	2,298	0,07022	0,08372
2,5	−0,0484	+0,4971	+0,4981	+0,1459	3,290	2,517	0,06235	0,07389
2,6	0,0968	0,4708	0,4813	0,1884	3,553	2,755	0,05540	0,06528
2,7	0,1424	0,4416	0,4605	0,2276	3,842	3,016	0,04926	0,05774
2,8	0,1850	0,4097	0,4359	0,2635	4,157	3,301	0,04382	0,05111
2,9	0,2243	0,3754	0,4079	0,2959	4,503	3,613	0,03901	0,04529
3,0	−0,2601	+0,3391	+0,3769	+0,3247	4,881	3,953	0,03474	0,04016
3,1	0,2921	0,3009	0,3431	0,3496	5,294	4,326	0,03095	0,03563
3,2	0,3202	0,2613	0,3070	0,3707	5,747	4,734	0,02759	0,03164
3,3	0,3443	0,2207	0,2691	0,3879	6,243	5,181	0,02461	0,02812
3,4	0,3643	0,1792	0,2296	0,4010	6,785	5,670	0,02196	0,02500
3,5	−0,3801	+0,1374	+0,1890	+0,4102	7,378	6,206	0,01960	0,02224
3,6	0,3918	0,0955	0,1477	0,4154	8,028	6,793	0,01750	0,01979
3,7	0,3992	0,0538	0,1061	0,4167	8,739	7,436	0,01563	0,01763
3,8	0,4026	+0,0128	0,0645	0,4141	9,517	8,140	0,01397	0,01571
3,9	0,4018	−0,0272	+0,0234	0,4078	10,37	8,913	0,01248	0,01400
4,0	−0,3971	−0,0660	−0,0169	+0,3979	11,30	9,759	0,01116	0,01248
4,1	0,3887	0,1033	0,0561	0,3846	12,32	10,69	0,009980	0,01114
4,2	0,3766	0,1386	0,0938	0,3680	13,44	11,71	0,008927	0,009938
4,3	0,3610	0,1719	0,1296	0,3484	14,67	12,82	0,007988	0,008872
4,4	0,3423	0,2028	0,1633	0,3260	16,01	14,05	0,007149	0,007923
4,5	−0,3205	−0,2311	−0,1947	+0,3010	17,48	15,39	0,006400	0,007078
4,6	0,2961	0,2566	0,2235	0,2737	19,09	16,86	0,005730	0,006325
4,7	0,2693	0,2791	0,2494	0,2445	20,86	18,48	0,005132	0,005654
4,8	0,2404	0,2985	0,2723	0,2136	22,79	20,25	0,004597	0,005055
4,9	0,2097	0,3147	0,2921	0,1812	24,91	22,20	0,004119	0,004521

* Определение, формулы и графики см. на стр. 464—466.

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$K_0(x)$	$K_1(x)$
							0,00	0,00
5,0	−0,1776	−0,3276	−0,3085	+0,1479	27,24	24,34	369 1	404 5
5,1	0,1443	0,3371	0,3216	0,1137	29,79	26,68	330 8	361 9
5,2	0,1103	0,3432	0,3313	0,0792	32,58	29,25	296 6	323 9
5,3	0,0758	0,3460	0,3374	0,0445	35,65	32,08	265 9	290 0
5,4	0,0412	0,3453	0,3402	+0,0101	39,01	35,18	238 5	259 7
5,5	−0,0068	−0,3414	−0,3395	−0,0238	42,69	38,59	213 9	232 6
5,6	+0,0270	0,3343	0,3354	0,0568	46,74	42,33	191 8	208 3
5,7	0,0599	0,3241	0,3282	0,0887	51,17	46,44	172 1	186 6
5,8	0,0917	0,3110	0,3177	0,1192	56,04	50,95	154 4	167 3
5,9	0,1220	0,2951	0,3044	0,1481	61,38	55,90	138 6	149 9
6,0	+0,1506	−0,2767	−0,2882	−0,1750	67,23	61,34	124 4	134 4
6.1	0,1773	0,2559	0,2694	0,1998	73,66	67,32	111 7	120 5
6,2	0,2017	0,2329	0,2483	0,2223	80,72	73,89	100 3	108 1
6,3	0,2238	0,2081	0,2251	0,2422	88,46	81,10	090 01	096 91
6.4	0,2433	0,1816	0,1999	0,2596	96,96	89,03	080 83	086 93
6,5	+0,2601	−0,1538	−0,1732	−0,2741	106,3	97,74	072 59	077 99
6,6	0,2740	0,1250	0,1452	0,2857	116,5	107,3	065 20	069 98
6,7	0,2851	0,0953	0,1162	0,2945	127,8	117,8	058 57	062 80
6,8	0,2931	0,0652	0,0864	0,3002	140,1	129,4	052 62	056 36
6.9	0,2981	0,0349	0,0563	0,3029	153,7	142,1	047 28	050 59
7,0	+0,3001	−0,0047	−0,0259	−0,3027	168,6	156,0	042 48	045 42
7,1	0,2991	+0,0252	+0,0042	0,2995	185,0	171,4	038 17	040 78
7,2	0,2951	0,0543	0,0339	0,2934	202,9	188,3	034 31	036 62
7,3	0,2882	0,0826	0,0628	0,2846	222,7	206,8	030 84	032 88
7,4	0,2786	0,1096	0,0907	0,2731	244,3	227,2	027 72	029 53
7,5	+0,2663	+0,1352	+0,1173	−0,2591	268,2	249,6	024 92	026 53
7,6	0,2516	0,1592	0,1424	0,2428	294,3	274,2	022 40	023 83
7,7	0,2346	0,1813	0,1658	0,2243	323,1	301,3	020 14	021 41
7,8	0,2154	0,2014	0,1872	0,2039	354,7	331,1	018 11	019 24
7,9	0,1944	0,2192	0,2065	0,1817	389,4	363,9	016 29	017 29
8,0	+0,1717	+0,2346	+0,2235	−0 1581	427,6	399,9	014 65	015 54
8,1	0,1475	0,2476	0,2381	0,1331	469,5	439,5	013 17	013 96
8,2	0,1222	0,2580	0,2501	0,1072	515,6	483,0	011 85	012 55
8,3	0,0960	0,2657	0,2595	0,0806	566,3	531,0	010 66	011 28
8.4	0,0692	0,2708	0,2662	0,0535	621,9	583,7	009 588	010 14
8,5	+0,0419	+0,2731	+0,2702	−0,0262	683,2	641,6	008 626	009 120
8,6	+0,0146	0,2728	0,2715	+0,0011	750,5	705,4	007 761	008 200
8,7	−0,0125	0,2697	0,2700	0,0280	824,4	775,5	006 983	007 374
8,8	0,0392	0,2641	0,2659	0,0544	905,8	852,7	006 283	006 631
8,9	0,0653	0,2559	0,2592	0,0799	995,2	937,5	005 654	005 964
9,0	−0,0903	+0,2453	+0,2499	+0,1043	1094	1031	005 088	005 364
9,1	0,1142	0,2324	0,2383	0,1275	1202	1134	004 579	004 825
9,2	0,1367	0,2174	0,2245	0,1491	1321	1247	004 121	004 340
9,3	0,1577	0,2004	0,2086	0,1691	1451	1371	003 710	003 904
9,4	0,1768	0,1816	0,1907	0,1871	1595	1508	003 339	003 512
9,5	−0,1939	+0,1613	+0,1712	+0,2032	1753	1658	003 006	003 160
9,6	0,2090	0,1395	0,1502	0,2171	1927	1824	002 706	002 843
9,7	0,2218	0,1166	0,1279	0,2287	2119	2006	002 436	002 559
9,8	0,2323	0,0928	0,1045	0,2379	2329	2207	002 193	002 302
9,9	0,2403	0,0684	0,0804	0,2447	2561	2428	001 975	002 072
10,0	−0,2459	+0,0435	+0,0557	+0,2490	2816	2671	001 778	001 865

21. Полиномы Лежандра (шаровые функции) *

$x = P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$	$P_5(x)$	$P_6(x)$	$P_7(x)$
0,00	−0,5000	0,0000	0,3750	0,0000	−0,3125	0,0000
0,05	−0,4962	−0,0747	0,3657	0,0927	−0,2962	−0,1069
0,10	−0,4850	−0,1475	0,3379	0,1788	−0,2488	−0,1995
0,15	−0,4662	−0,2166	0,2928	0,2523	−0,1746	−0,2649
0,20	−0,4400	−0,2800	0,2320	0,3075	−0,0806	−0,2935
0,25	−0,4062	−0,3359	0,1577	0,3397	+0,0243	−0,2799
0,30	−0,3650	−0,3825	+0,0729	0,3454	0,1292	−0,2241
0,35	−0,3162	−0,4178	−0,0187	0,3225	0,2225	−0,1318
0,40	−0,2600	−0,4400	−0,1130	0,2706	0,2926	−0,0146
0,45	−0,1962	−0,4472	−0,2050	0,1917	0,3290	+0,1106
0,50	−0,1250	−0,4375	−0,2891	+0,0898	0,3232	0,2231
0,55	−0,0462	−0,4091	−0,3590	−0,0282	0,2708	0,3007
0,60	+0,0400	−0,3600	−0,4080	−0,1526	0,1721	0,3226
0,65	0,1338	−0,2884	−0,4281	−0,2705	+0,0347	0,2737
0,70	0,2350	−0,1925	−0,4121	−0,3652	−0,1253	+0,1502
0,75	0,3438	−0,0703	−0,3501	−0,4164	−0,2808	−0,0342
0,80	0,4600	+0,0800	−0,2330	−0,3995	−0,3918	−0,2397
0,85	0,5838	0,2603	−0,0506	−0,2857	−0,4030	−0,3913
0,90	0,7150	0,4725	+0,2079	−0,0411	−0,2412	−0,3678
0,95	0,8538	0,7184	0,5541	+0,3727	+0,1875	+0,0112
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

$P_0(x) = 1; \quad P_1(x) = x;$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1);$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x);$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3);$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x);$$

$$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5);$$

$$P_7(x) = \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x).$$

* Определение и графики см. на стр. 467.

22. *Эллиптические интегралы* *

а) Эллиптические интегралы 1-го рода: $F(k, \varphi)$, $k = \sin\alpha$

φ \ α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0°	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	0,1745	0,1746	0,1746	0,1748	0,1749	0,1751	0,1752	0,1753	0,1754	0,1754
20	0,3491	0,3493	0,3499	0,3508	0,3520	0,3533	0,3545	0,3555	0,3561	0,3564
30	0,5236	0,5243	0,5263	0,5294	0,5334	0,5379	0,5422	0,5459	0,5484	0,5493
40	0,6981	0,6997	0,7043	0,7116	0,7213	0,7323	0,7436	0,7535	0,7604	0,7629
50	0,8727	0,8756	0,8842	0,8982	0,9173	0,9401	0,9647	0,9876	1,0044	1,0107
60	1,0472	1,0519	1,0660	1,0896	1,1226	1,1643	1,2126	1,2619	1,3014	1,3170
70	1,2217	1,2286	1,2495	1,2853	1,3372	1,4068	1,4944	1,5959	1,6918	1,7354
80	1,3963	1,4056	1,4344	1,4846	1,5597	1,6660	1,8125	2,0119	2,2653	2,4362
90	1,5708	1,5828	1,6200	1,6858	1,7868	1,9356	2,1565	2,5046	3,1534	∞

б) Эллиптические интегралы 2-го рода: $E(k, \varphi)$, $k = \sin\alpha$

φ \ α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0°	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	0,1745	0,1745	0,1744	0,1743	0,1742	0,1740	0,1739	0,1738	0,1737	0,1736
20	0,3491	0,3489	0,3483	0,3473	0,3462	0,3450	0,3438	0,3429	0,3422	0,3420
30	0,5236	0,5229	0,5209	0,5179	0,5141	0,5100	0,5061	0,5029	0,5007	0,5000
40	0,6981	0,6966	0,6921	0,6851	0,6763	0,6667	0,6575	0,6497	0,6446	0,6428
50	0,8727	0,8698	0,8614	0,8483	0,8317	0,8134	0,7954	0,7801	0,7697	0,7660
60	1,0472	1,0426	1,0290	1,0076	0,9801	0,9493	0,9184	0,8914	0,8728	0,8660
70	1,2217	1,2149	1,1949	1,1632	1,1221	1,0750	1,0266	0,9830	0,9514	0,9397
80	1,3963	1,3870	1,3597	1,3161	1,2590	1,1926	1,1225	1,0565	1,0054	0,9848
90	1,5708	1,5589	1,5238	1,4675	1,3931	1,3055	1,2111	1,1184	1,0401	1,0000

* Определения см. на следующей странице и на стр. 342—343.

в) Полные эллиптические интегралы, $k = \sin\alpha$

$\alpha°$	K	E	$\alpha°$	K	E	$\alpha°$	K	E
0	1,5708	1,5708	**30**	1,6858	1,4675	**60**	2,1565	1,2111
1	1,5709	1,5707	**31**	1,6941	1,4608	**61**	2,1842	1,2015
2	1,5713	1,5703	**32**	1,7028	1,4539	**62**	2,2132	1,1920
3	1,5719	1,5697	**33**	1,7119	1,4469	**63**	2,2435	1,1826
4	1,5727	1,5689	**34**	1,7214	1,4397	**64**	2,2754	1,1732
5	1,5738	1,5678	**35**	1,7312	1,4323	**65**	2,3088	1,1638
6	1,5751	1,5665	**36**	1,7415	1,4248	**66**	2,3439	1,1545
7	1,5767	1,5649	**37**	1,7522	1,4171	**67**	2,3809	1,1453
8	1,5785	1,5632	**38**	1,7633	1,4092	**68**	2,4198	1,1362
9	1,5805	1,5611	**39**	1,7748	1,4013	**69**	2,4610	1,1272
10	1,5828	1,5589	**40**	1,7868	1,3931	**70**	2,5046	1,1184
11	1,5854	1,5564	41	1,7992	1,3849	71	2,5507	1,1096
12	1,5882	1,5537	42	1,8122	1,3765	72	2,5998	1,1011
13	1,5913	1,5507	43	1,8256	1,3680	73	2,6521	1,0927
14	1,5946	1,5476	44	1,8396	1,3594	74	2,7081	1,0844
15	1,5981	1,5442	**45**	1,8541	1,3506	**75**	2,7681	1,0764
16	1,6020	1,5405	46	1,8691	1,3418	76	2,8327	1,0686
17	1,6061	1,5367	47	1,8848	1,3329	77	2,9026	1,0611
18	1,6105	1,5326	48	1,9011	1,3238	78	2,9786	1,0538
19	1,6151	1,5283	49	1,9180	1,3147	79	3,0617	1,0468
20	1,6200	1,5238	**50**	1,9356	1,3055	**80**	3,1534	1,0401
21	1,6252	1,5191	51	1,9539	1,2963	81	3,2553	1,0338
22	1,6307	1,5141	52	1,9729	1,2870	82	3,3699	1,0278
23	1,6365	1,5090	53	1,9927	1,2776	83	3,5004	1,0223
24	1,6426	1,5037	54	2,0133	1,2681	84	3,6519	1,0172
25	1,6490	1,4981	**55**	2,0347	1,2587	**85**	3,8317	1,0127
26	1,6557	1,4924	56	2,0571	1,2492	86	4,0528	1,0086
27	1,6627	1,4864	57	2,0804	1,2397	87	4,3387	1,0053
28	1,6701	1,4803	58	2,1047	1,2301	88	4,7427	1,0026
29	1,6777	1,4740	59	2,1300	1,2206	89	5,4349	1,0008
30	1,6858	1,4675	**60**	2,1565	1,2111	**90**	∞	1,0000

$$F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}} = \int_0^{\sin\varphi} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}\sqrt{1 - k^2 t^2}},$$

$$E(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}\, d\psi = \int_0^{\sin\varphi} \sqrt{\frac{1 - k^2 t^2}{1 - t^2}}\, dt,$$

$$\mathbf{K} = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}} = \int_0^{1} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}\sqrt{1 - k^2 t^2}},$$

$$\mathbf{E} = E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}\, d\psi = \int_0^{1} \sqrt{\frac{1 - k^2 t^2}{1 - t^2}}\, dt.$$

23. *Интеграл вероятности*

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt^*$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	**0,30**	0,2358	**0,60**	0,4515	**0,90**	0,6319
01	0,0080	31	0,2434	61	0,4581	91	0,6372
02	0,0160	32	0,2510	62	0,4647	92	0,6424
03	0,0239	33	0,2586	63	0,4713	93	0,6476
04	0,0319	34	0,2661	64	0,4778	94	0,6528
0,05	0,0399	**0,35**	0,2737	**0,65**	0,4843	**0,95**	0,6579
06	0,0478	36	0,2812	66	0,4907	96	0,6629
07	0,0558	37	0,2886	67	0,4971	97	0,6680
08	0,0638	38	0,2961	68	0,5035	98	0,6729
09	0,0717	39	0,3035	69	0,5098	99	0,6778
0,10	0,0797	**0,40**	0,3108	**0,70**	0,5161	**1,00**	0,6827
11	0,0876	41	0,3182	71	0,5223	01	0,6875
12	0,0955	42	0,3255	72	0,5285	02	0,6923
13	0,1034	43	0,3328	73	0,5346	03	0,6970
14	0,1113	44	0,3401	74	0,5407	04	0,7017
0,15	0,1192	**0,45**	0,3473	**0,75**	0,5467	**1,05**	0,7063
16	0,1271	46	0,3545	76	0,5527	06	0,7109
17	0,1350	47	0,3616	77	0,5587	07	0,7154
18	0,1428	48	0,3688	78	0,5646	08	0,7199
19	0,1507	49	0,3759	79	0,5705	09	0,7243
0,20	0,1585	**0,50**	0,3829	**0,80**	0,5763	**1,10**	0,7287
21	0,1663	51	0,3899	81	0,5821	11	0,7330
22	0,1741	52	0,3969	82	0,5878	12	0,7373
23	0,1819	53	0,4039	83	0,5935	13	0,7415
24	0,1897	54	0,4108	84	0,5991	14	0,7457
0,25	0,1974	**0,55**	0,4177	**0,85**	0,6047	**1,15**	0,7499
26	0,2051	56	0,4245	86	0,6102	16	0,7540
27	0,2128	57	0,4313	87	0,6157	17	0,7580
28	0,2205	58	0,4381	88	0,6211	18	0,7620
29	0,2282	59	0,4448	89	0,6265	19	0,7660
0,30	0,2358	**0,60**	0,4515	**0,90**	0,6319	**1,20**	0,7699

* График функции и ее простейшие применения см. на стр. 566.

Иногда интегралом вероятности называют функцию

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \Phi(x\sqrt{2}).$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,20	0,7699	**1,50**	0,8664	**1,80**	0,9281	**2,50**	0,9876
21	0,7737	51	0,8690	81	0,9297	55	0,9892
22	0,7775	52	0,8715	82	0,9312	60	0,9907
23	0,7813	53	0,8740	83	0,9328	65	0,9920
24	0,7850	54	0,8764	84	0,9342	70	0,9931
1,25	0,7887	**1,55**	0,8789	**1,85**	0,9357	**2,75**	0,9940
26	0,7923	56	0,8812	86	0,9371	80	0,9949
27	0,7959	57	0,8836	87	0,9385	85	0,9956
28	0,7995	58	0,8859	88	0,9399	90	0,9963
29	0,8029	59	0,8882	89	0,9412	95	0,9968
1,30	0,8064	**1,60**	0,8904	**1,90**	0,9426	**3,00**	0,99730
31	0,8098	61	0,8926	91	0,9439	10	0,99806
32	0,8132	62	0,8948	92	0,9451	20	0,99863
33	0,8165	63	0,8969	93	0,9464	30	0,99903
34	0,8198	64	0,8990	94	0,9476	40	0,99933
1,35	0,8230	**1,65**	0,9011	**1,95**	0,9488	**3,50**	0,99953
36	0,8262	66	0,9031	96	0,9500	60	0,99968
37	0,8293	67	0,9051	97	0,9512	70	0,99978
38	0,8324	68	0,9070	98	0,9523	80	0,99986
39	0,8355	69	0,9090	99	0,9534	90	0,99990
1,40	0,8385	**1,70**	0,9109	**2,00**	0,9545	**4,00**	0,99994
41	0,8415	71	0,9127	05	0,9596		
42	0,8444	72	0,9146	10	0,9643	**4,417**	$1-10^{-5}$
43	0,8473	73	0,9164	15	0,9684	**4,892**	$1-10^{-6}$
44	0,8501	74	0,9181	20	0,9722	**5,327**	$1-10^{-7}$
1,45	0,8529	**1,75**	0,9199	**2,25**	0,9756		
46	0,8557	76	0,9216	30	0,9786		
47	0,8584	77	0,9233	35	0,9812		
48	0,8611	78	0,9249	40	0,9836		
49	0,8638	79	0,9265	45	0,9857		
1,50	0,8664	**1,80**	0,9281	**2,50**	0,9876		

II. ГРАФИКИ

A. Элементарные функции

1. Многочлены

Линейная функция: $y = ax + b$ (рис. 2, *а*).

График — ***прямая линия***. Функция монотонно возрастает при $a > 0$, монотонно убывает при $a < 0$, постоянна при $a = 0$. Пересечения с осями: $A(-b/a,\ 0)$, $B(0,\ b)$. Подробнее см. стр. 202. При $b = 0$ — ***прямая пропорциональность:*** $y = ax$; график — прямая линия, проходящая через начало координат (рис. 2, *б*).

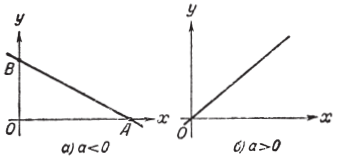


Рис. 2.

Квадратный трехчлен: $y = ax^2 + bx + c$ (рис. 3).

График—***парабола*** с вертикальной ссью (осью симметрии) $x = -b/2a$. При $a > 0$ функция сначала убывает, достигает минимума, затем возрастает; при $a < 0$ возрастает, достигает максимума и убывает.

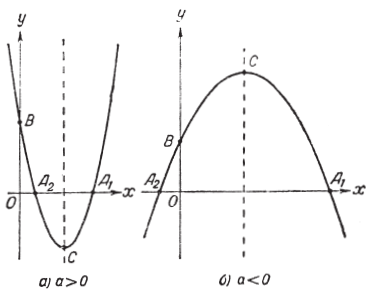


Рис. 3.

Пересечения с осью Ox: A_1, $A_2\left(\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},\ 0\right)$, с осью Oy: $B(0,\ c)$. Экстремум $C\left(-\dfrac{b}{2a},\ \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$. О параболе см стр. 211 213.

Многочлен 3-й степени: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (рис. 4). График — *кубическая парабола*. Поведение функции зависит от знаков a и $\Delta = 3ac - b^2$. Если $\Delta \geqslant 0$ (рис. 4, *а* и *б*), функция монотонно возрастает при $a > 0$ и монотонно убывает при $a < 0$. Если $\Delta < 0$, функция имеет один максимум и один минимум (рис. 4, *в*): при $a > 0$ она сначала возрастает от $-\infty$ до максимума, затем убывает до минимума и снова возрастает до $+\infty$; при $a < 0$ она убывает от $+\infty$

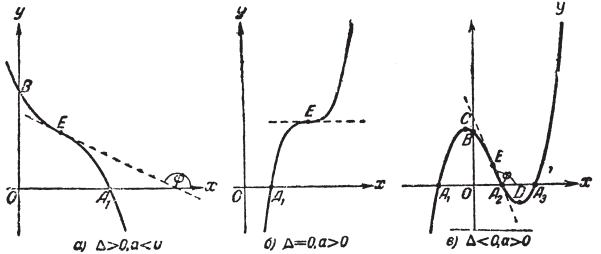


Рис. 4.

до минимума, возрастает до максимума и снова убывает до $-\infty$. Пересечения с осью Ox определяются действительными корнями уравнения $y = 0$ *; их может быть одно, два (в этом случае в одной из точек происходит касание) или три: A_1, A_2 и A_3. Пересечение с осью y: $B(0, d)$. Экстремумы C, $D\left(-\frac{b \mp \sqrt{-\Delta}}{3a}, d + \frac{2b^3 - 9abc \mp (6ac - 2b^2)\sqrt{-\Delta}}{27a^2}\right)$. Точка перегиба, являющаяся центром симметрии кривой: $E\left(-\frac{b}{3a}, \frac{2b^3 - 9abc}{27a^2} + d\right)$; касательная в этой точке имеет угловой коэффициент $\operatorname{tg}\varphi = \left(\frac{dy}{dx}\right)_E = \frac{\Delta}{3a}$.

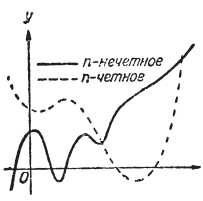


Рис. 5.

Многочлен n-й степени (рис. 5). $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$.

График — *кривая n-го порядка* **, параболического типа.

а) n нечетное, y непрерывно изменяется при $a_0 > 0$ от $-\infty$ до $+\infty$, а при $a_0 < 0$ от $+\infty$ до $-\infty$; кривая может пересекать ось x (или касаться ее) от 1 до n раз ***. Экстремумов эта функция или совсем не имеет, или имеет четное число (от 2 до $n - 1$), максимумы и минимумы чередуются; точек перегиба — нечетное число (от 1 до $n - 2$).

б) n четное, y непрерывно изменяется при $a_0 > 0$ от $+\infty$ до $+\infty$, а при $a_0 < 0$ от $-\infty$ до $-\infty$, либо не пересекая вовсе оси x, либо пересекая (или касаясь ее) от 1 до n раз. Функция имеет нечетное

---

* О решении кубического уравнения см. стр. 138—139.

** О порядке кривой см. стр. 201.

*** О решении алгебраического уравнения n-й степени см. стр. 140—142 и 144—146.

число экстремумов (от 1 до $n-1$), максимумы и минимумы чередуются; точек перегиба — четное число (от 0 до $n-2$).

Асимптот и особых точек эти кривые не имеют.

При вычерчивании графика рекомендуется сначала найти экстремумы и точки перегиба (а также значения производных в последних), нанести эти точки и касательные к кривой в них и затем уже проводить непрерывную плавную кривую.

При необходимости частого пользования графиками многочленов 4-й степени $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ при фиксированном a удобно вычертить график функции $y = ax^4$ (см. ниже), а затем, перенеся начало координат в точку $\left(-\frac{b}{4a}, 0\right)$, привести уравнение к виду $Y = aX^4 + a'X^2 + b'X + c'$ и произвести геометрическое сложение ординат кривой $Y = aX^4$ и параболы $Y = a'X^2 + b'X + c'$.

Степенная функция: $y = ax^n$ (n — целое > 1) (рис. 6).

График — *парабола n-го порядка*. 1) $a = 1$; кривая $y = x^n$ проходит через точки O (0, 0) и A (1, 1), касаясь оси x в начале координат. Если

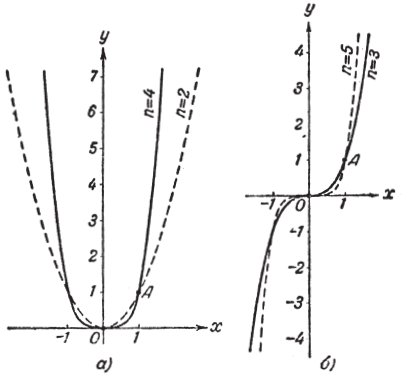


Рис. 6.

n четное (рис. 6, *а*), то кривая симметрична относительно оси y и имеет в начале координат минимум; если же n нечетное (рис. 6, *б*), то кривая симметрична относительно начала координат, в начале — точка перегиба. Асимптот нет. 2) Общий случай. Кривая $y = ax^n$ получается из кривой $y = x^n$ вытягиванием в направлении оси y в $|a|$ раз, и если $a < 0$, то она является зеркальным отображением кривой $y = |a| x^n$ относительно оси x.

2. *Дробные рациональные функции*

Обратная пропорциональность: $y = \frac{a}{x}$ (рис. 7).

График — *равносторонняя гипербола* с асимптотами — осями координат. Разрыв при $x = 0$ ($y = \pm\infty$). Если $a > 0$, функция убывает от 0 до $-\infty$ и от $+\infty$ до 0 (сплошная кривая в 1-й и 3-й четвертях); если $a < 0$ функция возрастает от 0 до $+\infty$ и от $-\infty$ до 0

(штриховая кривая во 2-й и 4-й четвертях). Вершины гиперболы A, $B\left(\pm\sqrt{|a|}, \pm\sqrt{|a|}\right)$; знаки берутся одинаковые при $a>0$ и разные при $a<0$. Экстремумов нет. О гиперболе см. стр. 208 — 210.

Дробно-линейная функция: $y=\dfrac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}$ (рис. 8).

График — *равносторонняя гипербола* с асимптотами, параллельными осям координат; центр $C\left(-\dfrac{b_2}{a_2}, \dfrac{a_1}{a_2}\right)$. Параметр, соответствующий a в уравнении обратной пропорциональности: $a=-\dfrac{D}{a_2^2}$, где $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, вершины гиперболы $A, B\left(-\dfrac{b_2\pm\sqrt{|D|}}{a_2}, \dfrac{a_1\pm\sqrt{|D|}}{a_2}\right)$; знаки берутся одинаковые при $D<0$ и разные при $D>0$. Разрыв функции

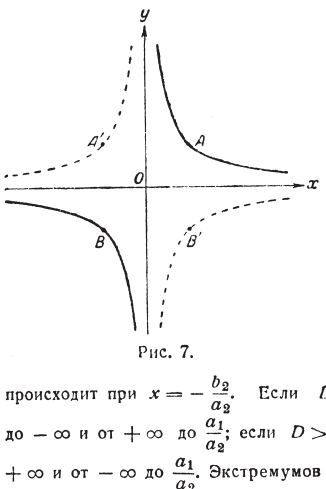


Рис. 7.

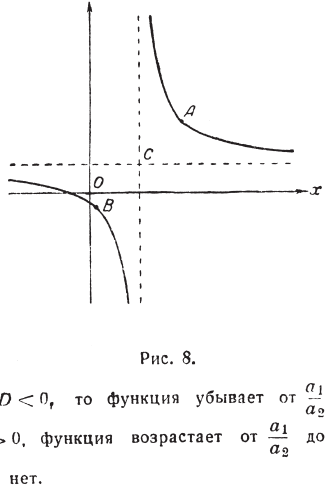


Рис. 8.

происходит при $x=-\dfrac{b_2}{a_2}$. Если $D<0$, то функция убывает от $\dfrac{a_1}{a_2}$ до $-\infty$ и от $+\infty$ до $\dfrac{a_1}{a_2}$; если $D>0$, функция возрастает от $\dfrac{a_1}{a_2}$ до $+\infty$ и от $-\infty$ до $\dfrac{a_1}{a_2}$. Экстремумов нет.

Функция $y=a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}\left(=\dfrac{ax^2+bx+c}{x^2}\right)$ (рис. 9). [$b\neq 0$, $c\neq 0$. При $b=0$ см. стр. 89 (степенная функция), при $c=0$ см. выше (дробно-линейная функция)].

График — *кривая 3-го порядка* с двумя асимптотами: $x=0$ и $y=a$; она состоит из двух ветвей: одной, соответствующей монотонному изменению y от a до $+\infty$ (или $-\infty$), и другой, проходящей через три характерные точки: пересечение с асимптотой $A\left(-\dfrac{c}{b}, a\right)$, экстремум $B\left(-\dfrac{2c}{b}, a-\dfrac{b^2}{4c}\right)$ и точку перегиба $C\left(-\dfrac{3c}{b}, a-\dfrac{2b^2}{9c}\right)$. Четыре случая возможного расположения этих ветвей зависят от знаков b и c

рис. 9). Точки пересечения с осью x: D, $E\left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}, 0\right)$; их ожет быть две, одна (касание) или ни одной, в зависимости от знака $^2 - 4ac$.

Функция $y = \frac{1}{ax^2 + bx + c}$ (рис. 10).

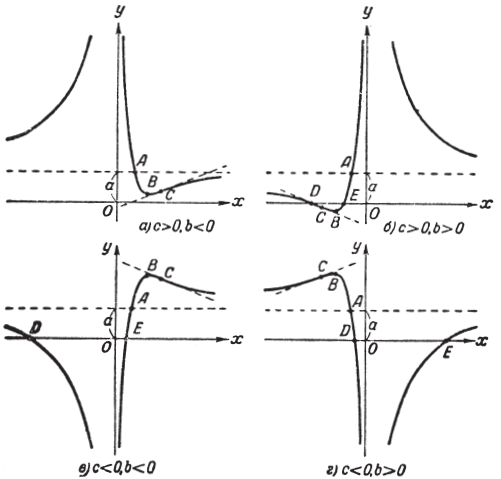


Рис. 9.

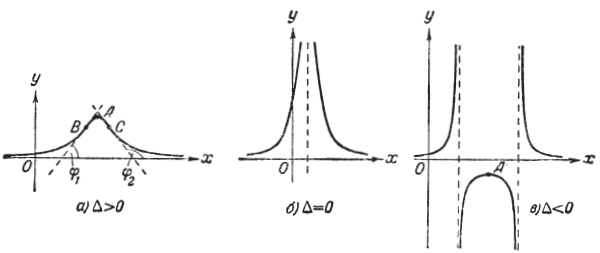


Рис. 10.

График — *кривая 3-го порядка*, симметричная относительно вертикальной прямой $x = -\frac{b}{2a}$ и имеющая асимптотой ось x. Поведение функции зависит от знаков a и $\Delta = 4ac - b^2$. Рассмотрен только случай

$a > 0$; при $a < 0$ следует рассмотреть кривую $y = \dfrac{1}{(-a)x^2 - bx - c}$ и отобразить ее симметрично относительно оси x.

а) $\Delta > 0$. Функция непрерывна и положительна при любом x. Растет от 0 до максимума и убывает до 0. Максимум $A\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4a}{\Delta}\right)$, точки перегиба B, $C\left(-\dfrac{b}{2a} \mp \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a\sqrt{3}}, \dfrac{3a}{\Delta}\right)$, наклон касательных в них $\operatorname{tg}\varphi = \pm a^2\left(\dfrac{3}{\Delta}\right)^{3/2}$ (рис. 10, *а*).

б) $\Delta = 0$. Функция положительна при любом x. Растет от 0 до $+\infty$, терпит бесконечный разрыв при $x = -\dfrac{b}{2a}$ и убывает от $+\infty$ до 0 (рис. 10, *б*).

в) $\Delta < 0$. Функция растет от 0 до $+\infty$, терпит бесконечный разрыв, переходит от $-\infty$ к $-\infty$ через точку максимума, терпит второй разрыв и убывает от $+\infty$ до 0. Максимум $A\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4a}{\Delta}\right)$, точки разрыва: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{-\Delta}}{2a}$ (рис. 10, *в*).

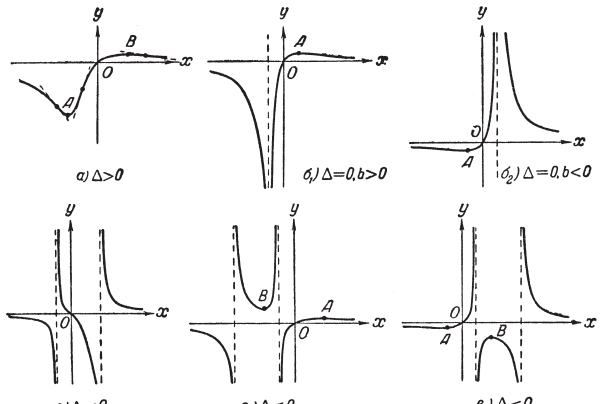


Рис. 11.

Функция $y = \dfrac{x}{ax^2 + bx + c}$ (рис. 11).

График — *кривая 3-го порядка* проходит через начало координат и имеет асимптотой ось x. Поведение функции зависит от знаков a и $\Delta = 4ac - b^2$, а также от знаков корней α и ρ уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ (если $\Delta < 0$) и от знака b, если $\Delta = 0$. Рассмотрен только случай $a > 0$;

при $a<0$ следует рассмотреть кривую $y=\dfrac{x}{(-a)x^2-bx-c}$ и отобразить ее симметрично относительно оси x.

а) $\Delta>0$. Функция непрерывна, убывает от 0 до минимума, возрастает до максимума и вновь убывает до 0. Минимум и максимум A, $B\left(\mp\sqrt{\dfrac{c}{a}}, \dfrac{-b\mp 2\sqrt{ac}}{\Delta}\right)$, кривая имеет три точки перегиба (рис. 11, *а*).

б) $\Delta=0$. Поведение функции зависит от знака b: 1) $b>0$; функция убывает от 0 до $-\infty$, терпит разрыв, растет от $-\infty$ до максимума и убывает до нуля (рис. 11, $б_1$), максимум $A\left(+\sqrt{\dfrac{c}{a}}, \dfrac{1}{2\sqrt{ac}+b}\right)$; 2) $b<0$; функция убывает от 0 до минимума, проходит через 0 и растет до $+\infty$, терпит бесконечный разрыв и убывает от $+\infty$ до 0 (рис. 11, $б_2$); минимум $A\left(-\sqrt{\dfrac{c}{a}}, -\dfrac{1}{2\sqrt{ac}-b}\right)$. В обоих случаях график имеет разрыв при $x=-\dfrac{b}{2a}$ и одну точку перегиба.

в) $\Delta<0$. Две точки разрыва: $x=\alpha$ и $x=\beta$; поведение функции зависит от знаков α и β:

1) α и β разных знаков; функция убывает от 0 до $-\infty$, от $+\infty$ до $-\infty$ и от $+\infty$ до 0: экстремумов нет (рис. 11, $в_1$);

2) α и β отрицательны, функция убывает от 0 до $-\infty$, затем изменяется от $+\infty$ до $+\infty$, проходя через точку минимума, и, наконец, возрастает от $-\infty$ до максимума и убывает до нуля; точки максимума и минимума A, B находятся по тем же формулам, что и в случае а) (рис. 11, $в_2$);

3) α и β положительны; функция убывает от 0 до минимума и возрастает до $+\infty$, затем изменяется от $-\infty$ до $-\infty$, проходя через точку максимума, и, наконец, убывает от $+\infty$ до 0; точки максимума и минимума A, B находятся по тем же формулам, что и в случае а) (рис. 11, $в_3$).

Во всех трех случаях график имеет одну точку перегиба.

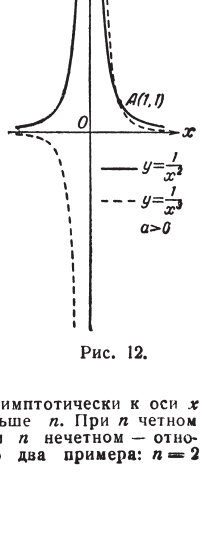


Рис. 12.

Степенная функция: $y=\dfrac{a}{x^n}=ax^{-n}$ (n — целое положительное) (рис. 12).

График — *кривая гиперболического типа* с асимптотами — осями координат. Разрыв при $x=0$.

Если $a>0$, функция при четном n возрастает от 0 до $+\infty$ и убывает от $+\infty$ до 0, оставаясь всегда положительной, а при нечетном n убывает от 0 до $-\infty$ и от $+\infty$ до 0.

Если $a<0$, функция при четном n убывает от 0 до $-\infty$ и возрастает от $-\infty$ до 0, оставаясь всегда отрицательной, а при нечетном n возрастает от 0 до $+\infty$ и от $-\infty$ до 0.

Экстремумов нет. Кривая приближается асимптотически к оси x тем быстрее, а к оси y тем медленнее, чем больше n. При n четном кривая симметрична относительно оси y, а при n нечетном — относительно начала координат. На рис. 12 приведено два примера: $n=2$ и $n=3$.

3. *Иррациональные функции*

Квадратный корень из линейного двучлена:

$$y = \pm\sqrt{ax+b}$$ (рис. 13).

График — *парабола*, ее ось — ось x, вершина: $A\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$, параметр $p = a/2$. Область существования и поведение функции зависят от знака a (см. рис. 13). Функция двузначна, экстремумов не имеет. Подробнее о параболе см. стр. 211—212.

Рис. 13.

Квадратный корень из квадратного трехчлена: $y = \pm\sqrt{ax^2+bx+c}$ (рис. 14). График — *эллипс* при $a<0$ и *гипербола* при $a>0$; одна из осей — ось x, другая — прямая $x = -b/2a$, вершины

$$A,\ C\left(-\frac{b\pm\sqrt{-\Delta}}{2a},\ 0\right)\ \text{и}\ B,\ D\left(-\frac{b}{2a},\ \pm\sqrt{\frac{\Delta}{4a}}\right),\ \text{где}\ \Delta = 4ac - b^2.$$

Область существования и поведение функции зависят от знаков a и Δ (см. рис. 14). Функция двузначна, имеет экстремум, если Δ и a одного знака (точки B и D). При $a<0$ и $\Delta>0$ функция принимает только мнимые значения и кривой не существует. Подробнее об эллипсе и гиперболе см. стр. 206 — 210.

Степенная функция: $y = ax^k = ax^{\pm m/n}$ (m и n — целые положительные взаимно простые числа). Рассмотрен случай $a = 1$ (при $a \neq 1$ кривая по сравнению с $y = x^k$ вытянута в направлении оси y в $|a|$ раз и, если a отрицательное, — зеркально отражена относительно оси x).

1) $k>0$, $y = x^{m/n}$. График (рис. 15) проходит через точки (0, 0) и (1, 1). При $k>1$ касается (в начале) оси x (рис. 15, *г*), при $k<1$ касается (в начале) оси y (рис. 15, *а*, *б*, *в*). При n четном кривая симметрична относительно оси x (функция двузначна, рис. 15, *а*, *г*), при m четном симметрична относительно оси y (рис. 15, *в*), при m и n нечетных симметрична относительно начала (рис. 15, *б*). В связи с этим кривая может иметь в начале координат вершину, точку перегиба или точку возврата (см. рис. 15); асимптот не имеет.

2) $k<0$, $y = x^{-m/n}$. График — *кривая гиперболического типа* с асимптотами — осями координат (рис. 16). Разрыв при $x = 0$. Кривая приближается асимптотически к оси x тем быстрее, а к оси y тем медленнее, чем больше $|k|$. Симметрия относительно осей или начала зависит от четности или нечетности m и n, так же как и в случае $k>0$ (см. выше); этим определяется поведение функции (см. рис. 16); экстремумов нет.

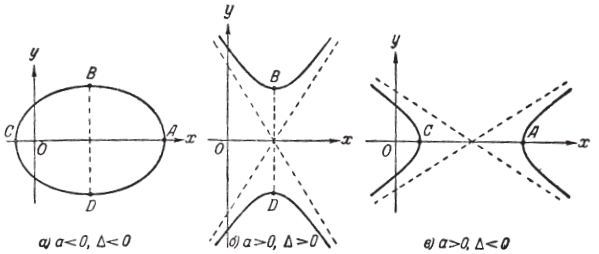


Рис. 14.

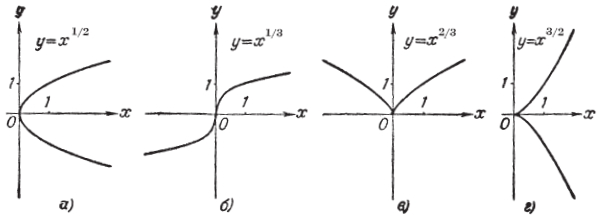


Рис. 15.

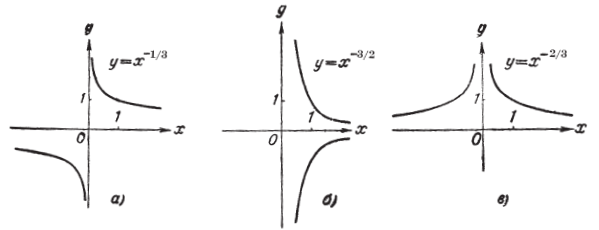


Рис 16.

4. Показательные и логарифмические функции

Показательная функция: $y = a^x = e^{bx}$ ($a > 0$, $b = \ln a$) (рис. 17).

График — *показательная кривая* (при $a = e$ — *натуральная* показательная кривая $y = e^x$). Функция принимает только положительные значения. При $a > 1$ (т. е. $b > 0$) монотонно возрастает от 0 до ∞; при $a < 1$ (т. е. $b < 0$) монотонно убывает от ∞ до 0 — тем быстрее, чем больше $|b|$. Кривая проходит через точку A (0, 1) и приближается асимптотически к оси x (при $b > 0$ — слева, при $b < 0$ — справа) тем быстрее, чем больше $|b|$. Функция $y = a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ возрастает при $a < 1$ и убывает при $a > 1$.

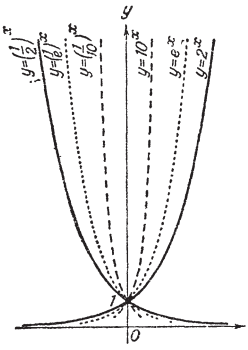


Рис. 17.

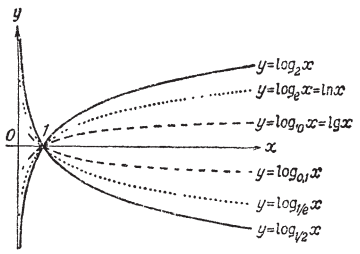


Рис. 18.

Логарифмическая функция: $y = \log_a x$ ($a > 0$) (рис. 18).

График — *логарифмика* (зеркальное отображение показательной кривой относительно биссектрисы $y = x$); при $a = e$ — *натуральная* логарифмика $y = \ln x$. Функция существует только при $x > 0$. При $a > 1$ монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, при $a < 1$ монотонно убывает от $+\infty$ до $-\infty$ тем медленнее, чем больше $|\ln a|$. Кривая проходит через точку A (1, 0) и приближается асимптотически к оси y (при $a > 1$ снизу, при $a < 1$ сверху) тем быстрее, чем больше $|\ln a|$.

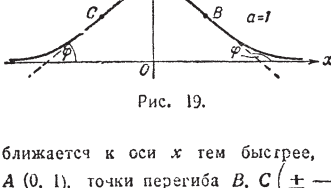


Рис. 19.

Функция $y = e^{-(ax)^2}$ (рис. 19).

Функция возрастает от 0 до 1 и убывает от 1 до 0; кривая симметрична относительно оси y и асимптотически приближается к оси x тем быстрее, чем больше a. Максимум в точке A (0, 1), точки перегиба B, $C\left(\pm\frac{1}{a\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$, наклоны касательных в них: $\operatorname{tg}\varphi = \mp a\sqrt{\frac{2}{e}}$. Важное применение — *кривая нормального закона распределения ошибок* (*кривая Гаусса*): $y = \varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$ (ее график и приложения к теории вероятностей см. стр. 566).

Функция $y = ae^{bx} + ce^{dx}$ (рис. 20).

Кривую удобно строить, складывая графически ординаты кривых $y_1 = ae^{bx}$ и $y_2 = ce^{dx}$ (см. стр. 92), изображенных тонкими линиями (сплошной и штриховой). Функция непрерывная. В случаях, когда ни одно из чисел a, b, c и d не равно нулю, кривая имеет один из следующих четырех видов (причем графики, изображенные на рис. 20,

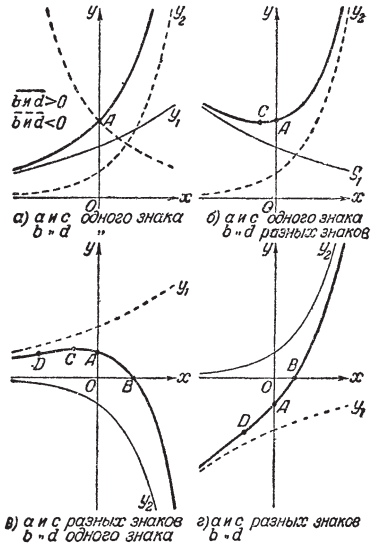


Рис. 20.

в зависимости от знаков параметров могут быть симметрично отображены относительно осей координат):

а) a и c одного знака, b и d одного знака. Функция монотонно изменяется, не меняя знака, от 0 до $+\infty$ ($-\infty$) или от $+\infty$ ($-\infty$) до 0; точек перегиба нет, ось x — асимптота (рис. 20, *а*).

б) a и c — одного знака, b и d — разных знаков. Функция изменяется от $+\infty$ до $+\infty$ или от $-\infty$ до $-\infty$, не меняя знака и проходя через экстремум; точек перегиба нет (рис. 20, *б*).

в) a и c — разных знаков, b и d — одного знака. Функция изменяется от 0 до $+\infty$ ($-\infty$) или от $+\infty$ ($-\infty$) до 0, один раз меняя знак и проходя через один экстремум C и одну точку перегиба D; ось x — асимптота (рис. 20, *в*).

г) a и c — разных знаков, b и d — разных знаков. Функция монотонно изменяется от $-\infty$ до $+\infty$ или от $+\infty$ до $-\infty$, не имея экстремумов, но проходя через одну точку перегиба D (рис. 20, *г*).

Пересечение с осью y: $A(0, a+c)$, пересечение с осью x: $B\left[x=\frac{1}{d-b}\ln\left(-\frac{a}{c}\right)\right]$, экстремум: $C\left[x=\frac{1}{d-b}\ln\left(-\frac{ab}{cd}\right)\right]$, точка перегиба: $D\left[x=\frac{1}{d-b}\ln\left(-\frac{ab^2}{cd^2}\right)\right]$.

Функция $y=ae^{bx+cx^2}$ (рис. 21).

Кривая симметрична относительно вертикальной прямой $x=-\frac{b}{2c}$, оси x не пересекает, ось y пересекает в точке $D(0, a)$. Поведение

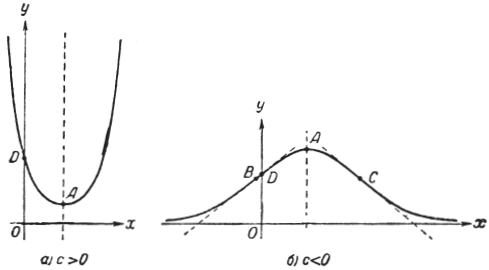


Рис. 21.

функции зависит от знаков a и c. Рассмотрен только случай $a>0$; при $a<0$ следует отобразить кривую симметрично относительно оси x.

а) $c>0$. Функция убывает от $+\infty$ до минимума и возрастает до $+\infty$, оставаясь всегда положительной. Минимум: $A\left(-\frac{b}{2c},\ ae^{-b^2/4c}\right)$, точек перегиба и асимптот нет (рис. 21, $а$).

б) $c<0$. Функция возрастает от 0 до максимума и убывает до нуля. Асимптота — ось x. Максимум $A\left(-\frac{b}{2c},\ ae^{-b^2/4c}\right)$, точки перегиба B, $C\left(\frac{-b\pm\sqrt{-2c}}{2c},\ ae^{\frac{-(b^2+2c)}{4c}}\right)$ (рис. 21, $б$).

Функция $y=ax^be^{cx}$ (рис. 22).

Рассмотрен случай $a>0$ (при $a<0$ кривую следует отобразить симметрично относительно оси x), и значения x рассмотрены только положительные. Функция принимает только положительные значения. При $b>0$ кривая проходит через начало; касательная в начале координат будет: ось x при $b>1$, биссектриса координатного угла $y=x$ при $b=1$, ось y при $b<1$. При $b<0$ ось y является асимптотой. При $c>0$ функция безгранично растет при возрастании x, при $c<0$ асимптотически приближается к нулю. Если b и c разных знаков, функция имеет экстремум $A\left(x=-\frac{b}{c}\right)$. Кривая может иметь 0, 1 или 2 точки перегиба: $C,\ D\left(x=-\frac{b\pm\sqrt{b}}{c}\right)$ (рис. 22, $в$, $д$, $е$, $ж$).

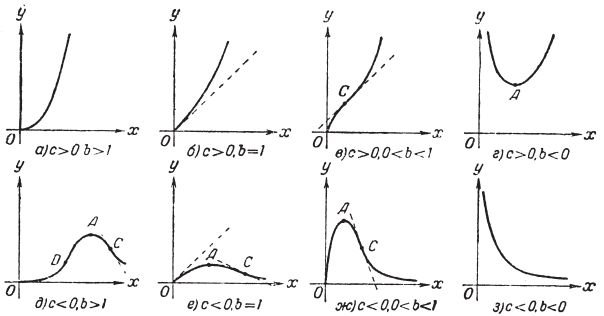


Рис. 22.

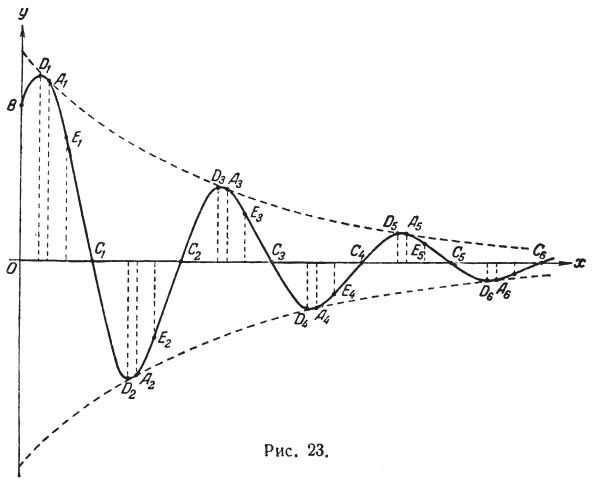


Рис. 23.

Ф у н к ц и я $y = Ae^{-ax}\sin(\omega x + \varphi_0)$ (рис. 23).

График — *кривая затухающего колебания.* Кривая колеблется около оси Ox, асимптотически к ней приближаясь, причем две показательные кривые $y = \pm Ae^{-ax}$ «огибают» кривую, соприкасаясь с ней в точках A_1, A_2, ... $\left(\frac{(k+1/2)\pi - \varphi_0}{\omega},\ (-1)^k Ae^{-ax}\right)$. Пересечения с осями: $B(0,\ A\sin\varphi_0)$, C_1, C_2, ... $\left(\frac{k\pi - \varphi_0}{\omega},\ 0\right)$; экстремумы: $D_1, D_2, \ldots$ при

$x = \dfrac{k\pi - \varphi_0 + \alpha}{\omega}$; точки перегиба: E_1, E_2,... при $x = \dfrac{k\pi - \varphi_0 + 2\alpha}{\omega}$, где $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\omega}{a}$.

Величина $\delta = \ln\left|\dfrac{y_i}{y_{i+1}}\right| = a\,\dfrac{\pi}{\omega}$ (где y_i и y_{i+1} — ординаты двух соседних экстремумов) называется *логарифмическим декрементом затухания*.

5. Тригонометрические функции*

Синус: $y = A\sin(\omega x + \varphi_0)$ (рис. 24).

График — *синусоида*. При $A = \omega = 1$ и $\varphi_0 = 0$ *обыкновенная синусоида* $y = \sin x$ (рис. 24, *а*) — непрерывная кривая с периодом $T = 2\pi$.

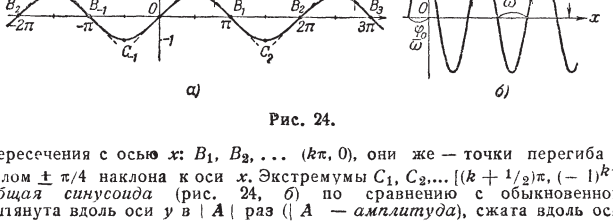


Рис. 24.

Пересечения с осью x: B_1, B_2, ... $(k\pi, 0)$, они же — точки перегиба с углом $\pm\,\pi/4$ наклона к оси x. Экстремумы C_1, C_2,... $[(k + 1/2)\pi, (-1)^k]$. *Общая синусоида* (рис. 24, *б*) по сравнению с обыкновенной вытянута вдоль оси y в $|A|$ раз ($|A|$ — *амплитуда*), сжата вдоль оси

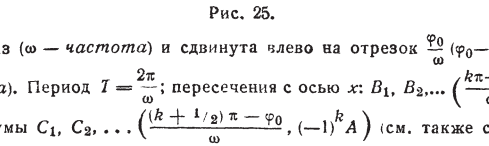


Рис. 25.

x в ω раз (ω — *частота*) и сдвинута влево на отрезок $\dfrac{\varphi_0}{\omega}$ (φ_0 — *начальная фаза*). Период $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$; пересечения с осью x: B_1, B_2,... $\left(\dfrac{k\pi - \varphi_0}{\omega}, 0\right)$, экстремумы C_1, C_2, ... $\left(\dfrac{(k + 1/2)\pi - \varphi_0}{\omega}, (-1)^k A\right)$ (см. также стр. 184).

Косинус: $y = A\cos(\omega x + \varphi_0)$; это уравнение можно записать иначе: $y = A\sin\left(\omega x + \varphi_0 + \dfrac{\pi}{2}\right)$. График — *синусоида*.

Косинусоида $y = \cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ (рис. 25). Пересечения с осью x. B_1, B_2, ... $[(k + 1/2)\pi, 0]$, они же — точки перегиба с углом $\pi/4$ наклона к оси x. Экстремумы: C_1, C_2, ... $(k\pi, (-1)^k)$.

* Формулы тригонометрии см. стр. 182—184. Таблицы см. стр. 48.

Тангенс: $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 26).

График — *тангенсоида*, периодическая кривая с периодом $T = \pi$ и асимптотами $x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$. При изменении x от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$ y монотонно растет от $-\infty$ до $+\infty$, затем значения y повторяются. Пересечения с осью x: 0, A_1, A_{-1}, A_2, A_{-2} ... $(k\pi, 0)$, они же — точки перегиба с углом $\pi/4$ наклона к оси x.

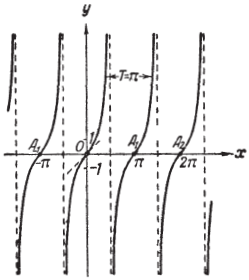


Рис. 26.

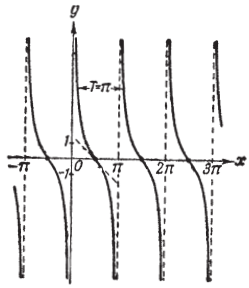


Рис. 27.

Котангенс: $y = \operatorname{ctg} x$ (рис. 27), иначе, $y = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

График—*тангенсоида*, зеркально отображенная относительно оси x и сдвинутая влево на отрезок $1/2\pi$. Асимптоты $x = k\pi$. При изменении x от 0 до π монотонно убывает от $+\infty$ до $-\infty$, затем значения y повторяются. Пересечения с осью x: A_1, A_{-1}, A_2, A_{-2}, ... $\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi,\ 0\right]$, они же — точки перегиба с углом $-\pi/4$ наклона к оси x.

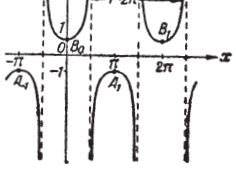


Рис. 28.

Секанс: $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$ (рис. 28).

График — периодическая кривая с периодом $T = 2\pi$ и асимптотами $x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$; $|y| \geq 1$. Максимумы A_1, A_2, ... $[(2k + 1)\pi, -1]$, минимумы B_1, B_2, ... $(2k\pi, +1)$.

Косеканс:

$y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$ (рис. 29), иначе, $y = \operatorname{sc}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

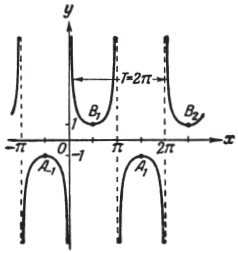


Рис. 29.

График — та же кривая, что и $\sec x$, сдвинутая вправо на отрезок $x = \frac{\pi}{2}$. Асимптоты $= k\pi$. Максимумы $A_1, A_2, \ldots \left(\frac{4k+3}{2}\pi, -1\right)$, минимумы $B_1, B_2, \ldots \left(\frac{4k+1}{2}\pi, 1\right)$

6. Обратные тригонометрические функции *

Графики этих функций получаются из графиков тригонометрических функций путем зеркального отображения относительно биссектрисы координатного угла $y = x$.

Арксинус: $y = \operatorname{Arcsin} x$ (рис. 30).

Функция существует только при $|x| \leq 1$, многозначна. Главное значение $y = \arcsin x$ [выделено сплошной линией] от $A\left(-1, -\frac{\pi}{2}\right)$ до $B\left(+1, +\frac{\pi}{2}\right)$ монотонно возрастает; в начале координат — точка перегиба (с углом наклона, равным $\frac{\pi}{4}$), она же — центр симметрии кривой.

Арккосинус: $y = \operatorname{Arccos} x$ (рис. 31).

Та же кривая, что и для $\operatorname{Arcsin} x$, но опущенная на отрезок $\frac{\pi}{2}$. Функция существует только при $|x| \leq 1$, многозначна. Главное значение $y = \arccos x$ (выделено сплошной линией) от $A(-1, +\pi)$ до $B(+1, 0)$ монотонно убывает; точка $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ — центр симметрии и точка перегиба кривой (с углом $3\pi/4$ наклона к оси x).

Арктангенс: $y = \operatorname{Arctg} x$ (рис. 32).

Функция многозначна. Главное значение $y = \operatorname{arctg} x$ монотонно возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$; начало координат — точка перегиба

* Определения и формулы см. стр. 188—190.

$\left(\text{с углом наклона, равным } \frac{\pi}{4}\right)$, она же — центр симметрии кривой. Остальные значения y получаются из главного путем прибавления величины $\pm k\pi$. Асимптоты: $y = \pm (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

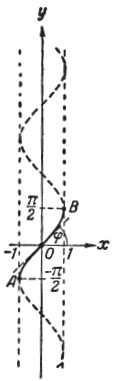


Рис. 30.

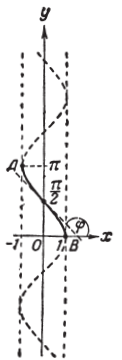


Рис. 31.

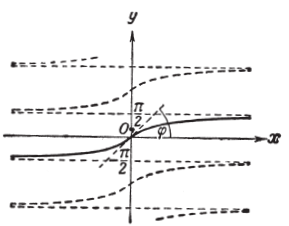


Рис. 32.

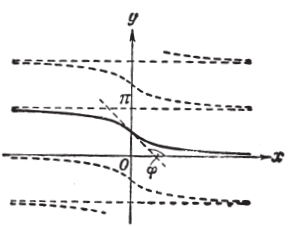


Рис. 33.

Арккотангенс: $y = \operatorname{Arcctg} x$ (рис. 33).

Функция многозначна. Главное значение $y = \operatorname{arcctg} x$ монотонно убывает от π до 0; точка перегиба (центр симметрии) $A\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ с углом наклона, равным $\frac{3\pi}{4}$. Остальные значения y получаются из главного путем прибавления величины $\pm k\pi$. Асимптоты: $y = \pm k\pi$.

7. *Гиперболические функции**

Гиперболический синус: $y = \operatorname{sh} x$ (рис. 34).

Функция нечетная, монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. Начало координат — точка перегиба $\left(\varphi = \frac{\pi}{4}\right)$ и центр симметрии кривой. Асимптот нет.

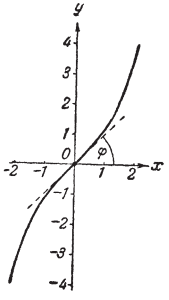


Рис. 34.

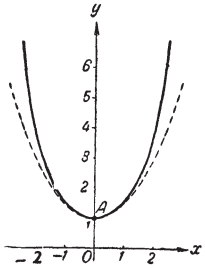


Рис. 35.

Гиперболический косинус: $y = \operatorname{ch} x$ (рис. 35).

График — *цепная линия* (см. стр. 113). Функция четная; при $x < 0$ убывает от $+\infty$ до 1, при $x > 0$ возрастает от 1 до $+\infty$. Минимум в точке A (0, 1); асимптот нет. Кривая расположена симметрично относительно оси y, выше параболы $y = 1 + \frac{x^2}{2}$ (изображенной штриховой линией).

Гиперболический тангенс $y = \operatorname{th} x$ (рис. 36).

Функция нечетная, монотонно возрастает от -1 до $+1$. Начало координат — точка перегиба $\left(\varphi = \frac{\pi}{4}\right)$ и центр симметрии кривой. Две асимптоты: $y = \pm 1$.

Гиперболический котангенс: $y = \operatorname{cth} x$ (рис. 37).

Функция нечетная, разрыв при $x = 0$. При $x < 0$ убывает от -1 до

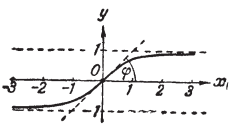


Рис. 36.

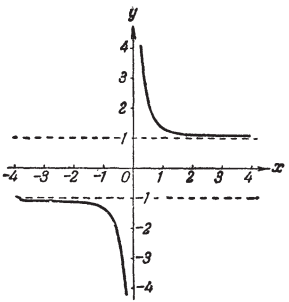


Рис. 37.

$-\infty$, при $x > 0$ убывает от $+\infty$ до $+1$. Экстремумов и точек перегиба нет. Три асимптоты: $x = 0$, $y = \pm 1$.

---

* Теоретические сведения см. стр. 193–194. Таблицы см. стр. 52–55.

8. *Обратные гиперболические функции* *

Графики получаются из графиков гиперболических функций путем зеркального отображения относительно биссектрисы угла xOy.

Ареа-синус: $y = \operatorname{Arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ (рис. 38).

Функция нечетная; монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. Начало координат — точка перегиба $(\varphi = \pi/4)$ и центр симметрии кривой. Асимптот не имеет.

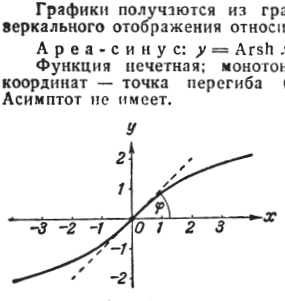


Рис. 38.

Рис. 39.

Ареа-косинус: $y = \operatorname{Arch} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1})$ (рис. 39).

Функция двузначная; существует только при $x \geq 1$. Кривая симметрична относительно оси x; в точке A (1, 0) касается вертикальной прямой $x = 1$, а затем y по абсолютной величине возрастает.

Ареа-тангенс:

$y = \operatorname{Arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ (рис. 40).

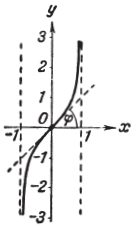


Рис. 40.

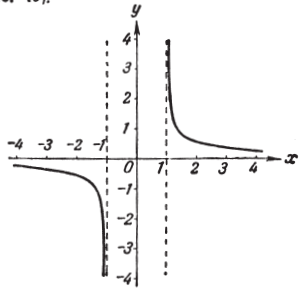


Рис. 41.

Функция нечетная, существует только при $|x| < 1$; монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. Начало координат — точка перегиба $\left(\varphi = \frac{\pi}{4}\right)$ и центр симметрии кривой. Две асимптоты: $x = \pm 1$.

Ареа-котангенс: $y = \operatorname{Arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$ (рис. 41).

Функция нечетная, существует только при $|x| > 1$. При $-\infty < x < -1$ убывает от 0 до $-\infty$, при $+1 < x < +\infty$ убывает от $+\infty$ до 0. Экстремумов и точек перегиба нет. Три асимптоты: $y = 0$, $x = \pm 1$.

---

* Теоретические сведения см. стр. 196—197.

Б. Важнейшие кривые

Здесь приведены некоторые данные о важнейших кривых, встречающихся на практике (сверх тех, которые перечислены выше, среди графиков важнейших функций). К этим данным относятся: определение кривой как некоторого геометрического места, координаты характерных точек, длина кривой или ее части, площадь, ограниченная кривой или ее частью, радиус кривизны в характерных точках.

Общие сведения о вычерчивании кривых по их уравнениям см. стр. 247—248.

О кривых второго порядка (эллипсе, гиперболе и параболе) см. стр. 206—212.

9. Кривые третьего порядка

Полукубическая парабола (рис. 42).

Уравнение: $y = ax^{3/2}$ *, в параметрической форме: $x = t^2$, $y = at^3$. В начале координат — точка возврата. Асимптот нет. Кривизна $K = \frac{6a}{\sqrt{x}\,(4 + 9a^2x)^{3/2}}$ принимает все значения от ∞ до 0. Длина кривой от начала до точки M**: $L = \frac{1}{27a^2}\,[(4 + 9a^2x)^{3/2} - 8]$.

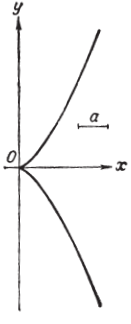


Рис. 42.

Локон Аньези (рис. 43).

Уравнение: $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$. Асимптота $y = 0$. Максимум A (0, a); радиус кривизны в нем $r = \frac{a}{2}$.

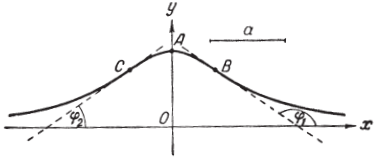


Рис. 43.

Точки перегиба B, $C\left(\pm\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{3a}{4}\right)$, наклон кривой в этих точках $\operatorname{tg}\varphi = \mp\frac{3\sqrt{3}}{8}$. Площадь между кривой и асимптотой $S = \pi a^2$.

Декартов лист (рис. 44).

Уравнение $x^3 + y^3 = 3axy$; в параметрической форме:

$$x = \frac{3at}{1 + t^3},\quad y = \frac{3at^2}{1 + t^3}\quad (t = \operatorname{tg} MOx).$$

---

* Здесь и дальше $a > 0$.

** Здесь и дальше M — произвольная точка кривой с текущими координатами x, y.

Начало координат — узловая точка с касательными — осями координат, радиус кривизны ветвей в начале $r = \frac{3a}{2}$. Асимптота $x + y + a = 0$. Вершина $A\left(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a\right)$. Площадь петли $S_1 = \frac{3}{2}a^2$; площадь между кривой и асимптотой $S_2 = \frac{3}{2}a^2$.

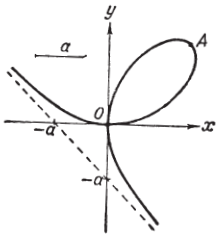


Рис. 44.

Циссоида (рис. 45). Геометрическое место точек M, для которых $OM = PQ$ (P — произвольная точка *производящего круга* с диаметром a).

Уравнение: $y^2 = \frac{x^3}{a - x}$; в параметрической форме $x = \frac{at^2}{1 + t^2}$, $y = \frac{at^3}{1 + t^2}$ ($t = \operatorname{tg} MOx$); в полярных координатах $\rho = \frac{a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi}$. Начало координат — точка возврата. Асимптота $x = a$. Площадь между кривой и асимптотой $S = {}^3/_4\pi a^2$.

Строфоида (рис. 46). Геометрическое место точек M_1 и M_2 (лежащих на произвольных лучах, проходящих через точку A), для которых $PM_1 = PM_2 = OP$ (P — произвольная точка оси Oy).

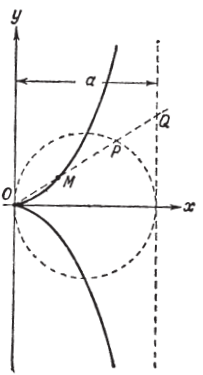


Рис. 45.

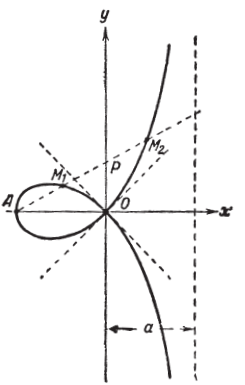


Рис. 46.

Уравнение: $y^2 = x^2\left(\frac{a + x}{a - x}\right)$; в параметрической форме $x = a\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$, $y = at\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$ ($t = \operatorname{tg} MOx$); в полярных координатах $\rho = -a\frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi}$. В начале координат — узловая точка (касательные $y = \pm x$). Асимптота $x = a$. Вершина $A(-a, 0)$. Площадь петли $S_1 = 2a^2 - {}^1/_2\pi a^2$, площадь между кривой и асимптотой $S_2 = 2a^2 + {}^1/_2\pi a^2$.

10 Кривые четвертого порядка

К о н х о и д а Н и к о м е д а (рис. 47). Геометрическое место точек M, для которых $OM = OP \pm l$ (для знака «+» внешняя ветвь, для знака «—» внутренняя)*.

Уравнение: $(x-a)^2(x^2+y^2) - l^2x^2 = 0$; в параметрической форме $x = a + l\cos\varphi$, $y = a\operatorname{tg}\varphi + l\sin\varphi$; в полярных координатах $\rho = \dfrac{a}{\cos\varphi} \pm l$.

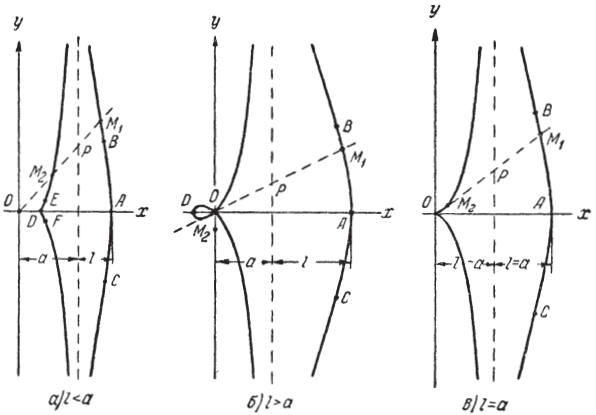


Рис. 47.

Внешняя ветвь: Асимптота $x = a$. Вершина $A\ (a + l, 0)$. Две точки перегиба B, C [их абсцисса x равна наибольшему из корней уравнения $x^3 - 3a^2x + 2a\,(a^2 - l^2) = 0$**] Площадь между ветвью и асимптотой $S = \infty$.

Внутренняя ветвь: Асимптота $x = a$. Вершина $D\ (a - l, 0)$. В начале координат — двойная точка, характер которой зависит от величин a и l:

а) При $l < a$ — изолированная точка (рис. 47, *а*). Кривая имеет еще две точки перегиба E, F [абсцисса x равна по величине второму положительному корню уравнения $x^3 - 3a^2x + 2a\,(a^2 - l^2) = 0$].

б) При $l > a$ — узловая точка (рис. 47, *б*). Кривая имеет максимум и минимум при $x = a - \sqrt[3]{al^2}$. Наклон касательных в начале координат: $\operatorname{tg}\alpha = \pm\dfrac{\sqrt{l^2 - a^2}}{a}$; радиус кривизны $r_0 = \dfrac{l\sqrt{l^2 - a^2}}{2}$.

в) При $l = a$ — точка возврата (рис. 47, *в*).

---

* Вообще *конхоидой* данной кривой называется кривая, получающаяся при увеличении или уменьшении радиуса-вектора каждой точки данной кривой на постоянный отрезок l. Если уравнение кривой в полярных координатах $\rho = f(\varphi)$, то уравнение ее конхоиды $\rho = f(\varphi) \pm l$. Конхоида Никомеда — конхоида прямой линии.

** О способах решений таких уравнений см. стр. 138—139.

Улитка Паскаля (рис. 48). Конхоида окружности *: $OM = OP \pm l$ (полюс лежит на окружности)

Уравнение: $(x^2+y^2-ax)^2 = l^2(x^2+y^2)$, в параметрической форме $x=a\cos^2\varphi + l\cos\varphi$, $y = a\cos\varphi\sin\varphi + l\sin\varphi$, в полярных координатах $\rho = a\cos\varphi + l$ (a — диаметр круга). Вершины A, B ($a\pm l$, 0). Вид кривой зависит от величин a и l, как это видно на рис. 48 и 49. Экстре-

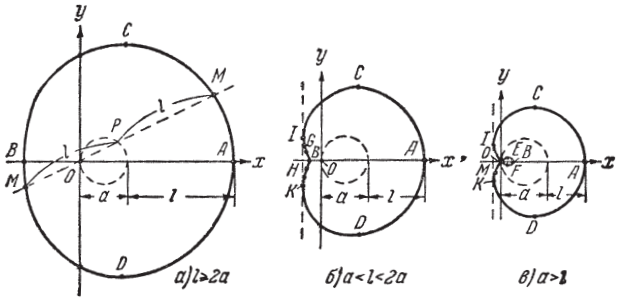


Рис. 48.

мумов 4, если $a > l$, и 2, если $a \leqslant l$: C, D, E, $F\left(\cos\varphi = \dfrac{-l \pm \sqrt{l^2+8a^2}}{4a}\right)$. Точки перегиба G, $H\left(\cos\varphi = -\dfrac{2a^2+l^2}{3al}\right)$ существуют, если $a<l<2a$. Двойная касательная в точках I, $K\left(-\dfrac{l^2}{4a}, \pm\dfrac{l\sqrt{4a^2-l^2}}{4a}\right)$ существует, если $l<2a$ Начало координат — двойная точка: изолированная при $a<l$, узловая при $a>l$ (наклон касательных в ней $\operatorname{tg}\alpha = \pm\dfrac{\sqrt{a^2-l^2}}{l}$, радиус кривизны $r_0 = {}^1/_2\sqrt{a^2-l^2}$) и точка возврата при $a = l$. В последнем случае кривая — *кардиоида* (см. ниже).

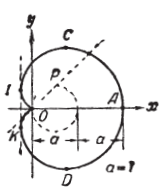


Рис 49

Площадь улитки $S = \dfrac{\pi a^2}{2} + \pi l^2$ [в случае $a>l$ (рис. 48, *в*) площадь внутренней петли при вычислении по этой формуле считается дважды].

Кардиоида (рис. 49). Может быть определена двояко: 1) Частный случай улитки Паскаля. $OM = OP \pm a$ (a—диаметр круга). 2) Эпициклоида (см. стр. 108), у которой диаметры подвижного и неподвижного кругов равны ($= a$).

Уравнение: $(x^2+y^2)^2 - 2ax(x^2+y^2) = a^2y^2$, в параметрической форме $x = a\cos\varphi(1+\cos\varphi)$, $y = a\sin\varphi(1+\cos\varphi)$; в полярных координатах $\rho = a(1+\cos\varphi)$.

Начало координат — точка возврата. Вершина A ($2a$, 0). Максимум и минимум $\left(\cos\varphi = \dfrac{1}{2}\right)$; C, $D\left(\dfrac{3}{4}a, \pm\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a\right)$. Площадь $S = \dfrac{3}{2}\pi a^2$ (6-кратная площадь круга с диаметром a). Длина кривой $L = 8a$.

* См. сноску * на предыдущей странице.

О в а л ы К а с с и н и (рис. 50). Геометрическое место точек M, для которых произведение расстояний $F_1M \cdot F_2M = a^2$ (F_1; F_2 – фиксированные фокусы, a – постоянная).

Уравнение: $(x^2+y^2)^2-2c^2(x^2-y^2)=a^4-c^4$, где F_1, F_2 $(\pm c, 0)$; в полярных координатах $\rho^2=c^2\cos 2\varphi \pm \sqrt{c^4\cos^2 2\varphi+(a^4-c^4)}$. Форма кривой зависит от отношения a к c:

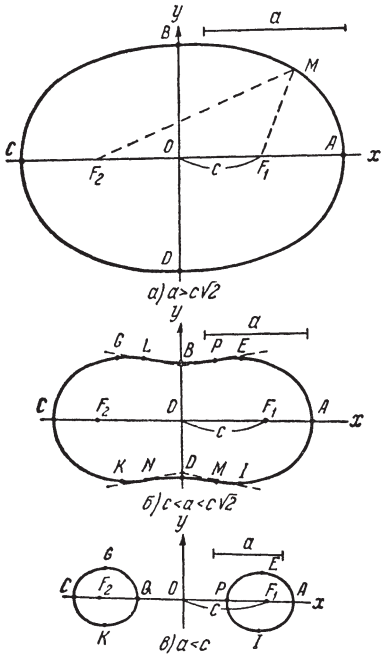


Рис. 50.

а) $a > c\sqrt{2}$; *эллипсообразный овал* (рис. 50, *а*). Точки пересечения с осью x: $A, C(\pm\sqrt{a^2+c^2}, 0)$; точки пересечения с осью y: $B, D(0, \pm\sqrt{a^2-c^2})$. Если $a = c\sqrt{2}$, *овал такого же типа*; в этом случае A, $C(\pm c\sqrt{3}, 0)$, B, $D(0, \pm c)$; в точках B и D кривизна равна нулю (тесное соприкосновение с прямыми $y = \pm c$).

б) $c < a < c\sqrt{2}$; *овал с «талией»* (рис. 50, *б*). Пересечения с осями те же, что и в случае а); максимумы и минимумы: B, D (координаты – см. выше), E, G, K, $I\left(\pm\frac{\sqrt{4c^4-a^4}}{2c}, \pm\frac{a^2}{2c}\right)$; четыре точки перегиба;

$P, L, M, N\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}(m-n)}, \pm\sqrt{\frac{1}{2}(m+n)}\right)$, где $n=\frac{a^4-c^4}{3c^2}$, $m=\sqrt{\frac{a^4-c^4}{3}}$

в) $a=c$; *лемниската* (см. ниже).

г) $a<c$; *два овала* (рис. 50, *в*). Пересечения с осью x: A, $C(\pm\sqrt{a^2+c^2}, 0)$ и P $Q(\pm\sqrt{c^2-a^2}, 0)$; максимумы и минимумы: $E, G, K, I\left(\pm\frac{\sqrt{4c^4-a^4}}{2c}, \pm\frac{a^2}{2c}\right)$.

Радиус кривизны:

$$r=\frac{2a^2\rho^3}{c^4-a^4+3\rho^4}$$

(ρ — радиус-вектор).

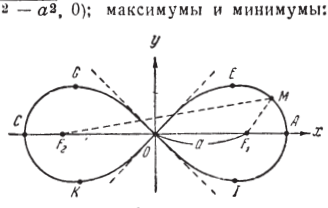


Рис. 51.

Лемниската (рис. 51). Частный случай овала Кассини ($a=c$): $F_1M\cdot F_2M=\left(\frac{F_1F_2}{2}\right)^2$, где F_1, F_2 $(\pm a, 0)$.

Уравнение. $(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0$; в полярных координатах $\rho=a\sqrt{2}\cos 2\varphi$. Начало координат — узловая точка с касательными $y=\pm x$; она же — точка перегиба. Пересечения кривой с осью x: A, $C(\pm a\sqrt{2}, 0)$; максимумы и минимумы: $E, G, K, I\left(\pm\frac{a\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{a}{2}\right)$; полярный угол в этих точках $\varphi=\pm\pi/6$. Радиус кривизны $r=\frac{2a^2}{3\rho}$. Площадь каждой петли $S=a^2$.

11. Циклоиды

Обыкновенная циклоида (рис. 52). Кривая, описываемая точкой окружности, катящейся без скольжения по прямой линии.

Уравнение в параметрической форме: $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ (a — радиус окружности, $t=\angle MC_1B$); в декартовых координатах

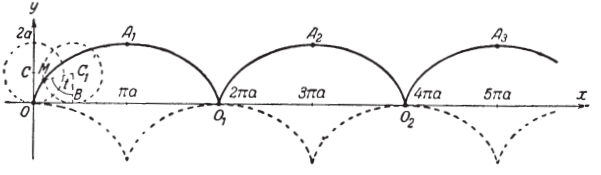


Рис. 52.

$x+\sqrt{y(2a-y)}=a\arccos\frac{a-y}{a}$. Кривая периодическая; период (*базис* циклоиды) $OO_1=2\pi a$. Точки возврата O, O_1, O_2, ... $(2k\pi a, 0)$; вершины $A_1, A_2, \ldots [(2k+1)\pi a, 2a]$. Длина OM: $L=8a\sin^2 1/4t$; длина одной ветви $L_{OA_1O_1}=8a$, площадь OA_1O_1O: $S=3\pi a^2$. Радиус кривизны $r=4a\sin 1/2t$, в вершинах $r_A=4a$. Эволюта (стр. 248) циклоиды — такая же циклоида (изображена штриховой линией).

Удлиненная (рис. 53, *а*) и **укороченная** (рис. 53, *б*) **циклоиды** («*трохоиды*»). Кривые, описываемые точкой, лежащей а) вне и б) внутри окружности, которая катится без скольжения по прямой линии.

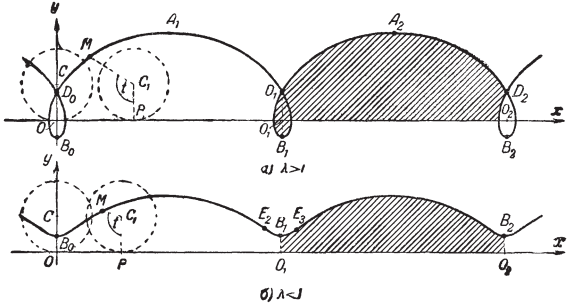


Рис. 53.

Уравнение в параметрической форме: $x = a(t - \lambda \sin t)$, $y = a(1 - \lambda \cos t)$, где a—радиус окружности, $t = \angle MC_1P$, $\lambda a = C_1M$ (для удлиненной циклоиды $\lambda > 1$, для укороченной $\lambda < 1$). Кривые периодические: период $OO_1 = 2\pi a$; максимумы $A_1, A_2, \ldots$ $[(2k+1)\pi a, (1+\lambda)a]$, минимумы $B_0, B_1, B_2, \ldots$ $[2k\pi a, (1-\lambda)a]$. Для удлиненной циклоиды узловые точки $D_0, D_1, D_2, \ldots$ $\left[2k\pi a, a\left(1 - \sqrt{\lambda^2 - t_0^2}\right)\right]$, где t_0 — наименьший положительный корень уравнения $t = \lambda \sin t$ *. Для укороченной циклоиды — точки перегиба $E_1, E_2, \ldots$ $[a(\arccos \lambda - \lambda\sqrt{1-\lambda^2}), a(1-\lambda^2)]$. Длина одного цикла $L = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos t}\, dt$; площадь, заштрихованная на рис. 53; $S = \pi a^2(2 + \lambda^2)$. Радиус кривизны $r = a\dfrac{(1+\lambda^2 - 2\lambda\cos t)^{3/2}}{\lambda(\cos t - \lambda)}$, в точках максимума $r_A = -a\dfrac{(1+\lambda)^2}{\lambda}$, в точках минимума: $r_B = a\dfrac{(1-\lambda)^2}{\lambda}$.

Эпициклоида (рис. 54). Кривая, описываемая точкой окружности, катящейся без скольжения по другой окружности вне ее.

Уравнение в параметрической форме:

$x = (A+a)\cos\varphi - a\cos\left(\dfrac{A+a}{a}\varphi\right)$, $y = (A+a)\sin\varphi - a\sin\left(\dfrac{A+a}{a}\varphi\right)$, [$A$ — радиус неподвижного, a—подвижного круга, $\varphi = \angle COx$]. Вид кривой зависит от отношения $\dfrac{A}{a} = m$. При $m = 1$ — *кардиоида* (см. стр 105).

а) При m целом кривая состоит из m ветвей (рис. 54, *а*), «обходящих» неподвижный круг, точки возврата:

$$A_1, A_2, \ldots, A_m\left(\rho = A,\ \varphi = \frac{2k\pi}{m}\quad (k = 0, 1, \ldots, m-1)\right);$$

вершины $B_1, B_2, \ldots, B_m\left[\rho = A + 2a,\ \varphi = \dfrac{2\pi}{m}\left(k + \dfrac{1}{2}\right)\right]$.

* О решении таких уравнений см. стр. 144 — 146.

б) При m дробном ветви перекрещиваются (рис. 54, *б*), но движущаяся точка M, описав конечное число ветвей, возвращается в исходное поло-

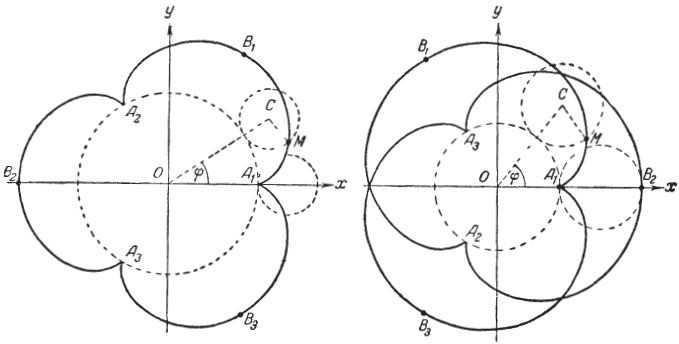


Рис. 54.

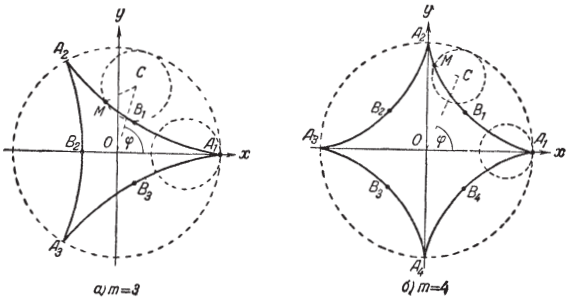


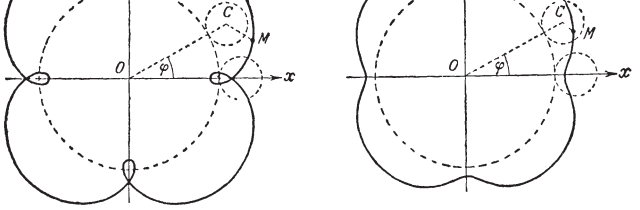
Рис. 55.

жение. При m иррациональном число ветвей бесконечно, точка M в исходное положение не возвращается.

Длина одной ветви $L_{A_1B_1A_2} = \frac{8(A+a)}{m}$, при m целом длина всей кривой $L = 8(A+a)$. Площадь сектора $A_1B_1A_2A_1$ (без сектора неподвижного круга): $S = \pi a^2\left(\frac{3A+2a}{A}\right)$. Радиус кривизны $r = \frac{4a(A+a)}{2a+A}\sin\frac{A\varphi}{2a}$; в вершинах $r_B = \frac{4a(A+a)}{2a+A}$.

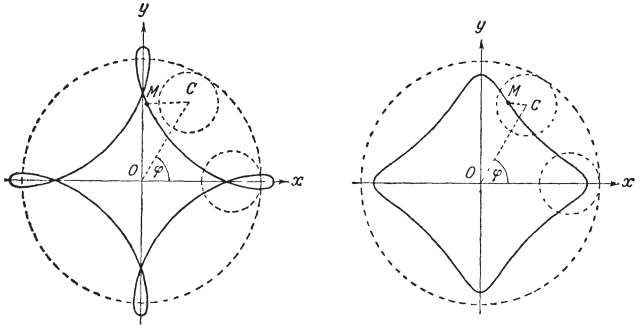
Гипоциклоида (рис. 55). Кривая, описываемая точкой окружности, катящейся без скольжения по другой окружности внутри нее.

Уравнение гипоциклоиды, координаты вершин и точек возврата, формулы для длины дуги, площади и радиуса кривизны — те же, что для эпициклоиды с заменой «$+a$» на «$-a$»; число точек возврата при m целом, дробном и иррациональном (m всегда > 1) такое же, как у эпициклоиды. При $m = 2$ кривая вырождается в диаметр неподвижного круга. При $m = 3$ гипоциклоида с тремя ветвями (рис. 55, *а*): $x = a\,(2\cos\varphi + \cos 2\varphi)$, $y = a\,(2\sin\varphi - \sin 2\varphi)$; $L = 16a$, $S_{\text{полн}} = 2\pi a^2$. При $m = 4$ (рис. 55, *б*) гипоциклоида с четырьмя ветвями (*астроида*): $x = A\cos^3\varphi$, $y = A\sin^3\varphi$; в декартовых координатах $x^{2/3} + y^{2/3} = A^{2/3}$; $L = 24a = 6A$; $S = \frac{3}{8}\pi A^2$.



а) $\lambda > 1, a > 0$ *б*) $\lambda < 1, a > 0$

Рис. 56.



а) $\lambda > 1, a < 0$ *б*) $\lambda < 1\ a < 0$

Рис. 57.

Удлиненная и укороченная эпи- и гипоциклоиды («*эпи-* и *гипотрохоиды*») (рис. 56 и 57). Кривая, описываемая точкой, лежащей вне или внутри окружности, катящейся без скольжения по другой окружности вне (эпициклоида, рис. 56) или внутри нее (гипоциклоида, рис. 57).

Уравнение (в параметрической форме):

$$x = (A + a)\cos\varphi - \lambda a \cos\left(\frac{A+a}{a}\varphi\right),$$

$$y = (A + a)\sin\varphi - \lambda a \sin\left(\frac{A+a}{a}\varphi\right).$$

A — радиус неподвижного круга, a — подвижного (причем в случае гипоциклоиды «$+a$» в уравнении заменяется на «$-a$»), $\lambda a = CM$ (для удлиненной $\lambda > 1$, для укороченной $\lambda < 1$). При $A = 2a$ (λ — любое число) гипоциклоида $x = a(1 + \lambda)\cos\varphi$, $y = a(1 - \lambda)\sin\varphi$ обращается в эллипс с полуосями $a(1+\lambda)$ и $a(1-\lambda)$. При $A = a$ получается *улитка Паскаля* (см. стр. 105)*: $x = a(2\cos\varphi - \lambda\cos 2\varphi)$, $y = a(2\sin\varphi - \lambda\sin 2\varphi)$.

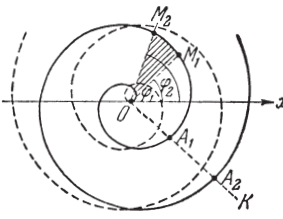


Рис. 58.

12. Спирали

Архимедова спираль (рис. 58). Кривая, описываемая точкой, движущейся с постоянной скоростью v по лучу, вращающемуся около полюса O с постоянной угловой скоростью ω.

Уравнение в полярных координатах: $\rho = a\varphi$; $a = \frac{v}{\omega}$. Кривая состоит из двух ветвей, расположенных симметрично относительно оси Ox. Каждый луч OK пересекает кривую в точках O, A_1, A_2, ..., A_n, находящихся друг от друга на расстоянии $A_iA_{i+1} = 2\pi a$. Длина дуги OM: $L = \frac{a}{2}(\varphi\sqrt{\varphi^2+1} + \operatorname{Arsh}\varphi)$, $\frac{2L}{a\varphi^2} \to 1$ для больших φ. Площадь сектора M_1OM_2: $S = \frac{a^2}{6}(\varphi_2^3 - \varphi_1^3)$. Радиус кривизны $r = a\frac{(\varphi^3+1)^{3/2}}{\varphi^2+2}$, в начале координат $r_0 = \frac{a}{2}$.

Рис. 59.

Гиперболическая спираль (рис. 59).

Уравнение в полярных координатах: $\rho = \frac{a}{\varphi}$. Кривая состоит из двух ветвей, расположенных симметрично относительно оси y; каждая

* На стр. 105 через a обозначалась величина, которая здесь обозначена через $2\lambda a$, а через l — диаметр $2a$. Изменена и система координат.

ветвь имеет прямую $y=a$ асимптотой и начало O — асимптотической точкой. Площадь сектора M_1OM_2: $S=\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\varphi_1}-\frac{1}{\varphi_2}\right)$; $\lim\limits_{\varphi_2\to\infty} S=\frac{a^2}{2\varphi}$.

Радиус кривизны $r=\frac{a}{\varphi}\left(\frac{\sqrt{1+\varphi^2}}{\varphi}\right)^3$.

Логарифмическая спираль (рис. 60). Кривая, пересекающая все лучи, выходящие из одной точки O, под одним и тем же углом α.

Уравнение (в полярных координатах): $\rho=ae^{k\varphi}$ [$k=\operatorname{ctg}\alpha$, если $\alpha=\frac{\pi}{2}$, то $k=0$ и кривая — окружность]. Кривая имеет полюс O асимптотической точкой. Длина дуги M_1M_2: $L=\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}(\rho_2-\rho_1)$, предел длины дуги OM от начала: $L_0=\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}\rho$. Радиус кривизны $r=\sqrt{1+k^2}\,\rho=L_0k$.

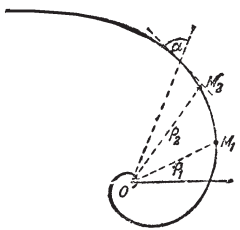


Рис. 60.

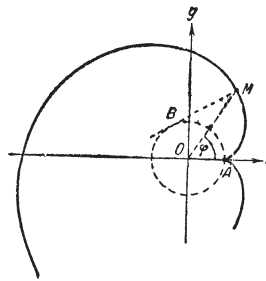


Рис. 61.

Развертка (эвольвента*) окружности (рис. 61). Кривая, описываемая концом натянутой нити, разматывающейся с окружности ($AB=BM$).

Уравнение в параметрической форме:

$$x=a\cos\varphi+a\varphi\sin\varphi,\quad y=a\sin\varphi-a\varphi\cos\varphi$$

(a — радиус круга, $\varphi=\angle BOx$). Кривая имеет две ветви, расположенные симметрично относительно оси x; точка возврата $A(a, 0)$, пересечения с Ox: $x=\frac{a}{\cos\varphi_0}$, где φ_0 — корни уравнения $\operatorname{tg}\varphi=\varphi$ **. Длина дуги AM: $L=\frac{1}{2}a\varphi^2$. Радиус кривизны: $r=a\varphi=\sqrt{2aL}$; центр кривизны B лежит на окружности.

---

* Об эвольвенте см. стр. 248.

** О решении таких уравнений см. стр. 144—146.

К л о т о и д а (рис. 62). Кривая, для которой радиус кривизны обратно пропорционален длине дуги: $r = a^2 : s$.

Уравнение в параметрической форме: $x = a\sqrt{\pi}\int_0^t \cos\frac{\pi t^2}{2}\,dt$, $y = a\sqrt{\pi}\int_0^t \sin\frac{\pi t^2}{2}\,dt$*, где $t = \frac{s}{a\sqrt{\pi}}$, $s = \breve{OM}$.

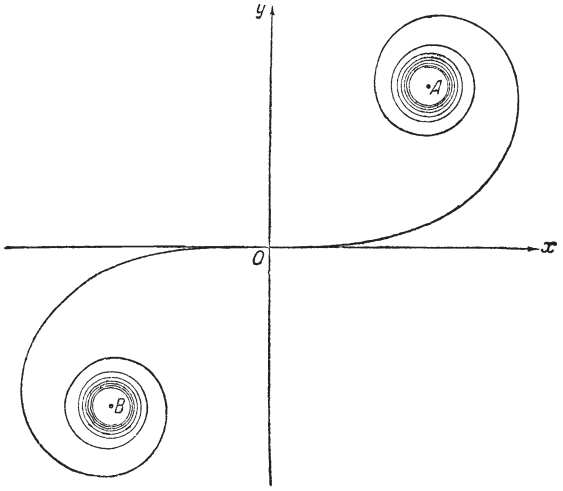


Рис. 62.

Кривая симметрична относительно начала координат, являющегося точкой перегиба (касательная — ось x); две асимптотические точки:

$$A\left(+\frac{a\sqrt{\pi}}{2}, +\frac{a\sqrt{\pi}}{2}\right) \text{ и } B\left(-\frac{a\sqrt{\pi}}{2}, -\frac{a\sqrt{\pi}}{2}\right).$$

13. Некоторые другие кривые

Ц е п н а я л и н и я (рис. 63). Форму цепной линии принимает гибкая тяжелая нерастяжимая нить, подвешенная в двух точках.

Уравнение $y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a} = a\,\frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}$.

Кривая расположена симметрично относительно оси y, выше параболы $y = a + \frac{x^2}{2a}$ (отмеченной штриховой линией). Вершина $A\,(0, a)$.

* Эти интегралы не выражаются через элементарные функции.

Длина дуги AM: $L = a \operatorname{sh} \frac{x}{a} = a \frac{e^{x/a} - e^{-x/a}}{2}$; площадь $OAMP$: $S = aL = a^2 \operatorname{sh} \frac{x}{a}$. Радиус кривизны $r = \frac{y^2}{a} = a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}$

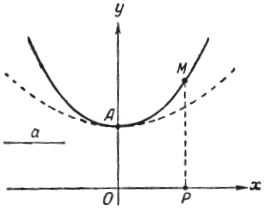


Рис. 63.

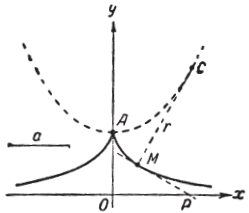


Рис. 64.

Трактриса (рис. 64). Кривая, для которой длина отрезка касательной от точки прикосновения M до точки P пересечения с данной прямой (на рис. 64 — с осью абсцисс) — величина постоянная *.

Трактриса является эвольвентой (стр. 248) цепной линии, причем развертывание начинается в вершине A.

Уравнение: $x = a \operatorname{Arch} \frac{a}{y} \mp \sqrt{a^2 - y^2} \left(= a \ln \frac{a \pm \sqrt{a^2 - y^2}}{y} \mp \sqrt{a^2 - y^2} \right)$. Асимптота — ось x, точка возврата (с вертикальной касательной): $A(0, a)$. Кривая симметрична относительно оси y. Длина дуги AM: $L = a \ln \frac{a}{y}$; при увеличивающейся длине дуги L разность $L - x$ (где x — абсцисса точки M) $\approx a(1 - \ln 2) \approx 0{,}307a$. Радиус кривизны $r = a \operatorname{ctg} \frac{x}{y}$.

---

* Иными словами: если к одному концу нерастяжимой нити данной длины (a) прикреплена материальная точка (M), а другой конец (P) движется по прямой (Ox), то эта точка (M) описывает трактрису (отсюда происхождение названия: трактриса — линия влечения).

I. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

1. *Правила приближенных вычислений*

Приближенные вычисления. Выполняя вычисления, всегда необходимо помнить о той точности, которую нужно или которую можно получить. Совершенно недопустимо вести вычисления с большой точностью, если данные задачи не допускают или не требуют этого (например, нельзя пользоваться семизначными логарифмами при вычислениях с числами, имеющими 5 верных значащих цифр). Твердое знакомство с правилами приближенных вычислений необходимо каждому, кому приходится вычислять.

Погрешности. Разница между точным числом x и его приближенным значением a называется *погрешностью* данного приближенного числа. Если известно, что $|x-a|<\Delta_a$, то величина Δ_a называется *предельной абсолютной погрешностью* приближенной величины a; отношение $\Delta_a : a = \delta_a$ называется *предельной относительной погрешностью*: последнюю часто выражают в процентах.

Пример: 3,14 является приближенным значением числа π, погрешность его равна 0,00159..., предельную абсолютную погрешность можно считать равной 0,0016, а предельную относительную погрешность — равной $\frac{0{,}0016}{3{,}14} = 0{,}00051 = 0{,}051\%$.

Для краткости обычно слово «предельная» опускается.

О погрешностях наблюдений см. стр. 565.

Значащие цифры. Если абсолютная погрешность величины a не превышает одной единицы разряда последней цифры числа a, то говорят, что у числа a все знаки *верные* *. Приближенные числа следует записывать, сохраняя только верные знаки. Если, например, абсолютная погрешность числа 52 400 равна 100, то это число должно быть записано в виде $524 \cdot 10^2$ или $5{,}24 \cdot 10^4$. Оценить погрешность приближенного числа можно, указав, сколько верных значащих цифр оно содержит. При подсчете значащих цифр не считаются нули с левой стороны.

Примеры: 1) 1 куб. фут $= 0{,}0283\ м^3$ — три верные значащие цифры; 2) 1 дюйм $= 2{,}5400\ см$ — пять верных значащих цифр.

Если число a имеет n верных значащих цифр, то его относительная погрешность $\delta_a \leq \frac{1}{z \cdot 10^{n-1}}$, где z — первая значащая цифра числа a.

---

* В этом определении часто требуют, чтобы погрешность не превышала половины единицы разряда последней цифры приближенного числа. В связи с этим см. стр. 116 («округление»).

У числа a с относительной погрешностью δ_a верны n значащих цифр, где n — наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству

$$(1+z)\,\delta_a \leqslant 10^{1-n}*.$$

Пример. Если число $a = 47{,}542$ получено в результате действий над приближенными числами (см. ниже) и известно, что $\delta_a = 0{,}1\%$, то a имеет три верных знака, так как $(4+1)\cdot 0{,}001 < 10^{-2}$.

Округление. Если приближенное число содержит лишние (или неверные) знаки, то его следует *округлить*. При округлении сохраняются только верные знаки; лишние знаки отбрасываются, причем если первая отбрасываемая цифра больше 4, то последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу. Если отбрасываемая часть состоит только из одной цифры 5, то округление обычно делается так, чтобы последняя цифра оставалась четной. При округлении возникает дополнительная погрешность, не превышающая половины единицы разряда последней значащей цифры округленного числа. Поэтому, чтобы после округления все знаки были верны, погрешность до округления должна быть не больше половины единицы того разряда, до которого предполагают делать округление.

Действия над приближенными числами. Результат действий над приближенными числами представляет собой также приближенное число. Погрешность результата может быть выражена через погрешности первоначальных данных при помощи следующих теорем:

1) Предельная абсолютная погрешность алгебраической суммы равна сумме предельных абсолютных погрешностей слагаемых.

2) Относительная погрешность суммы заключена между наибольшей и наименьшей из относительных погрешностей слагаемых.

3) Относительная погрешность произведения и частного равна сумме относительных погрешностей сомножителей или, соответственно, делимого и делителя.

4) Относительная погрешность n-й степени приближенного числа в n раз больше относительной погрешности основания (как для целых, так и для дробных n).

Пользуясь этими теоремами, можно определить погрешность результата любой комбинации арифметических действий над приближенными числами.

Примеры. 1) $V = r^2 h$; $\Delta_V = V\delta_V = V(2\delta_r + \delta_h)$.

2) $z = \sqrt{\dfrac{x}{1+y}}$; $\delta_z = \dfrac{1}{2}(\delta_x + \delta_{1+y}) =$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_x}{x} + \frac{\Delta_y}{1+y}\right).$$

Погрешность функции. Помимо данных выше правил, погрешность при вычислении значений какой-либо функции, аргументы которой заданы приближенно, может быть оценена с помощью дифференциала этой функции. Погрешность функции есть не что иное, как возможное приращение функции, которое она получит, если ее аргументам дать приращения, равные их погрешностям. Так как погрешности бывают обыкновенно достаточно малы, то практически вполне допустима замена приращений дифференциалами (см. стр. 304). Если известны только предельные абсолютные погрешности аргументов, то при вычислении дифференциалов необходимо для всех производных брать их абсолютные значения.

---

* Если учесть возможную погрешность округления (см. ниже), следует положить $(1+z)\,\delta_a \leqslant 0{,}5\cdot 10^{1-n}$.

Примеры. 1) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{b}$; $d\varphi = \frac{b\,da - a\,db}{a^2 + b^2}$, $\Delta_\varphi = \frac{b\,\Delta_a + a\,\Delta_b}{a^2 + b^2}$.

2) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\frac{dz}{z} = \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2}$, $\delta_z = \frac{\Delta_z}{z} = \frac{x\,\Delta_x + y\,\Delta_y}{x^2 + y^2}$.

Для функции, значение которой находится при помощи таблиц, оценка погрешности может быть произведена крайне просто. Если аргумент задан с погрешностью Δ_x, то для определения погрешности $f(x)$ находят, пользуясь линейной интерполяцией (см. стр. 15), приращение функции, соответствующее $\pm\,\Delta_x$. Абсолютная величина этого приращения и дает предельную абсолютную погрешность $f(x)$.

Примеры. 1) Если диаметр круга $D = 5{,}92$ *см* имеет погрешность $\Delta_D = 0{,}005$, то соответствующие погрешности длины окружности и площади круга равны соответственно (см. стр. 63 и 65), 0,015 *см* и 0,05 *см*^{2}. 2) Если $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}818 \pm 0{,}002$, то (см. стр. 50) $\alpha = 39°17' \pm 0°4'$.

Обратная задача. Если требуется получить результат с определенной точностью, то, выведя сначала формулу для погрешности результата одним из указанных выше способов, можно определить допустимые погрешности первоначальных данных. Решение этой задачи неоднозначно и требует дополнительных предположений.

Пример: С какой точностью должны быть измерены катеты прямоугольного треугольника, из которых один примерно втрое меньше другого, чтобы погрешность угла, определенного по его тангенсу, не превышала одной минуты? Из $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{b}$ следует (см. выше): $\Delta_\varphi = \frac{b\,\Delta_a + a\,\Delta_b}{a^2 + b^2}$, откуда, считая $b = 3a$ и полагая $\Delta_a = \Delta_b$, получим $1' = 0{,}00029 = 0{,}4\,\frac{\Delta a}{a}$, или $\delta_a = 0{,}0007$. Итак, допустима одинаковая абсолютная погрешность измерения катетов, дающая для меньшего из них относительную погрешность 0,07%.

Вычисления без точного учета погрешностей. Указанным выше способом может быть оценена предельная абсолютная погрешность, т. е. величина, заведомо превосходящая абсолютную величину истинной погрешности. При этом все время предполагается, что различные погрешности друг друга усиливают, тогда как практически это бывает крайне редко. При массовых вычислениях, когда не учитывают погрешность каждого отдельного результата, пользуются следующими *правилами подсчета цифр*. При соблюдении этих правил можно считать, что в среднем полученные результаты будут иметь все знаки верными, хотя в отдельных случаях возможна ошибка в несколько единиц последнего знака *.

1. При *сложении и вычитании* приближенных чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их в приближенном данном с наименьшим числом десятичных знаков.

2. При *умножении и делении* в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное данное с наименьшим числом значащих цифр.

3. При *возведении в квадрат и куб* в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет возводимое в степень приближенное число. (Последняя цифра квадрата и, особенно, куба при этом менее надежна, чем последняя цифра основания.)

4. При *извлечении квадратного и кубического корней* в результате следует брать столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное значение подкоренного числа. (Последняя цифра квадратного

* Правила даны в редакции В. М. Брадиса.

и, особенно, кубического корня при этом более надежна, чем последняя цифра подкоренного числа.)

5. Во всех промежуточных результатах следует сохранять одной цифрой более, чем рекомендуют предыдущие правила. В окончательном результате эта «запасная цифра» отбрасывается.

6. Если некоторые данные имеют больше десятичных знаков (при сложении и вычитании) или больше значащих цифр (при умножении, делении, возведении в степень, извлечении корня), чем другие, то их предварительно следует округлить, сохраняя лишь одну лишнюю цифру.

7. Если данные можно брать с произвольной точностью, то для получения результата с k цифрами данные следует брать с таким числом цифр, какое дает, согласно правилам 1—4, $(k+1)$ цифру в результате.

8. При вычислении посредством логарифмов одночленного выражения следует подсчитать число значащих цифр в приближенном данном, имеющем наименьшее число значащих цифр, и взять таблицу логарифмов с числом десятичных знаков на 1 большим. В окончательном результате последняя значащая цифра отбрасывается.

Умножение и деление приближенных чисел. Чтобы не получать ненужных знаков, умножение и деление приближенных чисел производят следующим образом.

При умножении множителем берут менее точное число из двух сомножителей. Умножение начинают со старших разрядов, и с получением каждого частного произведения зачеркивают у множимого последнюю справа цифру. При этом на последнюю зачеркнутую цифру желательно вносить поправку.

При делении у делимого сохраняется, согласно правилу 6, если это возможно, на один знак больше, чем у делителя. При выполнении деления вместо обычного приписывания нулей к остаткам следует зачеркивать по одной цифре делителя. На зачеркнутые цифры следует при умножении вносить поправки.

Примеры: 1) Перемножить 4,128 и 2,953; 2) Разделить 12,189 на 4,128. Окончательная запись вычислений будет выглядеть следующим образом:

$$
\begin{array}{r}
\times\ 4{,}128 \\
\underline{\ 2{,}953} \\
8{,}256 \\
+\ 3{,}715 \\
\ 206 \\
\ \underline{12} \\
12{,}189 \approx 12{,}19
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
2)\ 12{,}189 \mid 4{,}128 \\
\underline{-\ 8{,}256} \mid\ 2{,}953 \\
-\ 3{,}933 \\
\underline{-\ 3{,}715} \\
-\ 218 \\
\underline{-\ 206} \\
-\ 12 \\
\underline{-\ 12}
\end{array}
$$

2. *Приближенные формулы*

Во многих случаях довольно сложные функции можно приближенно заменить более простыми, дающими результат с допустимой погрешностью. Для этой цели можно пользоваться несколькими первыми членами разложения этих функций в ряд Тэйлора (см. стр. 322) или применять метод наименьших квадратов (см. стр. 572). В последнем случае формула будет существенно зависеть от того промежутка, для которого она предназначается. На стр. 119 дано несколько наиболее употребительных формул, полученных из ряда Тэйлора, с указанием даваемой ими точности.

Формула	Погрешность формулы не превышает 0,1% если x изменяется от	до	Погрешность формулы не превышает 1,0% если x изменяется от	до	Погрешность формулы не превышает 10% если x изменяется от	до
$\sin x = x$	$-0{,}077 = -4°{,}4$	$0{,}077 = 4°{,}4$	$-0{,}245 = -14°{,}0$	$0{,}245 = 14°{,}0$	$-0{,}786 = -45°{,}0$	$0{,}786 = 45°{,}0$
$\sin x = x - \frac{x^3}{6}$	$-0{,}580 = -33°{,}2$	$0{,}580 = 33°{,}2$	$-1{,}005 = -57°{,}6$	$1{,}005 = 57°{,}6$	$-1{,}632 = -93°{,}5$	$1{,}632 = 93°{,}5$
$\cos x = 1$	$-0{,}045 = -2°{,}6$	$0{,}045 = 2°{,}6$	$-0{,}141 = -8°{,}1$	$0{,}141 = 8°{,}1$	$-0{,}451 = -25°{,}8$	$0{,}451 = 25°{,}8$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$	$-0{,}386 = -22°{,}1$	$0{,}386 = 22°{,}1$	$-0{,}662 = -37°{,}9$	$0{,}662 = 37°{,}9$	$-1{,}036 = -59°{,}3$	$1{,}036 = 59°{,}3$
$\operatorname{tg} x = x$	$-0{,}054 = -3°{,}1$	$0{,}054 = 3°{,}1$	$-0{,}172 = -9°{,}8$	$0{,}172 = 9°{,}8$	$-0{,}517 = -29°{,}6$	$0{,}517 = 29°{,}6$
$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3}$	$-0{,}293 = -16°{,}8$	$0{,}293 = 16°{,}8$	$-0{,}519 = -29°{,}7$	$0{,}519 = 29°{,}7$	$-0{,}895 = -51°{,}3$	$0{,}895 = 51°{,}3$
$\sqrt{a^2 + x} = a + \frac{x}{2a}$ *	$-0{,}085a^2$	$0{,}093a^2$	$-0{,}247a^2$	$0{,}328a^2$	$-0{,}607a^2$	$1{,}545a^2$
$\frac{1}{\sqrt{a^2 + x}} = \frac{1}{a} - \frac{x}{2a^3}$	$-0{,}051a^2$	$0{,}052a^2$	$-0{,}157a^2$	$0{,}166a^2$	$-0{,}448a^2$	$0{,}530a^2$
$\frac{1}{a + x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2}$	$-0{,}031a$	$0{,}031a$	$-0{,}099a$	$0{,}099a$	$-0{,}301a$	$0{,}301a$
$e^x = 1 + x$	$-0{,}045$	$0{,}045$	$-0{,}134$	$0{,}148$	$-0{,}375$	$0{,}502$
$\ln(1 + x) = x$	$-0{,}002$	$0{,}002$	$-0{,}020$	$0{,}020$	$-0{,}176$	$0{,}230$

* Формулу можно записать в виде $\sqrt{a^2 + x} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a^2 + x}{a}\right)$. В этом виде она обычно и употребляется на практике. Так как a есть приближенное значение корня («первое приближение»), то из этой формулы следует правило: для получения более точного значения корня следует взять среднее арифметическое первого приближения и частного от деления подкоренного числа на первое приближение; при этом можно считать, что число верных знаков полученного результата вдвое больше числа верных знаков первого приближения.

Следует заметить также, что формула $\sqrt{a^2 + b^2} = 0{,}960a + 0{,}398b$, где $a > b$, полученная по принципу равномерного приближения (см. стр. 571), дает погрешность, не превышающую 4%.

3. Счетная линейка

Назначение счетной линейки. Простейшие вычисления, содержащие умножение, деление, извлечение квадратного и кубического корней, возведение в степень заданных чисел и действия с тригонометрическими функциями данных углов, могут быть приближенно выполнены на счетной линейке. Точность вычислений различна в разных случаях, но в среднем вычисления на счетной линейке длиной 25 *см* соответствуют вычислениям с тремя значащими цифрами, т. е. с относительной погрешностью от 0,1% до 1%. В случаях, когда подобная точность достаточна, вычисления следует выполнять на счетной линейке.

Логарифмическая шкала. В основе конструкции счетной линейки лежит логарифмическая шкала, построенная следующим образом. По оси от начальной точки в некотором масштабе откладываются отрезки, равные десятичным логарифмам ряда чисел (рис. 65). Если

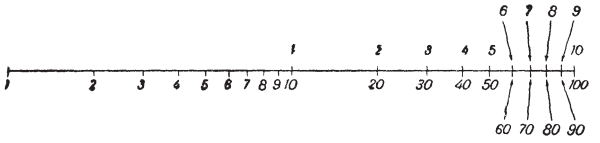


Рис. 65.

отложен $\lg a$, то около соответствующей точки ставится пометка a (рис. 66). Около начальной точки должна стоять пометка 1 ($\lg 1 = 0$). Таким образом, на логарифмической шкале расстояние от пометки 1 до пометки a равно в выбранном масштабе $\lg a$. Так как $\lg(10a) = 1 + \lg a$,

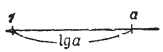


Рис. 66.

Рис. 67.

то пометки по логарифмической шкале на участке от 10 до 100 будут в точности соответствовать пометкам на участке от 1 до 10 для чисел, в 10 раз меньших. Это же рассуждение может быть проведено и для других участков шкалы. Поэтому участок шкалы длиной в одну единицу масштаба может служить для представления всей бесконечной логарифмической шкалы. Числам с одинаковым цифровым составом, т. е. отличающимся на множитель 10^n (например, 7,15; 0,0715; 71 500), будет соответствовать на этом участке шкалы одна и та же пометка.

Шкалы линейки. Счетная линейка состоит из *линейки, движка*, скользящего в пазах линейки, и *бегунка* — рамки со стеклом, на котором нанесены одна или три визирные линии (рис. 67). На линейке

и на двух сторонах движка нанесены шкалы. Эти шкалы мы будем называть: *A*, *B*, *C*, *D*, *I*, *K*, *L* (рис. 68); на некоторых типах линеек шкалы *I* и *K* отсутствуют, а шкала *L* помещена на обратной стороне движка. Прежде чем вычислять на счетной линейке, *необходимо изучить ее шкалы.*

Шкалы *A*, *B*, *C*, *D*, *I*, *K*—логарифмические. Для шкал *C*, *D* и *I* единица масштаба равна 25 *см*, причем, в противоположность всем остальным шкалам, положительное направление шкалы *I* выбрано влево. Для шкал *A* и *B* единица масштаба равна 12,5 *см*, а для шкалы *K* $8^1/_8$ *см*, в связи с чем эти шкалы имеют на линейке два (*A* и *B*) и три (*K*) тождественно равных участка. Деления на всех логарифмических шкалах неравномерные и даны с различной степенью подробности в различных местах. При установке на линейке чисел, для которых нет соответствующих пометок, считают, что в пределах одного деления логарифмическую шкалу можно принять за равномерную, т. е. что, например, пометка для числа 235 лежит посредине между пометками 234 и 236.

Шкала *L* — равномерная масштабная шкала с делениями через 0,002 единицы (за единицу принята длина 25 *см*).

На оборотной стороне движка (рис. 69) нанесены логарифмические шкалы тригонометрических функций

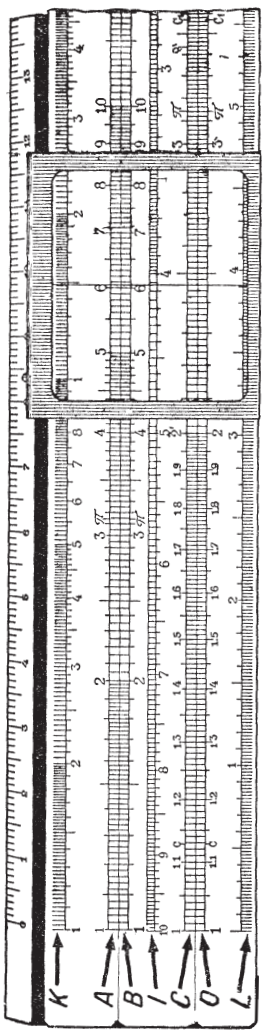


Рис. 68.

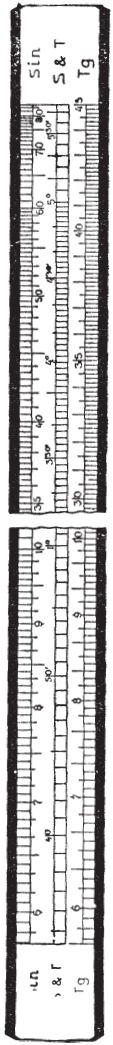


Рис. 69.

T или Tg (tangens), S или Sin (sinus) и S & T (sinus et* tangens). На шкале T расстояние от начальной точки до пометки $T°$ равно lg tg $T°$, причем за единицу масштаба берется 25 *см*. В начальной точке стоит пометка 45° (lg tg 45° = 0). Так как lg tg $T° < 0$ для $T° < 45°$, то соответствующие пометки должны быть расположены слева от начальной точки (рис. 70). Нанесенный на движке участок шкалы T соответствует значениям lg tg $T°$, заключенным между -1 и 0, что соответствует углам, лежащим между 5°43′ (tg 5°43′ = 0,1) и 45°. Аналогично, на шкале S расстояние от начальной точки (с пометкой 90°) до пометки $S°$ равно lg sin $S°$. Для $S° < 90°$ соответствующие пометки расположены слева от начальной точки (рис. 71), так как lg sin $S° < 0$. Имеющийся на движке участок

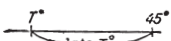


Рис. 70.

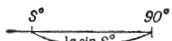


Рис. 71.

шкалы $S°$ охватывает углы от 5°44′ до 90° (sin 5°44′ = 0,1). Для углов, меньших 5°44′, в пределах точности линейки, значения синуса и тангенса совпадают, и шкала S & T представляет собой общий участок шкал lg tg $T°$ и lg sin $S°$ для углов, заключенных между 0°35′ и 5°44′. Для этих углов синус и тангенс меняются от 0,01 до 0,1 (на некоторых типах линеек шкала S нанесена с единицей масштаба, равной 12,5 *см*; тогда эта шкала охватывает углы от 0°35′ до 90°; данные ниже схемы вычислений с участием шкалы S должны быть в этом случае переделаны).

Правила вычислений. Процесс вычислений состоит в установке друг против друга двух чисел различных шкал линейки и движка и в чтении результата на одной шкале против какого-либо числа на другой. Эти операции выполняются при помощи бегунка. Ниже даны схемы, по которым выполняются простейшие вычисления на линейке.

Общие правила: 1) Линейка дает только значащие цифры результата, для которого должен быть установлен еще десятичный разряд (место запятой). Для этого лучше всего выполнить в уме грубый расчет, оценив порядок результата. 2) При сложных вычислениях промежуточные

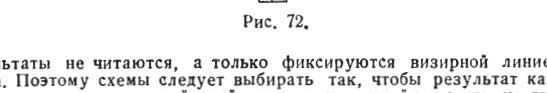


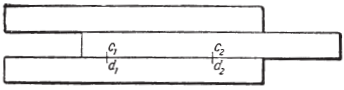
Рис. 72.

результаты не читаются, а только фиксируются визирной линией бегунка. Поэтому схемы следует выбирать так, чтобы результат каждого действия или группы действий читался на линейке, а не на движке. 3) Если результат вычисления должен быть прочитан на линейке, против метки a на движке, вышедшей за пределы линейки, то должна быть сделана *переброска* движка: визирная линия бегунка ставится против той конечной точки движка, которая лежит в пределах линейки, и движок передвигается так, чтобы против визирной линии оказалась другая конечная точка той же шкалы движка (рис. 72). Тогда требуемая метка a окажется в пределах линейки, и результат может быть прочитан.

Схемы. В схемах играет роль только расположение меток друг против друга, но не относительное расположение различных пар меток. Движок может быть выдвинут как вправо, так и влево.

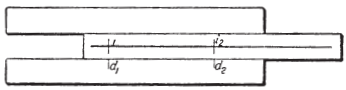
* «et» — латинский союз «и».

Умножение, деление, пропорции

I 

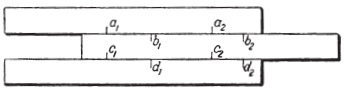
$$\frac{c_1}{d_1} = \frac{c_2}{d_2}.$$

Если $c_1 = 1$, то $d_1 = \frac{d_2}{c_2}$.

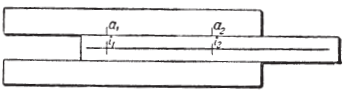
II 

$$i_1 d_1 = i_2 d_2.$$

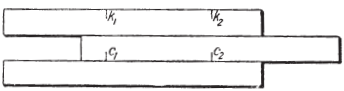
Если $i_1 = 1$, то $d_1 = i_2 d_2$.

III 

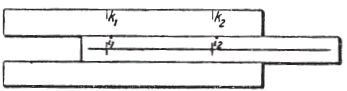
$$\frac{a_1}{c_1^2} = \frac{a_2}{c_2^2} = \frac{d_1^2}{b_1} = \frac{d_2^2}{b_2}.$$

IV 

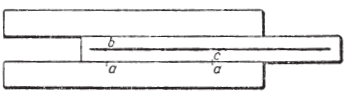
$$a_1 i_1^2 = a_2 i_2^2.$$

V 

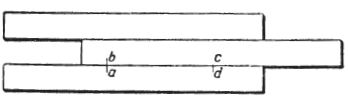
$$\frac{k_1}{c_1^3} = \frac{k_2}{c_2^3}.$$

VI 

$$k_1 i_1^3 = k_2 i_2^3.$$

VII 

$$d = abc; \quad a = \frac{d}{bc}.$$

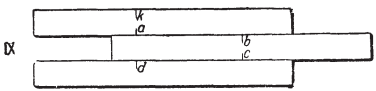
VIII 

$$d = \frac{ac}{b}.$$

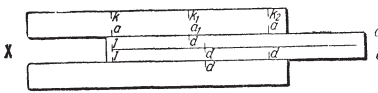
Для умножения и деления пользуются обычно схемами I и II. Схемы III—VI позволяют выполнять сразу умножение и деление на

квадрат и куб заданного числа. Для комбинированных действий применяются схемы VII и VIII. В вычислениях, содержащих многократные умножения и деления, следует многократно применять схемы VII и VIII. Например, вычисление по формуле $\frac{a \cdot b \cdot c}{d \cdot e \cdot f \cdot g}$ выполняется в три приема — два раза по схеме VIII и один раз по схеме VII: $\frac{a \cdot b}{d} \cdot \frac{c}{e} \cdot \frac{1}{f \cdot g}$.

Возведение в степень и извлечение корня



$a=d^2$, $b=c^2$; $k=d^3$.
$d=\sqrt{a}$; $d=\sqrt[3]{k}$, $k=\sqrt{a^3}$



$a=d^1$; $a_1=d^5$; $k=d^6$,
$a_2=d^6$, $k_1=d^{7,5}$, $k_2=d^9$.

Вычисления по схеме IX выполняются только при помощи визира. По этой же схеме выполняется извлечение квадратного и кубического корня. При этом подкоренное число должно быть разбито на группы по 2 или 3 цифры от запятой (см. стр. 17), и в зависимости от количества значащих цифр в первой слева ненулевой группе определяется

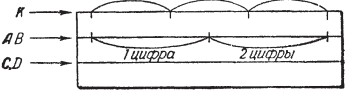
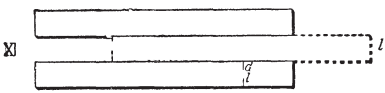


Рис. 73.

положение подкоренного числа на шкале *A* или *K* (рис. 73). Например, при вычислении $\sqrt{3'75}$ число 3'75 ставится на первой половине шкалы *A*, при вычислении $\sqrt[3]{0{,}000'05}$ число 0,000'050 ставится на втором участке шкалы *K*.

Логарифмирование

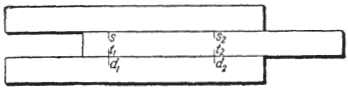


Вычисления по схеме XI выполняются при помощи визира движок не используется.

Шкала *L* дает только мантиссу логарифма. Характеристика находится по обычным правилам (см. стр. 135).

Тригонометрические вычисления

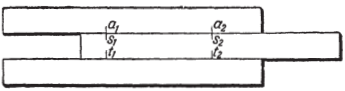
XII



а) $\frac{\operatorname{tg} t_1^\circ}{d_1} = \frac{\operatorname{tg} t_2^\circ}{d_2}$;

б) $\frac{\sin s_1^\circ}{d_1} = \frac{\sin s_2^\circ}{d_2}$ *.

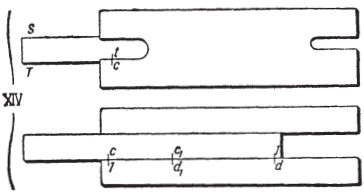
XIII



а) $\frac{a_1}{\operatorname{tg}^2 t_1^\circ} = \frac{a_2}{\operatorname{tg}^2 t_2^\circ}$;

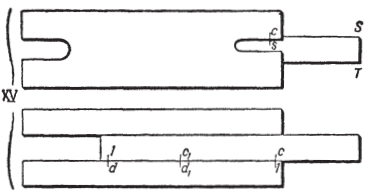
б) $\frac{a_1}{\sin^2 s_1^\circ} = \frac{a_2}{\sin^2 s_2^\circ}$ *.

XIV



$$\begin{cases} c = \operatorname{tg} t^\circ; & d = \operatorname{ctg} t^\circ; \\ \frac{c_1}{d_1} = \operatorname{tg} t^\circ. \end{cases}$$

XV



$$\begin{cases} c = \sin s^\circ; & d = \frac{1}{\sin s^\circ}\text{*}; \\ \frac{c_1}{d_1} = \sin s^\circ \text{*}. \end{cases}$$

Вычисления по схемам XII и XIII производятся при движке, перевернутом обратной стороной Некоторые вычисления с тригонометрическими величинами могут быть произведены без перевертывания движка. При этом установки меток на шкалах S и T производятся при помощи черточек, имеющихся в вырезах обратной стороны линейки (схемы XIV и XV).

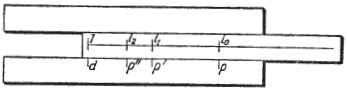
---

* Эта схема неверна для линеек с масштабом шкалы S, равным 12,5 см. См. стр. 122.

Особые значки

Перевод градусов в радианы и обратно:

XVI



$\rho^\circ = 57{,}30$;
$\rho' = 3438$;
$\rho'' = 206265$.

$$d^\circ = i_0 \text{ рад.} \left(= \frac{d^\circ}{\rho^\circ} \text{ рад.}\right); \quad d' = i_1 \text{ рад.} \left(= \frac{d'}{\rho'} \text{ рад.}\right);$$

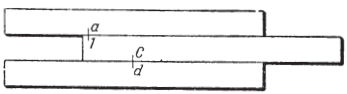
$$d'' = i_2 \text{ рад.} \left(= \frac{d''}{\rho''} \text{ рад.}\right)$$

(например, $15^\circ = 0{,}262$ рад., $15' = 0{,}00436$ рад. $15'' = 0{,}0000727$ рад.).

Вместо схемы XVI может быть использована также схема I.

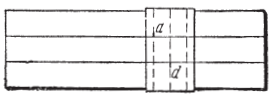
Площадь круга (схема XVII):

XVII



$$C = \sqrt{\frac{4}{\pi}} = 1{,}1248, \qquad a = \left(\frac{d}{C}\right)^2 = \frac{\pi d^2}{4}.$$

XVIII



Если на бегунке нанесены три визирные линии, то площадь круга находится без помощи движка, по схеме XVIII.

II. АЛГЕБРА

A. Тождественные преобразования

1. Основные понятия

Определения. *Алгебраическим выражением* называется одна или несколько алгебраических величин (чисел или букв), соединенных между собой знаками алгебраических действий (+, −, :, $\sqrt{}$ и т. п.) и знаками последовательности этих действий (различного вида скобками). *Тождеством* называется такое равенство двух алгебраических выражений, которое остается верным, если вместо входящих в него букв подставлять любые величины, если же равенство верно только при подстановке некоторых определенных значений, то оно называется *уравнением* *.

Тождественное преобразование — получение из одного алгебраического выражения другого, ему тождественно равного, — может производиться различным образом в зависимости от цели преобразования, которую всегда нужно иметь в виду, например придание выражению более сжатого вида, удобного для подстановки вместо букв их числовых значений или для дальнейших преобразований: приведение выражения к виду, удобному для решения уравнений, логарифмирования, дифференцирования, интегрирования и т. п.

Классификация алгебраических выражений. В каждом отдельном случае в алгебраическом выражении выделяются буквенные величины — *основные*, — по отношению к которым ведется классификация; неосновные величины (остальные буквы) называются *параметрами* выражения. Выражение относится к тому или иному классу в зависимости от того, какие действия производятся над основными величинами, входящими в него. В *целых рациональных* выражениях над основными величинами производятся только сложение, вычитание и умножение (включая сюда и возведение в целую положительную степень), в *дробных рациональных* выражениях входит (кроме перечисленных действий) деление на основные величины ** (или возведение в отрицательную степень), в *иррациональных* выражениях присоединяется извлечение корня из основных величин *** (возведение в дробную степень), в *показательных выражениях* — возведение в степень, содер-

---

* Об уравнениях см стр. 135—155.

** А также деление на целые рациональные выражения из основных величин.

*** А также из целых или дробных рациональных выражений из основных величин.

жащую основные величины *, в *логарифмических* — логарифмирование основных величин *.

Во всех нижеследующих примерах основные величины обозначены последними буквами алфавита (x, y, z, ...), а параметры — начальными (a, b, c, ...) или средними, где средние буквы (m, n, p, ...) принимают лишь целые положительные значения.

2. Целые рациональные выражения

Представление в виде многочлена. Всякое целое рациональное выражение можно представить в виде многочлена при помощи элементарных преобразований (приведение подобных членов, сложение, вычитание и умножение одночленов и многочленов).

Пример:

$$(-a^3+2a^2x-x^3)(4a^2+8ax)+(a^3x^2+2a^2x^3-4ax^4)-$$
$$-(a^5+4a^3x^2-4ax^4)=-4a^5+8a^4x-4a^2x^3-8a^4x+16a^3x^2-8ax^4+$$
$$+a^3x^2+2a^2x^3-4ax^4-a^5-4a^3x^2+4ax^4=$$
$$=-5a^5+13a^3x^2-2a^2x^3-8ax^4.$$

Разложение многочлена на множители. Во многих случаях многочлен можно представить в виде произведения множителей (одночленов и многочленов) при помощи вынесения за скобки, способа группировки, применения формул сокращенного умножения и деления и использования свойств уравнения.

Примеры:

1) Вынесение за скобки:

$$8ax^2y-6bx^3y^2+4cx^5=2x^2(4ay-3bxy^2+2cx^3).$$

2) Способ группировки:

$$6x^2+xy-y^2-10xz-5yz=6x^2+3xy-2xy-y^2-10xz-5yz=$$
$$=3x(2x+y)-y(2x+y)-5z(2x+y)=(2x+y)(3x-y-5z).$$

3) Использование свойств алгебраических уравнений **:

$P(x)=x^6-2x^5+4x^4+2x^3-5x^2$. а) Выносим x^2 за скобки. б) Подбором устанавливаем, что числа $\alpha_1=1$ и $\alpha_2=-1$ являются корнями уравнения $P(x)=0$. Деля $P(x)$ на $x^2(x-1)(x+1)=x^4-x^2$, получаем в частном x^2-2x+5. В этом выражении $p=-2$, $q=5$, $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q<0$ и оно более на действительные множители разложено быть не может. Следовательно:

$$x^6-2x^5+4x^4+2x^3-5x^2=x^2(x-1)(x+1)(x^2-2x+5).$$

Формулы сокращенного умножения и деления:

$$(x\pm y)^2=x^2\pm 2xy+y^2,$$
$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz,$$
$$(x+y+z+\ldots+t+u)^2=x^2+y^2+z^2+\ldots+t^2+u^2+$$
$$+2xy+2xz+\ldots+2xu+2yz+\ldots+2yu+\ldots+2tu,$$
$$(x\pm y)^3=x^3\pm 3x^2y+3xy^2\pm y^3.$$

---

* А также рациональные или иррациональные выражения из основных величин.

** См. стр. 140.

$(x \pm y)^n$ вычисляется по формуле Ньютона (см. стр. 163),

$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$,

$(x^n - y^n) : (x - y) = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}$,

$(x^n + y^n) : (x + y) = x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots - xy^{n-2} + y^{n-1}$

(только при n нечетном!).

$(x^n - y^n) : (x + y) = x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots + xy^{n-2} - y^{n-1}$

(только при n четном!).

Нахождение наибольшего общего делителя двух многочленов. Два многочлена $P(x)$ (n-й степени) и $Q(x)$ (m-й степени) ($n \geq m$) могут иметь общие множители, содержащие x; произведение всех этих множителей называется *наибольшим общим делителем* данных многочленов. Если $P(x)$ и $Q(x)$ не имеют таких общих множителей, то они называются *взаимно простыми* (их наибольший общий делитель = const).

Наибольший общий делитель многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ можно найти, не зная разложения их на множители, следующим способом (*алгоритм Евклида*):

1) Делится $P(x)$ на $Q(x)$; частное $T_1(x)$, остаток $R_1(x)$:

$$P(x) = Q(x) \cdot T_1(x) + R_1(x).$$

2) Делится $Q(x)$ на $R_1(x)$; частное $T_2(x)$, остаток $R_2(x)$:

$$Q(x) = R_1(x) \cdot T_2(x) + R_2(x)$$

и т. д. Последний остаток $R_k(x)$, не равный нулю, и есть наибольший общий делитель многочленов $P(x)$ и $Q(x)$.

Нахождение наибольшего общего делителя применяется при решении уравнений (отделение кратных корней — см. стр. 141, применение способа Штурма — стр. 142, при интегрировании по методу Остроградского — стр. 338—340, и в других вопросах).

3. *Дробные рациональные выражения*

Приведение к простейшему виду. Всякое дробное рациональное выражение можно преобразовать в отношение двух многочленов, не имеющих общих множителей, при помощи элементарных преобразований (сложения, вычитания, умножения и деления многочленов и дробей и сокращения дробей).

Пример: Преобразовать к простейшему виду:

$$\frac{3x + \dfrac{2x + y}{z}}{x\left(x^2 + \dfrac{1}{z^2}\right)} - y^2 + \frac{x + z}{z} = \frac{(3xz + 2x + y)z^2}{(x^3z^2 + x)z} + \frac{-y^2z + x + z}{z} =$$

$$= \frac{3xz^3 + 2xz^2 + yz^2 + (x^3z^2 + x)(-y^2z + x + z)}{x^3z^3 + xz} =$$

$$= \frac{3xz^3 + 2xz^2 + yz^2 - x^3y^2z^3 - xy^2z + x^4z^2 + x^2 + x^3z^3 + xz}{x^3z^3 + xz}.$$

Выделение целой части. Отношение двух многочленов с общей основной величиной x называется алгебраической *правильной дробью* в том случае, если степень m старшего члена * числителя меньше

* То есть члена, содержащего x в наибольшей степени.

степени n старшего члена знаменателя, и *неправильной*, если $m \geqslant n$. Всякая неправильная дробь может быть преобразована в сумму многочлена и правильной дроби при помощи *выделения целой части* (деление многочлена на многочлен).

Пример: Выделить целую часть из

$$R(x) = \frac{3x^4 - 10ax^3 + 22a^2x^2 - 24a^3x + 10a^4}{x^2 - 2ax + 3a^2}$$

$$\begin{array}{l|l}
3x^4 - 10ax^3 + 22a^2x^2 - 24a^3x + 10a^4 & x^2 - 2ax + 3a^2 \\
\underline{3x^4 - 6ax^3 + 9a^2x^2} & \overline{3x^2 - 4ax + 5a^2} \\
\quad - 4ax^3 + 13a^2x^2 - 24a^3x & \\
\quad \underline{- 4ax^3 + 8a^2x^2 - 12a^3x} & \\
\qquad 5a^2x^2 - 12a^3x + 10a^4 & \\
\qquad \underline{5a^2x^2 - 10a^3x + 15a^4} & \\
\qquad\qquad - 2a^3x - 5a^4 &
\end{array}$$

$$R(x) = 3x^2 - 4ax + 5a^2 + \frac{-2a^3x - 5a^4}{x^2 - 2ax + 3a^2}.$$

Разложение на элементарные дроби. Всякая правильная *несократимая* * дробь

$$R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}{x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n},$$

где коэффициенты $b_0, b_1, \ldots, b_m, a_1, a_2, \ldots, a_n$ — некоторые действительные числа (коэффициент при старшем члене знаменателя мы делаем равным 1, деля на него числитель и знаменатель), может быть единственным образом преобразована в сумму *элементарных (простых)* дробей вида $\frac{A}{(x-\alpha)^k}$ или $\frac{Dx+E}{(x^2+px+q)^l}$, где $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$. При этом могут быть четыре случая **:

1) Знаменатель $P(x)$ такой, что уравнение $P(x) = 0$ имеет только действительные однократные *** корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Разложение ведется по формуле:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{b_0x^m + \ldots + b_m}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)} = \frac{A}{x-\alpha_1} + \frac{B}{x-\alpha_2} + \ldots + \frac{C}{x-\alpha_n},$$

где коэффициенты $A, B, \ldots, C$ определяются формулами

$$A = \frac{Q(\alpha_1)}{P'(\alpha_1)}, \quad B = \frac{Q(\alpha_2)}{P'(\alpha_2)}, \quad \ldots, \quad C = \frac{Q(\alpha_n)}{P'(\alpha_n)}$$

(в знаменателях — значения производной $\frac{dP}{dx}$ при $x = \alpha_1, x = \alpha_2, \ldots$).

---

* То есть такая, числитель и знаменатель которой не имеют общих множителей, содержащих x.

** Если мы не будем ограничиваться только действительными числами, то случай 3) не будет отличаться от случая 1), а случай 4) — от случая 2). С такой точки зрения всякую дробь $R(x)$ можно преобразовать в сумму только простых дробей вида $\frac{A}{(x-\alpha)^k}$, где A и α — комплексные числа. Это используется при решении линейных дифференциальных уравнений (см. стр. 460).

*** О кратности корней см. стр. 140.

Пример: $\frac{6x^2-x+1}{x^3-x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}$; $\alpha_1=0$, $\alpha_2=+1$ и $\alpha_3=-1$; $Q(x)=6x^2-x+1$; $P'(x)=3x^2-1$; $A=\frac{Q(0)}{P'(0)}=-1$, $B=\frac{Q(1)}{P'(1)}=3$ и $C=\frac{Q(-1)}{P'(-1)}=4$; $\frac{Q(x)}{P(x)}=-\frac{1}{x}+\frac{3}{x-1}+\frac{4}{x+1}$

Другой способ определения A, B, ..., C — *метод неопределенных коэффициентов* (применяется во всех четырех случаях).

Пример:

$$\frac{6x^2-x+1}{x^3-x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}=\frac{A(x^2-1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)}{x(x^2-1)}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x числителей в левой и правой частях равенства, получаем систему уравнений: $6=A+B+C$, $-1=B-C$, $1=-A$; решая ее, находим для A, B и C те же значения, что и выше.

2) Корни знаменателя действительные, но среди них есть кратные. Разложение ведется по формуле:

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}{(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x-\alpha_l)^{k_l}}=\frac{A_1}{x-\alpha_1}+\frac{A_2}{(x-\alpha_1)^2}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{A_{k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}}+\frac{B_1}{x-\alpha_2}+\frac{B_2}{(x-\alpha_2)^2}+\ldots+\frac{B_{k_2}}{(x-\alpha_2)^{k_2}}+\ldots+\frac{L_{k_l}}{(x-\alpha_l)^{k_l}}.$$

Пример: $\frac{x+1}{x(x-1)^3}=\frac{A_1}{x}+\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x-1)^2}+\frac{B_3}{(x-1)^3}$; коэффициенты A_1, B_1, B_2 и B_3 находятся методом неопределенных коэффициентов.

3) Среди корней знаменателя есть комплексные, однократные. Разложение ведется по формуле

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}{(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)\ldots}=$$

$$=\frac{A_1}{x-\alpha_1}+\frac{A_2}{(x-\alpha_1)^2}+\ldots+\frac{Dx+E}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{Fx+G}{x^2+p_2x+q_2}+\ldots$$

Пример: $\frac{3x^2-2}{(x^2+x+1)(x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Dx+E}{x^2+x+1}$. Коэффициенты A, D, E находятся методом неопределенных коэффициентов.

4) Среди корней знаменателя есть комплексные, кратные. Разложение ведется по формуле

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}{(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}\ldots}=$$

$$=\frac{A_1}{x-\alpha_1}+\frac{A_2}{(x-\alpha_1)^2}+\ldots+\frac{D_1x+E_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{D_2x+E_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{D_{l_1}x+E_{l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}}+\frac{F_1x+G_1}{x^2+p_2x+q_2}+\ldots+\frac{F_{l_2}x+G_{l_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}}+\ldots$$

Пример: $\frac{5x^2-4x+16}{(x-3)(x^2-x+1)^2}=\frac{A}{x-3}+\frac{D_1x+E_1}{x^2-x+1}+\frac{D_2x+E_2}{(x^2-x+1)^2}$.

A, D_1, E_1, D_2, E_2 находятся методом неопределенных коэффициентов.

Преобразование пропорций. Из пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ следуют равенства $ad=bc$, $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$, $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$, а также *производные пропорции* $\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$, $\frac{a\pm b}{a}=\frac{c\pm d}{c}$, $\frac{a\pm c}{c}=\frac{b\pm d}{d}$, $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.

Из равенства нескольких отношений $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$ следует

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}=\frac{a_1}{b_1}.$$

4. *Иррациональные выражения; преобразование степеней и корней*

Приведение к нормальному виду. Всякое иррациональное выражение может быть преобразовано к так называемому *нормальному* виду при помощи 1) сокращения показателя, 2) вынесения за знак корня, 3) уничтожения иррациональности знаменателя.

Сокращение показателя производится на наибольший общий делитель показателя корня и показателей всех множителей, стоящих под знаком корня (подкоренное выражение предварительно разлагается на множители).

Пример $\sqrt[6]{16(x^{12}-2x^{11}+x^{10})}=\sqrt[6]{4^2\cdot x^{5\cdot 2}\,(x-1)^2}=\sqrt[3]{4x^5(x-1)}$.

Выносить за знак корня можно такие множители X, степень которых m больше или равна показателю корня n. Тогда m делится на n, и X выносится за корень в степени частного и остается под корнем в степени остатка от этого деления.

Пример $\sqrt[3]{32x^4y^6z^{10}u^2}=2xy^2z^3\sqrt[3]{4xzu^2}$.

Уничтожение иррациональности в знаменателе производят различными способами.

Примеры

1) $\sqrt{\frac{x}{2y}}=\sqrt{\frac{2xy}{4y^2}}=\frac{\sqrt{2xy}}{2y}$;

2) $\sqrt[3]{\frac{x}{4yz^2}}=\sqrt[3]{\frac{2xy^2z}{8y^3z^3}}=\frac{\sqrt[3]{2xy^2z}}{2yz}$;

3) $\frac{1}{x+\sqrt{y}}=\frac{x-\sqrt{y}}{(x+\sqrt{y})(x-\sqrt{y})}=\frac{x-\sqrt{y}}{x^2-y}$;

4) $\frac{1}{x+\sqrt[3]{y}}=\frac{x^2-x\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2}}{(x+\sqrt[3]{y})(x^2-x\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2})}=\frac{x^2-x\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2}}{x^3+y}$.

Пример. Привести к нормальному виду

$$\sqrt{\frac{81x^6}{(\sqrt{2}-\sqrt{x})^4}}=\sqrt{\frac{9x^3}{\sqrt{2}-\sqrt{x})^2}}=\frac{3x\sqrt{x}}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{3x\sqrt{x}(\sqrt{2}+\sqrt{x})}{2-x}=\frac{3x\sqrt{2x}+3x^2}{2-x}.$$

Преобразование степеней и корней

$$x^m x^n = x^{m+n},\ \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n},\ (xy)^n = x^n y^n,\ \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n},\ (x^m)^n = x^{mn}. \quad (*)$$

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y};\quad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}};$$

$$\sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m \qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}.$$

Обобщение понятия о показателе Условно принимается

$$x^0 = 1,\ x^{-n} = \frac{1}{x^n},\ x^{1/n} = \sqrt[n]{x}\quad x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m},\ x^{-m/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$$

По отношению к нулевым, отрицательным и дробным показателям справедливы те же формулы преобразований $(*)$, что и для целых положительных показателей, это позволяет часто упрощать вычисления

Пример

$$\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[12]{x^7}\right)\left(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} - \sqrt[12]{x^5}\right) =$$
$$= (x^{1/2} + x^{2/3} + x^{3/4} + x^{7/12})(x^{1/2} - x^{1/3} + x^{1/4} - x^{5/12}) =$$
$$= x + x^{7/6} + x^{5/4} + x^{13/12} - x^{5/6} - x - x^{13/12} - x^{11/12} +$$
$$+ x^{3/4} + x^{11/12} + x + x^{5/6} - x^{11/12} - x^{13/12} - x^{7/6} - x =$$
$$= x^{5/4} - x^{13/12} - x^{11/12} + x^{3/4} = \sqrt[4]{x^5} - \sqrt[12]{x^{13}} - \sqrt[12]{x^{11}} + \sqrt[4]{x^3}.$$

5. *Показательные и логарифмические выражения*

Преобразование показательных выражений вида a^x производится по формулам, аналогичным $(*)$:

$$a^x a^y = a^{x+y};\ \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y};\ (a^x)^y = a^{xy},\ \sqrt[y]{a^x} = a^{x/y};$$

при этом x и y могут принимать любые числовые значения. Показательные выражения, в которых основаниями являются различные величины a^x, b^y, c^z, ..., можно преобразовать к выражениям с общим основанием, пользуясь тождеством $b = a^{\log_a b}$.

Пример: Представить $(a^x b^y) : c^z$ в виде степени a

$$\frac{a^x b^y}{c^z} = \frac{a^x a^{y\log_a b}}{a^{z\log_a c}} = a^{x+y\log_a b - z\log_a c}.$$

К подобному виду можно привести всякое выражение, не содержащее суммы и разности степеней.

Выражение e^x, где e — основание натуральных логарифмов (см. ниже), обозначается иногда $\exp(x)$.

Логарифмы. Логарифмом A числа N при основании a (обозначается $A = \log_a N$) называется показатель степени, в которую нужно возвысить a, чтобы получить N. Следовательно, из равенства $a^A = N$ следует $\log_a N = A$, и обратно, из второго равенства вытекает первое.

Всякое *положительное* число имеет при любом положительном основании (кроме единицы) свой логарифм; логарифмы различных чисел при одном и том же основании a образуют *систему логарифмов* при этом основании. Зная логарифмы чисел при одном основании a, можно определить логарифмы этих чисел при другом основании b по формуле

$$\log_b N = M \cdot \log_a N, \text{ где } M = \frac{1}{\log_a b} \quad (\textit{модуль перевода}) *$$

Основные свойства логарифмов при одном и том же основании a ($a \neq 1$):

$$\log_a 1 = 0; \quad \log_a a = 1; \quad \log_a 0 = \begin{cases} -\infty \text{ при } a > 1, \\ +\infty \text{ при } a < 1; \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \log (N_1 \cdot N_2) = \log N_1 + \log N_2; \ \log \dfrac{N_1}{N_2} = \log N_1 - \log N_2; \\ \log (N^n) = n \log N; \ \log \sqrt[n]{N} = \dfrac{1}{n} \log N. \end{array}\right\} \quad (**)$$

Логарифмированием данной величины называется нахождение ее логарифма **; нахождение величины по ее логарифму называется *потенцированием*.

Употребительные системы логарифмов десятичные, или *бригговы* — при основании 10, применяемые обычно при вычислениях (обозначение: $\log_{10} N = \lg N$), и *натуральные*, или *неперовы* (*гиперболические*) при основании $e = 2{,}71828\ldots$ *** (обозначение: $\log_e N = \ln N$).

Модуль перевода натуральных логарифмов в десятичные:

$$M = \lg e = \frac{1}{\ln 10} \approx 0{,}43429; \ \lg N = 0{,}43429 \ln N;$$

модуль перевода десятичных логарифмов в натуральные:

$$M_1 = \frac{1}{M} = \ln 10 = \frac{1}{\lg e} \approx 2{,}30259; \ \ln N = 2{,}30259 \lg N$$

Свойства десятичных логарифмов. Десятичные логарифмы записывают в виде десятичной дроби с точностью до определенного десятичного знака; ее целая часть называется *характеристикой* логарифма, а дробная — *мантиссой*, например: $\lg 324 = 2{,}5105$, характеристика равна 2, мантиссой будет 0,5105. Числа, получающиеся из данного умножением или делением на 10^n (например: 3240; 324000; 3,24; 0,0324 из 324), имеют десятичные логарифмы с одинаковой мантиссой (0,5105). Мантисса оты-

---

* Удобно пользоваться следующей легко запоминаемой формулой: $\log_a N = \dfrac{\log N}{\log a}$, где в правой части — логарифмы при любом (одном и том же) основании.

** Логарифмированием называют также преобразование логарифмических выражений по формулам (**) — представление логарифма сложного выражения через логарифмы входящих в него величин (см. стр. 135).

*** Определение числа e см. стр. 278.

скивается по *таблицам логарифмов* *, причем на положение запятой и на нули слева и справа в числе внимания не обращается. Характеристика определяется по правилу: 1) если число > 1, то характеристика на единицу меньше числа его цифр, стоящих перед запятой, 2) если число < 1, то характеристика отрицательна и равна по абсолютной величине числу нулей слева, включая и нуль целых. *Например*: $\lg 3240 = 3{,}5105$; $\lg 324\,000 = 5{,}5105$; $\lg 3{,}24 = 0{,}5105$; $\lg 0{,}0324 = \bar{2}{,}5105$. Знак «—» ставится *над* характеристикой, так как мантисса остается положительной; такую «неполную» — *искусственную* — форму отрицательного логарифма можно превратить в «полную» по правилам: 1) абсолютная величина характеристики неполного отрицательного логарифма на единицу больше абсолютной величины характеристики полного отрицательного логарифма; 2) цифры мантиссы дополняются до 9, а последняя значащая ее цифра (не нуль) — до 10; нули в конце остаются на своих местах.

Примеры: $\bar{2}{,}5105 = -1{,}4895$; $-3{,}2780 = \bar{4}{,}7220$.

Часто (особенно в таблицах), чтобы избежать надстрочных знаков, к неполному отрицательному логарифму прибавляется число 10. Например, вместо $\bar{1}{,}324$ пишется: 9,324.

Преобразование логарифмических выражений (*логарифмирование*) производится по формулам (**) **.

Пример: Прологарифмировать выражение $\dfrac{3x^2\sqrt[3]{y}}{2zu^3}$.

$$\log\frac{3x^2\sqrt[3]{y}}{2zu^3} = \log(3x^2\sqrt[3]{y}) - \log(2zu^3) =$$

$$= \log 3 + 2\log x + \frac{1}{3}\log y - \log 2 - \log z - 3\log u.$$

Часто употребляется обратное преобразование — представление выражения, содержащего несколько логарифмов от различных величин, в виде логарифма от одного выражения.

Пример:

$$\log 3 + 2\log x + \frac{1}{3}\log y - \log 2 - \log z - 3\log u = \log\frac{3x^2\sqrt[3]{y}}{2zu^3}.$$

О логарифмической (счетной) линейке см. стр. 120—126.

Б. Уравнения

6. Преобразование алгебраических уравнений к канонической форме

Определение. *Уравнением* с одним неизвестным

$$F(x) = f(x)$$

называется равенство двух функций от одной и той же переменной величины, верное лишь при некоторых определенных значениях этой

---

* Таблицы десятичных логарифмов (точнее — таблицы мантисс) см. стр. 44—45; таблицы антилогарифмов (т. е. чисел по данным мантиссам) см. стр. 46—47; таблицы натуральных логарифмов см. стр. 58—60.

** Для логарифмирования выражений, представляющих собой сумму или разность, их предварительно следует преобразовать к выражениям, удобным для логарифмирования (т. е. содержащим произведения и частные).

переменной *. Переменная, входящая в уравнение, называется *неизвестным*, а значения $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, при которых оно верно, — *корнями* или *решениями* уравнения. Два уравнения называются *равносильными*, если они имеют одни и те же корни.

Уравнение называется *алгебраическим*, если каждая из входящих в него функций $F(x)$ и $f(x)$ является алгебраической (рациональной или иррациональной). Одна из этих функций может быть постоянной величиной.

Из всякого алгебраического уравнения может быть путем алгебраических преобразований получено уравнение в *канонической форме*:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 **$$

(a_0 может быть сделано равным 1), которое имеет те же корни, что и данное (и, может быть, некоторые лишние — см. ниже).

Показатель n называется *степенью уравнения*.

Пример Преобразовать к канонической форме уравнение

$$\frac{x - 1 + \sqrt{x^2 - 6}}{3(x - 2)} = 1 + \frac{x - 3}{x}.$$

Последовательные преобразования дают:

$$x(x - 1 + \sqrt{x^2 - 6}) = 3x(x - 2) + 3(x - 2)(x - 3);$$

$$x^2 - x + x\sqrt{x^2 - 6} = 3x^2 - 6x + 3x^2 - 15x + 18;$$

$$x\sqrt{x^2 - 6} = 5x^2 - 20x + 18;$$

$$x^2(x^2 - 6) = 25x^4 - 200x^3 + 580x^2 - 720x + 324;$$

$$24x^4 - 200x^3 + 586x^2 - 720x + 324 = 0 \text{ (каноническая форма).}$$

Следовательно, данное уравнение есть уравнение 4-й степени.

Система n алгебраических уравнений — совокупность n равенств, справедливых только для определенных групп $(x_1, y_1, \ldots, z_1; x_2, y_2, \ldots, z_2; \ldots)$ значений неизвестных $(x, y, \ldots, z)$; каждая такая группа (совокупность) называется *решением* этой системы. Всякая система алгебраических уравнений может быть преобразована к *канонической форме*

$$\begin{aligned} P_1(x, y, \ldots) &= 0, \\ P_2(x, y, \ldots) &= 0, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ P_n(x, y, \ldots) &= 0, \end{aligned}$$

где P_i — многочлен относительно $x, y, z, \ldots$

Пример. Преобразовать к канонической форме систему

$$1)\ \frac{x}{\sqrt{y}} = \frac{1}{z},\quad 2)\ \frac{x - 1}{y - 1} = \sqrt{z},\quad 3)\ xy = z$$

Каноническая форма:

$$1)\ x^2z^2 - y = 0,\quad 2)\ x^2 - 2x + 1 - y^2z + 2yz - z = 0,\quad 3)\ xy - z = 0.$$

---

* Если равенство верно при любых значениях переменной x, то оно называется *тождеством*.

** Здесь и далее коэффициенты $a_0, a_1, \ldots$ предполагаются действительными за исключением особо оговоренных случаев.

Лишние корни. При преобразовании алгебраического уравнения к каноническому виду $P(x) = 0$ могут встретиться случаи, когда $P(x) = 0$ будет иметь решения, не удовлетворяющие исходному уравнению. Эти случаи двух типов:

I. *Обращение знаменателя в нуль.* Если уравнение имеет вид дроби

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0, \tag{1}$$

где P и Q — многочлены, то, умножая обе части равенства на знаменатель, получаем уравнение в канонической форме

$$P(x) = 0, \tag{2}$$

все корни которого те же, что и уравнения (1), за исключением того случая, когда какой-нибудь из корней $x = \alpha$ уравнения $P(x) = 0$ является также корнем уравнения $Q(x) = 0$. Тогда дробь следует предварительно сократить на $x - \alpha$ [или на $(x - \alpha)^k$, если это возможно]; в противном случае $P(x) = 0$ будет содержать корень $x = \alpha$, не являющийся совсем корнем уравнения (1) или являющийся корнем его, но меньшей кратности *.

Примеры:

1) $$\frac{x^3}{x-1} = \frac{1}{x-1} \text{ или } \frac{x^3-1}{x-1} = 0; \tag{1'}$$

если не сократить на $x - 1$ и отбросить знаменатель, то корень $x_1 = 1$ уравнения $x^3 - 1 = 0$ не удовлетворяет уравнению (1'), так как обращает его знаменатель в нуль.

2) $$\frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 - 2x + 1} = 0; \tag{2'}$$

если не сократить на $(x - 1)^2$ и отбросить знаменатель, то получится уравнение $(x - 1)^3 = 0$, имеющее трехкратный корень $x_1 = 1$, в то время как (2') имеет однократный корень $x = 1$.

II. *Иррациональные уравнения.* Если данное уравнение содержит неизвестное под знаком радикала, то, приводя его к каноническому виду, получаем второе уравнение, которое может иногда содержать корни, не удовлетворяющие исходному уравнению. Поэтому после решения второго уравнения следует производить проверку, подставляя его корни в исходное уравнение

Пример:

$$\sqrt{x+7} + 1 = 2x \text{ или } \sqrt{x+7} = 2x - 1, \tag{1''}$$

$$x + 7 = (2x - 1)^2 \text{ или } 4x^2 - 5x - 6 = 0. \tag{2''}$$

Корни уравнения (2''): $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{3}{4}$; x_1 удовлетворяет уравнению (1''), а x_2 — не удовлетворяет (в уравнении (1'') радикал понимается в арифметическом смысле).

7. Уравнения 1-й, 2-й, 3-й и 4-й степеней

Уравнение 1-й степени *(линейное)*. Каноническая форма

$$ax + b = 0.$$

Число решений: всегда одно действительное решение $x_1 = -\frac{b}{a}$.

* О кратности корней см. стр. 140.

Уравнение 2-й степени *(квадратное)*. Каноническая форма: $ax^2 + bx + c = 0$ или (после деления на a) $x^2 + px + q = 0$.

Число действительных решений зависит от знака *дискриминанта* D, равного $4ac - b^2$ или $q - \frac{p^2}{4}$:

если $D < 0$, то имеются 2 решения (2 действительных корня),
» $D = 0$, » » 1 решение (2 совпавших корня),
» $D > 0$, » » 0 решений (2 мнимых корня).

Решение квадратных уравнений. 1-й способ — разложение (если удастся) левой части на множители:

$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$ или $x^2 + px + q = (x - \alpha)(x - \beta)$;

тогда корни уравнения будут: $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$.

Пример. $x^2 + x - 6 = 0$, $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$; $x_1 = -3$, $x_2 = 2$.

2-й способ — применение формулы.

а) Для вида $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{или} \quad x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$$

(последнюю формулу удобно употреблять при четном b);

б) Для вида $x^2 + px + q = 0$:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Свойство корней квадратного уравнения

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -p, \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = q.$$

Уравнение 3-й степени *(кубическое)*. Каноническая форма:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

или $\left(\text{деля на } a \text{ и вводя вместо } x \text{ новую переменную } y = x + \frac{b}{3a}\right)$:

$$y^3 + 3py + 2q = 0, \qquad (*)$$

где $$2q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} \text{ и } 3p = \frac{3ac - b^2}{3a^2}.$$

Число действительных решений уравнения (*) зависит от знака *дискриминанта* $D = q^2 + p^3$:

если $D > 0$, то уравнение имеет 1 решение (одно действительное и два мнимых);

если $D < 0$, то уравнение имеет 3 решения (три действительных различных корня);

если $D = 0$, то уравнение имеет 1 решение при $p = q = 0$ (три совпавших нулевых корня), и 2 решения при $p^3 = -q^2 \neq 0$ (из трех действительных корней два совпали).

Решение кубических уравнений. 1-й способ — разложение (если удастся) левой части на множители:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma);$$

корни уравнения: $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$, $x_3 = \gamma$.

Пример: $x^3 + x^2 - 6x = 0$; $x^3 + x^2 - 6x = x(x + 3)(x - 2)$; $x_1 = 0$, $x_2 = -3$, $x_3 = 2$.

2-й способ – применение *формулы Кардана* [для вида (*)]:

$$y_1 = u + v, \quad y_2 = \varepsilon_1 u + \varepsilon_2 v, \quad y_3 = \varepsilon_2 u + \varepsilon_1 v,$$

где $u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}}$, $v = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}$, а ε_1 и ε_2 – корни уравнения $x^2 + x + 1 = 0$, т. е. $\varepsilon_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

В случае $D = q^2 + p^3 < 0$ три действительных корня уравнения выражаются через комплексные величины, и целесообразнее пользоваться *третьим* способом.

Пример: $y^3 + 6y + 2 = 0$. Здесь $p = 2$, $q = 1$; $q^2 + p^3 = 9$;

$$u = \sqrt[3]{-1+3} = \sqrt[3]{2} = 1{,}2599, \quad v = \sqrt[3]{-1-3} = \sqrt[3]{-4} = -1{,}5874.$$

Действительный корень: $y_1 = u + v = -0{,}3275$; комплексные корни:

$$y_{2,3} = -\frac{1}{2}(u+v) \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}(u - v) = 0{,}1638 \pm i \cdot 2{,}4659.$$

3-й способ – через *вспомогательные величины*, вычисляемые при помощи таблиц. В уравнении (*) обозначим $r = \pm\sqrt{|p|}$; знак r должен совпадать со знаком q. Тогда вспомогательная величина φ и при ее помощи корни y_1, y_2 и y_3 определяются в зависимости от знаков p и $D = q^2 + p^3$ из следующей таблицы:

$p < 0$		$p > 0$
$q^2 + p^3 \leqslant 0$	$q^2 + p^3 > 0$	
$\cos\varphi = \frac{q}{r^3}$	$\operatorname{ch}\varphi = \frac{q}{r^3}$	$\operatorname{sh}\varphi = \frac{q}{r^3}$
$y_1 = -2r\cos\varphi/3$ $y_2 = +2r\cos(60°-\varphi/3)$ $y_3 = +2r\cos(60°+\varphi/3)$	$y_1 = -2r\operatorname{ch}\varphi/3$ $y_2 = r\operatorname{ch}\varphi/3 + i\sqrt{3}\,r\operatorname{sh}\varphi/3$ $y_3 = r\operatorname{ch}\varphi/3 - i\sqrt{3}\,r\operatorname{sh}\varphi/3$	$y_1 = -2r\operatorname{sh}\varphi/3$ $y_2 = r\operatorname{sh}\varphi/3 + i\sqrt{3}\,r\operatorname{ch}\varphi/3$ $y_3 = r\operatorname{sh}\varphi/3 - i\sqrt{3}\,r\operatorname{ch}\varphi/3$

Пример: $y^3 - 9y + 4 = 0$.

$p = -3$, $q = 2$; $q^2 + p^3 < 0$;
$r = \sqrt{3} = 1{,}7321$, $\cos\varphi = 2 : 3\sqrt{3} = 0{,}3849$; $\varphi = 67°22'$;
$y_1 = -2\sqrt{3}\cos 22°27' = -3{,}4641 \cdot 0{,}9242 = -3{,}201$;
$y_2 = 2\sqrt{3}\cos(60° - 22°27') = 3{,}4641 \cdot 0{,}7929 = 2{,}747$;
$y_3 = 2\sqrt{3}\cos(60° + 22°27') = 3{,}4641 \cdot 0{,}1314 = 0{,}455$.

Проверка (см. свойства корней):

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0{,}001 \text{ вместо } 0.$$

4-й *способ* – приближенное решение уравнения – см. ниже, стр. 144–146.

Свойства корней кубического уравнения

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = -\frac{c}{d}, \quad x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a},$$

Уравнение 4-й степени. Каноническая форма

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0.$$

Число действительных решений (различных): от 0 до 4.

Если $b = d = 0$, то корни уравнения $ax^4 + cx^2 + e = 0$ *(биквадратного)* определяются по формулам:

$$x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{y}, \qquad y = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4ae}}{2a}.$$

Если $a = e$ и $b = d$, то корни уравнения

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

(возвратного) определяются по формулам:

$$x_{1,2,3,4} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2}, \qquad y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac + 8a^2}}{2a}$$

Решение уравнений 4-й степени общего вида: 1-й способ – разложение (если удастся) левой части на множители:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta);$$

корни уравнения $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$, $x_3 = \gamma$, $x_4 = \delta$

Пример

$$x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x = 0, \quad x(x^2 - 1)(x - 2) = x(x - 1)(x + 1)(x - 2);$$
$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = 2.$$

2-й способ. Корни уравнения $x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ ($a = 1$) совпадают с корнями двух квадратных уравнений

$$x^2 + (b + A)\frac{x}{2} + \left(y + \frac{by - d}{A}\right) = 0,$$

где $A = \pm\sqrt{8y + b^2 - 4c}$, а y – какой-либо действительный корень кубического уравнения

$$8y^3 - 4cy^2 + (2bd - 8e)y + e(4c - b^2) - d^2 = 0.$$

3-й способ – приближенное решение уравнения – см. стр. 144–146.

Уравнения 5-й степени и выше в обшем случае в радикалах разрешены быть не могут

8. Уравнения n-й степени

Общие свойства алгебраических уравнений. Левую часть уравнения

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 * \qquad (1)$$

обозначим через $P(x)$; корень уравнения $P(x) = 0$ называется *корнем многочлена* $P(x)$. Если α – корень $P(x) = 0$, то $P(x)$ делится на $(x - \alpha)$ без остатка, в общем же случае остаток от деления $P(x)$ на $(x - \alpha)$ равен $P(\alpha)$. Если $P(x)$ делится на $(x - \alpha)^k$, но уже не делится на $(x - \alpha)^{k+1}$, то α называется *k-кратным* корнем уравнения $P(x) = 0$; в этом случае α является общим корнем многочлена $P(x)$ и его производных до $(k - 1)$-го порядка включительно. Однократный корень уравнения называется также *простым* корнем. *Основная теорема алгебры*: всякое уравнение n-й степени, коэффициенты которого – действительные или комплексные числа, имеет n корней, действительных или комплексных, если k-кратный корень считать за k корней. Если корни $P(x)$ равны α, β, γ, ... и, соответственно, кратности их k, l, m, ..., то

$$P(x) = (x - \alpha)^k(x - \beta)^l(x - \gamma)^m \qquad (*)$$

* Коэффициент a_0 при старшем члене делаем равным 1 (деля все уравнение на этот коэффициент).

Можно упростить нахождение корней уравнения $P(x)=0$, сведя его к решению уравнения, имеющего те же корни, что и данное, но все однократные. Это достигается разложением многочлена $P(x)$ на два множителя:

$$P(x)=Q(x)\,T(x),$$

где $Q(x)=(x-\alpha)^{k-1}(x-\beta)^{l-1}\ldots$, $T(x)=(x-\alpha)(x-\beta)\ldots$; $Q(x)$ находится как наибольший общий делитель (см. стр. 129) многочленов $P(x)$ и $P'(x)$ (производная), а $T(x)$ делением $P(x)$ на $Q(x)$.

Зависимость между корнями уравнения и его коэффициентами. Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — все n корней уравнения (1), то

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=\sum_{i=1}^{n}x_i=-a_1,$$

$$x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n=\sum_{\substack{i,\ j=1\\(i<j)}}^{n}x_ix_j=a_2,$$

$$x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n=\sum_{\substack{i,\ j,\ k=1\\(i<j<k)}}^{n}x_ix_jx_k=-a_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_1x_2\ldots x_n=(-1)^n a_n.$$

Уравнение с действительными коэффициентами. Комплексные корни уравнения с действительными коэффициентами могут быть только попарно сопряженными*, т. е. если такое уравнение имеет корень $\alpha=a+bi$, то оно имеет также корень $\beta=a-bi$ и притом той же кратности. Произведение $(x-\alpha)(x-\beta)$ в этом случае дает

$$(x-\alpha)(x-\beta)=x^2+px+q, \qquad (1)$$

где $p=-(\alpha+\beta)=-2a$, $q=\alpha\beta=a^2+b^2$, откуда следует $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q<0$.

Заменяя в формуле (*) произведение каждой пары таких множителей по формуле (1), получаем разложение многочлена с действительными коэффициентами на действительные множители:

$$P(x)=(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}\ldots, \qquad (**)$$

в котором все числа α_i, p_i, q_i будут действительными и $\left(\frac{p_i}{2}\right)^2-q_i<0$.

Число корней уравнения с действительными коэффициентами. Из предыдущего следует, что всякое уравнение нечетной степени имеет по меньшей мере один действительный корень.

Число действительных корней уравнения $P(x)=0$, заключенных между любыми числами a и b $(a<b)$, не являющимися корнями данного уравнения, может быть точно установлено следующим способом:

1) Отделяют кратные корни уравнения $P(x)=0$, т. е. получают уравнение, имеющее те же корни, что и данное, но простые**. В дальнейшем через $P(x)$ обозначается уравнение, не имеющее кратных корней.

---

* О сопряженных комплексных числах см. стр. 495.

** Способ получения такого уравнения указан выше. Практически можно начинать не с отделения кратных корней, а сразу с нахождения функции Штурма: если P_m не равно const, то $P(x)$ имеет кратные корни, и их следует отделить.

2) Составляют ряд *функций Штурма*:

$$P(x),\quad P'(x),\quad P_1(x),\quad P_2(x),\ \ldots,\ P_m = \text{const},$$

где $P(x)$ — левая часть данного уравнения, $P'(x)$ — производная, $P_1(x)$ — взятый с обратным знаком остаток от деления $P(x)$ на $P'(x)$, $P_2(x)$ — » » » » » » $P'(x)$ » $P_1(x)$ и т. д., P_m — последний остаток (= const) *.

3) Подсчитывают число *А перемен знаков* (т. е. переходов от «+» к «—», и наоборот) в ряде чисел

$$P(a),\quad P'(a),\quad P_1(a),\quad P_2(a),\ \ldots,\ P_m$$

и число B перемен знаков в ряде чисел

$$P(b),\quad P'(b),\quad P_1(b),\quad P_2(b),\ \ldots,\ P_m$$ **.

Разность $A - B$ равна искомому числу действительных корней уравнения $P(x) = 0$ в интервале $[a, b]$ (*теорема Штурма*).

Пример: Определить число корней уравнения $x^4 - 5x^2 + 8x - 8 = 0$, заключенных между 0 и 2.

Вычисление функции Штурма дает:

$$P(x) = x^4 - 5x^2 + 8x - 8;\ P'(x) = 4x^3 - 10x + 8,\ P_1(x) = 5x^2 - 12x + 16,$$

$$P_2(x) = -3x + 284,\quad P_3 = -1.$$

Подстановка $x = 0$ дает ряд чисел: $-8, +8, +16, +284, -1$ (2 перемены); подстановка $x = 2$ дает: $+4, +20, +12, +278, -1$ (1 перемена). $A - B = 2 - 1 = 1$, т. е. между 0 и 2 имеется 1 корень.

Число положительных корней уравнения $P(x) = 0$ не больше числа перемен знаков в ряду коэффициентов многочлена $P(x)$ и может отличаться от него на четное число (*правило Декарта*).

Пример: Уравнение $x^4 + 2x^3 - x^2 + 5x - 1 = 0$. Последовательность коэффициентов этого уравнения имеет знаки: $+ + - + -$, т. е. знак меняется три раза. Согласно правилу Декарта это уравнение имеет три или один положительный корень. Так как при замене x на $-x$ корни уравнения меняют знаки, а при замене x на $x + h$ уменьшаются на h, то с помощью правила Декарта можно оценить и число отрицательных корней, а также число корней, больших h. В нашем примере замена x на $-x$ дает $x^4 - 2x^3 - x^2 - 5x - 1 = 0$, т. е. уравнение имеет один отрицательный корень. Замена x на $x + 1$ дает $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 13x + 6 = 0$, т. е. все положительные корни нашего уравнения (их 1 или 3) меньше единицы.

Решение уравнения n-й степени, если $n > 4$, для общего случая может быть произведено только приближенно; практически приближенные методы применяются и при решении уравнений 3-й и особенно 4-й степеней. Для приближенного нахождения одновременно всех корней алгебраического уравнения n-й степени (включая и комплексные) может быть применен *метод Лобачевского* (см. Крылов — стр. 585 справочника). Для вычисления отдельных действительных корней алгебраических уравнений с успехом могут быть применены общие методы приближенных решений трансцендентных уравнений (см. ниже, стр. 144—146).

---

* Для упрощения вычислений найденные остатки можно умножить на постоянные *положительные* множители — это не меняет результата.

** Если некоторые из этих чисел равны нулю, то при подсчете перемен знаков их пропускают.

9. Трансцендентные уравнения

Определение. Уравнение $F(x)=f(x)$ называется ***трансцендентным***, если хотя бы одна из функций $F(x)$ или $f(x)$ не является алгебраической.

Примеры:

1) $3^x=4^{x-2}\cdot 2^x$,

2) $2^{x-1}=8^{x-2}-4^{x-2}$,

3) $2\log_5(3x-1)-\log_5(12x+1)=0$,

4) $\sin x=\cos^2 x-\frac{1}{4}$,

5) $3\operatorname{ch} x=\operatorname{sh} x+9$,

6) $x\cos x=\sin x$.

В некоторых случаях решение трансцендентных уравнений сводится к алгебраическим уравнениям с последующим применением таблиц, вообще же трансцендентные уравнения могут быть решены только приближенно.

Некоторые случаи трансцендентных уравнений, приводящихся к алгебраическим.

Показательные уравнения. Неизвестное x или $P(x)$ (многочлен) находится только в показателях степени некоторых оснований a, b, c, ... Такие уравнения сводятся к алгебраическим в следующих случаях:

1) Если над степенями $a^{P_1(x)}$, $b^{P_2(x)}$, ... не производится сложения и вычитания, то уравнение следует прологарифмировать при любом основании.

Пример: $3^x=4^{x-2}\cdot 2^x$; $x\log 3=(x-2)\log 4+x\log 2$;

$$x=\frac{2\log 4}{\log 4-\log 3+\log 2}.$$

2) Если a, b, c, ... суть целые или дробные степени одного и того же числа k ($a=k^\alpha$, $b=k^\beta$, $c=k^\gamma$, ...), то, полагая $y=k^x$, получаем в некоторых случаях алгебраическое уравнение относительно y; решив его, определяем x из таблиц: $x=\dfrac{\lg y}{\lg k}$

Пример: $2^{x-1}=8^{x-2}-4^{x-2}$; $\dfrac{2^x}{2}=\dfrac{2^{3x}}{64}-\dfrac{2^{2x}}{16}$. полагая $2^x=y$, получим $y^3-4y^2-32y=0$ и $y_1=8$, $y_2=-4$, $y_3=0$; $2^{x_1}=8$, $2^{x_2}=-4$, $2^{x_3}=0$, откуда $x_1=3$; других действительных решений не существует.

Логарифмические уравнения. Неизвестное x или $P(x)$ (многочлен) находятся только под знаком логарифма. Такие уравнения сводятся к алгебраическим в следующих случаях:

1) Если уравнение содержит логарифм от одного и того же выражения; в этом случае, принимая этот логарифм за новое неизвестное, решаем полученное алгебраическое уравнение и потенцируем полученное решение.

Пример: $m[\log_a P(x)]^2+n=a\sqrt{[\log_a P(x)]^2+b}$. Замена $\log_a P(x)$ через y дает уравнение $my^2+n=a\sqrt{y^2+b}$; найдя отсюда y, получим уравнение для определения x: $P(x)=a^y$.

2) Если уравнение содержит линейную комбинацию (с целыми коэффициентами) логарифмов при одном и том же основании от выражений, представляющих собою многочлены от x:

$$m\log_a P_1(x)+n\log_a P_2(x)+\ldots=0,$$

В этом случае выражения в обеих частях равенства сводятся (каждое) к логарифму от одного выражения, полученное равенство потенцируется.

Пример: $2\log_5(3x-1)-\log_5(12x+1)=0$, $\log_5\frac{(3x-1)^2}{12x+1}=\log_5 1$; $\frac{(3x-1)^2}{12x+1}=1$, $x_1=0$, $x_2=2$; решение $x_1=0$ при подстановке в данное уравнение дает логарифм отрицательного числа (мнимость) и потому во внимание не принимается.

Тригонометрические уравнения (сводящиеся к алгебраическим). Неизвестное x или $nx+a$ (n целое) содержится только под знаками тригонометрических функций. Тогда, пользуясь тригонометрическими формулами, приводим выражение только к какой-нибудь одной функции от x и, заменяя эту функцию через y, получаем алгебраическое уравнение. Решив его, определяем x вообще говоря, из таблиц; при этом следует иметь в виду многозначность решения.

Пример $\sin x=\cos^2 x-\frac{1}{4}$; иначе $\sin x=1-\sin^2 x-\frac{1}{4}$; полагая $\sin x=y$, получаем $y^2+y-\frac{3}{4}=0$ и $y_1=\frac{1}{2}$, $y_2=-\frac{3}{2}$. Решение y_2 не дает действительных решений заданного уравнения ($|\sin x|\leqslant 1$); $y_1=\frac{1}{2}$ дает $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ и $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ (k — целые числа).

*Гиперболические уравнения**. Неизвестное x находится только под знаком гиперболических функций. Заменяя выражения гиперболических функций через показательные, обозначаем $e^x=y$, $e^{-x}=\frac{1}{y}$ и сводим уравнение к алгебраическому относительно y; $x=\ln y$ определяется из таблиц

Пример: $3\operatorname{ch}x=\operatorname{sh}x+9$; $\frac{3(e^x+e^{-x})}{2}=\frac{e^x-e^{-x}}{2}+9$; $e^x+2e^{-x}-9=0$; $y+\frac{2}{y}-9=0$; $y^2-9y+2=0$; $y_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{73}}{2}$; $x_1=\ln\frac{9+\sqrt{73}}{2}\approx 2{,}1716$, $x_2=\ln\frac{9-\sqrt{73}}{2}\approx -1{,}4784$.

Приближенное решение уравнений. Указываемые здесь способы приближенного решения уравнений применимы как к алгебраическим, так и к трансцендентным уравнениям. Процесс вычисления корней распадается на две части: 1) нахождение грубо приближенных значений корней и 2) уточнение найденных грубых приближений.

Грубая оценка корней. Если $f(x)$ — непрерывная функция**, а $f(a)$ и $f(b)$ разных знаков, то между a и b лежит по крайней мере один корень уравнения $f(x)=0$. Давая a и b различные значения, всегда можно получить достаточно узкий интервал, в котором будет лежать только один корень рассматриваемого уравнения. *Графический метод* применяется, если уравнение можно представить в виде $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$, причем графики функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ могут быть легко построены. Тогда корни уравнения равны абсциссам точек пересечения кривых $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$.

---

* Это название не общепринято.

** См. стр. 281–282

Пример. Корни уравнения $x\cos x = \sin x$ (кроме очевидного корня $x=0$) близки к $(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ (где $k=\pm 1, \pm 2, \ldots$), так как оно может быть записано в виде $x = \operatorname{tg} x$, и корни его соответствуют точкам пересечения прямой $y=x$ и тангенсоиды $y=\operatorname{tg} x$ (рис. 74).

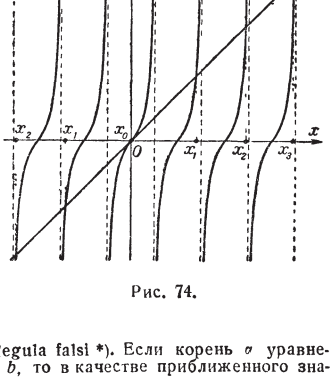


Рис. 74.

Методы уточнений грубых приближений. 1) *Метод Ньютона.* Если x_0 есть приближенное значение корня α уравнения $f(x)=0$, то в качестве более точного приближения берется

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Заменой x_0 на x_1 может быть получено следующее приближение x_2 и т. д. Процесс последовательных приближений всегда сходится, если только корень α не кратный (т. е. $f'(\alpha)\neq 0$) и первое приближение взято достаточно близко. Следовательно, корень может быть найден с любой степенью точности *Пример* — см. ниже.

2) *Линейная интерполяция* (Regula falsi *). Если корень α уравнения $f(x)=0$ заключен между a и b, то в качестве приближенного значения корня может быть взята величина

$$\tilde{x}_1 = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}.$$

Если $f''(x)$ в интервале между a и b не меняет знака, то приближенные значения, полученные по этому методу и по методу Ньютона, будут расположены по разные стороны от корня [за x_0 в методе Ньютона следует взять то значение (из a и b), для которого $f(x_0)\cdot f''(x_0)>0$]. Поэтому параллельное применение обоих методов позволяет судить о достигнутой точности.

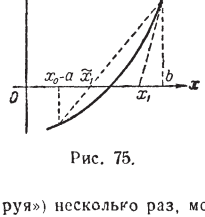


Рис. 75.

Геометрически метод Ньютона означает замену графика функции $f(x)$ касательной в точке x_0, а метод линейной интерполяции — хордой, соединяющей точки $(a,\ f(a))$ и $(b,\ f(b))$ (рис. 75). *Пример* — см. ниже.

3) *Метод итераций.* Рассматриваемое уравнение представляют в виде $x=\varphi(x)$ и находят более точное значение корня x_1 по первому приближению x_0 с помощью формулы $x_1=\varphi(x_0)$. Повторяя этот процесс («итерируя») несколько раз, можно получить значение корня с любой степенью точности, если на интервале между корнем уравнения и первым приближением $|\varphi'(x)|<1$. Если же это условие не выполнено, то уравнение следует преобразовать (хотя бы переходом к обратной функции). *Например*: к уравнению $x=\operatorname{tg} x$ метод итерации неприменим, но он применим к уравнению $x=\operatorname{arctg} x$.

* По-русски переводится как «правило ложного положения».

Если $\varphi'(x) < 0$, то два смежных приближенных значения корня, полученных путем итерации, будут последовательно больше и меньше корня что позволяет оценить достигнутую степень точности.

Пример: Найти наименьший положительный корень уравнения $\sin x - x\cos x = 0$. Заменяя это уравнение ему эквивалентным $x = \operatorname{tg} x$, графически находим (см стр. 145), что искомый корень близок к $\frac{3\pi}{2} = 4{,}71\ldots$ Более точное значение находим последовательными приближениями:

а) По методу Ньютона и линейной интерполяции. Для функций $f(x) = \sin x - x\cos x$ имеем $f'(x) = x\sin x$. Если взять $x_0 = \frac{3\pi}{2}$, то $f(x_0) = -1$, $f'(x_0) = -4{,}71$ и $x_1 = 4{,}71 - \frac{1}{4{,}71} = 4{,}50$.

Так как $f(x_1) = -0{,}029$ того же знака, что и $f(x_0)$, то линейная интерполяция не может быть применена. Вычисление показывает, что $f(4{,}45) = 0{,}189$ и, следовательно, искомый корень лежит между 4,45 и 4,50. Применяя линейную интерполяцию, получим следующее приближение:

$$\widetilde{x}_1 = 4{,}50 - \frac{-0{,}029}{-0{,}029 - 0{,}189}(4{,}50 - 4{,}45) = 4{,}4930.$$

Вычисление по формуле Ньютона следующего за x_1 приближения [знак $f''(x_1)$ совпадает со знаком $f(x_1)$] дает

$$x_2 = 4{,}50 - \frac{-0{,}029}{-4{,}399} = 4{,}4934.$$

Так как приближения по методу Ньютона и методу линейной интерполяции лежат по разные стороны от корня, то ошибка x_2 не превышает 0,0004.

б) По методу итерации: уравнение $x = \operatorname{tg} x$ непригодно для итерации, так как $(\operatorname{tg} x)' > 1$; переходя к обратной функции, получим уравнение $x = \operatorname{Arctg} x$, которое можно итерировать. Принимая $x_0 = 4{,}7$, найдем последовательно:

$$x_1 = \operatorname{Arctg} x_0 = 258° = 4{,}503;\quad x_2 = \operatorname{Arctg} x_1 = 257°23' = 4{,}4942;$$

$$x_3 = \operatorname{Arctg} x_2 = 257°27',3 = 4{,}4934;\quad x_4 = \operatorname{Arctg} x_3 = 257°27',2 = 4{,}4934.$$

Очевидно, что у x_4 можно считать все знаки верными.

10. Определители (детерминанты)

Определения. *Определителем (детерминантом) n-го порядка* называется число D, образованное из n^2 чисел a_{ij} *(элементов)*, расположенных в квадратную табличку из n строк и n столбцов следующим образом *:

$$D = |a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^k a_{1\alpha} a_{2\beta} \cdots a_{n\omega},$$

* Первый индекс i у элемента a_{ij} определителя указывает, что элемент взят из i-й строки определителя; второй индекс j — что элемент взят из j-го столбца (i — номер строки, считая сверху; j — номер столбца, считая слева).

где $\alpha, \beta, \ldots, \omega$ пробегают все возможные $n!$ перестановок* из чисел $1, 2, \ldots, n$; знак «+» или «—» перед каждым *членом* определителя (т. е. каждым слагаемым) определяется числом k *инверсий* («беспорядков») в каждой перестановке. Например, член $a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}$ в определителе 4-го порядка имеет знак «минус», так как *расположение* $\underset{\smile}{3,1}\underset{\smile}{4,2}$ вторых индексов у букв имеет три инверсии, отмеченные дужками.

Минором элемента a_{ij} называется определитель $(n-1)$-го порядка, образованный из данного определителя зачеркиванием i-й строки и j-го столбца. *Адъюнктой* A_{ij} элемента a_{ij} называется его минор со знаком «плюс» или «минус» по формуле

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1j} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{i1} \ldots a_{ij} \ldots a_{in} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nj} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,\,j-1} & a_{1,\,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i-1,1} & \ldots & a_{i-1,\,j-1} & a_{i-1,\,j+1} & \ldots & a_{i-1,\,n} \\ a_{i+1,1} & \ldots & a_{i+1,\,j-1} & a_{i+1,\,j+1} & \ldots & a_{i+1,\,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,\,j-1} & a_{n,\,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Линейной комбинацией нескольких строк (столбцов) определителя называется строка (столбец) $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$, элементы которой являются линейными комбинациями соответствующих элементов этих строк (столбцов); например, линейная комбинация $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ из элементов i-й, j-й и k-й строк определителя образуется так:

$$\begin{aligned} \overline{a_1} &= \alpha a_{i1} + \beta a_{j1} + \gamma a_{k1}, \\ \overline{a_2} &= \alpha a_{i2} + \beta a_{j2} + \gamma a_{k2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overline{a_n} &= \alpha a_{in} + \beta a_{jn} + \gamma a_{kn}; \end{aligned}$$

числа α, β, γ — *коэффициенты* линейной комбинации.

Свойства определителей:

1) Определитель не изменяет своей величины, если *заменить его строки столбцами* и обратно (поэтому все нижеперечисленные свойства, касающиеся строк определителя, относятся также к его столбцам).

2) Определитель равен нулю, если *элементы* его двух строк *равны* или *пропорциональны* или одна из строк является *линейной комбинацией* каких-либо остальных строк.

3) *Множитель*, общий всем элементам какой-либо строки, можно выносить за знак определителя.

---

* О перестановках см. стр. 163.

4) Если определители, разнящиеся между собой только элементами какой-нибудь (i-й) строки, *складывать* между собой, то сумма их равна определителю, у которого элементами i-й строки являются суммы соответствующих элементов i-х строк определителей-слагаемых, а остальные элементы те же, что у слагаемых.

5) Прибавляя (вычитая) к какой-либо строке элементы другой строки или линейную комбинацию других строк, мы *не изменяем* величины определителя

6) Определитель можно *разложить по элементам любой* (i-й) *строки* по формуле $D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}$, где A_{ij} — адъюнкты соответствующих элементов.

7) Сумма произведений всех элементов a_{ik} какой-либо (i-й) строки определителя на адъюнкты A_{jk} соответствующих элементов *другой* (j-й) строки равна нулю: $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\ldots+a_{in}A_{jn}=0 \quad (i\neq j)$.

Вычисление определителей:

2-го порядка — по формуле

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

3-го порядка по «правилу Саррюса» (приписываются первые два столбца):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}- a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33};$$

n-го порядка — сводят к $(n-1)$-му по свойству 6; предварительно определитель преобразуют, пользуясь остальными свойствами, чтобы обратить в нуль возможно большее число элементов.

Пример

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 9 & 9 & 4 \\ 2 & -3 & 12 & 8 \\ 4 & 8 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 9 & 4 \\ 2 & -7 & 12 & 8 \\ 4 & 0 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & -7 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

(свойство 5) (свойство 3)

$$= 3\left\{ -5 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} + 0 \right\} = 0 - 21 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

(свойство 6) (свойство 2)

$$= -21 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -21 \left\{ \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \right\} =$$

(свойство 5) (свойство 6)

$$= -21\{(4+10)-(16+5)\} = +147.$$

11. Решение системы линейных уравнений

Случай, когда число неизвестных равно числу уравнений. *Каноническая система*

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1,\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Обозначения: $D = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$ (*определитель системы*), D_j – определитель, получающийся из D заменой столбца, составленного из коэффициентов a_{kj} при неизвестном x_j, столбцом, составленным из свободных членов b_k; например $D_1 = \begin{vmatrix} b_1 a_{12} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ b_n a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$. Система $(*)$ называется *однородной*, если все $b_k = 0$ (и значит все $D_j = 0$), и *неоднородной*, если хотя бы одно b_k отлично от нуля.

Решение системы $(*)$. Если определитель системы $D \neq 0$, то система $(*)$ – *определенная*, она имеет одно решение корни x_j выражаются *формулами Крамера*:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots, x_n = \frac{D_n}{D}.$$

Если $D = 0$ и не все $D_j = 0$, то система $(*)$ – *несовместная*: она не имеет ни одного решения (для однородной системы такого случая быть не может).

Случай, когда $D = 0$ и все $D_j = 0$, рассмотрен ниже (см. общий случай, пример 4 на стр. 153 и пример 2 на стр. 154).

Примеры

1) $\left.\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 9,\\ x - 2y + z &= -2,\\ 3x + 2y + 2z &= 7; \end{aligned}\right\}$ $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 13$

$$D_x = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -13, \quad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 26, \quad D_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 39,$$

$$x = \frac{D_x}{D} = -\frac{13}{13} = -1, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{26}{13} = 2, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{39}{13} = 3$$

[система определенная, неоднородная].

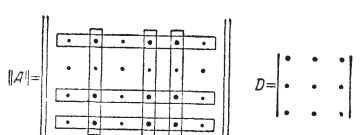
2) $\left.\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 1,\\ x - y + z &= 2,\\ 3x + 2y &= 5; \end{aligned}\right\}$ $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad D_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4.$

система несовместная].

Матрица и ее ранг. Система mn чисел, расположенных в прямоугольную таблицу из m строк и n столбцов, называется *матрицей*. Обозначение:

$$\| A \| = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Минором k-го порядка матрицы $\| A \|$ ($k \leq m$, $k \leq n$) называется определитель D, составленный (с сохранением порядка) из k^2 элементов матрицы лежащих на пересечении некоторых ее k столбцов и k строк (см. схему)



(минор 3-го порядка).

Рангом матрицы $\| A \|$ называется наибольший порядок, который могут иметь ее миноры, не обращающиеся в нуль. Для определения ранга матрицы следует рассмотреть все ее миноры порядка l (где l – меньшее из чисел m, n, если $m \neq n$ или $l = m = n$); если хотя бы один из них $\neq 0$, то ранг $\| A \|$ равен l, если же все они $= 0$, то следует рассмотреть все миноры порядка $l - 1$ и т. д. Практически целесообразно поступать наоборот: переходить от миноров меньшего порядка к минорам большего порядка, пользуясь следующим правилом. Если найден минор k-го порядка D_k, отличный от нуля, то остается вычислить только те миноры $(k+1)$-го порядка, которые представляют собой «окаймление» D_k, например,

$$\left|\begin{matrix} D_k \\ \cdots \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} \vdots & \vdots \\ D_k & \cdots \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} \cdots & \cdots \\ D_k & \cdots \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} \cdots & \vdots \\ \cdots & D_k \end{matrix}\right|.$$

Если все такие миноры $(k+1)$-го порядка равны нулю, то ранг матрицы равен k.

Пример: Определить ранг матрицы $\| A \| = \begin{Vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{Vmatrix}$.

Минор 2-го порядка, стоящий в левом верхнем углу, $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$. Но в матрице $\| A \|$ есть минор 2-го порядка, не равный нулю: $D_2' = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Окаймляем его слева и снизу: $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Окаймляя D_3 (это можно сделать лишь двумя способами),

находим: $D_4 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0$ и $D_4' = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$

Следовательно, ранг $\| A \| = 3$.

Общий случай системы линейных уравнений. *Неоднородные уравнения.* Система неоднородных уравнений

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \qquad (\ast\ast)$$

называется *совместной*, если существует хотя бы одно решение $\{ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \}$*, обращающее все уравнения $(\ast\ast)$ в тождества, и *несовместной*, если ни одного такого решения не существует. *Признак совместности*: система $(\ast\ast)$ совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы

$$\| A \| = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

равен рангу «расширенной» матрицы

$$\| B \| = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{Vmatrix}.$$

Совместная система уравнений называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если решений — бесконечное множество.

Совместная система уравнений $(\ast\ast)$ решается следующим образом. Определяем ранг r матрицы $\| A \|$, переставляем уравнения $(\ast\ast)$, а также и неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в них так, чтобы отличный от нуля минор матрицы $\| A \|$, имеющий порядок r, занял положение в верхнем левом углу матрицы (эта перестановка не нужна, если верхний левый угловой минор матрицы порядка r не равен нулю).

При этом могут быть два случая:

1) $r = n$, $r \leqslant m$. Решая систему п е р в ы х n уравнений с n неизвестными, получаем единственное решение $\{ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \}$, так как определитель этой системы $\neq 0$ (см. стр. 149). Если $n < m$, то это же решение удовлетворяет и остальным $m - n$ уравнениям, которые являются следствиями первых. Данная система $(\ast\ast)$ — определенная.

---

* Таким выражением в фигурных скобках обозначается в дальнейшем решение

$$x_1 = \alpha_1, \quad x_2 = \alpha_2, \quad \ldots, \quad x_n = \alpha_n.$$

2) $r < n$, $r \leqslant m$. Решаем систему первых r уравнений относительно первых r неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_r$, выражая эти неизвестные через остальные $n - r$ неизвестных $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$. Получаем единственное решение в виде линейных функций:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n), \\ x_2 &= x_2(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r &= x_r(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

так как определитель системы уравнений $\neq 0$. Неизвестным $x_{r+1}, \ldots, x_n$ можно придавать любые значения; тогда неизвестные $x_1, \ldots, x_r$ определяются по формулам (1). Эти же решения удовлетворяют и остальным $m - r$ уравнениям (если $r < m$), которые являются следствиями первых. Данная система (**) — неопределенная.

Примеры:

1) $\begin{aligned} x - 2y + 3z - u + 2v &= 2, \\ 3x - y + 5z - 3u - v &= 6, \\ 2x + y + 2z - 2u - 3v &= 8, \end{aligned}$

Ранг матрицы $\| A \|$ равен 2, ранг матрицы $\| B \|$ равен 3. Система несовместная, решений нет.

2) $\begin{aligned} x - y + 2z &= 1, \\ x - 2y - z &= 2, \\ 3x - y + 5z &= 3, \\ -2x + 2y + 3z &= -4. \end{aligned}$

Ранги матриц $\| A \|$ и $\| B \|$ равны 3; система совместна. Угловой верхний левый определитель 3-го порядка $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$; перестановки не требуется. $r = n$; система определенная. Решаем систему первых трех уравнений: $x = \frac{10}{7}$; $y = -\frac{1}{7}$; $z = -\frac{2}{7}$; это же решение удовлетворяет и четвертому уравнению.

3) $\begin{aligned} x - y + z - u &= 1, \\ x - y - z + u &= 0, \\ x - y - 2z + 2u &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$

Ранги матриц $\| A \|$ и $\| B \|$ равны 2; система совместная. $r < n$; система неопределенная. Угловой верхний левый определитель 2-го порядка $D = 0$; переставляем столбец с x на 4-е место:

$$\begin{aligned} -y + z - u + x &= 1, \\ -y - z + u + x &= 0, \\ -y - 2z + 2u + x &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Решаем систему первых двух уравнений относительно неизвестных y и z:

$$\begin{aligned} -y + z &= 1 - x + u, \\ -y - z &= -x - u. \end{aligned}$$

Решения $y = x - \frac{1}{2}$, $z = u + \frac{1}{2}$ удовлетворяют всем уравнениям при любых значениях x и u.

4) $$\begin{aligned} x + 2y - z + u &= 1, \\ 2x - y + 2z + 2u &= 2, \\ 3x + y + z + 3u &= 3, \\ x - 3y + 3z + u &= 0. \end{aligned}$$

В этом случае число уравнений равно числу неизвестных, $D = 0$, а также $D_x = D_y = D_z = D_u = 0$. Ранг матрицы $\| A \|$ равен 2, ранг матрицы $\| B \|$ равен 3. Система несовместная, решений нет.

Однородные уравнения. Система однородных уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (\ast\ast\ast)$$

всегда имеет *нулевое решение* $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Если система имеет ненулевое решение $\{ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \}$ *, то оно имеет и бесконечное множество решений вида $\{ k\alpha_1, k\alpha_2, \ldots, k\alpha_n \}$, где k – любое число. Если система $(\ast\ast\ast)$ имеет p ненулевых решений

$$\{ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \}, \{ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \}, \ldots, \{ \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \}, \qquad (1)$$

то она имеет и бесконечное множество решений вида

$$\{ k_1\alpha_1 + k_2\beta_1 + \ldots + k_p\mu_1,\ k_1\alpha_2 + k_2\beta_2 + \ldots + k_p\mu_2, \ldots \\ \ldots,\ k_1\alpha_n + k_2\beta_n + \ldots + k_p\mu_n \}, \qquad (2)$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_p$ – любые числа (не все равные нулю) Решение (2) называется *линейной комбинацией* решений (1).

Решения (1) системы уравнений $(\ast\ast\ast)$ называются *линейно независимыми*, если ни одно из них не является линейной комбинацией остальных; p линейно независимых решений образуют *фундаментальную систему решений*, если любое решение системы уравнений $(\ast\ast\ast)$ является линейной комбинацией этих p решений **.

Если ранг r матрицы $\| A \|$ из коэффициентов уравнении $(\ast\ast\ast)$ меньше числа n неизвестных, то уравнения $(\ast\ast\ast)$ имеют фундаментальную систему решений; если же $r = n$, фундаментальной системы не существует, и уравнения имеют только нулевое решение. При $r < n$ фундаментальная система состоит из $n - r$ линейно независимых решении. Для нахождения фундаментальных систем ставим в системе $(\ast\ast\ast)$ уравнения и неизвестные в таком порядке, чтобы в левом верхнем углу матрицы $\| A \|$ оказался минор r-го порядка, не равный нулю. (Для этого приходится иногда переставлять уравнения и неизвестные; см. примеры). Затем решаем систему $(\ast\ast\ast)$ относительно первых r неизвестных $x_1, x_2, \ldots x_r$, выражая их через остальные неизвестные:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n), \\ x_2 &= x_2(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ x_r &= x_r(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n), \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

* См. сноску на стр. 151

** Фундаментальных систем может быть бесконечное множество (см. ниже).

Неизвестным $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ можно давать любые значения, и они вместе с соответствующими значениями $x_1, x_2 \ldots, x_r$ определяемыми по формулам (3), образуют одно из решений системы уравнений (***). Выбрав эти значения $n-r$ раз:

	x_{r+1}	x_{r+2}	$\ldots$	x_n
1)	b_{11}	b_{12}	$\ldots$	$b_{1,n-r}$
2)	b_{21}	b_{22}	$\ldots$	$b_{2,n-r}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$n-r$)	$b_{n-r,1}$	$b_{n-r,2}$	$\ldots$	$b_{n-r,n-r}$

таким образом, чтобы определитель $B = \| b_{ik} \|$ не равнялся нулю, получаем одну из фундаментальных систем решений уравнений (***). В частности, можно положить $b_{ik} = 1$ при $i = k$ и $b_{ik} = 0$ при $i \neq k$; тогда $B = 1$, и решения

	x_{r+1}	x_{r+2}	$\ldots$	x_n
1)	1	0	$\ldots$	0
2)	0	1	$\ldots$	0
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$n-r$)	0	0	$\ldots$	1

вместе с (3) определяют простейшим способом фундаментальную систему решений уравнений (***).

Примеры: Найти фундаментальные системы решений уравнений

1) $\begin{aligned} x - y + 5z - u &= 0, \\ x + y - 2z + 3u &= 0, \\ 3x - y + 8z + u &= 0, \\ x + 3y - 9z + 7u &= 0. \end{aligned}$

Ранг матрицы $\| A \|$ равен 2; определитель $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, перестановки делать не надо. Решаем систему относительно неизвестных x и y. Полагая $z = 1$, $u = 0$, получаем первое фундаментальное решение:

$$x = -\frac{3}{2}, \quad y = \frac{7}{2}, \quad z = 1, \quad u = 0 \quad \text{или} \quad \left\{ -\frac{3}{2}, \ \frac{7}{2}, \ 1, \ 0 \right\}.$$

Полагая $z = 0$, $u = 1$, получаем второе фундаментальное решение:

$$x = -1, \quad y = -2, \quad z = 0, \quad u = 1 \quad \text{или} \quad \{ -1, \ -2, \ 0, \ 1 \}.$$

Следовательно, любое решение данной системы можно представить в виде $\left\{ -\frac{3}{2} k_1 - k_2, \ \frac{7}{2} k_1 - 2k_2, \ k_1, \ k_2 \right\}$.

2) $\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 0, \\ x - y + z &= 0, \\ 3x + 2y &= 0. \end{aligned}$

Число уравнений равно числу неизвестных, $D = D_x = D_y = D_z = 0$. Ранг матрицы $\| A \|$ равен 2; определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, перестановки делать не надо.

Решаем систему относительно x и y. Полагая $z = 1$, получаем единственное линейно независимое фундаментальное решение: $x = -\frac{2}{5}$, $y = \frac{3}{5}$. Следовательно, любое решение данной системы можно представить в виде:

$$x = -\frac{2}{5}k,\ y = \frac{3}{5}k,\quad z = k \quad \text{или} \quad x = -2k,\ y = 3k,\ z = 5k.$$

12. Система уравнений высших степеней

Условие независимости уравнений. Два уравнения с двумя неизвестными:

$$f(x, y) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi(x, y) = 0$$

будут независимы, если их якобиан (см. стр. 290)

$$\frac{D(f, \varphi)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix}$$

не обращается в нуль тождественно; в противном случае одно уравнение есть следствие другого, и они имеют бесконечное множество решений.

Для трех уравнений с тремя неизвестными аналогичное условие независимости:

$$\frac{D(f, \varphi, \psi)}{D(x, y, z)} \neq 0$$

и т. д.

Эти условия относятся к системам как алгебраических, так и трансцендентных уравнений.

Число решений системы двух алгебраических уравнений $P_1(x, y) = 0$ и $P_2(x, y) = 0$. Если P_1 – многочлен m-й степени, а P_2 – n-й степени относительно x и y *, то система имеет $m \cdot n$ действительных или комплексных пар решений. Система трех уравнений m-й, n-й и p-й степеней имеет $m \cdot n \cdot p$ троек решений и т. д.

Нахождение решений системы двух алгебраических уравнений в общем случае сводится к получению уравнения $m \cdot n$-й степени – *результанты* системы с одним из неизвестных (например x), путем исключения другого неизвестного (y) из системы; после нахождения корней результанты они подставляются в одно из уравнений системы для определения другого неизвестного. Наиболее просто решается система уравнений, одно из которых линейное, а другое n-й степени, разрешая линейное уравнение относительно y и подставляя в другое уравнение, получаем результанту n-й степени относительно x. В случае системы двух уравнений, из которых каждое 2-й степени, получаем результанту 4-й степени; иногда удается такую систему решить *искусственными приемами*

Пример. $x^2 + y^2 = a$, $xy = b$. Получаем $(x+y)^2 = a + 2b$; $(x-y)^2 = a - 2b$, $x + y = \pm\sqrt{a + 2b}$, $x - y = \pm\sqrt{a - 2b}$, откуда находятся 4 пары значений x и y.

Графический метод решения системы двух уравнений сводится к нахождению точек пересечения кривых, имеющих уравнения $f(x, y) = 0$ и $\varphi(x, y) = 0$.

---

* Под степенью многочлена от двух переменных понимается наибольшая сумма степеней x и y в его членах. Например, многочлен $x^3 + x^2y^2 + y^3$ 4-й степени.

В. Дополнительные главы алгебры

13. Неравенства

Определения. *Неравенством* называется соединение двух числовых или буквенных выражений одним из следующих знаков:

1) $>$ («больше»),
2) $<$ («меньше»),
3) $\neq$ («не равно»),

3а) $\gtrless$ («больше или меньше»),

4) $\geqslant$ («больше или равно»),
4а) $\not<$ («не меньше»),
5) $\leqslant$ («меньше или равно»),
5а) $\not>$ («не больше»).

Записи 3) и 3а), 4) и 4а), 5) и 5а) имеют одно и то же значение и могут быть заменены друг другом *.

Неравенства типов 1, 2 и 3 называются *строгими*, неравенства типов 4 и 5 — нестрогими.

Неравенство называется *тождественным*, если оно верно при всех значениях входящих в него букв. Верное неравенство, содержащее только числа, также называется тождественным.

Как и уравнения, неравенства могут содержать неизвестные величины (они обычно обозначаются последними буквами алфавита). *Решить неравенство* (или систему неравенств) значит — определить, в каких границах должны заключаться значения неизвестных величин, чтобы неравенство (или все неравенства, входящие в систему) было верным. Решение можно находить для неравенств типов 1—5; наиболее часто приходится решать строгие неравенства типов 1 и 2. Если два неравенства принадлежат оба к типу 1 или оба к типу 2, то они называются *неравенствами одинакового смысла;* если же одно из них принадлежит к типу 1, а другое — к типу 2, то они называются *неравенствами противоположного смысла.* Два неравенства, содержащие одни и те же неизвестные, называются *равносильными*, если они верны при одних и тех же значениях неизвестных.

Основные свойства неравенств типов 1 и 2

1) *Перемена знака неравенства.* Если $a > b$, то $b < a$; если $a < b$, то $b > a$.

2) *Свойства транзитивности.* Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$; если $a < b$, $b < c$, то $a < c$.

3) *Сложение и вычитание неравенства и некоторой величины.* Если $a > b$, то $a \pm c > b \pm c$, если $a < b$, то $a \pm c < b \pm c$: от прибавления одной и той же величины к обеим частям неравенства его смысл не меняется.

4) *Сложение неравенств.* Если $a > b$, $c > d$, то $a + c > b + d$; если $a < b$, $c < d$, то $a + c < b + d$: два неравенства одинакового смысла можно почленно складывать.

5) *Вычитание неравенств.* Если $a > b$, $c < d$, то $a - c > b - d$; если $a < b$, $c > d$, то $a - c < b - d$: из одного неравенства можно почленно вычитать другое неравенство противоположного смысла, оставляя знак первого неравенства. (Почленно вычитать неравенства одинакового смысла друг из друга нельзя!)

---

* Если запись 3) относится к таким величинам, для которых понятия «больше» и «меньше» не определены, например, к комплексным числам (стр. 494) или векторам (стр. 519), то она не может быть заменена записью 3а). Весь настоящий параграф относится только к действительным числам.

6) *Умножение и деление неравенств.*

Если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$, $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$,

» $a < b$ » $c > 0$, » $ac < bc$, $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$,

» $a > b$ » $c < 0$, » $ac < bc$, $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$,

» $a < b$ » $c < 0$, » $ac > bc$, $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

(если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится неравенство того же смысла: если же умножить или разделить обе части неравенства на одно и то же отрицательное число, то получится неравенство противоположного смысла).

Некоторые важные неравенства

1) $|a+b| \leqslant |a| + |b|$, $|a+b+\ldots+k| \leqslant |a| + |b| + \ldots + |k|$ (абсолютная величина суммы двух или нескольких чисел меньше или равна сумме абсолютных величин этих чисел).

Равенство имеет место только в том случае, если все числа имеют одинаковые знаки.

2) $|a| + |b| \geqslant |a-b| \geqslant |a| - |b|$ (абсолютная величина разности двух чисел меньше или равна сумме и больше или равна разности абсолютных величин этих чисел).

3) $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ при $a_i > 0$

(*«неравенство Коши»*: среднее арифметическое n положительных чисел больше или равно корню n-й степени из произведения этих чисел) *.

Равенство имеет место только в случае, когда все n чисел равны.

4) $\left|\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right| \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$

(абсолютная величина среднего арифметического нескольких чисел меньше или равна среднему квадратичному из этих чисел, см. ниже, стр. 161).

Равенство имеет место только в случае, когда все n чисел равны.

5) $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \leqslant$

$$\leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}\ \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}$$

или

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$$

(*«неравенство Буняковского — Коши»*: если имеются два конечных ряда из n чисел, то сумма попарных произведений этих чисел меньше

* Частный случай этого неравенства при $n = 2$ см. на стр. 161.

или равна произведению квадратных корней из суммы квадратов этих чисел *. Равенство имеет место только при $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \ldots = a_n : b_n$.

6) Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — положительные числа, то

$$6_1) \quad \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} \leqslant \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{n}$$

при $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ и $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$
или $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$.

$$6_2) \quad \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} \geqslant \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{n}$$

при $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$

— *неравенство Чебышева*: если имеются два конечных ряда из n положительных чисел, то произведение средних арифметических этих рядов меньше или равно (соответственно больше или равно) среднему арифметическому произведений, когда оба ряда возрастающие или убывающие (соответственно — один из рядов возрастает, а другой убывает).

7) Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — положительные числа, то

$$7_1) \quad \sqrt[k]{\frac{a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k}{n}} \cdot \sqrt[k]{\frac{b_1^k + b_2^k + \ldots + b_n^k}{n}} \leqslant \sqrt[k]{\frac{(a_1 b_1)^k + (a_2 b_2)^k + \ldots + (a_n b_n)^k}{n}}$$

при $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ и $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$
или $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$,

$$7_2) \quad \sqrt[k]{\frac{a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k}{n}} \cdot \sqrt[k]{\frac{b_1^k + b_2^k + \ldots + b_n^k}{n}} \geqslant \sqrt[k]{\frac{(a_1 b_1)^k + (a_2 b_2)^k + \ldots + (a_n b_n)^k}{n}}$$

при $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$

(обобщение неравенства Чебышева).

---

* Если $n = 3$ и $\{a_1, a_2, a_3\}$ и $\{b_1, b_2, b_3\}$ рассматривать как прямоугольные декартовы координаты вектора, то неравенство Буняковского — Коши указывает, что скалярное произведение векторов меньше или равно произведению их модулей (см. стр. 522). При $n > 3$ эта формулировка распространяется на векторы в n-мерном пространстве.

Аналог неравенства Буняковского — Коши для сходящихся бесконечных рядов:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n\right)^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2;$$

аналог того же неравенства для определенных интегралов:

$$\left[\int_a^b f(x) \cdot \varphi(x)\, dx\right]^2 \leqslant \int_a^b [f(x)]^2\, dx \cdot \int_a^b [\varphi(x)]^2\, dx.$$

Решение неравенств 1 и 2 степени. Решение неравенств сводится к последовательной замене неравенства ему равносильным. Как и при решении уравнений в неравенстве переносят слагаемые из одной части в другую с обратным знаком и множат или делят обе части неравенства на одно и то же число (не равное нулю; если множитель положительный, то знак неравенства сохраняется, а если отрицательный то меняется на обратный). Путем таких преобразований можно всегда неравенство первой степени привести к виду $ax > b$, а неравенство второй степени в простейшем случае — к виду $x^2 < m$ или $x^2 > m$, а в общем случае — к виду $ax^2 + bx + c < 0$ или $ax^2 + bx + c > 0$.

Неравенство первой степени $ax > b$ имеет решение:

$$x > \frac{b}{a} \text{ при } a > 0 \text{ и } x < \frac{b}{a} \text{ при } a < 0.$$

Пример: $5x + 3 < 8x + 1$; $5x - 8x < 1 - 3$; $-3x < -2$, $x > \frac{2}{3}$.

Простейшие неравенства второй степени $x^2 < m$ и $x^2 > m$ имеют решения:

а) $x^2 < m$. При $m > 0$ решение: $-\sqrt{m} < x < +\sqrt{m}$ ($|x| < \sqrt{m}$);
« $m \leqq 0$ решения нет;

б) $x^2 > m$. При $m > 0$ решение: $x > \sqrt{m}$ и $x < -\sqrt{m}$ ($|x| > \sqrt{m}$);
» $m = 0$ » : $x > 0$ и $x < 0$ ($x \neq 0$);
» $m < 0$ неравенство тождественное.

Общий случай неравенства второй степени $ax^2 + bx + c < 0$ или $ax^2 + bx + c > 0$. Делим неравенство на a (переменив знак неравенства в случае $a < 0$) и приводим его к виду $x^2 + px + q < 0$ или $x^2 + px + q > 0$. Последнее неравенство преобразуем к виду

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 < \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

или соответственно к виду

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 > \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q.$$

Обозначая $x + \frac{p}{2}$ через z, а $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ через m, получаем неравенство $z^2 < m$ или $z^2 > m$; решив его, найдем x.

Примеры: 1) $-2x^2 + 14x - 20 > 0$; $x^2 - 7x + 10 < 0$; $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 < \frac{9}{4}$; $-\frac{3}{2} < x - \frac{7}{2} < \frac{3}{2}$; $-\frac{3}{2} + \frac{7}{2} < x < \frac{3}{2} + \frac{7}{2}$. Решение: $2 < x < 5$.

2) $x^2 + 6x + 15 > 0$; $(x + 3)^2 > -6$; неравенство тождественное.

3) $-2x^2 + 14x - 20 < 0$; $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 > \frac{9}{4}$, $x - \frac{7}{2} > \frac{3}{2}$ и $x - \frac{7}{2} < -\frac{3}{2}$; решение: $x > 5$ и $x < 2$.

14. Прогрессии, конечные ряды и средние величины

Арифметической прогрессией называется такая последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (*членов* прогрессии, в которой каждое последующее число получается из предыдущего прибавлением определенного числа r (*разности* прогрессии). Если $r > 0$, прогрессия называется *возрастающей*, если $r < 0$, — *убывающей*.

Формулы арифметической прогрессии:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \text{ и } s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \quad (s_n - \text{сумма } n \text{ членов}).$$

Геометрической прогрессией называется такая последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (*членов* прогрессии), в которой каждое последующее число получается из предыдущего умножением его на определенное число q (*знаменатель* прогрессии). Если $q > 1$, прогрессия называется *возрастающей*, если $|q| < 1$, то *убывающей*.

Формулы геометрической прогрессии:

$$a_n = a_1 q^{n-1} \text{ и } s_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Для суммы убывающей геометрической прогрессии удобнее пользоваться формулой $s_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$. Если число членов убывающей геометрической прогрессии n безгранично растет, то $q^n \to 0$ и s_n стремится к пределу

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s = \frac{a_1}{1 - q}$$

(*сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии*).

Пример: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$

Некоторые числовые ряды (конечные *):

1) $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$;

2) $p + (p+1) + (p+2) + \ldots + (q-1) + q = \frac{(q+p)(q-p+1)}{2}$;

3) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-3) + (2n-1) = n^2$;

4) $2 + 4 + 6 + \ldots + (2n-2) + 2n = n(n+1)$;

5) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

6) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$;

7) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}$;

8) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$;

9) $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)}{30}$.

Средние величины. *Средним арифметическим* двух величин a и b называется их полусумма $x = \frac{a+b}{2}$; величины a, x и b образуют арифметическую прогрессию.

Среднее арифметическое n величин $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$:

$$x = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

---

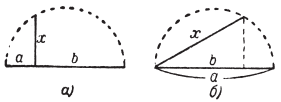
* Таблицу бесконечных числовых рядов см. на стр. 296—297.

Средним квадратическим n величин $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (положительных или отрицательных) называется величина

$$+\sqrt{\frac{1}{n}(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)},$$

имеющая большое значение в теории ошибок (см. стр. 567).

Средним геометрическим (*средним пропорциональным*) двух положительных величин a и b называется величина $x=\sqrt{ab}$; величины a, x и b образуют геометрическую прогрессию. Среднее геометрическое двух неравных величин всегда меньше их среднего арифметического. Если a и b — длины отрезков, то отрезок длиной $x=\sqrt{ab}$ определяется построением, данным на рис. 76 (*а* или *б*).



а) *б*)

Рис. 76.

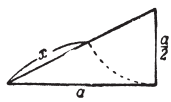


Рис. 77.

Золотым сечением (или *делением в крайнем и среднем отношении* величины a называется ее разделение на две такие части x и $a-x$, чтобы x было средним геометрическим между a и $a-x$.

$$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a\approx 0{,}618\,a.$$

Если a — длина отрезка, то отрезок длиной x определяется построением, приведенным на рис. 77. Величина x является длиной стороны правильного десятиугольника, вписанного в круг радиуса a.

15. Факториал и гамма-функция

Ф а к т о р и а л о м целого положительного числа n [обозначается: $n!$ или $\Pi(n)$] называется произведение $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n=n!$.

Основное свойство факториала: $n!=n\cdot(n-1)!$.

Факториалы первых чисел и обратные им величины см. стр. 42.

Факториалы больших чисел могут быть выражены приближенно *формулой Стирлинга*:

$$n!\approx\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}+\ldots\right),$$

$$\ln(n!)\approx\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n-n+\ln\sqrt{2\pi}.$$

Эта формула имеет место и не при целом n (см. ниже, Г-функция).

Г а м м а-ф у н к ц и я. Понятие факториала распространяется на любые числа x * при помощи *гамма-функции*, $\Gamma(x)$, определяемой двояким образом:

$$\Gamma(x)\begin{cases} = \int\limits_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt \ (\textit{интеграл Эйлера}) \text{ (только при } x > 0\ **) \\ = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!\, n^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)} \text{ (для любых } x). \end{cases}$$

Основные свойства гамма-функции:

$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$,
$\Gamma(n) = (n-1)!$ при
n целом положительном.

$$\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

$$\Gamma(x)\cdot\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\,\Gamma(2x).$$

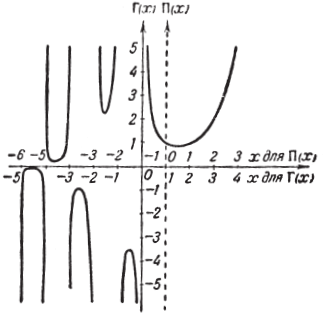


Рис. 78.

О б о б щ е н и е п о н я т и я ф а к т о р и а л а $\Pi(x)$. Понятие факториала $n!$, определенное сначала для целых положительных n, обобщается для любого действительного n в виде функции $\Pi(x) = \Gamma(x+1)$.

При x целом положительном: $\Pi(x) = x! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots \cdot x$,

» $x = 0$: $\Pi(0) = \Gamma(1) = 1$,

» x целом отрицательном: $\Pi(x) = \pm\infty$,

» $x = \frac{1}{2}$: $\Pi\left(\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$,

» $x = -\frac{1}{2}$: $\Pi\left(-\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$,

» $x = -\frac{3}{2}$: $\Pi\left(-\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$.

График функций $\Gamma(x)$ и $\Pi(x)$ см. на рис. 78. Таблицы функции $\Gamma(x)$ см. стр. 75.

* В том числе и на комплексные.
** Для комплексных x — при $\mathrm{Re}\, x > 0$.

16. Соединения

Размещениями из n элементов по m называются такие их соединения, которые различаются друг от друга самими элементами или их порядком. Например: размещения из 3 элементов a, b, c по 2: ab, ac, bc, ba, ca, cb. Число всех размещений из n различных элементов по m (обозначается A_n^m):

$$A_n^m = \underbrace{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}_{\text{всего } m \text{ множителей}} = \frac{n!}{(n-m)!}\ *.$$

Например: $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$.

Перестановками из n элементов называются их соединения, отличающиеся друг от друга только порядком входящих в них элементов. Например: перестановки из трех элементов a, b и c: abc, bca, cab, cba, bac, acb. Число всех перестановок из n различных элементов (обозначается P_n):

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n! = A_n^n.$$

Если среди n элементов a, b, c, ... имеются одинаковые (a повторяются α раз, b — β раз, c — γ раз и т. д.), то

$$P_n = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\dots}.$$

Сочетаниями из n элементов по m называются их соединения, различающиеся друг от друга только самими элементами. Например: сочетания из трех элементов a, b, c по 2: ab, ac, bc. Число всех сочетаний из n различных элементов по m [обозначается C_n^m или $\binom{n}{m}$]:

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m} = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

$$C_n^1 = n,\ C_n^n = C_n^0 = 1.$$

Основное свойство сочетаний:

$$C_n^m = C_n^{n-m}.$$

17. Бином Ньютона

Формула Ньютона:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \dots$$
$$\dots + \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!}a^{n-m}b^m + \dots + nab^{n-1} + b^n \quad (*)$$

или

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + C_n^3 a^{n-3}b^3 + \dots + C_n^m a^{n-m}b^m + \dots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^n b^n.$$

* О символе «$n!$» (факториал) см. стр. 161.

Биномиальные коэффициенты C_n^m можно определить из так называемого *треугольника Паскаля*:

n	Коэффициенты
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1
. . . . .	

Каждый коэффициент образуется сложением двух стоящих над ним (слева и справа).

Свойства биномиальных коэффициентов:

1) Коэффициенты в формуле Ньютона растут до середины формулы и затем убывают,

2) коэффициенты членов, равноотстоящих от начала и конца, равны,

3) сумма коэффициентов в биноме n-й степени равна 2^n,

4) сумма коэффициентов, стоящих на нечетных местах, равна сумме коэффициентов, стоящих на четных местах.

Степень разности:

$$(a-b)^n = a^n - na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^m \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}a^{n-m}b^m + \ldots + (-1)^n b^n. \quad (*)$$

Обобщение на любую степень. Формула (*) может быть распространена на отрицательную и дробную степень n; $(a+b)^n$ при $|b| < a$ представляется в этом случае в виде бесконечного ряда (см. стр. 324—325):

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \ldots$$

III. ГЕОМЕТРИЯ

А. Планиметрия

1. Плоские фигуры

Треугольник. Сумма двух сторон тр-ка (рис. 79) всегда больше третьей: $b+c>a$. Сумма углов тр-ка $\alpha+\beta+\gamma=180°$. Треугольник вполне определяется, если заданы: 1) три стороны, или 2) две стороны и угол между ними, или 3) сторона и два прилежащих к ней угла. Если заданы две стороны и угол, противолежащий одной из них, то по этим данным может быть определено два, один или ни одного треугольника (см. рис. 80, подробнее об этом см. стр. 187).

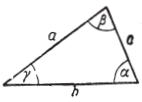


Рис. 79.

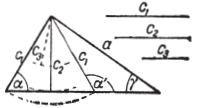


Рис. 80.

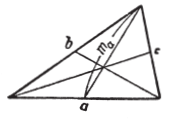


Рис. 81.

Медианой тр-ка называется прямая, соединяющая вершину с серединой противолежащей ей стороны тр-ка. Медианы тр-ка пересекаются в одной точке — центре тяжести тр-ка (рис. 81) и делятся этой точкой в отношении 2:1 (считая от вершины угла). Длина медианы, проведенной на сторону a: $m_a=\frac{\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}{2}$ (см. также стр. 187).

Биссектрисой треугольника называется прямая, делящая его внутренний угол пополам. Биссектрисы тр-ка пересекаются в одной точке, являющейся центром вписанной окружности (рис. 82); радиус вписанной окружности r — см. стр. 187. Длина биссектрисы угла α (см. также стр. 187): $l_\alpha=\frac{\sqrt{bc[(b+c)^2-a^2]}}{b+c}$. Если биссектриса делит сторону a на отрезки m и n, то $m:n=c:b$.

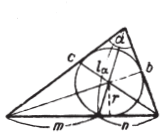


Рис. 82.

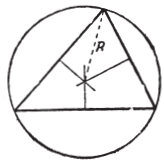


Рис. 83.

Центр описанной окружности находится в точке пересечения перпендикуляров, восставленных к сторонам тр-ка в их серединах (рис. 83). Радиус описанной окружности R — см. стр. 187.

Высотой тр-ка называется перпендикуляр, опущенный из вершины тр-ка на противоположную сторону. Высоты тр-ка пересекаются в одной точке, называемой его *ортоцентром*. Длина высоты — см. стр. 187.

Высота, медиана и биссектриса, опущенные на одну и ту же сторону, совпадают, если две другие стороны тр-ка равны (тр-к *равнобедренный*). Совпадения двух из этих линий достаточно для установления равнобедренности тр-ка.

У равностороннего тр-ка ($a = b = c$) центры вписанной и описанной окружности, центр тяжести и ортоцентр совпадают.

Средняя линия — прямая, соединяющая середины двух сторон тр-ка, параллельна третьей стороне и равна ее половине.

Площадь тр-ка: $S = {}^1/_2 bh_b$ * $= {}^1/_2 ab \sin\gamma = {}^1/_2 r(a+b+c) = \dfrac{abc}{4R} =$ $= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = {}^1/_2(a+b+c)$.

Прямоугольный треугольник (рис. 84): c — гипотенуза, a и b — катеты, $a^2 + b^2 = c^2$ (теорема Пифагора). $h^2 = mn$, $a^2 = mc$, $b^2 = nc$. Площадь $S = {}^1/_2 ab = {}^1/_2 a^2 \operatorname{tg}\beta = {}^1/_4 c^2 \sin 2\beta$.

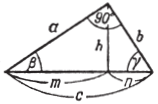


Рис. 84.

Тригонометрические формулы, относящиеся к треугольнику, см. стр. 186—187.

Треугольники (а также и многоугольники с одинаковым числом сторон) *подобны*, если у них соответственные углы равны и сходственные стороны пропорциональны. Для подобия треугольников достаточно выполнения одного из следующих условий: 1) три стороны одного тр-ка пропорциональны трем сторонам другого; 2) два угла одного тр-ка равны двум углам другого; 3) две стороны одного тр-ка пропорциональны двум сторонам другого тр-ка, а заключенные между ними углы равны.

Площади подобных фигур пропорциональны квадратам сходственных линейных элементов (сторон, высот, диагоналей и т. п.).

Параллелограм (рис. 85). Основные свойства: 1) противоположные стороны равны, 2) противоположные стороны параллельны, 3) диагонали делятся в точке пересечения пополам, 4) противоположные углы равны. Наличие у четырехугольника одного из этих свойств или равенства и параллельности одной пары противоположных сторон вызывает, как следствие, все остальные свойства.

Связь между диагоналями и сторонами: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$. *Площадь* $S = ah$.

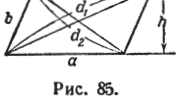


Рис. 85.

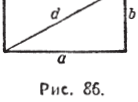


Рис. 86.

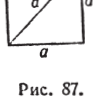


Рис. 87.

Прямоугольник и квадрат. Параллелограм является *прямоугольником* (рис. 86), если у него: 1) все углы прямые или 2) диагонали равны тодно из этих свойств есть следствие другого). Площадь $S = ab$

Прямоугольник есть *квадрат* (рис. 87), если $a = b$; $d = \sqrt{2}\, a \approx 1{,}414a$; $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2} d \approx 0{,}707d$. *Площадь* $S = a^2 = {}^1/_2 d^2$.

* Через h_b обозначена высота, опущенная на сторону b.

Р о м б. Параллелограмм является *ромбом* (рис. 88), если у него: 1) все стороны равны, 2) диагонали взаимно перпендикулярны, 3) диагонали делят углы параллелограмма пополам (наличие одного из этих свойств вызывает как следствие два остальных). $d_1 = 2a \sin \frac{\alpha}{2}$; $d_2 = 2a \cos \frac{\alpha}{2}$; $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$.

Площадь $S = ah = a^2 \sin \alpha = {}^1/_2\, d_1 d_2$.

Т р а п е ц и я – четырехугольник, у которого две стороны параллельны (рис. 89), a и b – *основания* трапеции, h – *высота*, m – *средняя линия* (прямая, соединяющая середины непараллельных сторон; она параллельна основаниям): $m = {}^1/_2\,(a + b)$.

Площадь $S = {}^1/_2\,(a + b)\,h = mh$. Трапеция – *равнобочная*, если $d = c$. В этом случае $S = (a - c \cos \gamma)\, c \sin \gamma = (b + c \cos \gamma)\, c \sin \gamma$.

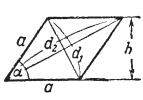


Рис. 88

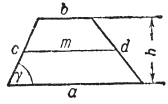


Рис. 89.

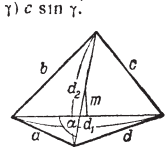


Рис. 90.

Ч е т ы р е х у г о л ь н и к (рис. 90). Сумма углов всякого выпуклого четырехугольника равна 360°. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = d_1^2 + d_2^2 + 4m^2$, m – отрезок, соединяющий середины диагоналей. *Площадь* $S = {}^1/_2\, d_1 d_2 \sin \alpha$.

В четырехугольник можно вписать окружность (рис. 91, *а*) тогда и только тогда, когда $a + c = b + d$. Около четырехугольника можно описать окружность (рис. 91, *б*) тогда и только тогда, когда $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$. Для вписанного четырехугольника $ac + bd = d_1 d_2$. Площадь вписанного 4-угольника $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где $p = {}^1/_2\,(a + b + c + d)$.

М н о г о у г о л ь н и к (рис. 92). Если число сторон равно n, то сумма внутренних углов равна $180°\,(n - 2)$. Сумма внешних углов равна 360°. *Площадь* определяется разбиением на треугольники.

Рис. 91.

Рис. 92.

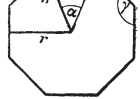


Рис. 93.

Многоугольник *правильный*, если у него все стороны и углы равны между собой. Для правильных многоугольников, имеющих n сторон (рис. 93): центральный угол $\alpha = 360° : n$, внешний угол $\beta = 360° : n$, внутренний угол $\gamma = 180° - \beta$. Если R – радиус описанной, а r – радиус вписанной окружности (*апофема*), то сторона $a = 2\sqrt{R^2 - r^2} = 2R \sin \frac{\alpha}{2} = 2r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. *Площадь* $S = {}^1/_2\, nar = nr^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = {}^1/_2\, nR^2 \sin \alpha = {}^1/_4\, na^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$.

Данные об отдельных правильных многоугольниках см. в таблице на стр. 168.

Элементы правильных многоугольников

Обозначения: n — число сторон, a — сторона, R — радиус описанной окружности, r — апофема (радиус вписанной окружности).

n	$\frac{S}{a^2}$	$\frac{S}{R^2}$	$\frac{S}{r^2}$	$\frac{R}{a}$	$\frac{R}{r}$	$\frac{a}{R}$	$\frac{a}{r}$	$\frac{r}{R}$	$\frac{r}{a}$
3	0,4330	1,2990	5,1962	0,5774	2,0000	1,7321	3,4641	0 5000	0,2887
4	1,0000	2,0000	4,0000	0,7071	1,4142	1,4142	2,0000	0,7071	0,5000
5	1,7205	2,3776	3,6327	0,8507	1,2361	1,1756	1,4531	0,8090	0,6882
6	2,5981	2,5981	3,4641	1,0000	1,1547	1,0000	1,1547	0,8660	0,8660
7	3,6339	2,7364	3,3710	1,1524	1,1099	0,8678	0,9631	0,9010	1,0383
8	4,8284	2,8284	3,3137	1,3066	1,0824	0,7654	0,8284	0,9239	1,2071
9	6,1818	2,8925	3,2757	1,4619	1,0642	0,6840	0,7279	0,9397	1,3737
10	7,6942	2,9389	3,2492	1,6180	1,0515	0,6180	0,6498	0,9511	1,5388
12	11,196	3,0000	3,2154	1,9319	1,0353	0,5176	0,5359	0,9659	1,8660
15	17,642	3,0505	3,1883	2,4049	1,0223	0,4158	0,4251	0,9781	2,3523
16	20,109	3,0615	3,1826	2,5629	1,0196	0,3902	0,3978	0,9808	2,5137
20	31,569	3,0902	3,1677	3,1962	1,0125	0,3129	0,3168	0,9877	3,1569
24	45,575	3,1058	3,1597	3,8306	1,0086	0,2611	0,2633	0,9914	3,7979
32	81,225	3,1214	3,1517	5,1012	1,0048	0,1960	0,1970	0,9952	5,0766
48	183,08	3,1326	3,1461	7,6449	1,0021	0,1308	0,1311	0,9979	7,6285
64	325,69	3,1366	3,1441	10,190	1,0012	0,0981	0,0983	0,9988	10,178

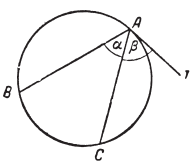


Рис. 94.

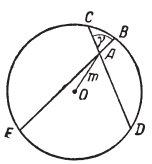


Рис. 95.

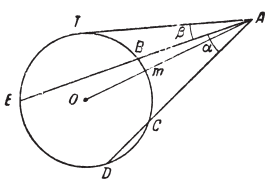


Рис. 96.

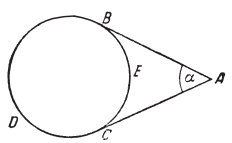


Рис. 97.

Окружность. Радиус r, диаметр d. *Углы, связанные с окружностью* * (рис. 94): вписанный угол $\alpha = {}^1/_2\overset{\frown}{BC}$, угол между хордой и касательной $\beta = {}^1/_2\overset{\frown}{AC}$ между хордами (рис. 95) $\gamma = {}^1/_2\,(\overset{\frown}{CB} + \overset{\frown}{ED})$, между

* В этих равенствах фигурирует не длина дуг, а их угловая мера, совпадающая с мерой соответствующего центрального угла.

секущими (рис. 96) $\alpha = {}^1/_2\,(\overset{\frown}{DE} - \overset{\frown}{BC})$, между касательной и секущей $\beta = {}^1/_2\,(\overset{\frown}{TE} - \overset{\frown}{TB})$, между касательными (рис. 97) $\alpha = {}^1/_2\,(\overset{\frown}{BDC} - \overset{\frown}{BEC})$.

Пересекающиеся хорды (рис. 95): $AC \cdot AD = AB \cdot AE = r^2 - m^2$.

Секущие (рис. 96): $AB \cdot AE = AC \cdot AD = AT^2 = m^2 - r^2$.

Длина окружности C *и площадь круга* S (r — радиус, d — диаметр)

$$\pi = \frac{C}{d} = 3{,}141\ 592\ 653\ 589\ 793\ \ldots$$

$$C = 2\pi r \approx 6{,}283\,r,\quad C = \pi d \approx 3{,}142\,d,\quad C = 2\sqrt{\pi S} \approx 3{,}545\,\sqrt{S},$$

$$S = \pi r^2 \approx 3{,}142\,r^2,\quad S = \frac{\pi d^2}{4} \approx 0{,}785\,d^2,\quad S = \frac{Cd}{4} = 0{,}25Cd,$$

$$r = \frac{C}{2\pi} \approx 0{,}159\,C,\ d = 2\sqrt{\frac{S}{\pi}} \approx 1{,}128\sqrt{S};$$

см. также таблицу на стр. 62 — 65.

Сегмент и сектор (рис. 98). r — радиус, l — длина дуги, a — хорда, α — центральный угол (в градусах), h — стрела сегмента.

$$a = 2\sqrt{2hr - h^2} = 2r\sin\frac{\alpha}{2};$$

$$h = r - \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} = r\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4};\qquad l = \frac{2\pi r\alpha}{360} \approx 0{,}01745r\alpha.$$

Приближенно:

1) $l = \dfrac{8b - a}{3}$

или

2) $l = \sqrt{a^2 + \dfrac{16}{3}h^2}$.

Площадь сектора

$$S = \frac{\pi r^2\alpha}{360} \approx 0{,}00873r^2\alpha.$$

Площадь сегмента

$$S_1 = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right) = \frac{1}{2}\,[lr - a\,(r - h)].$$

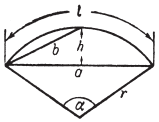


Рис. 98.

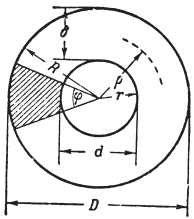


Рис. 99.

Приближенно $S_1 = \dfrac{h}{15}\,(6a + 8b)$. Таблицы для S_1, l, h и a см. стр. 66—70.

Круговое кольцо (рис. 99). $D = 2R$ — внешний диаметр, $d = 2r$ — внутренний диаметр, $\rho = \dfrac{(R+r)}{2}$ — средний радиус, $\delta = R - r$ — толщина кольца.

Площадь кольца $S = \pi\,(R^2 - r^2) = \dfrac{\pi}{4}\,(D^2 - d^2) = 2\pi\rho\delta$.

Площадь части кольца (заштрихована на рис. 99) с центральным углом φ (в градусах):

$$S = \frac{\varphi\pi}{360}\,(R^2 - r^2) = \frac{\varphi\pi}{90}\,(D^2 - d^2) = \frac{\varphi\pi}{180}\,\rho\delta.$$

Б. Стереометрия

2. *Прямые и плоскости в пространстве*

Две прямые, лежащие в одной плоскости, имеют или одну общую точку или ни одной. В последнем случае они *параллельны*. Если через две прямые нельзя провести плоскость, они называются *скрещивающимися*.

Угол между скрещивающимися прямыми измеряется углом между параллельными им прямыми, выходящими из одной точки (рис. 100). Расстояние между скрещивающимися прямыми определяется по отрезку прямой, перпендикулярной к обеим заданным прямым.

Две плоскости или пересекаются по прямой или не имеют общих точек. В последнем случае они *параллельны*. Если две плоскости перпендикулярны к одной и той же прямой, или если на каждой из них имеется по две пересекающихся прямых, соответственно параллельных между собой, то эти плоскости параллельны

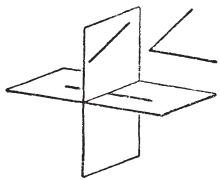


Рис. 100

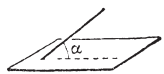


Рис. 101

Прямая и плоскость. Прямая может лежать целиком в данной плоскости, иметь с ней одну общую точку или не иметь ни одной. В последнем случае прямая *параллельна* плоскости. Угол между прямой и плоскостью измеряется углом между прямой и ее проекцией на плоскость (рис. 101). Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым на плоскости, то она перпендикулярна к любой прямой на плоскости (*перпендикулярна к плоскости*).

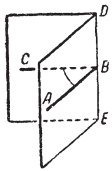


Рис. 102.

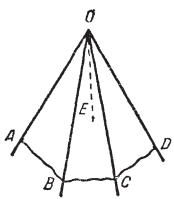


Рис. 103.

3. *Пространственные углы*

Двугранный угол — фигура, образованная двумя полуплоскостями, выходящими из одной прямой. Двугранный угол измеряется его *линейным углом ABC* (рис. 102), т. е. углом между перпендикулярами к *ребру DE* двугранного угла, восставленными в обеих плоскостях (*гранях*) из одной точки *B*.

Многогранный угол *OABCDE* (рис. 103 образуется несколькими плоскостями (*гранями*), имеющими общую точку (*вершину*) и пересекающимися последовательно по прямым *OA*, *OB*, ... (*ребрам*). Два ребра, принадлежащие одной грани, образуют *плоский угол* многогранного угла, а две соседние грани — двугранный угол. Многогранные углы *равны*, если они при наложении совпадают; для этого должны быть соответственно равны элементы (двугранные и плоские углы) много-

гранных углов. Если соответственно равные элементы многогранного угла расположены в обратном порядке, многогранные углы при наложении не совпадают; они в этом случае *симметричны*, т. е. могут быть приведены в положение, изображенное на рис. 104.

Выпуклый многогранный угол лежит целиком по одну сторону от каж ой его грани. *Сумма плоских углов* $AOB + BOC + \ldots + EOA$ (рис. 103) любого выпуклого многогранного угла меньше 360°.

Трехгранные углы равны если они имеют: 1) по равному двугранному углу, заключенному между двумя соответственно равными и одинаково расположенными плоскими углами, или 2) по равному плоскому углу, заключенному между двумя соответственно равными и одинаково расположенными двугранными углами, или 3) по три соответственно равных и одинаково расположенных плоских угла, или 4) по три соответственно равных и одинаково расположенных двугранных угла.

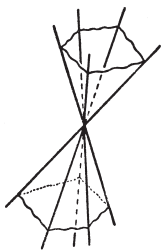


Рис. 104.

Рис. 105.

Телесный угол — часть пространства, ограниченная прямыми, проведенными из одной точки (вершины) ко всем точкам какой-либо замкнутой кривой (рис. 105). Он характеризует *угол зрения*, под которым из вершины видна данная кривая. Мерой телесного угла является площадь, вырезаемая телесным углом на сфере единичного радиуса с центром в вершине. Например, для конуса с углом при вершине 120° телесный угол будет равен π (см. формулы на стр. 177).

4. Многогранники

Обозначения: V — объем, S — полная поверхность, M — боковая поверхность, h — высота, F — площадь основания.

Многогранник — тело, ограниченное плоскостями.

Призма (рис. 106). Основания — равные многоугольники; боковые грани — параллелограмы. Призма — *прямая*, если ребра перпендикулярны к плоскости основания. Призма — *правильная*, если она прямая и основания ее — правильные многоугольники.

$M = pl$, где l — ребро, p — периметр сечения призмы плоскостью, перпендикулярной к ребру. $S = M + 2F$; $V = F \cdot h$.

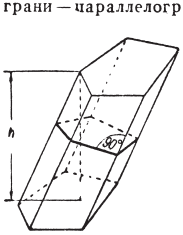


Рис. 106.

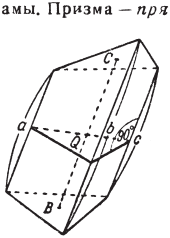


Рис. 107.

Для треугольной призмы, усеченной непараллельно основанию $V = \frac{1}{3}(a + b + c)\,Q$ (рис. 107), где a, b и c — длины параллельных ребер, а Q — площадь перпендикулярного сечения. Для n-гранной призмы, усеченной непараллельно основанию, $V = lQ$, где l — длина линии BC, соединяющей центры тяжести оснований, а Q — площадь сечения, перпендикулярного к этой линии.

Параллелепипед (рис. 108) — призма, у которой основания — параллелограмы. В параллелепипеде все четыре диагонали пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам. Параллелепипед *прямоугольный*, если он прямой и его основания — прямоугольники. В прямоугольном

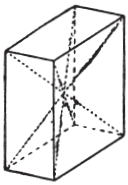


Рис. 108.

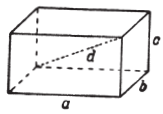


Рис. 109.

параллелепипеде (рис. 109) все диагонали равны. Если a, b и c — ребра прямоугольного параллелепипеда, а d — его диагональ, то $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$. $V = abc$, $S = 2(ab + bc + ca)$.

Куб — прямоугольный параллелепипед с равными ребрами:

$$a = b = c,\ d^2 = 3a^2,\ V = a^3,\ S = 6a^2.$$

Пирамида (рис. 110). В основании — какой-либо многоугольник, боковые грани — треугольники, сходящиеся в одной вершине. Пирамида называется n-угольной, если у нее n *боковых* граней (вместе с основанием $n + 1$ грань). $V = \frac{1}{3} Fh$.

Если пирамида пересечена плоскостью, параллельной основанию, то

$$\frac{SA_1}{A_1A} = \frac{SB_1}{B_1B} = \frac{SC_1}{C_1C} = \ldots = \frac{SO_1}{O_1O},$$

$$\frac{\text{площадь } ABCDEF}{\text{площадь } A_1B_1C_1D_1E_1F_1} = \left(\frac{SO}{SO_1}\right)^2$$

SO — *высота* пирамиды — перпендикуляр, опущенный из вершины на основание.

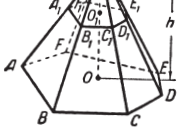


Рис. 110.

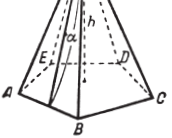


Рис. 111.

Пирамида *правильная* (рис. 111), если в основании — правильный многоугольник, а высота проходит через его центр.

Для правильной пирамиды $M = \frac{1}{2} p\alpha$ [p — периметр основания, α — *апофема* правильной пирамиды (высота какой-либо ее боковой грани)].

Тетраэдр — треугольная пирамида (рис. 112). Если $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $BC = p$, $CA = q$, $AB = r$, то *

$$V^2 = \frac{1}{288}\begin{vmatrix} 0 & r^2 & q^2 & a^2 & 1 \\ r^2 & 0 & p^2 & b^2 & 1 \\ q^2 & p^2 & 0 & c^2 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Усеченная пирамида (плоскость сечения параллельна основанию, рис. 113). Если F и f — площади оснований, h — высота (расстояние между основаниями), a и A — две соответственные стороны оснований, то

$$V = \frac{1}{3}h\left|F + f + \sqrt{F}f\right| = \frac{1}{3}hF\left[1 + \frac{a}{A} + \left(\frac{a}{A}\right)^2\right].$$

Для правильной усеченной пирамиды $M = \frac{P+p}{2}\alpha$, где P и p — периметры оснований, α — апофема.

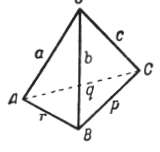


Рис. 112.

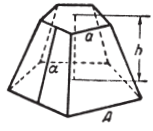


Рис. 113.

Обелиск. Основания — прямоугольники, расположенные в параллельных плоскостях; противоположные боковые грани одинаково наклонены к основанию, но не пересекаются в одной точке (рис. 114). Если a, b и a_1, b_1 — стороны основания, h — высота, то

$$V = \frac{h}{6}\left[(2a + a_1)\,b + (2a_1 + a)\,b_1\right] = \frac{h}{6}\left[ab + (a + a_1)(b + b_1) + a_1b_1\right].$$

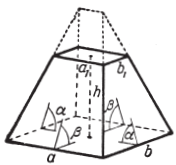


Рис. 114.

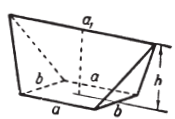


Рис. 115.

Клин. Основание — прямоугольник, боковые грани — равнобедренные треугольники и равнобедренные трапеции (рис. 115).

$$V = \frac{1}{6}(2a + a_1)\,bh.$$

---

* Об определителях см. стр. 146.

Правильные многогранники — у которых все грани равные правильные многоугольники и все многогранные углы равны.

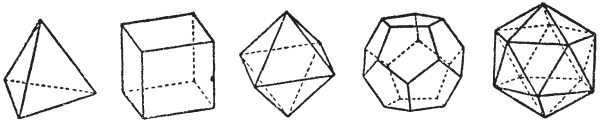


Рис. 116.

Существует пять правильных многогранников (рис. 116), данные о которых см. в таблице.

Элементы правильных многогранников (a — длина ребра).

Название	Число граней и их форма	Число ребер	Число вершин	Полная поверхность	Объем
Тетраэдр	4 треугольника	6	4	$1{,}7321 \cdot a^2$	$0{,}1179 \cdot a^3$
Куб	6 квадратов	12	8	$6 \cdot a^2$	a^3
Октаэдр	8 треугольников	12	6	$3{,}4641 \cdot a^2$	$0{,}4714 \cdot a^3$
Додекаэдр	12 пятиугольников	30	20	$20{,}6457 \cdot a^2$	$7{,}6631 \cdot a^3$
Икосаэдр	20 треугольников	30	12	$8{,}6603 \cdot a^2$	$2{,}1817 \cdot a^3$

Теорема Эйлера. Если e — число вершин многогранника, f — число граней и k — число ребер, то $e - k + f = 2$ (при условии, что многогранник выпуклый или может быть сделан выпуклым при помощи непрерывной деформации). *Примеры* — см. в таблице правильных многогранников.

5. *Круглые тела*

Обозначения: V — объем, S — полная поверхность, M — боковая поверхность, h — высота, F — площадь основания.

Рис. 117.

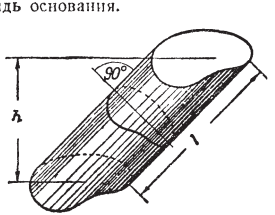


Рис. 118.

Цилиндрическая поверхность (рис. 117) образуется прямой линией (*образующей*), перемещающейся параллельно заданному направлению вдоль некоторой кривой (*направляющей*).

Цилиндр — тело, ограниченное цилиндрической поверхностью с замкнутой направляющей и двумя параллельными плоскостями, являющимися основаниями цилиндра. Для любого цилиндра (рис. 118·

(p — периметр основания, s — периметр сечения, перпендикулярного к образующей, Q — его площадь, l — длина образующей):

$$M = ph = sl;\ V = Fh = Ql.$$

Круглый прямой цилиндр имеет в основании круг, и его образующие перпендикулярны к плоскости основания (рис. 119); R — радиус основания;

$$M = 2\pi Rh;\quad S = 2\pi R(R + h);\quad V = \pi R^2 h.$$

Усеченный круглый цилиндр (рис. 120):

$$M = \pi R(h_1 + h_2),\ S = \pi R\left[h_1 + h_2 + R + \sqrt{R^2 + \left(\frac{h_2 - h_1}{2}\right)^2}\right];$$

$$V = \pi R^2 \frac{h_1 + h_2}{2}.$$

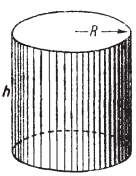


Рис. 119.

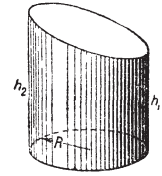


Рис. 120.

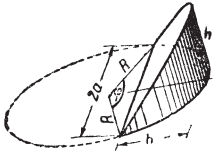


Рис. 121

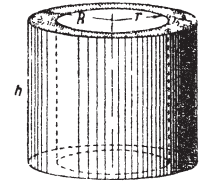


Рис. 122.

Отрезок цилиндра (обозначения см. рис. 121; $\alpha = \frac{\varphi}{2}$ в радианах):

$$V = \frac{h}{3b}\left[a(3R^2 - a^2) + 3R^2(b - R)\alpha\right] = \frac{hR^3}{b}\left(\sin\alpha - \frac{\sin^3\alpha}{3} - \alpha\cos\alpha\right).$$

$$M = \frac{2Rh}{b}\left[(b - R)\alpha + a\right]$$

[формулы остаются в силе для случая $b > R$, $\varphi > \pi$].

Цилиндрическая труба (рис. 122). R и r — внешний и внутренний радиусы; $\delta = R - r$, $\rho = \frac{R + r}{2}$ (средний радиус):

$$V = \pi h(R^2 - r^2) = \pi h\delta(2R - \delta) = \pi h\delta(2r + \delta) = 2\pi h\delta\rho.$$

Коническая поверхность (рис. 123) образуется прямой линией (*образующей*), перемещающейся вдоль кривой линии (*направляющей*) и имеющей неподвижную точку (*вершину*).

Рис. 123.

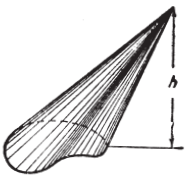


Рис. 124.

Конус (рис. 124) ограничен конической поверхностью с замкнутой направляющей и плоскостью, образующей основание. Для любого конуса $V = \frac{1}{3} hF$.

Круглый прямой конус (рис. 125) имеет в основании окружность, и его высота проходит через центр окружности основания (l — длина образующей, R — радиус основания):

$$M = \pi Rl = \pi R\sqrt{R^2 + h^2}; \quad S = \pi R\,(R + l); \quad V = \frac{1}{3}\,\pi R^2 h.$$

Для *усеченного прямого конуса* (рис. 126):

$$l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}; \; M = \pi l\,(R + r); \; V = \frac{\pi h}{3}\,(R^2 + r^2 + Rr); \; H = h + \frac{hr}{R - r}.$$

Конические сечения — см. стр. 213.

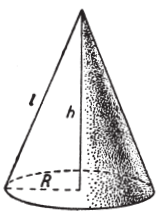


Рис. 125.

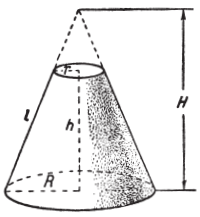


Рис. 126.

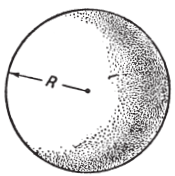


Рис. 127.

Сфера — поверхность шара. R — радиус шара, $D = 2R$ — диаметр шара (рис. 127). Всякое сечение сферы плоскостью есть круг. *Большой круг* — круг радиуса R, получающийся от сечения сферы плоскостью, проходящей через ее центр. Через всякие две точки сферы (не являющиеся противоположными концами диаметра) всегда можно провести

большой круг и только один. Меньшая дуга этого большого круга является кратчайшим расстоянием на сфере между данными точками. О геометрии на сфере см. стр. 190—191.

Поверхность сферы и объем шара:

$$S = 4\pi R^2 \approx 12{,}57R^2, \quad S = \pi D^2 \approx 3{,}142D^2, \quad S = \sqrt[3]{36\pi V^2} \approx 4{,}836\sqrt[3]{V^2};$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \approx 4{,}189R^3, \quad V = \frac{\pi D^3}{6} \approx 0{,}5236D^3, \quad V = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{S^3}{\pi}} \approx 0{,}09403\sqrt{S^3};$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}} \approx 0{,}2821\sqrt{S}; \qquad R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} \approx 0{,}6204\sqrt[3]{V}.$$

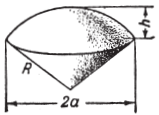


Рис. 128.

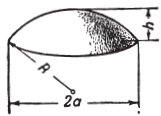


Рис. 129.

Шаровой сектор (рис. 128).

$$S = \pi R\,(2h + a); \quad V = \frac{2\pi R^2 h}{3}.$$

Шаровой сегмент (рис. 129).

$$a^2 = h\,(2R - h); \quad M = 2\pi Rh = \pi\,(a^2 + h^2); \quad S = \pi\,(2Rh + a^2) = \pi\,(h^2 + 2a^2)$$

$$V = \frac{1}{6}\pi h\,(3a^2 + h^2) = \frac{1}{3}\pi h^2\,(3R - h).$$

Шаровой слой (рис. 130).

$$R^2 = a^2 + \left(\frac{a^2 - b^2 - h^2}{2h}\right)^2; \quad M = 2\pi Rh;$$

$$S = \pi\,(2Rh + a^2 + b^2); \quad V = \frac{1}{6}\pi h\,(3a^2 + 3b^2 + h^2).$$

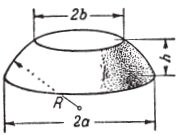


Рис. 130.

Рис. 131.

Если V_1 — объем усеченного конуса, вписанного в шаровой слой (рис. 131), и l — его образующая, то $V - V_1 = \frac{1}{6}\pi h l^2$.

Т о р (рис. 132) — поверхность, образованная вращением окружности около оси, лежащей в плоскости этой окружности и не пересекающей ее.

$$S = 4\pi^2 Rr \approx 39{,}48Rr, \qquad S = \pi^2 Dd \approx 9{,}870Dd,$$

$$V = 2\pi^2 Rr^2 \approx 19{,}74Rr^2, \qquad V = {}^1/_4\pi^2 Dd^2 \approx 2{,}467\,Dd^2.$$

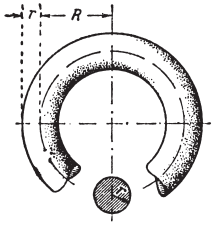


Рис. 132.

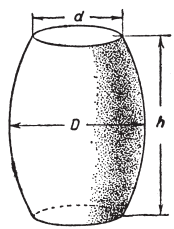


Рис. 133.

Б о ч к а (рис. 133). Для круговой бочки (образующая — дуга окружности) приближенно

$$V = 0{,}262h\,(2D^2 + d^2) \text{ или } V = 0{,}0873h\,(2D + d)^2.$$

Для параболической бочки:

$$V = \frac{\pi h}{15}\left(2D^2 + Dd + \frac{3}{4}\,d^2\right) = 0{,}05236h\,(8D^2 + 4Dd + 3d^2).$$

IV. ТРИГОНОМЕТРИЯ

А. Прямолинейная тригонометрия

1. Тригонометрические функции

Радианное измерение углов. Наряду с практическим ***градусным*** измерением углов в теоретических вопросах применяется ***радианное*** измерение: величина угла α — центрального для произвольной окружности — измеряется отношением длины дуги l, на которую этот угол опирается, к длине радиуса r этой окружности: $\alpha = \frac{l}{r}$.

При этом измерении за единицу принимается *радиан* — угол, являющийся центральным для дуги, длина которой равна радиусу окружности. 1 радиан равен 57°17′44″,8 или 57°,2958; 1° = 0,017453 радиана. Переход от одного измерения к другому производится по формулам.

$$\alpha^\circ = \frac{180}{\pi}\,\alpha \text{ (радианов)}\ ^*, \quad \alpha \text{ (радианов)} = \frac{\pi}{180}\,\alpha^\circ.$$

В частности, $360^\circ = 2\pi$, $180^\circ = \pi$, $90^\circ = \frac{\pi}{2}$, $270^\circ = \frac{3\pi}{2}$ и т. д. Таблицы перевода градусов в радианы см. стр. 71.

Определения. *Тригонометрические функции* угла α определяются при помощи тригонометрического круга ** (радиус $R = 1$), а также из прямоугольного тр-ка (для острых углов) (рис. 134, *а* и *б*).

синус: $\sin\alpha = BC = \frac{a}{c}$,

косинус: $\cos\alpha = OB = \frac{b}{c}$,

тангенс: $\operatorname{tg}\alpha = AD = \frac{a}{b}$,

котангенс: $\operatorname{ctg}\alpha = EF = \frac{b}{a}$,

секанс: $\sec\alpha = OD = \frac{c}{b}$,

косеканс: $\operatorname{csc}\alpha = OF = \frac{c}{a}$.

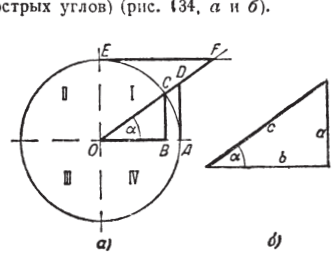


Рис. 134.

---

* Радиан специального обозначения не имеет; угол, равный α радианов, обозначается просто «α».

** Угол α измеряется от *неподвижного* радиуса OA до подвижного радиуса OC против часовой стрелки (положительное напр. угла)

Знаки. Функциям приписывается определенный знак в зависимости от того, в какой четверти тригонометрического круга (рис. 134, *а*) лежит *подвижный* радиус OC, по следующей таблице:

Четверть	Величина угла	sin	cos	tg	ctg	sc	csc
I	от 0° до 90°	+	+	+	+	+	+
II	от 90° до 180°	+	−	−	−	−	+
III	от 180° до 270°	−	−	+	+	−	−
IV	от 270° до 360°	−	+	−	−	+	−

Пределы изменения

синус и косинус: от -1 до $+1$,
тангенс и котангенс: от $-\infty$ до $+\infty$,
секанс и косеканс: от $-\infty$ до -1 и от $+1$ до $+\infty$.

Значения функций для углов, кратных 30°, 45°, приведены в таблице на стр. 181.

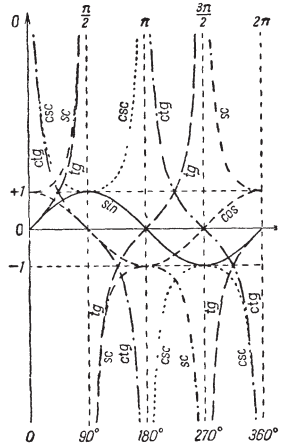


Рис. 135.

Характер изменения тригонометрических функций при увеличении угла от 0° до 360° определяется графиками, изображенными на рис. 135 *.

Значения тригонометрических функций *любого* угла находятся по следующим правилам:

1) Если угол больше 360°, то функции приводятся к функциям угла между 0° и 360° (а тангенс и котангенс — к углу между 0° и 180°) по формулам (n — целое число):

$$\sin(360°\cdot n+\alpha)=\sin\alpha,$$
$$\cos(360°\cdot n+\alpha)=\cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(180°\cdot n+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha,$$
$$\operatorname{ctg}(180°\cdot n+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha.$$

2) Если угол отрицательный, то функция приводится к функции положительного угла по формулам:

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,$$
$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha,$$
$$\operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

3) Если $90°<\alpha<360°$, то функция приводится к функции острого угла по формулам приведения (стр. 182).

* График синуса является обыкновенной синусоидой, о более общих синусоидах см. стр. 96.

Значения тригонометрических функций для углов, кратных 30° и 45° $\left(\frac{\pi}{6}\text{ и }\frac{\pi}{4}\right)$

Функции	Углы; I четверть				Углы; II четверть				Углы; III четверть				Углы; IV четверть				
	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$1\frac{1}{6}\pi$	$1\frac{1}{4}\pi$	$1\frac{1}{3}\pi$	$1\frac{1}{2}\pi$	$1\frac{2}{3}\pi$	$1\frac{3}{4}\pi$	$1\frac{5}{6}\pi$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	−1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	−1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
ctg	$\mp\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	−1	$-\sqrt{3}$	$\mp\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	−1	$-\sqrt{3}$	$\mp\infty$
sec	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	$\pm\infty$	−2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	−1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	−2	$\mp\infty$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1
cosec	$\mp\infty$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	$\pm\infty$	−2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	−1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	−2	$\mp\infty$

Функции суммы и разности углов:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta, \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \quad \operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha};$$

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma) = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Функции кратных углов:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \qquad \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha; \qquad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha;$$

$$\sin 4\alpha = 8\cos^3\alpha\sin\alpha - 4\cos\alpha\sin\alpha,$$

$$\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}, \quad \operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}, \quad \operatorname{tg} 4\alpha = \frac{4\operatorname{tg}\alpha - 4\operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 6\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^4\alpha},$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}; \quad \operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}; \quad \operatorname{ctg} 4\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^4\alpha - 6\operatorname{ctg}^2\alpha + 1}{4\operatorname{ctg}^3\alpha - 4\operatorname{ctg}\alpha},$$

$\sin n\alpha$ и $\cos n\alpha$ для больших n удобно определять, пользуясь формулой Муавра для комплексных чисел (стр. 496) *:

$$\cos n\alpha + i\sin n\alpha = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos^n\alpha + in\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha -$$
$$- C_n^2\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha - iC_n^3\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + C_n^4\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha + \ldots,$$

откуда

$$\cos n\alpha = \cos^n\alpha - C_n^2\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha + C_n^4\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha - C_n^6\cos^{n-6}\alpha\sin^6\alpha + \ldots,$$

$$\sin n\alpha = n\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - C_n^3\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + C_n^5\cos^{n-5}\alpha\sin^5\alpha - \ldots,$$

Функции половинного угла **:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1/2(1 - \cos\alpha)}, \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1/2(1 + \cos\alpha)}, \quad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha}.$$

Сумма и разность функций:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad \operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad \operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \pm\frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos\alpha\sin\beta},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin\alpha\cos\beta}.$$

---

* C_n^m – биномиальные коэффициенты (см. стр. 163 – 164).

** См сноску ** на предыдущей странице.

Произведение функций:

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)],$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)],$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)],$$

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\frac{1}{4}[\sin(\alpha+\beta-\gamma)+\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\gamma+\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta+\gamma)],$$

$$\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma=\frac{1}{4}[\sin(\alpha+\beta-\gamma)-\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\gamma+\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta+\gamma)],$$

$$\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma=\frac{1}{4}[-\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta+\gamma)],$$

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=\frac{1}{4}[\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta+\gamma)].$$

Степени функций:

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha),\qquad \sin^3\alpha=\frac{1}{4}(3\sin\alpha-\sin 3\alpha),$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha),\qquad \cos^3\alpha=\frac{1}{4}(\cos 3\alpha+3\cos\alpha),$$

$$\sin^4\alpha=\frac{1}{8}(\cos 4\alpha-4\cos 2\alpha+3),$$

$$\cos^4\alpha=\frac{1}{8}(\cos 4\alpha+4\cos 2\alpha+3).$$

Для вычисления $\sin^n\alpha$ и $\cos^n\alpha$ при больших n можно последовательно использовать формулы для $\cos n\alpha$ и $\sin n\alpha$ на стр. 183.

3. Синусоидальные величины

Определения. Во многих вопросах механики и физики рассматриваются величины, зависящие от времени t и выражающиеся формулой

$$u=A\sin(\omega t+\varphi); \qquad (*)$$

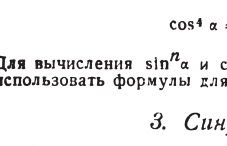


Рис. 136.

такие величины называются *синусоидальными*, их изменение в зависимости от времени называется *гармоническим колебанием*. Графиком функции (*) является *общая синусоида* (рис. 136), отличающаяся от обыкновенной синусоиды ($y=\sin x$) следующим: 1) ее *амплитуда* (размах), т. е. наибольшее отклонение от оси t, равна A, 2) ее *период* T *(«длина волны»)* равен $\frac{2\pi}{\omega}$ (ω называется *частотой* колебания)*, 3) ее *«начальная фаза»* — угол φ.

* В теории колебаний эта величина обычно называется *циклической или круговой частотой.*

Величину (*) можно представить в форме

$$u = a \sin \omega t + b \cos \omega t, \qquad (**)$$

причем $A = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$; величины a, b, A и φ могут быть представлены элементами прямоугольного треугольника (рис. 137).

Действия над синусоидальными величинами. Сумма двух синусоидальных величин с одной и той же частотой ω является также синусоидальной величиной с той же частотой:

$$A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = A \sin(\omega t + \varphi),$$

причем

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2};$$

линейная комбинация нескольких синусоидальных величин с одной и той же частотой есть синусоидальная величина с той же частотой:

$$\sum c_i A_i \sin(\omega t + \varphi_i) = A \sin(\omega t + \varphi);$$

нахождение A и φ производится графически на векторной диаграмме.

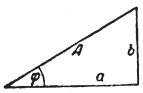


Рис. 137.

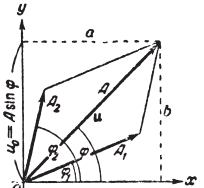


Рис. 138.

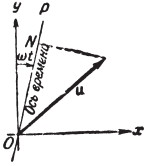


Рис. 139.

Векторная диаграмма синусоидальных величин. Синусоидальную величину (*) или (**) удобно изображать на плоскости в виде радиуса-вектора $\mathbf{u}$ с полярными координатами $\rho = A$, φ и декартовыми $x = a$, $y = b$ (см. стр. 198 – 199); сумма двух синусоидальных величин изображается суммой векторов, изображающих отдельные слагаемые (рис. 138), а линейная комбинация нескольких синусоидальных величин – соответствующей линейной комбинацией векторов. Такое изображение синусоидальных величин обычно называется *векторной диаграммой*.

На векторной диаграмме величину u, соответствующую данному значению t, получают следующим образом.

Через начало O (рис. 139) проводят «*ось времени*» – ось OP, вращающуюся вокруг O в направлении часовой стрелки с постоянной угловой скоростью ω; в начальный момент ($t = 0$) эта ось совпадает с осью Oy. Тогда проекция ON рассмотренного вектора $\mathbf{u}$ на ось времени равна для каждого момента t значению синусоидальной величины $u = A \sin(\omega t + \varphi)$ (при $t = 0$ $u_0 = A \sin \varphi$ есть проекция $\mathbf{u}$ на ось Oy, рис. 138).

4. Решение треугольников

Прямоугольный треугольник; a, b — катеты, c — гипотенуза; A, B — углы против сторон a и b. *Основные соотношения:* $a = c \sin A = c \cos B$, $a = b \operatorname{tg} A = b \operatorname{ctg} B$.

Дано	Формулы для нахождения остальных элементов		
c, A	$B = 90° - A$,	$a = c \sin A$,	$b = c \cos A$.
a, A	$B = 90° - A$,	$b = a \operatorname{ctg} A$,	$c = \dfrac{a}{\sin A}$,
a, c	$\sin A = \dfrac{a}{c}$,	$b = c \cos A$,	$B = 90° - A$,
a, b	$\operatorname{tg} A = \dfrac{a}{b}$,	$c = \dfrac{a}{\sin A}$,	$B = 90° - A$,

Косоугольный треугольник: a, b, c — стороны, A, B, C — противолежащие им углы, S — площадь, R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности, p — полупериметр $[p = {}^1/_2 (a + b + c)]$.

Основные соотношения.

1) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ («теорема синусов»),

2) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ («теорема косинусов»),

3) $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\operatorname{tg} {}^1/_2 (A + B)}{\operatorname{tg} {}^1/_2 (A - B)}$ («теорема тангенсов»),

4) $S = {}^1/_2 ab \sin C = 2R^2 \sin A \sin B \sin C = rp = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Дополнительные соотношения.

$$\operatorname{tg} A = \frac{a \sin B}{c - a \cos B},$$

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos [{}^1/_2 (A - B)]}{\cos [{}^1/_2 (A + B)]} = \frac{\cos [{}^1/_2 (A - B)]}{\sin {}^1/_2 C},$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin [{}^1/_2 (A - B)]}{\sin [{}^1/_2 (A + B)]} = \frac{\sin [{}^1/_2 (A - B)]}{\cos {}^1/_2 C}.$$

Дано	Формулы для нахождения остальных элементов
1) Сторона и 2 угла (a, A, B)	$C = 180° - A - B$, $\quad b = \dfrac{a \sin B}{\sin A}$, $\quad c = \dfrac{a \sin C}{\sin A}$, $\quad S = \dfrac{1}{2} ab \sin C$
2) 2 стороны и угол между ними (a, b, C)	$\operatorname{tg} \dfrac{A-B}{2} = \dfrac{a-b}{a+b} \operatorname{ctg} \dfrac{C}{2}$, $\quad \dfrac{A+B}{2} = 90° - {}^1/_2 C$. Получив $A + B$ и $A - B$, находят A и B, $c = \dfrac{a \sin C}{\sin A}$, $\quad S = \dfrac{1}{2} ab \sin C$
3) 2 стороны и угол против одной из них (a, b, A)	$\sin B = \dfrac{b \sin A}{a}$, если $a \geqslant b$, то $B < 90°$ и имеет лишь одно значение; если $a < b$, то: 1) B имеет два значения при $b \sin A < a$ ($B_2 = 180° - B_1$), 2) B имеет одно значение (90°) при $b \sin A = a$, 3) треугольник невозможен при $b \sin A > a$; $C = 180° - (A + B)$, $c = \dfrac{a \sin C}{\sin A}$, $\quad S = \dfrac{1}{2} ab \sin C$
4) 3 стороны (a, b, c)	$r = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$, $\operatorname{tg} \dfrac{A}{2} = \dfrac{r}{p-a}$, $\quad \operatorname{tg} \dfrac{B}{2} = \dfrac{r}{p-b}$, $\quad \operatorname{tg} \dfrac{C}{2} = \dfrac{r}{p-c}$, $S = rp = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Вычисление линий, связанных с треугольником.

Высота на сторону a: $h_a = b \sin C = c \sin B$.

Медиана на сторону a: $m_a = \dfrac{1}{2} \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos A}$,

Биссектриса угла A: $l_A = \dfrac{2bc \cos \dfrac{A}{2}}{b + c}$

Радиус описанной окружности: $R = \dfrac{a}{2 \sin A} = \dfrac{b}{2 \sin B} = \dfrac{c}{2 \sin C}$.

Радиус вписанной окружности:

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = p \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

5. Круговые (обратные тригонометрические) функции

Определения. *Круговыми* функциями от x (*«обратными тригонометрическими»*) называют величины y, определяемые равенствами:

$$\left.\begin{array}{ll} y = \operatorname{Arcsin} x \text{ (арксинус)}, & \text{если } x = \sin y, \\ y = \operatorname{Arccos} x \text{ (арккосинус)}, & \text{если } x = \cos y, \\ y = \operatorname{Arctg} x \text{ (арктангенс)}, & \text{если } x = \operatorname{tg} y, \\ y = \operatorname{Arcctg} x \text{ (арккотангенс)}, & \text{если } x = \operatorname{ctg} y, \end{array}\right\} \quad y \text{ измеряется в радианах.}$$

Примеры:

$\operatorname{Arcsin} 0 = 0$ или π или 2π, вообще $\operatorname{Arcsin} 0 = k\pi$.

$\operatorname{Arccos} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ или $-\frac{\pi}{3}$ или $\frac{\pi}{3} + 2\pi$, вообще $\operatorname{Arccos} \frac{1}{2} = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$,

$\operatorname{Arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ или $\frac{5\pi}{4}$, вообще $\operatorname{Arctg} 1 = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

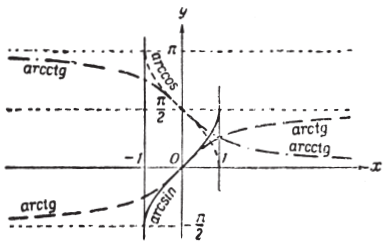


Рис. 140.

Главные значения. Круговые функции *многозначны*; и *главные значения* (обозначаются: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$) ограничены пределами:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant +\frac{\pi}{2};$$

$$0 \leqslant \arccos x \leqslant +\pi,$$

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < +\frac{\pi}{2},$$

$$0 < \operatorname{arcctg} x < +\pi.$$

Графики круговых функций см. стр. 99; графики их главных значений изображены на рис. 140.

Выражение одних круговых функций через другие *:

$$\arcsin x = -\arcsin(-x) = \frac{\pi}{2} - \arccos x = [\arccos\sqrt{1-x^2}] =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right],$$

$$\arccos x = \pi - \arccos(-x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = [\arcsin\sqrt{1-x^2}] =$$

$$= \left[\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right] = \operatorname{arcctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\operatorname{arctg} x = -\operatorname{arctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \left[\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right] = \left[\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}\right],$$

$$\operatorname{arcctg} x = \pi - \operatorname{arcctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x =$$

$$= \left[\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right] = \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \left[\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right].$$

Основные соотношения между круговыми функциями:

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$
$$[xy \leqslant 0 \text{ или } x^2+y^2 \leqslant 1]$$
$$= \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$
$$[x>0,\ y>0 \text{ и } x^2+y^2>1]$$
$$= -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$
$$[x<0,\ y<0 \text{ и } x^2+y^2>1],$$

$$\arcsin x - \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right)$$
$$[xy \geqslant 0 \text{ или } x^2+y^2 \leqslant 1]$$
$$= \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right)$$
$$[x>0,\ y<0 \text{ и } x^2+y^2>1]$$
$$= -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right)$$
$$[x<0,\ y>0 \text{ и } x^2+y^2>1],$$

$$\arccos x + \arccos y = \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) \qquad [x+y \geqslant 0]$$
$$= 2\pi - \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) \qquad [x+y<0],$$

$$\arccos x - \arccos y = -\arccos\left(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) \qquad [x \geqslant y]$$
$$= \arccos\left(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) \qquad [x<y],$$

---

* Эти формулы верны только для главных значений круговых функций, а формулы, взятые в квадратные скобки, — только для положительных значений x (так как пределы главных значений определены для различных функций по-разному).

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} \qquad [xy < 1]$$

$$= \pi + \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} \qquad [x > 0,\ xy > 1]$$

$$= -\pi + \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} \qquad [x < 0,\ xy > 1],$$

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy} \qquad [xy > -1]$$

$$= \pi + \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy} \qquad [x > 0,\ xy < -1]$$

$$= -\pi + \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy} \qquad [x < 0,\ xy < -1],$$

$$2 \arcsin x = \arcsin (2x\sqrt{1-x^2}) \qquad \left[|x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$= \pi - \arcsin (2x\sqrt{1-x^2}) \qquad \left[\frac{1}{\sqrt{2}} < x \leq 1\right]$$

$$= -\pi - \arcsin (2x\sqrt{1-x^2}) \qquad \left[-1 \leq x < -\frac{1}{\sqrt{2}}\right],$$

$$2 \arccos x = \arccos (2x^2 - 1) \qquad [0 \leq x \leq 1]$$

$$= 2\pi - \arccos (2x^2 - 1) \qquad [-1 \leq x < 0],$$

$$2 \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} \qquad [|x| < 1]$$

$$= \pi + \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} \qquad [x > 1]$$

$$= -\pi + \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} \qquad [x < -1],$$

$$\cos (n \arccos x) = 2^{n-1} T_n (x) \qquad (n \geq 1\ ^*),$$

где $T_n(x)$ определяется равенством

$$T_n (x) = \frac{(x + \sqrt{x^2-1})^n + (x - \sqrt{x^2-1})^n}{2^n}.$$

При n целом $T_n(x)$ является многочленом от x (*полином Чебышева*).

Б. Сферическая тригонометрия

6. Геометрия на сфере

Геодезические линии на сфере. Пересекая шар плоскостью, проходящей через ее центр, получаем на поверхности шара (*сфере*) так называемый *большой круг*, радиус которого равен радиусу шара. Через каждые две точки A и B на сфере (за исключением противоположных концов диаметра шара) можно провести единственный большой круг; меньшая его дуга AaB (рис. 141) является кратчайшей из всех линий (например, AbB) на сфере, соединяющих эти точки (так

* Формула верна и для n нецелого.

называемая *геодезическая линия* * на сфере), и играет на поверхности сферы ту же роль, что прямые на плоскости.

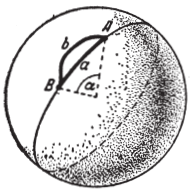


Рис. 141.

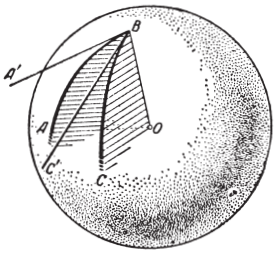


Рис. 142.

Измерение дуг и углов на сфере. Длина дуги большого круга, $\smile a$, с центральным углом α (в радианах) равна $R\alpha$, где R — радиус сферы; для одной и той же сферы удобно принять за единицу измерения дуг радиус R; тогда $\smile a = \alpha$. В дальнейших формулах принята эта единица измерения.

Угол ABC, образованный на сфере двумя дугами большого круга (рис. 142), измеряют линейным углом $A'BC'$ между касательными к соответствующим дугам в точке B или, что то же самое, двугранным углом, образованным плоскостями OBA и OBC.

Сферические треугольники. Три больших круга образуют на сфере несколько сферических треугольников. Из них мы рассматриваем тот, все стороны и углы которого меньше 180°. Стороны треугольника a, b и c измеряются плоскими углами трехгранного угла $OABC$ (рис. 143; O — центр сферы), углы треугольника A, B, C — двугранными углами этого же трехгранного угла.

Основное свойство сферического треугольника: сумма его углов $A+B+C$ всегда больше 180°. Разность $(A+B+C)-\pi=\delta$, выраженная в радианах, называется *сферическим избытком*, или *сферическим эксцессом* данного сферического треугольника.

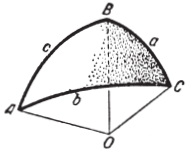


Рис. 143.

Рис. 144.

Площадь сферического треугольника $S=R^2\delta$, где R — радиус сферы, а δ — сферический избыток. *Площадь двуугольника*, образованного двумя дугами большого круга (рис. 144), $S=2R^2A$ ($\angle A$ выражен в радианах).

* См. стр. 264.

7. Решение сферических треугольников

Прямоугольные треугольники (a, b — катеты, c — гипотенуза, A, B — углы против сторон a, b — рис. 145).

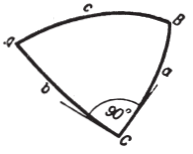


Рис. 145.

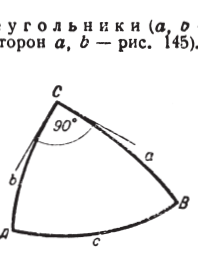


Рис. 146.

Основные соотношения:

1) $\sin a = \sin c \sin A$,
2) $\sin b = \sin c \sin B$,
3) $\operatorname{tg} a = \sin b \operatorname{tg} A$,
4) $\operatorname{tg} b = \sin a \operatorname{tg} B$,
5) $\cos c = \cos a \cos b$
6) $\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} c \cos B$,
7) $\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c \cos A$,
8) $\cos B = \cos b \sin A$,
9) $\cos A = \cos a \sin B$,
10) $\cos c = \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B$.

Дано	Номера формул для нахождения остальных элементов
Гипотенуза и угол: c, A	a (1), b (7), B (10)
Катет и противолежащий угол: a, A	b (3), c (1), B (9)
Катет и прилежащий угол: a, B	b (4), c (6), A (9)
Два катета: a, b	c (5), A (3), B (4)
Два угла: A, B	a (9), b (8), c (10)

Формулы 1 — 10 могут быть получены из следующего *правила Непера*: если расположить пять элементов прямоугольного треугольника (пропустив прямой угол) по кругу в том порядке, как они находятся в треугольнике и заменить при этом катеты a, b их дополнениями до 90° (рис. 146), то

1) косинус каждого элемента равен произведению котангенсов двух прилежащих к нему элементов,

2) косинус каждого элемента равен произведению синусов двух неприлежащих элементов.

Например: $\cos A = \operatorname{ctg}(90° - b) \operatorname{ctg} c$, $\cos(90° - a) = \sin c \sin A$.

Косоугольные треугольники (A, B, C — углы треугольника; a, b, c — противолежащие стороны, рис. 147).

Основные соотношения:

1) $\dfrac{\sin a}{\sin A} = \dfrac{\sin b}{\sin B} = \dfrac{\sin c}{\sin C}$

(«теорема синусов»),

2) $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$,

3) $\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$

(2, 3 — «теоремы косинусов»),

4) $\sin a \operatorname{ctg} b = \operatorname{ctg} B \sin C + \cos a \cos C$,

5) $\sin A \operatorname{ctg} B = \operatorname{ctg} b \sin c - \cos A \cos c$.

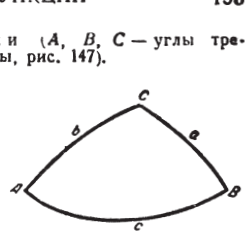


Рис. 147.

Дано	Номера формул для отыскания остальных элементов
Три стороны: a, b, c	A (2), B и C (1)
Три угла: A, B, C	a (3), b и c (1)
Две стороны и угол между ними: a, b, C	B (4), A и c (1)
Два угла и сторона между ними: A, B, c	b (5), a и C (1)
Две стороны и угол против одной из них: a, b, B	A (1), c (5), C (1)
Два угла и сторона против одного из них: A, B, b	a (1), C (4), c (1)

В. Гиперболическая тригонометрия *

8. Гиперболические функции

Определения гиперболических функций.

Гиперболический синус (сокращенно обозначается sh), *гиперболический косинус* (или ch) и *гиперболический тангенс* (или th) определяются формулами:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Геометрическое определение гиперболических функций, аналогичное определению тригонометрических функций (синус, косинус, тангенс), см. ниже (стр. 196—197).

* Под этим названием объединены элементарные сведения о гиперболических функциях, аналогичные сведениям о тригонометрических функциях.

Гиперболические котангенс, секанс и косеканс **определяются, как обратные величины:**

$$\operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

$$\operatorname{sch} x = \frac{1}{\operatorname{ch} x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{sh} x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}.$$

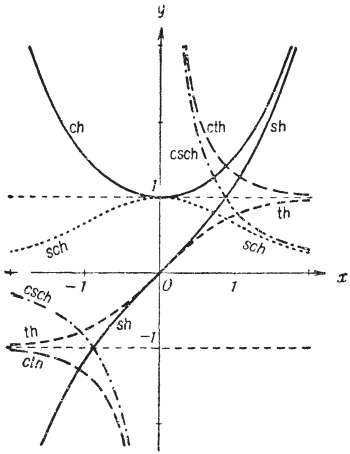


Рис. 148.

Характер изменения гиперболических функций **определяется** графиками, изображенными на рис. 148. См. также **текст на стр. 100.**

Таблицы гиперболических функций см. на стр. 52—55.

9. *Основные формулы гиперболической тригонометрии*

Для гиперболических функций имеют место формулы, аналогичные формулам для тригонометрических функций (стр. 182—183)*.

Функции одного аргумента:

$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, $\operatorname{sch}^2 x + \operatorname{th}^2 x = 1$, $\operatorname{cth}^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1$, $\operatorname{th} x \cdot \operatorname{cth} x = 1$,

$$\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{th} x, \qquad \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \operatorname{cth} x.$$

* Эти формулы могут быть получены из соответствующих формул для тригонометрических функций посредством простого правила, см. ниже, стр. 195.

Выражение одной функции через другую (того же аргумента):

$$\operatorname{sh} x = \sqrt{\operatorname{h}^2 x - 1} = \frac{\operatorname{th} x}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cth}^2 x - 1}} = \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sch}^2 x}}{\operatorname{sch} x} = \frac{1}{\operatorname{cseh} x},$$

$$\operatorname{ch} x = \sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}} = \frac{\operatorname{cth} x}{\sqrt{\operatorname{cth}^2 x - 1}} = \frac{1}{\operatorname{sch} x} = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{csch}^2 x}}{\operatorname{csch} x},$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1}} = \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}}{\operatorname{ch} x} = \frac{1}{\operatorname{cth} x} = \sqrt{1 - \operatorname{sch}^2 x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{csch}^2 x}},$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1}}{\operatorname{sh} x} = \frac{\operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}} = \frac{1}{\operatorname{th} x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sch}^2 x}} = \sqrt{\operatorname{csch}^2 x + 1}.$$

Функции суммы и разности двух аргументов:

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y, \qquad \operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}, \qquad \operatorname{cth}(x \pm y) = \frac{1 \pm \operatorname{cth} x \operatorname{cth} y}{\operatorname{cth} x \pm \operatorname{cth} y}.$$

Функции двойного аргумента:

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x, \qquad \operatorname{th} 2x = 2 \operatorname{th} x : (1 + \operatorname{th}^2 x),$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x, \qquad \operatorname{cth} 2x = (1 + \operatorname{cth}^2 x) : 2 \operatorname{cth} x.$$

Формула Муавра: $(\operatorname{ch} x \pm \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{ch} nx \pm \operatorname{sh} nx$ (ср. стр. 183).

Функции половинного аргумента:

$$\operatorname{sh} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{1/2 (\operatorname{ch} x - 1)}\,^*, \qquad \operatorname{th} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + 1},$$

$$\operatorname{ch} \frac{x}{2} = \sqrt{1/2 (\operatorname{ch} x + 1)}, \qquad \operatorname{cth} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1} = \frac{\operatorname{ch} x + 1}{\operatorname{sh} x}.$$

Сумма и разность функций:

$$\operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} 1/2 (x \pm y) \operatorname{ch} 1/2 (x \mp y),$$

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} 1/2 (x + y) \operatorname{ch} 1/2 (x - y), \qquad \operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y = \frac{\operatorname{sh}(x \pm y)}{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y},$$

$$\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} 1/2 (x + y) \operatorname{sh} 1/2 (x - y).$$

Связь между гиперболическими и тригонометрическими функциями**

$$\sin z = -i \operatorname{sh} iz, \qquad \cos z = \operatorname{ch} iz, \qquad \operatorname{tg} z = -i \operatorname{th} iz, \qquad \operatorname{ctg} z = i \operatorname{cth} iz,$$

$$\operatorname{sh} z = -i \sin iz, \qquad \operatorname{ch} z = \cos iz, \qquad \operatorname{th} z = -i \operatorname{tg} iz, \qquad \operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg} iz;$$

каждая из формул, связывающая между собой гиперболические функции от x или от ax (но не от $ax + b$), может быть получена из соответствующей формулы, связывающей тригонометрические функции от α (стр. 182–183) путем замены $\sin \alpha$ через $i \operatorname{sh} x$ и $\cos \alpha$ через $\operatorname{ch} x$. *Например:* $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, $\operatorname{ch}^2 x + i^2 \operatorname{sh}^2 x = 1$ или $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$; $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, $i \operatorname{sh} 2x = 2i \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$ или $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$ и т. п.

---

* Знак «+» при $x > 0$ и «−» при $x < 0$.

** О функциях комплексного переменного см. стр. 499.

10. Обратные гиперболические функции

Определения. *Обратными гиперболическими функциями («ареа-функциями»)* x называются величины, определяемые равенствами

$y = \operatorname{Arsh} x$ (*ареа-синус*), если $x = \operatorname{sh} y$,
$y = \operatorname{Arch} x$ (*ареа-косинус*), если $x = \operatorname{ch} y$,
$y = \operatorname{Arth} x$ (*ареа-тангенс*), если $x = \operatorname{th} y$,
$y = \operatorname{Arcth} x$ (*ареа-котангенс*), если $x = \operatorname{cth} y$.

Названия происходят от слова ареа (площадь), так как ареа-функции могут быть представлены площадью гиперболического сектора (см. ниже).

Выражения через логарифмы. Согласно формулам на стр. 193—194 имеем следующие выражения ареа-функций через логарифмы:

$$\operatorname{Arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \qquad \operatorname{Arth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \quad (|x|<1),$$

$$\operatorname{Arch} x = \pm\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \quad (x \geqslant 1), \qquad \operatorname{Arcth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} \quad (|x|>1).$$

Графики ареа-фувкций см. стр. 101.

Выражения одних функций через другие:

$$\operatorname{Arsh} x = \pm\operatorname{Arch}\sqrt{x^2+1}\,^{*} = \operatorname{Arth}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{Arcth}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x},$$

$$\operatorname{Arch} x = \pm\operatorname{Arsh}\sqrt{x^2-1} = \pm\operatorname{Arth}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \pm\operatorname{Arcth}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}},$$

$$\operatorname{Arth} x = \operatorname{Arsh}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \pm\operatorname{Arch}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,^{*} = \operatorname{Arcth}\frac{1}{x},$$

$$\operatorname{Arcth} x = \operatorname{Arsh}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \pm\operatorname{Arch}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,^{*} = \operatorname{Arth}\frac{1}{x}.$$

Некоторые соотношения между обратными гиперболическими функциями:

$$\operatorname{Arsh} x \pm \operatorname{Arsh} y = \operatorname{Arsh}\left(x\sqrt{1+y^2} \pm y\sqrt{1+x^2}\right),$$

$$\operatorname{Arch} x \pm \operatorname{Arch} y = \operatorname{Arch}\left(xy \pm \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}\right),$$

$$\operatorname{Arth} x \pm \operatorname{Arth} y = \operatorname{Arth}\frac{x \pm y}{1 \pm xy}.$$

11. Геометрическое определение гиперболических функций

В тригонометрическом круге (стр 179) функции $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ определялись как длины отрезков BC, OB AD (при $R = 1$), а аргумент α был центральным углом AOC. За аргумент можно было принять величину x, равную площади (заштрихованной на рис. 149) сектора COK с центральным углом равным 2α, так как $x = \frac{1}{2}R^2 \cdot 2\alpha = \alpha$ [$R = 1$, α измеряется в радианах]. Таким образом: $\sin x = BC$, $\cos x = OB$, $\operatorname{tg} x = AD$.

* Знак «+» при $x > 0$ и «—» при $x < 0$.

Рассматривая аналогичные функции площади не в круге, уравнение которого $X^2+Y^2=1$, а в равнобочной гиперболе с уравнением $X^2-Y^2=1$, (рассматриваем только ее правую ветвь), и, обозначая через x площадь аналогичного сектора COK (заштрихованного на рис. 150), определяем гиперболические функции: $\operatorname{sh} x = BC$; $\operatorname{ch} x = OB$; $\operatorname{th} x = AD$.

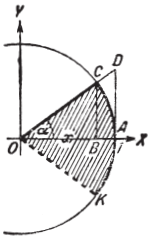


Рис. 149.

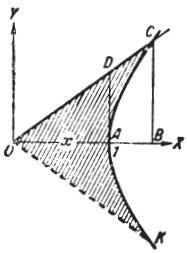


Рис. 150.

Вычисляя методами интегрального исчисления площадь x *, имеем ее выражения через BC, OB, AD:

$$x = \ln(BC + \sqrt{BC^2+1}) = \ln(OB + \sqrt{OB^2-1}) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+AD}{1-AD},$$

откуда получаем следующие выражения гиперболических функций через показательные (их и принимают за определения гиперболических функций):

$$BC = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x, \quad OB = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x, \quad AD = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \operatorname{th} x.$$

* См. стр. 394.

ОТДЕЛ ТРЕТИЙ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

I. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

А. Геометрия на плоскости

1. Основные понятия и формулы

К о о р д и н а т ы. Положение любой точки P на плоскости может быть определено при помощи той или иной *системы координат*. Числа, определяющие положение точки, называются ее *координатами*. Наиболее употребительные координатные системы — декартова прямоугольная и полярная.

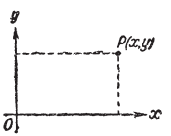
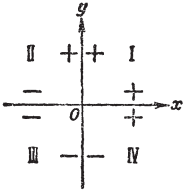


Рис. 151.

Декартовыми прямоугольными координатами точки P (рис. 151) называются взятые с определенным знаком расстояния (выраженные в определенном масштабе) этой точки от двух взаимно перпендикулярных прямых — осей координат. Точка пересечения осей O называется *началом* координат. Обычно горизонтальную ось называют *осью абсцисс* (*осью* Ox), вертикальную — *осью ординат* (*осью* Oy). На этих осях устанавливается положительное направление, обычно на оси Ox — вправо, на оси Oy — вверх. Координаты точки P считаются положительными или отрицательными в зависимости от того, на какую полуось



	I	II	III	IV
x	+	—	—	+
y	+	+	—	—

Рис. 152.

попадает проекция точки P (см. схему рис. 152). Координаты x и y называются соответственно *абсциссой* и *ординатой* точки P. Запись $P(a, b)$ означает, что точка P имеет абсциссу a и ординату b.

Полярными координатами точки P (рис. 153) называются *радиус-вектор* ρ — расстояние от точки P до заданной точки O (*полюса*) и *полярный угол* φ — угол между прямой OP и заданной прямой, проходящей через полюс (*полярной осью*). Полярный угол считается положительным при отсчете от полярной оси против часовой стрелки и отрицательным при отсчете в обратную сторону.

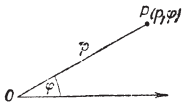


Рис. 153.

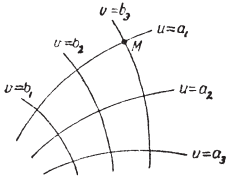


Рис. 154.

Криволинейные координаты. Более общая система координат — криволинейная, когда на плоскости задаются два семейства линий (*координатных линий*), зависящих каждое от одного параметра, причем через каждую точку проходит только по одной линии каждого семейства. Значения параметров, соответствующие этим кривым, являются *криволинейными координатами* точки. На рис. 154 точка M имеет криволинейные координаты $u=a_1$, $v=b_3$. В декартовой системе координат координатные линии — прямые, параллельные осям, в полярной — окружности с центром в полюсе и лучи, выходящие из полюса.

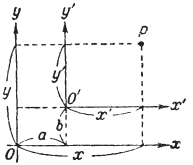


Рис. 155.

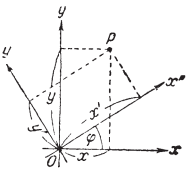


Рис. 156.

Преобразование координат. При переходе от одной системы к другой координаты меняются следующим образом.

Параллельный перенос осей декартовых координат (рис. 155) (x, y — старые координаты, x', y' — новые, a, b — координаты нового начала O' в старой системе координат):

$$x = x' + a, \qquad y = y' + b,$$
$$x' = x - a, \qquad y' = y - b.$$

Поворот осей на угол φ* (см. рис. 156):

$$x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi, \qquad y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi,$$
$$x' = x \cos\varphi + y \sin\varphi, \qquad y' = -x \sin\varphi + y \cos\varphi.$$

* Угол φ считается положительным, если поворот производится против часовой стрелки.

В общем случае преобразование может быть разбито на параллельный перенос и поворот осей.

Переход от декартовых координат к полярным и обратно выполняется по следующим формулам, если принять начало за полюс, а ось абсцисс за полярную ось (рис. 157)

$$x = \rho \cos \varphi, \qquad y = \rho \sin \varphi;$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \varphi = \operatorname{Arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{Arcsin} \frac{y}{\rho}.$$

Расстояние между двумя точками $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$ (рис. 158): $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Если даны полярные координаты: $P_1(\rho_1, \varphi_1)$ и $P_2(\rho_2, \varphi_2)$ (рис. 159), то $d = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$.

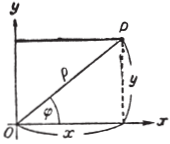


Рис. 157.

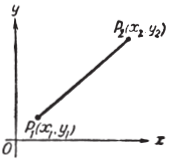


Рис. 158.

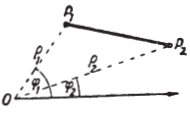


Рис. 159.

Деление отрезка в данном отношении. Координаты точки P, для которой $\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{m}{n} = \lambda$ (рис. 160), определяются по формулам:

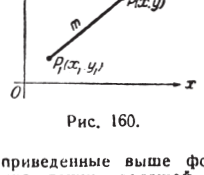


Рис. 160.

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{n + m} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda};$$

$$y = \frac{ny_1 + my_2}{n + m} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Для *середины* отрезка P_1P_2: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$. Если отрезкам P_1P и PP_2 приписывать положительный или отрицательный знак, в зависимости от того, совпадает их направление с направлением P_1P_2 или нет, то приведенные выше формулы могут служить при $\lambda < 0$ для нахождения точки, делящей отрезок P_1P_2 в данном отношении *внешним образом*. Например, для точки P такой, что P_2 является серединой отрезка P_1P, $\lambda = \frac{P_1P}{PP_2} = -2$.

Координаты *центра тяжести* системы материальных точек $M_i(x_i, y_i)$ с массами m_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) определяются по формулам:

$$x = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \qquad y = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}.$$

Площадь треугольника (рис. 161); с вершинами $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ и $P_3(x_3, y_3)$:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] =$$

$$= \frac{1}{2}[(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + (x_3 - x_1)(y_3 + y_1)].$$

Три точки лежат на одной прямой, если

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Площадь многоугольника с вершинами $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, ..., $P_n(x_n, y_n)$:

$$S = \frac{1}{2}[(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + \ldots + (x_n - x_1)(y_n + y_1)].$$

При вычислении по этим формулам площадь получается положительная, если обход вершин в порядке нумерации происходит против часовой стрелки, и отрицательная — в противном случае.

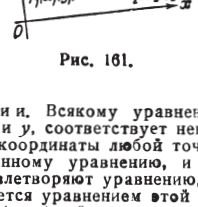


Рис. 161.

Уравнение линии. Всякому уравнению $F(x, y) = 0$, связывающему координаты x и y, соответствует некоторая линия, обладающая тем свойством, что координаты любой точки P, лежащей на этой линии, удовлетворяют данному уравнению, и обратно, всякая точка, координаты которой удовлетворяют уравнению, лежит на линии. Уравнение $F(x, y) = 0$ называется уравнением этой линии *. Если $F(x, y)$ — многочлен, то кривая $F(x, y) = 0$ называется *алгебраической*; в этом случае степень многочлена (см. стр. 155) называется *порядком* кривой. Если же уравнение кривой не может быть сведено к виду $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ — многочлен, то кривая называется *трансцендентной*.

Аналогично можно рассматривать уравнения линий в других системах координат. В дальнейшем, если это особо не оговорено, рассматриваются декартовы прямоугольные координаты.

---

* Может оказаться, что данному уравнению $F(x, y) = 0$ не удовлетворяют координаты ни одной действительной точки на плоскости [например, $x^2 + y^2 + 1 = 0$, $y = \ln(1 - x^2 - \operatorname{ch} x)$]. Тогда *условно* говорят, что данное уравнение изображается мнимой кривой.

2. *Прямая линия*

Уравнение прямой. Всякое уравнение, **линейное относительно координат**, определяет прямую, и наоборот, уравнение любой прямой есть уравнение первой степени.

Общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0.$$

Если (рис. 162) $A = 0$, то прямая параллельна оси Ox; если $B = 0$, прямая параллельна оси Oy; если $C = 0$, прямая проходит через начало.

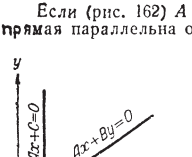


Рис. 162

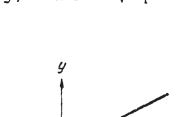


Рис. 163.

Рис. 164.

Уравнение всякой прямой, не параллельной оси Oy (рис. 163), может быть представлено в виде

$$y = kx + b;$$

k — *угловой коэффициент* прямой — равен $\operatorname{tg}\delta$; δ — угол между положительным направлением оси Ox и прямой; b — отрезок, отсекаемый прямой на оси Oy (с учетом знака).

Уравнение прямой, проходящей *через заданную точку* $P_1(x_1, y_1)$ *в данном направлении* (рис. 164):

$$y - y_1 = k(x - x_1), \text{ где } k = \operatorname{tg}\delta.$$

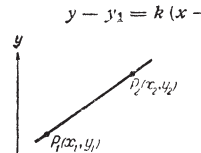


Рис. 165.

Рис. 166.

Уравнение прямой, проходящей *через две заданные точки* (рис. 165) $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Уравнение прямой в отрезках. Если прямая отсекает на осях координат отрезки a и b (с учетом знаков, рис. 166), то ее уравнение:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Нормальное уравнение прямой:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0,$$

где p — расстояние прямой от начала координат, α — угол, образованный с осью Ox перпендикуляром к прямой из начала (рис. 167) ($p > 0$; $0 \leqslant \alpha < 2\pi$). Нормальное уравнение прямой может быть получено из общего уравнения $Ax + By + C = 0$ умножением на *нормирующий множитель* $\mu = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Знак μ должен быть противоположен знаку C.

Расстояние от точки $P_1(x_1, y_1)$ до прямой (рис. 167):

$$d = x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p;$$

d равно результату подстановки координат данной точки в левую часть нормального уравнения прямой. По этой формуле $d > 0$, если P_1 и начало лежат по разные стороны от данной прямой, и $d < 0$ в противном случае.

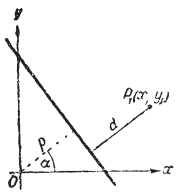


Рис. 167.

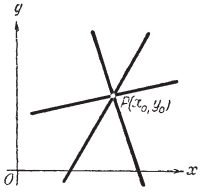


Рис. 168.

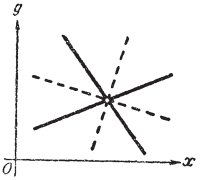


Рис. 169.

Точка пересечения прямых. Координаты (x_0, y_0) точки пересечения двух прямых получаются совместным решением их уравнений. Если эти прямые заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то

$$x_0 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad y_0 = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

Если $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$, то данные прямые параллельны; в частности, при $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$ прямые совпадают.

Третья прямая $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ проходит через точку пересечения первых двух (рис. 168), если

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение всякой прямой, проходящей через точку пересечения двух прямых (уравнение *пучка прямых*):

$$(A_1x + B_1y + C_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0.$$

Меняя λ от $-\infty$ до $+\infty$, можно получить любую прямую пучка. Если уравнения двух прямых даны в нормальном виде, то при $\lambda = \pm 1$ получаются *уравнения биссектрис углов*, образованных этими прямыми (рис. 169).

Угол φ между двумя прямыми (рис. 170) определяется по следующим формулам.

Если уравнения прямых даны в общем виде

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

то

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2},$$

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \qquad \sin\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Если известны угловые коэффициенты k_1 и k_2 прямых, то

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2},$$

$$\cos\varphi = \frac{1 + k_1k_2}{\sqrt{1 + k_1^2}\sqrt{1 + k_2^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{k_2 - k_1}{\sqrt{1 + k_1^2}\sqrt{1 + k_2^2}}$$

(угол φ отсчитывается от первой прямой ко второй против часовой стрелки).

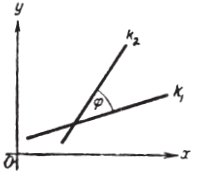


Рис. 170.

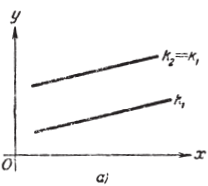


Рис. 171.

Прямые *параллельны* (рис. 171, *а*), если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ или $k_1 = k_2$.

Прямые взаимно *перпендикулярны* (рис. 171, *б*), если $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ или $k_2 = -\frac{1}{k_1}$.

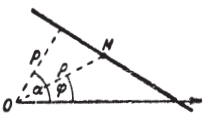


Рис. 172.

Уравнение прямой в полярных координатах (p — расстояние от полюса до прямой, α — угол между полярной осью и перпендикуляром из полюса на прямую, рис. 172):

$$p = \frac{p}{\cos(\varphi - \alpha)}$$

3. Окружность

Уравнение в декартовых координатах. Уравнение окружности радиуса R с центром в начале (рис. 173, *а*):

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Уравнение окружности радиуса R с центром $C(x_0, y_0)$ (рис. 173, *б*):

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

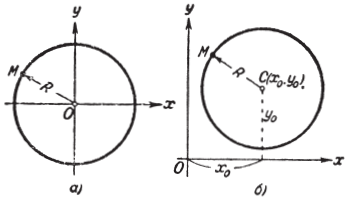


Рис. 173.

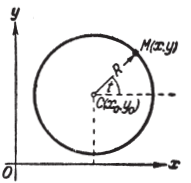


Рис. 174.

Общее уравнение 2-го порядка $ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$ изображает окружность тогда и только тогда, когда $b=0$ и $a=c$. В этом случае уравнение всегда может быть приведено к виду

$$x^2 + y^2 + 2mx + 2ny + q = 0.$$

Тогда радиус $R = \sqrt{m^2 + n^2 - q}$ и координаты центра: $x_0 = -m$, $y_0 = -n$. Если $q > m^2 + n^2$, то уравнение не изображает никакой действительной кривой; если $q = m^2 + n^2$, уравнению удовлетворяет единственная точка $M(x_0, y_0)$.

Параметрическое задание:

$$x = x_0 + R\cos t, \quad y = y_0 + R\sin t;$$

t — угол, образованный подвижным радиусом с положительным направлением оси Ox (рис. 174).

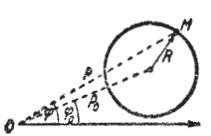


Рис. 175.

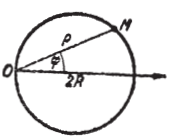


Рис. 176.

Уравнение в полярных координатах. Общее уравнение (рис. 175) $\rho^2 + 2\rho\rho_0\cos(\varphi - \varphi_0) + \rho_0^2 = R^2$. Если центр лежит на полярной оси и окружность проходит через полюс (рис. 176), то уравнение окружности принимает вид $\rho = 2R\cos\varphi$.

4. Эллипс

Элементы эллипса (рис. 177): AB — *большая ось* ($=2a$), CD — *малая ось* ($=2b$), A, B, C, D — *вершины*, O — *центр*, F_1 и F_2 — *фокусы* (точки, лежащие на большой оси по обе стороны от центра на расстоянии $c=\sqrt{a^2-b^2}$ от него), $e=\dfrac{c}{a}$ ($e<1$) — *эксцентриситет*, p — *фокальный параметр* (половина хорды, проведенной через фокус параллельно малой оси), $p=\dfrac{b^2}{a}$.

Рис. 177.

Уравнение эллипса: *каноническое уравнение* (если оси координат совпадают с осями эллипса):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$$

параметрическое задание:

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t;$$

уравнение в полярных координатах см. стр. 213.

Фокальное свойство эллипса (*определение эллипса*). Эллипс является геометрическим местом точек, для которых сумма расстояний от двух заданных точек (фокусов) есть величина постоянная ($=2a$). Каждое из этих расстояний (фокальный радиус-вектор точки эллипса с абсциссой x) выражается формулой *

$$r_1=MF_1=a-ex,\quad r_2=MF_2=a+ex,\quad r_1+r_2=2a.$$

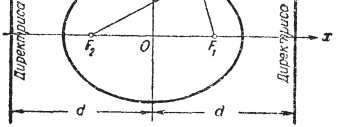


Рис. 178.

Директрисы — прямые, параллельные малой оси, находящиеся на расстоянии $d=\dfrac{a}{e}$ от нее (рис. 178). Для любой точки $M(x, y)$ эллипса $\dfrac{r_1}{d_1}=\dfrac{r_2}{d_2}=e$ (*директориальное свойство эллипса*, см. стр. 213).

* Здесь и ниже в формулах, содержащих координаты, подразумевается, что эллипс задан каноническим уравнением.

Диаметры – хорды, проходящие через центр эллипса; они делятся в центре пополам (рис. 179). Геометрическим местом середин хорд, параллельных одному из диаметров эллипса, является диаметр, *сопряжённый* заданному. Если k и k' — угловые коэффициенты сопряженных диаметров, то $kk' = -\frac{b^2}{a^2}$. Если длины сопряженных диаметров $2a_1$ и $2b_1$, а α и β — острые углы между диаметрами и большой осью

$$(k = -\operatorname{tg}\alpha,\ k' = \operatorname{tg}\beta),$$

то

$$a_1 b_1 \sin(\alpha+\beta) = ab$$

и

$$a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$$

(*теорема Аполлония*).

Рис. 179.

Касательная в точке $M(x_0, y_0)$ имеет уравнение

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Нормаль и касательная к эллипсу являются биссектрисами соответственно внутреннего и внешнего углов между радиусами-векторами точки касания (рис. 180). Прямая $Ax + By + C = 0$ касается эллипса, если $A^2a^2 + B^2b^2 - C^2 = 0$.

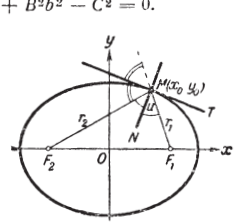


Рис. 180.

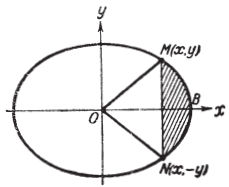


Рис. 181.

Радиус кривизны в точке $M(x_0, y_0)$ (см. рис. 180):

$$R = a^2b^2\left(\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}\right)^{3/2} = \frac{(r_1 r_2)^{3/2}}{ab} = \frac{p}{\sin^3 u},$$

где u — угол между касательной и радиусом-вектором точки касания.

Для вершин A и B (рис. 177): $R = \frac{b^2}{a} = p$. Для вершин C и D: $R = \frac{a^2}{b}$.

Площадь $S = \pi ab$. Площадь сектора $BOM = \frac{ab}{2}\arccos\frac{x}{a}$ (рис. 181). Площадь сегмента $MBN = ab\arccos\frac{x}{a} - xy$.

Периметр эллипса:

$$L = 4aE(e) = 2\pi a\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2-\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{e^4}{3}-\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\frac{e^6}{5}-\ldots\right],$$

где $E(e) = E\left(e, \frac{\pi}{2}\right)$ — полный эллиптический интеграл 2-го рода (см. стр. 343). Если обозначить $\frac{a-b}{a+b} = \lambda$, то

$$L = \pi(a+b)\left[1+\frac{\lambda^2}{4}+\frac{\lambda^4}{64}+\frac{\lambda^6}{256}+\frac{25\lambda^8}{16384}+\ldots\right].$$

Приближенные формулы:

$$L = \pi[1{,}5(a+b)-\sqrt{ab}];\quad L = \pi(a+b)\frac{64-3\lambda^4}{64-16\lambda^2}.$$

5. Гипербола

Элементы гиперболы (рис. 182): AB — *действительная ось* ($=2a$); A, B — *вершины*, O — *центр*, F_1 и F_2 — *фокусы* — точки, лежащие на действительной оси по обе стороны от центра на расстоянии c (большем, чем a) от него; CD — *мнимая ось* ($=2b=2\sqrt{c^2-a^2}$), p — *фокальный параметр* (половина хорды, проведенной через фокус перпендикулярно к действительной оси), $p=\frac{b^2}{a}$; $e=\frac{c}{a}>1$ — *эксцентриситет*.

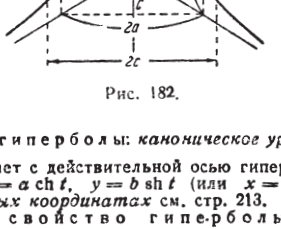


Рис. 182.

Уравнение гиперболы: *каноническое уравнение*: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (если ось Ox совпадает с действительной осью гиперболы); *параметрическое задание*: $x = a\operatorname{ch} t$, $y = b\operatorname{sh} t$ (или $x = a\sec t$, $y = b\operatorname{tg} t$); *уравнение в полярных координатах* см. стр. 213.

Фокальное свойство гиперболы (*определение гиперболы*). Гипербола является геометрическим местом точек, для каждой из которых разность расстояний до двух заданных точек (фокусов) есть величина постоянная ($=2a$). Точки, для которых $r_1-r_2=2a$, принадлежат одной *ветви* гиперболы (на рис. 182 — левой); точки, для которых $r_2-r_1=2a$, — другой ее ветви (правой). Каждое из этих расстояний (фокальный радиус-вектор точки гиперболы с абсциссой x) выражается формулой * $r_1 = \pm(ex-a)$, $r_2 = \pm(ex+a)$ (верхний знак для точек правой ветви, нижний для левой); $r_2-r_1 = \pm 2a$.

* Здесь и ниже, в формулах, содержащих координаты, подразумевается, что гипербола задана каноническим уравнением.

Директрисы — прямые, перпендикулярные к действительной оси и расположенные на расстоянии $d = \frac{a}{e}$ от центра (рис. 183). Для любой точки $M(x, y)$ гиперболы $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = e$ (*директориальное свойство гиперболы*, см. стр. 213).

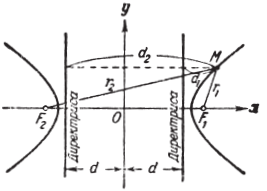


Рис. 183.

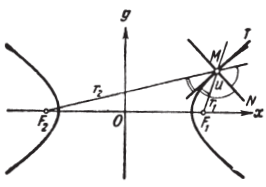


Рис. 184.

Касательная в точке $M(x_0, y_0)$ имеет уравнение $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$. Касательная и нормаль к гиперболе являются биссектрисами соответственно внутреннего и внешнего углов между радиусами-векторами точки касания (рис. 184). Прямая $Ax + By + C = 0$ касается гиперболы, если $A^2a^2 - B^2b^2 = C^2$.

Асимптоты гиперболы (рис. 185) — прямые, к которым ветви гиперболы неограниченно приближаются при удалении в бесконечность (общее определение асимптот см. стр. 246). Угловой коэффициент асимптот $k = \pm \operatorname{tg} \delta = \pm \frac{b}{a}$. Уравнение обеих асимптот: $y = \pm \frac{b}{a} x$.

Рис. 185.

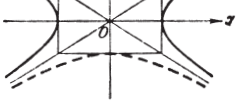


Рис. 186.

Отрезок касательной TT_1 между асимптотами делится в точке касания пополам: $TM = MT_1$. Площадь треугольника TOT_1 между касательной и обеими асимптотами равна ab (для любой точки M). Если через точку M гиперболы провести прямые MF и MG, параллельные асимптотам, то площадь $OFMG = \frac{a^2 + b^2}{4} = \frac{c^2}{4}$.

Сопряженные гиперболы (рис. 186) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ (начерчена на рис. 186 штриховой линией) имеют общие асимптоты. Действительная ось каждой из них равна мнимой оси другой и наоборот.

Диаметры – хорды данной гиперболы и ей сопряженной, проходящие через общий центр гипербол, они делятся в центре пополам.

Два диаметра с угловыми коэффициентами k и k' называются *сопряженными*, если $kk' = \frac{b^2}{a^2}$. Каждый из сопряженных диаметров делит пополам хорды (данной гиперболы или ей сопряженной), параллельные другому * (рис. 187). Если длины сопряженных диаметров $2a_1$

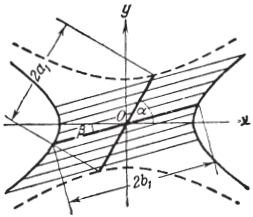


Рис. 187.

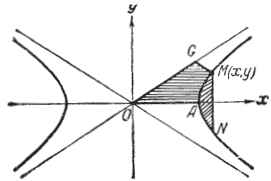


Рис. 188.

и $2b_1$, а α и β – острые углы, образованные диаметрами с действительной осью ($\alpha > \beta$), то $a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2$; $ab = a_1 b_1 \sin(\alpha - \beta)$.

Радиус кривизны R гиперболы в точке $M(x_0, y_0)$ (обозначения см стр. 208):

$$R = a^2 b^2 \left(\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}\right)^{3/2} = \frac{(r_1 r_2)^{3/2}}{ab} = \frac{p}{\sin^3 u},$$

где u – угол между касательной и радиусом-вектором точки касания. В вершинах A и B (рис. 182): $R = p = b^2/a$.

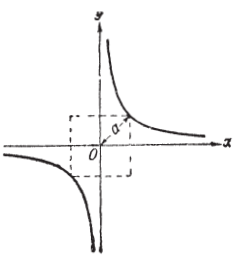


Рис. 189.

Площадь сегмента гиперболы рис. 188)

$$AMN = xy - ab \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = xy - ab \operatorname{Arch} \frac{x}{a}.$$

Площадь $OAMG = \frac{ab}{4} + \frac{ab}{2} \ln \frac{2OG}{c}$

(MG параллельно асимптоте).

Равнобочная гипербола – гипербола, оси которой равны: $a = b$. Ее уравнение $x^2 - y^2 = a^2$. Асимптоты равнобочной гиперболы взаимно перпендикулярны. Если асимптоты принять за оси координат (рис. 189), то уравнение равнобочной гиперболы: $xy = a^2/2$.

---

* Из двух сопряженных диаметров только один (тот, для которого $k < b/a$) пересекает гиперболу. Получающаяся при этом хорда – диаметр в более узком смысле слова – делится в центре пополам.

6. Парабола

Элементы параболы (рис. 190): *Ox — ось параболы*, *O — вершина*, *F — фокус* (точка, лежащая на оси на расстоянии $p/2$ от вершины), *NN' — директриса* (прямая, перпендикулярная к оси и лежащая на расстоянии $p/2$ от вершины по другую сторону от фокуса), *p — фокальный параметр* (расстояние от фокуса до директрисы или половина хорды, проходящей через фокус перпендикулярно к оси). **Эксцентриситет** параболы равен единице (см. стр. 213).

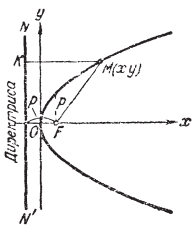


Рис. 190.

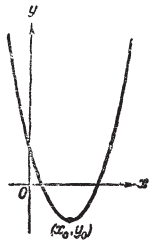


Рис. 191.

Уравнение параболы: *каноническое уравнение* $y^2 = 2px$ (если начало координат в вершине параболы, ось Ox совпадает с ее осью, парабола обращена вершиной влево *). *Уравнение в полярных координатах* см. стр. 213. *Уравнение параболы с вертикальной осью* (рис. 191):

$$y = ax^2 + bx + c,$$

параметр параболы, заданной этим уравнением:

$$p = \frac{1}{2|a|};$$

при $a > 0$ парабола обращена вершиной вниз *, при $a < 0$ вершиной вверх *; координаты вершины: $x_0 = -\frac{b}{2a}$; $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

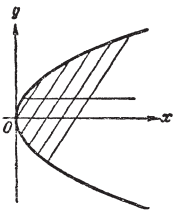


Рис. 192.

Основное свойство (*определение параболы*): парабола является геометрическим местом точек $M(x, y)$, равноудаленных (рис. 190) от данной точки (фокуса) и от данной прямой (директрисы) **: $MF = MK = x + \frac{p}{2}$; MF — фокальный радиус-вектор точки параболы.

Диаметр — прямая, параллельная оси параболы. Диаметр делит пополам хорды, параллельные касательной, проведенной в конце диаметра (рис. 192). Если угловой коэффициент этих хорд равен k, то уравнение диаметра: $y = \frac{p}{k}$.

---

* Предполагается, что положительное направление оси Ox — вправо, а положительное направление оси Oy — вверх.

** Здесь и ниже в формулах, содержащих координаты, подразумевается, что парабола задана каноническим уравнением.

Касательная к параболе (рис. 193) в точке $M(x_0, y_0)$ имеет уравнение $yy_0 = p(x + x_0)$. Касательная и нормаль к параболе являются биссектрисами углов между фокальным радиусом-вектором и диаметром, проходящим через точку касания. Отрезок касательной к параболе между точкой касания и пересечением с осью параболы (осью Ox)

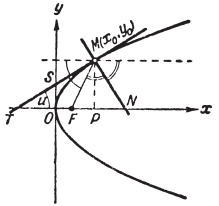


Рис. 193.

делится пополам касательной в вершине параболы (осью Oy): $TS = SM$; $TF = FM$; $TO = OP = x_0$. Прямая $y = kx + b$ касается параболы, если $p = 2bk$.

Радиус кривизны параболы в точке $M(x_1, y_1)$:

$$R = \frac{(p + 2x_1)^{3/2}}{\sqrt{p}} = \frac{p}{\sin^3 u} = \frac{n^3}{p^2},$$ где n – длина нормали MN (рис. 193).

В вершине O радиус кривизны $R = p$.

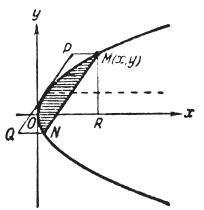


Рис. 194.

Площадь сегмента параболы $MON = \frac{2}{3}$ площади $PQNM$ (рис. 194). Площадь $OMR = \frac{2}{3}xy$.

Длина дуги параболы от вершины O до точки $M(x, y)$:

$$\overset{\frown}{OM} = \frac{p}{2}\left[\sqrt{\frac{2x}{p}\left(1 + \frac{2x}{p}\right)} + \ln\left(\sqrt{\frac{2x}{p}} + \sqrt{1 + \frac{2x}{p}}\right)\right] =$$

$$= \sqrt{x\left(x + \frac{p}{2}\right)} + \frac{p}{2}\operatorname{Arsh}\sqrt{\frac{2x}{p}}.$$

Приближенно, при малых $\frac{x}{y}$: $\overset{\frown}{OM} \approx y\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{x}{y}\right)^4\right]$.

7. *Кривые 2-го порядка (конические сечения)*

Общее уравнение кривых 2-го порядка

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$$

определяет эллипс (в частном случае окружность), гиперболу, параболу или пару прямых (*распадающаяся* кривая 2-го порядка).

Инварианты кривой 2-го порядка:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix},\quad \delta=\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}=ac-b^2,\quad S=a+c.$$

Эти величины не меняются при переносе начала и повороте осей координат, т. е. если после преобразования координат уравнение кривой примет вид: $a'x'^2+2b'x'y'+c'y'^2+2d'x'+2e'y'+f'=0$, то величины Δ, δ и S, вычисленные по новым коэффициентам, сохраняют первоначальные значения.

Определение вида кривой, изображаемой данным уравнением 2-го порядка, и приведение его к канонической форме проводится по таблице на стр. 214—215.

Общие свойства кривых 2-го порядка. *Конические сечения.* Прямой круговой конус при пересечении с плоскостью образует на ней коническое сечение. Если секущая плоскость не проходит через вершину конуса, то сечение будет гиперболой, параболой или эллипсом в зависимости от того, будет ли плоскость сечения параллельна двум, только одной или ни одной образующей конуса. При пересечении конуса с плоскостью, проходящей через его вершину, получаются распадающиеся конические сечения ($\Delta=0$, см. таблицу на стр. 214—215). Параллельные прямые получаются, если конус вырождается в цилиндр (вершина конуса уходит в бесконечность).

Директориальное свойство. Геометрическим местом точек M (рис. 195), для которых отношение расстояний их до заданной точки

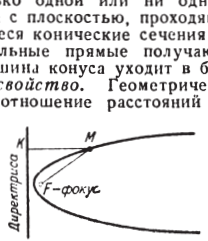


Рис. 195.

(*фокуса*) F и до заданной прямой (*директрисы*) есть величина постоянная, равная e, является кривая 2-го порядка с эксцентриситетом, равным e. При $e<1$ получается эллипс, при $e=1$ парабола, при $e>1$ гипербола.

Определение кривой пятью точками. Через заданные пять точек проходит единственная кривая 2-го порядка. Если хотя бы три точки из числа заданных лежат на одной прямой, то получится распадающаяся кривая.

Полярное уравнение. В полярных координатах кривые 2-го порядка имеют уравнение $\rho=\dfrac{p}{1+e\cos\varphi}$ (p — фокальный параметр, e — эксцентриситет данной кривой, полюс находится в фокусе, полярная ось направлена от фокуса к ближайшей вершине *).

* Для гиперболы этим уравнением определяется лишь одна ветвь.

Приведение уравнений кривых 2-го

			Вид кривой
Центральные кривые $\delta \neq 0$	$\delta > 0$	$\Delta \neq 0$	Эллипс а) $\Delta \cdot S < 0$ — действительный, б) $\Delta \cdot S > 0$ — мнимый **
		$\Delta = 0$	Пара мнимых** прямых, имеющих общую действительную точку
	$\delta < 0$	$\Delta \neq 0$	Гипербола
		$\Delta = 0$	Пара пересекающихся прямых
Параболические кривые $\delta = 0$ ***		$\Delta \neq 0$	Парабола
		$\Delta = 0$	Пара прямых, параллельных, если $d^2 - af > 0$, сливающихся, если $d^2 - af = 0$, мнимых **, если $d^2 - af < 0$

* Обозначения см. стр. 213.

** См. примечание на стр. 201.

*** В случае $\delta = 0$ предполагается, что ни один из коэффициентов a, b, c не равен нулю. Если два коэффициента (a и b или b и c)

порядка к каноническому виду *

Необходимое преобразование координат	Каноническое уравнение после преобразования
1) Перенос начала в *центр* кривой, координаты которого $x_0 = \frac{be - cd}{\delta}$, $y_0 = \frac{bd - ae}{\delta}$. 2) Поворот осей на угол α, определяемый уравнением $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2b}{a - c}$. Знак $\sin 2\alpha$ должен совпадать со знаком $2b$. При этом угловой коэффициент новой оси x': $k = \frac{c - a + \sqrt{(c-a)^2 + 4b^2}}{2b}$	$a'x'^2 + c'y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0;$ $a' = \frac{a + c + \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}$ $c' = \frac{a + c - \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}$ a' и c' являются корнями квадратного уравнения $u^2 - Su + \delta = 0$
1) Перенос начала в вершину параболы, координаты которой x_0 и y_0 определяются из уравнений $ax_0 + by_0 + \frac{ad + be}{S} = 0$ $\left(d + \frac{dc - be}{S}\right) x_0 + \left(e + \frac{ae - bd}{S}\right) y_0 + f = 0.$ 2) Поворот осей на угол α, определяемый из уравнения: $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{a}{b}$; знак $\sin\alpha$ должен быть противоположен знаку a.	$y'^2 = 2px';$ $p = \frac{ae - bd}{S\sqrt{a^2 + b^2}}$
Поворот осей на угол α, определяемый из уравнения $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{a}{b}$; знак $\sin\alpha$ должен быть противоположен знаку a	$Sy'^2 + 2\frac{ad + be}{\sqrt{a^2 + b^2}} y' + f = 0,$ приводится к виду $(y' - y'_0)(y' - y'_1) = 0$

равны нулю, то упрощение уравнения сводится к параллельному переносу осей; уравнение $cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ преобразуется к виду $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$; а уравнение $ax^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ – к виду $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$.

Б. Геометрия в пространстве

8. Основные понятия и формулы

К о о р д и н а т ы. Положение любой точки P в пространстве может быть определено при помощи той или иной *системы координат*. Наиболее употребительны системы координат: 1) декартовы прямоугольные, 2) цилиндрические, 3) сферические.

Декартовыми прямоугольными координатами точки P называются взятые с определенным знаком расстояния * этой точки до трех взаимно перпендикулярных координатных плоскостей или, что то же, проекции радиуса-вектора $\mathbf{r}$ точки P (см. стр. 520) на три взаимно перпендикулярные *координатные оси*. В зависимости от взаимного расположения положительных направлений координатных осей возможны *правая* (рис. 196, *а*) и *левая* (рис. 196, *б*) координатные системы. В дальнейшем

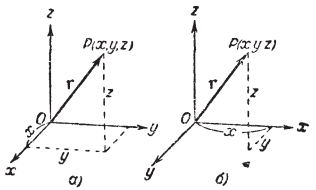


Рис. 196.

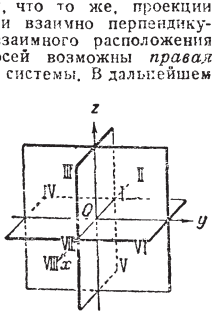


Рис. 197.

на чертежах принята правая система (формулы не зависят от вида координатной системы). Точка пересечения координатных осей называется *началом* координат. Координаты x, y, z называются соответственно *абсциссой*, *ординатой* и *аппликатой*. Запись $P(a, b, c)$ означает, что точка P имеет координаты $x=a$, $y=b$ и $z=c$. Знаки координат зависят от октанта, в котором расположена точка (рис. 197):

Октант	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

Координатными поверхностями, для которых одна из координат остается постоянной, здесь являются плоскости, параллельные коорди-

* Выраженные в единицах некоторого масштаба.

натным плоскостям, а *координатными линиями*, вдоль которых меняется только одна координата, — прямые, параллельные координатным осям. Координатные поверхности пересекаются по координатным линиям.

Более общую систему *криволинейных координат* получают, задавая какие-либо три семейства координатных поверхностей, таких, что через каждую точку пространства проходит по одной поверхности каждого семейства. Положение точки в такой системе определяется значениями параметров координатных поверхностей, проходящих через эту точку. Наиболее употребительные системы криволинейных координат — цилиндрическая и сферическая — описаны ниже.

Цилиндрические координаты (рис. 198): ρ и φ — полярные координаты проекции точки P на основную плоскость (обычно xOy), z — аппликата — расстояние от точки P до основной плоскости.

Для цилиндрических координат координатными поверхностями являются плоскости, перпендикулярные к оси z ($z = \text{const}$), полуплоскости, ограниченные осью z ($\varphi = \text{const}$) и цилиндрические поверхности, осью которых является ось z ($\rho = \text{const}$). Координатные линии — линии пересечения этих поверхностей.

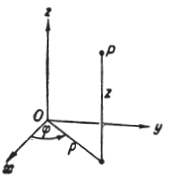


Рис. 198.

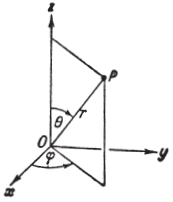


Рис. 199.

Формулы перехода от цилиндрических координат к декартовым и обратно:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z;$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \ \varphi = \operatorname{Arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{Arcsin} \frac{y}{\rho}.$$

Сферические (*полярные*) *координаты*: r — длина *радиуса-вектора*, φ — *долгота*, θ — *полярное расстояние*. Положительные направления отсчета показаны на рис. 199. Если давать сферическим координатам значения в следующих пределах: $0 \leqslant r < \infty$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, то получатся однозначно все точки пространства.

Координатные поверхности: сферы с центром в начале ($r = \text{const}$), полуплоскости, ограниченные осью z ($\varphi = \text{const}$), конусы (с вершиной в начале), для которых ось z является осью ($\theta = \text{const}$). Координатные линии — линии пересечения этих поверхностей.

Формулы перехода от сферических координат к декартовым и обратно:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta;$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \ \varphi = \operatorname{Arctg} \frac{y}{x}, \ \theta = \operatorname{Arctg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.$$

Направление в пространстве характеризуется единичным вектором $\mathbf{t}^0$ (см. стр. 519) или его координатами — косинусами углов (рис. 200), образованных заданным направлением с положительными направлениями осей координат (*направляющие косинусы*):

$$l = \cos\alpha; \quad m = \cos\beta; \quad n = \cos\gamma; \quad l^2 + m^2 + n^2 = 1.$$

Угол φ между двумя заданными направлениями с направляющими косинусами l_1, m_1, n_1 и l_2, m_2, n_2:

$$\cos\varphi = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2.$$

Два направления перпендикулярны, если $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$.

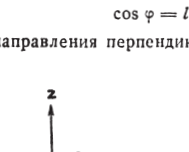


Рис. 200.

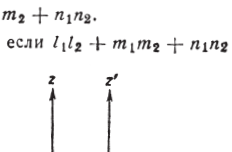


Рис. 201.

Преобразование прямоугольных координат. *Параллельный перенос* (x, y, z — старые координаты; x', y', z' — новые; a, b, c — координаты нового начала в старых координатах, рис. 201):

$$x = x' + a, \quad y = y' + b, \quad z = z' + c; \quad x' = x - a, \quad y' = y - b, \quad z' = z - c.$$

Поворот осей (рис. 202). Если обозначить направляющие косинусы новых осей x', y', z' по приведенной здесь схеме, то

$$\begin{aligned} x &= l_1 x' + l_2 y' + l_3 z', \\ y &= m_1 x' + m_2 y' + m_3 z', \\ z &= n_1 x' + n_2 y' + n_3 z', \\ x' &= l_1 x + m_1 y + n_1 z, \\ y' &= l_2 x + m_2 y + n_2 z, \\ z' &= l_3 x + m_3 y + n_3 z. \end{aligned}$$

По отношению к старым осям	Косинусы новых осей		
	x'	y'	z'
x	l_1	l_2	l_3
y	m_1	m_2	m_3
z	n_1	n_2	n_3

Определитель преобразования:

$$\Delta = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix}$$

Свойства определителя преобразования:

1) $\Delta = \pm 1$ (плюс, если левая система перешла в левую или правая в правую, и минус, если левая перешла в правую или наоборот).

2) Сумма квадратов элементов одной строки или столбца равна 1.

3) Сумма произведений соответственных элементов двух строк или двух столбцов равна нулю.

4) Каждый элемент равен своей адъюнкте (см. стр. 147), умноженной на $\Delta = \pm 1$.

Углы Эйлера. Положение новой координатной системы относительно старой может быть полностью охарактеризовано тремя углами, введенными Л. Эйлером (рис. 202):

1) угол *нутации* ϑ — между положительными направлениями осей Oz и Oz' $(0 \leqslant \vartheta < \pi)$;

2) угол *прецессии* ψ — между осью Ox и прямой OA пересечения плоскостей xOy и $x'Oy'$, на которой выбрано положительное направление так, что OA, Oz и Oz' образуют тройку той же ориентации, что и координатные оси *; угол ψ отсчитывается в направлении от Ox к Oy $(0 \leqslant \psi < 2\pi)$;

3) угол *чистого вращения* φ—между OA и Ox'; направление отсчета устанавливается от Ox' к Oy' $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$.

Рис. 202.

Если обозначить

$$\cos\vartheta = c_1, \quad \cos\psi = c_2, \quad \cos\varphi = c_3,$$
$$\sin\vartheta = s_1, \quad \sin\psi = s_2, \quad \sin\varphi = s_3,$$

то

$$l_1 = c_2c_3 - c_1s_2s_3,$$
$$m_1 = s_2c_3 + c_1c_2c_3,$$
$$n_1 = s_1s_3,$$
$$l_2 = -c_2s_3 - c_1s_2c_3, \quad l_3 = s_1s_2,$$
$$m_2 = -s_2s_3 + c_1c_2c_3, \quad m_3 = -s_1c_2,$$
$$n_2 = s_1c_3, \quad n_3 = c_1.$$

Расстояние между двумя точками: $P_1(x_1, y_1, z_1)$ и $P_2(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 203) равно $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

Направляющие косинусы отрезка P_1P_2:

$$\cos\alpha = \frac{x_2-x_1}{d}, \quad \cos\beta = \frac{y_2-y_1}{d}, \quad \cos\gamma = \frac{z_2-z_1}{d}.$$

Деление отрезка в данном отношении (рис. 203).

Координаты точки P, для которой

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{m}{n} = \lambda,$$

определяются по формулам:

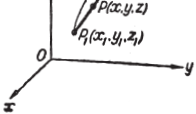


Рис. 203.

$$x = \frac{nx_1+mx_2}{n+m} = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},$$
$$y = \frac{ny_1+my_2}{n+m} = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},$$
$$z = \frac{nz_1+mz_2}{n+m} = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Для *середины* отрезка:

$$x = \frac{x_1+x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1+y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1+z_2}{2}.$$

Координаты *центра тяжести* системы материальных точек $M_i(x_i, y_i)$ с массами m_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ определяются по формулам (суммы берутся от $i=1$ до $i=n$):

$$\bar{x} = \frac{\sum m_ix_i}{\sum m_i}, \quad \bar{y} = \frac{\sum m_iy_i}{\sum m_i}, \quad \bar{z} = \frac{\sum m_iz_i}{\sum m_i}.$$

* Об ориентации тройки направлений см. стр. 522.

Объем треугольной пирамиды с вершинами $P(x, y, z)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$ (рис. 204)

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ x-x_3 & y-y_3 & z-z_3 \end{vmatrix}.$$

При вычислении по этой формуле $V>0$, если ориентация тройки векторов PP_1, PP_2 и PP_3 совпадает с ориентацией системы координат (см. стр. 522), и $V<0$ в противном случае.

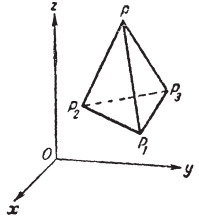


Рис. 204.

4 точки P, P_1, P_2 и P_3 лежат в одной плоскости, если

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение поверхности. Всякому уравнению $F(x, y, z)=0$ соответствует некоторая поверхность, обладающая тем свойством, что координаты любой точки P, лежащей на этой поверхности, удовлетворяют данному уравнению и, наоборот, всякая точка, координаты которой удовлетворяют данному уравнению, лежит на поверхности. Уравнение $F(x, y, z)=0$ называется уравнением этой поверхности.

Уравнение *цилиндрической поверхности* (см. стр. 174), образующие которой параллельны оси Ox (или Oy, или Oz), не содержит координаты x (соответственно y или z): $F(y, z)=0$ [или $F(x, z)=0$ или $F(x, y)=0$]. На плоскости yOz то же уравнение изображает линию пересечения цилиндрической поверхности с этой плоскостью.

Цилиндрическая поверхность, направление образующих которой определяется направляющими косинусами (или пропорциональными им величинами) l, m, n, имеет уравнение $F(nx-lz, ny-mz)=0$.

Поверхность, получающаяся от *вращения* кривой $z=f(x)$ в плоскости xOz около оси z (рис. 205), имеет уравнение $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$. Аналогично пишутся уравнения поверхностей вращения около других координатных осей.

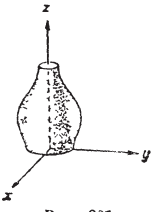


Рис. 205.

Уравнение *конической поверхности* (см. стр. 176) с вершиной в начале имеет вид $F(x, y, z)=0$, где F — однородная функция координат (см. стр. 289).

Уравнение линии в пространстве. Линия в пространстве задается тремя уравнениями: $x=\varphi_1(t)$; $y=\varphi_2(t)$; $z=\varphi_3(t)$. Каждому значению параметра t соответствует определенная точка линии. (Параметр может и не иметь непосредственно геометрического смысла.) Другой способ задания линии в пространстве — двумя уравнениями: $F_1(x, y, z)=0$, $F_2(x, y, z)=0$. Каждое из них определяет поверх-

ность. Точки, координаты которых удовлетворяют обоим уравнениям, лежат на линии пересечения данных поверхностей. Всякое уравнение $F_1 + \lambda F_2 = 0$ при любом λ изображает поверхность, проходящую через рассматриваемую линию, и может заменить одно из первоначально данных уравнений.

9. Плоскость и прямая в пространстве

Уравнение плоскости. Всякое уравнение, линейное относительно координат, определяет плоскость и, наоборот, уравнение любой плоскости есть уравнение первой степени.

Общее уравнение плоскости: $Ax + By + Cz + D = 0$; в векторной форме $\mathbf{rN} + D = 0$ (см. стр. 522 и 525). Вектор $\mathbf{N}(A, B, C)$ (рис. 206) перпендикулярен к плоскости; направляющие косинусы этого вектора:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

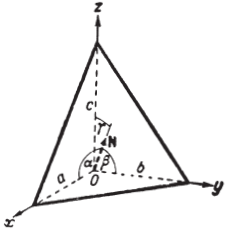


Рис. 206.

Если $D = 0$, то плоскость проходит через начало; если $A = 0$ (или $B = 0$, или $C = 0$), то плоскость параллельна оси Ox (соответственно Oy или Oz), если $A = B = 0$ (или $A = C = 0$, или $B = C = 0$), то плоскость параллельна плоскости Oxy (соответственно Oxz или Oyz).

Нормальное уравнение плоскости: $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$; в векторной форме $\mathbf{rN^0} - p = 0$, Вектор $\mathbf{N^0}$ – единичный, p – расстояние плоскости от начала. Нормальное уравнение может быть получено из общего умножением на нормирующий множитель $\pm\mu = \frac{1}{N} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ (знак μ должен быть противоположен знаку D).

Уравнение плоскости в отрезках: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$; a, b, c – отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат с учетом знака (рис. 206).

Уравнение плоскости, проходящей

а) *через три точки* $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \text{в векторной форме } (\mathbf{r} - \mathbf{r_1})(\mathbf{r_2} - \mathbf{r_1})(\mathbf{r_3} - \mathbf{r_1}) = 0\ *;$$

б) *через две точки* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ и $P_2(x_2, y_2, z_2)$ *параллельно прямой с направляющим вектором* $\mathbf{R}(l, m, n)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0, \qquad \text{в векторной форме } (\mathbf{r} - \mathbf{r_1})(\mathbf{r_2} - \mathbf{r_1})\mathbf{R} = 0\ *;$$

в) *через одну точку* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *параллельно двум прямым с направляющими векторами* $\mathbf{R_1}(l_1, m_1, n_1)$, $\mathbf{R_2}(l_2, m_2, n_2)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \text{в векторной форме } (\mathbf{r} - \mathbf{r_1})\mathbf{R_1}\mathbf{R_2} = 0\ *;$$

* О произведении трех векторов (смешанном) см. стр. 522.

г) *через одну точку* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *перпендикулярно к прямой с направляющим вектором* $\mathbf{N}(A, B, C)$:

$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$, в векторной форме $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\mathbf{N}=0$*;

д) *через линию пересечения двух плоскостей* $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

(уравнение *пучка плоскостей*, рис. 207). Меняя λ от $-\infty$ до $+\infty$, получим все плоскости пучка. При $\lambda=\pm 1$ получаются уравнения плоскостей, делящих пополам углы между заданными плоскостями, если их уравнения даны в нормальном виде.

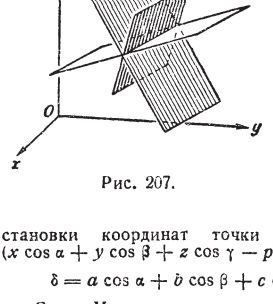


Рис. 207.

Угол между двумя плоскостями — см. стр. 226—227.

Точка пересечения трех плоскостей — см. стр. 224.

Расстояние между двумя параллельными плоскостями** $Ax+By+Cz+D_1=0$ и $Ax+By+Cz+D_2=0$ равно

$$\delta=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Расстояние от точки до плоскости находится путем подстановки координат точки $M(a, b, c)$ в нормальное уравнение $(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0)$ плоскости ***:

$$\delta=a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma-p.$$

Если M и начало лежат по разные стороны плоскости, то $\delta>0$, в противном случае $\delta<0$.

Уравнения прямой в пространстве. Прямая в пространстве определяется как линия пересечения двух плоскостей и задается аналитически системой двух линейных уравнений.

Общие уравнения прямой:

$$\text{I}\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0;\end{cases}$$

в векторной форме *

$$\begin{cases}\mathbf{rN}_1+D_1=0,\\ \mathbf{rN}_2+D_2=0.\end{cases}$$

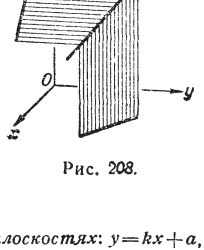


Рис. 208.

Уравнения прямой в двух проектирующих плоскостях: $y=kx+a$, $z=hx+b$; каждое из этих двух уравнений определяет плоскость, проектирующую прямую на плоскости Oxy и Oxz (рис. 208). Для прямых, параллельных плоскости Oyz, этот вид уравнений неприменим; для них необходимо взять проекции на какую-либо другую пару координатных плоскостей.

---

* О скалярном произведении векторов см. стр. 522.

** Об условии параллельности плоскостей см. стр. 227.

*** О приведении общего уравнения плоскости к нормальному виду см. стр. 221.

Уравнения прямой, проходящей

а) *через данную точку* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *параллельно направляющему вектору* $\mathbf{R}(l, m, n)$ (рис. 209);

$$\text{II}\quad \begin{cases} \dfrac{x-x_1}{l} = \dfrac{y-y_1}{m} = \dfrac{z-z_1}{n}, \end{cases}$$

в векторной форме $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\times\mathbf{R}=0$* или (параметрический вид)

$$x = x_1 + lt,\ y = y_1 + mt,\ z = z_1 + nt,$$

в векторной форме $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1+\mathbf{R}t$.

«*Каноническая форма*» (II) получается из (I) по формулам:

$$l = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix};\ m = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix};\ n = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix};$$

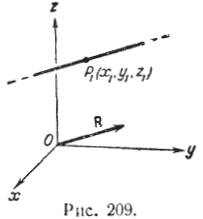


Рис. 209.

в векторной форме $\mathbf{R}=\mathbf{N}_1\times\mathbf{N}_2$*; числа x_1, y_1, z_1 подбираются так, чтобы они удовлетворяли уравнениям (I);

б) *через две данные точки* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ и $P_2(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 210):

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1},$$

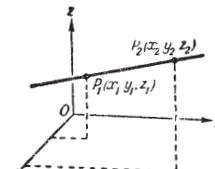


Рис. 210

в векторной форме

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\times(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)=0\ *;$$

в) *через данную точку* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *перпендикулярно к плоскости*

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ или } \mathbf{rN} + D = 0\ *$$

(рис. 211):

$$\frac{x-x_1}{A} = \frac{y-y_1}{B} = \frac{z-z_1}{C},$$

в векторной форме $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\times\mathbf{N}=0$*.

Расстояние δ точки $M(a, b, c)$ от прямой, заданной уравнением в канонической форме (II), определяется по формуле

$$\delta^2 = \frac{[(a-x_1)m-(b-y_1)l]^2+[(b-y_1)n-(c-z_1)m]^2+[(c-z_1)l-(a-x_1)n]^2}{l^2+m^2+n^2}.$$

Кратчайшее расстояние между двумя прямыми, если их уравнения даны в канонической форме

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$$

и

$$\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

может быть вычислено по формуле

$$\delta = \frac{\pm\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}^2}}$$

Рис. 211.

Обращение в нуль стоящего здесь в числителе определителя есть *условие пересечения двух прямых в пространстве.*

* О произведениях векторов см. стр. 522.

Координаты точки пересечения	данных своими уравнениями	вычисляются по формуле	Примечания
трех плоскостей	$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$ $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$ $A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$	$\bar{x}=\frac{-\Delta_x}{\Delta}$, $\bar{y}=\frac{-\Delta_y}{\Delta}$, $\bar{z}=\frac{-\Delta_z}{\Delta}$, где $\Delta=\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}$, $\Delta_x=\begin{vmatrix}D_1 & B_1 & C_1\\ D_2 & B_2 & C_2\\ D_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}$, $\Delta_y=\begin{vmatrix}A_1 & D_1 & C_1\\ A_2 & D_2 & C_2\\ A_3 & D_3 & C_3\end{vmatrix}$, $\Delta_z=\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & D_1\\ A_2 & B_2 & D_2\\ A_3 & B_3 & D_3\end{vmatrix}$	Три плоскости пересекаются в одной точке, если $\Delta\neq 0$; если $\Delta=0$ и хотя бы один из миноров 2-го порядка $\neq 0$, плоскости параллельны некоторому направлению; если все миноры $=0$, плоскости проходят через одну прямую
четырех плоскостей	$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$ $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$ $A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0,$ $A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0$	Находится точка пересечения каких-либо трех плоскостей из четырех (см. выше). В этом случае ($\delta=0$) одно из уравнений есть следствие трех остальных	Четыре плоскости только тогда проходят через одну точку, если $\delta=\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & C_1 & D_1\\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2\\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3\\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4\end{vmatrix}=0$

плоскости и прямой	1) $Ax + By + Cz + D = 0$, $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$ 2) $Ax + By + Cz + D = 0$, $y = kx + a$, $z = hx + b$	1) $\bar{x} = x_1 - l\rho$, $\bar{y} = y_1 - m\rho$, $\bar{z} = z_1 - n\rho$, где $\rho = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Al + Bm + Cn}$; 2) $\bar{x} = -\frac{Ba + Cb + D}{A + Bk + Ch}$, $\bar{y} = k\bar{x} + a$, $\bar{z} = h\bar{x} + b$	Если $Al + Bm + Cn = 0$ $(A + Bk + Ch = 0)$, то прямая параллельна плоскости; если, кроме того, $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$ $(Ba + Cb + D = 0)$, то прямая лежит в плоскости
двух прямых	$y = k_1x + a_1$, $z = h_1x + b_1$; $y = k_2x + a_2$, $z = h_2x + b_2$	$\bar{x} = \frac{a_2 - a_1}{k_1 - k_2} = \frac{b_2 - b_1}{h_1 - h_2}$; $\bar{y} = \frac{k_1a_2 - k_2a_1}{k_1 - k_2}$; $\bar{z} = \frac{h_1b_2 - h_2b_1}{h_1 - h_2}$	Эти формулы дают точку пересечения лишь при условии $(a_1 - c_2)(h_1 - h_2) = (b_1 - b_2)(k_1 - k_2)$, в противном случае прямые не пересекаются (см. также стр. 223)

Угол между плоскостями и прямыми

Угол между	данными своими уравнениями	вычисляется по формуле.
двумя плоскостями	$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$ $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$	$\cos\varphi = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)(A_2^2 + B_2^2 + C_2^2)}}$
в векторной форме	$\mathbf{rN}_1 + D_1 = 0,$ $\mathbf{rN}_2 + D_2 = 0$	$\cos\varphi = \dfrac{\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2}{N_1N_2}$
двумя прямыми	$\dfrac{x - x_1}{l_1} = \dfrac{y - y_1}{m_1} = \dfrac{z - z_1}{n_1},$ $\dfrac{x - x_2}{l_2} = \dfrac{y - y_2}{m_2} = \dfrac{z - z_2}{n_2}$	$\cos\varphi = \dfrac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{(l_1^2 + m_1^2 + n_1^2)(l_2^2 + m_2^2 + n_2^2)}}$
в векторной форме:	$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{R}_1 = 0,$ $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{R}_2 = 0$	$\cos\varphi = \dfrac{\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2}{R_1R_2}$

прямой и плоскостью	$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$, $Ax+By+Cz+D=0$	$\sin\varphi=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(l^2+m^2+n^2)}}$
в векторной форме:	$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\times\mathbf{R}=0$, $\mathbf{rN}+D=0$	$\sin\varphi=\frac{\mathbf{RN}}{RN}$

Условия параллельности (обозначения те же, что и выше):

двух плоскостей: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ или $\mathbf{N}_1\times\mathbf{N}_2=0$,

двух прямых: $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$ или $\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2=0$,

прямой и плоскости: $Al+Bm+Cn=0$ или $\mathbf{RN}=0$.

Условия перпендикулярности (обозначения те же, что и выше):

двух плоскостей: $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ или $\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2=0$,

двух прямых: $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$ или $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2=0$,

прямой и плоскости: $\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$ или $\mathbf{N}\times\mathbf{R}=0$.

10. Поверхности 2-го порядка (канонические уравнения) *

Центральные поверхности. Уравнения, приводимые ниже, даны в *канонической* форме: *центр* поверхности (точка, в которой все хорды, через нее проходящие, делятся пополам) помещен в начале, а за оси координат взяты оси симметрии поверхности. При этом координатные плоскости являются плоскостями симметрии.

Эллипсоид (рис. 212): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, a, b, c — полуоси.

Если $a=b>c$, имеем *сплющенный эллипсоид вращения* (рис. 213), получающийся от вращения вокруг малой оси эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, ле-

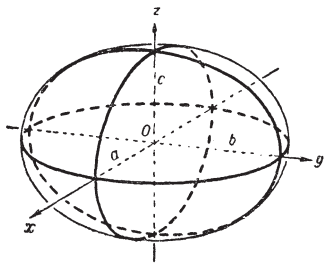


Рис. 212.

жащего в плоскости Oxz. Если $a=b<c$, имеем *вытянутый эллипсоид вращения* (рис. 214), получающийся от вращения вокруг большой оси эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, лежащего в плоскости Oxz. Если $a=b=c$, имеем *сферу (шар)*: $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Любая плоскость пересекает эллипсоид по эллипсу (в частном случае — по кругу). Объем эллипсоида равен $^4/_3\,\pi abc$.

Гиперболоид однополостный (рис. 215) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, a и b — действительные полуоси, c — мнимая полуось.

О прямолинейных образующих см. стр. 231.

Гиперболоид двуполостный (рис. 216): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$, c — действительная полуось, a и b — мнимые полуоси.

Для обоих гиперболоидов сечения, параллельные оси Oz, — гиперболы (для однополостного гиперболоида может быть пара пересекающихся прямых), а сечения, параллельные плоскости xOy, — эллипсы.

Если $a=b$, то гиперболоид может быть получен вращением гиперболы с полуосями a и c вокруг оси $2c$: мнимой — в случае однополостного и действительной — в случае двуполостного гиперболоида.

---

* Общее уравнение поверхностей 2-го порядка см. стр. 232.

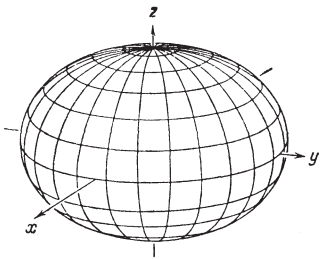


Рис. 213.

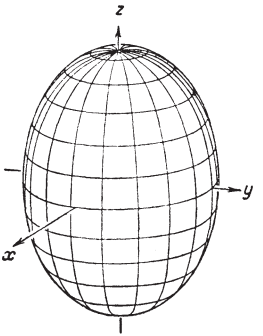


Рис. 214.

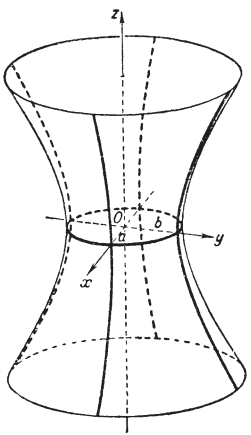


Рис. 215

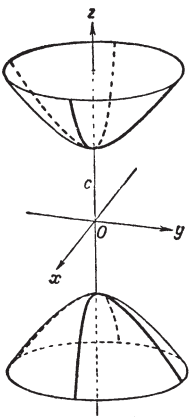


Рис. 216.

Конус (рис. 217) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ имеет вершину в начале, и за направляющую его (см. стр. 176) может быть взят эллипс с полуосями a и b, плоскость которого перпендикулярна к оси Oz и удалена от начала на расстояние c. Этот конус является асимптотическим для двух гиперболоидов $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1$, т. е. всякая его образующая при удалении в бесконечность неограниченно приближается к обоим гиперболоидам (рис. 218). Если $a=b$, то мы имеем прямой круглый конус (см. стр. 176).

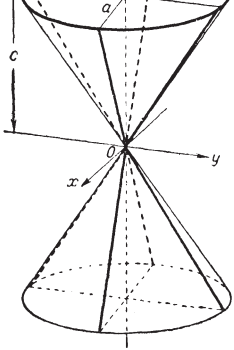


Рис. 217.

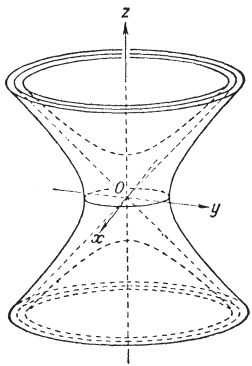


Рис. 218.

Параболоиды. Параболоиды не имеют центра; для уравнений, приводимых ниже, *вершина* параболоида помещается в начале координат, ось Oz является осью симметрии, а плоскости xOz и yOz — плоскостями симметрии.

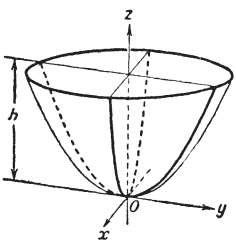


Рис. 219.

Эллиптический параболоид (рис. 219): $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$. Сечения, параллельные оси Oz, — параболы; сечения, параллельные плоскости xOy, — эллипсы. Если $a=b$, имеем *параболоид вращения*, получаемый от вращения вокруг своей оси параболы $z=\frac{x^2}{a^2}$, лежащей в плоскости xOz.

Объем части параболоида, отсекаемой плоскостью, перпендикулярной к его оси на высоте h, равен $^1/_2\pi abh$, то есть половине объема эллиптического цилиндра с таким же основанием и высотой

Гиперболический параболоид (рис. 220): $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$. Сечения, параллельные плоскости yOz, — одинаковые параболы; сечения, параллельные плоскости xOz, — одинаковые параболы; сечения, параллельные плоскости xOy, — гиперболы (а также пара пересекающихся прямых).

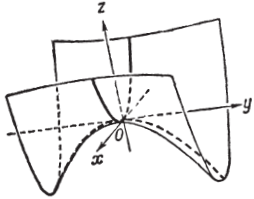


Рис. 220.

Прямолинейной образующей поверхности называется прямая линия, целиком лежащая на данной поверхности; например — прямолинейные образующие конической или цилиндрической поверхности

Однополостный гиперболоид (рис. 221) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ имеет два семейства прямолинейных образующих

$$\text{I} \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = u\left(1 + \frac{y}{b}\right), \\ u\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{y}{b}; \end{cases}$$

$$\text{II} \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = v\left(1 - \frac{y}{b}\right), \\ v\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = 1 + \frac{y}{b}; \end{cases}$$

u и v — произвольные величины.

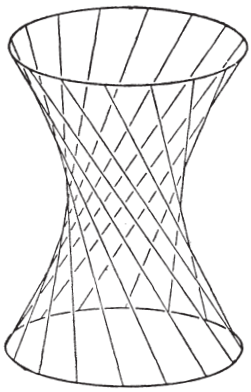


Рис. 221.

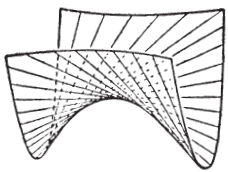


Рис. 222.

Гиперболический параболоид (рис. 222) $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ имеет также два семейства образующих:

I) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = u$, $u\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = z$; II) $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = v$, $v\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = z$;

u и v — произвольные величины. Через каждую точку поверхности

в обоих случаях проходят две прямые: по одной образующей каждого семейства (на рис. 221 и 222 показано лишь по одному семейству).

Цилиндры: *эллиптический* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (рис. 223), *гиперболический* $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (рис. 224), *параболический* $y^2=2px$ (рис. 225).

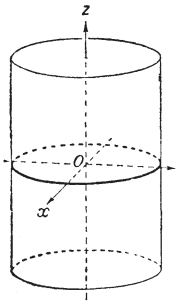


Рис. 223.

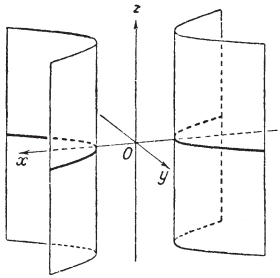


Рис. 224.

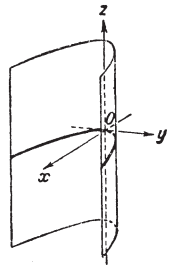


Рис. 225.

11. Поверхности 2-го порядка (общая теория)

Общее уравнение поверхности 2-го порядка:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$$

Инварианты поверхности 2-го порядка*:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix};\quad \delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix};$$

$$S=a_{11}+a_{22}+a_{33};$$

$$T=a_{22}a_{33}+a_{33}a_{11}+a_{11}a_{22}-a_{23}^2-a_{31}^2-a_{12}^2.$$

Эти величины не меняются при переносе начала и повороте координатных осей.

Вид поверхности 2-го порядка по ее уравнению определяется по знакам ее инвариантов Δ, δ, S и T из таблицы, приведенной на стр. 233. В этой таблице рядом с названием поверхности помещено каноническое уравнение, к которому преобразованием координат может быть приведено данное. Уравнениям так называемых мнимых поверхностей не удовлетворяют координаты ни одной действительной точки (кроме двух исключений – вершина мнимого конуса и линия пересечения мнимых плоскостей).

---

* Здесь принимается: $a_{ik}=a_{ki}$.

Определение вида поверхности 2-го порядка

I. $\delta \neq 0$ (центральные поверхности)

	$S\delta > 0$, $T > 0$	$S\delta$ и T не оба > 0
$\Delta < 0$	Эллипсоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	Двуполостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$
$\Delta > 0$	Мнимый эллипсоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$	Однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
$\Delta = 0$	Мнимый конус (с действительной вершиной) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$	Конус $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

II. $\delta = 0$ (параболоиды, цилиндры и пары плоскостей)

	$\Delta < 0$ (при этом $T > 0$)	$\Delta > 0$ (при этом $T < 0$)
$\Delta \neq 0$	Эллиптический параболоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \pm z$	Гиперболический параболоид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm z$
$\Delta = 0$	Цилиндрическая поверхность, направляющей которой служит кривая 2-го порядка. В зависимости от вида этой кривой (см. стр. 214—215) могут быть цилиндры разного вида (эллиптический действительный или мнимый при $T > 0$, гиперболический при $T < 0$, параболический при $T = 0$), если только поверхность не распадается на две плоскости (действительные, мнимые или сливающиеся). Условие распадения: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0.$	

II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

В дифференциальной геометрии изучаются кривые линии (плоские и пространственные) и поверхности методами дифференциального исчисления; поэтому функции, входящие в уравнения, предполагаются непрерывными и имеющими непрерывные производные до того порядка, который необходим по характеру исследуемого вопроса *. При изучении геометрических образов по их уравнениям различают их свойства, *зависящие* от выбора системы координат (например, пересечение кривой или поверхности с осями, наклон касательной, точки максимума и минимума), и *инвариантные свойства*, не изменяющиеся от преобразования координат и принадлежащие собственно кривой или поверхности (например, точки перегиба, вершины кривой, кривизна). С другой стороны, различают *локальные свойства*, относящиеся к весьма малым частям кривой или поверхности (например, кривизна, линейный элемент поверхности), и свойства кривой или поверхности *в целом* (например, число вершин, длина замкнутой кривой).

А. Плоские кривые

1. *Способы задания кривой*

Уравнение кривой **. Плоская кривая может быть аналитически задана в одной из следующих форм:

В декартовых координатах:

в неявном виде . . . . . $F(x, y) = 0,$ (1)

в явном виде . . . . . $y = f(x),$ (2)

в параметрическом виде . . . . $x = x(t),\ y = y(t).$ (3)

В полярных координатах: $\rho = f(\varphi).$ (4)

Положительное направление на кривой. Если кривая задана в форме (3), то на ней определяется *положительное*

---

* Это условие может нарушаться только для отдельных точек кривой или поверхности; в таком случае мы имеем точку специального типа (например, разрыв или излом кривой). О такого рода точках см. стр. 241, 259.

** Общее понятие об уравнении линии см. стр. 201.

направление — направление, в котором движется точка кривой $M[x(t), y(t)]$ при возрастании параметра t. Если кривая задана в форме (2), то параметром можно считать абсциссу точки: $x = x$, $y = f(x)$, и положительное направление соответствует возрастанию абсциссы (т. е. идет слева направо). Если кривая задана в форме (4), то параметром служит угол φ: $x = f(\varphi)\cos\varphi$, $y = f(\varphi)\sin\varphi$, и положительное направление соответствует возрастанию φ (т. е. идет против часовой стрелки).

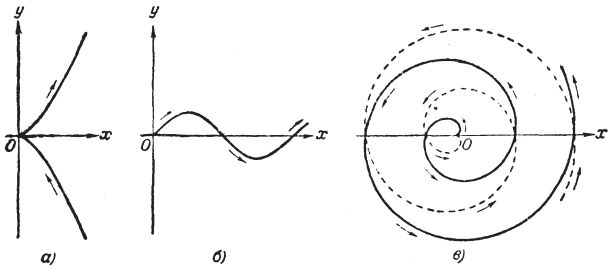


Рис. 226.

Примеры (рис. 226): а) $x = t^2$, $y = t^3$, б) $y = \sin x$, в) $\rho = a\varphi$.

2. *Локальные элементы кривой*

В настоящем параграфе через M обозначается переменная точка кривой, определенная: значением x при задании в форме (2), t — при задании (3) и φ — при задании (4); N — бесконечно близкая к ней точка, определенная соответственно значениями $x + dx$, $t + dt$ и $\varphi + d\varphi$.

Дифференциал дуги. Если s — длина кривой от некоторой постоянной точки A до M, то бесконечно малое приращение длины $\Delta s = \overset{\frown}{MN}$ выражается приближенно формулой дифференциала дуги * ds

$$\Delta s \approx ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \text{ при задании кривой в форме (2),}$$

$$= \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt \quad » \quad » \quad » \quad » \quad » \quad (3),$$

$$= \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\varphi \quad » \quad » \quad » \quad » \quad » \quad (4).$$

Примеры: 1) $y = \sin x$, $ds = \sqrt{1 + \cos^2 x}\,dx$;

2) $x = t^2$, $y = t^3$, $ds = t\sqrt{4 + 9t^2}\,dt$;

3) $\rho = a\varphi$, $ds = a\sqrt{1 + \varphi^2}\,d\varphi$.

---

* О дифференциале и его свойствах см. стр. 301 — 305

Касательная и нормаль. *Касательной* в точке M называется предельное положение секущей прямой MN, когда $N \to M$; *нормалью* — прямая, проходящая через M перпендикулярно к касательной (рис. 227).

Рис. 227.

Уравнения касательной и нормали (x, y — координаты точки M кривой; X, Y — текущие координаты точек касательной или нормали; значения производных вычисляются для точки M).

Форма задания кривой (см. стр. 234)	Уравнение касательной	Уравнение нормали
(1)	$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)=0$	$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}$
(2)	$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x)$	$Y-y=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(X-x)$
(3)	$\frac{Y-y}{y'}=\frac{X-x}{x'}$	$x'(X-x)+y'(Y-y)=0$

Примеры. Найти уравнения касательной и нормали:

1) Для окружности $x^2+y^2=25$ в точке M (3, 4). Уравнение касательной: $2x(X-x)+2y(Y-y)=0$ или (учитывая уравнение окружности) $Xx+Yy=25$; в точке M: $3X+4Y=25$. Уравнение нормали: $\frac{X-x}{2x}=\frac{Y-y}{2y}$ или $Y=\frac{y}{x}X$; в точке M: $Y=\frac{4}{3}X$.

2) Для синусоиды $y=\sin x$ в точке O (0, 0). Уравнение касательной: $Y-\sin x=\cos x(X-x)$ или $Y=X\cos x+\sin x-x\cos x$; в точке O: $Y=X$. Уравнение нормали: $Y-\sin x=-\frac{1}{\cos x}(X-x)$ или $Y=-X\sec x+$ $+\sin x+x\sec x$; в точке O: $Y=-X$.

3) Для кривой $x=t^2$, $y=t^3$ в точке M (4, -8), $t=-2$. Уравнение касательной: $\frac{Y-t^3}{3t^2}=\frac{X-t^2}{2t}$ или $Y=\frac{3}{2}tX-\frac{1}{2}t^3$, в точке M: $Y=-3X+4$. Уравнение нормали: $2t(X-t^2)+3t^2(Y-t^3)=0$ или $2X+3tY=t^2(2+3t^2)$, в точке M: $X-3Y=28$.

Положительное направление. Если кривая задана в форме (2), (3) или (4) (см. стр. 234), то на касательной и нормали определяются положительные направления: на касательной положительное направление совпадает с положительным направлением кривой в точке прикосно-

вения (см. выше, стр. 235), а на нормали — получается из положительного направления касательной поворотом вокруг точки M на 90° против часовой стрелки (рис. 228). Точка M разделяет касательную и нормаль на положительную и отрицательную полупрямые.

Рис. 228.

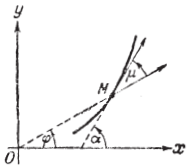


Рис. 229.

Наклон касательной определяется углом α, образованным положительным направлением оси абсцисс и положительным направлением касательной, или (при задании кривой в полярных координатах) — углом μ, образованным направлением радиуса-вектора $OM = \rho$ и положительным направлением касательной (рис. 229). Углы α и μ определяются формулами (ds вычисляется по формулам на стр. 235):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}, \qquad \cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \sin\alpha = \frac{dy}{ds};$$

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\rho}{\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)}, \qquad \cos\mu = \frac{d\rho}{ds}, \qquad \sin\mu = \rho\frac{d\varphi}{ds}.$$

Примеры:

1) $y = \sin x$; $\operatorname{tg}\alpha = \cos x$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$, $\sin\alpha = \dfrac{\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$;

2) $x = t^2$, $y = t^3$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3t}{2}$, $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{4+9t^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{3t}{\sqrt{4+9t^2}}$;

3) $\rho = a\varphi$; $\operatorname{tg}\mu = \varphi$, $\cos\mu = \dfrac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}$, $\sin\mu = \dfrac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}$.

Отрезки касательной и нормали: подкасательная и поднормаль (рис. 230):

а) В декартовых координатах [при задании в форме (2) и (3), см. стр. 234)]:

$$MT = \left|\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}\right| \quad \textit{(отрезок касательной)},$$

$$MN = \left|y\sqrt{1+y'^2}\right| \quad \textit{(отрезок нормали)},$$

$$PT = \left|\frac{y}{y'}\right| \quad \textit{(подкасательная)},$$

$$PN = |yy'| \quad \textit{(поднормаль)}.$$

б) В полярных координатах [при задании в форме (4), см. стр. 234]:

$$MT' = \left| \frac{\rho}{\rho'} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \right| \quad \textit{(отрезок полярной касательной)},$$

$$MN' = \left| \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \right| \quad \textit{(отрезок полярной нормали)},$$

$$OT' = \left| \frac{\rho^2}{\rho'} \right| \quad \textit{(полярная подкасательная)},$$

$$ON' = |\rho'| \quad \textit{(полярная поднормаль)}.$$

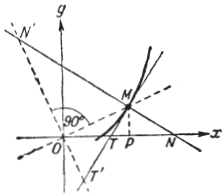


Рис. 230.

Примеры: 1) $y = \operatorname{ch} x$; $y' = \operatorname{sh} x$, $\sqrt{1 + y'^2} = \operatorname{ch} x$; $MT = |\operatorname{ch} x \operatorname{cth} x|$, $MN = |\operatorname{ch}^2 x|$, $PT = |\operatorname{cth} x|$, $PN = |\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x|$.

2) $\rho = a\varphi$; $\rho' = a$, $\sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = a\sqrt{1 + \varphi^2}$;

$MT' = |a\varphi\sqrt{1 + \varphi^2}|$, $MN' = |a\sqrt{1 + \varphi^2}|$, $OT' = |a\varphi^2|$, $ON' = a$.

Угол между двумя кривыми. Под углом между двумя кривыми Γ_1 и Γ_2, пересекающимися в точке M, понимают угол β между касательными к этим кривым в точке M (рис. 231). Вычисление угла β сводится к определению угла между двумя прямыми (см. стр. 204), угловые коэффициенты которых равны

Рис. 231.

$$k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 = \left(\frac{df_1}{dx}\right)_M,$$

$$k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 = \left(\frac{df_2}{dx}\right)_M,$$

где $y = f_1(x)$ – уравнение кривой Γ_1, а $y = f_2(x)$ – уравнение кривой Γ_2; производные вычисляются в точке M.

Пример: Определить угол между параболами $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$ в точке $M(1, 1)$. $\operatorname{tg} \alpha_1 = \left(\frac{d\sqrt{x}}{dx}\right)_{x=1} = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha_2 = \left(\frac{d(x^2)}{dx}\right)_{x=1} = 2$,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{3}{4}.$$

Вогнутость и выпуклость кривой. Если кривая задана в явной форме: $y = f(x)$, то для небольшой ее части, содержащей точку M (за исключением случаев, когда M – точка перегиба или особая точка, см. стр. 241 – 245), можно определить обращена ли кривая

своей вогнутостью вверх или вниз *, если в точке M вторая производная $f''(x) > 0$, то кривая обращена вогнутостью вверх ** (точка M_2 на рис 232), а если $f''(x) < 0$, то вниз (точка M_1); если же $y'' = 0$, то вопрос нуждается в дополнительном исследовании, которое проведено на стр. 242 — 243 при рассмотрении точек перегиба.

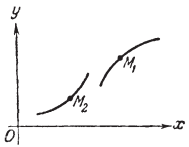


Рис. 232.

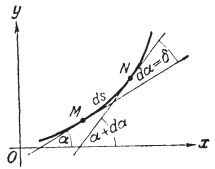


Рис. 233.

Пример: $y = x^3$ (см. рис. 6, *б* на стр. 85); $y'' = 6x$; при $x > 0$ кривая вогнута вверх, при $x < 0$ — вниз.

Кривизна и радиус кривизны. *Кривизной* K кривой в ее точке M называется предел отношения «угла смежности» δ между положительными направлениями касательных в точках M и N (рис. 233 к длине дуги $\overset{\smile}{MN}$, когда $\overset{\smile}{MN} \to 0$:

$$K = \lim \frac{\delta}{\overset{\smile}{MN}} \quad \text{при} \quad \overset{\smile}{MN} \to 0.$$

Кривизна K имеет знак «+» или «—» в зависимости от знака этого предела. Знак K указывает, направлена ли кривая своей вогнутостью в сторону положительной (при $K > 0$) или отрицательной (при $K < 0$ полупрямой нормали (см. стр. 237) ***.

Часто кривизну считают существенно положительной величиной понимая под ней абсолютную величину написанного выше предела.

Радиусом кривизны R в точке M кривой называется величина, обратная кривизне: $R = \frac{1}{K}$. Чем больше искривлена кривая вблизи данной точки, тем больше K и меньше R в этой точке. Для окружности с радиусом a кривизна $K = \frac{1}{a}$ и радиус кривизны $R = a$ (постоянны для всех точек); для прямой линии: $K = 0$, $R = \infty$; для прочих кривых кривизна меняется от точки к точке.

Формулы для K и R. Полагая (рис. 233) $\delta = d\alpha$ и $\overset{\smile}{MN} = ds$, имеем

$$K = \frac{d\alpha}{ds}, \quad R = \frac{ds}{d\alpha}. \qquad (*)$$

---

* Направление *выпуклости* противоположно направлению вогнутости.

** Точнее, в сторону положительного направления оси Oy.

*** Иначе: при $K > 0$ центр кривизны (см. ниже) лежит на положительной полупрямой нормали, а при $K < 0$ — на отрицательной.

Если кривая задана уравнениями (1), (2), (3) или (4) (см. стр. 234), то K и R вычисляются по формулам:

при задании в форме (2):

$$K=\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}},\qquad R=\frac{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}},$$

при задании в форме (3):

$$K=\frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{(x'^2+y'^2)^{3/2}},\qquad R=\frac{(x'^2+y'^2)^{3/2}}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}},$$

при задании в форме (1):

$$K=\frac{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}{(F'^2_x+F'^2_y)^{3/2}},\qquad R=\frac{(F'^2_x+F'^2_y)^{3/2}}{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}},$$

при задании в форме (4):

$$K=\frac{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}{(\rho^2+\rho'^2)^{3/2}},\qquad R=\frac{(\rho^2+\rho'^2)^{3/2}}{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}.$$

Примеры: 1) $y=\operatorname{ch} x, K=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$; 2) $x=t^2$, $y=t^3$, $K=\dfrac{6}{t\,(4+9t^2)^{3/2}}$;

3) $y^2-x^2=a^2$, $K=\dfrac{a^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$; 4) $\rho=a\varphi$, $K=\dfrac{1}{a}\dfrac{\varphi^2+2}{(\varphi^2+1)^{3/2}}$.

Круг кривизны и центр кривизны. *Кругом кривизны* в точке M кривой называется предельное положение круга, прохо-

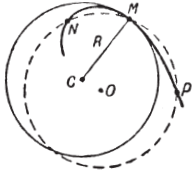


Рис. 234.

дящего через M и две другие близкие точки кривой N и , когда $N\to M$ и $P\to M$ (рис. 234). Радиус круга кривизны равен радиусу кривизны в соответствующей точке [вычисляется по формулам (**)]. Центр круга кривизны C называется *центром кривизны* для точки M

и находится на нормали к кривой в направлении ее вогнутости. Координаты центра кривизны (x_c, y_c) определяются следующими формулами:

при задании в форме (2) (см. стр. 234):

$$x_c = x - \frac{\frac{dy}{dx}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad y_c = y + \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}};$$

при задании в форме (3):

$$x_c = x - \frac{y'(x'^2+y'^2)}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}, \quad y_c = y + \frac{x'(x'^2+y'^2)}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}};$$

при задании в форме (4):

$$x_c = \rho\cos\varphi - \frac{(\rho^2+\rho'^2)(\rho\cos\varphi+\rho'\sin\varphi)}{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''},$$

$$y_c = \rho\sin\varphi - \frac{(\rho^2+\rho'^2)(\rho\sin\varphi-\rho'\cos\varphi)}{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''};$$

при задании в форме (1):

$$x_c = x + \frac{F'_x(F'^2_x+F'^2_y)}{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}, \quad y_c = y + \frac{F'_y(F'^2_x+F'^2_y)}{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}. \qquad (\ast\ast\ast)$$

Эти формулы могут быть записаны в виде

$$x_c = x - R\sin\alpha,$$

$$y_c = y + R\cos\alpha$$

или

$$x_c = x - R\frac{dy}{ds},$$

$$y_c = y + R\frac{dx}{ds}$$

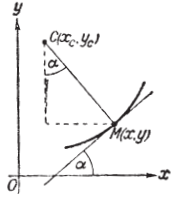


Рис. 235.

(рис. 235), где R вычисляется по формулам $(\ast\ast)$ (см. стр. 240).

3. Точки специального типа *

Точки перегиба — точки кривой, в которых направление вогнутости меняется на обратное (рис. 236); кривая в малой части, заключающей эту точку, лежит не по одну сторону от касательной, а пересекает ее. В точке перегиба кривизна $K = 0$, а радиус кривизны $R = \infty$.

* Здесь рассмотрены только точки, инвариантные относительно преобразования координат. Нахождение максимума и минимума см. стр. 318 — 320.

Правила нахождения точек перегиба.

Задание кривой в форме (2): $y = f(x)$.

Необходимое условие точки перегиба: в ней вторая производная $f''(x)$, если она существует, должна обратиться в нуль. Для нахождения точек перегиба, в которых $f''(x)$ существует *, определяются все значения $x_1, x_2, \ldots$ корней уравнения $f''(x) = 0$, и каждое значение x_i подставляется последовательно в последующие производные. Если $f'''(x_i) \neq 0$, то x_i — абсцисса точки перегиба, если $f'''(x_i) = 0$, а $f^{IV}(x_i) \neq 0$, то x_i — не точка перегиба и т. д.; в зависимости от того, какая из последовательных производных — нечетного или четного порядка — впервые окажется отличной от нуля в рассматриваемой точке, эта точка

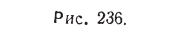


Рис. 236.

соответственно будет или не будет точкой перегиба. Если исследуемая точка не является точкой перегиба (впервые не обращается в нуль производная k-го порядка при k четном), то кривая обращена выпуклостью вверх при $f^{(k)}(x) < 0$ и вниз при $f^{(k)}(x) > 0$.

Примеры: 1) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$; $f''(x) = -2\dfrac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}$, $x_{1,2} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $f'''(x) = 24x\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^4}$. $f'''(x_{1,2}) \neq 0$; точки перегиба $A\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{3}{4}\right)$, $B\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{3}{4}\right)$.

2) $y = x^4$, $f''(x) = 12x^2$. $x_1 = 0$, $f'''(x) = 24x$. $f'''(x_1) = 0$, $f^{IV}(x) = 24$; точки перегиба нет.

Можно также определить, является ли найденное значение x_i абсциссой точки перегиба, непосредственно исследуя изменение знака второй производной при переходе через эту точку: если знак $f''(x)$ меняется на обратный, то направление вогнутости также меняется на обратное (см. стр. 239) и мы имеем точку перегиба. Этот способ применим и в том случае, когда $y'' = \infty$.

Пример: $y = x^{5/3}$, $y' = \dfrac{5}{3}x^{2/3}$, $y'' = \dfrac{10}{9}x^{-1/3}$; при $x = 0$ $y'' = \infty$. При переходе от отрицательных значений x к положительным вторая производная меняет знак с «—» на «+»; следовательно при $x = 0$ кривая имеет точку перегиба.

Практически, если по характеру кривой ясно, что у нее должны быть точки перегиба (например, между максимумом и минимумом для графика функции, имеющей непрерывную производную), то ограничиваются только нахождением x_i, не интересуясь высшими производными.

Другие задания кривой. Данное выше необходимое условие существования точки перегиба $f''(x) = 0$ при задании уравнения кривой в других формах заменяется следующими:

параметрическая форма (3) (см. стр. 234): $\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = 0$;

полярная форма (4): $\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = 0$;

* Нахождение точек перегиба для тех случаев, когда $f''(x)$ не существует (например, обращается в бесконечность), см. ниже.

общая форма (1): решается система уравнений

$$F(x,\ y)=0 \text{ и } \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

система решений дает координаты возможных точек перегиба.

Примеры: 1) $x = a\left(t - \frac{1}{2}\sin t\right)$; $y = a\left(1 - \frac{1}{2}\cos t\right)$ («укороченная циклоида», см. стр. 108);

$$\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = \frac{a^2}{4}\begin{vmatrix} 2-\cos t & \sin t \\ \sin t & \cos t \end{vmatrix} = \frac{a^2}{4}(2\cos t - 1);$$

$$\cos t = \frac{1}{2}; \quad t_i = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi;$$

точек перегиба бесконечно много, они соответствуют значениям параметра t_i.

2) $\rho = \frac{1}{\sqrt{\varphi}}$; $\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{2\varphi^2} - \frac{3}{4\varphi^3} = \frac{1}{4\varphi^3}(4\varphi^2 - 1)$;

точка перегиба определяется полярным углом $\varphi = \frac{1}{2}$.

3) $x^2 - y^2 = a^2$ (гипербола). $\begin{vmatrix} F'' & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2x \\ 0 & -2 & -2y \\ 2x & -2y & 0 \end{vmatrix} = 8x^2 - 8y^2$;

уравнения $x^2 - y^2 = a^2$ и $8(x^2 - y^2) = 0$ противоречивы; следовательно, гипербола точек перегиба не имеет.

В е р ш и н ы — точки кривой, в которых кривизна имеет максимум или минимум (кривая наиболее или наименее изогнута); например: у эллипса 4 вершины: A, B, C и D, у логарифмики — одна: E (рис. 237).

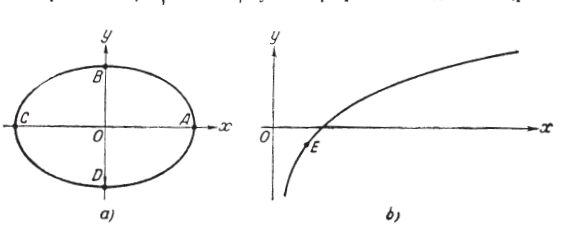


Рис. 237.

Нахождение вершин сводится к определению максимума и минимума выражения K, данного формулами (✳✳) на стр. 240 (или минимума и максимума для $R = 4/K$, если в этом случае вычисления получаются проще).

Особые точки. Этим общим названием объединяются точки различного типа: а) *узловые точки*, в которых кривая сама себя пересекает (рис. 238, *а*); б) *изолированные точки*, расположенные отдельно от кривой, но с координатами, удовлетворяющими уравнению кривой (рис. 238, *б*); в) *точки возврата* или *заострения*, в которых направление кривой меняется на обратное; различают точки возврата: 1-*го рода* (рис. 238, $в_1$) и 2-*го рода* (рис. 238, $в_2$), в зависимости от расположения касательной относительно обеих ветвей; г) *точки самоприкосновения*, в которых кривая сама себя касается (рис. 238, *г*); д) *точки излома*, в которых кривая «скачком» изменяет свое направление причем в отличие от точки возврата касательные к обеим частям кривой в точке излома различны (рис. 238, *д*); е) *точки прекращения*, на которых кривая обрывается (рис. 238, *е*); ж) *асимптотические точки*, вокруг которых кривая закручивается бесконечное число раз, подходя к ним на

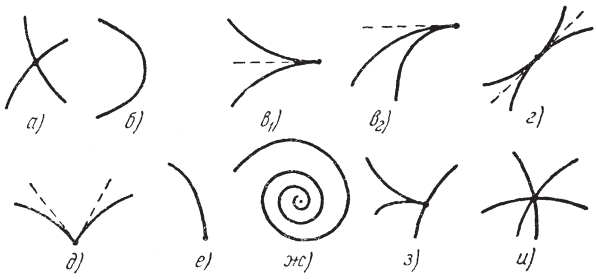


Рис. 238.

сколь угодно малое расстояние (рис. 238, *ж*). Могут встречаться одновременные комбинации двух или нескольких из этих особенностей (рис. 238, *з* и *и*).

Нахождение точек типа д – ж. Особенности этих типов могут существовать только у трансцендентных кривых *. Точки излома соответствуют конечному разрыву производной $\frac{dy}{dx}$, например, начало координат у кривой $y = \frac{x}{1 + e^{1/x}}$ (см. рис. 284, *в* на стр. 303). Точки прекращения соответствуют конечному разрыву или обрыву функции $y = f(x)$, например, точки (1, 0) и (1, 1) кривой $y = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}}$ (см. рис. 272 на стр. 277). Асимптотические точки проще всего обнаружить у кривых, заданных в полярной форме: $\rho = f(\varphi)$; если $\lim \rho = 0$, когда $\varphi \to +\infty$ или $\varphi \to -\infty$, то полюс – асимптотическая точка, например, у логарифмической спирали $\rho = ae^{k\varphi}$ (см. рис. 60 на стр. 112).

Нахождение точек типа а – г, з – и, называемых *кратными точками* (*двойными*, *тройными* и т. д.). Кривую изучают в форме $F(x, y) = 0$. Точки A, координаты которых (x_1, y_1) удовлетворяют одновременно

*) См. стр. 201.

трем уравнениям: $F=0$, $F'_x=0$, $F'_y=0$, являются *двойными*, если из трех производных 2-го порядка F''_{xx}, F''_{xy}, F''_{yy} хотя бы одна не равна 0 (в противном случае A — точка *тройная* или высшей кратности, их исследование см. Смирнов — стр. 585 справочника). Характер двойной точки зависит от знака

$$\Delta=\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} \\ F''_{yx} & F''_{yy} \end{vmatrix}_{\left(\substack{x=x_1\\ y=y_1}\right)}.$$

1) Если $\Delta<0$, то A — узловая точка, угловые коэффициенты касательных в ней равны корням уравнения

$$F''_{yy}k^2+2F''_{xy}k+F''_{xx}=0.$$

2) Если $\Delta>0$, то A — изолированная точка.

3) Если $\Delta=0$, то A либо точка возврата, либо точка самоприкосновения; наклон касательной в ней:

$$\operatorname{tg}\alpha=-F''_{xy}/F''_{yy}.$$

Для детального исследования кратной точки в этом случае следует перенести в нее начало координат и повернуть оси так, чтобы ось Ox пошла по направлению касательной в точке A; тогда по виду уравнения можно установить, имеем ли мы точку возврата 1-го рода, 2-го рода или точку самоприкосновения.

Примеры. 1) $F(x, y)\equiv(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0$ (лемниската, см. рис. 51 на стр. 107); $F'_x=4x(x^2+y^2-a^2)$, $F'_y=4y(x^2+y^2+a^2)$; система $F'_x=0$, $F'_y=0$ дает три решения: $(0, 0)$, $(\pm a, 0)$, но только первое удовлетворяет $F=0$. При подстановке $(0, 0)$ в производные 2-го порядка имеем: $(F''_{xx})_0=-4a^2$, $(F''_{xy})_0=0$, $(F''_{yy})_0=+4a^2$; $\Delta=-16a^4<0$, т. е. начало — узловая точка; наклон касательных: $\operatorname{tg}\alpha=\pm 1$, и уравнения касательных: $y=\pm x$.

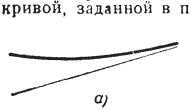
2) $F(x, y)\equiv x^3+y^3-x^2-y^2=0$; $F'_x=x(3x-2)$, $F'_y=y(3y-2)$; из четырех точек $(0, 0)$, $\left(0, \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ и $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ только первая лежит на кривой; $(F''_{xx})_0=-2$, $(F''_{xy})_0=0$, $(F''_{yy})_0=-2$, $\Delta=4>0$, т. е начало — изолированная точка.

3) $F(x, y)\equiv(y-x^2)^2-x^5=0$. Система $F'_x=0$, $F'_y=0$ дает единственное решение $(0, 0)$, удовлетворяющее и уравнению $F=0$; $\Delta=0$; $\operatorname{tg}\alpha=0$. В данном случае имеем в начале точку возврата 2-го рода, что ясно из уравнения кривой в явной форме: $y=x^2(1\pm\sqrt{x})$; y не существует при $x<0$, а при неотрицательных $x>0$ оба значения y положительны (касательная же в начале горизонтальна).

Случай алгебраической кривой $F(x, y)=0$. Если уравнение не содержит свободных членов и членов 1-й степени, то начало координат — двойная точка, уравнения касательных в которой получим сразу, приравняв нулю все члены второй степени; например, для лемнискаты (см. выше, пример 1) уравнения касательных: $x^2-y^2=0$ или $y=\pm x$. Если нет и членов второй степени, то начало — тройная точка и т. д.

4. *Асимптоты*

Общий случай. Если кривая какой-либо своей частью неограниченно удаляется от начала координат, то эта часть (*бесконечная ветвь* кривой) может иногда иметь *асимптоту* — прямую, к которой кривая неограниченно приближается или с одной стороны (рис. 239, *а*), или все время пересекая ее (рис. 239, *б*). Для отыскания асимптоты кривой, заданной в параметрической форме: $x = x(t)$, $y = y(t)$, находят значения $t = t_i$, при которых $x(t) \to \infty$ или $y(t) \to \infty$.



а)

б)

Рис. 239.

Если

$$x(t_i) = \infty, \text{ но } y(t_i) = a \neq \infty,$$

то прямая $y = a$ — горизонтальная асимптота; если

$$y(t_i) = \infty, \text{ но } x(t_i) = a \neq \infty,$$

то прямая $x = a$ — вертикальная асимптота; если

$$x(t_i) = \infty \text{ и } y(t_i) = \infty,$$

то вычисляют два предела:

$$k = \lim_{t \to t_i} \frac{y(t)}{x(t)} \text{ и } b = \lim_{t \to t_i} [y(t) - k \cdot x(t)];$$

при существовании обоих этих пределов кривая имеет асимптоту $y = kx + b$.

При задании кривой в явной форме $y = f(x)$ вертикальные асимптоты находят как точки разрыва функции $f(x)$ (см. стр. 281–284), а горизонтальные и наклонные асимптоты представляют в форме $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx].$$

Пример: $x = \dfrac{m}{\cos t}$, $y = n(\operatorname{tg} t - t)$, $t_1 = \dfrac{\pi}{2}$, $t_2 = -\dfrac{\pi}{2}$ и т. д. Найдем, например, асимптоту при $t = \dfrac{\pi}{2}$:

$$x(t_1) = y(t_1) = \infty, \quad k = \lim_{t \to \pi/2} \frac{n}{m}(\sin t - t \cos t) = \frac{n}{m},$$

$$b = \lim_{t \to \pi/2} \left[n(\operatorname{tg} t - t) - \frac{n}{m} \frac{m}{\cos t} \right] = n \cdot \lim_{t \to \pi/2} \frac{\sin t - t \cos t - 1}{\cos t} = -\frac{n\pi}{2},$$

$$y = \frac{n}{m} x - \frac{n\pi}{2}; \quad \frac{x}{m} - \frac{y}{n} = \frac{\pi}{2}.$$

Случай алгебраической кривой $F(x, y) = 0$. Функция $F(x, y)$ — многочлен относительно x и y. Отберем те члены $F(x, y)$, которые имеют наибольшее измерение *. Обозначаем через $\Phi(x, y)$ отобранную группу «старших» членов и решаем уравнение $\Phi(x, y) = 0$ относительно x и y:

$$x = \varphi(y), \quad y = \psi(x).$$

---

* Под *измерением* члена $Ax^m y^n$ понимается сумма показателей $(m + n)$ при x и y. Так, член $3x^2y^3$ пятого измерения, $2y^2$ — второго; в многочлене $x^3 + y^3 - 3xy$ «старшие» члены: x^3 и y^3.

Значения $y_1 = a$, для которых $x = \infty$, дают горизонтальные асимптоты $y = a$; значения $x_1 = b$, для которых $y = \infty$, дают вертикальные асимптоты $x = b$. Для отыскания наклонных асимптот подставляем в $F(x, y)$ выражение $y = kx + b$ и располагаем полученный многочлен по степеням относительно x:

$$F(x,\ kx + b) \equiv f_1(k)\, x^m + f_2(k,\ b)\, x^{m-1} + \ldots$$

Приравниваем нулю два старших коэффициента f_1 и f_2 и решаем систему уравнений

$$f_1(k) = 0,\quad f_2(k,\ b) = 0.$$

Если она совместна, то ее решения k, b дадут параметры асимптот $y = kx + b$.

Пример. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ («декартов лист», см. рис. 44 на стр. 103). $F(x,\ kx + b) \equiv (1 + k^3)\, x^3 + 3(k^2 b - ka)\, x^2 + \ldots$; $1 + k^3 = 0$ и $k^2 b - ka = 0$ дает систему решений $k = -1$, $b = -a$; уравнение асимптоты: $y = -x - a$.

5. *Общее исследование кривой по ее уравнению*

Исследование кривых по их уравнениям проводят с целью изучить поведение некоторой однозначной функции $y = f(x)$ или установить вид кривой линии, определенной аналитически одной из форм (1), (2), (3) или (4) (см. стр. 234).

Построение графиков функций, заданных в форме $y = f(x)$.

1) Находят область определенности (стр. 271).

2) Устанавливают наличие симметрии относительно оси Oy или относительно начала по четности или нечетности функции (стр. 275).

3) Определяют «поведение функции в бесконечности», вычисляя пределы $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ (стр. 277).

4) Находят точки разрыва и определяют их характер (стр. 282—283)

5) Находят пересечение кривой с осью Oy, вычисляя $f(0)$, и с осью Ox, решая уравнение $f(x) = 0$ (о решении алгебраического и трансцендентного уравнений в общей форме см. стр. 144).

6) Находят точки максимума и минимума (стр. 318), устанавливая области возрастания и убывания функции.

7) Находят точки перегиба (стр. 241—242), устанавливая области, где кривая обращена вогнутостью вверх и вниз (стр. 238), причем в точках перегиба вычисляют наклон касательной.

По всем этим данным постепенно делают набросок кривой, уточняя его затем по отдельным точкам в тех местах, которые представляют интерес.

Пример. Построить график функции

$$y = \frac{2x^2 + 3x - 4}{x^2}.$$

1) Функция существует при всех x, кроме $x = 0$.

2) Симметрии нет.

3) $y \to 2$ при $x \to \pm\infty$, причем если $x \to -\infty$, то $y = 2 - 0$ (стремится к 2 «снизу»), а если $x \to +\infty$, то $y = 2 + 0$ (стремится к 2 «сверху»).

4) При $x = 0$ — бесконечный разрыв (от $-\infty$ до $-\infty$, так как y отрицательно при малых x).

5) $f(0)=\infty$; уравнение $2x^2+3x-4=0$ имеет корни $x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{41}}{4}$; таким образом, пересечения с осью Ox: $x_1\approx 0{,}85$, $x_2\approx -2{,}35$.

6) Точка максимума $x=\frac{8}{3}\approx 2{,}66$, $y\approx 2{,}56$.

7) Точка перегиба: $x=4$, $y=2{,}5$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{16}$.

Набросав кривую по этим данным, вычисляем еще

8) пересечение кривой с асимптотой

$$x=\frac{4}{3}\approx 1{,}33;\quad y=2.$$

Рис. 240.

Кривая изображена на рис. 240.

Построение кривых, заданных в неявной форме $F(x, y)=0$. Общими правилами руководствоваться трудно, так как это очень часто приводит к сложным вычислениям. Если возможно, полезно найти следующие элементы:

1) Определить все точки пересечения с осями.

2) Выяснить симметричность кривой относительно осей и начала (заменяя x на $-x$, y на $-y$).

3) Найти максимум и минимум относительно оси Ox (см. стр. 320) и оси Oy, применив аналогичные формулы с переменной осей координат.

4) Найти точки перегиба (стр. 243) и наклон касательной в них.

5) Найти особые точки (стр. 244—245).

6) Найти вершины кривой (стр. 243); построить для них круги кризины (стр. 240) — их дуги на значительном расстоянии будут на глаз неотличимы от кривой.

7) Найти все асимптоты (стр. 246) и исследовать расположение ветвей относительно асимптот.

6. Эволюты и эвольвенты

Эволюта данной кривой — кривая, состоящая из центров кривизны (см. стр. 240) для всех точек данной кривой; она же является огибающей (см. стр. 249) нормалей данной кривой. Параметрические уравнения эволюты — см. формулу (***) на стр. 241 (уравнения для центра кривизны, где нужно считать x_C и y_C за текущие координаты эволюты). Если удается из этих уравнений исключить параметр (x, t или φ), то получаем уравнения эволюты в декартовых координатах.

Пример: найти эволюту параболы $y=x^2$ (рис. 241). Имеем:

$$X=x-\frac{2x(1+4x^2)}{2}=-4x^3,\quad Y=x^2+\frac{1+4x^2}{2}=\frac{1+6x^2}{2},$$

откуда $Y=\frac{1}{2}+3\left(\frac{X}{4}\right)^{2/3}$, где X, Y — текущие координаты эволюты.

Эвольвента, иначе *инволюта* данной кривой Γ_2 — такая кривая Γ_1, по отношению к которой Γ_2 является эволютой. Нормаль MC эвольвенты является касательной к эволюте, длина дуги $\overset{\frown}{CC_1}$ эволюты равна приращению радиуса кривизны эвольвенты (рис. 241):

$$\overset{\frown}{CC_1}=M_1C_1-MC.$$

Эти свойства позволяют считать эвольвенту Γ_1 «*развертывающей*» кривой Γ_2, получающейся из Γ_2 разматыванием натянутой нити. Данной

эволюте соответствует семейство эвольвент, каждая из которых определяется первоначальной длиной нити (рис. 242). Уравнение эвольвенты получается интегрированием системы дифференциальных урав-

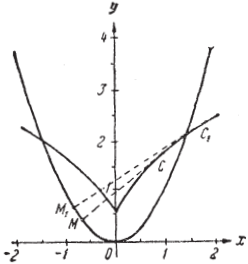


Рис. 241.

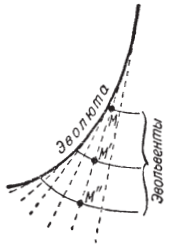


Рис. 242.

нений, представляющих уравнение эволюты: уравнение эвольвенты окружности см. стр. 112.

7. Огибающие семейства кривых

Характеристические точки. Если имеется семейство кривых с одним параметром α:

$$F(x, y, \alpha) = 0, \qquad (*)$$

то две бесконечно близкие кривые этого семейства, соответствующие значениям α и $\alpha + \Delta\alpha$, имеют *точки наибольшего сближения* K. Эти точки являются либо пересечением кривых (α) и $(\alpha + \Delta\alpha)$, либо такими точками на (α), что их расстояние до $(\alpha + \Delta\alpha)$ (по нормали) — бесконечно малая высшего порядка по отношению к $\Delta\alpha$ (рис. 243, *а* и *б*). Если $\Delta\alpha \to 0$, то кривая $(\alpha + \Delta\alpha)$ стремится слиться с первой, а точка K в некоторых случаях приближается к предельному положению — *характеристической точке*. Особые точки кривой (α) всегда являются характеристическими

Рис. 243.

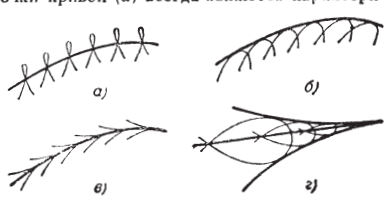


Рис. 244.

Характеристики. Геометрическое место характеристических точек для всех кривых семейства $(*)$ образует кривую (или несколько кривых), называемую *характеристикой* этого семейства; она либо состоит из особых точек кривых семейства (рис. 244, *а*), либо является *огибающей* этих кривых, т. е. касается каждой кривой семейства (рис. 244, *б*); могут быть и комбинации этих обоих типов (рис. 244, *в*, *г*).

Уравнение огибающей (и характеристики в общем случае) семейства $F(x, y, \alpha) = 0$ получим, если исключим α из системы уравнений $F = 0$, $\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$.

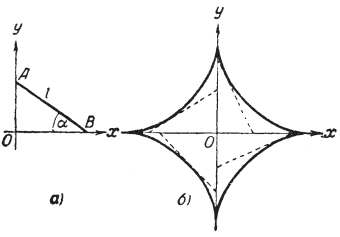


Рис. 245.

Пример: Найти уравнение огибающей семейства прямых, на которых лежит отрезок $AB = l$, если его концы A и B скользят по осям координат (рис. 245, *а*).

Уравнение семейства:

$$\frac{x}{l \sin \alpha} + \frac{y}{l \cos \alpha} = 1 \text{ или}$$

$$F \equiv x \cos \alpha + y \sin \alpha - l \sin \alpha \cos \alpha = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = -x \sin \alpha + y \cos \alpha - l \cos^2 \alpha + l \sin^2 \alpha = 0.$$

Исключая из этих уравнений α, имеем: $x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3}$, т. е. огибающая — *астроида* (рис. 245, *б*, см. также стр. 109—110).

Б. Пространственные кривые

8. *Способы задания кривой*

Координатные уравнения. Пространственная кривая («линия *двоякой кривизны*») может быть аналитически задана в одной из следующих форм:

а) Пересечение двух поверхностей:

$$F(x, y, z) = 0, \qquad \Phi(x, y, z) = 0. \tag{1}$$

б) Параметрическая форма:

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t) \tag{2}$$

(t — любой параметр, в частности, $t = x$, y или z).

в) Параметрическая форма:

$$x = x(s), \qquad y = y(s), \qquad z = z(s) \tag{3}$$

(s — длина дуги от некоторой точки A до текущей M):

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Векторное уравнение. Обозначая через $\mathbf{r}$ радиус-вектор любой точки кривой (см. стр. 520), представляем уравнение (2) в форме

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \text{ где } \mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}, \tag{2a}$$

и уравнение (3) — в форме:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s), \text{ где } \mathbf{r}(s) = x(s)\,\mathbf{i} + y(s)\,\mathbf{j} + z(s)\,\mathbf{k}. \tag{3a}$$

Положительное направление на кривой, заданной уравнением (2) или (2а), соответствует возрастанию параметра t, а на кривой, заданной уравнением (3) или (3а), — направлению отсчета длины дуги s.

9. Сопровождающий трехгранник

Определения. В каждой точке M пространственной кривой (кроме особых точек) определяются 3 прямые и 3 плоскости, взаимно пересекающиеся в M под прямыми углами (рис. 246):

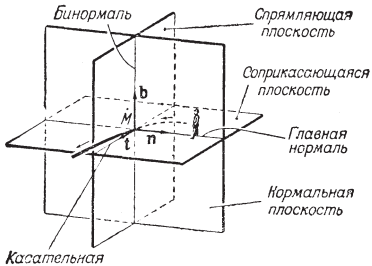


Рис. 246.

1) *Касательная* — предельное положение секущей MN, когда $N \to M$ (см. рис. 227 на стр. 236).

2) *Нормальная плоскость* — перпендикулярная к касательной. Все прямые, проходящие через M и лежащие в этой плоскости, называются *нормалями* к кривой в точке M.

3) *Соприкасающаяся плоскость* — предельное положение плоскости, проходящей через 3 близкие точки кривой M, N и P, когда $N \to M$ и $P \to M$ (рис. 247). Соприкасающаяся плоскость содержит в себе касательную.

4) *Главная нормаль* — пересечение нормальной и соприкасающейся плоскостей (та из нормалей, которая лежит в соприкасающейся плоскости).

5) *Бинормаль* — прямая, перпендикулярная к соприкасающейся плоскости.

6) *Спрямляющая плоскость* — содержащая касательную и бинормаль.

Рис. 247.

На трех прямых 1), 4) и 5) устанавливаются положительные направления: на касательной оно соответствует положительному направлению на кривой и определяется единичным вектором $\mathbf{t}$; на главной нормали идет в сторону вогнутости кривой и определяется единичным вектором $\mathbf{n}$; на бинормали определяется единичным вектором $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ ($\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$ должны образовать правую тройку, см. стр. 522). Три вектора $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$ вместе с соединяющими их плоскостями образуют *сопровождающий трехгранник* пространственной кривой.

Расположение кривой относительно трехгранника. В точках общего типа кривая расположена по одну сторону от спрямляющей плоскости и пересекает нормальную и соприкасающуюся плоскости (рис 248, *а*). При этом проекции небольшого

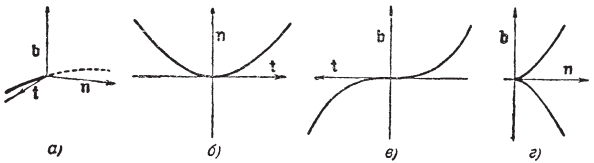


Рис. 248.

отрезка кривой, содержащего точку M, на плоскости трехгранника имеют (приближенно) вид:

на соприкасающуюся плоскость — параболы (рис. 248, *б*),
» спрямляющую » — кубической параболы (рис. 248, *в*),
» нормальную » — полукубической параболы (рис. 248, *г*).

Если же в точке M кривизна или кручение кривой (см. ниже) равны нулю или точка является особой [$x'(t) = y'(t) = z'(t) = 0$], то кривая может иметь и иное расположение *.

Уравнение элементов трехгранника.

а) *Задание кривой в форме* (1) (стр. 250).

Касательная:
$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix}} = \frac{Y-y}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{vmatrix}} = \frac{Z-z}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{vmatrix}};$$

нормальная плоскость:
$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

(x, y, z — координаты точки M кривой; X, Y, Z — текущие координаты касательной или нормальной плоскости; частные производные вычисляются в точке M).

б) *Задание кривой в форме* (2) *или* (2а) (см. стр. 250).

В формулах на стр. 253 x, y, z, $\mathbf{r}$ — координаты и радиус-вектор точки M кривой; X, Y, Z, $\mathbf{R}$ — текущие координаты и радиус-вектор элемента трехгранника; производные берутся по параметру t и вычисляются в точке M.

---

* См. Рашевский (стр. 587 справочника).

Векторное уравнение	Координатные уравнения
Касательная:	
$\mathbf{R}=\mathbf{r}+\lambda\frac{d\mathbf{r}}{dt}$	$\frac{X-x}{x'}=\frac{Y-y}{y'}=\frac{Z-z}{z'}$
Нормальная плоскость:	
$(\mathbf{R}-\mathbf{r})\frac{d\mathbf{r}}{dt}=0$	$x'(X-x)+y'(Y-y)+z'(Z-z)=0$
Соприкасающаяся плоскость:	
$(\mathbf{R}-\mathbf{r})\frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=0$	$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}=0$
Бинормаль:	
$\mathbf{R}=\mathbf{r}+\lambda\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)$	$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}}=\frac{Y-y}{\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}}=\frac{Z-z}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}$
Спрямляющая плоскость:	
$(\mathbf{R}-\mathbf{r})\frac{d\mathbf{r}}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)=0$	$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ l & m & n \end{vmatrix}=0,$ где $l=y'z''-y''z'$, $m=z'x''-z''x'$, $n=x'y''-x''y'$
Главная нормаль:	
$\mathbf{R}=\mathbf{r}+\lambda\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)$	$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ m & n \end{vmatrix}}=\frac{Y-y}{\begin{vmatrix} z' & x' \\ n & l \end{vmatrix}}=\frac{Z-z}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ l & m \end{vmatrix}}$

в) *Задание кривой в форме* (3) *или* (3а) (см. стр. 250).

Если в качестве параметра принята длина дуги s, то уравнения касательной, нормальной плоскости, соприкасающейся плоскости и бинормали будут такие же, как и в общем случае б) (t следует заме-

нить на s), а уравнения главной нормали и спрямляющей плоскости упрощаются:

Элемент трехгранника	Векторное уравнение	Координатные уравнения
Главная нормаль	$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \lambda \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$	$\frac{X-x}{x''} = \frac{Y-y}{y''} = \frac{Z-z}{z''}$
Спрямляющая плоскость	$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = 0$	$x''(X-x) + y''(Y-y) + z''(Z-z) = 0$

10. Кривизна и кручение

К р и в и з н а кривой в точке M — число, характеризующее отклонение кривой (в малой ее части, заключающей точку M) от прямой линии. Точное определение: кривизна $K = \lim\limits_{\overset{\smile}{MN} \to 0} \left| \frac{\Delta \mathbf{t}}{\overset{\smile}{MN}} \right| = \left| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right|$ (рис. 249).

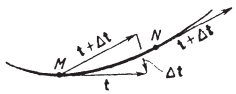


Рис. 249.

Радиус кривизны $\rho = \frac{1}{K}$. К и р для пространственных кривых всегда положительны.

Формулы для вычисления K и ρ:

а) Задание в форме (3) (см. стр. 250):

$$K = \left| \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right| = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2} \qquad (*)$$

(производные по s).

б) Задание в форме (2) (см. стр. 250):

$$K^2 = \frac{\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2 \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)^2 - \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)^2}{\left|\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2\right|^3} =$$

$$= \frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)(x''^2 + y''^2 + z''^2) - (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^3} \qquad (**)$$

(производные по t).

Пример: Найти кривизну *винтовой линии* (рис. 250): $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$*. Заменяем параметр t через s: $s = t\sqrt{a^2+b^2}$, откуда

$$x = a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad y = a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$z = \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \text{и по формуле } (*):$$

$$K = \frac{a}{a^2+b^2},\quad \rho = \frac{a^2+b^2}{a}\ (\text{постоянны}).$$

Тот же результат получим и без перехода к параметру s, применяя формулу $(**)$.

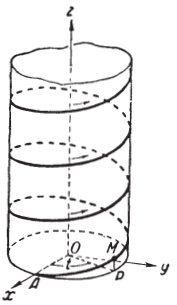


Рис. 250.

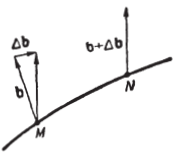


Рис. 251.

Кручение кривой в точке M — число, характеризующее отклонение кривой (в малой ее части, заключающей точку M) от плоской кривой. Точное определение: кручение — число, определяемое формулой

$$T = \lim_{\overset{\frown}{MN}\to 0}\left|\frac{\Delta\mathbf{b}}{\overset{\frown}{MN}}\right| = \left|\frac{d\mathbf{b}}{ds}\right| \quad \text{(рис. 251).} \qquad \textit{Радиус кручения } \tau = \frac{1}{T}.$$

Формулы для вычисления T и τ:

а) Задание в форме (3) (см. стр. 250):

$$T = \frac{1}{\tau} = \rho^2\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}\,\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\,\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\right) = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{(x'^2+y'^2+z'^2)} \qquad \begin{matrix}(*)\\(*)\end{matrix}$$

(производные по s).

б) Задание в форме (2):

$$T = \frac{1}{\tau} = \rho^2\frac{\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\,\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\,\dfrac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}}{\left|\left(\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2\right|^3} = \rho^2\frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{(x'^2+y'^2+z'^2)^3} \qquad \begin{matrix}(**)\\(**)\end{matrix}$$

[ρ вычисляется по формулам $(*)$ или $(**)$].

---

* Винтовая линия, определяемая этим уравнением и изображенная на рис. 250, называется *правой*; наблюдатель, расположившийся вдоль оси винтовой линии (оси Oz), видит эту линию закручивающейся (при подъеме) в направлении против часовой стрелки.

Винтовая линия, симметричная правой винтовой линии относительно некоторой плоскости, называется *левой*; наблюдатель видит ее закручивающейся (при подъеме) в направлении по часовой стрелке.

Кручение, вычисляемое по формулам $\begin{pmatrix}**\end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix}****\end{pmatrix}$, положительно или отрицательно. Если $T>0$, то с точки зрения наблюдателя, стоящего на главной нормали параллельно бинормали (см. рис. 246), кривая кажется закручивающейся справа вверх налево, подобно штопору. Если же $T<0$, то кривая с той же точки зрения закручивается слева вверх направо.

Пример. Для винтовой линии кручение постоянно. Для правой винтовой линии оно равно

$$I=\left(\frac{a^2+b^2}{a}\right)^2\frac{\begin{vmatrix}-a\sin t & a\cos t & b\\ -a\cos t & -a\sin t & 0\\ a\sin t & -a\cos t & 0\end{vmatrix}}{[(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+b^2]^3}=\frac{b}{a^2+b^2},\quad \tau=\frac{a^2+b^2}{b}.$$

Для левой винтовой линии кручение отрицательно:

$$T=-\frac{b}{a^2+b^2}.$$

Формулы Серре-Френе. Производные векторов t, n и b по параметру s выражаются следующими *формулами Серре-Френе:*

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds}=\frac{\mathbf{n}}{\rho},\qquad \frac{d\mathbf{n}}{ds}=\frac{\mathbf{t}}{\rho}-\frac{\mathbf{b}}{\tau},\qquad \frac{d\mathbf{b}}{ds}=-\frac{\mathbf{n}}{\tau},$$

где ρ — радиус кривизны, а τ — радиус кручения.

В. Поверхности

11. Способы задания поверхности

Уравнение поверхности. Поверхность может быть задана равнениями в одной из следующих форм:

а) *неявная форма.*

$$F(x,\ y,\ z)=0, \tag{1}$$

б) *явная форма.*

$$z=f(x,\ y), \tag{2}$$

в) *параметрическая форма.*

$$x=x(u,\ v),\qquad y=y(u,\ v),\qquad z=z(u,\ v), \tag{3}$$

г) *векторная форма:*

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,\ v)\ \text{или}\ \mathbf{r}=x(u,\ v)\,\mathbf{i}+y(u,\ v)\,\mathbf{j}+z(u,\ v)\,\mathbf{k}. \tag{3а}$$

Изменяя всевозможным образом параметры u и v, получаем радиус-вектор и координаты различных точек поверхности; исключая из (3) и v, получаем форму (1). Форма (2) есть частный случай формы (3), котором $u=x$, $v=y$.

Пример Уравнение сферы;

$$x^2+y^2+z^2-a^2=0 \tag{1}$$

или

$$x=a\cos u\sin v,\qquad y=a\sin u\sin v,\qquad z=a\cos v, \tag{3}$$

$$\mathbf{r}=a(\cos u\sin v\,\mathbf{i}+\sin u\sin v\,\mathbf{j}+\cos v\,\mathbf{k}). \tag{3а}$$

Криволинейные координаты на поверхности. Если поверхность задана в форме (3) или (3а), то при фиксировании значения одного из параметров $v = v_0$ и изменении другого (u) точка $\mathbf{r}\{x, y, z\}$ опишет кривую, лежащую на поверхности: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0)$. Если давать v различные постоянные значения: $v = v_1$, $v = v_2$, ..., то мы получим семейство кривых на поверхности; так как $v = \text{const}$ при движении вдоль каждой из кривых и изменяется только u, то эти кривые называются *u-линиями* (рис. 252). Аналогично, точка $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v)$ опишет другую кривую; давая u различные постоянные значения: $u = u_1$, $u = u_2$, ..., получим второе семейство кривых ($u = \text{const}$) — *v-линий*. Таким образом, на поверхности (3) образуется сеть кривых — *координатных линий*, а два числа $u = u_i$ и $v = v_k$ являются *криволинейными* или *гауссовыми координатами* точки M на поверхности. Для случая задания поверхности в форме (2) координатные линии суть сечения поверхности плоскостями $x = \text{const}$, $y = \text{const}$. Всякое уравнение, связывающее эти координаты: $F(u, v) = 0$ или $u = u(t)$, $v = v(t)$, определяет некоторую кривую на поверхности.

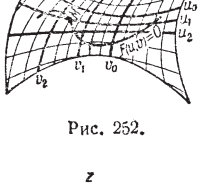


Рис. 252.

Пример: В параметрических уравнениях сферы (см. предыдущий пример) u — *долгота* точки ($u = \angle POx$), v — *полярное расстояние* точки ($v = \angle MOz$), v-линии — *меридианы* AMB, u-линии — *параллели* CMD (рис. 253).

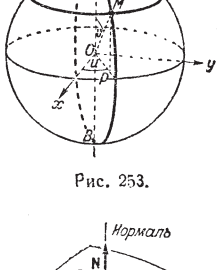


Рис. 253.

12. Касательная плоскость и нормаль

Определения. Если через данную точку $M(\mathbf{r}; x, y, z)$ поверхности провести на поверхности всевозможные кривые, то касательные к ним в точке M, как правило, располагаются в одной плоскости — *касательной плоскости* к поверхности в точке M. (Исключение представляют так называемые конические точки поверхности, см. ниже.) Прямая, проходящая через M перпендикулярно к касательной плоскости, называется *нормалью* к поверхности в точке M (рис. 254).

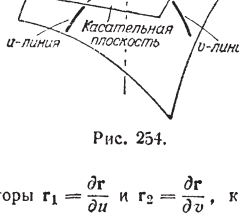


Рис. 254.

Касательная плоскость проходит через векторы $\mathbf{r}_1 = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ и $\mathbf{r}_2 = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$, касательные к u-линии и v-линии в точке M; их векторное произведение $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$ — вектор, параллельный нормали, а его орт $\mathbf{N}^0 = \dfrac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}$ называется *ортом нормали*. $\mathbf{N}^0$ направлен в ту или другую сторону от поверхности в зависимости от того, какую из криволинейных координат, u или v, считать первой и какую — второй.

Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

Задание поверхности (стр. 256)	Касательная плоскость	Нормаль
(1)	$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0$	$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}$
(2)	$Z-z=p(X-x)+q(Y-y)$	$\frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{q}=\frac{Z-z}{-1}$
(3)	$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}=0$	$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}}=\frac{Y-y}{\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}}=\frac{Z-z}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}}$
(3а)	$(\mathbf{R}-\mathbf{r})\,\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2=0$ или $(\mathbf{R}-\mathbf{r})\,\mathbf{N}=0$	$\mathbf{R}=\mathbf{r}+\lambda(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)$ или $\mathbf{R}=\mathbf{r}+\lambda\mathbf{N}$

В этой таблице x, y, z, $\mathbf{r}$ — координаты и радиус-вектор точки M кривой; X, Y, Z, $\mathbf{R}$ — текущие координаты и радиус-вектор точки касательной плоскости или нормали; производные вычисляются в точке M; $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$.

Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности см. стр. 258.

Пример: Для сферы $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$
касательная плоскость:

$$2x(X - x) + 2y(Y - y) + 2z(Z - z) = 0 \quad \text{или} \quad xX + yY + zZ - a^2 = 0,$$

нормаль:

$$\frac{X - x}{2x} = \frac{Y - y}{2y} = \frac{Z - z}{2z} \quad \text{или} \quad \frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z}.$$

Для сферы

$$x = a \cos u \sin v, \quad y = a \sin u \sin v, \quad z = a \cos v$$

касательная плоскость:

$$X \cos u \sin v + Y \sin u \sin v + Z \cos v = a,$$

нормаль:

$$\frac{X}{\cos u \sin v} = \frac{Y}{\sin u \sin v} = \frac{Z}{\cos v}$$

Особые (конические) точки поверхности. Если для точек поверхности, заданной в форме (1) (см. стр. 256), одновременно (при $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$)

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = F(x, y, z) = 0,$$

то точка $M(x_1, y_1, z_1)$ — *особая* (*коническая*); все касательные, проходящие через M, не лежат в одной плоскости, но образуют конус 2-го порядка, уравнение которого

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(X - x) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(Y - y) + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(Z - z) + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}(X - x)(Y - y) +$$
$$+ 2\frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial z}(Y - y)(Z - z) + 2\frac{\partial^2 F}{\partial z\, \partial x}(Z - z)(X - x) = 0$$

(где производные вычисляются для точки M); если одновременно обращаются в нуль все шесть частных производных 2-го порядка, то особая точка — более сложного типа (конус 3-го или более высокого порядка).

13. Линейный элемент поверхности

Дифференциал дуги. Если поверхность задана в форме (3) или (3а) (см. стр. 256), $M(u, v)$ — данная и $N(u + du, v + dv)$ — близкая к ней точка поверхности, то длина дуги MN на поверхности приближенно выражается *дифференциалом дуги* или *линейным элементом поверхности* по формуле

$$ds^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2 \qquad (1)$$

где

$$E = \mathbf{r}_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \quad F = \mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$G = \mathbf{r}_2^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

Правая часть формулы (1) называется также *первой квадратичной формой* поверхности, заданной в форме (2); ее коэффициенты E, F, G зависят от точки поверхности.

Пример: Для сферы: $\mathbf{r} = a(\cos u \sin v\,\mathbf{i} + \sin u \sin v\,\mathbf{j} + \cos v\,\mathbf{k})$,

$$E = a^2 \sin^2 v, \quad F = 0, \quad G = a^2;$$

первая квадратичная форма: $ds^2 = a^2(\sin^2 v\, du^2 + dv^2)$.

Для поверхности, заданной в форме (2) (см. стр. 256):

$$E = 1 + p^2, \; F = pq, \quad G = 1 + q^2, \quad \text{где } p = \frac{\partial z}{\partial x}, \; q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Измерения на поверхности. *Длина дуги* кривой линии $u = u(t)$, $v = v(t)$ на поверхности при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ вычисляется по формуле

$$L = \int_{t_0}^{t_1} ds = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt. \qquad (*)$$

Угол α между двумя кривыми (т. е. между касательными к ним), пересекающимися в точке M и имеющими в этой точке направления векторов $d\mathbf{r}\{du, dv\}$ и $\delta\mathbf{r}\{\delta u, \delta v\}$ (рис. 255), вычисляется по формуле:

$$\cos\alpha = \frac{d\mathbf{r}\,\delta\mathbf{r}}{\sqrt{(d\mathbf{r})^2}\sqrt{(\delta\mathbf{r})^2}} = \frac{E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\sqrt{E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\delta v^2}} \qquad (**)$$

(коэффициенты E, F, G вычисляются для точки M). В частности, линии перпендикулярны, если числитель (**) равен нулю; $F = 0$ — *условие перпендикулярности* координатных линий $v = \text{const}$ ($dv = 0$) и $u = \text{const}$ ($\delta u = 0$).

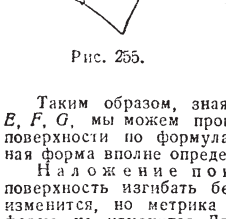


Рис. 255.

Площадь поверхности S, ограниченной некоторой кривой на поверхности, вычисляется как двойной интеграл:

$$S = \int_{(S)} dS,$$

где

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv. \qquad (***)$$

Таким образом, зная коэффициенты первой квадратичной формы E, F, G, мы можем производить измерения длин, углов и площадей на поверхности по формулам (*), (**), (***), т. е. первая квадратичная форма вполне определяет *метрику поверхности*.

Наложение поверхностей при изгибании. Если поверхность изгибать без растяжений и разрывов, то ее уравнение изменится, но метрика останется той же, т. е. первая квадратичная форма не изменится. Две различные поверхности, имеющие одну и ту же первую квадратичную форму, могут быть путем *изгибания* наложены одна на другую.

14. Кривизна поверхности

Кривизна линий на поверхности. Если через точку M проводить на поверхности различные кривые, то в точке M радиусы кривизны ρ этих кривых Γ связаны между собой следующими соотношениями:

1) Радиус кривизны ρ кривой Γ равен радиусу кривизны кривой C — сечения поверхности плоскостью, соприкасающейся с кривой Γ в точке M (рис. 256, *а*).

2) Для каждого плоского сечения C его радиус кривизны равен

$$\rho = R\cos(\mathbf{n}, \mathbf{N}), \qquad (\text{М})$$

где R — радиус кривизны нормального сечения ($C_{\text{норм}}$), проходящего через ту же касательную PQ, что и C, и через вектор $\mathbf{N}$, а $(\mathbf{n}, \mathbf{N})$ — угол между ортом главной нормали $\mathbf{n}$ (см. стр. 251), кривой C и ортом

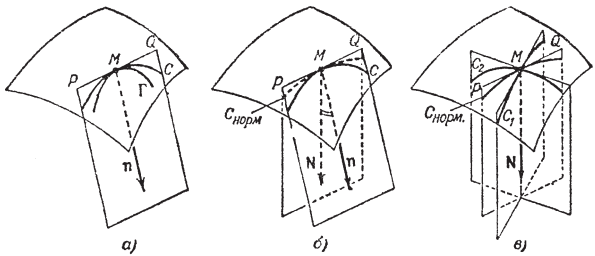


Рис. 256.

нормали $\mathbf{N}$ к поверхности (*теорема Менье*, рис. 256, *б*). В формуле (М) R берется со знаком плюс, если $\mathbf{N}$ направлен в сторону вогнутости кривой $C_{\text{норм}}$, и минус, если — в сторону выпуклости.

3) Для каждого нормального сечения $C_{\text{норм}}$ его кривизна

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\alpha}{R_1} + \frac{\sin^2\alpha}{R_2} \qquad (\text{Э})$$

(*формула Эйлера*), где R_1 и R_2 — *главные радиусы кривизны*, т. е. *наибольшее и наименьшее значения* R; они получаются при *главных нормальных сечениях* поверхности C_1 и C_2 (см. ниже), а α — угол между плоскостями сечений C и C_1 (рис. 256, *в*). В формуле (Э) R, R_1 и R_2 берутся со знаком плюс или минус, определенным, как и в формуле (М).

Главные радиусы кривизны. Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, то R_1 и R_2 вычисляются, как корни квадратного уравнения

$$(rt - s^2)R^2 + h[2pqs - (1+p^2)t - (1+q^2)r]R + h^4 = 0, \qquad (\text{А})$$

где

$$p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y},\ r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\ t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\ \text{и}\ h = \sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Плоскости главных нормальных сечений C_1 и C_2 взаимно перпендику-

лярны; их направления определяются значением $\frac{dy}{dx}$, получаемым из квадратного уравнения:

$$[tpq - s(1+q^2)]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + [t(1+p^2) - r(1+q^2)]\frac{dy}{dx} + [s(1+p^2) - rpq] = 0. \quad (Б)$$

Если же поверхность задана параметрически $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, то уравнения, соответствующие (А) и (Б), имеют вид:

$$(DD'' - D'^2)R^2 - (ED'' - 2FD' + GD)R + (EG - F^2) = 0, \quad (А')$$

$$(GD' - FD'')\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + (GD - ED'')\frac{dv}{du} + (FD - ED') = 0, \quad (Б')$$

где величины D, D', D'' – коэффициенты *второй квадратичной формы* поверхности – определяются формулами:

$$D = \mathbf{r}_{11}\mathbf{N} = \frac{d}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad D' = \mathbf{r}_{12}\mathbf{N} = \frac{d'}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad D'' = \mathbf{r}_{22}\mathbf{N} = \frac{d''}{\sqrt{EG - F^2}},$$

здесь векторы $\mathbf{r}_{11}$, $\mathbf{r}_{12}$, $\mathbf{r}_{22}$ – частные производные 2-го порядка от радиуса-вектора $\mathbf{r}$ по параметрам u и v; числители d, d' d'' равны:

$$d = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad d' = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad d'' = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Кривые на поверхности, имеющие в каждой точке направления главных нормальных сечений, называются *линиями кривизны*; их уравнения получаются интегрированием дифференциального уравнения (Б) или (Б').

Классификация точек поверхности. Если в точке M поверхности обе величины R_1 и R_2 (стр. 261) одного знака, то главные

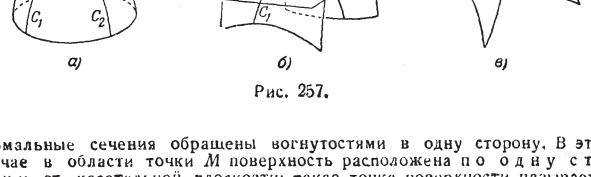


Рис. 257.

нормальные сечения обращены вогнутостями в одну сторону. В этом случае в области точки M поверхность расположена по одну сторону от касательной плоскости; такая точка поверхности называется *эллиптической* точкой (рис. 257, *а*), ее аналитический признак: $DD'' - D'^2 > 0$. В частном случае при $R_1 = R_2$ точка называется *круговой* или *омбилической*; в ней для всех нормальных сечений $R = \text{const}$.

Если R_1 и R_2 разных знаков, то главные нормальные сечения обращены вогнутостями в противоположные стороны. В этом случае поверхность пересекается касательной плоскостью и имеет седлообразный характер; такая точка поверхности называется *гиперболической* (рис. 257, *б*), ее аналитический признак: $DD'' - D'^2 < 0$.

Если R_1 или R_2 равен ∞, то одно главное нормальное сечение имеет точку перегиба или является прямой линией; такая точка поверхности называется *параболической* (рис. 257, *в*), ее аналитический признак: $DD'' - D'^2 = 0$.

Примеры: Все точки эллипсоида – эллиптические, однополостного гиперболоида – гиперболические, цилиндра – параболические.

Кривизна поверхности. *Средней кривизной* поверхности в точке M называется выражение

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right);$$

гауссовой кривизной – выражение

$$K = \frac{1}{R_1 R_2}.$$

Пример: Для круглого цилиндра (радиуса a): $H = \frac{1}{2a}$, $K = 0$.

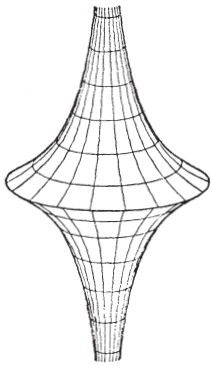


Рис. 258.

Для эллиптических точек $K > 0$, для гиперболических $K < 0$, для параболических $K = 0$.

Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, то H и K вычисляются по следующим формулам:

$$H = \frac{r(1+q^2) - 2pqs + t(1+p^2)}{2(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$K = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2}\ *.$$

Поверхности, для которых средняя кривизна H во всех точках равна нулю ($R_1 = -R_2$), называются *минимальными*. Поверхности, для которых гауссова кривизна K во всех точках постоянна, называются *поверхностями постоянной кривизны*; простейшие примеры таких поверхностей: для $K > 0$ – *сфера*, для $K < 0$ – *псевдосфера* [рис. 258, поверхность вращения трактрисы (см. стр. 114) вокруг ее оси].

15. Линейчатые и развертывающиеся поверхности

Поверхность называется *линейчатой*, если она может быть получена как след движущейся прямой линии; если поверхность при этом может быть развернута на плоскость, то она называется *развертывающейся*. Простейшие примеры развертывающихся поверхностей – цилиндрическая и коническая (см. стр. 174 и 176). Не всякая линейчатая поверхность является развертывающейся (например, однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид – линейчатые, но не развертывающиеся поверхности, см. стр. 231). Во всех точках развертывающейся поверхности гауссова кривизна равна нулю. Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, то условие того, что она – развертывающаяся,

$$rt - s^2 = 0\ *.$$

* Обозначения p, q, r, s, t см. стр. 261.

16. Геодезические линии на поверхности

Понятие о геодезических линиях. Через каждую точку поверхности $M(u, v)$, в каждом направлении, определяемом отношением $\frac{dv}{du}$, проходит на поверхности определенная кривая — *геодезическая линия*, — которая играет для этой поверхности роль прямой линии: 1) если материальная точка вынуждена оставаться на поверхности, то при отсутствии других внешних сил она движется на поверхности по геодезической линии; 2) упругая нить, натянутая на поверхности, принимает форму геодезической линии; 3) линия кратчайшего расстояния между двумя точками на поверхности является геодезической.

Определение. Геодезической линией на поверхности называется такая кривая, главная нормаль которой в каждой точке совпадает с нормалью к поверхности.

Пример: Для круглого цилиндра геодезическими являются винтовые линии.

Уравнение. Если поверхность задана в форме $z = f(x, y)$, то дифференциальное уравнение геодезических линий:

$$(1+p^2+q^2)\frac{d^2y}{dx^2} = pt\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + (2ps - qt)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (pr - 2qs)\frac{dy}{dx} - qr\,*.$$

Если поверхность задана в форме (3) (стр. 256), то дифференциальное уравнение геодезических линий имеет более сложный вид — см. Ращевский (стр. 587 справочника).

---

* Обозначения p, q, r, s, t см. стр. 261.

ОТДЕЛ ЧЕТВЕРТЫЙ

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

1. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

1. Действительные числа

Рациональные числа. Все целые и дробные числа (положительные, отрицательные и нуль) называются *рациональными*. Рациональные числа образуют бесконечное множество (бесконечную совокупность), обладающее следующими свойствами:

1) Это множество *упорядоченное*, т. е. для каждых двух различных рациональных чисел a и b можно указать, какое из них меньше другого.

2) Это множество *всюду плотное*, т. е. между каждыми двумя различными рациональными числами a и b ($a<b$) существует еще по крайней мере одно рациональное число c ($a<c<b$), а следовательно, и бесконечное множество рациональных чисел.

3) Арифметические действия (сложение, вычитание, умножение и деление) над любыми двумя рациональными числами всегда возможны и дают в результате определенное рациональное же число. Исключением является *деление на нуль*, которое *невозможно*: запись $\frac{a}{0}$ не имеет точного смысла, так как не существует определенного числа b, удовлетворяющего равенству $b\cdot 0=a$ (если $a=0$, то b может быть любым числом, а если $a\neq 0$, то b не существует *.

4) Каждое рациональное число a может быть представлено в виде десятичной дроби (конечной или бесконечной периодической).

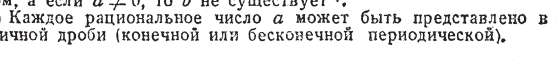


Рис. 259.

Геометрическое изображение рациональных чисел. Если на прямой xx (рис. 259) выбраны начало отсчета O (*нулевая точка*), положительное направление (*ориентация*) и единица измерения l (масштаб), то каждому рациональному числу a соответствует определенная точка этой прямой, имеющая координату a (*рациональная точка*). Прямая xx называется *числовой прямой*. Согласно свойству 2) рациональных

* Часто употребляемое равенство $\frac{a}{0}=\infty$ (*бесконечность*) не означает, что такое деление возможно (∞ — не число!), а является лишь сокращенной записью фразы: «если делитель приближается к нулю то частное неограниченно растет по абсолютной величине».

чисел между любыми двумя рациональными точками имеется бесконечное множество рациональных точек.

Иррациональные числа. Совокупность рациональных чисел недостаточна для математического анализа: хотя она всюду плотна, но не заполняет всей числовой прямой. Например, если диагональ квадрата AB со стороной, равной 1 наложить на числовую прямую так, чтобы точка A совпала с нулевой, то B попадет в точку K, не имеющую рациональной координаты (рис. 260). Введение *иррациональных чисел* позволяет каждой точке числовой прямой поставить в соответствие некоторое число, делает совокупность чисел непрерывной.

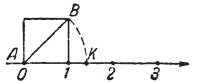


Рис. 260.

Строгое определение иррациональных чисел дается в полных курсах математического анализа *. Иррациональные числа изображаются на числовой прямой точками, заполняющими все пробелы между рациональными точками. *Каждое иррациональное число может быть выражено непериодической бесконечной десятичной дробью.*

К иррациональным числам принадлежат, в частности, нецелые действительные корни алгебраических уравнений вида $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ (с целыми коэффициентами), например уравнение $x^3 - 9x - 4 = 0$ имеет иррациональные корни (см. стр. 139); такие числа называются *алгебраическими иррациональностями.* Простейшими примерами алгебраических иррациональностей являются корни двучленных уравнений $x^n - a = 0$ или числа вида $\sqrt[n]{a}$, если они не являются рациональными (например: $\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$, $\sqrt[3]{10} = 2{,}154\ldots$); иррациональные числа, не являющиеся алгебраическими иррациональностями, называются *трансцендентными;* к их числу принадлежат $\pi = 3{,}141592\ldots$, $e = 2{,}718281\ldots$, десятичные логарифмы целых чисел (кроме вида 10^n), большинство значений тригонометрических функций от угла, равного целому числу градусов.

Действительные числа. Все рациональные и иррациональные числа называются *действительными,* или *вещественными.* Основные свойства множества действительных чисел:

1) множество действительных чисел *упорядоченное* (см. стр. 265);

2) оно *всюду плотное* (см. там же);

3) оно *непрерывно,* т. е. (в отличие от множества рациональных чисел) каждая точка числовой прямой имеет действительную координату;

4) арифметические действия над действительными числами всегда возможны (кроме деления на нуль, см. стр. 265) и дают в результате некоторое действительное число. Возведение в степень и обратные действия также возможны в системе действительных чисел (из каждого положительного действительного числа можно извлечь корень любой степени; каждое положительное действительное число имеет логарифм при любом положительном основании (кроме единицы)).

Дальнейшим обобщением понятия числа в математическом анализе являются *комплексные числа* (см. стр. 493).

* См., например, Фихтенгольц, т. 1 (стр. 587 справочника).

2. *Последовательности и их пределы*

Последовательности. *Числовой последовательностью** называется бесконечное множество чисел

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots,$$

расположенных в определенном порядке одно за другим. Числа, входящие в последовательность, называются ее *членами*. Среди членов последовательности могут быть и одинаковые числа.

Последовательность считается заданной, если известен закон ее образования, т. е. правило, по которому можно определить любой член последовательности. Во многих случаях можно составить формулу для *общего члена* a_n последовательности.

Примеры: 1) $a_n = n$, 2) $a_n = 4 + 3(n-1)$, 3) $a_n = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, 4) $a_n = (-1)^{n+1}$, 5) $a_n = 3 - \frac{1}{2^{n-2}}$, 6) $a_n = 3\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cdot 10^{-\frac{n-1}{2}}$ при n нечетном и $a_n = 3\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot 10^{-\frac{n}{2}+1}$ при n четном, 7) $a_n = \frac{1}{n}$, 8) $a_n = (-1)^{n+1} n$, 9) $a_n = -\frac{n+1}{2}$ при n нечетном и $a_n = 0$ при n четном, 10) $a_n = 3 - \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-\frac{3}{2}}}$ при n нечетном и $a_n = 13 - \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-2}}$ при n четном.

Первые члены этих последовательностей следующие:

1) 1, 2, 3, 4, 5, ... (натуральный ряд),
2) 4, 7, 10, 13, 16, ... (арифметическая прогрессия),
3) $3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \ldots$ (геометрическая прогрессия),
4) $1, -1, 1, -1, 1, \ldots$,
5) $1, 2, 2\frac{1}{2}, 2\frac{3}{4}, 2\frac{7}{8}, \ldots$,
6) 3, 4, 3,3, 3,4, 3,33, 3,34, 3,333, 3,334, ...,
7) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$,
8) $1, -2, 3, -4, 5, -6, \ldots$,
9) $-1, 0, -2, 0, -3, 0, -4, 0, \ldots$,
10) $1, 11, 2, 12, 2\frac{1}{2}, 12\frac{1}{2}, 2\frac{3}{4}, 12\frac{3}{4}, \ldots$

Предел последовательности. Если для данной последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ существует число A, к которому числа a_n при увеличении n подходят как угодно близко, то такое число A называется *пределом* последовательности** Обозначение:

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Точная формулировка: $A = \lim_{n\to\infty} a_n$, если, задавая произвольное, как угодно малое положительное число ε можно указать в данной после-

* Здесь рассматриваются только бесконечные последовательности.
** Числа a_n могут для некоторых n совпадать с пределом A.

довательности такое число a_N, что все без исключения числа a_n, стоящие после a_N (т. е. при $n > N$), будут по абсолютной величине отличаться от A меньше чем на ε:

$$|a_n - A| < \varepsilon \quad (n > N).$$

Из рассмотренных примеров 1—10 имеют пределы последовательности 3), 5), 6) и 7); их пределы:

$$3)\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad 5)\ \lim_{n\to\infty} a_n = 3, \quad 6)\ \lim_{n\to\infty} a_n = 3\frac{1}{3}, \quad 7)\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Геометрический смысл. Если члены последовательности, имеющей предел, изображать точками числовой прямой, то, начиная с a_N, все точки a_n попадут в промежуток, ограниченный точками $A - \varepsilon$ и $A + \varepsilon$ (рис. 261).

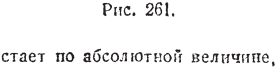


Рис. 261.

Бесконечный предел. Случай, когда предела не существует вследствие того, что a_n при увеличении n неограниченно возрастает по абсолютной величине, обозначают символом

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \text{ («предел равен бесконечности»).}$$

Точная формулировка: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, если, задавая произвольное, как угодно большое положительное число K, можно указать в данной последовательности такой номер N, что все числа a_n при $n > N$ будут по абсолютной величине больше K:

$$|a_n| > K \quad (n > N).$$

Если при этом числа a_n $(n > N)$ все больше 0, то пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$; если числа a_n все меньше 0, то пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Из рассмотренных примеров 1—10 бесконечные пределы имеют последовательности 1), 2) и 8), причем в примерах 1 и 2 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Монотонные последовательности. Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называется *возрастающей*, если

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < \ldots, \tag{1}$$

убывающей, если

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > \ldots, \tag{2}$$

неубывающей, если

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \tag{3}$$

и *невозрастающей*, если

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant \ldots \tag{4}$$

Последовательности типов (1), (2), (3), (4) носят общее название *монотонных*, причем последовательности (1) и (3) — *монотонно возрастающие*, а последовательности (2) и (4) — *монотонно убывающие*.

Последовательности (1) и (2) называются иногда, в отличие от последовательностей (3) и (4), *монотонными в строгом смысле*. На

числовой прямой точки, изображающие члены монотонной последовательности, идут (в порядке номеров членов) в одном направлении, причем в последовательностях (3) и (4) некоторые соседние члены могут изображаться совпадающими точками. Из примеров последовательностей 1—10 на стр. 267 монотонными являются только последовательности 1), 2), 5) (возрастающие) и 7) (убывающая).

Ограниченные последовательности. Если для заданной последовательности можно указать такое положительное число K, что все без исключения члены последовательности будут по абсолютной величине меньше K ($|a_n| < K$), то последовательность называется *ограниченной*; если такого числа не существует, то последовательность неограниченная. Из примеров 1—10 на стр. 267 ограниченными являются только последовательности 3 ($K = 4$), 4 ($K = 2$), 5 ($K = 3$), 6 ($K = 5$), 7 ($K = 2$), 10 ($K = 13$).

Основные теоремы о пределах последовательностей.

1) Последовательность может иметь только один предел.

2) Последовательность, имеющая конечный предел, — ограниченная; последовательность, имеющая бесконечный предел, — неограниченная.

3) Монотонная ограниченная последовательность имеет конечный предел; если эта последовательность монотонно возрастает, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq a_n$, если она монотонно убывает, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq a_n$.

4) Монотонная неограниченная последовательность имеет бесконечный предел; если эта последовательность монотонно возрастает, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$; если она монотонно убывает, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

5) *Необходимый и достаточный признак существования предела последовательности.* Для того чтобы последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ имела предел, необходимо и достаточно, чтобы при задании любого как угодно малого положительного числа ε можно было указать такой член a_N последовательности, что любые два ее члена, стоящие после a_N, будут отличаться друг от друга на число, меньшее ε, т. е.

$$|a_i - a_j| < \varepsilon \text{ при } i > N \text{ и } j > N^*.$$

Другие свойства и вычисление пределов — см. стр. 278—280 («Предел функции»).

3. Функции одной переменной **

Определение. Переменная величина y называется *функцией* переменной величины x (*аргумента* или *независимой переменной*), если при заданном значении x величина y принимает одно определенное значение (*однозначная функция*, например, $y = x^2$) или несколько определенных значений (*многозначная функция*, например функция $y = \pm\sqrt{x}$ — двузначная). Символы $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$ и т. д. обозначают различные функции переменной x; $f(a)$ — то значение функции $f(x)$, которое она принимает при $x = a$; например, если $f(x) = x^2 + 2x - 5$, то $f(3) = 3^2 + 2 \cdot 3 - 5 = 10$.

Совокупность значений x, для которых функция определена, образует *область задания* функции. Наиболее часто рассматриваются функции, имеющие связную область задания. Область действительных

* Последовательность, обладающая этим свойством, называется *фундаментальной*.

** Здесь рассматриваются только функции действительной переменной. О функциях комплексной переменной см. стр. 497, 504.

чисел называется *связной*, если она 1) содержит более одного числа и 2) не имеет пропусков, т. е. все числа, заключенные между двумя любыми числами, принадлежащими области, также принадлежат ей. Связная область может быть *неограниченной* с обеих сторон (т. е. содержать все точки числовой прямой), *ограниченной слева* или *справа* (т. е. содержать все числа, бо́льшие или соответственно меньшие данного числа) и *ограниченной* с обеих сторон (т. е. содержать все числа, заключенные между двумя данными). Связную область называют также *числовым интервалом с концами* a и b ($a < b$; конец a может быть равен $-\infty$, а конец b равен $+\infty$). Конец интервала a или b называется *открытым*, если он не принадлежит области, и *замкнутым*, если принадлежит (концы $-\infty$ и $+\infty$ считаются открытыми).

Интервал обозначают его концами a, b, заключенными в скобки; при этом у открытого конца ставится круглая скобка, а у замкнутого — квадратная. Интервал с двумя открытыми концами называется *открытым*, с одним открытым и одним замкнутым — *полуоткрытым*, с двумя замкнутыми — *замкнутым* (см. рис. 262 *).

Название интервала	Ограничение области	Обозначение интервала	Изображение на числовой прямой
Открытый	$a < x < b$	(a, b)	
Полуоткрытый	$a < x \leqslant b$	$(a, b]$	
	$a \leqslant x < b$	$[a, b)$	
Замкнутый	$a \leqslant x \leqslant b$	$[a, b]$	
Неограниченные интервалы	$-\infty < x < +\infty$	$(-\infty, +\infty)$	
	$-\infty < x < b$	$(-\infty, b)$	
	$-\infty < x \leqslant b$	$(-\infty, b]$	
	$a < x < +\infty$	$(a, +\infty)$	
	$a \leqslant x < +\infty$	$[a, +\infty)$	

Рис. 262.

Часто рассматриваются также функции, областью задания которых является конечное множество или бесконечная последовательность отдельных чисел. В качестве области задания особенно часто рассматривается последовательность целых положительных чисел (натуральный ряд); значения, принимаемые такой функцией, можно расположить в последовательность

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ \ldots,\ f(n),\ \ldots$$

(*функция целочисленного аргумента*).

Рассматриваются также области задания, представляющие собой различные соединения связных областей и отдельных чисел.

Способы задания функции. Функция может быть задана (определена) различными способами, например таблицей значений, графиком, одной или (на разных областях) несколькими формулами.

---

* На числовой прямой открытый конец интервала символически обозначается стрелкой, а замкнутый — жирной точкой.

Примеры функций, заданных несколькими формулами, и их графики (рис. 263) *:

1) $y=\begin{cases}-1 \text{ при } x<0,\\ 0 \;\;\gg\;\; x=0,\\ +1 \;\;\gg\;\; x>0,\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases}x \text{ при } x\leq 0,\\ x^2 \;\;\gg\;\; x\geq 0,\end{cases}$

3) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{n} \text{ при } n \text{ целом положительном},\\ 0 \;\;\gg\;\; n \text{ нецелом положительном}.\end{cases}$

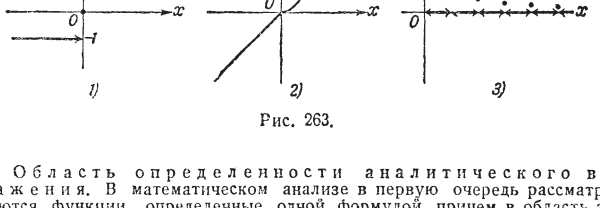


Рис. 263.

Область определенности аналитического выражения. В математическом анализе в первую очередь рассматриваются функции, определенные одной формулой, причем в область задания такой функции включаются все значения аргумента, при которых данное аналитическое выражение имеет смысл, т. е. принимает определенные, конечные действительные значения. Такая область называется *областью определенности аналитического выражения*. Обычно, если нет дополнительных ограничений, под областью задания (*существования*) функции, определенной одной формулой, понимают именно область определенности. В область определенности не входят, в частности, те значения переменной, при которых функция: 1) принимает мнимые значения, 2) «обращается в бесконечность» (см. стр. 282, типы разрывов функции), 3) принимает неопределенные значения (см. стр. 279—280, раскрытие неопределенности).

Примеры: 1) $y=\sqrt{1-x^2}$; область определенности $-1\leq x\leq 1$; 2) $y=\lg\cos x$; область определенности $-\frac{\pi}{2}<x<+\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}<x<\frac{5\pi}{2}$, ..., $\frac{(4n-1)\pi}{2}<x<\frac{(4n+1)\pi}{2}$, ... при n целом.

Основные формы аналитического задания функции. Функции могут быть заданы *явно*, когда дано выражение y через x [$y=f(x)$], *неявно*, когда x и y связаны между собою уравнением [$F(x, y)=0$], например, $x^2+y^2-1=0$ или $x^y-xy=0$, *параметрически*, когда соответствующие друг другу значения x и y выражены через третью переменную величину, называемую *параметром* [$x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$], например, $x=a\cos t$, $y=a\sin t$.

Обратные функции. Две функции $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$ называются *взаимно обратными*, если для каждой пары значений a, b, удовлетворяющих условию $b=f(a)$, удовлетворяется также условие $a=\varphi(b)$, а для каждой пары, удовлетворяющей условию $a=\varphi(b)$,

* Стрелки указывают на то, что их конечная точка (острие) не принадлежит графику.

удовлетворяется условие $b = f(a)$. Одна из двух взаимно обратных функций может быть названа *прямой* (безразлично какая); тогда другая функция называется *обратной* по отношению к первой.

Примеры обратных функций (рис. 264): 1) $y = x^2$ и $y = \pm\sqrt{x}$, 2) $y = e^x$ и $y = \ln x$, 3) $y = \sin x$ и $y = \operatorname{Arcsin} x$.

Для того чтобы из прямой функции $y = f(x)$ получить обратную, следует в ней поменять местами аргумент и функцию; уравнение $x = f(y)$ определяет неявно обратную функцию по отношению к $y = f(x)$. Решив уравнение $x = f(y)$ относительно y, получаем обратную функцию $y = \varphi(x)$ в явной форме.

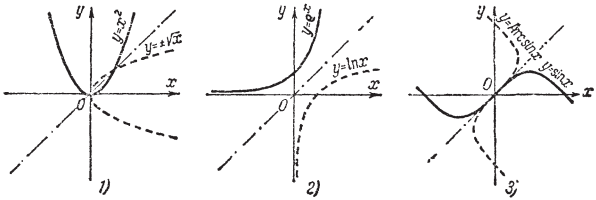


Рис. 264.

Графики прямой и обратной функций симметричны относительно биссектрисы координатного угла (см. рис. 264).

Элементарные функции* — функции, определенные формулами, содержащими конечное число алгебраических или тригонометрических операций, производимых над аргументом, функцией и некоторыми постоянными. (Под этими операциями понимаются четыре арифметические действия, возведение в любую степень и извлечение корня, логарифмирование и потенцирование при любом основании, взятие тригонометрической или обратной тригонометрической функции.) В основном элементарные функции разделяются на *алгебраические* и *трансцендентные*.

В *алгебраических* функциях аргумент x и функция y связаны между собой алгебраическим уравнением вида

$$\sum_{i=1}^{k} a_i x^n y^m = 0,$$

например, $3xy^3 - 4xy + x^3 - 1 = 0$. Если такое уравнение удается алгебраически разрешить относительно y, то имеем один из следующих простейших типов алгебраических функций:

1) *Целая функция* (*многочлен* или *полином*): над x производится только сложение, вычитание и умножение: $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$. В частности, $y = a$ (*константа*), $y = ax + b$ (*линейная функция*), $y = ax^2 + bx + c$ (*квадратичная функция*) — целые функции.

2) *Дробная* (*рациональная*) *функция*: над x производится сложение, вычитание, умножение и деление**. Дробную функцию всегда можно

---

* Таблицы простейших элементарных функций см. стр. 16—71, графики элементарных функций см. стр. 82—101.

** Если деления нельзя избежать путем сокращения.

представить в виде отношения двух целых функций:

$$y=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}.$$

В частности, $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ называется *дробно-линейной функцией*.

3) *Иррациональная функция*: над *, кроме перечисленных в 2) действий, производится извлечение корня **. Например: $y=\sqrt{2x+3}$, $y=\sqrt[3]{(x^2-1)\sqrt{x}}$.

Трансцендентные функции — такие, в которых аргумент и функция не могут быть связаны алгебраической зависимостью вида $\sum a_i x^m y^n=0$. Простейшие из них (*элементарные трансцендентные функции*):

1) *Показательные функции*: переменная x или ее алгебраическая функция находятся в показателе степени (например: $y=e^x$, $y=a^x$, $y=2^{3x^2-5x}$).

2) *Логарифмические функции*: переменная x или ее алгебраическая функция находятся под знаком логарифма [например: $y=\ln x$, $y=\lg x$, $y=\log_2(5x^2-3x)$].

3) *Тригонометрические функции*: переменная x или ее алгебраическая функция находятся под знаком sin, cos, tg, ctg, sc, csc (например, $y=\sin x$, $y=\cos(2x+3)$, $y=\operatorname{tg}\sqrt{x}$) ***.

4) *Обратные тригонометрические функции*: переменная x или ее алгебраическая функция находятся под знаком arcsin, arccos и т. д. (например, $\arcsin x$, $\arccos\sqrt{1-x}$).

Всевозможные комбинации перечисленных алгебраических и трансцендентных функций, когда одна функция может служить аргументом для другой, дают *сложные функции*, например, $y=\ln\sin x$, $y=\frac{\ln x+\sqrt{\arcsin x}}{x^2+5e^x}$ и т. д. Такие комбинации элементарных функций, взятые в конечном числе, дают также элементарные функции.

Неэлементарные функции. Функции, не являющиеся элементарными, могут быть определены различным образом, начиная

---

* Или над рациональной функцией от x.

** Если извлечения корня нельзя избежать путем вынесения из-под знака радикала.

*** Под аргументом x тригонометрической функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$,... в анализе понимают не угол или дугу окружности (как делалось при первом ознакомлении с этими функциями в элементарной тригонометрии), а любую величину; тригонометрические функции могут быть определены чисто аналитически, без помощи геометрических представлений [например, функция $\sin x$ — своим разложением в степенной ряд (см. стр. 326) или как решение дифференциального уравнения $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ при начальном условии $x=0$, $y=0$, $\frac{dy}{dx}=1$]. При таком понимании тригонометрической функции ее аргумент численно равен дуге окружности, выраженной в радианах. Поэтому для вычисления тригонометрических функций можно пользоваться обычными тригонометрическими таблицами, выражая аргумент в радианной мере.

от простого о п и с а н и я соответствия значений аргумента и функции. В математическом анализе часто применяются следующие способы определения неэлементарных функций *:

1) При помощи нескольких математических формул (см. стр. 271).

2) Посредством перехода к пределу; в частности:

а) при помощи рядов и бесконечных произведений (см. стр. 298),

б) посредством определенных интегралов (с одним или двумя переменными пределами), не выражаемых через элементарные функции (см. стр. 332),

в) посредством определенных интегралов с постоянными пределами, содержащих переменный параметр (см. стр. 405).

3) Посредством дифференциальных уравнений, решения которых не выражаются в квадратурах.

4) Посредством функциональных уравнений.

Для неэлементарных функций, имеющих теоретическое или практическое значение, составляются таблицы, строятся графики, изучаются свойства. Такие функции называются *специальными*; им часто придаются особые названия и обозначения.

Примеры неэлементарных функций:

1) *Целая часть от x*: y равно наибольшему целому числу, не превышающему x. Обозначение: $E(x)$; график — см. рис. 265.

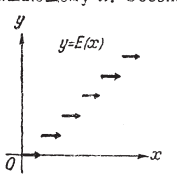


Рис. 265.

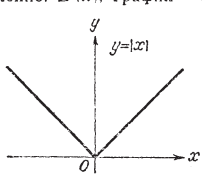


Рис. 266.

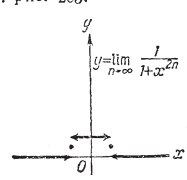


Рис. 267.

2) *Абсолютная величина от x*: $y = \begin{cases} -x & \text{при } x \leq 0, \\ x & \text{» } x \geq 0. \end{cases}$ Обозначение: $y = |x|$; график — см. рис. 266.

3) *Знак («сигнум») x*: $y = \begin{cases} -1 & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{» } x = 0, \\ 1 & \text{» } x > 0. \end{cases}$ Обозначение: $y = \operatorname{sgn} x$; график — см. рис. 263, 1) на стр. 271.

4) $y = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{1 + x^{2n}}$ или $y = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{» } |x| = 1; \\ 0 & \text{» } |x| > 1; \end{cases}$ график — см. рис. 267.

5) $y = \int\limits_0^x \dfrac{\sin x}{x}\, dx$ или $y = x - \dfrac{x^3}{3 \cdot 3!} + \dfrac{x^5}{5 \cdot 5!} - \dfrac{x^7}{7 \cdot 7!} + \ldots$

Обозначение: $y = \operatorname{Si}(x)$ («*интегральный синус*», см. стр. 367).

* Иногда удается определить одну и ту же функцию различными способами.

6) $y=\int\limits_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt$ или $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!\,n^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)}$.

Обозначение: $y=\Gamma(x)$ («*гамма-функция*», см. стр. 162).

7) Решение уравнения Бесселя: $x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0$ при определенных начальных условиях («*бесселева функция*», см. стр. 464).

Некоторые типы функций.

1) *Монотонные функции* — функции, удовлетворяющие при любых $x_2>x_1$, входящих в область задания, условию $f(x_2)\geqslant f(x_1)$ (*монотонно возрастающая функция*, рис. 268, *а*), или $f(x_2)\leqslant f(x_1)$ (*монотонно убывающая функция*, рис. 268, *б*); например $y=e^{-x}$, $y=\ln x$.

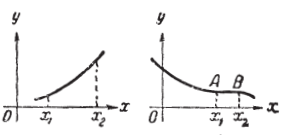


Рис. 268.

Если это условие имеет место не для всех значений x, входящих в область ее задания, а лишь в некоторой области (интервал, полуось), то функция называется *монотонной в этой области* *.

2) *Ограниченные функции.* Функция называется *ограниченной сверху*, если ее значения не превышают некоторого числа, и *ограниченной снизу*, если ее значения не меньше некоторого числа. Функция, ограниченная сверху и снизу, называется просто *ограниченной*.

Примеры: $y=1-x^2$ ограничена сверху ($y\leqslant 1$); $y=e^x$ ограничена снизу ($y>0$); $y=\sin x$ ограничена ($-1\leqslant y\leqslant +1$); $y=\dfrac{4}{1+x^2}$ ограничена ($0<y\leqslant 4$).

3) *Четные функции* — удовлетворяющие условию $f(-x)=f(+x)$ (рис. 269, *а*); например, $y=\cos x$, $y=x^4-3x^2+1$.

4) *Нечетные функции* — удовлетворяющие условию $f(-x)=-f(+x)$ (рис. 269, *б*); например $y=\sin x$, $y=x^3-x$

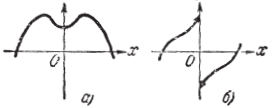


Рис. 269.

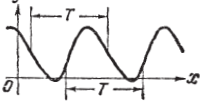


Рис. 270.

5) *Периодические функции* — удовлетворяющие условию $f(x+T)=f(x)$; число T называется *периодом функции* (рис. 270). Обычно периодом называют наименьшее число T, удовлетворяющее этому условию.

---

* Монотонные функции, определенные выше, часто называются *монотонными в широком смысле*. Функция же, удовлетворяющая условию $f(x_2)>f(x_1)$ или $f(x_2)<f(x_1)$ (без знака =) называется *монотонно возрастающей* (соответственно *монотонно убывающей*) *в строгом смысле*. Функция, изображенная на рис. 268, *а* — монотонно возрастающая в строгом смысле, а изображенная на рис. 268, *б* — монотонно убывающая в широком смысле (на участке AB функция постоянна).

4. Предел функции

Понятие *предела* рассмотрено здесь лишь для функций двух типов: 1) функции целочисленного аргумента (см. стр. 270) и 2) функции со связной областью задания (см. стр. 269) *.

Предел функции целочисленного аргумента $y=f(x)$ $(x=1, 2, 3, \ldots, n, \ldots)$ определяется лишь для $x\to\infty$; это есть предел числовой последовательности ** $f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots$:

$$A=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{n\to\infty} f(n).$$

Примеры: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$, 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$.

Предел функции непрерывного аргумента (т. е. со связной областью задания).

Определение. Функция $y=f(x)$ имеет *предел* A при $x\to a$:

$$A=\lim_{x\to a} f(x),$$

если при приближении x к a значение функции $f(x)$ подходит как угодно близко к числу A. При значении $x=a$ функция может и не принимать значения A и вообще может быть не определена.

Точная формулировка: $A=\lim\limits_{x\to a} f(x)$, если, задав произвольное как угодно малое положительное число ε, можно указать такое положительное число η, что при любых значениях x в промежутке $a-\eta<x<a+\eta$ *** (кроме, быть может, значения $x=a$) соответствующие значения $f(x)$ будут находиться в промежутке $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$ (рис. 271).

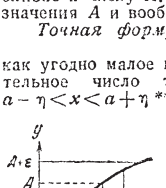


Рис. 271.

Признаки существования предела.

1) *Сведение к пределу последовательности.* Функция $f(x)$ имеет предел A при $x=a$, если при любой последовательности значений x $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, принадлежащей к области задания функции и имеющей пределом число a, последовательность соответствующих значений функции $[f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots]$ имеет предел. Этот предел A является общим для всех таких последовательностей и он является пределом функции $f(x)$.

2) *Признак Коши.* Для того чтобы функция $f(x)$ имела предел при $x=a$, необходимо и достаточно, чтобы для любых двух значений аргумента x_1 и x_2, принадлежащих к области задания функции и достаточно близких к a, соответствующие значения функции, $f(x_1)$ и $f(x_2)$, были сколь угодно близки между собою.

Точная формулировка: для того чтобы функция $f(x)$ имела предел при $x=a$, необходимо и достаточно, чтобы для любого как угодно малого положительного числа ε можно было указать такое положитель-

---

* Понятие предела имеет место и для функций с более сложной областью задания; см. об этом в полных курсах анализа, например, Фихтенгольц, т. I (стр. 587 справочника).

** См. стр. 267.

*** Если a является граничной точкой связной области задания, то это двойное неравенство заменяется простым: $a-\eta<x$ или $x<a+\eta$.

ное число η, что для любых x_1 и x_2, принадлежащих к области задания функции и удовлетворяющих условиям $|x_1 - a| < \eta$ и $|x_2 - a| < \eta$, выполнялось условие

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Бесконечный предел функции — понятие, аналогичное бесконечному пределу последовательности (стр. 268); символом $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ (*предел равен бесконечности*) обозначают случай, когда предела функции при $x \to a$ не существует вследствие того, что при приближении x к a функция $f(x)$ неограниченно возрастает по абсолютной величине.

Точная формулировка: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, если, задавая произвольное, как угодно большое положительное число K, можно указать такое положительное число η, что при любых значениях x в промежутке $a - \eta < x < a + \eta$ соответствующие значения $f(x)$ будут по абсолютной величине больше K:

$$|f(x)| > K.$$

Если при этом все значения $f(x)$ в интервале $a - \eta < x < a + \eta$ положительны, то пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$; если отрицательны, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Пределы функции слева и справа. Функция $f(x)$ имеет при $x = a$ предел A *слева*, если она подходит как угодно близко к A при возрастающих значениях x, приближающихся к a. Обозначение: $A = f(a - 0)$. Аналогично, функция имеет при $x = a$ предел A *справа*, если она подходит как угодно близко к A при убывающих значениях x, приближающихся к a. Обозначение: $A = f(a + 0)$. Например, функция $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}}$ стремится при $x \to 1$ к различным пределам слева и справа: $f(1 - 0) = 1$, $f(1 + 0) = 0$ (рис. 272).

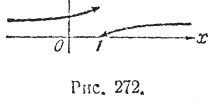


Рис. 272.

Предел функции при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$. Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$:

$$A = \lim_{x \to +\infty} f(x),$$

если, задавая произвольное как угодно малое положительное число ε, можно указать такое число N, что при любых значениях $x > N$ соответствующие значения $f(x)$ будут находиться в промежутке $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$. Аналогично,

$$A = \lim_{x \to -\infty} f(x),$$

если, задавая произвольное как угодно малое положительное число ε, можно указать такое число $-N$, что при любых значениях $x < -N$ соответствующие значения $f(x)$ будут находиться в промежутке $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$. Например,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} = 1, \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{x} = 1, \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0.$$

то предела при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$) нет; это условно обозначают:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty.$$

Например: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3-1}{x^2} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3-1}{x^2} = -\infty$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1-x^3}{x^2} = -\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1-x^3}{x^2} = +\infty.$$

Основные теоремы о пределах функций.

1) Предел постоянной величины равен этой величине:

$$\lim A = A.$$

2) Предел суммы (разности) конечного числа функций равен соответствующей сумме (разности) пределов этих функций:

$$\lim_{x \to a} [f(x) + \varphi(x) - \psi(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} \varphi(x) - \lim_{x \to a} \psi(x).$$

3) Предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов этих функций:

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot \varphi(x) \cdot \psi(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} \varphi(x) \cdot \lim_{x \to a} \psi(x).$$

4) Предел частного двух функций:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} \varphi(x)}, \text{ если только } \lim_{x \to a} \varphi(x) \neq 0.$$

5) Если функция $f(x)$ заключена между двумя другими функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$: $\varphi(x) < f(x) < \psi(x)$ и если $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to a} \psi(x) = A$, то

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

6) Монотонная функция непрерывного аргумента имеет предел (конечный или бесконечный) при любом значении x (конечном или бесконечном); монотонная ограниченная функция имеет конечный предел при любом значении x.

Некоторые важные пределы:

1) *Число e*: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e = 2{,}71828\ldots$ (иррациональное число).

Таблица величин, связанных с e, см. стр. 16. Число e служит основанием системы натуральных логарифмов (см. стр. 131).

2) *Число C*: $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} - \ln n\right) = C = 0{,}5772\ldots$ (*постоянная Эйлера*).

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, если x – длина дуги, или угол, выраженный в радианах.

Вычисление пределов. Для вычисления пределов пользуются указанными выше основными теоремами, а также следующими приемами:

1) Преобразуют функцию к виду, для которого предел легко найти.

Примеры: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$;

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2(\sin 2x)}{2x}=2\lim_{2x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=2 \text{ и т. п.}$$

2) В случаях, приводящих к «неопределенностям» вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞, применяют *правило Лопиталя.*

а) *Неопределенности вида* $\frac{0}{0}$ *или* $\frac{\infty}{\infty}$. Если $f(x)=\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, причем функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определены в интервале, содержащем точку a^*, и имеют в этом интервале конечные производные $[\psi'(x)\neq 0]$ и если

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to a}\psi(x)=0 \left(\text{«неопределенность } \frac{0}{0}\text{»}\right)$$

или

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=\infty \text{ и } \lim_{x\to a}\psi(x)=\infty \left(\text{«неопределенность } \frac{\infty}{\infty}\text{»}\right)$$

то

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$$

при условии, что этот предел существует или равен ∞ *(правило Лопиталя).*

В случае, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ снова представляет собою неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, то применяют это правило вторично и т. д.

Пример:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2\cos 2x}{\sin 2x}}{\dfrac{\cos x}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2}{\cos^2 x}}{\dfrac{2}{\cos^2 2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x}=1.$$

б) *Неопределенность вида* $0\cdot\infty$. Если $f(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x)$ [при тех же условиях, что и в случае а)] и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=\infty$ («неопределенность $0\cdot\infty$»), то для нахождения предела $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ функцию преобразуют к виду $\dfrac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{\psi(x)}}$ или $\dfrac{\psi(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}$, что приводит к случаю $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

---

* В самой точке a $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ могут и не быть определены.

Пример: $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\pi-2x)\operatorname{tg}x=\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\pi-2x}{\operatorname{ctg}x}=\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{-2}{-\dfrac{1}{\sin^2 x}}=2.$

в) *Неопределенности вида* $\infty-\infty$. Если $f(x)=\varphi(x)-\psi(x)$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=\infty$ («неопределенность $\infty-\infty$»), то для нахождения предела $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ разность $\varphi(x)-\psi(x)$ алгебраически преобразуют к виду $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$. Это можно сделать различными способами [например, $\varphi-\psi=\left(\dfrac{1}{\psi}-\dfrac{1}{\varphi}\right):\dfrac{1}{\varphi\psi}$].

Пример: $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x\ln x-x+1}{x\ln x-\ln x}\right)\left\{\dfrac{0}{0}\right\}.$

Применяя дважды правило Лопиталя, получаем:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x\ln x-x+1}{x\ln x-\ln x}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{\ln x}{\ln x+1-\dfrac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right)=\frac{1}{2}.$$

г) *Неопределенности вида* 0^0, ∞^0, 1^∞. Если $f(x)=\varphi(x)^{\psi(x)}$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=0$, то сначала находят предел A выражения $\ln f(x)=\psi(x)\cdot\ln\varphi(x)$, которое имеет вид $0\cdot\infty$ (случай б), а затем его потенцируют, т. е. вычисляют e^A.

Пример: $\lim\limits_{x\to0}x^x=X$; $\ln x^x=x\ln x$; $\lim\limits_{x\to0}x\ln x=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}(-x)=0$.

$\ln X=0$, $X=1$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to0}x^x=1$.

В случаях ∞^0 и 1^∞ поступают аналогично.

3) Кроме правила Лопиталя, для раскрытия неопределенностей пользуются разложением функции в ряд Тэйлора. Например:

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x-\left(x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\ldots\right)}{x^3}=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}+\ldots\right)=\frac{1}{6}.$$

5. *Бесконечно малые величины*

О п р е д е л е н и я. Функция α переменной x называется *бесконечно малой величиной при* $x\to a$, если она имеет пределом нуль ($\lim\limits_{x\to a}\alpha=0$).

Если $\alpha=c$ (константа) и $\lim\limits_{x\to a}\alpha=0$, то $c=0$*, т. е. *из постоянных величин бесконечно малой является только нуль.*

---

* Предел постоянной величины равен ей самой.

Если функция A переменной x имеет при $x \to a$ бесконечный предел (см. стр. 277), то она называется *бесконечно большой величиной* при $x \to a$.

Основные свойства. Если α, β, γ, ... — бесконечно малые величины и a — *конечная* (т. е. не имеющая пределом ни нуль, ни бесконечность), то: 1) сумма и разность $\alpha \pm \beta \pm \gamma \pm \ldots$ — бесконечно малая величина (если число слагаемых ограничено); 2) произведение $\alpha \cdot \beta$ или $\alpha \cdot a$—бесконечно малая; 3) частное $\frac{\alpha}{a}$ — бесконечно малая (если $a \neq 0$); 4) частное $\frac{\alpha}{\beta}$ может быть или бесконечно малой, или конечной, или бесконечно большой величиной, или величиной, не имеющей предела.

Примеры: 1) $\alpha = \sin x$, $\beta = 1 - \cos x$, $\gamma = x^2$. При $x \to 0$ α, β и γ — бесконечно малые величины; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\beta}{\alpha} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\beta}{\gamma} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\alpha}{\gamma} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x^2} = \infty$; следовательно, $\frac{\beta}{\alpha}$ — бесконечно малая, $\frac{\beta}{\gamma}$ — конечная, $\frac{\alpha}{\gamma}$ — бесконечно большая величина.

2) $\alpha = \frac{1}{n}$, $\beta = \frac{(-1)^n}{n}$ (n — целое число). При $n \to \infty$ α и β—бесконечно малые величины; предела $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{n \to \infty} (-1)^n$ не существует.

Порядок бесконечно малых. Две бесконечно малые величины имеют *одинаковый порядок*, если их отношение — конечная величина, если же $\frac{\alpha}{\beta}$ — бесконечно малая, то α — бесконечно малая *высшего порядка*, чем β; если $\frac{\gamma}{\alpha}$ — бесконечно большая, то $\frac{\alpha}{\gamma}$ — бесконечно малая, и α имеет высший порядок, чем γ.

Пример: Величины $\beta = 1 - \cos x$ и $\gamma = x^2$ имеют одинаковый порядок; β и γ имеют более высокий порядок, чем $\alpha = \sin x$.

Бесконечно малая α называется *бесконечно малой m-го порядка* по отношению к другой бесконечно малой β, если порядок α одинаков с порядком бесконечно малой β^m.

Пример: По отношению к бесконечно малой величине x (при $x \to 0$) $\sin x$ первого порядка, а $1 - \cos x$ второго.

Равносильные или *эквивалентные* бесконечно малые — такие, предел отношения которых равен 1.

Примеры: бесконечно малые x и $\sin x$ (при $x \to 0$) — равносильные; бесконечно малые x^2 и $1 - \cos x$ — неравносильные.

При отыскании предела отношения двух бесконечно малых величин каждую из них можно заменить равносильной бесконечно малой, не изменив этим предела.

6. Непрерывность и разрывы функций

Понятие непрерывности и разрыва. Большинство функций, изучаемых в математическом анализе, является *непрерывными*, т. е. при небольших изменениях аргумента x функция y изменяется также весьма мало, и график такой функции является «сплошной», непрерывной кривой. При некоторых значениях x непрерывность может нарушаться и график прерываться — функция имеет *разрыв*; те значения аргумента, при которых происходит разрыв функции, называются *точками разрыва*. На рис. 273 изображен график функции, непрерывной

всюду за исключением точек разрыва A, B, C, D, E, F, G (буквы относятся к проекциям точек) *.

Определения. Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной* при значении $x=a$ (в точке $x=a$), если 1) число a принадлежит к области ее задания и 2) предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существует и равен $f(a)$ **.

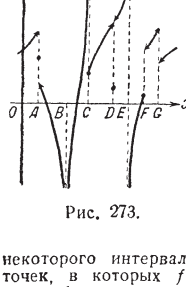


Рис. 273.

Если функция задана и непрерывна для всех значений x в интервале от a до b, то она называется *непрерывной* в этом *интервале* (открытом, замкнутом или полуоткрытом, см. стр. 270). Функция, заданная и непрерывная для всех точек числовой оси, называется *непрерывной всюду*.

Для тех значений a, которые находятся внутри или на границе области задания функции и в которых она не определена, или значение $f(a)$ не совпадает со значением предела $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, или $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ не существует, функция имеет *разрыв («точки разрыва»)* ***.

Если $f(x)$ непрерывна во всех точках некоторого интервала за исключением конечного числа отдельных его точек, в которых $f(x)$ имеет конечные разрывы (см. ниже), то такая функция называется *кусочно-непрерывной*; ее график состоит из нескольких отрезков кривых линий.

Часто встречающиеся типы разрывов функций.

1) *Бесконечный разрыв* («обращение функции в бесконечность») — наиболее часто встречающийся случай (точки B, C, E на рис. 273).

Примеры:

$f(x)=\operatorname{tg} x$, $f\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=+\infty$, $f\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=-\infty$ **** (график см. стр. 97) (разрыв типа точки E на рис. 273);

$f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$; $f(1-0)=+\infty$, $f(1+0)=+\infty$ (разрыв типа точки B на рис. 273);

$f(x)=e^{\frac{1}{x-1}}$; $f(1-0)=0$, $f(1+0)=\infty$ (разрыв типа точки C на рис. 273, с тем отличием, что в точке 1 $f(x)$ не задана).

2) *Конечный разрыв*: при переходе x через значение a функция «перескакивает» от одного конечного значения к другому (точки A, F, G на рис. 273). Самое значение $f(x)$ при $x=a$ может быть не задано (точка G), может совпадать со значением $f(a-0)$ или $f(a+0)$ (точка F) и может быть отлично как от $f(a-0)$, так и от $f(a+0)$ (точка A).

---

* Стрелки на графике условно обозначают, что точка, находящаяся в острие стрелки, графику не принадлежит; жирная точка считается принадлежащей графику.

** Второе условие может быть заменено следующим, равносильным ему: при бесконечно малом α разность $\beta=f(a+\alpha)-f(a)$ бесконечно мала (бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции).

*** Если функция задана только по одну сторону от данного значения аргумента $x=a$ (например, $+\sqrt{x}$ при $x=0$, $\arccos x$ при $x=1$), то говорят не о разрыве, а об *обрыве* функции.

**** О символическом обозначении $f(a-0)$, $f(a+0)$ см. стр. 277.

Примеры:

$f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$, $f(1-0)=1$, $f(1+0)=0$ (график см. стр. 272).

$f(x)=E(x)$ (см. рис. 265 на стр. 274), $f(a-0)=a-1$, $f(a+0)=a$

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^{2n}}$ (см. рис. 267), $f(1-0)=1$, $f(1+0)=0$, $f(1)=\dfrac{1}{2}$.

3) *Устранимый разрыв:* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существует: $f(a-0)=f(a+0)$, но при $x=a$ функция или не задана, или имеет значение $f(a)\neq\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (точка D на рис. 273). Этот случай разрыва называется устранимым, так как, придавая $f(a)$ значение $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ («добавляя к графику одну точку» *), мы делаем функцию непрерывной. Различные случаи «неопределенностей», раскрываемые правилом Лопиталя и другими способами (стр. 279—280) и дающие в результате конечный предел, представляют примеры устранимых разрывов.

Пример: $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ при $x=0$ дает неопределенность $\dfrac{0}{0}$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{1}{2}$; функция $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} & \text{при } x\neq 0,\\ \dfrac{1}{2} & \text{» } x=0\end{cases}$ будет непрерывной.

Непрерывность и точки разрыва элементарных функций. Все элементарные функции непрерывны в области их задания; точки разрыва этих функций не принадлежат к области задания. О полном исследовании и построении графика элементарной функции см. стр. 247; графики простейших функций см. стр. 83—101. Здесь даются лишь общие сведения о разрывах элементарных функций.

Целые функции (многочлены) непрерывны всюду (на всей числовой прямой).

Дробные функции $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ [$P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены] непрерывны всюду за исключением тех значений a, при которых $Q(x)=0$, но $P(x)\neq 0$, при этом значении $x=a$ функция имеет бесконечный разрыв. Если a — корень как знаменателя, так и числителя, то функция имеет бесконечный разрыв лишь в том случае, когда кратность корня знаменателя больше кратности корня числителя; в противном случае разрыв — устранимый.

Иррациональные функции. Радикалы (с целым показателем) из целых функций являются непрерывными функциями при всех значениях x, принадлежащих к области задания; на границах этих областей они могут иметь конечный обрыв (корень четной степени, рассматриваемый арифметически, на границе между положительным и отрицательным значениями подкоренного выражения). Радикалы из дробных функций разрывны при тех значениях x, при которых разрывна подкоренная функция.

Тригонометрические функции. $\sin x$ и $\cos x$ непрерывны всюду $\operatorname{tg} x$ и $\sec x$ имеют бесконечные разрывы при $x=\dfrac{(2n+1)\pi}{2}$; $\operatorname{ctg} x$ и $\operatorname{cosec} x$ — бесконечные разрывы при $x=n\pi$ (n — целое).

* Или перенося «отскочившую» точку (D) на график.

Обратные тригонометрические функции, $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$ непрерывны всюду, $\arcsin x$ и $\arccos x$ имеют обрывы на границах интервала их задания ($-1 \leqslant x \leqslant +1$).

Показательная функция e^x или a^x ($a > 0$) непрерывна всюду.

Логарифмическая функция $\log x$ (при любом положительном основании) непрерывна при всех положительных значениях x и имеет обрыв при $x = 0$ ($\lim\limits_{x \to 0} \log x = -\infty$, предел справа).

В случае сложной элементарной функции исследование разрывов производится для тех значений аргументов, при которых имеют разрывы простые функции, входящие в состав сложных (согласно перечисленным выше случаям).

Пример: Определить разрывы функции $y = \dfrac{e^{\frac{1}{x-2}}}{x \sin \sqrt[3]{1-x}}$.

Показатель $\dfrac{1}{x-2}$ имеет бесконечный разрыв при $x=2$; $e^{\frac{1}{x-2}}$ имеет при $x = 2$ бесконечный разрыв

$$\left(e^{\frac{1}{x-2}}\right)_{x=2-0} = 0, \quad \left(e^{\frac{1}{x-2}}\right)_{x=2+0} = \infty.$$

Знаменатель выражения y при $x = 2$ конечен; следовательно, при $x = 2$ функция имеет бесконечный разрыв типа точки C на рис. 273.

Знаменатель обращается в нуль при $x = 0$ и при тех значениях x, которые обращают в нуль $\sin \sqrt[3]{1-x}$; эти последние соответствуют корням уравнения $\sqrt[3]{1-x} = n\pi$ или $x = 1 - n^3\pi^3$, где n — любое целое число. Ни при одном из этих значений числитель в нуль не обращается, и функция имеет при значениях $x = 0$, $x = 1$, $x = 1 \pm \pi^3$, $x = 1 \pm 8\pi^3$, $x = 1 \pm 27\pi^3$, ... бесконечные разрывы типа точки E на рис. 273.

Свойства непрерывных функций.

1) *Прохождение через нуль* (теорема Коши). Если функция $f(x)$ задана и непрерывна в замкнутом интервале $[a, b]$ и на концах его значения $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки, то между a и b существует (по меньшей мере одно) такое значение c, при котором $f(x)$ обращается в нуль:

$$f(c) = 0 \quad (a < c < b).$$

(Геометрический смысл: непрерывная кривая, переходящая с одной стороны оси x на другую, пересекает эту ось.)

2) *Теорема о промежуточном значении.* Если функция $f(x)$ задана и непрерывна в некоторой связной области и в двух точках a и b ($a < b$) этой области она принимает неравные значения A и B:

$$f(a) = A, \quad f(b) = B, \quad (A \neq B),$$

то какое бы ни было число C, лежащее м е ж д у A и B, существует по меньшей мере одна такая точка c между a и b, что

$$f(c) = C \ (a < c < b; \ A < C < B \text{ или } A > C > B)$$

«функция $f(x)$ пройдет через все промежуточные значения между A и B»).

3) *Существование обратной функции* *. Если функция $f(x)$ задана в некоторой связной области I и в этой области I она непрерывна

* См. стр. 271, 272.

и монотонно возрастает (или монотонно убывает) в строгом смысле (стр. 275), то для этой функции существует однозначная непрерывная и монотонно возрастающая (соответственно монотонно убывающая), также в строгом смысле, обратная функция $\varphi(x)$, заданная в области II значений, принимаемых функцией $f(x)$ (рис. 271, *а* и *б*).

Рис. 271.

4) *Теорема об ограниченности функции.* Если функция $f(x)$ задана и непрерывна в замкнутом интервале $[a, b]$, то она ограничена в этом интервале — существуют два таких числа m и M, что

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \text{ при } a \leqslant x \leqslant b.$$

5) *Существование наибольшего и наименьшего значений.* Если функция $f(x)$ задана и непрерывна в замкнутом интервале $[a, b]$, то в этом интервале существует по меньшей мере одна такая точка c, что значение $f(c)$ будет наибольшим из всех значений $f(x)$, и по меньшей мере одна такая точка d, что значение $f(d)$ будет наименьшим из всех значений $f(x)$:

$$f(c) \geqslant f(x) \text{ и } f(d) \leqslant f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Разность между наибольшим и наименьшим значениями непрерывной функции называется *колебанием* этой функции в заданном интервале *.

6) Непрерывная функция в замкнутом интервале является также равномерно непрерывной в этом интервале (см. ниже).

Равномерная непрерывность. Функция $y = f(x)$ называется *равномерно непрерывной* в данной области задания, если для каждого положительного числа ε можно указать такое число η, что для любых двух точек x_1, x_2, принадлежащих к области задания функции и отстоящих друг от друга на расстоянии, меньшем чем η, разность соответствующих значений функций $f(x_1)$ и $f(x_2)$ будет по абсолютной величине меньше ε:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \text{ при } |x_1 - x_2| < \eta.$$

Равномерная непрерывность означает, что во всех частях области задания функции достаточна одна и та же степень близости двух значений аргумента, чтобы добиться заданной степени близости соответствующих значений функции.

Не всегда функция, непрерывная в данной области, является в ней равномерно непрерывной.

7. Функции нескольких переменных

Определение. Переменная величина u называется *функцией n переменных величин $x, y, z, \ldots, t$ (аргументов)*, если при заданных значениях этих переменных величина u принимает одно определенное значение *(однозначная функция)* или несколько определенных значений *(многозначная функция)*. Обозначения: функция двух переменных: $u=f(x, y)$, функция трех переменных: $u=F(x, y, z)$, функция n переменных:

* Понятие *колебания* функции может быть распространено и на функции, не имеющие наибольшего и наименьшего значений. См. об этом в полных курсах анализа, например Фихтенгольц, т. I (стр. 587 справочника).

$u = \varphi(x, y, z, \ldots, t)$. Совокупность n чисел, представляющих соответственно значения каждой переменной, называется *системой значений аргументов* *.

Примеры. Функция двух переменных: $u = f(x, y) = xy^2$; при системе значений $x = 2$, $y = 3$ функция принимает значение $f(2, 3) = 2 \cdot 3^2 = 18$. Функция четырех переменных $u = \varphi(x, y, z, t) = x \ln(y - zt)$; при системе значений $x = 3$, $y = 4$, $z = 3$, $t = 1$ функция принимает значение $\varphi(3, 4, 3, 1) = 3 \cdot \ln(4 - 3 \cdot 1) = 0$.

Геометрические изображения.

Изображение системы значений аргументов. Система значений двух переменных x, y может быть изображена точкой P на плоскости с декартовыми координатами x и y (см. стр. 198); система значений трех переменных x, y, z — точкой P в пространстве с декартовыми координатами x, y, z. Для системы четырех и большего числа переменных такое изображение невозможно; однако принято по аналогии называть систему значений n переменных $x, y, z, \ldots, t$ *точкой n-мерного пространства с координатами* $x, y, z, \ldots, t$. В предыдущем примере система чисел (3, 4, 3, 1) — точка 4-мерного пространства с координатами $x = 3$, $y = 4$, $z = 3$, $t = 1$. Поэтому функцию нескольких переменных называют также *функцией точки* (см. стр. 529).

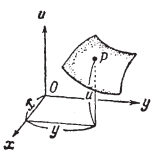


Рис. 275.

Изображение функции двух переменных $u = f(x, y)$. Аналогично графику функции одной переменной, функция двух переменных изображается *поверхностью*, уравнение которой $u - f(x, y) = 0$ (рис. 275) (см. стр. 220). Например, функция $u = 1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3}$ изображается плоскостью (см. стр. 221), функция $u = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}$ — эллиптическим параболоидом (см. стр. 230), функция $u = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ — полусферой и т. д.** (рис. 276).

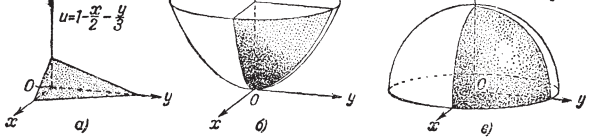


Рис. 276.

Область задания функции — множество тех систем значений, которые могут в рассматриваемом вопросе принимать аргументы. Эти области могут быть многообразны; часто встречаются функции со связными областями задания.

---

* Или точкой n-мерного пространства, см. ниже.

** Функции трех и большего числа переменных аналогичного геометрического изображения иметь не могут. Но по аналогии с поверхностью трехмерного пространства вводится подобное же понятие *гиперповерхности* и для n-мерного пространства.

Связные области двух переменных. Области, изображенные на рис. 277, называются *односвязными* * (к односвязным областям принадлежит также и вся плоскость). Если же внутри рассматриваемой

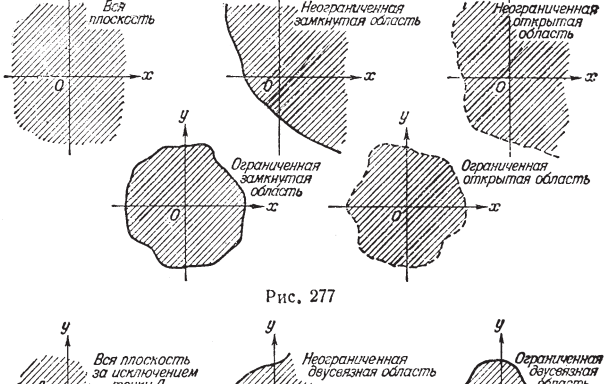


Рис. 277

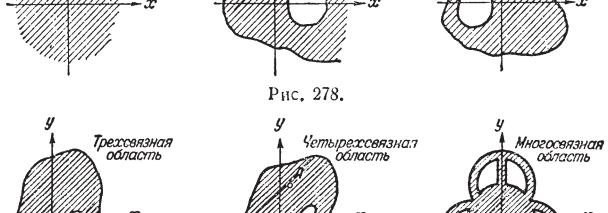


Рис. 278.

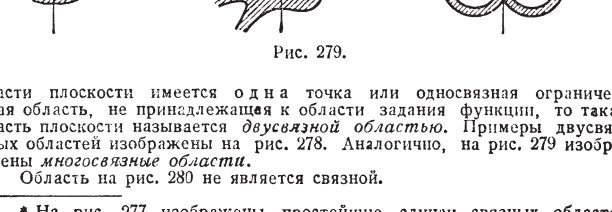


Рис. 279.

части плоскости имеется о д н а точка или односвязная ограниченная область, не принадлежащая к области задания функции, то такая часть плоскости называется *двусвязной областью.* Примеры двусвязных областей изображены на рис. 278. Аналогично, на рис. 279 изображены *многосвязные области.*

Область на рис. 280 не является связной.

* На рис. 277 изображены простейшие случаи связных областей двух переменных и приведены их названия (области заштрихованы; если граница области входит в область задания, то она изображена сплошной линией, а если нет, то — пунктирной).

Связные области трех переменных (простейшие случаи): все пространство или его часть, ограниченная одной или несколькими поверхностями; точки этих поверхностей могут входить или не входить в область задания; названия таких областей аналогичны названиям, приведенным на рис. 277—279 для функций двух переменных. *Для функции бо́льшего числа переменных* можно ввести аналогичные геометрические образы в многомерном пространстве *.

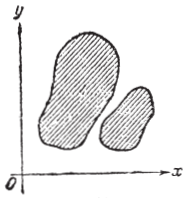


Рис. 280.

Способы задания функции.

Табличное задание. Функция двух переменных может быть задана (определена) таблицей значений (пример таких таблиц см. на стр. 79—таблицы значений эллиптических интегралов). В этой таблице значения аргументов располагаются по ее верхнему и левому краям, а значение функции находится на пересечении соответствующих столбца и строки. Таблица такого вида называется *таблицей с двумя входами*.

Задание формулами. Функция нескольких переменных может быть задана одной или несколькими формулами. Примеры:

1) $u = xy^2$; 2) $u = x \ln (y - z^t)$; 3) $u = \begin{cases} x + y \text{ при } x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ x - y \ \ » \ \ x \geqslant 0,\ y < 0, \\ -x + y \ \ » \ \ x < 0,\ y \geqslant 0, \\ -x - y \ \ » \ \ x < 0,\ y < 0 \end{cases}$

(эта функция может быть записана также в форме $u = |x| + |y|$).

Область определенности аналитического выражения *(область существования функции)*. В математическом анализе в первую очередь рассматриваются функции, определенные одной формулой, причем в область задания такой функции включаются все те системы значений аргументов, при которых данное аналитическое выражение имеет смысл, т. е. принимает определенные конечные действительные значения. Такая область называется *областью определенности аналитического выражения*. Обычно, если нет дополнительных ограничений, то под областью задания *(существования)* функции, определенной одной формулой, понимают именно область определенности.

Рис. 281.

Примеры: 1) $u = x^2 + y^2$; область определенности — все значения x и y (вся плоскость). 2) $u = \dfrac{1}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$; область определенности —

* См. Фихтенгольц, т. I (стр. 587 справочника).

системы значений x и y, удовлетворяющие неравенству $x^2 + y^2 < 16$ (открытая область внутри круга, рис. 281, *а*). 3) $u = \arcsin(x + y)$; область определенности — системы значений x и y, удовлетворяющие неравенству $-1 \leqslant x + y \leqslant +1$ (замкнутая область — полоса между параллельными прямыми, рис. 281, *б*). 4) $u = \arcsin(2x - 1) + \sqrt{1 - y^2} + \sqrt{y} + \ln z$: область определенности — системы значений, удовлетворяющих неравенствам $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $z > 0$ (все точки пространства, находящиеся над квадратом со стороной 1, рис. 281, *в*).

Основные формы аналитического задания функции. Функции нескольких переменных заданы *явно*, когда дано их выражение через аргументы: $u = f(x, y, z, \ldots, t)$; *неявно*, когда аргументы и функция связаны уравнением $F(x, y, z, \ldots, t, u) = 0$; *параметрически*, когда n аргументов и функция выражены явно через n новых переменных (параметров): $x = \varphi(r, s)$, $y = \psi(r, s)$, $u = \chi(r, s)$ (функция двух переменных); $x = \varphi(r, s, t)$, $y = \psi(r, s, t)$, $z = \chi(r, s, t)$, $u = \varkappa(r, s, t)$ (функция трех переменных) и т. п.

Однородные функции нескольких переменных — функции $f(x, y, z, \ldots, t)$, удовлетворяющие условию

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \ldots, \lambda t) = \lambda^n f(x, y, z, \ldots, t)$$ (λ — произвольное число);

число n называется *степенью однородности*. Например:

$$u = x^2 - 3xy + y^2 + x\sqrt{xy + \frac{x^3}{y}} \quad (n = 2); \quad u = \frac{x + z}{2x - 3y} \quad (n = 0).$$

Для однородной функции $u = f(x, y, z, \ldots, t)$ имеет место *теорема Эйлера*:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + \ldots + t\frac{\partial f}{\partial t} = n \cdot f(x, y, \ldots, t).$$

Зависимость функций нескольких переменных. Две однозначные функции от двух переменных $u = f(x, y)$ и $v = \varphi(x, y)$, заданные в некоторой области, называются *зависимыми* одна от другой, если одна из них может быть представлена как функция другой: $u = F(v)$; т. е. для каждой точки области задания имеет место тождество

$$f(x, y) = F[\varphi(x, y)] \quad \text{или} \quad \Phi(f, \varphi) = 0.$$

и *независимыми*, если такой функции F или Φ не существует. Например, две функции $u = (x^2 + y^2)^2$ и $v = \sqrt{x^2 + y^2}$, определенные в области $x^2 + y^2 \geqslant 0$, зависимые, так как $u = v^4$.

Аналогично: m функций $u_1, u_2, \ldots, u_m$ от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, заданных в некоторой общей области, называются *зависимыми*, если одна из них (все равно какая) может быть представлена как функция остальных, т. е. для каждой точки области имеет место тождество

$$u_i = F(u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n) \text{ или } \Phi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0,$$

и *независимыми*, если такой функции F или Φ не существует. Например, три функции от n переменных

$$u = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \quad v = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2,$$
$$w = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n,$$

определенные в n-мерном пространстве, зависимы, так как $v = u^2 - 2w$

Аналитический признак независимости двух функций $u = f(x, y)$ и $v = \varphi(x, y)$: их *якобиан*, т. е. определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix}$$ обозначаемый $\frac{D(f, \varphi)}{D(x, y)}$ или $\frac{D(u, v)}{D(x, y)}$,

не должен обращаться в рассматриваемой области тождественно в нуль. Этот же признак обобщается на случай n функций от т о г о ж е числа n переменных $u_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, u_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \equiv \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \not\equiv 0.$$

В случае, когда число m функций $u_1, u_2, \ldots, u_m$ меньше, чем число переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, эти функции независимы, если хоть один определитель m-го порядка матрицы

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \frac{\partial u_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \end{matrix} \right\|$$

отличен от нуля. Число независимых функций равно рангу μ указанной матрицы *. При этом независимыми будут именно те функции, производные которых служат элементами определителя μ-го порядка, не равного тождественно нулю.

Если $m > n$, то независимыми могут быть не более n функций из данных m.

П р е д е л ф у н к ц и и н е с к о л ь к и х п е р е м е н н ы х **. Функция двух переменных $u = f(x, y)$ имеет *предел* A при системе значений $x = a$, $y = b$ [обозначение: $A = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y)$], если при приближении x к a и y к b л ю б ы м с п о с о б о м $f(x, y)$ подходит как угодно

---

* О ранге матрицы см. стр. 150.

** Здесь рассматриваются функции, определенные в связной области (см. стр. 287—288).

близко к числу A. В самой точке $P(a, b)$ (т. е. при системе значений $x = a$, $y = b$) функция может и не принимать значения A и вообще может быть не определена.

Точная формулировка $A = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y)$, если, задав произвольно как угодно малое положительное число ε, можно указать такое положительное число η, что при любых независимых друг от друга значениях x и y, взятых в промежутках $a - \eta < x < a + \eta$ и $b - \eta < y < b + \eta$ (рис. 282), соответствующие значения $f(x, y)$ будут находиться в промежутке

$$A - \varepsilon < f(x, y) < A + \varepsilon.$$

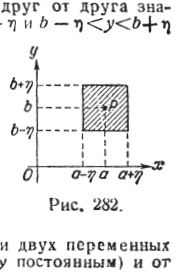


Рис. 282.

Понятие предела функции бо́льшего числа переменных $f(x, y, z, \ldots, t)$ вводится аналогично.

Признаки существования предела, рассмотренные для функции одной переменной (сведение к пределу последовательности, признак Коши — см. стр. 276), аналогично распространяются и на функции нескольких переменных.

Повторные пределы. Если для функции двух переменных $f(x, y)$ найти сначала предел $\lim\limits_{x \to a} f(x, y)$ (полагая y постоянным) и от полученного выражения, являющегося функцией y, найти предел при $y \to b$, то найденное число $B = \lim\limits_{y \to b} [\lim\limits_{x \to a} f(x, y)]$ называется *повторным пределом*. Переменив порядок перехода к пределу, получаем другой повторный предел: $C = \lim\limits_{x \to a} [\lim\limits_{y \to b} f(x, y)]$.

В общем случае $B \neq C$ (если даже оба предела существуют), например, для функции $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2 + x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ при $x \to 0$, $y \to 0$ имеем $B = -1$, $C = +1$.

Если функция $f(x, y)$ имеет предел $A = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y)$, то $B = C = A$.

Но из равенства повторных пределов $B = C$ не следует существования предела A.

Непрерывные функции нескольких переменных.

Определение. Функция двух переменных $u = f(x, y)$ называется *непрерывной* при системе значений $x = a$, $y = b$ [*в точке* $P(a, b)$], если 1) точка $P(a, b)$ принадлежит области задания функции, 2) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y)$ существует и равен $f(a, b)$; в противном случае функция имеет при $x = a$, $y = b$ *разрыв*. Если функция задана и непрерывна во всякой точке, принадлежащей некоторой связной области, то она называется *непрерывной в области*.

Аналогично определяется непрерывность для функции нескольких переменных.

Равномерная непрерывность функции нескольких переменных в некоторой связной области определяется так же, как для функции одной переменной (стр. 285). Например, функция двух переменных $f(x, y)$ *равномерно непрерывна* в данной связной области, если для каждого положительного числа ε можно указать такое положительное число η, что для любых двух точек $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$, удовле-

творяющих условиям $|x_1 - x_2| < \eta$, $|y_1 - y_2| < \eta$, разность соответствующих значений функции будет по абсолютной величине меньше ε:

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon.$$

Не всегда функция, непрерывная в данной области, является в ней равномерно непрерывной.

Свойства непрерывных функций нескольких переменных.

1) *Прохождение через нуль* (теорема Коши). Если функция $f(x, y)$ задана и непрерывна в некоторой связной области, и в двух точках этой области $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$ она имеет разные знаки, то в этой области существует по меньшей мере одна такая точка $P_3(x_3, y_3)$, в которой $f(x, y)$ обращается в нуль:

$$f(x_3, y_3) = 0, \text{ если } f(x_1, y_1) > 0 \text{ и } f(x_2, y_2) < 0.$$

2) *Теорема о промежуточном значении.* Если функция $f(x, y)$ задана и непрерывна в некоторой связной области, и в двух точках этой области $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$ она принимает неравные значения A и B $f(x_1, y_1) = A$, $f(x_2, y_2) = B$, то, каково бы ни было число C, лежащее между A и B, в рассматриваемой области существует по меньшей мере одна такая точка $P_3(x_3, y_3)$, что

$$f(x_3, y_3) = C \quad (A < C < B \text{ или } B < C < A).$$

3) *Теорема об ограниченности функции.* Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области, то она *ограничена* в этой области; существуют два таких числа m и M, что для любой точки $P(x, y)$, принадлежащей области,

$$m \leq f(x, y) \leq M.$$

4) *Существование наибольшего и наименьшего значений.* Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области, то в этой области существует по меньшей мере одна такая точка $P'(x', y')$, что значение $f(x', y')$ будет наибольшим из всех значений $f(x, y)$, которые функция принимает в этой области, и по меньшей мере одна такая точка $P''(x'', y'')$, что значение $f(x'', y'')$ будет наименьшим из всех значений $f(x, y)$, которые функция принимает в этой области:

$$f(x', y') \geq f(x, y) \geq f(x'', y'')$$

для любой точки $P(x, y)$, принадлежащей области.

5) Функция, непрерывная в замкнутой ограниченной области, равномерно непрерывна в этой области *.

8. *Числовые ряды*

Определения. Выражение вида

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots,$$

где числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ образуют бесконечную последовательность (см. стр. 267), называется *числовым рядом*; суммы $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots, S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, называются *частичными суммами* ряда, а член a_n — *общим членом* ряда. Если последовательность частичных сумм $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ имеет предел (при $n \to \infty$) $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$, то ряд называется *сходящимся*, а число S — *суммой ряда* (обозначение: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$), если предела не существует, то ряд —

* См. стр. 291.

расходящийся: в последнем случае величина S_n может неограниченно возрастать ($\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$) или быть колеблющейся. Необходимый и достаточный признак сходимости ряда сводится, таким образом, к признаку существования предела последовательности $S_1, S_2, \ldots, S_n$ (см. стр. 269).

Примеры: Ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots \tag{1}$$

сходящийся (геометрическая прогрессия).

Ряды

$$1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots, \tag{2}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \text{ (гармонический ряд)} \tag{3}$$

$$1 - 1 + 1 - \ldots + (-1)^{n-1} + \ldots \tag{4}$$

расходящиеся. Для рядов (2) и (3) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, ряд (4) – колеблющийся.

Остатком или *остаточным членом* сходящегося ряда $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ называется разность между его суммой S и частичной суммой S_n; он обозначается через R_n:

$$R_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m} + \ldots$$

Основные теоремы о сходимости рядов.

1) Отбрасывание конечного числа начальных членов ряда или присоединение в начале его нескольких новых членов не отражается на поведении (сходимости или расходимости) ряда.

2) Если члены сходящегося ряда умножить на один и тот же множитель c, то его сходимость не нарушится (а сумма умножится на c).

3) Сходящиеся ряды можно почленно складывать и вычитать: из сходимости рядов $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ с суммой S и $b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$ с суммой $\sum$ следует, что ряд $(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \ldots + (a_n \pm b_n) + \ldots$ сходится и его сумма равна $S \pm \sum$.

Необходимый признак сходимости ряда: общий член ряда должен при $n \to \infty$ стремиться к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Этот признак *не является достаточным*: например, в гармоническом ряде (3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, но $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$.

Принцип сравнения рядов с положительными членами. Если два ряда

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{А}$$

и

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \tag{Б}$$

имеют положительные члены и, начиная с некоторого n, $a_n \geq b_n$, то из сходимости ряда (А) следует сходимость ряда (Б), а из расходимости ряда (Б) следует расходимость ряда (А).

Примеры: Ряд

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^n}+\ldots \tag{5}$$

сходящийся, так как, начиная с $n=2$, члены ряда (5) меньше членов ряда (1): $\frac{1}{n^n}<\frac{1}{2^{n-1}}$ $(n\geq 2)$, а ряд (1) – сходящийся.

Ряд

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots \tag{6}$$

расходящийся, так как, начиная с $n>1$, члены ряда (6) больше членов ряда (3): $\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{n}$ $(n>1)$, а ряд (3) – расходящийся.

Признаки сходимости рядов с положительными членами.

Признак Даламбера Если для ряда $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ все отношения $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, начиная с некоторого места, будут меньше некоторого числа $q<1$, то ряд сходится; если все эти отношения, начиная с некоторого места, будут больше некоторого числа $Q>1$, то ряд расходится.

Следствие. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho$, то ряд сходится при $\rho<1$ и расходится при $\rho>1$. При $\rho=1$ признак не дает ответа: ряд может сходиться или расходиться.

Примеры: 1) Для ряда $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\ldots$ (7)

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2^{n+1}}:\frac{n}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2};$$ ряд (7) сходится;

2) для ряда $2+\frac{3}{4}+\frac{4}{9}+\ldots+\frac{n+1}{n^2}+\ldots$ (8)

$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{(n+1)^2}:\frac{n+1}{n^2}\right)=1$ и признак не дает ответа.

Признак Коши. Если для ряда $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ все числа $\sqrt[n]{a_n}$, начиная с некоторого места, будут меньше некоторого числа $q<1$, то ряд сходится; если все эти числа, начиная с некоторого места, будут больше некоторого числа $Q>1$, то ряд расходится.

Следствие. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho$, то ряд сходится при $\rho<1$ и расходится при $\rho>1$; при $\rho=1$ признак не дает ответа. Например, для ряда

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{3}{4}\right)^9+\ldots+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}+\ldots \tag{9}$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n=\frac{1}{e}<1;$$ ряд (9) сходится.

Интегральный признак (Коши). Ряд с общим членом $a_n=f(n)$ сходится, если $f(x)$ – функция монотонно убывающая и несобственный

интеграл $\int_c^{\infty} f(x)\,dx$ (см. стр. 398) сходится; ряд с общим членом $f(x)$ расходится, если этот интеграл расходится. При этом нижний предел c берется произвольным, так, чтобы функция $f(x)$ при $c < x < \infty$ была определена и не имела разрывов. Например, для ряда (8) будет

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2}, \quad \int_c^{\infty} \frac{x+1}{x^2}\,dx = \left[\ln x - \frac{1}{x}\right]_c^{\infty} = \infty;$$

интеграл расходится и, следовательно, ряд (8) расходится.

Абсолютная и условная сходимости. Одновременно с рядом

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \tag{А}$$

члены которого имеют неодинаковые знаки (знакопеременный ряд), удобно рассматривать ряд

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots, \tag{Б}$$

составленный из абсолютных величин членов ряда (А). Если ряд (Б) сходится, то и ряд (А) сходится; в этом случае ряд (А) называется *абсолютно сходящимся*. Если же ряд (Б) расходится, то ряд (А) может расходиться, но может и сходиться; в последнем случае он называется *условно сходящимся*. Например, ряд

$$\frac{\sin\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n\alpha}{2^n} + \ldots, \tag{10}$$

где α — любое постоянное число, сходится абсолютно, так как ряд с общим членом $\left|\frac{\sin n\alpha}{2^n}\right|$ сходится [это видно из сравнения его с рядом (1): $\left|\frac{\sin n\alpha}{2^n}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}$]. Ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots \tag{11}$$

сходится (см. стр. 296, теорема Лейбница), но условно, так как ряд (3) с общим членом $|a_n| = \frac{1}{n}$ расходится.

Свойства абсолютно сходящихся рядов.

1) В абсолютно сходящемся ряде члены можно переставлять местами любым способом; сумма ряда не будет при этом меняться. Переменив же порядок членов условно сходящегося ряда (так, что переставлено будет бесконечное множество членов ряда), можно изменить его сумму, сделать ее равной любому числу (*теорема Римана*) и даже сделать ряд расходящимся.

2) Абсолютно сходящиеся ряды можно не только почленно складывать и вычитать (см. стр. 293), но и перемножать, как обыкновенные многочлены, представляя результат в виде ряда, например, следующим способом:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots) =$$
$$= \underbrace{a_1b_1} + \underbrace{a_2b_1 + a_1b_2} + \underbrace{a_3b_1 + a_2b_2 + a_1b_3} + \ldots +$$
$$+ \underbrace{a_nb_1 + a_{n-1}b_2 + \ldots + a_1b_n} + \ldots$$

Если $\sum a_n = S_a$ и $\sum b_n = S_b$, то сумма ряда, полученного в результате умножения, равна $S_a S_b$ *

Знакочередующиеся ряды. Для сходимости ряда $a_1 - a_2 + a_3 - \ldots \pm a_n \mp \ldots$, где a_n — положительные числа, достаточно, чтобы соблюдались два условия:

$$1)\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ и } 2)\ a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > \ldots$$

(*теорема Лейбница*). Например, ряд (11) сходится.

Оценка остатка знакочередующегося ряда. Если ограничиться в сходящемся знакочередующемся ряде n первыми членами, то остаток $R_n = S - S_n$ имеет знак первого отброшенного члена и будет меньше его по абсолютной величине: $|S - S_n| < |a_{n+1}|$. Так, в ряде

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \pm \frac{1}{n} \mp \ldots,$$

имеющем сумму $\ln 2$, остаток $|\ln 2 - S_n| < \frac{1}{n+1}$.

Таблица сумм некоторых числовых рядов:

1) $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots = e$,

2) $1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots \pm \frac{1}{n!} \mp \ldots = \frac{1}{e}$,

3) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \pm \frac{1}{n} \mp \ldots = \ln 2$,

4) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = 2$,

5) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots \pm \frac{1}{2^n} \mp \ldots = \frac{2}{3}$,

6) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots \pm \frac{1}{2n-1} \mp \ldots = \frac{\pi}{4}$,

7) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots = 1$,

8) $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \ldots = \frac{1}{2}$,

9) $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(n-1)(n+1)} + \ldots = \frac{3}{4}$,

10) $\frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{7\cdot 9} + \frac{1}{11\cdot 13} + \ldots + \frac{1}{(4n-1)(4n+1)} + \ldots = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$,

11) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \ldots = \frac{1}{4}$,

12) $\frac{1}{1\cdot 2\ldots l} + \frac{1}{2\cdot 3\ldots(l+1)} + \ldots + \frac{1}{n\ldots(n+l-1)} + \ldots = \frac{1}{(l-1)(l-1)!}$,

13) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$,

* Если два ряда $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ и $b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$ сходятся и хотя бы один из них сходится абсолютно, то ряд, полученный в результате их умножения, сходится, хотя и не обязательно абсолютно.

14) $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots\pm\frac{1}{n^2}\mp\ldots=\frac{\pi^2}{12}$,

15) $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}$,

16) $1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots+\frac{1}{n^4}+\ldots=\frac{\pi^4}{90}$,

17) $1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\ldots\pm\frac{1}{n^4}\mp\ldots=\frac{7\pi^4}{720}$, .

18) $\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^4}+\ldots=\frac{\pi^4}{96}$.

Числа Бернулли B_k:

19) $1+\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}+\frac{1}{4^{2k}}+\ldots+\frac{1}{n^{2k}}+\ldots=\frac{\pi^{2k}2^{2k-1}}{(2k)!}B_k$,

20) $1-\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}-\frac{1}{4^{2k}}+\ldots\pm\frac{1}{n^{2k}}\mp\ldots=\frac{\pi^{2k}\,(2^{2k-1}-1)}{(2k)!}B_k$,

21) $1+\frac{1}{3^{2k}}+\frac{1}{5^{2k}}+\frac{1}{7^{2k}}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^{2k}}+\ldots=\frac{\pi^{2k}\,(2^{2k}-1)}{2\cdot(2k)!}B_k$

Таблица первых чисел Бернулли

k	B_k	k	B_k	k	B_k	k	B_k
1	$\frac{1}{6}$	4	$\frac{1}{30}$	7	$\frac{7}{6}$	10	$\frac{174\,611}{330}$
2	$\frac{1}{30}$	5	$\frac{5}{66}$	8	$\frac{3617}{510}$	11	$\frac{854\,513}{138}$
3	$\frac{1}{42}$	6	$\frac{691}{2730}$	9	$\frac{43\,867}{798}$		

Числа Эйлера E_k:

22) $1-\frac{1}{3^{2k+1}}+\frac{1}{5^{2k+1}}-\frac{1}{7^{2k+1}}+\ldots\pm\frac{1}{(2n-1)^{2k+1}}\mp\ldots=\frac{\pi^{2k+1}}{2^{2k+2}(2k)!}E_k$

Таблица первых чисел Эйлера

k	E_k	k	E_k
1	1	5	50 521
2	5	6	2 702 765
3	61	7	199 360 981
4	1385		

Некоторые авторы применяют иное обозначение для чисел Бернулли и Эйлера:

$$B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0, \quad B_6 = \frac{1}{42},$$

$$B_7 = 0, \quad B_8 = -\frac{1}{30} \text{ и т. д.}$$

$E_1 = 0$, $E_2 = -1$, $E_3 = 0$, $E_4 = 5$, $E_5 = 0$, $E_6 = -61$, $E_7 = 0$, $E_8 = 1385$ и т. д.

9. Функциональные ряды

Определения. Ряд, составленный из функций одной и той же переменной x:

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \tag{1}$$

называется *функциональным*. Все те значения $x = a$, которые входят в область задания всех функций $f_n(x)$ и для которых числовые ряды

$$f_1(a) + f_2(a) + \ldots + f_n(a) + \ldots$$

сходятся [т. е. для которых существует предел частичных сумм $S_n(a)$: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(a) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(a) = S(a)$], образуют *область сходимости* функционального ряда (1). Функция $S(x)$ называется *суммой ряда* (1) [ряд (1) «сходится к функции $S(x)$»]. Сумма первых n членов ряда (1) называется *частичной суммой*: $S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$. Разность между суммой $S(x)$ сходящегося функционального ряда и его частичной суммой $S_n(x)$ называется *остатком* или *остаточным членом* ряда (1); он обозначается через $R_n(x)$:

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots + f_{n+m}(x) + \ldots$$

Равномерная и неравномерная сходимость ряда. По определению предела последовательности чисел (стр. 267) ряд (1) *сходится* в данной области, если, как бы мало ни было число $\varepsilon > 0$, можно указать такое целое число N, что $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ при $n > N$. При этом для функциональных рядов могут представиться два случая:

1) Можно найти число N, общее для всех значений x, входящих в область сходимости ряда; в этом случае ряд (1) называется *равномерно сходящимся* в данной области. 2) Такого общего числа для всех x, лежащих в области сходимости, нет: каково бы ни было n, найдется в области сходимости такое число x, что $|S(x) - S_n(x)| > \varepsilon$. В этом случае ряд (1) *сходится* в данной области *неравномерно*.

Примеры: 1) Ряд

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \tag{*}$$

сходится для всех значений x; его сумма равна e^x (см. стр. 327). Эта сходимость — равномерная для любой конечной области задания

величины x. В самом деле, при $|x| < a$ имеем $S(x) - S_n(x)| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}\right|^* < \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}e^a$; но $\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}e^a$ при достаточно большом n (не зависящем от x) может быть сделано меньше ε, так как $(n+1)!$ растет быстрее a^{n+1}. Для в с е й же числовой прямой этот ряд сходится неравномерно: какое бы n ни было дано, можно найти такое x, что $\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}\right|$ будет больше любого наперед заданного ε.

2) Ряд

$$x + x(1-x) + x(1-x)^2 + \ldots + x(1-x)^n + \ldots \qquad (**)$$

сходится для всех значений x в замкнутом интервале $[0, 1]$, так как по признаку Даламбера (следствие, стр. 294) $\rho = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |1-x| < 1$ для $0 < x \leqslant 1$ (а при $x = 0$ $S = 0$). Но эта сходимость неравномерная:

$$S(x) - S_n(x) = x[(1-x)^{n+1} + (1-x)^{n+2} + \ldots] = (1-x)^{n+1}$$

и какое бы ни было n, найдется такое малое x, что $(1-x)^{n+1}$ будет как угодно близким к 1, т. е. не будет меньше ε. В области же $a \leqslant x \leqslant 1$ (где $0 < a < 1$) ряд сходится равномерно.

Признак (Вейерштрасса) *равномерной сходимости рядов* Ряд

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots \qquad (1)$$

равномерно сходится в данной области, если существует такой сходящийся числовой ряд

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots \qquad (2)$$

что для всех значений x, лежащих в этой области, имеет место неравенство

$$|f_n(x)| \leqslant c_n$$

В этом случае ряд (2) называется *мажорантой* ряда (1).

Пример: Ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ равномерно сходятся в любой области, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходящийся, так как $|a_n \cos nx| \leqslant |a_n|$ и $|a_n \sin nx| \leqslant |a_n|$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Свойства равномерно сходящихся рядов

1) Если $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, ... — непрерывные функции в некоторой области их задания и ряд $f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$ равномерно сходится в этой области, то его сумма $S(x)$ — функция также непрерывная в этой области. Если же ряд сходится неравномерно в к о н е ч н о й области, то его сумма $S(x)$ может быть и раз-

* По формуле остаточного члена в ряде Маклорена см. стр. 323.

рывной в этой области [в рассмотренном выше примере (**) сумма ряда разрывна: $S(x)$ равна нулю при $x=0$ и равна 1 при $x>0$; в примере (*) функция e^x непрерывна: ряд сходится неравномерно, но не в конечной области, а на всей бесконечной числовой прямой].

2) Равномерно сходящийся ряд можно почленно интегрировать в данной области, и сумма интегралов от членов ряда равна интегралу от суммы данного ряда.

Степенные ряды – функциональные ряды вида

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (А)$$

или вида

$$a_0 + a_1 (x-a) + a_2 (x-a)^2 + \ldots + a_n (x-a)^n + \ldots, \qquad (Б)$$

где a_i – постоянные коэффициенты.

Основные свойства степенных рядов.

1) Ряд (А) абсолютно сходится для всех значений x, меньших по абсолютной величине некоторого числа ρ ($|x|<\rho$), называемого *радиусом сходимости* степенного ряда. Ряд (Б) абсолютно сходится для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\rho$ (ρ – радиус сходимости). Радиус сходимости может быть определен по формулам

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}, \quad \frac{1}{\rho} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,*.$$

На границах области сходимости [для ряда (А) при $x=+\rho$ и $x=-\rho$; для ряда (Б) при $x=a+\rho$ и $x=a-\rho$] ряд может сходиться или расходиться.

2) Если ряд (А) сходится для положительного значения $x=x_1$, то он сходится равномерно внутри интервала $(-x_1+\varepsilon,\ x_1)$ (*теорема Абеля*).

Пример: Для ряда $1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots$ $\frac{1}{\rho} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, т. е. $\rho=1$, и ряд сходится абсолютно при $-1<x<+1$, причем при $x=-1$ ряд сходится условно [см. ряд (11) на стр. 295], а при $x=1$ ряд расходится [см. ряд (3) на стр. 293]. По теореме Абеля этот ряд сходится равномерно в области $[-x_1,\ +x_1]$, где x_1 – любое число между 0 и 1.

Таблица первых членов некоторых степеней степенного ряда

$$S = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \ldots,$$

$$S^2 = a^2 + 2abx + (b^2 + 2ac)x^2 + 2(ad+bc)x^3 + (c^2 + 2ae + 2bd)x^4 + 2(af + be + cd)x^5 + \ldots,$$

$$\sqrt{S} = S^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{b}{a}x + \left(\frac{1}{2}\frac{c}{a} - \frac{1}{8}\frac{b^2}{a^2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{d}{a} - \frac{1}{4}\frac{bc}{a^2} + \frac{1}{16}\frac{b^3}{a^3}\right)x^3 + \left(\frac{1}{2}\frac{e}{a} - \frac{1}{4}\frac{bd}{a^2} - \frac{1}{8}\frac{c^2}{a^2} + \frac{3}{16}\frac{b^2c}{a^3} - \frac{5}{128}\frac{b^4}{a^4}\right)x^4 + \ldots\right].$$

---

* В случаях, когда этих пределов не существует, в указанных формулах вместо lim берется *наибольший предел* (lim: см. Фихтенгольц, т. I стр. 587 справочника).

$$\frac{1}{\sqrt{S}}=S^{-\frac{1}{2}}=a^{-\frac{1}{2}}\left[1-\frac{1}{2}\frac{b}{a}x+\left(\frac{3}{8}\frac{b^2}{a^2}-\frac{1}{2}\frac{c}{a}\right)x^2+\right.$$
$$+\left(\frac{3}{4}\frac{bc}{a^2}-\frac{1}{2}\frac{d}{a}-\frac{5}{16}\frac{b^3}{a^3}\right)x^3+$$
$$\left.+\left(\frac{3}{4}\frac{bd}{a^2}+\frac{3}{8}\frac{c^2}{a^2}-\frac{1}{2}\frac{e}{a}-\frac{15}{16}\frac{b^2c}{a^3}+\frac{35}{128}\frac{b^4}{a^4}\right)x^4+\ldots\right]$$

$$\frac{1}{S}=S^{-1}=a^{-1}\left[1-\frac{b}{a}x+\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{c}{a}\right)x^2+\left(\frac{2bc}{a^2}-\frac{d}{a}-\frac{b^3}{a^3}\right)x^3+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{2bd}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}-\frac{e}{a}-3\frac{b^2c}{a^3}+\frac{b^4}{a^4}\right)x^4+\ldots\right]$$

$$\frac{1}{S^2}=S^{-2}=a^{-2}\left[1-2\frac{b}{a}x+\left(3\frac{b^2}{a^2}-2\frac{c}{a}\right)x^2+\left(6\frac{bc}{a^2}-2\frac{d}{a}-4\frac{b^3}{a^3}\right)x^3+\right.$$
$$\left.+\left(6\frac{bd}{a^2}+3\frac{c^2}{a^2}-2\frac{e}{a}-12\frac{b^2c}{a^3}+5\frac{b^4}{a^4}\right)x^4+\ldots\right]$$

Обращение степенного ряда. Если дан ряд

$$y=f(x)=ax+bx^2+cx^3+dx^4+ex^5+fx^6+\ldots\quad(a\neq 0),$$

то разложение в ряд обратной функции

$$x=\varphi(y)=Ay+By^2+Cy^3+Dy^4+Ey^5+Fy^6+\ldots$$

имеет следующие коэффициенты:

$$A=\frac{1}{a},\quad B=-\frac{b}{a^3},\quad C=\frac{1}{a^5}(2b^2-ac),\quad D=\frac{1}{a^7}(5abc-a^2d-5b^3),$$

$$E=\frac{1}{a^9}(6a^2bd+3a^2c^2+14b^4-a^3e-21ab^2c),$$

$$F=\frac{1}{a^{11}}(7a^3be+7a^3cd+84ab^3c-a^4f-28a^2b^2d-28a^2bc^2-42b^5).$$

Разложение функций в ряды: степенные – см. стр. 322, тригонометрические — см. стр. 549.

II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1. Основные понятия

Производная функции одной переменной* $y=f(x)$ — новая функция от x $\left[\text{обозначения: } y',\ \dot{y},\ Dy,\ \frac{dy}{dx},\ f'(x),\ Df(x),\ \frac{df(x)}{dx}\right]$, равная при каждом значении x пределу отношения приращения функции Δy к соответствующему приращению аргумента Δx, когда Δx стремится к нулю:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \tag{1}$$

Геометрический смысл производной. Если $y=f(x)$ изображена своим графиком — кривой в декартовых координатах (рис. 283), то $f'(x)=\operatorname{tg}\alpha$, где α — угол между осью Ox и касательной к кривой в данной ее точке, отсчитываемый от положительного направления оси Ox против часовой стрелки **.

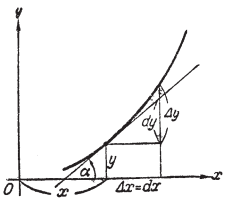


Рис. 283.

Существование производной. Производная существует при тех значениях аргумента x, при которых 1) функция $y=f(x)$ задана и непрерывна и 2) указанное отношение имеет конечный предел (1). Несуществование производной при данном значении x_1 указывает на то, что в соответствующей точке графика функции или не существует определенной касательной или эта касательная образует с осью Ox угол 90°. В последнем случае предел (1) является бесконечным; это (нестрого) обозначают: $f'(x_1)=\infty$ («производная обращается в бесконечность»).

Примеры несуществования производной в данной точке:

1) $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $f'(0)=\infty$, в точке 0 производная обращается в бесконечность (рис. 284, *а*); 2) $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$, предела (1)

---

* В этой главе рассматриваются только однозначные функции.

** Формула $f'(x)=\operatorname{tg}\alpha$ верна только в том случае, если на осях Ox и Oy взяты равные масштабы.

при $x=0$ нет (рис. 284, *б*); 3) $f(x)=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, предела (1) при $x=0$ нет, но есть предел слева $f'(-0)=1$ и предел справа $f'(+0)=0$; в этом случае кривая имеет излом (рис. 284, *в*).

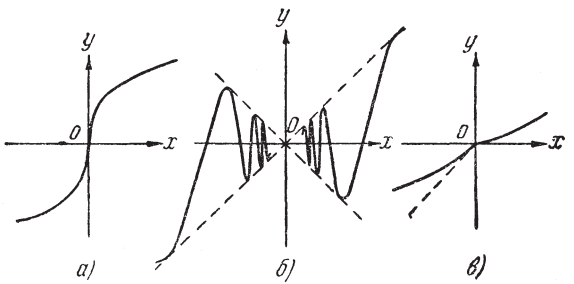


Рис. 284.

Производная слева и справа. Если для данного значения $x=a$ предела (1) не существует, но существуют пределы слева и справа (как в примере 3, рис. 284, *в*), то их называют соответственно *производной слева* и *производной справа*. Геометрический смысл таких производных: $f'(a-0)=\operatorname{tg}\alpha_1$, $f'(a+0)=\operatorname{tg}\alpha_2$ (рис. 285); кривая имеет излом.

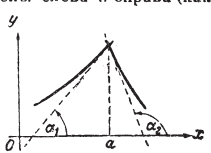


Рис. 285.

Элементарные функции имеют производную во всей области их существования за исключением отдельных точек, где могут быть случаи указанных типов (рис. 284, *а*, *б*, *в*).

Частная производная функции нескольких переменных $u=f(x, y, z, \ldots, t)$ по одной из них, например по x [обозначения $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, u'_x, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, f'_x], определяется равенством

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y, z, \ldots, t)-f(x, y, z, \ldots, t)}{\Delta x};$$

в этом случае приращение получает лишь одна из независимых переменных. Функция n переменных имеет n частных производных первого порядка: $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}$, …, $\dfrac{\partial u}{\partial t}$. Частная производная находится по правилам дифференцирования функции одной переменной (см. стр. 306—309), причем остальные переменные рассматриваются в данном случае как постоянные. Например:

$$u=\frac{x^2y}{z}\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2xy}{z},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x^2}{z},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{x^2y}{z^2}.$$

Геометрический смысл частной производной функции двух переменных. Если функция $u=f(x, y)$ изображена поверхностью в декартовых координатах, то $\frac{\partial u}{\partial x}=\operatorname{tg}\alpha$, где α — угол между положительным направлением оси Ox и касательной к сечению поверхности в данной ее точке параллельному плоскости xOu (α отсчитывается от оси Ox в положительном направлении — по часовой стрелке, если смотреть с положительной стороны оси Oy). Аналогично, $\frac{\partial u}{\partial y}=\operatorname{tg}\beta$ (β отсчитывается против часовой стрелки; рис. 286; на этом рисунке оба угла α и β положительны).

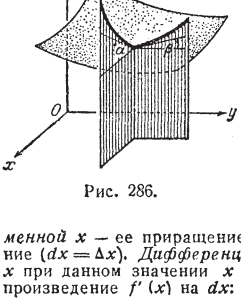


Рис. 286.

Производная в данном направлении и объемная производная см. в теории поля (стр. 535 и 541).

Дифференциалы переменных величин x, y и т. д. (обозначаются: dx, dy и т. д.) определяются различно, в зависимости от того, является ли величина независимой переменной или функцией. *Дифференциал независимой переменной* x — ее приращение, которому можно придавать любое значение ($dx=\Delta x$). *Дифференциал функции* $y=f(x)$ *одной переменной* x при данном значении x и данном дифференциале аргумента dx — произведение $f'(x)$ на dx:

$$dy=f'(x)\,dx.$$

Геометрический смысл дифференциала. При изображении функции графиком в декартовых координатах dy изображается приращением, которое получает ордината касательной к кривой в данной точке x при данном приращении dx (см. рис. 283 на стр. 302).

Основные свойства дифференциала. 1) *Инвариантность:* равенство $dy=f'(x)\,dx$ остается справедливым, будет ли x независимой переменной или функцией новой переменной t. 2) *Порядок малости:* если dx есть бесконечно малая величина, то dy и Δy — равносильные бесконечно малые $\left(\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{dy}=1\right)$ и разность между ними — бесконечно малая более высокого порядка, чем dx, dy, Δy. Это свойство позволяет при вычислении малых приращений функции заменять их дифференциалами; оно применяется как в приближенных вычислениях (стр. 116), так и в дифференциальном и интегральном исчислениях.

Частный дифференциал функции нескольких переменных $u=f(x, y, z, \ldots, t)$ по одной из переменных, например, по x [обозначается $d_x u$ или $d_x f$], определяется равенством

$$d_x u=\frac{\partial u}{\partial x}\,dx.$$

Дифференцируемая функция и полный дифференциал. Функция нескольких переменных $u=f(x, y, \ldots, t)$ называется *дифференцируемой* в точке $M_0(x_0, y_0, \ldots, t_0)$, если при переходе в бесконечно близкую точку $M(x_0+dx, y_0+dy, \ldots, t_0+dt)$ (где dx, dy, $\ldots$, dt — бесконечно малые величины) *полное приращение* функции

$$\Delta u=f(x_0+dx, y_0+dy, \ldots, t_0+dt)-f(x_0, y_0, \ldots, t_0)$$

отличается от суммы ее частных дифференциалов по всем переменным

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,dx+\frac{\partial u}{\partial y}\,dy+\ldots+\frac{\partial u}{\partial t}\,dt\right)_{x_0,\ y_0,\ \ldots,\ t_0} \qquad (*)$$

на бесконечно малую величину порядка выше, чем расстояние

$$M_0M=\sqrt{dx^2+dy^2+\ldots+dt^2}.$$

Если u — дифференцируемая функция, то сумма $(*)$ называется ее *полным дифференциалом* и обозначается через du:

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}\,dx+\frac{\partial u}{\partial y}\,dy+\ldots+\frac{\partial u}{\partial t}\,dt^{*}. \qquad (**)$$

Всякая непрерывная функция нескольких переменных, имеющая непрерывные частные производные по всем переменным, — дифференцируемая. Однако только из существования частных производных функции по всем переменным не следует ее дифференцируемости.

Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных $u=f(x, y)$, изображенной поверхностью в декартовых координатах (рис. 287): du равно приращению аппликаты касательной плоскости в данной точке, если x и y получили приращения dx и dy.

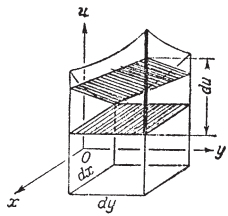


Рис. 287.

Основное свойство полного дифференциала аналогично свойствам дифференциала одной переменной** *инвариантность* выражения $(**)$ относительно входящих в него переменных.

Линейность дифференциальных выражений. Дифференциалы переменных, связанных некоторой функциональной зависимостью (*конечным уравнением*), связаны друг с другом всегда линейной зависимостью (*дифференциальным уравнением* первого порядка). Это относится как к дифференциалам независимых переменных, так и к дифференциалам (частным и полным) функций одной или нескольких переменных.

Получение дифференциального уравнения из конечного называется *дифференцированием*. В более узком смысле дифференцированием называют просто нахождение производной или дифференциала.

Производные и дифференциалы высших порядков. *Вторая производная* от функции одной переменной $y=f(x)$ $\left[\text{обозначается: } y'',\ \ddot{y},\ D^2y,\ \frac{d^2y}{dx^2}\text{ ***},\ f''(x),\ D^2f(x),\ \frac{d^2f(x)}{dx^2}\text{ ***}\right]$ — производная от производной: $f''(x)=\frac{d}{dx}f'(x)$. Производные любого порядка $\left[\text{обозначаются: } y''',\ \dddot{y},\ \frac{d^3y}{dx^3}\text{ ***},\ f^{[IV]}(x),\ D^nf(x),\ \frac{d^5f(x)}{dx^5}\text{ ***}\right]$ определяются аналогично.

---

* О полном дифференциале в векторной форме см. в теории поля, стр. 535.

** Ср. стр. 304.

*** Эти обозначения пригодны только в случае, когда x — независимая переменная, и непригодны, если $x=\varphi(v)$; см. стр. 313 (замена переменных).

Частная производная 2-го порядка от функции $u = f(x, y, z, \ldots, t)$ может быть взята по той же переменной, что и первая $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \ldots\right)$ или же по другой $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}, \ldots\right)$; в последнем случае производная называется *смешанной*. Величина смешанной производной, непрерывной при данных значениях x и y, не зависит от порядка переменных, по которым берутся производные $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}\right)$. Частные производные более высокого порядка определяются аналогично [обозначаются: $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}, \ldots$].

Второй дифференциал функции одной переменной $y = f(x)$ [обозначается d^2y, $d^2f(x)$] представляет собой дифференциал от первого дифференциала: $d^2y = d(dy) = f''(x)\,dx^2$ *. Аналогично определяются дифференциалы высших порядков: $d^3y = d(d^2y) = f'''(x)\,dx^3$ * и т. д.

Полный дифференциал 2-го порядка функции двух переменных $u = f(x, y)$:

$$d^2u = d(du) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dy^2$$

или, в символической форме: $d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^2 u$ **.

Полный дифференциал n-го порядка функции двух переменных:

$$d^nu = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^n u\ **;$$

для функции бо́льшего числа переменных:

$$d^nu = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy + \frac{\partial}{\partial z}\,dz + \ldots + \frac{\partial}{\partial t}\,dt\right)^n u\ **.$$

2. Техника дифференцирования

Общие указания. Пользуясь приведенными ниже правилами дифференцирования и таблицей производных, можно найти производную любой элементарной функции; такая производная всегда является тоже элементарной функцией. Наиболее существенное значение имеет правило дифференцирования функции от функции (*сложной функции*) — так называемое «цепное правило» (стр. 309); например

$$y = e^{\operatorname{tg}\sqrt{x}};\ \frac{dy}{dx} = e^{\operatorname{tg}\sqrt{x}} \cdot \frac{d(\operatorname{tg}\sqrt{x})}{dx} = e^{\operatorname{tg}\sqrt{x}}\,\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}} \cdot \frac{d\sqrt{x}}{dx} =$$

$$= e^{\operatorname{tg}\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\operatorname{tg}\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}.$$

---

* Эти обозначения пригодны только в случае, когда x — независимая переменная, и непригодны, если $x = \varphi(v)$; см. стр. 313 (замена переменных).

** В случае, когда переменные $x, y, \ldots, t$ сами являются функциями новых переменных, формулы более сложные. См. стр. 314–315.

Таблица производных элементарных функций

Функция	Производная	Функция	Производная
C (постоянная)	0	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
x	1	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
x^n	nx^{n-1}	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\operatorname{arcsec} x$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\operatorname{arccsc} x$	$-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
e^x	e^x	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
a^x	$a^x \ln a$	$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$\operatorname{Arsh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\lg x$	$\frac{1}{x}\lg e \approx \frac{0{,}4343}{x}$	$\operatorname{Arch} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{Arth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\operatorname{Arcth} x$	$-\frac{1}{x^2-1}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$		
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$		
$\sec x$	$\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \sec x$		
$\csc x$	$-\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x \csc x$		

Прежде чем дифференцировать, целесообразно, если возможно, преобразовать функцию к виду суммы, раскрывая скобки (стр. 128), выделяя целую часть (стр. 129—130) логарифмируя выражение (стр. 135) и т. п.

Примеры:

1) $$y=\frac{2-3\sqrt{x}+4\sqrt[3]{x}+x^2}{x}=\frac{2}{x}-3x^{-\frac{1}{2}}+4x^{-\frac{2}{3}}+x;$$

$$\frac{dy}{dx}=-2x^{-2}+\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}}-\frac{8}{3}x^{-\frac{5}{3}}+1.$$

2) $$y=\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\ln(x^2-1);$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)=-\frac{2x}{x^4-1}.$$

Основные правила дифференцирования. (u, v, w — функции независимой переменной x; u', v', w', ... — производные от этих функций по x).

1) *Производная* (или *дифференциал*) *алгебраической суммы* двух или нескольких функций равна алгебраической сумме производных (дифференциалов) от каждой функции:

$$(u+v-w+\ldots+t)'=u'+v'-w'+\ldots+t';$$

$$d(u+v-w+\ldots+t)=du+dv-dw+\ldots+dt.$$

2) *Производная (дифференциал) произведения* двух или нескольких функций равна сумме n слагаемых (где n — число перемножаемых функций); каждое слагаемое составлено так же, как и данное произведение, с тем отличием, что один из множителей поочередно заменен его производной (дифференциалом):

для двух функций: $(uv)'=uv'+u'v$, $d(uv)=u\,dv+v\,du$;

для трех функций:

$$(uvw)'=uvw'+uv'w+u'vw,\quad d(uvw)=uv\,dw+uw\,dv+vw\,du$$

и т. д. Часто для вычисления производной произведения нескольких функций сначала находят *логарифмическую производную* $\left(\text{т. е. производную логарифма данной функции } (\ln y)'=\frac{y'}{y}\right)$; например:

$$y=\sqrt{x^3e^{4x}\sin x};\quad \ln y=\frac{1}{2}(3\ln x+4x+\ln\sin x),$$

$$\frac{d\ln y}{dx}=\frac{\frac{dy}{dx}}{y}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{x}+4+\operatorname{ctg}x\right),\quad \frac{dy}{dx}=\left(\frac{3}{2x}+2+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}x\right)\sqrt{x^3e^{4x}\sin x}\,.$$

---

* Этот же способ применяется для дифференцирования функции вида u^v, например,

$$y=(2x+1)^{3x},\quad \ln y=3x\ln(2x+1),\quad \frac{y'}{y}=3\left[\frac{2x}{2x+1}+\ln(2x+1)\right]$$

$$y'=3\left[\frac{2x}{2x+1}+\ln(2x+1)\right]y=3\left[\frac{2x}{2x+1}+\ln(2x+1)\right](2x+1)^{3x}$$

3) *Производная (дифференциал) функции с постоянным множителем.* Постоянный множитель можно выносить за знак производной (дифференциала):

$$(cu)' = cu', \quad d(cu) = c\,du.$$

4) *Производная (дифференциал) дроби* вычисляется по следующей формуле:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}, \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

5) *Производная функции от функции (сложной функции).* Если $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, то

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(x);$$

если $y = f(u)$, $u = \varphi(t)$, $t = \psi(x)$, то

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(t) \cdot \psi'(x)$$ («цепное правило»).

В случае «цепи» из бóльшего числа функций поступают аналогично.

Производные высших порядков от простейших функций

Функция	n-я производная
x^m	$m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)\,x^{m-n}$ (при целом m и $n > m$ производная равна 0)
$\ln x$	$(-1)^{n-1}(n-1)!\,\frac{1}{x^n}$
$\log_a x$	$(-1)^{n-1}\,\frac{(n-1)!}{\ln a}\,\frac{1}{x^n}$
e^{kx}	$k^n e^{kx}$
a^x	$(\ln a)^n a^x$
a^{kx}	$(k \ln a)^n a^{kx}$
$\sin x$	$\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$
$\cos x$	$\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$
$\sin kx$	$k^n \sin\left(kx + \frac{n\pi}{2}\right)$
$\cos kx$	$k^n \cos\left(kx + \frac{n\pi}{2}\right)$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{sh} x$ при n четном, $\operatorname{ch} x$ при n нечетном
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{ch} x$ при n четном, $\operatorname{sh} x$ при n нечетном

Производная n-го порядка от произведения двух функций (*формула Лейбница*)

$$D^n(uv) = u \cdot D^n v + \frac{n}{1} Du\, D^{n-1} v + \frac{n(n-1)}{2} D^2 u D^{n-2} v + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!} D^m u D^{n-m} v + \ldots + D^n u \cdot v,$$

или (полагая $D^0 u = u$, $D^0 v = v$):

$$D^n(uv) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m D^m u D^{n-m} v$$

(формула, аналогичная биному Ньютона, см. стр. 163).

Производная сложной функции нескольких переменных. Случай одной независимой переменной:

$$u = f(x, y, \ldots, t),$$

где $x = \varphi(\xi)$, $y = \psi(\xi)$, $\ldots$, $t = \chi(\xi)$:

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{d\xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{d\xi} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{d\xi}. \qquad (*)$$

Случай нескольких независимых переменных: $u = f(x, y, \ldots, t)$, где $x = \varphi(\xi, \eta, \ldots, \tau)$, $y = \psi(\xi, \eta, \ldots, \tau)$, $\ldots$, $t = \chi(\xi, \eta, \ldots, \tau)$:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \xi} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \xi},\\
\frac{\partial u}{\partial \eta} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \eta},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\partial u}{\partial \tau} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \tau} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \tau}
\end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

Дифференцирование неявной функции.

1) *Функция одной переменной* $y = f(x)$, заданная уравнением

$$F(x, y) = 0. \qquad (А)$$

Дифференцирование (А по x на основании формулы (*) дает

$$F'_x + F'_y \cdot y' = 0, \qquad (Б)$$

откуда

$$y' = -\frac{F_x}{F'_y}$$

Дифференцирование (Б) по x на основании той же формулы дает

$$F''_{xx} + 2F''_{xy}y' + F''_{yy}(y')^2 + F_y y'' = 0, \qquad (В)$$

откуда с учетом (Б):

$$y'' = \frac{2F'_x F'_y F''_{xy} - (F'_y)^2 F''_{xx} - (F'_x)^2 F''_{yy}}{(F_y)^3}. \qquad (Г)$$

Таким же образом получается

$$F'''_{xxx} + 3F'''_{xxy}y' + 3F'''_{xyy}(y')^2 + F'''_{yyy}(y')^3 + \\ + 3F''_{xy}y'' + 3F''_{yy}y'y'' + F'_y y''' = 0, \qquad (Д)$$

откуда с учетом (Б) и (Д) определяется y''', и т. д.

2) *Функция нескольких переменных* $u = f(x, y, \ldots, t)$, заданная уравнением $F(x, y, \ldots, t, u) = 0$.

Частные производные находят аналогично (используя формулы (✳✳) на стр. 310):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -F'_x/F'_u, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -F'_y/F_u, \quad \ldots, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -F'_t/F'_u;$$

таким же путем находят и частные производные высших порядков.

3) *Две функции одной переменной* $y = f(x)$ и $z = \varphi(x)$, заданные системой уравнений

$$F(x, y, z) = 0 \text{ и } \Phi(x, y, z) = 0. \qquad (А)$$

Дифференцирование (А) по формуле (✳) на стр. 310 дает

$$F'_x + F'_y \cdot y' + F'_z \cdot z' = 0, \quad \Phi'_x + \Phi'_y \cdot y' + \Phi'_z \cdot z' = 0, \qquad (Б)$$

откуда

$$y' = \frac{F'_z\Phi'_x - \Phi'_z F'_x}{F'_y\Phi'_z - F'_z\Phi'_y}, \quad z' = \frac{F'_x\Phi'_y - F'_y\Phi'_x}{F'_y\Phi'_z - F'_z\Phi'_y};$$

таким же путем (дифференцированием (Б) с учетом значений y' и z' находятся вторые производные y'' и z'' и т. д.

4) *n функций одной переменной* $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$, $\ldots$, $t = \psi(x)$ заданные системой n уравнений:

$$F(x, y, z, \ldots, t) = 0, \ \Phi(x, y, z, \ldots, t) = 0, \ \ldots, \ \Psi(x, y, z, \ldots, t) = 0. \qquad (А)$$

Дифференцируя (А) по формуле (✳) на стр. 310, получаем:

$$\left.\begin{aligned} &F'_x + F'_y \cdot y' + F'_z \cdot z' + \ldots + F'_t \cdot t' = 0, \\ &\Phi'_x + \Phi'_y \cdot y' + \Phi'_z \cdot z' + \ldots + \Phi'_t \cdot t' = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\Psi'_x + \Psi'_y \cdot y' + \Psi'_z \cdot z' + \ldots + \Psi'_t \cdot t' = 0; \end{aligned}\right\} \qquad (Б)$$

решая систему (Б) относительно y', z', $\ldots$, t', находим первые производные, таким же путем находим производные высших порядков.

5) *Две функции двух переменных* $u = f(x, y)$, $v = \varphi(x, y)$, заданные системой двух уравнений

$$F(x, y, u, v) = 0 \quad \text{и} \quad \Phi(x, y, u, v) = 0. \qquad (A)$$

Дифференцируя уравнения (А) по x и по y [по формулам (✳✳) на стр. 310], получаем:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx} = 0,\\ &\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx} = 0, \end{aligned}\right\} (Б_x) \qquad \left.\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{du}{dy} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dy} = 0,\\ &\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial u}\cdot\frac{du}{dy} + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dy} = 0; \end{aligned}\right\} (Б_y)$$

решая систему $(Б_x)$ относительно $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$ и систему $(Б_y)$ относительно $\frac{du}{dy}$, $\frac{dv}{dy}$, получаем частные производные первого порядка; таким же путем находим производные высших порядков.

6) *n функций m переменных, заданные системой n уравнений.* Частные производные первого и любого порядков находятся аналогичным путем *.

Производные функции $y = f(x)$, заданной параметрически: $x = x(t)$, $y = y(t)$ (штрихами обозначены производные по t):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{x'(x'y''' - y'x''') - 3x''(x'y'' - y'x'')}{x'^5}, \ \ldots$$

Производная обратной функции. Если функция $y = f(x)$ является обратной по отношению к $y = \varphi(x)$, то ее производные вычисляются по следующим формулам:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varphi'(y)}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\varphi''(y)}{[\varphi'(y)]^3}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3[\varphi''(y)]^2 - \varphi'(y)\varphi'''(y)}{[\varphi'(y)]^5}, \ \ldots$$

Например, $y = \arcsin x$; прямая функция: $y = \sin x$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Графическое дифференцирование. Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ изображена (в декартовых координатах) графиком (Г) в некотором интервале $a < x < b$, то график ее производной (Г′) может быть приближенно построен следующим способом.

Рис. 288.

Предварительная задача. построение касательной к заданной точке кривой может быть осуществлено «на глаз» очень неточно; если же задано направление касательной (MN, рис. 288), то точка прикосновения A может быть построена точнее. Построим две хорды M_1N_1 и M_2N_2, параллельные MN, чтобы они пересекли кривую в близких точках, затем построим середины R_1 и R_2 этих хорд и проведем через R_1 и R_2 прямую PQ; последняя пересечет кривую в точке A, касательная к которой (приближенно) имеет заданное направление. Для контроля правильности этого построения можно провести третью хорду, параллельную пер-

* См. Фихтенгольц, т. I (стр. 587 справочника)

вым двум и близкую к ним, — она должна пересекаться прямой PQ в середине.

Построение графика производной. 1) Задавая несколько направлений (l_1, l_2, ...) касательных к кривой $y=f(x)$ (рис. 289), чтобы они соответствовали на глаз рассматриваемому промежутку кривой, определяем точки прикосновения A_1, A_2, ... предыдущим построением (самих касательных можно не строить).

2) На отрицательной части оси Ox выбираем произвольную точку P («полюс»); отрезок $PO=a$ должен быть тем больше, чем более отлого идет кривая.

3) Из полюса P проводим прямые PB_1, PB_2, ... параллельно направлениям l_1, l_2, ... до пересечения с осью Oy в точках B_1, B_2, ...

4) Через B_1, B_2, ... проводим горизонтальные прямые B_1C_1, B_2C_2, ... до пересечения в точках C_1, C_2, ... с соответствующими ординатами точек A_1, A_2, ...

5) Точки C_1, C_2, ... соединяем плавной кривой; ее уравнение будет $y=a\cdot f'(x)$; это и будет искомый график производной, если за единицу масштаба по оси Oy взят отрезок a. Для получения графика в обычном масштабе (кривая Γ') строим точки D_1, D_2, ..., ординаты которых равны ординатам точек C_1, C_2, ..., разделенным на a ($a=PO$ на рис. 289).

Рис. 289.

3. *Замена переменных в дифференциальных выражениях*

Функция одной переменной. Если $y=f(x)$ и имеется выражение

$$H=F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^3y}{dx^3},\ \ldots\right),$$

содержащее аргумент, функцию и ее производные, то в случае замены переменных новыми производные вычисляются по следующим формулам:

1) В случае замены аргумента x на аргумент t, связанный с x формулой $x=\varphi(t)$:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\varphi'(t)}\frac{dy}{dt},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{[\varphi'(t)]^3}\left\{\varphi'(t)\frac{d^2y}{dt^2}-\varphi''(t)\frac{dy}{dt}\right\}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1}{|\varphi'(t)|^5}\left\{[\varphi'(t)]^2\frac{d^3y}{dt^3}-3\varphi'(t)\varphi''(t)\frac{d^2y}{dt^2}+[3[\varphi''(t)]^2-\varphi'(t)\varphi'''(t)]\frac{dy}{dt}\right\}*.$$

---

* Если формула преобразования дана в неразрешенном относительно x виде $\Phi(x,\ t)=0$, то производные $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ вычисляются по тем же формулам, только в них производные $\varphi'(t)$, $\varphi''(t)$, $\varphi'''(t)$ вычисляются по правилам дифференцирования неявной функции. При этом окончательное выражение H может содержать переменную x, которую придется исключать при помощи уравнения $\Phi(x,\ t)=0$.

2) В случае замены функции y на функцию u, связанную с y формулой $y = \varphi(u)$:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(u)\frac{du}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \varphi'(u)\frac{d^2u}{dx^2} + \varphi''(u)\left(\frac{du}{dx}\right)^2,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \varphi'(u)\frac{d^3u}{dx^3} + 3\varphi''(u)\frac{du}{dx}\cdot\frac{d^2u}{dx^2} + \varphi'''(u)\left(\frac{du}{dx}\right)^3, \ \ldots$$

3) В случае замены аргумента x и функции y на новые аргумент t и функцию u, связанные с x и y формулами $x = \varphi(t, u)$, $y = \psi(t, u)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial t} + \dfrac{\partial\psi}{\partial u}\dfrac{du}{dt}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{du}{dt}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left[\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial t} + \dfrac{\partial\psi}{\partial u}\dfrac{du}{dt}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{du}{dt}}\right] = \frac{1}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{du}{dt}}\frac{d}{dt}\left[\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial t} + \dfrac{\partial\psi}{\partial u}\dfrac{du}{dt}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{du}{dt}}\right] =$$

$$= \frac{1}{B}\frac{d}{dt}\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{1}{B^3}\left(B\frac{dA}{dt} - A\frac{dB}{dt}\right), \text{ где } A = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{du}{dt}, \ B = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{du}{dt}.$$

$\dfrac{d^3y}{dx^3}$ вычисляется аналогично.

Пример. При преобразовании декартовых координат в полярные по формулам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi}{\rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi)^3}.$$

Функция двух переменных. Если

$$\omega = f(x, y)$$

и имеется выражение

$$H = F\left(x, y, \omega, \frac{\partial\omega}{\partial x}, \frac{\partial\omega}{\partial y}, \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}, \ldots\right),$$

содержащее аргументы, функцию и ее частные производные, то в случае замены переменных x, y на новые u, v, связанные с x, y формулами $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, частные производные первого порядка $\dfrac{\partial\omega}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\omega}{\partial y}$ находятся из системы уравнений:

$$\frac{\partial\omega}{\partial u} = \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial u}, \quad \frac{\partial\omega}{\partial v} = \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial v},$$

откуда получаем:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = A\frac{\partial\omega}{\partial u} + B\frac{\partial\omega}{\partial v}, \quad \frac{\partial\omega}{\partial y} = C\frac{\partial\omega}{\partial u} + D\frac{\partial\omega}{\partial v},$$

где A, B, C, D – функции от u, v. Вторые частные производные вы-

числяются по этим же формулам, но примененным не к функции ω, а к $\frac{\partial\omega}{\partial x}$ и $\frac{\partial\omega}{\partial y}$; например:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial\omega}{\partial u}+B\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)=$$

$$=A\left(A\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}+B\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial u}+\frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)+$$

$$+B\left(A\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}+B\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}+\frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial\omega}{\partial u}+\frac{\partial B}{\partial v}\frac{\partial\omega}{\partial v}\right).$$

Так же получаются и частные производные высших порядков.

Пример: Выразить оператор Лапласа *

$$\Delta\omega=\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}$$

в полярных координатах $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$.

Имеем:

$$\frac{\partial\omega}{\partial\rho}=\frac{\partial\omega}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial\omega}{\partial y}\sin\varphi,\quad \frac{\partial\omega}{\partial\varphi}=-\frac{\partial\omega}{\partial x}\rho\sin\varphi+\frac{\partial\omega}{\partial y}\rho\cos\varphi;$$

отсюда

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=\cos\varphi\frac{\partial\omega}{\partial\rho}-\frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi},\quad \frac{\partial\omega}{\partial y}=\sin\varphi\frac{\partial\omega}{\partial\rho}+\frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi};$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}=\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial\omega}{\partial\rho}-\frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\right)-\frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial\omega}{\partial\rho}-\frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\right).$$

Аналогично вычисляя $\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}$, получаем:

$$\Delta\omega=\frac{\partial^2\omega}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\omega}{\partial\rho}.$$

Для функции большего числа переменных формулы замены получаются подобным же образом.

4. *Основные теоремы дифференциального исчисления*

Условие монотонности функции. Если функция $f(x)$ задана и непрерывна в некоторой связной области и имеет производную во всех внутренних точках этой области **, то необходимым и достаточным условием монотонности функции в области задания является:

$f'(x)\geqslant 0$ для монотонно возрастающей функции,

$f'(x)\leqslant 0$ » » убывающей » ***

---

* См. стр. 544.

** То есть в точках, не являющихся концами интервала.

*** Это условие имеет место для монотонного возрастания или убывания в широком смысле (см. сноску на стр. 275). Для того чтобы функция монотонно возрастала или убывала в строгом смысле, к указанному условию необходимо добавить второе: производная $f'(x)$ не должна обращаться тождественно в нуль ни в каком интервале, составляющем часть рассматриваемой области. Это условие не соблюдается, например, на отрезке BC рис. 290, *б*.

Геометрический смысл. Графиком монотонно возрастающей функции является кривая, которая, если ее рассматривать слева направо, ни в каком месте не опускается (поднимается или идет горизонтально, рис. 290, *а*); касательная в точках этой кривой образует с положительным направлением оси Ox острый угол или параллельна ей. Аналогично — для монотонно убывающей функции (рис. 290, *б*) *.

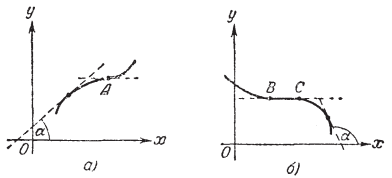


Рис. 290.

Теорема Ферма. Если функция $y=f(x)$, заданная в связной области, имеет в некоторой внутренней ее точке ** $x=c$ наибольшее или наименьшее значение, т. е.

$$f(c) < f(x)$$

или

$$f(c) > f(x),$$

и имеет в точке c конечную производную, то эта производная равна нулю:

$$f'(c) = 0.$$

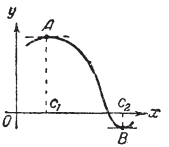


Рис. 291.

Геометрический смысл. В точках A и B графика функции, удовлетворяющей условию теоремы, касательная параллельна оси Ox (рис. 291).

Теорема Ферма дает лишь необходимое условие существования наибольшего и наименьшего значения функции; оно недостаточно: на рис. 290, *а* в точке A $f'(x)=0$, но там ни наибольшего, ни наименьшего значения нет.

Условие конечности производной существенно в теореме Ферма: на рис. 292, *г* в точке E функция имеет наибольшее значение, но производная в нуль не обращается.

Теорема Ролля. Если функция $y=f(x)$ в замкнутом интервале $[a, b]$ непрерывна, имеет непрерывную производную в этом интервале и обращается в нуль на его концах:

$$f(a)=0, \quad f(b)=0 \qquad (a<b),$$

то существует по меньшей мере одно такое число c между a и b, что

$$f'(c)=0 \qquad (a<c<b).$$

Геометрический смысл. Если кривая, являющаяся графиком функции $y=f(x)$, пересекает ось Ox в двух точках A и B, непрерывна и имеет непрерывно вращающуюся касательную на всем протяжении от

---

* В случае монотонности в строгом смысле касательная может быть параллельна оси Ox только для отдельных точек (например в точке A на рис. 290, *а*), но не на целом интервале (BC на рис. 290, *б*).

** То есть в точке, не являющейся концом интервала.

A до B, то существует по меньшей мере одна такая точка C между A и B, в которой касательная параллельна оси Ox (рис. 292, *а*).

Таких точек может быть и несколько (точки C, D, E на рис. 292, *б*). Требование непрерывности функции или ее производной существенно:

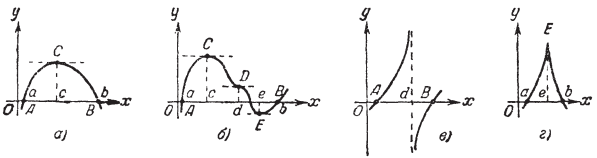


Рис. 292.

на рис. 292, *в* функция имеет разрыв при $x = d$, на рис. 292, *г* производная имеет разрыв в точке E; в обоих этих случаях не существует точки C, в которой $f'(x) = 0$.

Теорема Лагранжа (*теорема о конечном приращении*). Если функция $y = f(x)$ в замкнутом интервале $[a, b]$ непрерывна и имеет непрерывную производную в этом интервале, то существует по меньшей мере одно такое число c между a и b, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \qquad (a < c < b).$$

В иных обозначениях (полагая $b = a + h$ и обозначая через θ некоторое число, заключенное между 0 и 1):

$$f(a + h) = f(a) + h \cdot f'(a + \theta h) \qquad (0 < \theta < 1).$$

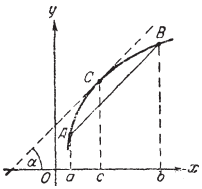


Рис. 293.

Геометрический смысл. Если кривая $y = f(x)$ (рис. 293) непрерывна и имеет непрерывно вращающуюся касательную в промежутке AB, то между A и B существует такая точка C кривой, что касательная в ней параллельна хорде AB.

Таких точек может быть и несколько; требования непрерывности функции и ее производной существенны (легко построить примеры, иллюстрирующие это аналогично рис. 292, *б*, *в*, *г*).

Теорема Тэйлора (обобщение теоремы Лагранжа). Если функция $y = f(x)$ в интервале $[a, a + h]$ * непрерывна и имеет непрерывные производные от первой до n-й включительно, то имеет место равенство (*формула Тэйлора*)

$$f(a + h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta h),$$

где θ — некоторое число, заключенное между 0 и 1 ($0 < \theta < 1$).

---

* Здесь h может быть как положительным, так и отрицательным.

Теорема Коши. Если две функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ заданы в замкнутом интервале $[a, b]$, непрерывны и имеют непрерывные производные в этом интервале, причем $\varphi'(x)$ нигде не обращается в нуль, то существует такое число c между a и b, что имеет место равенство

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \qquad (a < c < b).$$

Геометрический смысл теоремы Коши тот же, что и теоремы Лагранжа; если рассматривать кривую на рис. 293, заданную в параметрической форме $x = \varphi(t)$, $y = f(t)$, где точка A соответствует значению параметра $t = a$, а точка B — значению $t = b$, то для точки C угловой коэффициент касательной к кривой

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

5. *Нахождение максимума и минимума*

Функция одной переменной.

Определение. Максимумом (M) или *минимумом* (m) * функции $y = f(x)$ называются такие ее значения $f(x_0)$, для которых имеют место неравенства

$$f(x_0 + h) < f(x_0) \quad \text{(для случая максимума)}$$

и

$$f(x_0 + h) > f(x_0) \quad \text{(» » минимума)}$$

при любых малых значениях h, положительных и отрицательных. Таким образом, в точках максимума (минимума) значение $f(x_0)$ больше (соответственно меньше) всех соседних значений функции.

Необходимое условие максимума или минимума непрерывной функции. Для непрерывной функции максимум или минимум может иметь место только в тех точках, где производная или равна нулю или не существует вовсе (в частности, обращается в бесконечность).

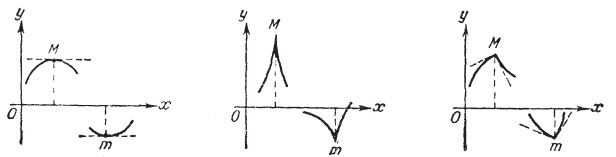


Рис. 294.

Геометрический смысл. В точках графика функции, соответствующих максимуму или минимуму, касательная параллельна оси Ox (рис. 294, *а*) или параллельна оси Oy (рис. 294, *б*), или не существует (рис. 294, *в*).

Это условие недостаточно: на рис. 295 в точках A, B, C необходимые условия осуществлены, но в них ни максимума, ни минимума нет.

* В математическом анализе понятия максимума и минимума объединяются одним словом «*экстремум*» (крайний).

У непрерывной функции максимумы и минимумы чередуются: между двумя соседними максимумами имеется один минимум, а между двумя соседними минимумами — один максимум.

Нахождение максимума и минимума непрерывной функции, заданной в явной форме $y=f(x)$ и имеющей непрерывную производную. Сначала находят точки, удовлетворяющие необходимому условию $f'(x)=0$ (*стационарные точки*): вычисляют производную $f'(x)$ и находят все действительные корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$ уравнения $f'(x)=0$.

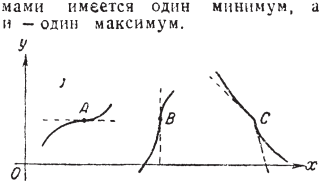


Рис. 295.

Затем каждый из найденных корней, например x_1, исследуют одним из следующих способов.

1) *Способ сравнения знаков производной.* Определяют знак $f'(x)$ для $\tilde{x}$ немного меньших и $\tilde{\tilde{x}}$ немного больших, чем x_1 [точнее — отстоящих от x_1 по разные стороны на таких небольших расстояниях, что между $\tilde{x}$ и x_1 и между x_1 и $\tilde{\tilde{x}}$ нет больше корней уравнения $f'(x)=0$]. Если знак $f'(x)$ при этом переходит от «+» к «—» (рис. 296, *а*)

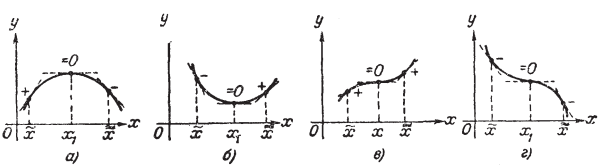


Рис. 296.

то при $x=x_1$ имеем для $f(x)$ максимум; если от «—» к «+» (рис. 296, *б*), то минимум; если же знак производной не меняется (рис. 296, *в* и *г*), то при $x=x_1$ нет ни M, ни m, а на графике имеется точка перегиба с касательной, параллельной оси Ox.

2) *Способ высших производных* (может быть применен в тех случаях, когда при $x=x_1$ существуют производные высших порядков). Подставляют каждый корень x_1 во вторую производную $f''(x)$. Если $f''(x_1)<0$, то при $x=x_1$ имеем M; если $f''(x_1)>0$, то имеем m; если же $f''(x_1)=0$, то подставляют x_1 в третью производную $f'''(x)$. Если в этом случае $f'''(x_1)\neq 0$, то при $x=x_1$ нет ни M, ни m функции (точка перегиба); если же $f'''(x_1)=0$, то подставляют x_1 в 4-ю производную и т. д.

Общее правило: если порядок первой не обращающейся в нуль производной при $x=x_1$ четный, то $f(x)$ имеет при $x=x_1$ M или m, в зависимости от того, будет ли эта производная соответственно отрицательна или положительна. Если же этот порядок нечетный, то функция не имеет при $x=x_1$ ни M, ни m.

Способ сравнения знаков производной можно применять и для тех значений функции, где производная не существует (см. рис. 294, *б* и *в* и рис. 295).

Для отыскания *наибольшего* и *наименьшего* значений функции в данном интервале $a\leq x\leq b$ отыскивают все ее M и m внутри этого интервала, а также исследуют функцию на концах интервала, в точках разрыва функции и в точках разрыва ее производной. Искомые

значения могут находиться в одной из рассмотренных точек; эти все значения нужно вычислить и установить, какое из них самое большее и какое самое меньшее.

Примеры отыскания наибольшего значения:

а) $y = e^{-x^2}$ в интервале $[-1, +1]$. Наибольшее значение — в точке $x = 0$ (максимум, рис. 297, *а*).

б) $y = x^3 - x^2$ в интервале $[-1, +2]$. Наибольшее значение — в точке $x = +2$ (правый конец интервала, рис. 297, *б*).

Рис. 297.

в) $y = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$ в интервале $[-3, 3]$. Наибольшее значение — в точке $x = 0$ (разрыв функции, рис. 297, *в*) (если положить $y = 1$ при $x = 0$).

г) $y = 2 - x^{2/3}$ в интервале $[-1, +1]$. Наибольшее значение — в точке $x = 0$ (максимум, бесконечная производная, рис. 297, *г*).

Нахождение максимума и минимума функции, заданной в неявной форме. Для нахождения M и m функции $y = f(x)$, заданной неявно уравнением $F(x, y) = 0$ (если F, F'_x и F'_y непрерывны), поступают следующим образом. Решают систему уравнений $F(x, y) = 0$, $F_x(x, y) = 0$ и полученные решения (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... подставляют в F'_y и F''_{xx}. Если в точке (x_i, y_i) F_y и F''_{xx} имеют р а з н ы е знаки, то при данном x_i функция y_i имеет m; если F'_y и F''_{xx} будут одного знака, то функция при данном x_i имеет M. Если же одно из выражений F'_y или F''_{xx} равно нулю в рассматриваемой точке, то дальнейшие аналитические методы становятся более сложными.

Ф у н к ц и я н е с к о л ь к и х п е р е м е н н ы х.

Определение. Функция $u = f(x, y, \ldots, t)$ имеет при системе значений $x_0, y_0, \ldots, t_0$ («в точке P_0») максимум (минимум), если можно указать такое число ε, что область $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$, $y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon$, ..., $t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon$ входит в область задания функции и для каждой системы значений в этой области, кроме самой системы $x_0, y_0, \ldots, t_0$, удовлетворяются условия:

$$f(x, y, \ldots, t) < f(x_0, y_0, \ldots, t_0) \quad \text{(для случая максимума)}$$

и

$$f(x, y, \ldots, t) > f(x_0, y_0, \ldots, t_0) \quad (\text{» » минимума}).$$

Используя понятие многомерного пространства *, можно сказать, что в точках максимума (минимума) значение функции u больше (соответственно меньше), чем для всех соседних точек.

Геометрический смысл максимума (минимума) функции двух переменных, изображенной поверхностью в декартовых координатах (см. стр. 286): в точке A максимума (минимума) аппликата поверхности больше (соответственно меньше), чем аппликата любой точки, находящейся в достаточно малой окрестности точки A (т. е. области малых размеров, для которой точка A является внутренней), см. рис. 298: *а*) максимум, *б*) минимум.

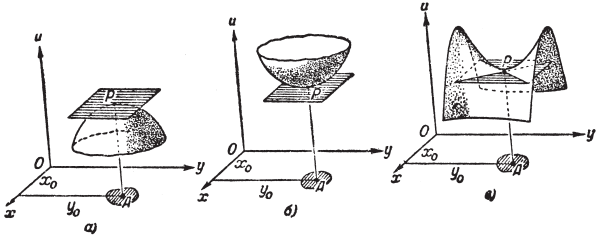


Рис. 298.

Если поверхность имеет в точке P максимума или минимума касательную плоскость, то эта плоскость параллельна плоскости xOy (рис. 298, *а* и *б*). Это условие необходимо, но недостаточно для того, чтобы в точке P был M или m: на рис. 298, *в* поверхность имеет в точке P горизонтальную касательную плоскость, но функция не имеет в ней ни M, ни m (P — седлообразная точка).

Нахождение максимума и минимума функции двух переменных $u = f(x, y)$. Решается система уравнений

$$f'_x = 0, \quad f'_y = 0;$$

полученные системы решений (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... подставляются в $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$ и $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Составляется выражение

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = [f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2]_{x = x_1,\ y = y_1}.$$

Если $\Delta > 0$, то функция $f(x, y)$ при системе значений (x_1, y_1) имеет M при $f''_{xx} < 0$ и m при $f''_{xx} > 0$. Если $\Delta < 0$, то $f(x, y)$ не имеет ни M, ни m. Если же $\Delta = 0$, то методы становятся более сложными **.

Нахождение максимума и минимума функции n переменных $u = F(x, y, \ldots, t)$. *Необходимые*, но не достаточные условия того, чтобы при системе значений $(x, y, \ldots, t)$ дифференцируемая функция u имела M или m: эта система должна удовлетворять n уравнениям

$$F'_x = 0, \quad F'_y = 0, \quad \ldots, \quad F'_t = 0. \qquad (A)$$

Достаточные условия в общем случае сложны; практически для установления того, будет ли система решений $x_1, y_1, \ldots, t_1$ уравнений (A)

* См. стр. 286.

** См. об этом В. Немыцкий, М. Слудская, А. Черкасов, Курс математического анализа, т. II, стр. 252.

давать M, m (и что именно) или нет, следует исследовать функцию при значениях, близких к $x_1, y_1, \ldots, t_1$.

Условный максимум и минимум (метод Лагранжа). Если требуется найти M или m функции нескольких (n) переменных $u = F(x, y, \ldots, t)$, которые не независимы между собой, а связаны добавочными условиями (число условий равно $k < n$):

$$\varphi(x, y, \ldots, t) = 0,\ \psi(x, y, \ldots, t) = 0, \ldots, \chi(x, y, \ldots, t) = 0,$$

то вводят k неопределенных множителей $\lambda, \mu, \ldots, \varkappa$ и рассматривают следующую функцию $n + k$ переменных $x, y, \ldots, t, \lambda, \mu, \ldots, \varkappa$:

$$\Phi(x, y, \ldots, t, \lambda, \mu, \ldots, \varkappa) =$$

$$= F(x, y, \ldots, t) + \lambda \cdot \varphi(x, y, \ldots, t) + \mu \cdot \psi(x, y, \ldots, t) + \ldots + \varkappa \cdot \chi(x, y, \ldots, t);$$

необходимые условия максимума или минимума функции Φ дают систему $n + k$ уравнений (A) с неизвестными $x, y, \ldots, t, \lambda, \mu, \ldots, \varkappa$. Эти уравнения имеют вид:

$$\varphi = 0,\ \psi = 0, \ldots, \varkappa = 0,\ \Phi'_x = 0,\ \Phi'_y = 0, \ldots, \Phi'_t = 0.$$

Система решений $(x_1, y_1, \ldots, t_1)$, удовлетворяющих этим уравнениям, может давать M или m для функции F; это — только необходимое условие.

Например, для функции $u = f(x, y)$, если $\varphi(x, y) = 0$, точка максимума (минимума) определится из трех уравнений:

$$\varphi(x, y) = 0,\ \frac{\partial}{\partial x}[f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y)] = 0,\ \frac{\partial}{\partial y}[f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y)] = 0,$$

с тремя неизвестными x, y, λ.

6. *Разложение функций в степенные ряды*

Ряд Тэйлора для функции одной переменной. Функцию $y = f(x)$, непрерывную и имеющую все производные при $x = a$, можно во многих случаях представить в виде суммы степенного ряда (см. стр. 300), получающегося из формулы Тэйлора (стр. 317):

$$f(x) = f(a) + \frac{x - a}{1!} f'(a) +$$

$$+ \frac{(x - a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x - a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \ldots \quad \textit{(ряд Тэйлора)}. \quad \text{(T)}$$

Формула (T) верна при тех значениях x, при которых *остаточный член* * $f(x) - S_n = R_n$ стремится к нулю при $n \to \infty$.

Выражения остаточного члена:

$$R_n = \frac{(x - a)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad (\xi \text{ находится между } a \text{ и } x),$$

$$R_n = \frac{1}{n!} \int_a^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

* Здесь понятие остаточного члена не всегда совпадает с тем, которое введено в параграфе о функциональных рядах (стр. 298). Оба понятия совпадают только в тех случаях, когда формула (T) верна.

Другая форма ряда Тэйлора:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \ldots;$$

для этой формы выражения остаточного члена:

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h) \quad (0 < \theta < 1),$$

$$R_n = \frac{1}{n!} \int_0^h (h-t)^n f^{(n+1)}(a+t)\, dt.$$

Ряд Маклорена — разложение функции $f(x)$ по степеням x — частный случай ряда (Т) при $a = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \ldots. \qquad (\text{М})$$

его остаточный член:

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \quad (0 < \theta < 1),$$

$$R_n = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

Сходимость рядов Тэйлора и Маклорена определяется или исследованием остаточного члена R_n, или установлением радиуса сходимости (стр. 300); в этом последнем случае может иногда оказаться, что ряд сходится, но его сумма $S(x)$ не равна $f(x)$.

Ряд Тэйлора для функции двух переменных:

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \left\{ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} h + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} k \right\} +$$
$$+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} k^2 \right\} +$$
$$+ \frac{1}{6} \left\{ \ldots \right\} + \ldots + \frac{1}{n!} \left\{ \ldots \right\} + R_n$$

или, в символической форме:

$$f(x+h, y+k) =$$
$$= f(x, y) + \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right) f(x, y) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^2 f(x, y) +$$
$$+ \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^3 f(x, y) + \ldots + \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^n f(x, y) + R,$$

где

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^{n+1} f(x+\theta_1 h, y+\theta_2 k)$$
$$(0 < \theta_1 < 1, \quad 0 < \theta_2 < 1).$$

Для функции m переменных — аналогичная символическая формула:

$$f(x+h,\ y+k,\ \ldots,\ t+l) =$$

$$= f(x, y, \ldots, t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k + \ldots + \frac{\partial}{\partial t}l\right)^i f(x, y, \ldots, t) + R_n,$$

где

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k + \ldots + \frac{\partial}{\partial t}l\right)^{n+1} f(x+\theta_1 h, y+\theta_2 k, \ldots, t+\theta_m l)$$

$$(0 < \theta_i < 1).$$

Таблица разложений некоторых функций в степенные ряды

Функция	Разложение в ряд	Область сходимости
	Алгебраические функции	
$(a \pm x)^m$	Биномиальный ряд преобразованием к виду $a^m\left(1 \pm \frac{x}{a}\right)^m$ сводится к нижеследующим рядам:	$\lvert x\rvert \leqslant a$ при $m > 0$, $\lvert x\rvert < a$ при $m < 0$.
	Биномиальные ряды с положительным показателем	
$(1 \pm x)^m$ $(m > 0)$ *	$1 \pm mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 \pm \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots$ $\ldots + (\pm 1)^n \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots$	$\lvert x\rvert \leqslant 1$
$(1 \pm x)^{1/4}$	$1 \pm \frac{1}{4}x - \frac{1\cdot 3}{4\cdot 8}x^2 \pm \frac{1\cdot 3\cdot 7}{4\cdot 8\cdot 12}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 7\cdot 11}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^4 \pm \ldots$	$\lvert x\rvert \leqslant 1$
$(1 \pm x)^{1/3}$	$1 \pm \frac{1}{3}x - \frac{1\cdot 2}{3\cdot 6}x^2 \pm \frac{1\cdot 2\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}x^3 - \frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}x^4 \pm \ldots$	$\lvert x\rvert \leqslant 1$
$(1 \pm x)^{1/2}$	$1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}x^2 \pm \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \pm \ldots$	$\lvert x\rvert \leqslant 1$
$(1 \pm x)^{3/2}$	$1 \pm \frac{3}{2}x + \frac{3\cdot 1}{2\cdot 4}x^2 \mp \frac{3\cdot 1\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{3\cdot 1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \mp \ldots$	$\lvert x\rvert \leqslant 1$
$(1 \pm x)^{5/2}$	$1 \pm \frac{5}{2}x + \frac{5\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 \pm \frac{5\cdot 3\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{5\cdot 3\cdot 1\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \mp \ldots$	$\lvert x\rvert \leqslant 1$

* При m целом положительном ряд — конечный, содержит $m+1$ член. Коэффициенты $\frac{m(m+1)\ldots(m-n+1)}{n!} = C_m^n$; таблицу биномиальных коэффициентов C_m^n см. на стр. 164.

Функция	Разложение в ряд	Область сходимости
	Биномиальные ряды с отрицательным показателем:	
$(1 \pm x)^{-m}$ $(m > 0)$	$1 \mp mx + \frac{m(m+1)}{2!} x^2 \mp \frac{m(m+1)(m+2)}{3!} x^3 + \ldots$	
	$\ldots + (\pm 1)^n \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{n!} x^n \pm \ldots$	$\lvert x \rvert < 1$
$(1 \pm x)^{-1/4}$	$1 \mp \frac{1}{4} x + \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 8} x^2 \mp \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{4 \cdot 8 \cdot 12} x^3 +$	
	$+ \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16} x^4 \mp \ldots$	$\lvert x \rvert < 1$
$(1 \pm x)^{-1/3}$	$1 \mp \frac{1}{3} x + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 6} x^2 \mp \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9} x^3 +$	
	$+ \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12} x^4 \mp \ldots$	$\lvert x \rvert < 1$
$(1 \pm x)^{-1/2}$	$1 \mp \frac{1}{2} x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^2 \mp \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^4 \mp \ldots$	$\lvert x \rvert < 1$
$(1 \pm x)^{-1}$	$1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp \ldots$	$\lvert x \rvert < 1$
$(1 \pm x)^{-3/2}$	$1 \mp \frac{3}{2} x + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} x^2 \mp \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 +$	
	$+ \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^4 \mp \ldots$	$\lvert x \rvert < 1$
$(1 \pm x)^{-2}$	$1 \mp 2x + 3x^2 \mp 4x^3 + 5x^4 \mp \ldots$	$\lvert x \rvert < 1$
$(1 \pm x)^{-5/2}$	$1 \mp \frac{5}{2} x + \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 4} x^2 \mp \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 +$	
	$+ \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^4 \mp \ldots$	$\lvert x \rvert < 1$
$(1 \pm x)^{-3}$	$1 \mp \frac{1}{1 \cdot 2} (2 \cdot 3x \mp 3 \cdot 4x^2 + 4 \cdot 5x^3 \mp 5 \cdot 6x^4 + \ldots)$	$\lvert x \rvert < 1$
$(1 \pm x)^{-4}$	$1 \mp \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} (2 \cdot 3 \cdot 4x \mp 3 \cdot 4 \cdot 5x^2 +$	
	$+ 4 \cdot 5 \cdot 6x^3 \mp 5 \cdot 6 \cdot 7x^4 + \ldots)$	$\lvert x \rvert < 1$
$(1 \pm x)^{-5}$	$1 \mp \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5x \mp 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6x^2 +$	
	$+ 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7x^2 \mp 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8x^4 + \ldots)$	$\lvert x \rvert < 1$

Функция	Разложение в ряд	Область сходимости
	Тригонометрические функции	
$\sin x$	$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\pm\ldots$	$\lvert x\rvert<\infty$
$\sin(x+a)$	$\sin a+x\cos a-\frac{x^2\sin a}{2!}-\frac{x^3\cos a}{3!}+$ $+\frac{x^4\sin a}{4!}+\ldots+\frac{x^n\sin\left(a+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}\pm\ldots$	$\lvert x\rvert<\infty$
$\cos x$	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\pm\ldots$	$\lvert x\rvert<\infty$
$\cos(x+a)$	$\cos a-x\sin a-\frac{x^2\cos a}{2!}+\frac{x^3\sin a}{3!}+$ $+\frac{x^4\cos a}{4!}-\ldots+\frac{x^n\cos\left(a+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}\pm\ldots$	$\lvert x\rvert<\infty$
$\operatorname{tg} x$	$x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9+\ldots$ $\ldots+\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{(2n)!}x^{2n-1}+\ldots$ *	$\lvert x\rvert<\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{ctg} x$	$\frac{1}{x}-\left[\frac{x}{3}+\frac{x^3}{45}+\frac{2x^5}{945}+\frac{x^7}{4725}+\ldots\right.$ $\left.\ldots+\frac{2^{2n}B_n}{(2n)!}x^{2n-1}+\ldots\right]$ *	$0<\lvert x\rvert<\pi$
$\sec x$	$1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+\frac{277}{8064}x^8+\ldots$ $\ldots+\frac{E_n}{(2n)!}x^{2n}+\ldots$ **	$\lvert x\rvert<\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{csc} x$	$\frac{1}{x}+\frac{1}{6}x+\frac{7}{360}x^3+\frac{31}{15120}x^5+$ $+\frac{127}{604800}x^7+\ldots+\frac{2(2^{2n-1}-1)}{(2n)!}B_nx^{2n-1}$ *	$0<\lvert x\rvert<\pi$

* B_n — числа Бернулли (см. стр. 297).
** E_n — числа Эйлера (см. стр. 297).

Функция	Разложение в ряд	Область сходимости
	Показательные функции	
e^x	$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$	$\lvert x\rvert<\infty$
$a^x=e^{x\ln a}$	$1+\frac{x\ln a}{1!}+\frac{(x\ln a)^2}{2!}+$ $+\frac{(x\ln a)^3}{3!}+\ldots+\frac{(x\ln a)^n}{n!}+\ldots$	$\lvert x\rvert<\infty$
$\frac{x}{e^x-1}$	$1-\frac{x}{2}+\frac{B_1x^2}{2!}-\frac{B_2x^4}{4!}+\frac{B_3x^6}{6!}-\ldots$ $\ldots+(-1)^{n+1}\frac{B_nx^{2n}}{(2n)!}\pm\ldots$*	$\lvert x\rvert<2\pi$
	Логарифмические функции	
$\ln x$	$2\left[\frac{x-1}{x+1}+\frac{(x-1)^3}{3(x+1)^3}+\frac{(x-1)^5}{5(x+1)^5}+\ldots\right.$ $\left.\ldots+\frac{(x-1)^{2n+1}}{(2n+1)(x+1)^{2n+1}}+\ldots\right]$	$x>0$
$\ln x$	$(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\ldots$ $\ldots+(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}\pm\ldots$	$0<x\leqslant 2$
$\ln x$	$\frac{x-1}{x}+\frac{(x-1)^2}{2x^2}+\frac{(x-1)^3}{3x^3}+\ldots+\frac{(x-1)^n}{nx^n}+\ldots$	$x>\frac{1}{2}$
$\ln(1+x)$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\pm\ldots$	$-1<x\leqslant 1$
$\ln(1-x)$	$-\left[x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots\right]$	$-1\leqslant x<1$
$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=$ $=2\operatorname{Arth}x$	$2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\right]$	$\lvert x\rvert<1$
$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=$ $=2\operatorname{Arcth}x$	$2\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{7x^7}+\ldots\right.$ $\left.\ldots+\frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}}+\ldots\right]$	$\lvert x\rvert>1$

* B_n — числа Бернулли (см. стр. 297).

Функция	Разложение в ряд	Область сходимости
$\ln \lvert \sin x \rvert$	$\ln \lvert x \rvert - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} - \ldots$	
	$\ldots - \frac{2^{2n-1} B_n x^{2n}}{n\,(2n)!} - \ldots$ *	$0 < \lvert x \rvert < \pi$
$\ln \cos x$	$-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \frac{17x^8}{2520} - \ldots$	
	$\ldots - \frac{2^{2n}\,(2^{2n}-1)\,B_n x^{2n}}{n\,(2n)!} - \ldots$ *	$\lvert x \rvert < \frac{\pi}{2}$
$\ln \lvert \operatorname{tg} x \rvert$	$\ln \lvert x \rvert + \frac{1}{3} x^2 + \frac{7}{90} x^4 + \frac{62}{2835} x^6 + \ldots$	
	$\ldots + \frac{2^{2n}\,(2^{2n-1}-1)\,B_n}{n\,(2n)!} x^{2n} + \ldots$ *	$0 < \lvert x \rvert < \frac{\pi}{2}$
	Обратные тригонометрические функции	
$\arcsin x$	$x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3 x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5 x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \ldots$	
	$\ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)\,x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots (2n)\,(2n+1)} + \ldots$	$\lvert x \rvert < 1$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2} - \left[x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3 x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5 x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \ldots \right.$	
	$\left. \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)\,x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots (2n)\,(2n+1)} + \ldots \right]$	$\lvert x \rvert < 1$
$\operatorname{arctg} x$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \pm \ldots$	$\lvert x \rvert < 1$
	$= \pm \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \ldots$	
	$\ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)\,x^{2n+1}} \pm \ldots$ **	$\lvert x \rvert > 1$
$\operatorname{arcctg} x$	$\frac{\pi}{2} - \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \right.$	
	$\left. \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \pm \ldots \right]$	$\lvert x \rvert < 1$

* B_n — числа Бернулли (см. стр. 297).

** Первый член $\frac{\pi}{2}$ берется со знаком «+» при $x > 1$ и со знаком «−» при $x < -1$.

Функция	Разложение в ряд	Область сходимости
	Гиперболические функции	
$\operatorname{sh} x$	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$	$\lvert x\rvert < \infty$
$\operatorname{ch} x$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$	$\lvert x\rvert < \infty$
$\operatorname{th} x$	$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 - \ldots$ $\ldots + \frac{(-1)^{n+1}2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!}B_n x^{2n-1} \pm \ldots$ *	$\lvert x\rvert < \frac{\pi}{2}$
$\operatorname{cth} x$	$\frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} + \ldots$ $\ldots + \frac{(-1)^{n+1}2^{2n}}{(2n)!}B_n x^{2n-1} \pm \ldots$ *	$0 < \lvert x\rvert < \pi$
$\operatorname{sch} x$	$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{5}{4!}x^4 - \frac{61}{6!}x^6 + \frac{1385}{8!}x^8 - \ldots$ $\ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}E_n x^{2n} \pm \ldots$ **	$\lvert x\rvert < \frac{\pi}{2}$
$\operatorname{csch} x$	$\frac{1}{x} - \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} - \frac{31x^5}{15120} + \ldots$ $\ldots + \frac{2(-1)^n(2^{2n-1}-1)}{(2n)!}B_n x^{2n-1} + \ldots$ *	$0 < \lvert x\rvert < \pi$
	Обратные гиперболические функции	
$\operatorname{Arsh} x$	$x - \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 + \ldots$ $\ldots + (-1)^n \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n\,(2n+1)}x^{2n+1} \pm \ldots$	$\lvert x\rvert < 1$
$\operatorname{Arch} x$ ***	$\pm\left[\ln(2x) - \frac{1}{2\cdot 2x^2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4x^4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6x^6} - \ldots\right]$	$\lvert x\rvert > 1$
$\operatorname{Arth} x$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$	$\lvert x\rvert < 1$
$\operatorname{Arcth} x$	$\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \ldots$ $\ldots + \frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}} + \ldots$	$\lvert x\rvert > 1$

* B_n – числа Бернулли (см. стр. 297).

** E_n – числа Эйлера (см. стр. 297).

*** Функция двузначная.

III. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

А. Неопределенные интегралы

1. Основные понятия и теоремы

Первообразная функция. *Первообразной функцией* (или просто *первообразной*) для данной функции одной переменной $y = f(x)$, определенной в некоторой связной области, называется такая функция $F(x)$, определенная в той же области *, производная от которой равна $f(x)$ [или, что то же самое, дифференциал от которой равен $f(x)\,dx$]:

$$F'(x) = f(x) \text{ или } dF(x) = f(x)\,dx.$$

Первообразных функций для данной — бесконечное множество; разность между двумя первообразными функциями $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — величина постоянная. Графики всех функций $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$, ..., первообразных для данной, представляют собой одну и ту же кривую и получаются один из другого в результате параллельного сдвига кривой в направлении оси ординат в ту или иную сторону (рис. 299).

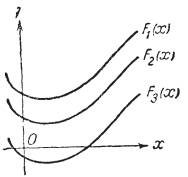


Рис. 299.

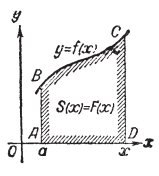


Рис. 300

Геометрический смысл первообразной. Если данная функция $f(x)$ изображена кривой в декартовых координатах (рис. 300), то первообразная численно равна площади $S(x)$, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и двумя ординатами: постоянной AB (при $x = a$) и переменной CD (при абсциссе x). Произвольно выбирая постоянную a, получаем различные первообразные.

---

* В некоторых случаях область определения первообразной функции шире области задания исходной. Если область задания функции $f(x)$ — связная, за исключением некоторых отдельных точек разрыва $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то область определения первообразной $F(x)$ может включать и эти точки разрыва (см. стр. 331).

При этом площадь $S(x)$ понимается в алгебраическом смысле *.

Теорема существования первообразной. Для каждой функции, непрерывной в некоторой связной области, существует первообразная, также непрерывная в этой области. Функция, имеющая разрывы при некоторых отдельных значениях x, имеет первообразную, являющуюся или непрерывной функцией, или имеющей разрыв при тех же значениях x **.

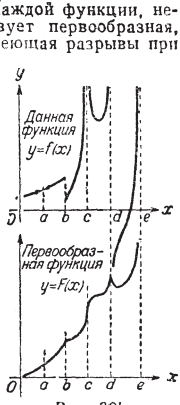


Рис. 301.

Примеры:

1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $F(x)=3\sqrt[3]{x}$;

2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $F(x)=-\dfrac{1}{x}$;

в обоих примерах функция $f(x)$ имеет разрыв при $x=0$, но функция $F(x)=3\sqrt[3]{x}$ непрерывная, а $F(x)=-\dfrac{1}{x}$ имеет также разрыв при $x=0$.

Поведение графика первообразной функции $F(x)$ в различных точках разрыва данной функции $f(x)$ см. на рис. 301. В случае устранимого (a) или конечного (b) разрыва $f(x)$ первообразная непрерывна; в случае же бесконечного разрыва $f(x)$ первообразная может быть непрерывной [кривая $F(x)$ имеет точку перегиба (c) или точку возврата (d) с вертикальной касательной] или иметь также разрыв (e). Аналитический признак того, какой случай имеет место, см. стр. 401 — 404.

Неопределенный интеграл. Общее выражение $F(x)+C$ для всех первообразных функций от данной функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ или от дифференциала $f(x)\,dx$. Обозначение:

$$F(x)+C=\int f(x)\,dx.$$

($\int$ — *знак интеграла*, $f(x)$ — *подинтегральная функция*, $f(x)\,dx$ — *подинтегральное выражение*).

В качестве первообразной $F(x)$ может быть всегда взят определенный интеграл (см. стр. 386) с постоянным (произвольным) нижним пределом и переменным верхним пределом.

Интегралы от элементарных функций не всегда являются элементарными функциями. На стр. 332 — 346 изложены приемы нахождения интегралов (приемы *интегрирования*) от тех простейших функций, которые имеют элементарные первообразные; результаты интегрирования сведены в таблицы на стр. 346 — 383 ***.

---

* Площадь фигуры $ABCD=\int\limits_a^x f(x)\,dx$, см. стр. 385.

** См. сноску на предыдущей странице.

*** В дальнейшем везде слово «первообразная» заменено словом «интеграл», но в таблицах интегралов произвольная постоянная C для краткости везде опущена.

Если интеграл — не элементарная функция, то в случае необходимости (теоретического интереса или частой применимости на практике) для этой функции составляются таблицы ее значений; таким специальным функциям (при фиксировании произвольного постоянного с установлением нижнего предела) часто даются специальные названия; например:

$$\int_0^x \frac{dx}{\ln x} = \mathrm{li}\,(x) \text{ («интегральный логарифм»),}$$

$$\int_0^{\sin\varphi} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = F(k, \varphi) \text{ («эллиптический интеграл I рода»)*.}$$

Если функция не интегрируется элементарно или ее интегрирование слишком сложно, то часто подинтегральная функция разлагается в ряд (см. стр. 322), который (в случае его равномерной сходимости, см. стр. 298) можно почленно интегрировать. Для приближенного интегрирования можно заменить функцию многочленом (см. стр. 574) **.

2. Общие правила интегрирования

Основные интегралы. Формулы интегрирования, получающиеся обращением основных формул дифференцирования (стр. 307), сведены в таблицу на стр. 333. К этим интегралам стараются привести заданный интеграл при помощи алгебраических или тригонометрических преобразований или применения правил интегрирования.

Основные правила интегрирования — свойства неопределенных интегралов, позволяющие преобразовывать интеграл от данной функции к интегралам от других функций:

1) *Постоянный множитель* можно выносить за знак интеграла:

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx.$$

2) *Интеграл суммы (разности)* равен сумме (соответственно разности) интегралов от отдельных членов:

$$\int (u+v-w)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx - \int w\,dx \text{ ***.}$$

3) Правило *подстановки*: если $x=\varphi(t)$, то

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,dt.$$

4) «*Интегрирование по частям*»

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \text{ ****.}$$

---

* Об эллиптических интегралах см. стр. 342.

** О графическом интегрировании — построении графика первообразной функции по графику заданной — см. стр. 392.

*** u, v, w — функции от x.

**** u, v — функции от x.

Таблица основных интегралов

(постоянные интегрирования здесь и в дальнейших таблицах опущены)

Степенные функции

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x|$$

Тригонометрические функции

$$\int \sin x\, dx = -\cos x$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x$$

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln \cos x \,*$$

$$\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln \sin x \,*$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$$

Дробные рациональные функции

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arth} \frac{x}{a} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} \,*$$

(для $|x| < a$)

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} \,*$$

(для $|x| > a$)

Показательные функции

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$$

Гиперболические функции

$$\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x$$

$$\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x$$

$$\int \operatorname{th} x\, dx = \ln \operatorname{ch} x \,*$$

$$\int \operatorname{cth} x\, dx = \ln \operatorname{sh} x \,*$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x$$

Иррациональные функции

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} =$$

$$= \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) \,*$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \operatorname{Arch} \frac{x}{a} =$$

$$= \ln \left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) \,*$$

---

* Во всех формулах, где в состав первообразной функции входит выражение, содержащее $\ln f(x)$, следует его понимать как $\ln |f(x)|$; знак абсолютной величины всюду для простоты опущен.

Общие указания к нахождению интегралов. Нельзя дать общего правила для нахождения интеграла от любой элементарной функции; техника интегрирования приобретается опытом. В следующих параграфах систематически рассмотрены приемы интегрирования простейших классов элементарных функций; на стр. 346—383 приведены таблицы интегралов, в которых следует искать заданный интеграл или близкий к заданному.

Из общих приемов, наиболее часто применяющихся при нахождении интеграла, можно указать на следующие:

1) Алгебраическими или тригонометрическими преобразованиями представляют подинтегральную функцию как сумму нескольких функций и разбивают интеграл на сумму интегралов.

Примеры: $\int (x+3)^2 (x^2+1)\,dx = \int (x^4+6x^3+10x^2+6x+9)\,dx =$

$$= \frac{x^5}{5} + \frac{3}{2}x^4 + \frac{10}{3}x^3 + 3x^2 + 9x + C.$$

$$\int \sin 2x \cos x\,dx = \int \frac{1}{2}(\sin 3x + \sin x)\,dx = -\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos x + C.$$

2) Если известен (например, из таблиц) $\int f(x)\,dx = F(x)$, то

$$\int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}F(ax) + C, \quad \int f(x+b)\,dx = F(x+b) + C,$$

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C,$$

Примеры: $\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C,$

$$\int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C, \quad \int \frac{dx}{1+(x+a)^2} = \operatorname{arctg}(x+a) + C.$$

3) Если подинтегральное выражение — дробь, числитель которой есть дифференциал знаменателя, то интеграл равен логарифму знаменателя:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln f(x) + C^*,$$

Пример: $\int \frac{2x+3}{x^2+3x-5}\,dx = \ln(x^2+3x-5) + C.$

3. *Интегрирование рациональных функций*

Рациональные функции **всегда** интегрируются в элементарных функциях.

Общие правила. *Целая рациональная функция* (*многочлен*) интегрируется непосредственно:

$$\int (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n)\,dx =$$

$$= \frac{a_0}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_1}{n}x^n + \ldots + \frac{a_{n-1}}{2}x^2 + a_nx + C.$$

---

* См. сноску на предыдущей странице.

Дробная рациональная функция $\int \frac{Q(x)}{P(x)}\,dx$ [где $Q(x)$ и $P(x)$ — два многочлена степеней, соответственно m и n] алгебраически преобразуется к виду, удобному для интегрирования, следующим образом:

1) производится сокращение, чтобы многочлены $Q(x)$ и $P(x)$ не имели общих множителей;

2) если $m \geq n$, то делением $Q(x)$ на $P(x)$ выделяется целая часть дроби (см. стр. 129), которая интегрируется как многочлен, и остается проинтегрировать остаток — правильную дробь, у которой уже $m < n$;

3) знаменатель $P(x)$ разлагается на линейные и квадратичные множители (см. стр. 141):

$$P(x) = a_0 (x-\alpha)^k (x-\beta)^l \ldots (x^2+px+q)^r (x^2+p'x+q')^s \ldots,$$

где

$$\frac{p^2}{4} - q < 0, \quad \frac{p'^2}{4} - q' < 0, \ \ldots;$$

4) коэффициент a_0 в знаменателе выносится за знак интеграла;

5) полученная правильная несократимая дробь, знаменатель которой разложен на простейшие множители, преобразовывается в сумму «элементарных» дробей (см. стр. 130), которые легко интегрируются. При этом могут быть четыре случая:

1. Все корни знаменателя *действительные и простые*:

$$P(x) = (x-\alpha)(x-\beta)\ldots(x-\lambda).$$

Разложение имеет вид: $\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \ldots + \frac{L}{x-\lambda}$, где

$$A = \frac{Q(\alpha)}{P'(\alpha)}, \quad B = \frac{Q(\beta)}{P'(\beta)}, \quad \ldots, \quad L = \frac{Q(\lambda)}{P'(\lambda)}\ *.$$

Интегрирование производится по формуле.

$$\int \frac{A\,dx}{x-\alpha} = A \ln(x-\alpha) \text{ и т. д.}$$

Пример: $I = \int \frac{(2x+3)\,dx}{x^3+x^2-2x}$; $\frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$

$$A = \frac{Q(0)}{P'(0)} = \left(\frac{2x+3}{3x^2+2x-2}\right)_{x=0} = -\frac{3}{2},$$

$$B = \left(\frac{2x+3}{3x^2+2x-2}\right)_{x=1} = \frac{5}{3}, \quad C = \left(\frac{2x+3}{3x^2+2x-2}\right)_{x=-2} = -\frac{1}{6},$$

$$I = \int \left(\frac{-\frac{3}{2}}{x} + \frac{\frac{5}{3}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{6}}{x+2}\right) dx =$$

$$= -\frac{3}{2}\ln x + \frac{5}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{6}\ln(x+2) + C_1 = \ln \frac{C_1 (x-1)^{5/3}}{x^{3/2}(x+2)^{1/6}}.$$

---

* Числа A, B, ..., L могут быть также получены методом неопределенных коэффициентов (см. стр. 131).

2. Все корни знаменателя *действительные*; среди них есть *кратные*:

$$P(x) = (x-\alpha)^l (x-\beta)^m \ldots$$

Разложение имеет вид:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \ldots + \frac{A_l}{(x-\alpha)^l} + \\ + \frac{B_1}{x-\beta} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + \ldots + \frac{B_m}{(x-\beta)^m} + \ldots$$

Постоянные $A_1, A_2, \ldots, A_l, B_1, B_2, \ldots, B_m, \ldots$ вычисляются методом неопределенных коэффициентов (см. стр. 131); интегрирование производится по формулам

$$\int \frac{A_1\,dx}{x-\alpha} = A_1 \ln(x-\alpha), \quad \int \frac{A_k\,dx}{(x-\alpha)^k} = -\frac{A_k}{(k-1)(x-\alpha)^{k-1}} \qquad (k>1).$$

Пример

$$I = \int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,dx; \quad \frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{B_3}{(x-1)^3}.$$

Метод неопределенных коэффициентов приводит к уравнениям

$$A + B_1 = 1, \quad -3A - 2B_1 + B_2 = 0, \quad 3A + B_1 - B_2 + B_3 = 0, \quad -A = 1,$$

откуда

$$A = -1, \quad B_1 = 2, \quad B_2 = 1, \quad B_3 = 2;$$

$$I = \int \left[-\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3} \right] dx =$$

$$= \ln x + 2\ln(x-1) - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + C = \ln\frac{(x-1)^2}{x} - \frac{x}{(x-1)^2} + C.$$

3. Среди корней знаменателя есть *комплексные простые*:

$$P(x) = (x-\alpha)^l (x-\beta)^m \ldots (x^2+px+q)(x^2+p'x+q') \ldots,$$

причем $\frac{p^2}{4} < q$, $\frac{p'^2}{4} < q'$, ...

Разложение имеет вид:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \ldots + \frac{A_l}{(x-\alpha)^l} + \\ + \frac{B_1}{x-\beta} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + \ldots + \frac{B_m}{(x-\beta)^m} + \ldots \\ \ldots + \frac{Cx+D}{x^2+px+q} + \frac{Ex+F}{x^2+p'x+q'} + \ldots$$

Постоянные вычисляются методом неопределенных коэффициентов (см. стр. 131).

Интегрирование выражения $\frac{Cx+D}{x^2+px+q}$ производится по формуле

$$\int \frac{Cx+D}{x^2+px+q}\,dx = \frac{C}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{D-\frac{Cp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}.$$

Пример.

$$I=\int \frac{4dx}{x^3+4x}: \quad \frac{4}{x^3+4x}=\frac{A}{x}+\frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

Метод неопределенных коэффициентов приводит к уравнениям

$$A+C=0, \quad D=0, \quad 4A=4,$$

откуда

$$A=1, \quad C=-1, \quad D=0;$$

$$I=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+4}\right)dx=\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+\ln C_1=\ln\frac{C_1x}{\sqrt{x^2+4}}$$

(в данном случае член, содержащий арктангенс, отсутствует).

4. Знаменатель имеет *кратные комплексные* корни:

$$P(x)=(x-\alpha)^k(x-\beta)^l\ldots(x^2+px+q)^m(x^2+p'x+q')^n\ldots$$

Разложение имеет вид:

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\ldots+\frac{B_1}{x-\beta}+\frac{B_2}{(x-\beta)^2}+\ldots+\frac{B_l}{(x-\beta)^l}+$$
$$+\frac{C_1x+D_1}{x^2+px+q}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{C_mx+D_m}{(x^2+px+q)^m}+$$
$$+\frac{E_1x+F_1}{x^2+p'x+q'}+\frac{E_2x+F_2}{(x^2+p'x+q')^2}+\ldots+\frac{E_nx+F_n}{(x^2+p'x+q')^n}+\ldots$$

Постоянные вычисляются методом неопределенных коэффициентов (см. стр. 131).

Интегрирование выражения $\frac{C_mx+D_m}{(x^2+px+q)^m}$ производится следующим образом. Числитель преобразуют:

$$C_mx+D_m=\frac{C_m}{2}(2x+p)+\left(D_m-\frac{C_mp}{2}\right).$$

Искомый интеграл разбивают на два слагаемых. Первое из них интегрируется сразу:

$$\int\frac{C_m}{2}\frac{(2x+p)\,dx}{(x^2+px+q)^m}=-\frac{C_m}{2(m-1)}\frac{1}{(x^2+px+q)^{m-1}}.$$

а второе (без коэффициента) — по формуле понижения степени:

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^m} = \frac{x+\frac{p}{2}}{2(m-1)\left(q-\frac{p^2}{4}\right)(x^2+px+q)^{m-1}} + \\ + \frac{2m-3}{2(m-1)\left(q-\frac{p^2}{4}\right)} \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-1}}. \qquad (*)$$

Пример.

$$I = \int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx;\ \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{C_1x+D_1}{x^2+1} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+1)^2}$$

Метод неопределенных коэффициентов приводит к системе уравнений

$$A+C_1=0,\quad -2C_1+D_1=0,\quad 2A+C_1-2D_1+C_2=2,$$
$$-2C_1+D_1-2C_2+D_2=2,\quad A-2D_1-2D_2=13,$$

откуда

$$A=1,\quad C_1=-1,\quad D_1=-2,\quad C_2=-3,\quad D_2=-4$$

и

$$I=\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{x+2}{x^2+1}-\frac{3x+4}{(x^2+1)^2}\right)dx=$$
$$=\ln(x-2)-\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+2\operatorname{arctg}x\right]-\left[-\frac{3}{2(x^2+1)}+\int\frac{4dx}{(x^2+1)^2}\right].$$

Но по формуле (*)

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x,$$

откуда окончательно имеем:

$$I=\frac{3-4x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+1}-4\operatorname{arctg}x+C.$$

Выделение рациональной части интеграла *(метод Остроградского).* Интеграл от дробной рациональной функции — элементарная функция, являющаяся суммой *рациональной части* (т. е. некоторой алгебраической дроби) *и трансцендентной части* (содержащей логарифмы и арктангенсы); при этом рациональная часть появляется лишь во 2-м и 4-м из рассмотренных случаев, т. е. лишь тогда, когда знаменатель подинтегральной функции имеет кратные корни (действительные или комплексные). Рациональную часть можно определить без интегрирования *методом Остроградского* и свести вычисление интеграла к случаям, в которых знаменатель имеет только простые корни. Способ состоит в следующем.

Знаменатель $P(x)$ подинтегральной функции $\frac{Q(x)}{P(x)}$ (правильной несократимой дроби, см. стр. 335) имеет вид:

$$P(x) = (x-\alpha)^k (x-\beta)^l \ldots (x^2+px+q)^m (x^2+p'x+q')^n \ldots$$

Его можно разложить на два множителя $P_1(x)$ и $P_2(x)$, где $P_2(x)$ является произведением всех множителей, входящих в $P(x)$ и взятых в первой степени:

$$P_2(x) = (x-\alpha)(x-\beta)\ldots(x^2+px+q)(x^2+p'x+q')\ldots,$$

и, следовательно,

$$P_1(x) = (x-\alpha)^{k-1}(x-\beta)^{l-1}\ldots(x^2+px+q)^{m-1}(x^2+p'x+q')^{n-1}\ldots$$

Данный интеграл можно представить в виде

$$\int \frac{Q(x)}{P(x)}\,dx = \frac{Q_1(x)}{P_1(x)} + \int \frac{Q_2(x)}{P_2(x)}\,dx \qquad (А)$$

(*формула Остроградского*), где $P(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ — известные многочлены степеней соответственно r, s и t, $Q(x)$ — известный многочлен степени не выше $r-1$, а $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ — неизвестные многочлены степеней не выше $s-1$ и соответственно $t-1$:

$$Q_1(x) = ax^{s-1} + bx^{s-2} + \ldots + d, \qquad Q_2(x) = ex^{t-1} + fx^{t-2} + \ldots + h.$$

Дифференцирование (А) дает:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \left[\frac{Q_1(x)}{P_1(x)}\right]' + \frac{Q_2(x)}{P_2(x)}. \qquad (Б)$$

Неизвестные коэффициенты многочленов $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ определяются из уравнения (Б) методом неопределенных коэффициентов.

Зная многочлены $Q_1(x)$, $P_1(x)$, $Q_2(x)$, $P_2(x)$, сводим вычисление заданного интеграла к интегралу $\int \frac{Q_2(x)}{P_2(x)}\,dx$, у которого знаменатель подинтегральной функции не имеет кратных корней.

Пример: $\int \frac{x^4+x^3+4x^2+3x+2}{(x+1)^2(x^2+1)^2}\,dx.$

Здесь $P_1 = P_2 = (x+1)(x^2+1) = x^3+x^2+x+1$, $P = (x^3+x^2+x+1)^2$, $Q = x^4+x^3+4x^2+3x+2$, $Q_1 = ax^2+bx+c$, $Q_2 = ex^2+fx+g$.

Формула (Б) дает:

$$\frac{x^4+x^3+4x^2+3x+2}{(x^3+x^2+x+1)^2} = \left[\frac{ax^2+bx+c}{x^3+x^2+x+1}\right]' + \frac{ex^2+fx+g}{x^3+x^2+x+1},$$

откуда

$$x^4+x^3+4x^2+3x+2 = (2ax+b)(x^3+x^2+x+1) - (ax^2+bx+c)(3x^2+2x+1) + (ex^2+fx+g)(x^3+x^2+x+1).$$

---

* Нахождение многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ не представляет затруднений, если известно разложение $P(x)$ на множители, т. е. определены все корни уравнения $P(x)=0$. Но $P_1(x)$ и $P_2(x)$ можно определить и не решая этого уравнения: для этого достаточно продифференцировать многочлен $P(x)$ и найти наибольший общий делитель многочленов $P(x)$ и $P'(x)$ (см. стр. 129). Этот наибольший общий делитель равен $P_1(x)$, а $P_2(x) = \frac{P(x)}{P_1(x)}$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях, получим систему уравнений относительно a, b, c, e, f, g: 1) $e=0$, 2) $-a+f=1$, 3) $-2b+f+g=1$, 4) $a-b-3c+f+g=4$, 5) $2a-2c+f+g=3$, 6) $b-c+g=2$ [в уравнениях 2) – 6) коэффициент $e=0$ опущен]; отсюда $a=-\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{4}$, $c=-1$, $e=0$, $f=\frac{3}{4}$, $g=\frac{3}{4}$.

Следовательно,

$$\int \frac{x^4+x^3+4x^2+3x+2}{(x+1)^2(x^2+1)^2}\,dx=-\frac{1}{4}\,\frac{x^2-x+4}{x^3+x^2+x+1}+\frac{3}{4}\int\frac{x+1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx.$$

Последний интеграл равен $\operatorname{arctg} x$.

Таблицы интегралов от рациональных функций см. стр. 346–354.

4. *Интегрирование иррациональных функций*

Иррациональные функции не всегда интегрируются в элементарных функциях. В простейших случаях интегралы от иррациональных функций могут быть приведены к интегралам от рациональных функций при помощи следующих подстановок:

Интеграл *	Подстановка
$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}\right)dx$	$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}=t$
$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+e}}, \ldots\right)dx$	$\sqrt[r]{\frac{ax+b}{cx+e}}=t$, где r – наименьшее общее кратное чисел n, m, ...
$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$	Одна из трех *подстановок Эйлера:*
1) если $a>0$ **	$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x$
2) если $c>0$	$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}$
3) если трехчлен ax^2+bx+c имеет различные действительные корни: $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$	$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\alpha)$

* Символ R означает рациональную функцию от выражений, к которым он относится. Числа n, m, ... – целые.

** Если $a<0$ и трехчлен ax^2+bx+c имеет мнимые корни, то подинтегральная функция не существует ни при каком значении x, так как $\sqrt{ax^2+bx+c}$ – мнимое число при всех действительных значениях x. Интегрирование в этом случае не представляет интереса.

Интеграл $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ может быть также приведен к одному из следующих трех видов:

$$\int R(x, \sqrt{x^2+\alpha^2})\,dx, \quad \int R(x, \sqrt{x^2-\alpha^2})\,dx, \quad \int R(x, \sqrt{\alpha^2-x^2})\,dx,$$

так как квадратный трехчлен ax^2+bx+c всегда может быть представлен в виде суммы или разности двух квадратов.

Примеры:

1) $4x^2+16x+17 = 4\left(x^2+4x+4+\frac{1}{4}\right) =$

$$= 4\left[(x+2)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right] = 4\left[x_1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right], \text{ где } x_1 = x+2;$$

2) $x^2+3x+1 = x^2+3x+\frac{9}{4}-\frac{5}{4} = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 =$

$$= x_1^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2, \text{ где } x_1 = x+\frac{3}{2};$$

3) $-x^2+2x = 1-x^2+2x-1 = 1^2-(x-1)^2 = 1^2-x_1^2$, где $x_1 = x-1$.

Эти интегралы вычисляются следующими подстановками:

Интеграл	Подстановка
$\int R(x, \sqrt{x^2+\alpha^2})\,dx$	$x = \alpha \operatorname{sh} t$ или $x = \alpha \operatorname{tg} t$
$\int R(x, \sqrt{x^2-\alpha^2})\,dx$	$x = \alpha \operatorname{ch} t$ или $x = \alpha \sec t$
$\int R(x, \sqrt{\alpha^2-x^2})\,dx$	$x = \alpha \sin t$ или $x = \alpha \cos t$

Указанные подстановки приводят к интегралам от рациональных выражений, содержащих тригонометрические или гиперболические функции (см. стр. 344 или 346).

Интегрирование биномных дифференциалов. *Биномным дифференциалом* называется выражение

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx,$$

где a, b — любые действительные числа, а m, n, p — любые рациональные числа (положительные или отрицательные).

Теорема Чебышева. Интеграл

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx \qquad (*)$$

может быть выражен в элементарных функциях только в следующих трех случаях.

1) p — целое число. Выражение $(a+bx^n)^p$ развертывается по формуле бинома Ньютона (см. стр. 163) и подинтегральная функция после раскрытия скобок будет суммой членов вида cx^k которые легко интегрируются.

2) $\frac{m+1}{n}$ — *целое число.* Интеграл $(*)$ приводится к интегралу от рациональной функции подстановкой $t=\sqrt[r]{a+bx^n}$ где r — знаменатель дроби p.

3) $\frac{m+1}{n}+p$ — *целое число.* Интеграл $(*)$ приводится к интегралу от рациональной функции подстановкой $t=\sqrt[r]{\frac{a+bx^n}{x^n}}$ где r — знаменатель дроби p.

Примеры:

1) $$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx=\int x^{-1/2}\,(1+x^{1/4})^{1/3}\,dx;$$

$m=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{4}$, $p=\frac{1}{3}$, $\frac{m+1}{n}=2$ (случай 2).

Подстановка $t=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$, $x=(t^3-1)^4$, $dx=12t^2\,(t^3-1)^3\,dt$,

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx=12\int (t^6-t^3)\,dt=\frac{3}{7}\,t^4\,(4t^3-7)+C.$$

2) $$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[4]{1+x^3}}=\int x^3\,(1+x^3)^{-1/4}\,dx;$$

$m=3$, $n=3$, $p=-\frac{1}{4}$; $\frac{m+1}{n}=\frac{4}{3}$, $\frac{m+1}{n}+p=\frac{13}{12}$;

ни одно из условий 1), 2), 3) не соблюдается — интеграл не является элементарной функцией.

Эллиптические интегралы. Интегралы вида

$$\left.\begin{aligned}&\int R\,(x,\sqrt{ax^3+bx^2+cx+d})\,dx\\ \text{и}\quad&\int R\,(x,\sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e})\,dx,\end{aligned}\right\}\qquad (A)$$

как правило, не выражаются через элементарные функции. В тех случаях, когда эти интегралы не являются элементарными функциями, они называются *эллиптическими* *.

---

* В тех случаях, когда интегралы (A) удается выразить через элементарные функции, они называются *псевдоэллиптическими*.

Интегралы типов (А), не выражающиеся через элементарные функции, могут быть в результате ряда преобразований * сведены к элементарным функциям и к интегралам следующих трех типов:

$$\left.\begin{gathered}\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},\ \int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},\\ \int \frac{dt}{(1+ht^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\end{gathered}\right\}\ (0<k<1). \qquad (Б)$$

Подстановкой $t=\sin\varphi\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ интегралы (Б) могут быть сведены к следующей *лежандровой форме:*

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\ (\textit{эллиптический интеграл 1-го рода}),$$

$$\int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi\ (\textit{эллиптический интеграл 2-го рода}),$$

$$\int \frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\ (\textit{эллиптический интеграл 3-го рода}).$$

Соответствующие определенные интегралы с нижним пределом, равным нулю, обозначаются следующими символами:

$$\left.\begin{gathered}\text{I)}\int_0^{\varphi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}=F(k,\varphi),\quad \text{II)}\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi=E(k,\varphi),\\ \text{III)}\int_0^{\varphi}\frac{d\psi}{(1+h\sin^2\psi)\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}=\Pi(h,k,\varphi).\end{gathered}\right\}\ (k<1).$$

Эти интегралы называются *неполными эллиптическими интегралами* соответственно 1, 2 и 3 рода. При $\varphi=\frac{\pi}{2}$ интегралы I и II называются *полными эллиптическими интегралами* и обозначаются:

$$K=F\left(k,\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}\qquad E=E\left(k,\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi.$$

Таблица значений неполных и полных эллиптических интегралов 1 и 2 рода см. стр. 79—80.

Таблицы интегралов от иррациональных функций см. стр. 354—366.

---

* См. Фихтенгольц, т. I (стр. 587 справочника).

5. *Интегрирование тригонометрических функций*

Интеграл вида

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx\ *\qquad (A)$$

всегда может быть приведен к интегралу от рациональной функции, приводимой ниже «универсальной подстановкой», а в отдельных случаях и более простыми приемами.

Универсальная подстановка для интеграла (A):

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\ \text{откуда}\ dx=\frac{2\,dt}{1+t^2},\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Например:

$$\int\frac{1+\sin x}{\sin x\,(1+\cos x)}\,dx=\int\frac{\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=\frac{1}{2}\int\left(t+2+\frac{1}{t}\right)dt=$$

$$=\frac{t^2}{4}+t+\frac{1}{2}\ln t+C=\frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{4}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C.$$

Если в подинтегральной функции интеграла (A) $\sin x$ и $\cos x$ находятся только в *четных* степенях, то этот интеграл более просто приводится к интегралу от рациональной функции подстановкой $t=\operatorname{tg}x$.

Упрощенные приемы для часто встречающихся случаев:

1) $\int R(\sin x)\cos x\,dx$. Подстановка $t=\sin x$, $\cos x\,dx=dt$.

2) $\int R(\cos x)\sin x\,dx$. Подстановка $t=\cos x$, $\sin x\,dx=-dt$.

3) $\int\sin^n x\,dx$.

Если n нечетное ($n=2m+1$), то

$$\int\sin^n x\,dx=\int(1-\cos^2 x)^m\sin x\,dx=-\int(1-t^2)^m\,dt,\ \text{где}\ t=\cos x.$$

Если n — четное ($n=2m$), то

$$\int\sin^n x\,dx=\int\left[\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right]^m dx=\frac{1}{2^{m+1}}\int(1-\cos t)^m\,dt,\ \text{где}\ t=2x.$$

Степень снижается вдвое; раскрывая скобки в $(1-\cos t)^m$, интегрируем каждый член (см. ниже случай 4).

4) $\int\cos^n x\,dx$.

Если n нечетное ($n=2m+1$), то

$$\int\cos^n x\,dx=\int(1-\sin^2 x)^m\cos x\,dx=\int(1-t^2)^m\,dt,\ \text{где}\ t=\sin x.$$

---

* Символ R означает рациональную функцию от выражений, к которым он относится.

Если n четное ($n = 2m$), то

$$\int \cos^n x\,dx = \int \left[\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right]^m dx = \frac{1}{2^{m+1}} \int (1+\cos t)^m\,dt, \text{ где } t = 2x.$$

Степень снижается вдвое; раскрывая скобки, интегрируем каждый член.

5) $\int \sin^n x \cos^m x\,dx$ сводится к случаям 1) или 2), если хотя бы одно из чисел m или n нечетно.

Примеры: $\int \sin^2 x \cos^5 x\,dx = \int \sin^2 x\,(1-\sin^2 x)^2 \cos x\,dx =$

$= \int t^2 (1-t^2)^2\,dt$, где $t = \sin x$; $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx = -\int \frac{dt}{\sqrt{t}}$, где $t = \cos x$.

Если оба числа m и n четные, то степени могут быть снижены вдвое, аналогично случаям 3) и 4). При этом используются формулы

$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Пример: $\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx = \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x\,dx =$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\,(1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x\,dx + \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{48}\sin^3 2x + \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + C.$$

6) $\int \operatorname{tg}^n x\,dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,(\sec^2 x - 1)\,dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,d\operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx =$

$= \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx$ и т. д. Повторяя этот прием, приведем интеграл при n четном к интегралу $\int dx = x$, а при n нечетном — к интегралу $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln\cos x$.

7) $\int \operatorname{ctg}^n x\,dx$ интегрируется аналогично случаю 6).

Таблицы интегралов от тригонометрических функций см. стр. 366—377.

6. *Интегрирование других трансцендентных функций*

Показательные функции. Интегралы типа

$$\int R(e^{mx}, e^{nx}, \ldots, e^{px})\,dx,$$

где $m, n, \ldots, p$ — рациональные числа, подстановкой $t = e^x$ приводятся к интегралу $\int \frac{1}{t} R(t^m, t^n, \ldots, t^p)\,dt$; последний интеграл приводится к интегралу от рациональной функции (см. стр. 334) подстановкой $z = \sqrt[r]{t}$, где r — наименьшее общее кратное знаменателей дробей $m, n, \ldots, p$.

Гиперболические функции. Интегралы, содержащие $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$, обычно берутся посредством замены гиперболических функций через показательные (стр. 193—194). Наиболее употребительные случаи $\int \operatorname{sh}^n x\,dx$, $\int \operatorname{ch}^n x\,dx$, $\int \operatorname{sh}^m x \operatorname{ch}^n x\,dx$ интегрируются приемами, аналогичными тем, которые применялись в интегралах от тригонометрических функций (стр. 344—345).

Применение интегрирования по частям. Функции, содержащие логарифмы, обратные тригонометрические и обратные гиперболические функции, произведения x^m на $\ln x$, e^{ax}, $\sin ax$ или $\cos ax$, интегрируются главным образом применением (один или несколько раз) формулы интегрирования по частям (стр. 332). В некоторых случаях применение интегрирования по частям несколько раз приводит к исходному интегралу, и тогда вычисление этого интеграла сводится к решению алгебраического уравнения: так вычисляются, например, интегралы $\int e^{ax} \cos bx\,dx$, $\int e^{ax} \sin bx\,dx$ (в этих интегралах применение интегрирования по частям производится два раза, причем в качестве множителя u в обоих случаях берется функция одного и того же типа — показательная или тригонометрическая).

В случаях $\int P(x)\, e^{ax}\,dx$, $\int P(x) \sin bx\,dx$, $\int P(x) \cos bx\,dx$, где $P(x)$ — многочлен, также применяется формула интегрирования по частям.

Таблицы интегралов от трансцендентных функций см. стр. 377—383.

7. Таблица неопределенных интегралов

Общие указания

1. Постоянная интегрирования опущена всюду за исключением случаев, когда интеграл может быть представлен в различных формах с различными произвольными постоянными.

2. Во всех формулах, где в состав первообразной функции входит выражение, содержащее $\ln f(x)$, следует его понимать как $\ln |f(x)|$; знак абсолютной величины везде для простоты опущен.

3. В тех случаях, когда первообразная функция представлена в виде степенного ряда, она не выражается через элементарные функции.

Интегралы от рациональных функций

Интегралы, содержащие $ax + b$

Обозначение: $X = ax + b$

1) $\int X^n dx = \frac{1}{a(n+1)} X^{n+1}$ ($n \neq -1$; при $n = -1$ см. № 2).

2) $\int \frac{dx}{X} = \frac{1}{a} \ln X$.

3) $\int xX^n\,dx = \frac{1}{a^2(n+2)} X^{n+2} - \frac{b}{a^2(n+1)} X^{n+1}$

$n \neq -1, \neq -2$; при $n = -1, = -2$ см. №№ 5 и 6).

4) $\int x^m X^n\,dx = \frac{1}{a^{m+1}} \int (X-b)^m X^n\,dX$ (применяется при $m < n$ или при m целом и n дробном; в этих случаях $(X-b)^m$ раскрывается по формуле бинома Ньютона, стр. 163) $(n \neq -1, \neq -2, \ldots, \neq -m)$.

5) $\int \frac{x\,dx}{X} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln X.$

6) $\int \frac{x\,dx}{X^2} = \frac{b}{a^2 X} + \frac{1}{a^2} \ln X.$

7) $\int \frac{x\,dx}{X^3} = \frac{1}{a^2}\left(-\frac{1}{X} + \frac{b}{2X^2}\right).$

8) $\int \frac{x\,dx}{X^n} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{-1}{(n-2)\,X^{n-2}} + \frac{b}{(n-1)\,X^{n-1}}\right)$ $(n \neq 1, \neq 2).$

9) $\int \frac{x^2\,dx}{X} = \frac{1}{a^3}\left(\frac{1}{2}X^2 - 2bX + b^2 \ln X\right).$

10) $\int \frac{x^2\,dx}{X^2} = \frac{1}{a^3}\left(X - 2b \ln X - \frac{b^2}{X}\right).$

11) $\int \frac{x^2\,dx}{X^3} = \frac{1}{a^3}\left(\ln X + \frac{2b}{X} - \frac{b^2}{2X^2}\right).$

12) $\int \frac{x^2\,dx}{X^n} = \frac{1}{a^3}\left[\frac{-1}{(n-3)\,X^{n-3}} + \frac{2b}{(n-2)\,X^{n-2}} - \frac{b^2}{(n-1)\,X^{n-1}}\right]$
$(n \neq 1, \neq 2, \neq 3).$

13) $\int \frac{x^3\,dx}{X} = \frac{1}{a^4}\left(\frac{X^3}{3} - \frac{3bX^2}{2} + 3b^2X - b^3 \ln X\right).$

14) $\int \frac{x^3\,dx}{X^2} = \frac{1}{a^4}\left(\frac{X^2}{2} - 3bX + 3b^2 \ln X + \frac{b^3}{X}\right).$

15) $\int \frac{x^3\,dx}{X^3} = \frac{1}{a^4}\left(X - 3b \ln X - \frac{3b^2}{X} + \frac{b^3}{2X^2}\right).$

16) $\int \frac{x^3\,dx}{X^4} = \frac{1}{a^4}\left(\ln X + \frac{3b}{X} - \frac{3b^2}{2X^2} + \frac{b^3}{3X^3}\right).$

17) $\int \frac{x^3\,dx}{X^n} = \frac{1}{a^4}\left[\frac{-1}{(n-4)\,X^{n-4}} + \frac{3b}{(n-3)\,X^{n-3}} - \frac{3b^2}{(n-2)\,X^{n-2}} + \right.$
$\left. + \frac{b^3}{(n-1)\,X^{n-1}}\right]$ $(n \neq 1,\ n \neq 2,\ n \neq 3,\ n \neq 4).$

18) $\int \frac{dx}{xX} = -\frac{1}{b} \ln \frac{X}{x}.$

19) $\int \frac{dx}{xX^2} = -\frac{1}{b^2}\left(\ln \frac{X}{x} + \frac{ax}{X}\right).$

20) $\int \frac{dx}{xX^3} = -\frac{1}{b^3}\left(\ln\frac{X}{x} + \frac{2ax}{X} - \frac{a^2x^2}{2X^2}\right)$ $\boxed{X = ax + b}$

21) $\int \frac{dx}{xX^n} = -\frac{1}{b^n}\left[\ln\frac{X}{x} - \sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^{i}\frac{(-a)^i x^i}{iX^i}\right]$ $(n \geq 1)$.

22) $\int \frac{dx}{x^2X} = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2}\ln\frac{X}{x}$.

23) $\int \frac{ax}{x^2X^2} = -a\left[\frac{1}{b^2X} + \frac{1}{ab^2x} - \frac{2}{b^3}\ln\frac{X}{x}\right]$.

24) $\int \frac{dx}{x^2X^3} = -a\left[\frac{1}{2b^2X^2} + \frac{2}{b^3X} + \frac{1}{ab^3x} - \frac{3}{b^4}\ln\frac{X}{x}\right]$.

25) $\int \frac{dx}{x^2X^n} = -\frac{1}{b^{n+1}}\left[-\sum_{i=2}^{n} C_n^i \frac{(-a)^i x^{i-1}}{(i-1)X^{i-1}} + \frac{X}{x} - na\ln\frac{X}{x}\right]$ $(n \geq 2)$.

26) $\int \frac{dx}{x^3X} = -\frac{1}{b^3}\left[a^2\ln\frac{X}{x} - \frac{2aX}{x} + \frac{X^2}{2x^2}\right]$.

27) $\int \frac{dx}{x^3X^2} = -\frac{1}{b^4}\left[3a^2\ln\frac{X}{x} + \frac{a^3x}{X} + \frac{X^2}{2x^2} - \frac{3aX}{x}\right]$.

28) $\int \frac{dx}{x^3X^3} = -\frac{1}{b^5}\left[6a^2\ln\frac{X}{x} + \frac{4a^3x}{X} - \frac{a^4x^2}{2X^2} + \frac{X^2}{2x^2} - \frac{4aX}{x}\right]$.

29) $\int \frac{dx}{x^3X^n} = -\frac{1}{b^{n+2}}\left[-\sum_{i=3}^{n+1} C_{n+1}^{i}\frac{(-a)^i x^{i-2}}{(i-2)X^{i-2}} + \frac{a^2X^2}{2x^2} - \right.$

$$\left. - \frac{(n+1)aX}{x} + \frac{n(n+1)a^2}{2}\ln\frac{X}{x}\right] \quad (n \geq 3).$$

30) $\int \frac{dx}{x^mX^n} = -\frac{1}{b^{m+n-1}}\sum_{i=0}^{m+n-2} C_{m+n-2}^{i}\frac{X^{m-i-1}(-a)^i}{(m-i-1)x^{m-i-1}}$

[если знаменатель члена под знаком $\sum$ обращается в нуль, то такой член заменяется следующим:

$$C_{m+n-2}^{n-1}(-a)^{m-1}\ln\frac{X}{x}\Big]$$

Обозначение: $\Delta = bf - ag$

31) $\int \frac{ax+b}{fx+g}\,dx = \frac{ax}{f} + \frac{\Delta}{f^2}\ln(fx+g).$

32) $\int \frac{dx}{(ax+b)(fx+g)} = \frac{1}{\Delta}\ln\frac{fx+g}{ax+b}$ $(\Delta \neq 0).$

33) $\int \frac{x\,dx}{(ax+b)(fx+g)} = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{b}{a}\ln(ax+b) - \frac{g}{f}\ln(fx+g)\right]$ $(\Delta \neq 0).$

34) $\int \frac{dx}{(ax+b)^2(fx+g)} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{1}{ax+b} + \frac{f}{\Delta}\ln\frac{fx+g}{ax+b}\right)$ $(\Delta \neq 0).$

35) $\int \frac{x\,dx}{(a+x)(b+x)^2} = \frac{b}{(a-b)(b+x)} - \frac{a}{(a-b)^2}\ln\frac{a+x}{b+x}$ $(a \neq b).$

36) $\int \frac{x^2\,dx}{(a+x)(b+x)^2} =$

$$= \frac{b^2}{(b-a)(b+x)} + \frac{a^2}{(b-a)^2}\ln(a+x) + \frac{b^2-2ab}{(b-a)^2}\ln(b+x) \quad (a \neq b).$$

37) $\int \frac{dx}{(a+x)^2(b+x)^2} = \frac{-1}{(a-b)^2}\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{b+x}\right) + \frac{2}{(a-b)^3}\ln\frac{a+x}{b+x}$

$(a \neq b).$

38) $\int \frac{x\,dx}{(a+x)^2(b+x)^2} = \frac{1}{(a-b)^2}\left(\frac{a}{a+x} + \frac{b}{b+x}\right) + \frac{a+b}{(a-b)^3}\ln\frac{a+x}{b+x}$

$(a \neq b).$

39) $\int \frac{x^2\,dx}{(a+x)^2(b+x)^2} = \frac{-1}{(a-b)^2}\left(\frac{a^2}{a+x} + \frac{b^2}{b+x}\right) + \frac{2ab}{(a-b)^3}\ln\frac{a+x}{b+x}$

$(a \neq b).$

Интегралы, содержащие $ax^2 + bx + c$

Обозначения: $X = ax^2 + bx + c$, $\Delta = 4ac - b^2$

40) $\int \frac{dx}{X} = \frac{2}{\sqrt{\Delta}}\operatorname{arctg}\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}$ (для $\Delta > 0$),

$$= -\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\operatorname{Arth}\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} = \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\ln\frac{2ax+b-\sqrt{-\Delta}}{2ax+b+\sqrt{-\Delta}}$$ (для $\Delta < 0$).

41) $\int \frac{dx}{X^2} = \frac{2ax+b}{\Delta X} + \frac{2a}{\Delta}\int\frac{dx}{X}$ (см. № 40).

42) $\int \frac{dx}{X^3} = \frac{2ax+b}{\Delta}\left(\frac{1}{2X^2} + \frac{3a}{\Delta X}\right) + \frac{6a^2}{\Delta^2}\int\frac{dx}{X}$ (см. № 40).

43) $\int \frac{dx}{X^n} = \frac{2ax+b}{(n-1)\Delta X^{n-1}} + \frac{(2n-3)2a}{(n-1)\Delta}\int \frac{dx}{X^{n-1}}$. $\boxed{X = ax^2+bx+c,\ \Delta = 4ac-b^2}$

44) $\int \frac{x\,dx}{X} = \frac{1}{2a}\ln X - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{X}$ (см. № 40).

45) $\int \frac{x\,dx}{X^2} = -\frac{bx+2c}{\Delta X} - \frac{b}{\Delta}\int \frac{dx}{X}$ (см. № 40).

46) $\int \frac{x\,dx}{X^n} = -\frac{bx+2c}{(n-1)\Delta X^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{(n-1)\Delta}\int \frac{dx}{X^{n-1}}$.

47) $\int \frac{x^2\,dx}{X} = \frac{x}{a} - \frac{b}{2a^2}\ln X + \frac{b^2-2ac}{2a^2}\int \frac{dx}{X}$ (см. № 40).

48) $\int \frac{x^2\,dx}{X^2} = \frac{(b^2-2ac)x+bc}{a\Delta X} + \frac{2c}{\Delta}\int \frac{dx}{X}$ (см. № 40).

49) $\int \frac{x^2\,dx}{X^n} = \frac{-x}{(2n-3)aX^{n-1}} + \frac{c}{(2n-3)a}\int \frac{dx}{X^n}$ $\frac{(n-2)b}{(2n-3)a}\int \frac{x\,dx}{X^n}$
(см. №№ 43 и 46).

50) $\int \frac{x^m\,dx}{X^n} = -\frac{x^{m-1}}{(2n-m-1)aX^{n-1}} + \frac{(m-1)c}{(2n-m-1)a}\int \frac{x^{m-2}dx}{X^n} -$
$-\frac{(n-m)b}{(2n-m-1)a}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{X^n}$
($m \neq 2n-1$; при $m = 2n-1$ см. № 51).

51) $\int \frac{x^{2n-1}\,dx}{X^n} = \frac{1}{a}\int \frac{x^{2n-3}\,dx}{X^{n-1}} - \frac{c}{a}\int \frac{x^{2n-3}\,dx}{X^n} - \frac{b}{a}\int \frac{x^{2n-2}\,dx}{X^n}$.

52) $\int \frac{dx}{xX} = \frac{1}{2c}\ln \frac{x^2}{X} - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{X}$ (см. № 40).

53) $\int \frac{dx}{xX^n} = \frac{1}{2c(n-1)X^{n-1}} - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{X^n} + \frac{1}{c}\int \frac{dx}{xX^{n-1}}$.

54) $\int \frac{dx}{x^2X} = \frac{b}{2c^2}\ln \frac{X}{x^2} - \frac{1}{cx} + \left(\frac{b^2}{2c^2} - \frac{a}{c}\right)\int \frac{dx}{X}$ (см. № 40).

55) $\int \frac{dx}{x^mX^n} = -\frac{1}{(m-1)cx^{m-1}X^{n-1}} - \frac{(2n+m-3)a}{(m-1)c}\int \frac{dx}{x^{m-2}X^n} -$
$-\frac{(n+m-2)b}{(m-1)c}\int \frac{dx}{x^{m-1}X^n}$ ($m > 1$).

56) $\int \frac{dx}{(fx+g)X} = \frac{1}{2(cf^2-gbf+g^2a)}\left[f\ln\frac{(fx+g)^2}{X}\right] +$
$+\frac{2ga-bf}{2(cf^2-gbf+g^2a)}\int \frac{dx}{X}$ (см. № 40)

Интегралы, содержащие $a^2 \pm x^2$

Обозначения:

$$X = a^2 \pm x^2, \quad Y = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} & \text{для знака «+»,} \\ \operatorname{Arth} \dfrac{x}{a} = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{a+x}{a-x} & \text{для знака «−» при } |x| < a, \\ \operatorname{Arcth} \dfrac{x}{a} = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{x+a}{x-a} & \text{» » «−» » } |x| > a. \end{cases}$$

В случае двойного знака в формуле верхний знак относится к $X = a^2 + x^2$, а нижний — к $X = a^2 - x^2$.

57) $\int \dfrac{dx}{X} = \dfrac{1}{a} Y.$

58) $\int \dfrac{dx}{X^2} = \dfrac{x}{2a^2 X} + \dfrac{1}{2a^3} Y.$

59) $\int \dfrac{dx}{X^3} = \dfrac{x}{4a^2 X^2} + \dfrac{3x}{8a^4 X} + \dfrac{3}{8a^5} Y.$

60) $\int \dfrac{dx}{X^{n+1}} = \dfrac{x}{2na^2 X^n} + \dfrac{2n-1}{2na^2} \int \dfrac{dx}{X^n}.$

61) $\int \dfrac{x\,dx}{X} = \pm \dfrac{1}{2} \ln X.$

62) $\int \dfrac{x\,dx}{X^2} = \mp \dfrac{1}{2X}.$

63) $\int \dfrac{x\,dx}{X^3} = \mp \dfrac{1}{4X^2}.$

64) $\int \dfrac{x\,dx}{X^{n+1}} = \mp \dfrac{1}{2nX^n}$ $(n \neq 0).$

65) $\int \dfrac{x^2\,dx}{X} = \pm x \mp aY.$

66) $\int \dfrac{x^2\,dx}{X^2} = \mp \dfrac{x}{2X} \pm \dfrac{1}{2a} Y.$

67) $\int \dfrac{x^2\,dx}{X^3} = \mp \dfrac{x}{4X^2} \pm \dfrac{x}{8a^2 X} \pm \dfrac{1}{8a^3} Y.$

68) $\int \dfrac{x^2\,dx}{X^{n+1}} = \mp \dfrac{x}{2nX^n} \pm \dfrac{1}{2n} \int \dfrac{dx}{X^n}$ $(n \neq 0).$

69) $\int \dfrac{x^3\,dx}{X} = \pm \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{a^2}{2} \ln X.$

70) $\int \dfrac{x^3\,dx}{X^2} = \dfrac{a^2}{2X} + \dfrac{1}{2} \ln X.$

$$X = a^2 \pm x^2,\quad Y = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} & \text{для знака «+»,} \\ \operatorname{Arth}\dfrac{x}{a} = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{a+x}{a-x} & \text{для знака «−» при } |x|<a, \\ \operatorname{Arcth}\dfrac{x}{a} = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+a}{x-a} & \text{» » «−» » } |x|>a \end{cases}$$

71) $\int \frac{x^3\,dx}{X^3} = -\frac{1}{2X} + \frac{a^3}{4X^2}$.

72) $\int \frac{x^3\,dx}{X^{n+1}} = -\frac{1}{2(n-1)X^{n-1}} + \frac{a^2}{2nX^n}$ $(n>1)$.

73) $\int \frac{dx}{xX} = \frac{1}{2a^2}\ln\frac{x^2}{X}$.

74) $\int \frac{dx}{xX^2} = \frac{1}{2a^2X} + \frac{1}{2a^4}\ln\frac{x^2}{X}$.

75) $\int \frac{dx}{xX^3} = \frac{1}{4a^2X^2} + \frac{1}{2a^4X} + \frac{1}{2a^6}\ln\frac{x^2}{X}$.

76) $\int \frac{dx}{x^2X} = -\frac{1}{a^2x} \mp \frac{1}{a^3}Y$.

77) $\int \frac{dx}{x^2X^2} = -\frac{1}{a^4x} \mp \frac{x}{2a^4X} \mp \frac{3}{2a^5}Y$.

78) $\int \frac{dx}{x^2X^3} = -\frac{1}{a^6x} \mp \frac{x}{4a^4X^2} \mp \frac{7x}{8a^6X} \mp \frac{15}{8a^7}Y$.

79) $\int \frac{dx}{x^3X} = -\frac{1}{2a^2x^2} \mp \frac{1}{2a^4}\ln\frac{x^2}{X}$

80) $\int \frac{dx}{x^3X^2} = -\frac{1}{2a^4x^2} \mp \frac{1}{2a^4X} \mp \frac{1}{a^6}\ln\frac{x^2}{X}$.

81) $\int \frac{dx}{x^3X^3} = -\frac{1}{2a^6x^2} \mp \frac{1}{a^6X} \mp \frac{1}{4a^4X^2} \mp \frac{3}{2a^8}\ln\frac{x^2}{X}$.

82) $\int \frac{dx}{(b+cx)X} = \frac{1}{a^2c^2 \mp b^2}\left[c\ln(b+cx) - \frac{c}{2}\ln X \mp \frac{b}{a}Y\right]$.

Интегралы, содержащие $a^3 \pm x^3$

Обозначение: $a^3 \pm x^3 = X$; в случае двойного знака в формуле верхний знак относится к $X = a^3 + x^3$, а нижний — к $X = a^3 - x^3$

83) $\int \frac{dx}{X} = \pm\frac{1}{6a^2}\ln\frac{(a \pm x)^2}{a^2 \mp ax + x^2} + \frac{1}{a^2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x \mp a}{a\sqrt{3}}$.

84) $\int \frac{dx}{X^2} = \frac{x}{3a^3X} + \frac{2}{3a^3}\int\frac{dx}{X}$ (см. № 83).

85) $\int \frac{x\,dx}{X} = \frac{1}{6a} \ln \frac{a^2 \mp ax + x^2}{(a \pm x)^2} \pm \frac{1}{a\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x \mp a}{a\sqrt{3}}$.

86) $\int \frac{x\,dx}{X^2} = \frac{x^2}{3a^3X} + \frac{1}{3a^3} \int \frac{x\,dx}{X}$ (см. № 85).

87) $\int \frac{x^2\,dx}{X} = \pm \frac{1}{3} \ln X$.

88) $\int \frac{x^2\,dx}{X^2} = \mp \frac{1}{3X}$.

89) $\int \frac{x^3\,dx}{X} = \pm x \mp a^3 \int \frac{dx}{X}$. (см. № 83).

90) $\int \frac{x^3\,dx}{X^2} = \mp \frac{x}{3X} \pm \frac{1}{3} \int \frac{dx}{X}$. (см. № 83).

91) $\int \frac{dx}{xX} = \frac{1}{3a^3} \ln \frac{x^3}{X}$.

92) $\int \frac{dx}{xX^2} = \frac{1}{3a^3X} + \frac{1}{3a^6} \ln \frac{x^3}{X}$

93) $\int \frac{dx}{x^2X} = -\frac{1}{a^3x} \mp \frac{1}{a^3} \int \frac{x\,dx}{X}$ (см. № 85).

94) $\int \frac{dx}{x^2X^2} = -\frac{1}{a^6x} \mp \frac{x^2}{3a^6X} \mp \frac{4}{3a^6} \int \frac{x\,dx}{X}$ (см. № 85).

95) $\int \frac{dx}{x^3X} = -\frac{1}{2a^3x^2} \mp \frac{1}{a^3} \int \frac{dx}{X}$ (см. № 83).

96) $\int \frac{dx}{x^3X^2} = -\frac{1}{2a^6x^2} \mp \frac{x}{3a^6X} \mp \frac{5}{3a^6} \int \frac{dx}{X}$ (см. № 83).

Интегралы, содержащие $a^4 + x^4$

97) $\int \frac{dx}{a^4+x^4} = \frac{1}{4a^3\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + ax\sqrt{2} + a^2}{x^2 - ax\sqrt{2} + a^2} + \frac{1}{2a^3\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{ax\sqrt{2}}{a^2 - x^2}$.

98) $\int \frac{x\,dx}{a^4+x^4} = \frac{1}{2a^2} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{a^2}$.

99) $\int \frac{x^2\,dx}{a^4+x^4} = -\frac{1}{4a\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + ax\sqrt{2} + a^2}{x^2 - ax\sqrt{2} + a^2} + \frac{1}{2a\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{ax\sqrt{2}}{a^2 - x^2}$.

100) $\int \frac{x^3\,dx}{a^4+x^4} = \frac{1}{4} \ln (a^4 + x^4)$.

Интегралы, содержащие $a^4 - x^4$

101) $\int \frac{dx}{a^4-x^4} = \frac{1}{4a^3} \ln \frac{a+x}{a-x} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$.

102) $\int \frac{x\,dx}{a^4-x^4} = \frac{1}{4a^2} \ln \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}$.

103) $\int \frac{x^2dx}{a^4-x^4} = \frac{1}{4a}\ln\frac{a+x}{a-x} - \frac{1}{2a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$.

104) $\int \frac{x^3\,dx}{a^4-x^4} = -\frac{1}{4}\ln(a^4-x^4)$.

Некоторые случаи разложения дроби на элементарные

105) $\frac{1}{(a+bx)(f+gx)} \equiv \frac{1}{fb-ag}\left(\frac{b}{a+bx} - \frac{g}{f+gx}\right)$,

106) $\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)} \equiv \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b} + \frac{C}{x+c}$,

где $A = \frac{1}{(b-a)(c-a)}$, $B = \frac{1}{(a-b)(c-b)}$, $C = \frac{1}{(a-c)(b-c)}$.

107) $\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)} \equiv \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b} + \frac{C}{x+c} + \frac{D}{x+d}$,

где $A = \frac{1}{(b-a)(c-a)(d-a)}$, $B = \frac{1}{(a-b)(c-b)(d-b)}$ и т. д.

108) $\frac{1}{(a+bx^2)(f+gx^2)} \equiv \frac{1}{fb-ag}\cdot\left(\frac{b}{a+bx^2} - \frac{g}{f+gx^2}\right)$.

Интегралы от иррациональных функций

Интегралы, содержащие $\sqrt{x}$ и $a^2 \pm b^2x$

Обозначения: $X = a^2 \pm b^2x$, $Y = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{b\sqrt{x}}{a} & \text{для знака «+».} \\ \frac{1}{2}\ln\frac{a+b\sqrt{x}}{a-b\sqrt{x}} & \text{для знака «—».} \end{cases}$

В случае двойного знака в формуле верхний знак относится к $X = a^2 + b^2x$, а нижний — к $X = a^2 - b^2x$.

109) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{X} = \pm\frac{2\sqrt{x}}{b^2} \mp \frac{2a}{b^3}Y$.

110) $\int \frac{\sqrt{x^3}dx}{X} = \pm\frac{2}{3}\frac{\sqrt{x^3}}{b^2} - \frac{2a^2\sqrt{x}}{b^4} + \frac{2a^3}{b^5}Y$

111) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{X^2} = \mp\frac{\sqrt{x}}{b^2X} \pm \frac{1}{ab^3}Y$.

112) $\int \frac{\sqrt{x^3}\,dx}{X^2} = \pm\frac{2\sqrt{x^3}}{b^2X} + \frac{3a^2\sqrt{x}}{b^4X} - \frac{3a}{b^5}Y$.

113) $\int \frac{dx}{X\sqrt{x}} = \frac{2}{ab}Y$.

114) $\int \frac{dx}{X\sqrt{x^3}} = -\frac{2}{a^2\sqrt{x}} \mp \frac{2b}{a^3}Y$.

115) $$\int \frac{dx}{X^2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{a^2X} + \frac{1}{a^2b}\,Y.$$

116) $$\int \frac{dx}{X^2\sqrt{x^3}} = -\frac{2}{a^2X\sqrt{x}} \mp \frac{3b^2\sqrt{x}}{a^4X} \mp \frac{3b}{a^5}\,Y.$$

Другие интегралы, содержащие $\sqrt{x}$

117) $$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{a^4+x^2} = -\frac{1}{2a\sqrt{2}} \ln \frac{x + a\sqrt{2x} + a^2}{x - a\sqrt{2x} + a^2} + \frac{1}{a\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{a\sqrt{2x}}{a^2 + x}.$$

118) $$\int \frac{dx}{(a^4+x^2)\sqrt{x}} = \frac{1}{2a^3\sqrt{2}} \ln \frac{x+a\sqrt{2x}+a^2}{x-a\sqrt{2x}+a^2} + \frac{1}{a^3\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{a\sqrt{2x}}{a^2 - x}.$$

119) $$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{a^4 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a + \sqrt{x}}{a - \sqrt{x}} - \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{a},$$

120) $$\int \frac{dx}{(a^4 - x^2)\sqrt{x}} = \frac{1}{2a^3} \ln \frac{a + \sqrt{x}}{a - \sqrt{x}} + \frac{1}{a^3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{a}.$$

Интегралы, содержащие $\sqrt{ax+b}$

Обозначение: $X = ax + b$

121) $$\int \sqrt{X}\,dx = \frac{2}{3a}\sqrt{X^3}.$$

122) $$\int x\sqrt{X}\,dx = \frac{2(3ax - 2b)\sqrt{X^3}}{15a^2}$$

123) $$\int x^2\sqrt{X}\,dx = \frac{2(15a^2x^2 - 12abx + 8b^2)\sqrt{X^3}}{105a^3}.$$

124) $$\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{2\sqrt{X}}{a}$$

125) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{2(ax - 2b)}{3a^2}\sqrt{X}.$$

126) $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{2(3a^2x^2 - 4abx + 8b^2)\sqrt{X}}{15a^3}$$

127) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{b}} \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{X}{b}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln \frac{\sqrt{X} - \sqrt{b}}{\sqrt{X} + \sqrt{b}} & \text{для } b > 0, \\ \frac{2}{\sqrt{-b}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{X}{-b}} & \text{для } b < 0 \end{cases}$$

128) $$\int \frac{\sqrt{X}}{x}\,dx = 2\sqrt{X} + b\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} \quad \text{(см. № 127).}$$

129) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{bx} - \frac{a}{2b}\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} \quad \text{(см. № 127).}$$

130) $\int \frac{\sqrt{X}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (см. № 127). $\boxed{X = ax + b}$

131) $\int \frac{dx}{x^n\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{(n-1)bx^{n-1}} - \frac{(2n-3)\,a}{(2n-2)\,b}\int \frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{X}}$

132) $\int \sqrt{X^3}\,dx = \frac{2\sqrt{X^5}}{5a}$.

133) $\int x\sqrt{X^3}\,dx = \frac{2}{35a^2}(5\sqrt{X^7} - 7b\sqrt{X^5})$.

134) $\int x^2\sqrt{X^3}\,dx = \frac{2}{a^3}\left(\frac{\sqrt{X^9}}{9} - \frac{2b\sqrt{X^7}}{7} + \frac{b^2\sqrt{X^5}}{5}\right)$.

135) $\int \frac{\sqrt{X^3}}{x}\,dx = \frac{2\sqrt{X^3}}{3} + 2b\sqrt{X} + b^2\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (см. № 127).

136) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{2}{a^2}\left(\sqrt{X} + \frac{b}{\sqrt{X}}\right)$

137) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{2}{a^3}\left(\frac{\sqrt{X^3}}{3} - 2b\sqrt{X} - \frac{b^2}{\sqrt{X}}\right)$

138) $\int \frac{dx}{x\sqrt{X^3}} = \frac{2}{b\sqrt{X}} + \frac{1}{b}\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (см. № 127).

139) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{bx\sqrt{X}} - \frac{3a}{b^2\sqrt{X}} - \frac{3a}{2b^2}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ (см. № 127).

140) $\int X^{\pm n/2}\,dx = \frac{2X^{(2\pm n)/2}}{a\,(2\pm n)}$

141) $\int xX^{\pm n/2}\,dx = \frac{2}{a^2}\left(\frac{X^{(4\pm n)/2}}{4\pm n} - \frac{bX^{(2\pm n)/2}}{2\pm n}\right)$

142) $\int x^2X^{\pm n/2}\,dx = \frac{2}{a^3}\left(\frac{X^{(6\pm n)/2}}{6\pm n} - \frac{2bX^{(4\pm n)/2}}{4\pm n} + \frac{b^2X^{(2\pm n)/2}}{2\pm n}\right)$.

143) $\int \frac{X^{n/2}dx}{x} = \frac{2X^{n/2}}{n} + b\int \frac{X^{(n-2)/2}}{x}\,dx$.

144) $\int \frac{dx}{xX^{n/2}} = \frac{2}{(n-2)\,bX^{(n-2)/2}} + \frac{1}{b}\int \frac{dx}{xX^{(n-2)/2}}$.

145) $\int \frac{dx}{x^2X^{n/2}} = -\frac{1}{bxX^{(n-2)/2}} - \frac{na}{2b}\int \frac{dx}{xX^{n/2}}$.

Интегралы, содержащие $\sqrt{ax+b}$ *и* $\sqrt{fx+g}$

Обозначения: $X = ax + b$, $Y = fx + g$, $\Delta = bf - ag$

146) $$\int \frac{dx}{\sqrt{XY}} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{-af}} \operatorname{arctg} \sqrt{-\frac{fX}{aY}} \text{ для } af < 0, \\ \frac{2}{\sqrt{af}} \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{fX}{aY}} = \\ = \frac{1}{2\sqrt{af}} \ln (\sqrt{aY} + \sqrt{fX}) \text{ для } af > 0. \end{cases}$$

147) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{XY}} = \frac{\sqrt{XY}}{af} - \frac{ag+bf}{2af} \int \frac{dx}{\sqrt{XY}} \quad \text{(см. № 146).}$$

148) $$\int \frac{dx}{\sqrt{X}\sqrt{Y^3}} = -\frac{2\sqrt{X}}{\Delta\sqrt{Y}}.$$

149) $$\int \frac{dx}{Y\sqrt{X}} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{-\Delta f}} \operatorname{arctg} \frac{f\sqrt{X}}{\sqrt{-\Delta f}} & \text{для } \Delta f < 0, \\ \frac{1}{\sqrt{\Delta f}} \ln \frac{f\sqrt{X} - \sqrt{\Delta f}}{f\sqrt{X} + \sqrt{\Delta f}} & \text{для } \Delta f > 0. \end{cases}$$

150) $$\int \sqrt{XY}\,dx = \frac{\Delta + 2aY}{4af}\sqrt{XY} - \frac{\Delta^2}{8af} \int \frac{dx}{\sqrt{XY}} \quad \text{(см. № 146).}$$

151) $$\int \sqrt{\frac{Y}{X}}\,dx = \frac{1}{a}\sqrt{XY} - \frac{\Delta}{2a} \int \frac{dx}{\sqrt{XY}} \quad \text{(см. № 146).}$$

152) $$\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{Y} = \frac{2\sqrt{X}}{f} + \frac{\Delta}{f} \int \frac{dx}{Y\sqrt{X}} \quad \text{(см. № 149).}$$

153) $$\int \frac{Y^n dx}{\sqrt{X}} = \frac{2}{(2n+1)a} \left(\sqrt{X}\,Y^n - n\Delta \int \frac{Y^{n-1}\,dx}{\sqrt{X}} \right).$$

154) $$\int \frac{dx}{\sqrt{X}\,Y^n} = -\frac{1}{(n-1)\Delta} \left\{ \frac{\sqrt{X}}{Y^{n-1}} + \left(n - \frac{3}{2}\right) a \int \frac{dx}{\sqrt{X}\,Y^{n-1}} \right\}.$$

155) $$\int \sqrt{X}\,Y^n dx = \frac{1}{(2n+3)f} \left(2\sqrt{X}Y^{n+1} + \Delta \int \frac{Y^n dx}{\sqrt{X}} \right) \text{(см. № 153).}$$

156) $$\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{Y^n} = \frac{1}{(n-1)f} \left(-\frac{\sqrt{X}}{Y^{n-1}} + \frac{a}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{X}\,Y^{n-1}} \right).$$

Интегралы, содержащие $\sqrt{a^2 - x^2}$

Обозначение: $X = a^2 - x^2$

157) $\int \sqrt{X}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{X} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}\right)$.

158) $\int x\sqrt{X}\,dx = -\frac{1}{3}\sqrt{X^3}$.

159) $\int x^2\sqrt{X}\,dx = -\frac{x}{4}\sqrt{X^3} + \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{X} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}\right)$.

160) $\int x^3\sqrt{X}\,dx = \frac{\sqrt{X^5}}{5} - a^2\frac{\sqrt{X^3}}{3}$.

161) $\int \frac{\sqrt{X}}{x}\,dx = \sqrt{X} - a \ln \frac{a + \sqrt{X}}{x}$.

162) $\int \frac{\sqrt{X}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{X}}{x} - \arcsin \frac{x}{a}$.

163) $\int \frac{\sqrt{X}}{x^3}\,dx = -\frac{\sqrt{X}}{2x^2} + \frac{1}{2a} \ln \frac{a + \sqrt{X}}{x}$.

164) $\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \arcsin \frac{x}{a}$.

165) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = -\sqrt{X}$.

166) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} = -\frac{x}{2}\sqrt{X} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}$.

167) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X^3}}{3} - a^2\sqrt{X}$.

168) $\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = -\frac{1}{a} \ln \frac{a + \sqrt{X}}{x}$.

169) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{a^2 x}$.

170) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{2a^2x^2} - \frac{1}{2a^3} \ln \frac{a + \sqrt{X}}{x}$

171) $\int \sqrt{X^3}\,dx = \frac{1}{4}\left(x\sqrt{X^3} + \frac{3a^2x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^4}{2} \arcsin \frac{x}{a}\right)$.

172) $\int x\sqrt{X^3}\,dx = -\frac{1}{5}\sqrt{X^5}$.

173) $\int x^2\sqrt{X^3}\,dx = -\frac{x\sqrt{X^5}}{6} + \frac{a^2x\sqrt{X^3}}{24} + \frac{a^4x\sqrt{X}}{16} + \frac{a^6}{16} \arcsin \frac{x}{a}$.

174) $\int x^3 \sqrt{X^3}\, dx = \frac{\sqrt{X^7}}{7} - \frac{a^2 \sqrt{X^5}}{5}$.

175) $\int \frac{\sqrt{X^3}}{x}\, dx = \frac{\sqrt{X^3}}{3} + a^2 \sqrt{X} - a^3 \ln \frac{a + \sqrt{X}}{x}$.

176) $\int \frac{\sqrt{X^3}}{x^2}\, dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{x} - \frac{3}{2} x \sqrt{X} - \frac{3}{2} a^2 \arcsin \frac{x}{a}$.

177) $\int \frac{\sqrt{X^3}}{x^3}\, dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{2x^2} - \frac{3\sqrt{X}}{2} + \frac{3a}{2} \ln \frac{a + \sqrt{X}}{x}$.

178) $\int \frac{dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{X}}$.

179) $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{1}{\sqrt{X}}$.

180) $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{x}{\sqrt{X}} - \arcsin \frac{x}{a}$.

181) $\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{X^3}} = \sqrt{X} + \frac{a^2}{\sqrt{X}}$.

182) $\int \frac{dx}{x \sqrt{X^3}} = \frac{1}{a^2 \sqrt{X}} - \frac{1}{a^3} \ln \frac{a + \sqrt{X}}{x}$.

183) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{X^3}} = \frac{1}{a^4} \left(-\frac{\sqrt{X}}{x} + \frac{x}{\sqrt{X}} \right)$.

184) $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{X^3}} = -\frac{1}{2a^2 x^2 \sqrt{X}} + \frac{3}{2a^4 \sqrt{X}} - \frac{3}{2a^5} \ln \frac{a + \sqrt{X}}{x}$

Интегралы, содержащие $\sqrt{x^2 + a^2}$

Обозначение: $X = x^2 + a^2$

185) $\int \sqrt{X}\, dx = \frac{1}{2} \left(x \sqrt{X} + a^2 \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} \right) + C =$

$= \frac{1}{2} \left[x \sqrt{X} + a^2 \ln (x + \sqrt{X}) \right] + C_1$.

186) $\int x \sqrt{X}\, dx = \frac{1}{3} \sqrt{X^3}$.

187) $\int x^2 \sqrt{X}\, dx = \frac{x}{4} \sqrt{X^3} - \frac{a^2}{8} \left(x \sqrt{X} + a^2 \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} \right) + C =$

$= \frac{x}{4} \sqrt{X^3} - \frac{a^2}{8} \left[x \sqrt{X} + a^2 \ln (x + \sqrt{X}) \right] + C_1$.

188) $\int x^3 \sqrt{X}\, dx = \frac{\sqrt{X^5}}{5} - \frac{a^2 \sqrt{X^3}}{3}$

$X = x^2 + a^2$

189) $\int \frac{\sqrt{X}}{x}\,dx = \sqrt{X} - a \ln \frac{a + \sqrt{X}}{x}.$

190) $\int \frac{\sqrt{X}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \operatorname{Arsh}\frac{x}{a} + C =$

$= -\frac{\sqrt{X}}{x} + \ln(x + \sqrt{X}) + C_1.$

191) $\int \frac{\sqrt{X}}{x^3}\,dx = -\frac{\sqrt{X}}{2x^2} - \frac{1}{2a} \ln \frac{a + \sqrt{X}}{x}.$

192) $\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \operatorname{Arsh}\frac{x}{a} + C = \ln(x + \sqrt{X}) + C_1.$

193) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \sqrt{X}.$

194) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{x}{2}\sqrt{X} - \frac{a^2}{2}\operatorname{Arsh}\frac{x}{a} + C =$

$= \frac{x}{2}\sqrt{X} - \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{X}) + C_1.$

195) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X^3}}{3} - a^2\sqrt{X}.$

196) $\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = -\frac{1}{a} \ln \frac{a + \sqrt{X}}{x}.$

197) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{a^2 x}.$

198) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3} \ln \frac{a + \sqrt{X}}{x}.$

199) $\int \sqrt{X^3}\,dx = \frac{1}{4}\left(x\sqrt{X^3} + \frac{3a^2x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^4}{2}\operatorname{Arsh}\frac{x}{a}\right) + C =$

$= \frac{1}{4}\left(x\sqrt{X^3} + \frac{3a^2x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^4}{2}\ln(x + \sqrt{X})\right) + C_1.$

200) $\int x\sqrt{X^3}\,dx = \frac{1}{5}\sqrt{X^5}.$

201) $\int x^2\sqrt{X^3}\,dx = \frac{x\sqrt{X^5}}{6} - \frac{a^2x\sqrt{X^3}}{24} - \frac{a^4x\sqrt{X}}{16} - \frac{a^6}{16}\operatorname{Arsh}\frac{x}{a} + C =$

$= \frac{x\sqrt{X^5}}{6} - \frac{a^2x\sqrt{X^3}}{24} - \frac{a^4x\sqrt{X}}{16} - \frac{a^6}{16}\ln(x + \sqrt{X}) + C_1.$

202) $\int x^3\sqrt{X^3}\,dx = \frac{\sqrt{X^7}}{7} - \frac{a^2\sqrt{X^5}}{5}.$

203) $\int \frac{\sqrt{X^3}}{x}\,dx = \frac{\sqrt{X^3}}{3} + a^2\sqrt{X} - a^3 \ln \frac{a + \sqrt{X}}{x}.$

204) $$\int \frac{\sqrt{X^3}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{x} + \frac{3}{2}\,x\sqrt{X} + \frac{3}{2}\,a^2\,\operatorname{Arsh}\frac{x}{a} + C =$$
$$= -\frac{\sqrt{X^3}}{x} + \frac{3}{2}\,x\sqrt{X} + \frac{3}{2}\,a^2\ln(x+\sqrt{X}) + C_1.$$

205) $$\int \frac{\sqrt{X^3}}{x^3}\,dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{2x^2} + \frac{3}{2}\sqrt{X} - \frac{3}{2}\,a\ln\left(\frac{a+\sqrt{X}}{x}\right).$$

206) $$\int \frac{dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{X}}.$$

207) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{\sqrt{X}}.$$

208) $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{x}{\sqrt{X}} + \operatorname{Arsh}\frac{x}{a} + C =$$
$$= -\frac{x}{\sqrt{X}} + \ln(x+\sqrt{X}) + C_1.$$

209) $$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{X^3}} = \sqrt{X} + \frac{a^2}{\sqrt{X}}.$$

210) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{X^3}} = \frac{1}{a^2\sqrt{X}} - \frac{1}{a^3}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$$

211) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{a^4}\left(\frac{\sqrt{X}}{x} + \frac{x}{\sqrt{X}}\right).$$

212) $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{2a^2x^2\sqrt{X}} - \frac{3}{2a^4\sqrt{X}} + \frac{3}{2a^5}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$$

Интегралы, содержащие $\sqrt{x^2 - a^2}$

Обозначение: $X = x^2 - a^2$

213) $$\int \sqrt{X}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{X} - a^2\operatorname{Arsh}\frac{x}{a}\right) + C =$$
$$= \frac{1}{2}\left[x\sqrt{X} - a^2\ln(x+\sqrt{X})\right] + C_1.$$

214) $$\int x\sqrt{X}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{X^3}.$$

215) $$\int x^2\sqrt{X}\,dx = \frac{x}{4}\sqrt{X^3} + \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{X} - a^2\operatorname{Arch}\frac{x}{a}\right) + C =$$
$$= \frac{x}{4}\sqrt{X^3} + \frac{a^2}{8}\left[x\sqrt{X} - a^2\ln(x+\sqrt{X})\right] + C_1.$$

216) $$\int x^3\sqrt{X}\,dx = \frac{\sqrt{X^5}}{5} + \frac{a^2\sqrt{X^3}}{3}.$$

$X = x^2 - a^2$

217) $\int \frac{\sqrt{X}}{x}\,dx = \sqrt{X} - a \arccos\frac{a}{x}$

218) $\int \frac{\sqrt{X}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \operatorname{Arch}\frac{x}{a} + C =$

$= -\frac{\sqrt{X}}{x} + \ln(x + \sqrt{X}) + C_1.$

219) $\int \frac{\sqrt{X}}{x^3}\,dx = -\frac{\sqrt{X}}{2x^2} + \frac{1}{2a}\arccos\frac{a}{x}.$

220) $\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \operatorname{Arch}\frac{x}{a} + C = \ln(x + \sqrt{X}) + C_1.$

221) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \sqrt{X}.$

222) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{x}{2}\sqrt{X} + \frac{a^2}{2}\operatorname{Arch}\frac{x}{a} + C =$

$= \frac{x}{2}\sqrt{X} + \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{X}) + C_1.$

223) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X^3}}{3} + a^2\sqrt{X}.$

224) $\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x}.$

225) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{a^2 x}.$

226) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\arccos\frac{a}{x}.$

227) $\int \sqrt{X^3}\,dx = \frac{1}{4}\left(x\sqrt{X^3} - \frac{3a^2x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^4}{2}\operatorname{Arch}\frac{x}{a}\right) + C =$

$= \frac{1}{4}\left(x\sqrt{X^3} - \frac{3a^2x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^4}{2}\ln(x + \sqrt{X})\right) + C_1.$

228) $\int x\sqrt{X^3}\,dx = \frac{1}{5}\sqrt{X^5}.$

229) $\int x^2\sqrt{X^3}\,dx = \frac{x\sqrt{X^5}}{6} + \frac{a^2x\sqrt{X^3}}{24} - \frac{a^4x\sqrt{X}}{16} + \frac{a^6}{16}\operatorname{Arch}\frac{x}{a} + C =$

$= \frac{x\sqrt{X^5}}{6} + \frac{a^2x\sqrt{X^3}}{24} - \frac{a^4x\sqrt{X}}{16} + \frac{a^6}{16}\ln(x + \sqrt{X}) + C_1.$

230) $\int x^3\sqrt{X^3}\,dx = \frac{\sqrt{X^7}}{7} + \frac{a^2\sqrt{X^5}}{5}.$

231) $\int \frac{\sqrt{X^3}}{x}\,dx = \frac{\sqrt{X^3}}{3} - a^2\sqrt{X} + a^3 \arccos\frac{a}{x}$.

232) $\int \frac{\sqrt{X^3}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{2} + \frac{3}{2}x\sqrt{X} - \frac{3}{2}a^2 \operatorname{Arch}\frac{x}{a} + C =$

$= -\frac{\sqrt{X^3}}{2} + \frac{3}{2}x\sqrt{X} - \frac{3}{2}a^2 \ln(x + \sqrt{X}) + C_1$.

233) $\int \frac{\sqrt{X^3}}{x^3}\,dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{2x^2} + \frac{3\sqrt{X}}{2} - \frac{3}{2}a \arccos\frac{a}{x}$.

234) $\int \frac{dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{X}}$.

235) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{\sqrt{X}}$.

236) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{x}{\sqrt{X}} + \operatorname{Arch}\frac{x}{a} + C = -\frac{x}{\sqrt{X}} + \ln(x + \sqrt{X}) + C_1$.

237) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{X^3}} = \sqrt{X} - \frac{a^2}{\sqrt{X}}$.

238) $\int \frac{dx}{x\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{a^2\sqrt{X}} - \frac{1}{a^3}\arccos\frac{a}{x}$.

239) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{a^4}\left(\frac{\sqrt{X}}{x} + \frac{x}{\sqrt{X}}\right)$.

240) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X^3}} = \frac{1}{2a^2x^2\sqrt{X}} - \frac{3}{2a^4\sqrt{X}} - \frac{3}{2a^5}\arccos\frac{a}{x}$.

Интегралы, содержащие $\sqrt{ax^2 + bx + c}$

Обозначения: $X = ax^2 + bx + c$, $\Delta = 4ac - b^2$, $k = \frac{4a}{\Delta}$

241) $\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}}\ln(2\sqrt{aX} + 2ax + b) + C & \text{для } a > 0, \\ \frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{Arsh}\frac{2ax + b}{\sqrt{\Delta}} + C_1 & \text{для } a > 0,\ \Delta > 0, \\ \frac{1}{\sqrt{a}}\ln(2ax + b) & \text{для } a > 0,\ \Delta = 0, \\ -\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{2ax + b}{\sqrt{-\Delta}} & \text{для } a < 0,\ \Delta < 0. \end{cases}$

242) $\int \frac{dx}{X\sqrt{X}} = \frac{2(2ax + b)}{\Delta\sqrt{X}}$,

243) $\int \frac{dx}{X^2\sqrt{X}} = \frac{2(2ax + b)}{3\Delta\sqrt{X}}\left(\frac{1}{X} + 2k\right)$.

$$X = ax^2 + bx + c, \quad \Delta = 4ac - b^2, \quad k = \frac{4a}{\Delta}$$

244) $$\int \frac{dx}{X^{(2n+1)/2}} = \frac{2(2ax+b)}{(2n-1)\Delta X^{(2n-1)/2}} + \frac{2k(n-1)}{2n-1} \int \frac{dx}{X^{(2n-1)/2}}$$

245) $$\int \sqrt{X}\, dx = \frac{(2ax+b)\sqrt{X}}{4a} + \frac{1}{2k} \int \frac{dx}{\sqrt{X}}$$ (см. № 241).

246) $$\int X\sqrt{X}\, dx = \frac{(2ax+b)\sqrt{X}}{8a}\left(X + \frac{3}{2k}\right) + \frac{3}{8k^2} \int \frac{dx}{\sqrt{X}}$$ (см. № 241).

247) $$\int X^2\sqrt{X}\, dx = \frac{(2ax+b)\sqrt{X}}{12a}\left(X^2 + \frac{5X}{4k} + \frac{15}{8k^2}\right) + \frac{5}{16k^3} \int \frac{dx}{\sqrt{X}}$$
(см. № 241).

248) $$\int X^{(2n+1)/2}\, dx = \frac{(2ax+b)X^{(2n+1)/2}}{4a(n+1)} + \frac{2n+1}{2k(n+1)} \int X^{(2n-1)/2}\, dx.$$

249) $$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{a} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{\sqrt{X}}$$ (см. № 241).

250) $$\int \frac{x\, dx}{X\sqrt{X}} = -\frac{2(bx+2c)}{\Delta\sqrt{X}}.$$

251) $$\int \frac{x\, dx}{X^{(2n+1)/2}} = -\frac{1}{(2n-1)aX^{(2n-1)/2}} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{X^{(2n+1)/2}}$$
(см. № 244).

252) $$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{X}} = \left(\frac{x}{2a} - \frac{3b}{4a^2}\right)\sqrt{X} + \frac{3b^2 - 4ac}{8a^2} \int \frac{dx}{\sqrt{X}}$$ (см. № 241).

253) $$\int \frac{x^2\, dx}{X\sqrt{X}} = \frac{(2b^2 - 4ac)x + 2bc}{a\Delta\sqrt{X}} + \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{X}}$$ (см. № 241).

254) $$\int x\sqrt{X}\, dx = \frac{X\sqrt{X}}{3a} - \frac{b(2ax+b)}{8a^2}\sqrt{X} - \frac{b}{4ak} \int \frac{dx}{\sqrt{X}}$$ (см. № 241).

255) $$\int xX\sqrt{X}\, dx = \frac{X^2\sqrt{X}}{5a} - \frac{b}{2a} \int X\sqrt{X}\, dx$$ (см. № 246).

256) $$\int xX^{(2n+1)/2}\, dx = \frac{X^{(2n+3)/2}}{(2n+3)a} - \frac{b}{2a} \int X^{(2n+1)/2}\, dx$$
(см. № 248).

257) $$\int x^2\sqrt{X}\, dx = \left(x - \frac{5b}{6a}\right)\frac{X\sqrt{X}}{4a} + \frac{5b^2 - 4ac}{16a^2} \int \sqrt{X}\, dx$$ (см. № 245).

258) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{c}} \ln\left(\frac{2\sqrt{cX}}{x} + \frac{2c}{x} + b\right) + C & \text{для } c > 0, \\ -\frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{Arsh} \frac{bx+2c}{x\sqrt{\Delta}} + C_1 & \text{для } c > 0,\ \Delta > 0, \\ -\frac{1}{\sqrt{c}} \ln \frac{bx+2c}{x} & \text{для } c > 0,\ \Delta = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{bx+2c}{x\sqrt{-\Delta}} & \text{для } c < 0,\ \Delta < 0, \end{cases}$$

259) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{cx} - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$$ (см. № 258).

260) $$\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{x} = \sqrt{X} + \frac{b}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{X}} + c\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$$ (см. №№ 241 и 258).

261) $$\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{X}}{x} + a\int \frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{b}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$$ (см. №№ 241 и 258).

262) $$\int \frac{X^{(2n+1)/2}}{x}\,dx = \frac{X^{(2n+1)/2}}{2n+1} + \frac{b}{2}\int X^{(2n-1)/2}\,dx + c\int \frac{X^{(2n-1)/2}}{x}\,dx$$ (см. №№ 248 и 260).

263) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx}} = -\frac{2}{bx}\sqrt{ax^2+bx}.$$

264) $$\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \arcsin\frac{x-a}{a}.$$

265) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = -\sqrt{2ax-x^2} + a\arcsin\frac{x-a}{a}.$$

266) $$\int \sqrt{2ax-x^2}\,dx = \frac{x-a}{2}\sqrt{2ax-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x-a}{a}.$$

267) $$\int \frac{dx}{(ax^2+b)\sqrt{fx^2+g}} = \frac{1}{\sqrt{b}\sqrt{ag-bf}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{ag-bf}}{\sqrt{b}\sqrt{fx^2+g}}, \quad (ag-bf>0).$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{b}\sqrt{bf-ag}}\ln\frac{\sqrt{b}\sqrt{fx^2+g}+x\sqrt{bf-ag}}{\sqrt{b}\sqrt{fx^2+g}-x\sqrt{bf-ag}}, \quad (ag-bf<0).$$

Интегралы, содержащие другие иррациональные выражения

268) $$\int \sqrt[n]{ax+b}\,dx = \frac{n(ax+b)}{(n+1)a}\sqrt[n]{ax+b}.$$

269) $$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{ax+b}} = \frac{n(ax+b)}{(n-1)a}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{ax+b}}.$$

270) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n+a^2}} = -\frac{2}{na}\ln\frac{a+\sqrt{x^n+a^2}}{\sqrt{x^n}}.$$

271) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n-a^2}} = \frac{2}{na}\arccos\frac{a}{\sqrt{x^n}}.$$

272) $$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{a^3-x^3}} = \frac{2}{3}\arcsin\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^3}.$$

Рекуррентные формулы для интеграла от биномного дифференциала

273) $$\int x^m(ax^n+b)^p\,dx =$$

$$= \frac{1}{m+np+1}\left[x^{m+1}(ax^n+b)^p + npb\int x^m(ax^n+b)^{p-1}\,dx\right],$$

$$= \frac{1}{bn(p+1)}\left[-x^{m+1}(ax^n+b)^{p+1} + (m+n+np+1)\int x^m(ax^n+b)^{p+1}\,dx\right],$$

$$= \frac{1}{(m+1)b}\left[x^{m+1}(ax^n+b)^{p+1} - a(m+n+np+1)\int x^{m+n}(ax^n+b)^p\,dx\right],$$

$$= \frac{1}{a(m+np+1)}\left[x^{m-n+1}(ax^n+b)^{p+1} - (m-n+1)b\int x^{m-n}(ax^n+b)^p\,dx\right].$$

Интегралы от тригонометрических функций*

Интегралы, содержащие синус

274) $$\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax,$$

275) $$\int \sin^2 ax\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax.$$

276) $$\int \sin^3 ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + \frac{1}{3a}\cos^3 ax.$$

277) $$\int \sin^4 ax\,dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax + \frac{1}{32a}\sin 4ax,$$

278) $$\int \sin^n ax\,dx = -\frac{\sin^{n-1}ax\cos ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}ax\,dx$$
(n целое, >0).

279) $$\int x\sin ax\,dx = \frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x\cos ax}{a}.$$

* Интегралы от функций, содержащих $\sin x$, $\cos x$ в сочетании с гиперболическими функциями и e^{ax}, см. стр. 378–379.

280) $\int x^2 \sin ax\,dx = \frac{2x}{a^2}\sin ax - \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\cos ax.$

281) $\int x^3 \sin ax\,dx = \left(\frac{3x^2}{a^2} - \frac{6}{a^4}\right)\sin ax - \left(\frac{x^3}{a} - \frac{6x}{a^3}\right)\cos ax.$

282) $\int x^n \sin ax\,dx = -\frac{x^n}{a}\cos ax + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax\,dx \qquad (n > 0).$

283) $\int \frac{\sin ax}{x}\,dx = ax - \frac{(ax)^3}{3\cdot 3!} + \frac{(ax)^5}{5\cdot 5!} - \frac{(ax)^7}{7\cdot 7!} + \ldots$*

284) $\int \frac{\sin ax}{x^2}\,dx = -\frac{\sin ax}{x} + a\int \frac{\cos ax\,dx}{x}$ (см. № 322).

285) $\int \frac{\sin ax}{x^n}\,dx = -\frac{1}{n-1}\frac{\sin ax}{x^{n-1}} + \frac{a}{n-1}\int \frac{\cos ax}{x^{n-1}}dx$ (см. № 324).

286) $\int \frac{dx}{\sin ax} = \int \csc ax\,dx = \frac{1}{a}\ln \operatorname{tg}\frac{ax}{2} = \frac{1}{a}\ln(\csc ax - \operatorname{ctg} ax).$

287) $\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{ctg} ax.$

288) $\int \frac{dx}{\sin^3 ax} = -\frac{\cos ax}{2a\sin^2 ax} + \frac{1}{2a}\ln \operatorname{tg}\frac{ax}{2}.$

289) $\int \frac{dx}{\sin^n ax} = -\frac{1}{a(n-1)}\frac{\cos ax}{\sin^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax} \quad (n > 1)$

290) $\int \frac{x\,dx}{\sin ax} = \frac{1}{a^2}\left(ax + \frac{(ax)^3}{3\cdot 3!} + \frac{7(ax)^5}{3\cdot 5\cdot 5!} + \frac{31(ax)^7}{3\cdot 7\cdot 7!} + \right.$
$\left. + \frac{127(ax)^9}{3\cdot 5\cdot 9!} + \ldots + \frac{2(2^{2n-1}-1)}{(2n+1)!}B_n (ax)^{2n+1} + \ldots\right)$**.

291) $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 ax} = -\frac{x}{a}\operatorname{ctg} ax + \frac{1}{a^2}\ln \sin ax.$

292) $\int \frac{x\,dx}{\sin^n ax} = -\frac{x\cos ax}{(n-1)a\sin^{n-1} ax} - \frac{1}{(n-1)(n-2)a^2\sin^{n-2} ax} +$
$+ \frac{n-2}{n-1}\int \frac{x\,dx}{\sin^{n-2} ax} \quad (n > 2).$

293) $\int \frac{dx}{1+\sin ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right).$

---

* Определенный интеграл $\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ называется *интегральным синусом* и обозначается Si (x): $\operatorname{Si} x = x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \ldots$

** B_n — числа Бернулли (см. стр. 297)

294) $\int \frac{dx}{1-\sin ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax}{2}\right)$.

295) $\int \frac{x\,dx}{1+\sin ax} = -\frac{x}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right)+\frac{2}{a^2}\ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right)$.

296) $\int \frac{x\,dx}{1-\sin ax} = \frac{x}{a}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right)+\frac{2}{a^2}\ln\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right)$.

297) $\int \frac{\sin ax\,dx}{1\pm\sin ax} = \mp x+\frac{1}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\mp\frac{ax}{2}\right)$.

298) $\int \frac{dx}{\sin ax\,(1\pm\sin ax)} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\mp\frac{ax}{2}\right)+\frac{1}{a}\ln\operatorname{tg}\frac{ax}{2}$.

299) $\int \frac{dx}{(1+\sin ax)^2} = -\frac{1}{2a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right)-\frac{1}{6a}\operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right)$.

300) $\int \frac{dx}{(1-\sin ax)^2} = \frac{1}{2a}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right)+\frac{1}{6a}\operatorname{ctg}^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right)$.

301) $\int \frac{\sin ax\,dx}{(1+\sin ax)^2} = -\frac{1}{2a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right)+\frac{1}{6a}\operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right)$.

302) $\int \frac{\sin ax\,dx}{(1-\sin ax)^2} = -\frac{1}{2a}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right)+\frac{1}{6a}\operatorname{ctg}^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right)$.

303) $\int \frac{dx}{1+\sin^2 ax} = \frac{1}{2\sqrt{2a}}\operatorname{arcsin}\left(\frac{3\sin^2 ax-1}{\sin^2 ax+1}\right)$.

304) $\int \frac{dx}{1-\sin^2 ax} = \int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tg} ax$.

305) $\int \sin ax \sin bx\,dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)}$

($|a|\neq|b|$; при $|a|=|b|$ см. № 275).

306) $\int \frac{dx}{b+c\sin ax} =$

$$= \frac{2}{a\sqrt{b^2-c^2}}\operatorname{arctg}\frac{b\operatorname{tg} ax/2+c}{\sqrt{b^2-c^2}} \quad (\text{для } b^2>c^2),$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{c^2-b^2}}\ln\frac{b\operatorname{tg} ax/2+c-\sqrt{c^2-b^2}}{b\operatorname{tg} ax/2+c+\sqrt{c^2-b^2}} \quad (\text{для } b^2<c^2).$$

307) $\int \frac{\sin ax\,dx}{b+c\sin ax} = \frac{x}{c}-\frac{b}{c}\int\frac{dx}{b+c\sin ax}$ (см. № 306).

308) $\int \frac{dx}{\sin ax\,(b+c\sin ax)} = \frac{1}{ab}\ln\operatorname{tg}\frac{ax}{2}-\frac{c}{b}\int\frac{dx}{b+c\sin ax}$

(см. № 306).

309) $\int \frac{dx}{(b+c\sin ax)^2} = \frac{c\cos ax}{a(b^2-c^2)(b+c\sin ax)} +$

$$+\frac{b}{b^2-c^2}\int\frac{dx}{b+c\sin ax} \quad (\text{см. № 306}).$$

810) $$\int \frac{\sin ax\,dx}{(b+c\sin ax)^2} = \frac{b\cos ax}{a(c^2-b^2)(b+c\sin ax)} + \frac{c}{c^2-b^2}\int \frac{dx}{b+c\sin ax}$$ (см. № 306).

811) $$\int \frac{dx}{b^2+c^2\sin^2 ax} = \frac{1}{ab\sqrt{b^2+c^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{b^2+c^2}\operatorname{tg} ax}{b} \qquad (b>0).$$

812) $$\int \frac{dx}{b^2-c^2\sin^2 ax} = \frac{1}{ab\sqrt{b^2-c^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{b^2-c^2}\operatorname{tg} ax}{b} \quad (b^2>c^2,\ b>0),$$

$$= \frac{1}{2ab\sqrt{c^2-b^2}}\ln\frac{\sqrt{c^2-b^2}\operatorname{tg} ax + b}{\sqrt{c^2-b^2}\operatorname{tg} ax - b} \quad (c^2>b^2,\ b>0).$$

Интегралы, содержащие косинус

813) $$\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax.$$

814) $$\int \cos^2 ax\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\sin 2ax.$$

815) $$\int \cos^3 ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax - \frac{1}{3a}\sin^3 ax.$$

816) $$\int \cos^4 ax\,dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4a}\sin 2ax + \frac{1}{32a}\sin 4ax.$$

817) $$\int \cos^n ax\,dx = \frac{\cos^{n-1} ax\sin ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} ax\,dx.$$

818) $$\int x\cos ax\,dx = \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x\sin ax}{a}.$$

819) $$\int x^2\cos ax\,dx = \frac{2x}{a^2}\cos ax + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\sin ax.$$

820) $$\int x^3\cos ax\,dx = \left(\frac{3x^2}{a^2} - \frac{6}{a^4}\right)\cos ax + \left(\frac{x^3}{a} - \frac{6x}{a^3}\right)\sin ax.$$

821) $$\int x^n\cos ax\,dx = \frac{x^n\sin ax}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\sin ax\,dx.$$

822) $$\int \frac{\cos ax}{x}\,dx = \ln(ax) - \frac{(ax)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(ax)^4}{4\cdot 4!} - \frac{(ax)^6}{6\cdot 6!} + \ldots\ *.$$

---

* Определенный интеграл $-\int_x^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx$ называется *интегральным косинусом* и обозначается Ci x:

$$\operatorname{Ci} x = C - \ln x - \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^4}{4\cdot 4!} - \frac{x^6}{6\cdot 6!} + \ldots,$$

где C — эйлерова постоянная (см. стр. 278).

323) $\int \frac{\cos ax}{x^2}\,dx = -\frac{\cos ax}{x} - a\int \frac{\sin ax\,dx}{x}$ (см. № 283).

324) $\int \frac{\cos ax}{x^n}\,dx = -\frac{\cos ax}{(n-1)\,x^{n-1}} - \frac{a}{n-1}\int \frac{\sin ax\,dx}{x^{n-1}}$ $(n \neq 1)$ (см. № 285).

325) $\int \frac{dx}{\cos ax} = \int \sec ax\,dx =$

$$= \frac{1}{a}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{a}\ln(\sec ax + \operatorname{tg} ax).$$

326) $\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tg} ax.$

327) $\int \frac{dx}{\cos^3 ax} = \frac{\sin ax}{2a\cos^2 ax} + \frac{1}{2a}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right).$

328) $\int \frac{dx}{\cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1)}\frac{\sin ax}{\cos^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} ax}$ $(n > 1).$

329) $\int \frac{x\,dx}{\cos ax} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{(ax)^2}{2} + \frac{(ax)^4}{4\cdot 2!} + \frac{5\,(ax)^6}{6\cdot 4!} + \frac{61\,(ax)^8}{8\cdot 6!} + \frac{1385\,(ax)^{10}}{10\cdot 8!} + \ldots\right.$

$$\ldots + \left.\frac{E_n\,(ax)^{2n+2}}{(2n+2)\,(2n)!} + \ldots\right)^*.$$

330) $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 ax} = \frac{x}{a}\operatorname{tg} ax + \frac{1}{a^2}\ln\cos ax.$

331) $\int \frac{x\,dx}{\cos^n ax} = \frac{x\sin ax}{(n-1)\,a\cos^{n-1} ax} - \frac{1}{(n-1)(n-2)\,a^2\cos^{n-2} ax} +$

$$+ \frac{n-2}{n-1}\int \frac{x\,dx}{\cos^{n-2} ax}$$ $(n > 2).$

332) $\int \frac{dx}{1+\cos ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2}.$

333) $\int \frac{dx}{1-\cos ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2}.$

334) $\int \frac{x\,dx}{1+\cos ax} = \frac{x}{a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2}\ln\cos\frac{ax}{2}.$

335) $\int \frac{x\,dx}{1-\cos ax} = -\frac{x}{a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2}\ln\sin\frac{ax}{2}.$

336) $\int \frac{\cos ax\,dx}{1+\cos ax} = x - \frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2}.$

337) $\int \frac{\cos ax\,dx}{1-\cos ax} = -x - \frac{1}{a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2}.$

---

* E_n – числа Эйлера (см. стр. 297).

338) $$\int \frac{dx}{\cos ax\,(1+\cos ax)} = \frac{1}{a}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax}{2}\right) - \frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2}$$

339) $$\int \frac{dx}{\cos ax\,(1-\cos ax)} = \frac{1}{a}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax}{2}\right) - \frac{1}{a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2}.$$

340) $$\int \frac{dx}{(1+\cos ax)^2} = \frac{1}{2a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2} + \frac{1}{6a}\operatorname{tg}^3\frac{ax}{2},$$

341) $$\int \frac{dx}{(1-\cos ax)^2} = -\frac{1}{2a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2} - \frac{1}{6a}\operatorname{ctg}^3\frac{ax}{2}.$$

342) $$\int \frac{\cos ax\,dx}{(1+\cos ax)^2} = \frac{1}{2a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2} - \frac{1}{6a}\operatorname{tg}^3\frac{ax}{2}.$$

343) $$\int \frac{\cos ax\,dx}{(1-\cos ax)^2} = \frac{1}{2a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2} - \frac{1}{6a}\operatorname{ctg}^3\frac{ax}{2},$$

344) $$\int \frac{dx}{1+\cos^2 ax} = \frac{1}{2\sqrt{2}\,a}\arcsin\left(\frac{1-3\cos^2 ax}{1+\cos^2 ax}\right).$$

345) $$\int \frac{dx}{1-\cos^2 ax} = \int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{ctg} ax.$$

346) $$\int \cos ax \cos bx\,dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)}$$

$(|a| \neq |b|$; при $|a| = |b|$ см. № 314).

347) $$\int \frac{dx}{b+c\cos ax} = \frac{2}{a\sqrt{b^2-c^2}}\operatorname{arctg}\frac{(b-c)\operatorname{tg}\frac{ax}{2}}{\sqrt{b^2-c^2}}$$ (для $b^2 > c^2$),

$$= \frac{1}{a\sqrt{c^2-b^2}}\ln\frac{(c-b)\operatorname{tg}\frac{ax}{2} + \sqrt{c^2-b^2}}{(c-b)\operatorname{tg}\frac{ax}{2} - \sqrt{c^2-b^2}}$$ для $b^2 < c^2$)

348) $$\int \frac{\cos ax\,dx}{b+c\cos ax} = \frac{x}{c} - \frac{b}{c}\int \frac{dx}{b+c\cos ax}$$ (см. № 347).

349) $$\int \frac{dx}{\cos ax\,(b+c\cos ax)} = \frac{1}{ab}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{ax}{2}+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{a}{b}\int \frac{dx}{b+c\cos ax}$$ (см. № 347)

350) $$\int \frac{dx}{(b+c\cos ax)^2} = \frac{c\sin ax}{a(c^2-b^2)(b+c\cos ax)} - \frac{b}{c^2-b^2}\int \frac{dx}{b+c\cos ax}$$ (см. № 347).

351) $$\int \frac{\cos ax\,dx}{(b+c\cos ax)^2} = \frac{b\sin ax}{a(b^2-c^2)(b+c\cos ax)} - \frac{c}{b^2-c^2}\int \frac{dx}{b+c\cos ax}$$ (см. № 347)

352) $$\int \frac{ax}{b^2+c^2\cos^2 ax} = \frac{1}{ab\sqrt{b^2+c^2}}\operatorname{arctg}\frac{b\operatorname{tg} ax}{\sqrt{b^2+c^2}}.$$ $(b > 0)$

353) $$\int \frac{dx}{b^2-c^2\cos^2 ax} = \frac{1}{ab\sqrt{b^2-c^2}}\operatorname{arctg}\frac{b\operatorname{tg} ax}{\sqrt{b^2-c^2}} \quad (b^2>c^2,\ b>0),$$

$$= \frac{1}{2ab\sqrt{c^2-b^2}}\ln\frac{b\operatorname{tg} ax-\sqrt{c^2-b^2}}{b\operatorname{tg} ax+\sqrt{c^2-b^2}} \quad (c^2>b^2,\ b>0).$$

Интегралы, содержащие синус и косинус

354) $$\int \sin ax\cos ax\,dx = \frac{1}{2a}\sin^2 ax.$$

355) $$\int \sin^2 ax\cos^2 ax\,dx = \frac{x}{8}-\frac{\sin 4ax}{32a}.$$

356) $$\int \sin^n ax\cos ax\,dx = \frac{1}{a(n+1)}\sin^{n+1} ax \quad (n\neq -1).$$

357) $$\int \sin ax\cos^n ax\,dx = -\frac{1}{a(n+1)}\cos^{n+1} ax \quad (n\neq -1).$$

358) $$\int \sin^n ax\cos^m ax\,dx =$$

$$= -\frac{\sin^{n-1} ax\cos^{m+1} ax}{a(n+m)}+\frac{n-1}{n+m}\int \sin^{n-2} ax\cos^m ax\,dx$$

(понижение степени n; m и $n>0$),

$$= \frac{\sin^{n+1} ax\cos^{m-1} ax}{a(n+m)}+\frac{m-1}{n+m}\int \sin^n ax\cos^{m-2} ax\,dx.$$

(понижение степени m; m и $n>0$).

359) $$\int \frac{dx}{\sin ax\cos ax} = \frac{1}{a}\ln\operatorname{tg} ax.$$

360) $$\int \frac{dx}{\sin^2 ax\cos ax} = \frac{1}{a}\left[\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax}{2}\right)-\frac{1}{\sin ax}\right].$$

361) $$\int \frac{dx}{\sin ax\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\left(\ln\operatorname{tg}\frac{ax}{2}+\frac{1}{\cos ax}\right).$$

362) $$\int \frac{dx}{\sin^3 ax\cos ax} = \frac{1}{a}\left(\ln\operatorname{tg} ax-\frac{1}{2\sin^2 ax}\right).$$

363) $$\int \frac{dx}{\sin ax\cos^3 ax} = \frac{1}{a}\left(\ln\operatorname{tg} ax+\frac{1}{2\cos^2 ax}\right).$$

364) $$\int \frac{dx}{\sin^2 ax\cos^2 ax} = -\frac{2}{a}\operatorname{ctg} 2ax.$$

365) $$\int \frac{dx}{\sin^2 ax\cos^3 ax} = \frac{1}{a}\left|\frac{\sin ax}{2\cos^2 ax}-\frac{1}{\sin ax}+\frac{3}{2}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax}{2}\right)\right]$$

366) $$\int \frac{dx}{\sin^3 ax \cos^2 ax} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{\cos ax} - \frac{\cos ax}{2\sin^2 ax} + \frac{3}{2}\ln \operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right).$$

367) $$\int \frac{dx}{\sin ax \cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1)\cos^{n-1} ax} + \int \frac{dx}{\sin ax \cos^{n-2} ax} \quad (n \neq 1)$$

(см. №№ 361, 363).

368) $$\int \frac{dx}{\sin^n ax \cos ax} = -\frac{1}{a(n-1)\sin^{n-1} ax} + \int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax \cos ax} \quad (n \neq 1)$$

(см. №№ 360, 362).

369) $$\int \frac{dx}{\sin^n ax \cos^m ax} =$$

$$= -\frac{1}{a(n-1)} \cdot \frac{1}{\sin^{n-1} ax \cos^{m-1} ax} + \frac{n+m-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax \cos^m ax}$$

(понижение степени n; $m > 0$, $n > 1$),

$$= \frac{1}{a(m-1)} \cdot \frac{1}{\sin^{n-1} ax \cos^{m-1} ax} + \frac{n+m-2}{m-1} \int \frac{dx}{\sin^n ax \cos^{m-2} ax}$$

(понижение степени m; $n > 0$, $m > 1$).

370) $$\int \frac{\sin ax\, dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a\cos ax} = \frac{1}{a}\sec ax.$$

371) $$\int \frac{\sin ax\, dx}{\cos^3 ax} = \frac{1}{2a\cos^2 ax} + C = \frac{1}{2a}\operatorname{tg}^2 ax + C_1.$$

372) $$\int \frac{\sin ax\, dx}{\cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1)\cos^{n-1} ax}.$$

373) $$\int \frac{\sin^2 ax\, dx}{\cos ax} = -\frac{1}{a}\sin ax + \frac{1}{a}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right).$$

374) $$\int \frac{\sin^2 ax\, dx}{\cos^3 ax} = \frac{1}{a}\left[\frac{\sin ax}{2\cos^2 ax} - \frac{1}{2}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)\right].$$

375) $$\int \frac{\sin^2 ax\, dx}{\cos^n ax} = \frac{\sin ax}{a(n-1)\cos^{n-1} ax} - \frac{1}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} ax}$$

$(n \neq 1)$ (см. №№ 325, 326, 328).

376) $$\int \frac{\sin^3 ax\, dx}{\cos ax} = -\frac{1}{a}\left(\frac{\sin^2 ax}{2} + \ln\cos ax\right).$$

377) $$\int \frac{\sin^3 ax\, dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\left(\cos ax + \frac{1}{\cos ax}\right).$$

378) $$\int \frac{\sin^3 ax\, dx}{\cos^n ax} = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{(n-1)\cos^{n-1} ax} - \frac{1}{(n-3)\cos^{n-3} ax}\right]$$

$(n \neq 1,\ n \neq 3)$.

379) $$\int \frac{\sin^n ax}{\cos ax}\, dx = -\frac{\sin^{n-1} ax}{a(n-1)} + \int \frac{\sin^{n-2} ax\, dx}{\cos ax} \quad (n \neq 1).$$

380) $$\int \frac{\sin^n ax}{\cos^m ax}\,dx =$$

$$= \frac{\sin^{n+1} ax}{a(m-1)\cos^{m-1} ax} - \frac{n-m+2}{m-1}\int \frac{\sin^n ax}{\cos^{m-2} ax}\,dx \qquad (m \neq 1),$$

$$= -\frac{\sin^{n-1} ax}{a(n-m)\cos^{m-1} ax} + \frac{n-1}{n-m}\int \frac{\sin^{n-2} ax\,dx}{\cos^m ax} \qquad (m \neq n),$$

$$= \frac{\sin^{n-1} ax}{a(m-1)\cos^{m-1} ax} - \frac{n-1}{m-1}\int \frac{\sin^{n-1} ax\,dx}{\cos^{m-2} ax} \qquad (m \neq 1).$$

381) $$\int \frac{\cos ax\,dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a\sin ax} = -\frac{1}{a}\csc ax.$$

382) $$\int \frac{\cos ax\,dx}{\sin^3 ax} = -\frac{1}{2a\sin^2 ax} + C = -\frac{\operatorname{ctg}^2 ax}{2a} + C_1.$$

383) $$\int \frac{\cos ax\,dx}{\sin^n ax} = -\frac{1}{a(n-1)\sin^{n-1} ax}.$$

384) $$\int \frac{\cos^2 ax\,dx}{\sin ax} = \frac{1}{a}\left(\cos ax + \ln \operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right).$$

385) $$\int \frac{\cos^2 ax\,dx}{\sin^3 ax} = -\frac{1}{2a}\left(\frac{\cos ax}{\sin^2 ax} - \ln \operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right).$$

386) $$\int \frac{\cos^2 ax\,dx}{\sin^n ax} = -\frac{1}{(n-1)}\left(\frac{\cos ax}{a\sin^{n-1} ax} + \int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax}\right) \qquad (n \neq 1)$$

(см. № 289).

387) $$\int \frac{\cos^3 ax\,dx}{\sin ax} = \frac{1}{a}\left(\frac{\cos^2 ax}{2} + \ln \sin ax\right).$$

388) $$\int \frac{\cos^3 ax\,dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a}\left(\sin ax + \frac{1}{\sin ax}\right).$$

389) $$\int \frac{\cos^3 ax\,dx}{\sin^n ax} = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{(n-3)\sin^{n-3} ax} - \frac{1}{(n-1)\sin^{n-1} ax}\right] \quad (n \neq 1,\ n \neq 3).$$

390) $$\int \frac{\cos^n ax}{\sin ax}\,dx = \frac{\cos^{n-1} ax}{a(n-1)} + \int \frac{\cos^{n-2} ax\,dx}{\sin ax} \qquad (n \neq 1).$$

391) $$\int \frac{\cos^n ax\,dx}{\sin^m ax} =$$

$$= -\frac{\cos^{n+1} ax}{a(m-1)\sin^{m-1} ax} - \frac{n-m+2}{m-1}\int \frac{\cos^n ax\,dx}{\sin^{m-2} ax} \qquad (m \neq 1),$$

$$= \frac{\cos^{n-1} ax}{a(n-m)\sin^{m-1} ax} + \frac{n-1}{n-m}\int \frac{\cos^{n-2} ax\,dx}{\sin^m ax} \qquad (m \neq n),$$

$$= -\frac{\cos^{n-1} ax}{a(m-1)\sin^{m-1} ax} - \frac{n-1}{m-1}\int \frac{\cos^{n-2} ax\,dx}{\sin^{m-2} ax} \qquad (m \neq 1),$$

392) $$\int \frac{dx}{\sin ax\,(1 \pm \cos ax)} = \pm\frac{1}{2a(1 \pm \cos ax)} + \frac{1}{2a}\ln \operatorname{tg}\frac{ax}{2}.$$

393) $\int \frac{dx}{\cos ax\,(1 \pm \sin ax)} = \mp \frac{1}{2a\,(1 \pm \sin ax)} + \frac{1}{2a} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)$.

394) $\int \frac{\sin ax\,dx}{\cos ax\,(1 \pm \cos ax)} = \frac{1}{a} \ln \frac{1 \pm \cos ax}{\cos ax}$.

395) $\int \frac{\cos ax\,dx}{\sin ax\,(1 \pm \sin ax)} = -\frac{1}{a} \ln \frac{1 \pm \sin ax}{\sin ax}$.

396) $\int \frac{\sin ax\,dx}{\cos ax\,(1 \pm \sin ax)} = \frac{1}{2a\,(1 \pm \sin ax)} \pm \frac{1}{2a} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)$.

397) $\int \frac{\cos ax\,dx}{\sin ax\,(1 \pm \cos ax)} = -\frac{1}{2a\,(1 \pm \cos ax)} \pm \frac{1}{2a} \ln \operatorname{tg} \frac{ax}{2}$.

398) $\int \frac{\sin ax\,dx}{\sin ax \pm \cos ax} = \frac{x}{2} \mp \frac{1}{2a} \ln (\sin ax \pm \cos ax)$.

399) $\int \frac{\cos ax\,dx}{\sin ax \pm \cos ax} = \pm \frac{x}{2} + \frac{1}{2a} \ln (\sin ax \pm \cos ax)$.

400) $\int \frac{dx}{\sin ax \pm \cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{2}} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{ax}{2} \pm \frac{\pi}{8}\right)$.

401) $\int \frac{dx}{1 + \cos ax \pm \sin ax} = \pm \frac{1}{a} \ln \left(1 \pm \operatorname{tg} \frac{ax}{2}\right)$.

402) $\int \frac{dx}{b \sin ax + c \cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{b^2 + c^2}} \ln \operatorname{tg} \frac{ax + \theta}{2}$.

где $\sin \theta = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}$, а $\operatorname{tg} \theta = \frac{c}{b}$.

403) $\int \frac{\sin ax\,dx}{b + c \cos ax} = -\frac{1}{ac} \ln (b + c \cos ax)$.

404) $\int \frac{\cos ax\,dx}{b + c \sin ax} = \frac{1}{ac} \ln (b + c \sin ax)$.

405) $\int \frac{dx}{b + c \cos ax + f \sin ax} = \int \frac{d\left(x + \frac{\theta}{a}\right)}{b + \sqrt{c^2 + f^2} \sin (ax + \theta)}$,

где $\sin \theta = \frac{c}{\sqrt{c^2 + f^2}}$, а $\operatorname{tg} \theta = \frac{c}{f}$ (см. № 306).

406) $\int \frac{dx}{b^2 \cos^2 ax + c^2 \sin^2 ax} = \frac{1}{abc} \operatorname{arctg}\left(\frac{c}{b} \operatorname{tg} ax\right)$.

407) $\int \frac{dx}{b^2 \cos^2 ax - c^2 \sin^2 ax} = \frac{1}{2abc} \ln \frac{c \operatorname{tg} ax + b}{c \operatorname{tg} ax - b}$

408) $\int \sin ax \cos bx\,dx = -\frac{\cos (a + b)\,x}{2\,(a + b)} - \frac{\cos (a - b)\,x}{2\,(a - b)}$

$(a^2 \neq b^2$; при $a = b$ см. № 354).

Интегралы, содержащие тангенс

409) $\int \operatorname{tg} ax\,dx = -\frac{1}{a}\ln\cos ax.$

410) $\int \operatorname{tg}^2 ax\,dx = \frac{\operatorname{tg} ax}{a} - x.$

411) $\int \operatorname{tg}^3 ax\,dx = \frac{1}{2a}\operatorname{tg}^2 ax + \frac{1}{a}\ln\cos ax.$

412) $\int \operatorname{tg}^n ax\,dx = \frac{1}{a(n-1)}\operatorname{tg}^{n-1} ax - \int \operatorname{tg}^{n-2} ax\,dx.$

413) $\int x \operatorname{tg} ax\,dx =$

$$= \frac{ax^3}{3} + \frac{a^3x^5}{15} + \frac{2a^5x^7}{105} + \frac{17a^7x^9}{2835} + \ldots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n a^{2n-1}x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots *.$$

414) $\int \frac{\operatorname{tg} ax\,dx}{x} =$

$$= ax + \frac{(ax)^3}{9} + \frac{2(ax)^5}{75} + \frac{17(ax)^7}{2205} + \ldots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n(ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} + \ldots *.$$

415) $\int \frac{\operatorname{tg}^n ax}{\cos^2 ax}\,dx = \frac{1}{a(n+1)}\operatorname{tg}^{n+1} ax \qquad (n \neq -1).$

416) $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} ax \pm 1} = \pm\frac{x}{2} + \frac{1}{2a}\ln(\sin ax \pm \cos ax).$

417) $\int \frac{\operatorname{tg} ax\,dx}{\operatorname{tg} ax \pm 1} = \frac{x}{2} \mp \frac{1}{2a}\ln(\sin ax \pm \cos ax).$

Интегралы, содержащие котангенс

418) $\int \operatorname{ctg} ax\,dx = \frac{1}{a}\ln\sin ax.$

419) $\int \operatorname{ctg}^2 ax\,dx = -\frac{\operatorname{ctg} ax}{a} - x.$

420) $\int \operatorname{ctg}^3 ax\,dx = -\frac{1}{2a}\operatorname{ctg}^2 ax - \frac{1}{a}\ln\sin ax.$

421) $\int \operatorname{ctg}^n ax\,dx = -\frac{1}{a(n-1)}\operatorname{ctg}^{n-1} ax - \int \operatorname{ctg}^{n-2} ax\,dx \quad (n \neq 1).$

422) $\int x \operatorname{ctg} ax\,dx = \frac{x}{a} - \frac{ax^3}{9} - \frac{a^3x^5}{225} - \ldots - \frac{2^{2n}B_n a^{2n-1}x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \ldots *.$

423) $\int \frac{\operatorname{ctg} ax\,dx}{x} = -\frac{1}{ax} - \frac{ax}{3} - \frac{(ax)^3}{135} - \frac{2(ax)^5}{4725} - \ldots - \frac{2^{2n}B_n(ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} - \ldots *$

B_n — числа Бернулли (см. стр. 297).

424) $\int \frac{\operatorname{ctg}^n ax}{\sin^2 ax}\,dx = -\frac{1}{a(n+1)}\operatorname{ctg}^{n+1} ax \qquad (n \neq -1).$

425) $\int \frac{dx}{1 \pm \operatorname{ctg} ax} = \int \frac{\operatorname{tg} ax\,dx}{\operatorname{tg} ax \pm 1}$ (см. № 417).

Интегралы от других трансцендентных функций

Интегралы от гиперболических функций.

426) $\int \operatorname{sh} ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{ch} ax.$

427) $\int \operatorname{ch} ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{sh} ax.$

428) $\int \operatorname{sh}^2 ax\,dx = \frac{1}{2a}\operatorname{sh} ax \operatorname{ch} ax - \frac{1}{2}x.$

429) $\int \operatorname{ch}^2 ax\,dx = \frac{1}{2a}\operatorname{sh} ax \operatorname{ch} ax + \frac{1}{2}x.$

430) $\int \operatorname{sh}^n ax\,dx = \frac{1}{an}\operatorname{sh}^{n-1} ax \operatorname{ch} ax - \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sh}^{n-2} ax\,dx$ (для $n>0$),

$= \frac{1}{a(n+1)}\operatorname{sh}^{n+1} ax \operatorname{ch} ax - \frac{n+2}{n+1}\int \operatorname{sh}^{n+2} ax\,dx$ (для $n<0$), $(n \neq -1)$.

431) $\int \operatorname{ch}^n ax\,dx = \frac{1}{an}\operatorname{sh} ax \operatorname{ch}^{n-1} ax + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{ch}^{n-2} ax\,dx$ (для $n>0$).

$= -\frac{1}{a(n+1)}\operatorname{sh} ax \operatorname{ch}^{n+1} ax + \frac{n+2}{n+1}\int \operatorname{ch}^{n+2} ax\,dx$ (для $n<0$) $(n \neq -1)$

432) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} ax} = \frac{1}{a}\ln \operatorname{th} \frac{ax}{2}.$

433) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} ax} = \frac{2}{a}\operatorname{arctg} e^{ax}.$

434) $\int x \operatorname{sh} ax\,dx = \frac{1}{a}x \operatorname{ch} ax - \frac{1}{a^2}\operatorname{sh} ax.$

435) $\int x \operatorname{ch} ax\,dx = \frac{1}{a}x \operatorname{sh} ax - \frac{1}{a^2}\operatorname{ch} ax.$

436) $\int \operatorname{th} ax\,dx = \frac{1}{a}\ln \operatorname{ch} ax.$

437) $\int \operatorname{cth} ax\,dx = \frac{1}{a}\ln \operatorname{sh} ax.$

438) $\int \operatorname{th}^2 ax\,dx = x - \frac{\operatorname{th} ax}{a}.$

439) $\int \operatorname{cth}^2 ax\,dx = x - \frac{\operatorname{cth} ax}{a}.$

440) $\int \operatorname{sh} ax \operatorname{sh} bx\,dx = \frac{1}{a^2-b^2}(a \operatorname{sh} bx \operatorname{ch} ax - b \operatorname{ch} bx \operatorname{sh} ax).$

441) $\int \operatorname{ch} ax \operatorname{ch} bx\,dx = \frac{1}{a^2-b^2}(a \operatorname{sh} ax \operatorname{ch} bx - b \operatorname{sh} bx \operatorname{ch} ax).$

442) $\int \operatorname{ch} ax \operatorname{sh} bx\,dx = \frac{1}{a^2-b^2}(a \operatorname{sh} bx \operatorname{sh} ax - b \operatorname{ch} bx \operatorname{ch} ax).$

$a^2 \neq b^2.$

443) $\int \operatorname{sh} ax \sin ax\,dx = \frac{1}{2a}(\operatorname{ch} ax \sin ax - \operatorname{sh} ax \cos ax).$

444) $\int \operatorname{ch} ax \cos ax\,dx = \frac{1}{2a}(\operatorname{sh} ax \cos ax + \operatorname{ch} ax \sin ax).$

445) $\int \operatorname{sh} ax \cos ax\,dx = \frac{1}{2a}(\operatorname{ch} ax \cos ax + \operatorname{sh} ax \sin ax).$

446) $\int \operatorname{ch} ax \sin ax\,dx = \frac{1}{2a}(\operatorname{sh} ax \sin ax - \operatorname{ch} ax \cos ax).$

Интегралы от показательных функций

447) $\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\,e^{ax}$

448) $\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1).$

449) $\int x^2 e^{ax}\,dx = e^{ax}\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right).$

450) $\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\,x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1} e^{ax}\,dx.$

451) $\int \frac{e^{ax}}{x}\,dx = \ln x + \frac{ax}{1\cdot 1!} + \frac{(ax)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(ax)^3}{3\cdot 3!} + \ldots$*.

452) $\int \frac{e^{ax}}{x^n}\,dx = \frac{1}{n-1}\left(-\frac{e^{ax}}{x^{n-1}} + a\int \frac{e^{ax}}{x^{n-1}}\,dx\right) \qquad (n \neq 1).$

---

* Определенный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\,dt$ называется *интегральной показательной функцией* и обозначается $\operatorname{Ei}(x)$. При $x > 0$ интеграл расходится в точке $t = 0$; в этом случае под $\operatorname{Ei}(x)$ понимается главное значение несобственного интеграла (см. стр. 402).

$$\int\limits_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\,dt = C + \ln|x| + \frac{x}{1\cdot 1!} + \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \ldots + \frac{x^n}{n\cdot n!} + \ldots$$

C — эйлерова постоянная, см. стр. 278).

453) $\int \frac{dx}{1+e^{ax}} = \frac{1}{a} \ln \frac{e^{ax}}{1+e^{ax}}$.

454) $\int \frac{dx}{b+ce^{ax}} = \frac{x}{b} - \frac{1}{ab} \ln (b+ce^{ax})$.

455) $\int \frac{e^{ax}\,dx}{b+ce^{ax}} = \frac{1}{ac} \ln (b+ce^{ax})$.

456) $\int \frac{dx}{be^{ax}+ce^{-ax}} = \frac{1}{a\sqrt{bc}} \operatorname{arcig}\left(e^{ax}\sqrt{\frac{b}{c}}\right)$ $(bc>0)$,

$= \frac{1}{2a\sqrt{-bc}} \ln \frac{c+e^{ax}\sqrt{-bc}}{c-e^{ax}\sqrt{-bc}}$ $(bc<0)$.

457) $\int \frac{xe^{ax}\,dx}{(1+ax)^2} = \frac{e^{ax}}{a^2(1+ax)}$.

458) $\int e^{ax} \ln x\,dx = \frac{e^{ax}\ln x}{a} - \frac{1}{a}\int \frac{e^{ax}}{x}\,dx$ (см. № 451).

459) $\int e^{ax} \sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \sin bx - b \cos bx)$.

460) $\int e^{ax} \cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \cos bx + b \sin bx)$.

461) $\int e^{ax} \sin^n x\,dx = \frac{e^{ax}\sin^{n-1}x}{a^2+n^2}(a \sin x - n \cos x) +$

$+ \frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{ax} \sin^{n-2} x\,dx$ (см. №№ 447, 459).

462) $\int e^{ax} \cos^n x\,dx = \frac{e^{ax}\cos^{n-1}x}{a^2+n^2}(a \cos x + n \sin x) +$

$+ \frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{ax} \cos^{n-2} x\,dx$ (см. №№ 447, 460).

463) $\int xe^{ax} \sin bx\,dx = \frac{xe^{ax}}{a^2+b^2}(a \sin bx - b \cos bx) -$

$- \frac{e^{ax}}{(a^2+b^2)^2}[(a^2-b^2)\sin bx - 2ab \cos bx]$.

464) $\int xe^{ax} \cos bx\,dx = \frac{xe^{ax}}{a^2+b^2}(a \cos bx + b \sin bx) -$

$- \frac{e^{ax}}{(a^2+b^2)^2}[(a^2-b^2)\cos bx + 2ab \sin bx]$.

Интегралы от логарифмических функций

465) $\int \ln x\,dx = x \ln x - x$.

466) $\int (\ln x)^2\,dx = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x$.

467) $\int (\ln x)^3\,dx = x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x\ln x - 6x.$

468) $\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\,dx \qquad (n \neq -1).$

469) $\int \frac{dx}{\ln x} = \ln\ln x + \ln x + \frac{(\ln x)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(\ln x)^3}{3\cdot 3!} + \ldots$ *.

470) $\int \frac{dx}{(\ln x)^n} = -\frac{x}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{dx}{(\ln x)^{n-1}} \qquad (n \neq 1)$

(см. № 469).

471) $\int x^m \ln x\,dx = x^{m+1}\left[\frac{\ln x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2}\right] \qquad (m \neq -1).$

472) $\int x^m (\ln x)^n\,dx = \frac{x^{m+1}(\ln x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int x^m (\ln x)^{n-1}\,dx$

($m \neq -1$, $n \neq -1$; см. № 471).

473) $\int \frac{(\ln x)^n}{x}\,dx = \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1}.$

474) $\int \frac{\ln x}{x^m}\,dx = -\frac{\ln x}{(m-1)x^{m-1}} - \frac{1}{(m-1)^2 x^{m-1}} \qquad (m \neq 1).$

475) $\int \frac{(\ln x)^n}{x^m}\,dx = -\frac{(\ln x)^n}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{n}{m-1}\int \frac{(\ln x)^{n-1}}{x^m}\,dx \qquad (m \neq 1)$

(см. № 474).

476) $\int \frac{x^m\,dx}{\ln x} = \int \frac{e^{-y}}{y}\,dy$, где $y = -(m+1)\ln x$ (см. № 451).

477) $\int \frac{x^m\,dx}{(\ln x)^n} = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1}\int \frac{x^m\,dx}{(\ln x)^{n-1}} \qquad (n \neq 1).$

478) $\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln\ln x.$

479) $\int \frac{dx}{x^n \ln x} = \ln\ln x - (n-1)\ln x + \frac{(n-1)^2(\ln x)^2}{2\cdot 2!} -$

$$- \frac{(n-1)^3(\ln x)^3}{3\cdot 3!} + \ldots$$

---

* Определенный интеграл $\int_0^x \frac{dt}{\ln t}$ называется *интегральным логарифмом* и обозначается $\mathrm{li}\,x$. При $x > 1$ интеграл расходится в точке $t = 1$; в этом случае под $\mathrm{li}\,x$ понимается главное значение несобственного интеграла (стр. 472). Интегральный логарифм связан с интегральной показательной функцией (см. стр. 378): $\mathrm{li}\,x = \mathrm{Ei}(\ln x)$.

480) $\int \frac{dx}{x\,(\ln x)^n} = \frac{-1}{(n-4)\,(\ln x)^{n-1}} \qquad (n \neq 1).$

481) $\int \frac{dx}{x^p\,(\ln x)^n} = \frac{-1}{x^{p-1}\,(n-1)\,(\ln x)^{n-1}} - \frac{p-1}{n-1} \int \frac{dx}{x^p\,(\ln x)^{n-1}}$
$(n \neq 1).$

482) $\int \ln \sin x\,dx = x \ln x - x - \frac{x^3}{18} - \frac{x^5}{900} - \ldots - \frac{2^{2n-1} B_n x^{2n+1}}{n\,(2n+1)!} - \ldots$*.

483) $\int \ln \cos x\,dx =$

$$= -\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{60} - \frac{x^7}{315} - \ldots - \frac{2^{2n-1}\,(2^{2n}-1)\,B_n}{n\,(2n+1)!}\,x^{2n+1} - \ldots\text{*}.$$

484) $\int \ln \operatorname{tg} x\,dx =$

$$= x \ln x - x + \frac{x^3}{9} + \frac{7x^5}{450} + \ldots + \frac{2^{2n}\,(2^{2n-1}-1)\,B_n}{n\,(2n+1)!}\,x^{2n+1} + \ldots\text{*}.$$

485) $\int \sin \ln x\,dx = \frac{x}{2}\,(\sin \ln x - \cos \ln x).$

486) $\int \cos \ln x\,dx = \frac{x}{2}\,(\sin \ln x + \cos \ln x).$

487) $\int e^{ax} \ln x\,dx = \frac{1}{a}\,e^{ax} \ln x - \frac{1}{a} \int \frac{e^{ax}}{x}\,dx$ (см. № 451).

Интегралы от обратных тригонометрических функций

488) $\int \arcsin \frac{x}{a}\,dx = x \arcsin \frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2}.$

489) $\int x \arcsin \frac{x}{a}\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{4}\sqrt{a^2 - x^2}.$

490) $\int x^2 \arcsin \frac{x}{a}\,dx = \frac{x^3}{3} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{9}\,(x^2 + 2a^2)\sqrt{a^2 - x^2}.$

491) $\int \frac{\arcsin \frac{x}{a}\,dx}{x} =$

$$= \frac{x}{a} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 3}\frac{x^3}{a^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5}\frac{x^5}{a^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7}\frac{x^7}{a^7} + \ldots$$

492) $\int \frac{\arcsin \frac{x}{a}\,dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \arcsin \frac{x}{a} - \frac{1}{a} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}.$

---

* B_n — числа Бернулли (см. стр. 297).

493) $\int \arccos \frac{x}{a}\,dx = x \arccos \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}.$

494) $\int x \arccos \frac{x}{a}\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) \arccos \frac{x}{a} - \frac{x}{4}\sqrt{a^2 - x^2}.$

495) $\int x^2 \arccos \frac{x}{a}\,dx = \frac{x^3}{3} \arccos \frac{x}{a} - \frac{1}{9}(x^2 + 2a^2)\sqrt{a^2 - x^2}.$

496) $\int \frac{\arccos \frac{x}{a}\,dx}{x} =$

$$= \frac{\pi}{2} \ln x - \frac{x}{a} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 3}\frac{x^3}{a^3} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5}\frac{x^5}{a^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7}\frac{x^7}{a^7} - \ldots$$

497) $\int \frac{\arccos \frac{x}{a}\,dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \arccos \frac{x}{a} + \frac{1}{a} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}.$

498) $\int \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\,dx = x \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln (a^2 + x^2).$

499) $\int x \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\,dx = \frac{1}{2}(x^2 + a^2) \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{ax}{2}.$

500) $\int x^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\,dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{ax^2}{6} + \frac{a^3}{6} \ln (a^2 + x^2).$

501) $\int x^n \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1}\,dx}{a^2 + x^2} \quad (n \neq -1).$

502) $\int \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{a}\,dx}{x} = \frac{x}{a} - \frac{x^3}{3^2 a^3} + \frac{x^5}{5^2 a^5} - \frac{x^7}{7^2 a^7} + \ldots, (|x| < |a|).$

503) $\int \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{a}\,dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{1}{2a} \ln \frac{a^2 + x^2}{x^2},$

504) $\int \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{a}\,dx}{x^n} = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{a}{n-1} \int \frac{dx}{x^{n-1}(a^2 + x^2)}$
$(n \neq 1).$

505) $\int \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\,dx = x \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln (a^2 + x^2).$

506) $\int x \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\,dx = \frac{1}{2}(x^2 + a^2) \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{ax}{2}.$

507) $\int x^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\,dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{ax^2}{6} - \frac{a^3}{6} \ln (a^2 + x^3).$

508) $\int x^n \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1}\,dx}{a^2 + x^2} (n \neq -1).$

509) $$\int \frac{\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}\,dx}{x} = \frac{\pi}{2}\ln x - \frac{x}{a} + \frac{x^3}{3^2a^3} - \frac{x^5}{5^2a^5} + \frac{x^7}{7^2a^7} - \dots$$

510) $$\int \frac{\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}\,dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + \frac{1}{2a}\ln\frac{a^2+x^2}{x^2}.$$

511) $$\int \frac{\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}\,dx}{x^n} =$$

$$= -\frac{1}{(n-1)\,x^{n-1}}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} - \frac{a}{n-1}\int \frac{dx}{x^{n-1}(a^2+x^2)} \quad (n \neq 1).$$

Интегралы от обратных гиперболических функций

512) $$\int \operatorname{Arsh}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{Arsh}\frac{x}{a} - \sqrt{x^2+a^2}.$$

513) $$\int \operatorname{Arch}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{Arch}\frac{x}{a} - \sqrt{x^2-a^2}.$$

514) $$\int \operatorname{Arth}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{Arth}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln(a^2-x^2).$$

515) $$\int \operatorname{Arcth}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{Arcth}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln(x^2-a^2).$$

Б. Определенные интегралы

8. Основные понятия и теоремы

Определение. *Определенным интегралом* функции $y = f(x)$ в пределах от a до b, заданной в замкнутом интервале $[a, b]$ * [при этом может быть $a < b$ (случай *А*) или $a > b$ (случай *Б*)], называется число, получаемое следующим образом:

1) интервал $[a, b]$ разбивается на n «элементарных интервалов» произвольными числами $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, выбранными так, чтобы было

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_{n-1} < x_n = b \quad \text{(в случае } A\text{)}$$

или

$$a = x_0 > x_1 > x_2 > \dots > x_i > \dots > x_{n-1} > x_n = b \quad \text{(в случае } Б\text{)};$$

---

* Понятие определенного интеграла может быть обобщено также на функции, заданные в любой связной области (открытый или полуоткрытый интервал, полуось или вся числовая прямая) или в области, связной за исключением конечного числа отдельных ее точек. Интегралы, рассматриваемые в таком обобщенном смысле, принадлежат к числу несобственных (см. стр. 390—404).

2) внутри (или на границе) каждого элементарного интервала $[x_{i-1}, x_i]$ выбирается произвольно одно число ξ_i (рис. 302):

$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ (в случае *А*) или $x_{i-1} \geq \xi_i \geq x_i$ (в случае *Б*);

3) значения $f(\xi_i)$ функции $f(x)$ в этих выбранных точках умножаются на соответствующие разности $\Delta x_{i-1} = x_i - x_{i-1}$ (длины элементарных интервалов $[x_{i-1}, x_i]$, взятые со знаками «+» в случае *А* и знаками «—» в случае *Б*):

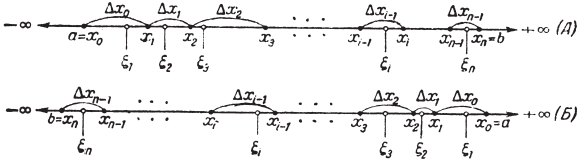


Рис. 302.

4) все полученные n произведений $f(\xi_i)\,\Delta x_{i-1}$ складываются;

5) вычисляется предел полученной суммы

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_{i-1},$$

когда длина каждого элементарного интервала Δx_{i-1} стремится к нулю (и, следовательно, $n \to \infty$).

Если этот предел существует и не зависит от выбора чисел x_i и ξ_i, то он называется определенным интегралом:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\Delta x_{i-1} \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_{i-1}. \qquad (*)$$

Теорема существования. Определенный интеграл от функции, непрерывной в интервале $[a, b]$, существует, т. е. предел $(*)$ существует и не зависит от выбора чисел x_i и ξ_i *.

Элементы определенного интеграла. В формуле $(*)$ символ $\int$ называется *знаком интеграла*, число a — *нижним пределом*, число b — *верхним пределом*, функция $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, выражение $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением*, буква x — *переменной интеграции*. Значение интеграла зависит только от вида функции f и от пределов a и b, но не зависит от переменной интеграции, которая может быть обозначена любой буквой. Так

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(z)\,dz \text{ и т. п.}$$

* Определенный интеграл существует также от ограниченной функции, имеющей в интервале $[a, b]$ конечное число точек разрыва.

Функция, для которой существует определенный интеграл в данном интервале, называется *интегрируемой* в этом интервале.

Геометрический смысл определенного интеграла от непрерывной функции. Интеграл (*) численно равен площади, ограниченной частью графика функции $y=f(x)$, осью Ox и ординатами $f(a)$ и $f(b)$, взятой со знаком «+» или «−», согласно схеме на рис. 303. Если кривая пересекает ось Ox один или несколько раз внутри интервала $[a, b]$, то интеграл численно равен алгебраической сумме площадей, находящихся по каждую сторону оси Ox.

Интеграл с равными пределами. По определению

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

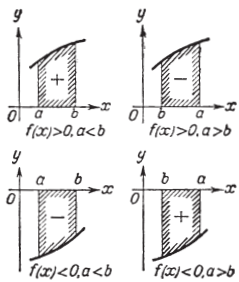


Рис. 303

Основные свойства определенного интеграла выражаются следующими теоремами:

1) *Теорема о перестановке пределов.* При перестановке пределов интеграл меняет знак на обратный:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

2) *Теорема о разбиении интеграла.* При любых числах a, b, c

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

3) *Интеграл от алгебраической суммы* нескольких функций равен сумме интегралов от этих функций:

$$\int_a^b [f(x)+\varphi(x)-\psi(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

4) *Постоянный множитель* можно выносить за знак интеграла:

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

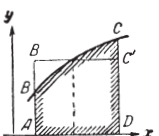


Рис. 304.

5) *Теорема о среднем значении.* Если $f(x)$ непрерывна в интервале $[a, b]$, то внутри интервала $[a, b]$ имеется по меньшей мере одно такое число ξ ($a<\xi<b$ в случае A, $a>\xi>b$ в случае B, см. стр. 383), что

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\xi);$$

геометрический смысл этой теоремы указан на рис. 304: между точками a и b существует такая точка ξ, что площадь фигуры $ABCD$ равна площади прямоугольника $AB'C'D$.

Обобщенная теорема о среднем. Для интеграла от произведения двух функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ (где $f(x)$ — непрерывная функция, а $\varphi(x)$ не меняет знака в интервале $[a, b]$) имеется внутри этого интервала по меньшей мере одно такое число ξ, что

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

6) *Теорема об оценке интеграла.* Значение определенного интеграла заключено между произведениями наименьшего и наибольшего значений подинтегральной функции на длину интервала интегрирования:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a),$$

где m — наименьшее и M — наибольшее значение $f(x)$ в интервале $[a, b]$.

Геометрический смысл этой теоремы ясен из рис. 305.

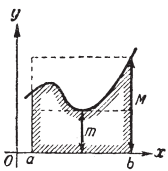


Рис. 305.

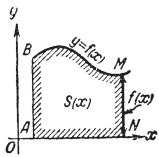


Рис. 306.

7) *Теорема Лейбница-Ньютона.* Определенный интеграл с переменным верхним пределом $\int_a^x f(t)\,dt$ * есть непрерывная функция $F(x)$ этого предела, первообразная по отношению к подинтегральной функции:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{или} \quad d\int_a^x f(t)\,dt = f(x)\,dx.$$

Геометрический смысл этой теоремы: производная от переменной площади $S(x)$, изображенной на рис. 306, равна переменной конечной ординате NM (как площадь, так и ордината берутся со знаком «+» или «—», см. рис. 303 на стр. 385).

8) *Основная теорема интегрального исчисления* (выражение определенного интеграла через неопределенный). Если

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

---

* Здесь переменная интеграции обозначена через t, чтобы не смешать ее с переменным пределом x (см. стр. 384).

то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \qquad (**)$$

Правая часть равенства (**) часто обозначается посредством *символа подстановки*:

$$F(b) - F(a) \equiv \Big[F(x)\Big]_a^b \text{ или } F(x)\Big|_a^b.$$

Постоянная интегрирования C при подстановке пределов уничтожается и поэтому она может быть опущена при вычислении определенного интеграла по формуле (**). Итак, равенство (**) может быть выражено в форме

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[\int f(x)\,dx\Big]_a^b.$$

Равенство (**) можно выразить также в виде интеграла от дифференциала

$$\int_a^b dF(x) = F(b) - F(a).$$

9. Вычисление определенных интегралов

Основной метод вычисления определенных интегралов — при помощи выражения определенного интеграла через неопределенный (см. основную теорему на стр. 386—387):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[\int f(x)\,dx\Big]_a^b.$$

В этом случае для вычисления определенного интеграла необходимо найти первообразную функцию от $f(x)$.

Правила преобразования определенного интеграла. Определенный интеграл преобразуется в другой чаще всего при помощи следующих правил, аналогичных правилам преобразования неопределенных интегралов.

1) *Правило подстановки.* При помощи вспомогательной функции $x = \varphi(t)$ (где новая переменная t — однозначная функция $t = \psi(x)$ в интервале $[a, b]$) интеграл преобразуется к виду

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Эта формула дает возможность не проводить обратной подстановки при вычислении неопределенного интеграла.

Пример:

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int_{\arcsin 0}^{\arcsin 1} a^2\sqrt{1-\sin^2 t}\,d\sin t\,^* = a^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt =$$

$$= a^2\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt = \frac{a^2}{2}\left[t\right]_0^{\pi/2} + \frac{a^2}{4}\int_0^{\pi}\cos z dz^{**} = \frac{\pi a^2}{4} + \frac{a^2}{4}\left[\sin z\right]_0^{\pi} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

2) *Правило интегрирования по частям.* Представляя подинтегральное выражение $f(x)\,dx$ произвольным образом в виде $u\,dv$ и находя du (дифференцированием) и v (интегрированием), преобразуем данный интеграл к виду

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u\,dv = \left[uv\right]_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Пример:

$$\int_0^1 \underbrace{xe^x}_{u}\underbrace{dx}_{dv} = \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e-1) = 1.$$

Искусственные приемы. Если неопределенный интеграл вычислить очень сложно или он вообще не может быть выражен в элементарных функциях, то в ряде случаев значение определенного интеграла все же может быть найдено искусственными приемами. Например, можно использовать свойства аналитических функций комплексной переменной (примеры на стр. 514 и 517—518), теорему о дифференцировании интеграла по параметру (см. стр. 405):

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,\ t)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f(x,\ t)}{\partial t}\,dx. \qquad (A)$$

Пример: Вычислить

$$I = \int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\,dx.$$

Введем параметр t и рассмотрим интеграл

$$F(t) = \int_0^1 \frac{x^t - 1}{\ln x}\,dx;\quad F(0) = 0;\ F(1) = I.$$

---

* Подстановка $x = \varphi(t) = a\sin t, t = \psi(x) = \arcsin\frac{x}{a}$, $\psi(0) = 0$, $\psi(a) = \frac{\pi}{2}$.

** Подстановка $t = \varphi(z) = \frac{z}{2}$, $z = \psi(t) = 2t$, $\psi(0) = 0$, $\psi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$.

Применяя к $F(t)$ формулу (A), имеем:

$$\frac{dF}{dt} = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{x^t - 1}{\ln x}\right] dt = \int_0^1 \frac{x^t \ln x}{\ln x}\, dx =$$

$$= \int_0^1 x^t\, dx = \left[\frac{1}{t+1}\, x^{t+1}\right]_0^1 = \frac{1}{t+1}.$$

Интегрирование дает

$$F(t) - F(0) = \int_0^t \frac{dt}{t+1} = [\ln(t+1)]_0^t = \ln(t+1),$$

откуда искомый интеграл $I = F(1) = \ln 2$.

Интегрирование разложением в ряд. Если подынтегральная функция $f(x)$ может быть представлена в интервале интегрирования $[a, b]$ равномерно сходящимся рядом функций (см. стр. 293)

$$f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_n(x) + \ldots,$$

то имеет место равенство

$$\int f(x)\, dx = \int \varphi_1(x)\, dx + \int \varphi_2(x)\, dx + \ldots + \int \varphi_n(x)\, dx + \ldots$$

и, следовательно, определенный интеграл может быть представлен в виде сходящегося числового ряда

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b \varphi_1(x)\, dx + \int_a^b \varphi_2(x)\, dx + \ldots + \int_a^b \varphi_n(x)\, dx + \ldots$$

В случае легко интегрируемых функций $\varphi_i(x)$ (например, при разложении $f(x)$ в степенной ряд, равномерно сходящийся в интервале $[a, b]$) интеграл $\int_a^b f(x)\, dx$ может быть вычислен с любой степенью точности.

Пример: Вычислить $I = \int_0^{1/2} e^{-x^2}\, dx$ с точностью до 0,0001.

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \ldots$$

(см. таблицу на стр. 327); ряд сходится равномерно в любом конечном интервале (по теореме Абеля, см. стр. 300); следовательно,

$$\int e^{-x^2}\, dx = x\left(1 - \frac{x^2}{1 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 5} - \frac{x^6}{3 \cdot 7} + \frac{x^8}{4 \cdot 9} - \ldots\right),$$

откуда

$$I=\int_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^2\cdot 1!\cdot 3}+\frac{1}{2^4\cdot 2!\cdot 5}-\frac{1}{2^6\cdot 3!\cdot 7}+\frac{1}{2^8\cdot 4!\cdot 9}-\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{12}+\frac{1}{160}-\frac{1}{2688}+\frac{1}{55296}-\ldots\right);$$

по теореме Лейбница о знакочередующихся рядах (см. стр. 296), для вычисления I с заданной точностью можно ограничиться первыми четырьмя членами разложения:

$$I\approx\frac{1}{2}(1-0{,}08333+0{,}00625-0{,}00037)=\frac{1}{2}\cdot 0{,}92255=0{,}46127,$$

$$\int_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx=0{,}4613.$$

Приближенные методы. Наиболее употребительные из них основаны на замене интеграла конечной суммой. Для вычисления $\int_a^b y\,dx$ промежуток от $a\,(=x_0)$ до $b\,(=x_n)$ разбивается на n равных

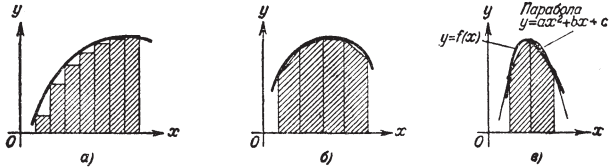


Рис. 307.

частей, и для точек деления x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n вычисляются значения интегрируемой функции y. Затем пользуются одной из трех формул $\left(\text{полагая } h=\frac{b-a}{n}\right)$:

1) *Формула прямоугольников* (рис. 307, *а*):

$$\int_a^b y\,dx\approx h\,(y_0+y_1+\ldots+y_{n-1}).$$

2) *Формула трапеций* (рис. 307, *б*):

$$\int_a^b y\,dx\approx\frac{h}{2}\,(y_0+2y_1+2y_2+\ldots+2y_{n-1}+y_n).$$

3) *Формула парабол (Симпсона)*; n четное (рис. 307, *б*):

$$\int_a^b y\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n). \qquad (I)$$

Все три формулы тем точнее, чем больше n. При одних и тех же n вторая формула точнее первой, третья — еще точнее и поэтому наиболее употребительна. Для оценки ошибки, получаемой при вычислении интеграла по формуле Симпсона (если n кратно 4), вычисляют вспомогательную сумму

$$\frac{2h}{3}(y_0 + 4y_2 + 2y_4 + \ldots + 4y_{n-2} + y_n), \qquad (II)$$

представляющую собой ту же формулу Симпсона для полосок шириной $2h$ (получающуюся после отбрасывания ординат с нечетными индексами). Можно приблизительно считать, что

$$\int_a^b y\,dx - (I) \approx \frac{(I) - (II)}{15}$$

Заменяя подинтегральную функцию каким-либо интерполяционным многочленом (см. стр. 573), можно получить много других формул приближенного интегрирования. Наиболее употребительны из них (обозначения см. стр. 575):

$$\int_a^b y\,dx = 2h\left[(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + \right.$$
$$+ \frac{1}{6}(\Delta^2 y_0 + \Delta^2 y_2 + \ldots + \Delta^2 y_{n-2}) -$$
$$- \frac{1}{180}(\Delta^4 y_{-1} + \Delta^4 y_1 + \ldots + \Delta^4 y_{n-3}) +$$
$$\left. + \frac{1}{1512}(\Delta^6 y_{-2} + \Delta^6 y_0 + \ldots + \Delta^6 y_{n-4})\right] \quad (n \text{ — четное}).$$

$$\int_a^b y\,dx = h\left[\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right) - \right.$$
$$- \frac{1}{12}\left(\frac{\Delta y_{n-1} + \Delta y_n}{2} - \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2}\right) +$$
$$+ \frac{11}{720}\left(\frac{\Delta^3 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-1}}{2} - \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2}\right) -$$
$$\left. - \frac{1}{317}\left(\frac{\Delta^5 y_{n-3} + \Delta^5 y_{n-2}}{2} - \frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2}\right)\right]$$

Последнее слагаемое в этих формулах обычно не вычисляется и служит только для приближенной оценки погрешности вычислений по данной формуле.

Графический метод. Если интегрируемая функция $y=f(x)$ изображена графиком AB (рис. 308), то $\int_a^b f(x)\,dx$, равный площади M_0ABN, может быть найден графически следующим способом:

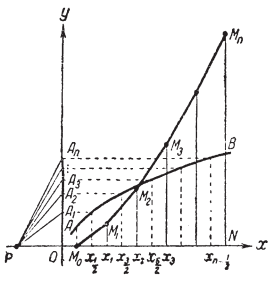


Рис. 308.

1) M_0N делим на $2n$ равных частей точками

$$x_{1/2},\ x_1,\ x_{3/2},\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_{n-1/2}$$

(чем больше точек деления, тем точнее результат);

2) из точек деления

$$x_{1/2},\ x_{3/2},\ \ldots,\ x_{n-1/2}$$

проводим ординаты кривой и откладываем их на оси Oy (отрезки OA_1, OA_2, ..., OA_n);

3) откладываем отрезок OP произвольной длины в левой части оси Ox и соединяем P с точками A_1, A_2, ..., A_n;

4) через точку M_0 проводим отрезок M_0M_1 параллельно PA_1 до пересечения с ординатой точки x_1, через M_1 — отрезок $M_1M_2 \parallel PA_2$ до пересечения с ординатой x_2, затем $M_2M_3 \parallel PA_3$ и т. д., пока не достигнем последней ординаты в точке M_n.

Интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ численно равен произведению длин отрезков OP и NM_n; произвольной длиной OP пользуются для регулирования размеров чертежа (чем меньше допустимые размеры, тем большим нужно выбирать OP). Если $OP=1$, то $\int_a^b f(x)\,dx=NM_n$, а ломаная $M_0M_1M_2\ldots M_n$ изображает приблизительно график первообразной функции от $f(x)$ [неопределенный интеграл $\int f(x)\,dx$].

Вычисление при помощи планиметра. *Планиметры* — приборы, позволяющие определять площадь, ограниченную произвольной кривой, и таким образом вычислять определенные интегралы от функции $y=f(x)$, заданной своим графиком. Планиметры специального типа вычисляют не только $\int y\,dx$, но и $\int y^2\,dx$ и $\int y^3\,dx$. Описание и теория планиметров см. Крылов, стр. 585 справочника.

Интеграфы. Существуют приборы, вычерчивающие график интегральной функции

$$Y=\int_a^x f(t)\,dt,$$

по графику заданной функции $y=f(x)$ — так называемые *интеграфы*. Описание и теория интеграфа см. Крылов, стр. 585 справочника.

10. Приложения определенных интегралов

Общий принцип приложений определенного интеграла к вычислению геометрических, физических и других величин:

1) вычисляемая величина A разбивается определенным образом на большое число малых величин: $A = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$;

2) каждая величина a_i заменяется величиной $\tilde{a}_i$ (близкой к a_i), вычисление которой ведется по известной формуле; ошибка $\alpha_i = a_i - \tilde{a}_i$ должна быть бесконечно малой высшего порядка по сравнению с $\tilde{a}_i$, т. е. a_i и $\tilde{a}_i$ — равносильные бесконечно малые;

3) величину $\tilde{a}_i$ выражают через некоторую переменную x, выбранную так, чтобы $\tilde{a}_i$ приняло вид $f(x_i)\,\Delta x_i$;

4) искомая величина вычисляется как предел суммы

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx,$$

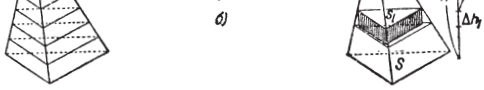
где a и b — граничные значения x.

Пример: Вычисление объема пирамиды (S — площадь основания, H — высота):

1) вычисляемый объем V разбивается плоскими сечениями на объемы тонких усеченных пирамид (рис. 309, *а*)

$$V = v_1 + v_2 + \ldots + v_n;$$

2) каждая усеченная пирамида заменяется призмой $\tilde{v}_i$ той же высоты и с площадью основания, равной верхнему основанию усеченной пирамиды (рис. 309, *б*). Отбрасываемый объем — бесконечно малая высшего порядка, чем v_i;



а) Рис. 309. *в)*

3) формулу объема $\tilde{v}_i$ приводят к виду $\tilde{v}_i = S_i \Delta h_i$, где h_i (рис. 309, *в*) — расстояние верхней грани до вершины пирамиды или (так как $S_i : S = h_i^2 : H^2$):

$$\tilde{v}_i = \frac{Sh_i^2}{H^2}\,\Delta h_i;$$

4) искомый объем вычисляется как предел суммы:

$$V_{\text{пир}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \tilde{v}_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{Sh_i^2}{H^2}\,\Delta h_i = \int_0^H \frac{Sh^2}{H^2}\,dh = \frac{SH}{3}.$$

Основные приложения к геометрии.

Площадь. Формула площади *криволинейной трапеции* (рис. 310, *а*), если уравнение кривой задано явно [$y = f(x)$ и $a \leqslant x \leqslant b$] или параметрически [$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$]:

$$S_{ABCD} = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt;$$

формула площади криволинейной трапеции, изображенной на рис. 310, *б*,

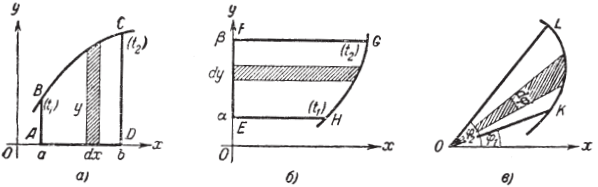


Рис. 310.

$x = g(y)$, $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$ или параметрически $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$]:

$$S_{EFGH} = \int_\alpha^\beta g(y)\,dy = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)\,\psi'(t)\,dt;$$

формула площади *криволинейного сектора* (рис. 310, *в*), если кривая задана уравнением в полярных координатах [$\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$]:

$$S_{OKL} = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2\,d\varphi.$$

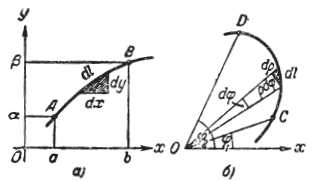


Рис. 311.

Вычисление площадей более сложных фигур производится при помощи криволинейного интеграла (см. стр. 418) или двойного интеграла (стр. 428).

Длина дуги. Формула длины дуги кривой (рис. 311, *а*), если уравнение кривой задано явно [$y = f(x)$ или $x = g(y)$] или параметрически [$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$]:

$$\overset{\frown}{AB} = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{[g'(y)]^2 + 1}\,dy = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt;$$

или $L = \int dl$, где dl — дифференциал дуги: $dl^2 = dx^2 + dy^2$.

Если же кривая (рис. 311, *б*) задана уравнением в полярных координатах $[\rho = \rho(\varphi)]$, то

$$L_{\overset{\frown}{CD}} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi$$

или $L = \int dl$, где dl – дифференциал дуги: $dl^2 = \rho^2\, d\varphi^2 + d\rho^2$.

Поверхность. Формула площади поверхности, образованной вращением кривой $y = f(x)$ вокруг оси Ox (рис. 312, *а*):

$$S = 2\pi \int_a^b y\, dl = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx;$$

кривой $x = f(y)$ вокруг оси Oy (рис. 312, *б*):

$$S' = 2\pi \int_\alpha^\beta x\, dl = 2\pi \int_\alpha^\beta x \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\, dy.$$

Вычисление поверхностей, ограничивающих более сложные тела, см. стр. 428, 432.

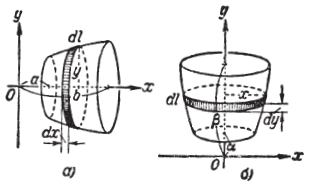


Рис. 312.

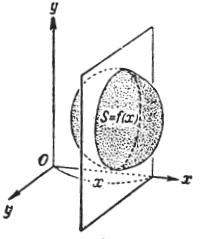


Рис. 313.

Объем. Формула объема тела вращения кривой вокруг оси Ox (рис. 312, *а*):

$$V = \pi \int_a^b y^2\, dx;$$

вокруг оси Oy (рис. 312, *б*):

$$V = \pi \int_\alpha^\beta x^2\, dy.$$

Формула объема тела, если площадь его сечения, проведенного перпендикулярно к оси Ox, есть функция $x\,[S = f(x)]$ (рис. 313):

$$V = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Вычисление объема более сложных тел производится при помощи двойного или тройного интеграла (см. стр. 421, 428, 429).

Приложения к механике и физике.

Путь, пройденный точкой, начиная с момента t_0 до момента T [если скорость движения — переменная, зависящая от времени, $v = f(t)$], определяется по формуле

$$S = \int_{t_0}^{T} v\,dt.$$

Работа, затраченная силой на передвижение тела от $x = a$ до $x = b$ по прямой Ox, совпадающей с направлением силы [если величина силы — переменная $F = f(x)$] определяется по формуле (рис. 314)

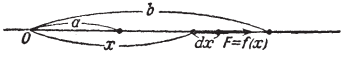


Рис. 314.

$$A = \int_a^b F\,dx\ *$$

Давление, производимое жидкостью с удельным весом γ на одну сторону погруженной в нее вертикальной пластинки, если расстояние (x) точек пластинки до уровня жидкости изменяется от a до b (рис. 315), определяется по формуле

$$P = \int_a^b \gamma\, xy\,dx,$$

где y — длина горизонтального сечения пластинки [$y = f(x)$].

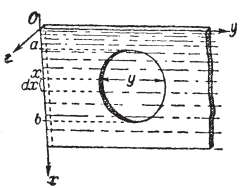


Рис. 315.

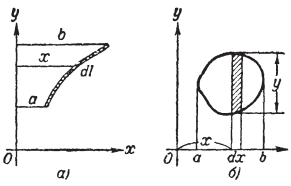


Рис. 316.

Момент инерции: 1) дуги однородной кривой $y = f(x)$ $[a \leqslant x \leqslant b]$ относительно оси Oy (рис. 316, *а*) определяется по формуле

$$I_y = \delta \int_a^b x^2\,dl = \delta \int_a^b x^2 \sqrt{1 + (y')^2}\,dx \qquad (\delta \text{ — линейная плотность});$$

---

* В общем случае, если направление силы не совпадает с направлением движения, а также если тело движется по криволинейному пути, работа вычисляется как криволинейный интеграл (см. стр. 537).

2) однородной плоской фигуры (рис. 316, *б*) относительно оси Oy — по формуле

$$I_x = \delta \int_a^b x^2 y\,dx \qquad (\delta \text{ — плотность фигуры}).$$

где y — длина сечения, параллельного оси Oy. См. также стр. 428.

Центр тяжести C *дуги* (рис. 317, *а*) однородной плоской кривой $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ имеет координаты

$$x_C = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+y'^2}\,dx}{L}, \qquad y_C = \frac{\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx}{L},$$

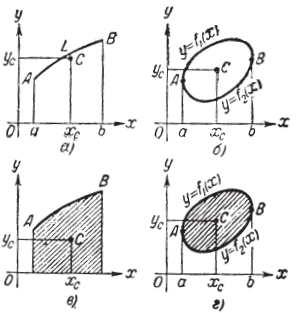


Рис. 317.

где L — длина кривой (см. стр. 394—395). Центр тяжести *замкнутой кривой* (рис. 317, *б*):

$$x_C = \frac{\int_a^b x\left(\sqrt{1+(y_1')^2} + \sqrt{1+(y_2')^2}\right)dx}{L},$$

$$y_C = \frac{\int_a^b \left(y_1\sqrt{1+(y_1')^2} + y_2\sqrt{1+(y_2')^2}\right)dx}{L},$$

где $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ — уравнения верхней и нижней частей контура, L — длина всего контура.

1-*я теорема Гюльдена*. Поверхность тела, описываемого плоской кривой при вращении ее около оси, лежащей в плоскости этой кривой и не пересекающей ее, равна произведению длины кривой на длину окружности, описываемой при этом вращении центром тяжести кривой:

$$S_{\text{вр}} = L \cdot 2\pi y_C.$$

Центр тяжести C однородной *криволинейной трапеции* (рис. 317, *в*) имеет координаты

$$x_C = \frac{\int_a^b xy\,dx}{S}, \qquad y_C = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx}{S},$$

где S — площадь трапеции, $y = f(x)$ — уравнение кривой AB. Центр тяжести *произвольной плоской фигуры* (рис. 317, *г*)

$$x_c = \frac{\int_a^b x\,(y_1 - y_2)\,dx}{S}, \qquad y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b (y_1^2 - y_2^2)\,dx}{S},$$

где $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ — уравнения верхней и нижней частей контура, S — площадь фигуры.

2-*я теорема Гюльдена.* Объем тела, описываемого плоской фигурой при вращении ее около оси, лежащей в плоскости этой фигуры и не пересекающей ее, равен произведению площади фигуры на длину окружности, описываемой при вращении центром тяжести этой площади

$$V_{\text{вр}} = S \cdot 2\pi y_c.$$

О центрах тяжести плоских фигур и тел см. стр. 428—429 (кратные интегралы).

11. Несобственные интегралы

Общие сведения. Простейшими обобщениями понятия определенного интеграла (стр. 383—384) являются *несобственные интегралы* *.

Два основных типа несобственных интегралов:

1) *Интеграл с бесконечными пределами.* Областью задания подинтегральной функции является замкнутая полуось $[a, \infty)$ или $(-\infty, b]$ или же вся числовая прямая $(-\infty, +\infty)$.

2) *Интегралы от разрывных функций.* Заданная функция непрерывна во всем интервале от a до b, кроме некоторого конечного числа его отдельных точек, которые называются *особыми.*

Могут встретиться и более сложные случаи — комбинации обоих типов.

Интегралы с бесконечными пределами.

Определения. Пусть область задания функции — замкнутая полуось $[a, \infty)$. По определению

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{B\to\infty} \int_a^B f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Если этот предел существует, то интеграл (1) *существует* или *сходится* и называется *несобственным интегралом.* Если же предела не существует, то интеграл (1) *не существует* или *расходится.* В случае, если $\lim\limits_{B\to\infty} \int\limits_a^B f(x)\,dx = \infty$, применяют обозначение

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \infty;$$

этот интеграл является расходящимся.

* Понятие интеграла может быть обобщено и на более сложные случаи, когда областью задания функции (область интегрирования) является множество значений некоторой функции (*интеграл Стильтьеса*). См. об этом в полных курсах анализа, например, Фихтенгольц, т. III, стр. 587 справочника.

Аналогично определяются несобственные интегралы **для функции, заданной на полуоси** $(-\infty, b]$ **или на всей числовой прямой** $(-\infty, +\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{A\to-\infty} \int_{A}^{b} f(x)\,dx, \tag{2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}} \int_{A}^{B} f(x)\,dx\,*. \tag{3}$$

Геометрический смысл интеграла с бесконечными пределами (1), (2) и (3) — предел площадей фигур, изображенных на рис. 318, *а*, *б*, *в*.

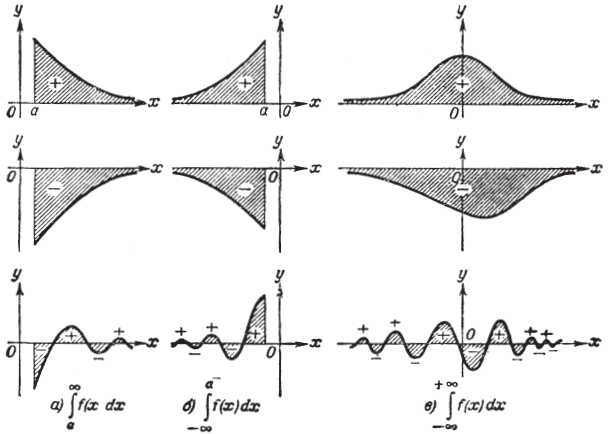


Рис. 318.

Примеры:

1) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{B\to\infty} \int_1^{B} \frac{dx}{x} = \lim_{B\to\infty} \ln B = \infty$ (расходится).

---

* Числа A и B стремятся к бесконечности независимо одно от другого. Если предела (3) не существует, но существует

$$\lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{+A} f(x)\,dx, \tag{4}$$

то предел (4) называется *главным значением несобственного интеграла*,

2) $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{B\to\infty} \int\limits_2^{B} \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{B\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{B}\right) = \frac{1}{2}$ (сходится),

3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}} \int\limits_A^B \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}} [\operatorname{arctg} B - \operatorname{arctg} A] =$

$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ (сходится).

Если пределы (1), (2), (3) трудно определить непосредственно или требуется только установить, сходятся интегралы или нет, то можно применить какой-либо из достаточных признаков сходимости.

Достаточные признаки сходимости. Здесь рассмотрен только интеграл типа (1). Для интеграла типа (2) можно сделать замену переменной $x = -z$ и свести интеграл к типу (1):

$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{\infty} f(-x)\,dx.$$

Интеграл типа (3) разбивается на сумму двух интегралов типов (2) и (1):

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

где c — произвольное число.

Признак 1. Если существует интеграл $\int\limits_a^{\infty} |f(x)|\,dx$, то существует и интеграл (1). В этом случае интеграл (1) называется *абсолютно сходящимся*, а функция $f(x)$ — *абсолютно интегрируемой* на полуоси $[a, +\infty)$.

Признак 2. Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ — функции положительные и удовлетворяют условию $f(x) \leqslant \varphi(x)$ при $a \leqslant x < \infty$, то из сходимости интеграла $\int\limits_a^{\infty} \varphi(x)\,dx$ вытекает сходимость интеграла $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$, а из расходимости интеграла $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ — расходимость интеграла $\int\limits_a^{\infty} \varphi(x)\,dx$.

В частности, полагая $\varphi(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ и учитывая, что $\int\limits_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > 1$ $\left[\text{он равен } \frac{1}{(\alpha-1)\,a^{\alpha-1}}\right]$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$, можно привести указанный признак к следующему:

Признак 3. Если $f(x)$ — функция положительная при $a \leqslant x < \infty$ и существует такое число $\alpha > 1$, что при достаточно больших x

$$f(x) \cdot x^{\alpha} < \infty,$$

то интеграл (1) сходится; если же $f(x)$ положительна и существует такое число $\alpha \leqslant 1$, что

$$f(x) \cdot x^{\alpha} > c > 0,$$

то интеграл (1) расходится.

Пример: $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^{3/2}\,dx}{1+x^2}$. Полагая $\alpha = \frac{1}{2}$, имеем $\frac{x^{3/2}}{1+x^2} \cdot x^{1/2} = \frac{x^2}{1+x^2} \to 1$;

данный интеграл расходится.

Связь несобственных интегралов с бесконечными рядами. Если $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — произвольная безгранично возрастающая бесконечная последовательность, т. е.

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots, \quad \lim_{n \to \infty} x_n = \infty, \tag{А}$$

и функция $f(x)$ положительна при $a \leqslant x < \infty$, то вопрос о сходимости интеграла (1) можно свести к вопросу о сходимости ряда

$$\int\limits_a^{x_1} f(x)\,dx + \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx + \ldots \tag{Б}$$

Если ряд (Б) сходится, то интеграл (1) сходится и равен сумме этого ряда; если ряд (Б) расходится, то расходится и интеграл (1). Это дает возможность использовать признаки сходимости рядов для сходимости интегралов. [Интегральный признак сходимости рядов (стр. 295) сводил вопрос о сходимости ряда к сходимости несобственного интеграла.]

Интегралы от разрывных функций.

Определение. Пусть область задания функции — полуоткрытый интервал $[a, b)$ или же весь замкнутый интервал $[a, b]$, но в точке b предел $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \infty$. И в том и в другом случаях, по определению,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx. \tag{1}$$

Если этот предел существует, то интеграл (1) *существует* или *сходится* и называется *несобственным интегралом*. Если же предела не существует, то интеграл (1) *не существует* или *расходится*. В случае, если $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \infty$, применяют обозначение

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \infty;$$

этот интеграл является расходящимся.

Интеграл (1) **всегда** существует, если функция $f(x)$ кусочно-непрерывна и ограничена в области $[a, b)$. В дальнейшем будет предполагаться, что функция $f(x)$ не ограничена, т. е. что $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \infty$.

Аналогично определяется несобственный интеграл для функции, заданной в интервале, открытом слева: $(a, b]$, или в интервале $[a, b]$, но при $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx. \tag{2}$$

Наконец, если функция задана на всем интервале $[a, b]$ за исключением его внутренней точки c $(a < c < b)$, т. е. в двух полуоткрытых интервалах $[a, c)$ и $(c, b]$, или определена и в точке c, но так, что $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$, то несобственный интеграл определяется так:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\delta \to 0} \int_{c+\delta}^b f(x)\,dx^*. \tag{3}$$

Числа ε и δ стремятся к нулю независимо одно от другого. Если предела (3) не существует, но существует

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx \right\}, \tag{4}$$

то предел (4) называется *главным значением несобственного интеграла.*

Геометрический смысл интегралов от разрывных функций

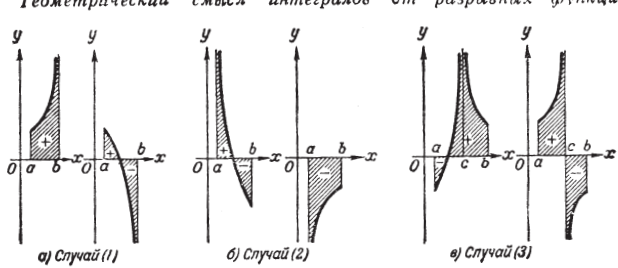


Рис. 319.

(1), (2) и (3) — площадь бесконечно протяженных фигур, имеющих вид изображенный на рис. 319 (кривые имеют вертикальную асимптоту).

---

* Аналогично случаю (1), в интегралах (2) и (3) будет предполагаться, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ и, соответственно, $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$.

Примеры: 1) $\int\limits_0^b \frac{dx}{\sqrt{x}}$; **случай** (2), особая точка $x = 0$;

$$\int\limits_0^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_\varepsilon^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} (2\sqrt{b} - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2\sqrt{b} \quad \text{(сходится).}$$

2) $\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x\, dx$; случай (1), особая точка $x = \frac{\pi}{2}$;

$$\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_0^{\pi/2 - \varepsilon} \operatorname{tg} x\, dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\ln \cos 0 - \ln \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\right] = \infty \text{ (расходится).}$$

3) $\int\limits_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; случай (3), особая точка $x = 0$;

$$\int\limits_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \lim_{\delta \to 0} \int\limits_{\delta}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{3}{2}(\varepsilon^{2/3} - 1) + \lim_{\delta \to 0} \frac{3}{2}(4 - \delta^{2/3}) = \frac{9}{2} \quad \text{(сходится).}$$

4) $\int\limits_{-2}^{+2} \frac{2x\,dx}{x^2 - 1}$; случай (3); особые точки $x = -1$ и $x = +1$;

$$\int\limits_{-2}^{+2} \frac{2x\,dx}{x^2 - 1} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{-2}^{-1-\varepsilon} + \lim_{\substack{\delta \to 0 \\ \gamma \to 0}} \int\limits_{-1+\delta}^{1-\gamma} + \lim_{\gamma \to 0} \int\limits_{1+\gamma}^{+2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \ln (x^2 - 1) \Big|_{-2}^{-1-\varepsilon} + \ldots =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} [\ln (1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2 - 1) - \ln 3] + \ldots = \infty \quad \text{(расходится).}$$

О применении основной теоремы интегрального исчисления. При вычислении несобственных интегралов с особыми точками типа (3) **нельзя** механически применять основную теорему (стр. 386 — 387)

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b, \text{ где } F'(x) = f(x),$$

не учитывая особых точек внутри интервала (a, b); **это может**

привести к ошибкам. Так, применив основную теорему к примеру 4, получаем:

$$\int_{-2}^{+2} \frac{2x\,dx}{x^2-1} = \ln(x^2-1)\Big|_{-2}^{+2} = \ln 3 - \ln 3 = 0,$$

в то время как этот интеграл — расходящийся.

Общее правило: основную теорему для случая (3) можно применять только тогда, когда первообразная функция от $f(x)$ в особой точке непрерывна.

В примере 4 этого нет: функция $\ln(x^2-1)$ при $x = \pm 1$ разрывна; в примере же (3) функция $\frac{3}{2}x^{2/3}$ при $x = 0$ непрерывна и поэтому к примеру 3 основную теорему применить можно:

$$\int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}x^{2/3}\Big|_{-1}^{8} = \frac{3}{2}(8^{2/3} - 1^{2/3}) = \frac{9}{2}.$$

Достаточные признаки сходимости интеграла от разрывной функции.

1) Если существует интеграл $\int_a^b |f(x)|\,dx$, то существует и интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, который в этом случае называется *абсолютно сходящимся*, а функция $f(x)$ — *абсолютно интегрируемой* в данном интервале.

2) Если $f(x)$ — функция положительная в области (a, b) и существует такое число $\alpha < 1$, что при x, достаточно близких к b,

$$f(x)(b-x)^{\alpha} < \infty,$$

то интеграл (1) сходится; если же $f(x)$ положительная в области (a, b) и существует такое число $\alpha \geqslant 1$, что при x, достаточно близких к b,

$$f(x)(b-x)^{\alpha} > c > 0,$$

то интеграл (1) расходится.

12. *Интегралы, зависящие от параметра*

Определение. Определенный интеграл

$$\int_a^b f(x, y)\,dx = F(y) \tag{1}$$

является функцией одной переменной y, называемой в данном случае *параметром*.

Функция $F(y)$ во многих случаях не является элементарной функцией. Интеграл (1) может быть интегралом в обычном смысле или — несобственным * [с бесконечными пределами или от разрывной функции $f(x, y)$].

Пример:

$$\Gamma(y) = \int_0^\infty x^{y-1} e^{-x}\, dx \quad \text{(сходится при } y > 0\text{)}$$

— *гамма-функция* или *эйлеров интеграл второго рода.*

Дифференцирование под знаком интеграла. Если функция (1) определена в интервале $c \leqslant y \leqslant e$ и функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant e$ и имеет в этой области частную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$, то при любом y в интервале $[c, e]$ имеет место формула

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx \tag{2}$$

(*дифференцирование под знаком интеграла*).

Пример В любом интервале при $y > 0$

$$\frac{d}{dy}\int_0^1 \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\, dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right) dx = -\int_0^1 \frac{x\, dx}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{y^2}{1 + y^2}.$$

Проверка: $\int_0^1 \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\, dx = \operatorname{arctg}\frac{1}{y} + \frac{1}{2}\, y \ln\frac{y^2}{1 + y^2}$;

$$\frac{d}{dy}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{y} + \frac{1}{2}\, y \ln\frac{y^2}{1 + y^2}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{y^2}{1 + y^2}.$$

При $y = 0$ условие непрерывности функции нарушено; производной не существует.

Обобщение формулы (2) *для случая, когда и пределы интеграла зависят от параметра.* Если, при тех же условиях, функции $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ определены в интервале $[c, e]$ и имеют непрерывные производные $\alpha'(y)$, $\beta'(y)$ и если кривые $x = \alpha(y)$, $x = \beta(y)$ не выходят из прямоугольника $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant e$, то формула (2) допускает обобщение:

$$\frac{d}{dy}\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\, dx =$$

$$= \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx + \beta'(y) \cdot f(\beta(y), y) - \alpha'(y) \cdot f(\alpha(y), y). \tag{2'}$$

---

* Теорию сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра, см. в полных курсах анализа, например, Фихтенгольц, т. II, стр. 587 справочника.

Интегрирование под знаком интеграла. Если функция (1) определена в интервале $[c, e]$ и функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq e$, то имеет место формула

$$\int_c^e \left[\int_a^b f(x, y)\, dx\right] dy = \int_a^b \left[\int_c^e f(x, y)\, dy\right] dx \qquad (3)$$

(*интегрирование под знаком интеграла*).

Примеры: 1) $f(x, y) = x^y$ $(0 \leq x \leq 1,\ a \leq y \leq b;\ a > 0)$. При $a > 0$ условие непрерывности соблюдено: функция x^y разрывна при $x = 0$, $y = 0$. Следовательно,

$$\int_a^b \left[\int_0^1 x^y dx\right] dy = \int_0^1 \left[\int_a^b x^y dy\right] dx.$$

Левая часть дает $\int_a^b \frac{dy}{1+y} = \ln \frac{1+b}{1+a}$; правая часть дает $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx$;

неопределенный интеграл не выражается в элементарных функциях, но определенный интеграл найден:

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx = \ln \frac{1+b}{1+a} \quad (0 < a < b).$$

2) $f(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$ $(0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1)$. В точке (0, 0) функция разрывна, формула (3) неприменима. Проверка:

$$\int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx = \frac{x}{x^2+y^2}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{1+y^2};\quad \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \operatorname{arctg} y\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}\, dy = -\frac{y}{x^2+y^2}\Big|_{y=0}^{y=1} = -\frac{1}{x^2+1};$$

$$-\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = -\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = -\frac{\pi}{4}.$$

13. Таблица некоторых определенных интегралов *

Интегралы от **показательных функций** (в сочетании с алгебраическими, тригонометрическими и логарифмическими)

1) $\int\limits_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \dfrac{\Gamma(n+1)^{**}}{a^{n+1}}$ при $a > 0$, $n > -1$.

В частности, при $n > 0$ целом этот интеграл равен $\dfrac{n!}{a^{n+1}}$.

2) $\int\limits_0^\infty x^n e^{-ax^2} dx = \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^{**}}{2a^{(n+1)/2}}$ при $a > 0$, $n > -1$.

В частности, при n целом четном ($n = 2k$) этот интеграл равен $\dfrac{1 \cdot 3 \ldots (2k-1)\sqrt{\pi}}{2^{k+1} a^{k+1/2}}$, а при n целом нечетном ($n = 2k+1$) равен $\dfrac{k!}{2a^{k+1}}$.

3) $\int\limits_0^\infty e^{-a^2x^2} dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2a}$ при $a > 0$.

4) $\int\limits_0^\infty x^2 e^{-a^2x^2} dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{4a^3}$ при $a > 0$.

5) $\int\limits_0^\infty e^{-a^2x^2} \cos bx\, dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2a} \cdot e^{-b^2/4a^2}$ при $a > 0$.

6) $\int\limits_0^\infty \dfrac{x\, dx}{e^x - 1} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

7) $\int\limits_0^\infty \dfrac{x\, dx}{e^x + 1} = \dfrac{\pi^2}{12}$.

---

* Более полные таблицы определенных интегралов см. Рыжик и Градштейн (см. стр. 585 справочника), Bjerens de Haan, Leiden, 1939.

** О функции Γ (гамма) см. стр. 162; таблицу $\Gamma(x)$ см. стр. 75.

8) $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin x}{x}\,dx = \operatorname{arcctg} a = \operatorname{arctg}\frac{1}{a}$ при $a > 0$.

9) $\int\limits_0^\infty e^{-x}\ln x\,dx = -C \approx -0{,}5772$ *.

Интегралы от тригонометрических функций (в сочетании с алгебраическими)

10) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2\alpha+1}x\cos^{2\beta+1}x\,dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)}{2\Gamma(\alpha+\beta+2)} = \frac{1}{2}B(\alpha+1,\beta+1)$** $=$

$$= \frac{\alpha!\beta!}{2(\alpha+\beta+1)!}$$ (при α и β целых положительных).

Эта формула справедлива для любых α и β; ею можно пользоваться для нахождения

$$\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{\sin x}\,dx, \quad \int\limits_0^{\pi/2}\sqrt[3]{\sin x}\,dx, \quad \int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt[3]{\cos x}}$$ и т. п.

11) $\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{при } a > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{» } a < 0. \end{cases}$

12) $\int\limits_0^\alpha \frac{\cos ax\,dx}{x} = \infty$ (α — произвольное число).

13) $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{tg} ax\,dx}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{при } a > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{при } a < 0. \end{cases}$

14) $\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\,dx = \ln\frac{b}{a}$.

---

* C — постоянная Эйлера (см. стр. 278).

** $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ — бэта-функция или эйлеров интеграл первого рода, $\Gamma(x)$ — гамма-функция или эйлеров интеграл второго рода (см. стр. 162).

15) $$\int_0^\infty \frac{\sin x \cos ax}{x}\,dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{при } |a|<1, \\ \frac{\pi}{4} & \text{» } |a|=1, \\ 0 & \text{» } |a|>1. \end{cases}$$

16) $$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

17) $$\int_0^\infty \frac{x \sin bx}{a^2+x^2}\,dx = \pm\frac{\pi}{2}\,e^{-|ab|}$$ (знак совпадает со знаком числа b).

18) $$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,e^{-|a|}.$$

19) $$\int_0^\infty \frac{\sin^2 ax}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,|a|.$$

20) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

21) $$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} = \frac{1}{2k}\ln\frac{1+k}{1-k} \text{ при } |k|<1.$$

22) $$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} = \frac{1}{k}\arcsin k \text{ при } |k|<1.$$

23) $$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x\,dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} = \frac{1}{k^2}(K-E)^* \text{ при } |k|<1.$$

24) $$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x\,dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} = \frac{1}{k^2}\left[E-(1-k^2)K\right]^* \text{ при } |k|<1.$$

---

* E и K — полные эллиптические интегралы:

$E = E\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$, $K = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$ (см. стр. 343 и таблицу на стр. 801).

25) $\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos ax\,dx}{1-2b\cos x+b^2} = \frac{\pi b^a}{1-b^2}$ при a целом $\geqq 0$, $|b|<1$.

Интегралы от логарифмических функций (в сочетании с алгебраическими и тригонометрическими)

26) $\int\limits_0^1 \ln\ln x\,dx = -C \approx -0{,}5772$ * (сводится к № 9).

27) $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{x-1}\,dx = \frac{\pi^2}{6}$ (сводится к № 6).

28) $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{x+1}\,dx = -\frac{\pi^2}{12}$ (сводится к № 7).

29) $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx = \frac{\pi^2}{8}$.

30) $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{8}\ln 2$.

31) $\int\limits_0^1 \ln\left(\frac{1}{x}\right)^a dx = \Gamma(a+1)$ ** $(-1<a<\infty)$.

32) $\int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \ln\cos x\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

33) $\int\limits_0^{\pi} x\ln\sin x\,dx = -\frac{\pi^2\ln 2}{2}$.

34) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x\ln\sin x\,dx = \ln 2 - 1$.

---

* C — постоянная Эйлера (см. стр. 278).
** $\Gamma(x)$ — гамма-функция (см. стр. 162 и таблицу на стр. 75).

35) $\int\limits_0^{\pi} \ln(a \pm b\cos x)\,dx = \pi \ln \dfrac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{2}$ при $a \geqslant b$.

36) $\int\limits_0^{\pi} \ln(a^2 - 2ab\cos x + b^2)\,dx = \begin{cases} 2\pi \ln a & (a \geqslant b > 0), \\ 2\pi \ln b & (b \geqslant a > 0). \end{cases}$

37) $\int\limits_0^{\pi/2} \ln \operatorname{tg} x\,dx = 0.$

38) $\int\limits_0^{\pi/4} \ln(1 + \operatorname{tg} x)\,dx = \dfrac{\pi}{8} \ln 2.$

Интегралы от алгебраических функций

39) $\int\limits_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\,dx = 2\int\limits_0^1 x^{2\alpha+1}(1-x^2)^{\beta}\,dx =$

$= \dfrac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} = \mathrm{B}(\alpha+1, \beta+1)^*$ (сводится к № 10).

40) $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{dx}{(1+x)\,x^{\alpha}} = \dfrac{\pi}{\sin \alpha\pi}$ при $a < 1$.

41) $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{dx}{(1-x)x^{\alpha}} = -\pi \operatorname{ctg} \alpha\pi$ при $a < 1$.

42) $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{x^{a-1}}{1+x^b}\,dx = \dfrac{\pi}{b \sin \dfrac{a\pi}{b}}$ при $0 < a < b$.

---

* $\mathrm{B}(x, y) = \dfrac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ — бэта-функция или эйлеров интеграл первого рода, $\Gamma(x)$ — гамма-функция или эйлеров интеграл второго рода (см. стр. 162).

43) $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^a}} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{a}\right)^*}{a\,\Gamma\left(\frac{2+a}{2a}\right)}.$$

44) $$\int_0^1 \frac{dx}{1+2x\cos a+x^2} = \frac{a}{2\sin a} \quad \left(0<a<\frac{\pi}{2}\right).$$

45) $$\int_0^\infty \frac{dx}{1+2x\cos a+x^2} = \frac{a}{\sin a} \quad \left(0<a<\frac{\pi}{2}\right).$$

В. Криволинейные, кратные и поверхностные интегралы

Понятие определенного интеграла (см. стр. 383—384) может быть обобщено в различных направлениях. Областью интегрирования простого определенного интеграла был отрезок (интервал) $[a, b]$ числовой прямой. Если за область интегрирования взять отрезок некоторой кривой линии (плоской или пространственной), то получается криволинейный интеграл; если взять некоторую плоскую площадь, то — двойной интеграл; если часть поверхности, то — поверхностный интеграл; если часть пространства (объем), то — тройной интеграл.

14. Криволинейные интегралы первого типа

(Интегралы по длине кривой)

Определение. *Криволинейным интегралом первого типа*

$$\int_{(K)} f(x, y)\,ds$$

от функции двух переменных $u = f(x, y)$ (заданной в некоторой связной области **), *взятым по отрезку* $K \equiv \overset{\frown}{AB}$ *плоской кривой*, заданной своим уравнением (этот отрезок находится в той же области и называется *путем интегрирования*), называется число, получаемое следующим образом (рис. 320):

---

* $\Gamma(x)$ — гамма-функция (см. стр. 162 и таблицу на стр. 75).

** О связной области двух переменных см. стр. 287.

1) отрезок AB разбивается на n «элементарных отрезков» произвольными точками $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, идущими от начала отрезка $A \equiv A_0$ до его конца $B \equiv A_n$;

2) внутри (или на границе) каждого элементарного отрезка $A_{i-1}A_i$ выбирается одна произвольная точка M_i с координатами ξ_i, η_i;

3) значения функции $f(\xi_i, \eta_i)$ в этих выбранных точках умножаются на длины отрезков $A_{i-1}A_i = \Delta s_{i-1}$ (эти длины считаются **положительными**);

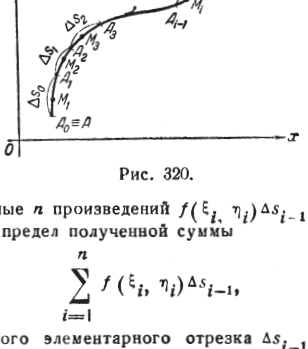


Рис. 320.

4) все полученные n произведений $f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_{i-1}$ складываются;

5) вычисляется предел полученной суммы

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_{i-1},$$

когда длина каждого элементарного отрезка Δs_{i-1} стремится к нулю (и, следовательно, $n \to \infty$).

Если этот предел существует и не зависит от выбора точек A_i и M_i, то он называется **криволинейным интегралом первого типа**:

$$\int_{(K)} f(x, y)\, ds = \lim_{\substack{\Delta s_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_{i-1}. \qquad (А)$$

Аналогично определяется *криволинейный интеграл первого типа от функции трех переменных* $u = f(x, y, z)$, *взятый по отрезку* K *пространственной кривой*:

$$\int_{(K)} f(x, y, z)\, ds = \lim_{\substack{\Delta s_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_{i-1}. \qquad (Б)$$

Теорема существования. Если функция $f(x, y)$ или $f(x, y, z)$ **непрерывна**, а кривая на отрезке K **непрерывна и имеет непрерывно вращающуюся касательную**, то **криволинейный интеграл** первого типа (А) или (Б) **существует (т. е. указанные пределы существуют и не зависят от выбора точек A_i и M_i).**

Вычисление криволинейного интеграла первого типа сводится к вычислению определенного интеграла. Если уравнения пути интегрирования даны в параметрическом виде (см. стр. 234 и 250) $x = x(t)$, $y = y(t)$ и (для кривой в пространстве) $z = z(t)$, то

$$\int\limits_{(K)} f(x, y)\, ds = \int\limits_{t_0}^{l} f[x(t), y(t)] \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt \quad \text{(в случае А)}$$

и

$$\int\limits_{(K)} f(x, y, z)\, ds = \int\limits_{t_0}^{T} f[x(t), y(t), z(t)] \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt$$

(в случае Б);

здесь t_0 — значение параметра t для точки A, T — для точки B, причем точки A и B выбираются так, чтобы было $t_0 < T$.

Если уравнения пути интегрирования даны в явном виде: $y = \varphi(x)$ для плоской кривой или $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$ для пространственной кривой, и a и b — соответственно абсциссы точек A и B $(a < b)$*, то

$$\int\limits_{(K)} f(x, y)\, ds = \int\limits_{a}^{b} f[x, \varphi(x)] \sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2}\, dx \quad \text{(в случае А)}$$

$$\int\limits_{(K)} f(x, y, z)\, ds = \int\limits_{a}^{b} f[x, \varphi(x), \psi(x)] \sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2 + [\psi'(x)]^2}\, dx$$

(в случае Б).

Приложения криволинейного интеграла первого типа:

1) *Длина* криволинейного отрезка K:

$$L_{(K)} = \int\limits_{(K)} ds.$$

2) *Масса* неоднородного криволинейного отрезка K, если δ — переменная линейная плотность [$\delta = f(x, y)$ для плоской или $\delta = f(x, y, z)$ для пространственной кривой]:

$$M_{(K)} = \int\limits_{(K)} \delta\, ds.$$

---

* При этом предполагается, что отрезок кривой K имеет такую форму, что каждой точке его проекции на ось Ox соответствует единственная точка отрезка K (точка кривой однозначно определяется своей абсциссой). Если этого нет, то отрезок K разбивают на несколько частей, каждая из которых обладает этим свойством; криволинейный интеграл, взятый по всему отрезку K, рассматривают как сумму интегралов, взятых по его частям.

15. Криволинейные интегралы второго типа

(Интегралы по проекции и интегралы общего вида)

Определения. *Криволинейным интегралом второго типа*

$$\int\limits_{(K)} f(x,\ y)\,dx \qquad (А_x)$$

или

$$\int\limits_{(K)} f(x,\ y,\ z)\,dx \qquad (Б_x)$$

от функции двух переменных $f(x, y)$ *или соответственно трех переменных* $f(x, y, z)$ (заданной в некоторой связной области), *взятым по проекции отрезка* $K \equiv \overset{\frown}{AB}$ *плоской* [*или пространственной*] *кривой* (путь интегрирования находится в той же области) *на ось* Ox, называется число, получаемое так же, как и криволинейный интеграл первого типа (см. стр. 412—413), с одним отличием: в этапе 3) значения функций $f(\xi_i, \eta_i)$ [соответственно $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$] умножаются не на длины отрезков $A_{i-1}A_i$, а на их проекции на ось Ox (см. рис. 321):

$$\Pr_x \overset{\frown}{A_{i-1}A_i} = x_i - x_{i-1} = \Delta x_{i-1}.$$

$$\int\limits_{(K)} f(x,\ y)\,dx = \lim_{\substack{\Delta x_{i-1}\to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta x_{i-1}, \qquad (А_x)$$

$$\int\limits_{(K)} f(x, y, z)\,dx = \lim_{\substack{\Delta x_{i-1}\to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_{i-1}. \qquad (Б_x)$$

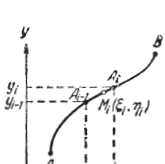


Рис. 321.

Аналогично определяются криволинейные интегралы второго типа, взятые по проекции отрезка K кривой на ось Oy [а для случая (Б) и на ось Oz]:

$$\int\limits_{(K)} f(x, y)\,dy = \lim_{\substack{\Delta y_{i-1}\to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta y_{i-1}, \qquad (А_y)$$

$$\int\limits_{(K)} f(x, y, z)\,dy = \lim_{\substack{\Delta y_{i-1}\to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta y_{i-1}, \qquad (Б_y)$$

$$\int\limits_{(K)} f(x, y, z)\,dz = \lim_{\substack{\Delta z_{i-1}\to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta z_{i-1}. \qquad (Б_z)$$

Теорема существования. Если функция $f(x, y)$ или $f(x, y, z)$ непрерывна, а кривая на отрезке K — непрерывна и имеет непрерывно вращающуюся касательную, то криволинейные интегралы второго типа $(А_x)$, $(А_y)$, $(Б_x)$, $(Б_y)$, $(Б_z)$ существуют.

Вычисление криволинейных интегралов второго типа сводится к вычислению определенных интегралов. Если уравнения пути интегрирования даны в параметрическом виде (см. стр. 234 и 250)

$$x = x(t),\ y = y(t) \quad \text{и (для кривой в пространстве)} \quad z = z(t),$$

то интегралы ($А_x$), ($А_y$), ($Б_x$), ($Б_y$), ($Б_z$) вычисляются по следующим формулам:

$$\int\limits_{(K)} f(x, y)\,dx = \int\limits_{t_0}^{T} f[x(t), y(t)]\,x'(t)\,dt, \qquad (А_x)$$

$$\int\limits_{(K)} f(x, y)\,dy = \int\limits_{t_0}^{T} f[x(t), y(t)]\,y'(t)\,dt, \qquad (А_y)$$

$$\int\limits_{(K)} f(x, y, z)\,dx = \int\limits_{t_0}^{T} f[x(t), y(t), z(t)]\,x'(t)\,dt, \qquad (Б_x)$$

$$\int\limits_{(K)} f(x, y, z)\,dy = \int\limits_{t_0}^{T} f[x(t), y(t), z(t)]\,y'(t)\,dt, \qquad (Б_y)$$

$$\int\limits_{(K)} f(x, y, z)\,dz = \int\limits_{t_0}^{T} f[x(t), y(t), z(t)]\,z'(t)\,dt. \qquad (Б_z)$$

Здесь t_0, T — значения параметра t соответственно для начала A и конца B отрезка. В отличие от криволинейного интеграла первого типа здесь не требуется, чтобы было $t_0 < T$; при перестановке точек A и B (перемена направления пути интегрирования) интегралы меняют знак на обратный.

Если уравнения пути интегрирования даны в явном виде: $y = \varphi(x)$ для плоской кривой и $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$ для пространственной кривой и a и b соответственно абсциссы точек A и B*, то в формулах ($А_x$) — ($Б_z$) параметром t служит абсцисса x.

Криволинейный интеграл общего вида**. Если в некоторой связной области даны две функции от двух переменных $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ [или три функции от трех переменных $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$] и отрезок K плоской [или соответственно пространственной] кривой, то *криволинейным интегралом общего вида* называется сумма интегралов второго типа по всем проекциям:

$$\int\limits_{(K)} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{(K)} P\,dx + \int\limits_{(K)} Q\,dy \quad \text{для плоской кривой,}$$

$$\int\limits_{(K)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{(K)} P\,dx + \int\limits_{(K)} Q\,dy + \int\limits_{(K)} R\,dz \quad \text{для пространственной кривой.}$$

* Здесь требование $a < b$ не обязательно.

** Векторное изложение теории криволинейного интеграла общего вида и механическое значение такого интеграла см. в главе «Теория поля» (стр. 537).

Свойства криволинейного интеграла.

1) Интеграл может быть разбит промежуточной точкой C (или точкой C, лежащей на кривой вне отрезка $\overset{\smile}{AB}$) на два интеграла:

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\overset{\smile}{AC}} P\,dx + Q\,dy + \int\limits_{\overset{\smile}{CB}} P\,dx + Q\,dy \text{ * (рис. 322, } a, \text{ } б).$$

2) При интегрировании по тому же пути, но в обратном направлении, интеграл меняет знак на обратный:

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} P\,dx + Q\,dy = -\int\limits_{\overset{\smile}{BA}} P\,dx + Q\,dy \text{ *}.$$

3) Криволинейный интеграл в общем случае зависит как от начальной и конечной точек A и B, так и от соединяющего их пути интегрирования

$$\int\limits_{\overset{\smile}{ACB}} P\,dx + Q\,dy \neq \int\limits_{\overset{\smile}{ADB}} P\,dx + Q\,dy \text{ *} \quad \text{(рис. 323).}$$

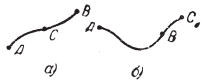


Рис. 322.

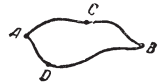


Рис. 323.

Примеры вычислений криволинейного интеграла.

1) $I = \int\limits_{(K)} xy\,dx + yz\,dy + zx\,dz$, где (K) — один виток винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ (см. стр. 255) от $t_0 = 0$ до $T = 2\pi$:

$$T = \int\limits_0^{2\pi} (-a^3\sin^2 t\cos t + a^2 bt\sin t\cos t + ab^2 t\cos t)\,dt = -\frac{\pi a^2 b}{2}.$$

2) $I = \int\limits_{(K)} y^2 dx + (xy - x^2)\,dy$, где (K) — дуга параболы $y^2 = 9x$ от точки A (0, 0) до B (1, 3):

$$I = \int\limits_0^3 \left[\frac{2}{9}y^3 + \left(\frac{y^3}{9} - \frac{y^4}{81}\right)\right] dy = 6\frac{3}{20}.$$

Циркуляцией называется криволинейный интеграл по замкнутому контуру (обозначается $\oint\limits_{(C)} P\,dx + Q\,dy$ или $\oint\limits_{(C)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, где C — замкнутый путь интегрирования, начало которого A совпадает с концом B). В общем случае циркуляция не равна нулю

* Аналогичные формулы справедливы и для случая трех переменных.

Площадь плоской фигуры может быть вычислена как циркуляция

$$S = \frac{1}{2} \oint_{(C)} (x\,dy - y\,dx),$$

где C — контур, ограничивающий плоскую фигуру (путь интегрирования проходится в направлении против часовой стрелки).

Условие независимости криволинейного интеграла от пути (*интегрируемость полного дифференциала*).

Двумерный случай. Для того чтобы криволинейный интеграл

$$\int P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy,$$

где P и Q — функции непрерывные в односвязной области, зависел только от начальной и конечной точек A и B и не зависел от соединяющего их пути, лежащего в этой области, т. е. при любых A и B и любых путях ACB и ADB (рис. 323) имело место равенство $\int_{\overset{\frown}{ACB}} P\,dx + Q\,dy = \int_{\overset{\frown}{ADB}} P\,dx + Q\,dy$, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая функция двух переменных $U(x, y)$, полным дифференциалом которой являлось бы подинтегральное выражение:

$$P\,dx + Q\,dy = dU. \tag{1}$$

т. е.

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Q = \frac{\partial U}{\partial y}. \tag{2}$$

Такая функция $U(x, y)$ называется *первообразной* * от полного дифференциала (1).

Необходимый и достаточный признак существования первообразной функции (*условие интегрируемости* выражения $P\,dx + Q\,dy$):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{3}$$

при условии непрерывности этих частных производных.

Трехмерный случай. Условие независимости криволинейного интеграла

$$\int P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$$

от пути интегрирования аналогично: должна существовать *первообразная* функция $U(x, y, z)$ такая, что

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = dU, \tag{1'}$$

т. е.

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial U}{\partial z}. \tag{2'}$$

Условие интегрируемости в этом случае состоит из трех равенств, которые должны удовлетворяться одновременно:

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{3'}$$

при условии непрерывности этих частных производных.

* Первообразная функция $U(x, y)$ является *потенциалом* векторного поля $P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ (в другой терминологии — потенциалом с обратным знаком), см. стр. 538.

Вычисление первообразной функции. При выполнении условия (3) первообразная функция $U(x, y)$ равна криволинейному интегралу

$$U = \int\limits_{\overset{\frown}{AM}} P\,dx + Q\,dy$$

по любому пути [лежащему в области выполнения условия (3)], соединяющему произвольную фиксированную точку A с координатами (x_0, y_0) с переменной точкой M с координатами (x, y). Практически за этот путь [если он не выходит из области выполнения условия (3)] удобнее всего принять одну из двух ломаных AKM или ALM со сторонами, параллельными осям координат (рис. 324). Это дает две вычислительные формулы для первообразной $U(x, y)$ от полного дифференциала $P\,dx + Q\,dy$:

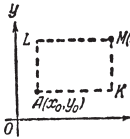


Рис. 324.

$$U = \int\limits_{\overline{AK}} + \int\limits_{\overline{KM}} + U(x_0, y_0) = \int\limits_{x_0}^{x} P(\xi, y_0)\,d\xi + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, \eta)\,d\eta + C, \qquad (4_1)$$

$$U = \int\limits_{\overline{AL}} + \int\limits_{\overline{LM}} + U(x_0, y_0) = \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, \eta)\,d\eta + \int\limits_{x_0}^{x} P(\xi, y)\,d\xi + C'. \qquad (4_2)$$

В трехмерном случае, аналогично, при выполнении условий (3) первообразная $U(x, y, z)$ вычисляется по следующей формуле (рис. 325)

Рис. 325.

$$U = \int\limits_{\overline{AK}} + \int\limits_{\overline{KL}} + \int\limits_{\overline{LM}} + U(x_0, y_0, z_0) =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} P(\xi, y_0, z_0)\,d\xi + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, \eta, z_0)\,d\eta +$$

$$+ \int\limits_{z_0}^{z} R(x, y, \zeta)\,d\zeta + C \qquad (4')$$

или по пяти аналогичным формулам, соответствующим другим возможным ломаным со сторонами, параллельными осям координат.

Примеры:

1) $P\,dx + Q\,dy = -\dfrac{y\,dx}{x^2+y^2} + \dfrac{x\,dy}{x^2+y^2}$; условие (3) удовлетворяется: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$. Применяем формулу (4_2), полагая в ней $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ (нельзя взять $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, так как в точке (0, 0) функции P и Q не непрерывны!):

$$U = \int\limits_{1}^{y} \frac{0 \cdot d\eta}{0^2+\eta^2} + \int\limits_{0}^{x} \frac{-y\,d\xi}{\xi^2+y^2} + U(0, 1) = -\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + C = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + C_1.$$

2) $P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$

$$= z\left(\frac{1}{x^2y} - \frac{1}{x^2+z^2}\right)dx + \frac{z}{xy^2}\,dy + \left(\frac{x}{x^2+z^2} - \frac{1}{xy}\right)dz.$$

Условия (3′) удовлетворяются. Применяем формулу (4′), полагая $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $z_0 = 0$.

$$U = \int_1^x 0 \cdot d\xi + \int_1^y 0 \cdot d\eta + \int_0^z \left(\frac{x}{x^2+\zeta^2} - \frac{1}{xy}\right)d\zeta + C = \operatorname{arctg}\frac{z}{x} - \frac{z}{xy} + C.$$

Циркуляция по плоскому контуру (криволинейный интеграл от $P\,dx + Q\,dy$ по замкнутой плоской кривой) *при выполнении условия* (3) *равна нулю* в том случае, если этот контур не содержит внутри себя точек, в которых одна из функций P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$ или $\frac{\partial Q}{\partial x}$ разрывна или не определена *

16. Двойной и тройной интегралы

Двойной (или двукратный) интеграл. Двойным интегралом функции двух переменных $u = f(x, y)$ **, распространенным на площадь S

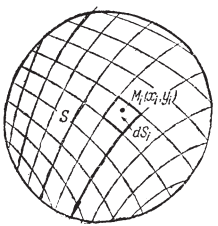


Рис. 326

$$\left[\text{обозначается } \int\limits_S f(x, y)\,dS,\right.$$

$$\left.\text{иногда } \iint\limits_S f(x, y)\,dS\right],$$

называют число получаемое следующим образом:

1) область S (рис. 326) разбивается произвольным образом на n «элементарных площадок»;

2) внутри (или на границе, каждой элементарной площадки произвольно выбирается одна точка $M_i(x_i, y_i)$;

3) значение функции u в этой точке $f(x_i, y_i)$ умножается на величину площади dS_i соответствующей площадки;

4) все полученные таким образом произведения $f(x_i, y_i)\,dS_i$ складываются;

5) находится предел полученной суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,dS_i$, когда каждая площадка стягивается в точку ***, и, следовательно, число их $n \to \infty$.

* Подробнее об этом см. Фихтенгольц, т. III (стр. 587 справочника).

** u рассматривается здесь как *функция точки* (см. стр. 286), которая может задаваться не только в декартовой системе координат.

*** Недостаточно требовать стремления к нулю dS. К нулю должен стремиться *диаметр площадки*, т. е. расстояние наиболее удаленных друг от друга двух точек площадки. Площадь прямоугольника, например, при уменьшении одной из его сторон стремится к нулю, но диаметр его остается конечным.

Если этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения площади S на элементарные площадки, ни от выбора точек $M_i(x_i, y_i)$, то он называется двойным интегралом от функции u, распространенным на площадь S (площадь S называется в этом случае *областью интегрирования*):

$$\int\limits_S f(x, y)\, dS = \lim_{\substack{\Delta S_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, dS_i. \qquad (1)$$

Теорема существования. Если функция $f(x, y)$ непрерывна во всей области интегрирования (замкнутой, т. е. включая точки на контуре площади), то интеграл (1) существует.

Геометрический смысл двойного интеграла — объем цилиндрического тела (рис. 327), ограниченного: 1) площадкой S на плоскости xOy, 2) цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz, а направляющей является контур площадки S, и 3) поверхностью $u = f(x, y)$. Каждый элемент суммы $f(x_i, y_i)\, dS_i$ дает объем призматического столбика с основанием dS_i и высотой $f(x_i, y_i)$. Объем получается со знаком «+» или «—», в зависимости от того, лежит ли соответствующая часть поверхности $u = f(x, y)$ над или под плоскостью xOy (если она пересекает эту плоскость, то объем разбивается на алгебраическую сумму отдельных слагаемых).

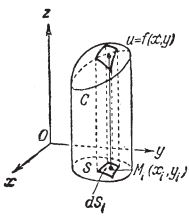


Рис. 327.

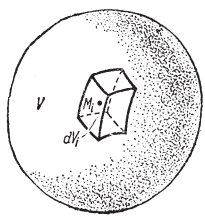


Рис. 328.

Тройной (трехкратный) интеграл функции трех переменных $u = f(x, y, z)$, распространенный на объем V

$$\left[\text{обозначается } \int\limits_V f(x, y, z)\, dV, \text{ иногда } \iiint\limits_V f(x, y, z)\, dV\right],$$

определяется аналогично двойному интегралу: тело V (рис. 328) разбивается на «элементарные тела» и рассматриваются произведения вида $f(x_i, y_i, z_i)\, dV_i$, где $M_i(x_i, y_i, z_i)$ — точка внутри (или на границе) элементарного тела, а dV_i — его объем. Тройным интегралом называется предел (если он существует и не зависит ни от способа разбиения объема V, ни от выбора точек M_i) суммы таких произведений для всех элементарных тел, на которые разбито тело, если каждое из этих элементарных тел стягивается в точку *, а следовательно, число их —

* В таком же смысле, как это понималось и для двойного интеграла: к нулю должна стремиться не величина объема, а *диаметр тела*, расстояние наиболее удаленных друг от друга двух точек тела.

к бесконечности:

$$\int\limits_V f(x,\ y,\ z)\,dV = \lim_{\substack{dV_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,\ y_i,\ z_i)\,dV_i{}^*.$$

Для тройного интеграла от непрерывной функции имеет место теорема существования, аналогичная приведенной выше.

17. Вычисление кратных интегралов

Вычисление двойного и тройного интегралов сводится к последовательному вычислению двух (трех) простых интегралов. Это производится различными способами в зависимости от выбора системы координат.

Двойной интеграл.

1) *В декартовых координатах.* Площадь разбивается координатными линиями на прямоугольники (рис. 329, *а*) и суммирование $f(x, y)\,dS$

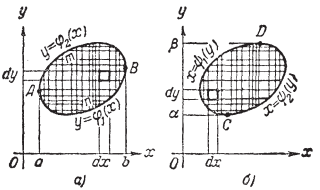


Рис. 329.

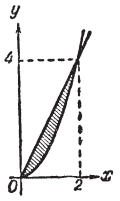


Рис. 330.

производится сначала по всем прямоугольникам вдоль каждой вертикальной полосы, а затем — по всем вертикальным полосам. Аналитически:

$$\int\limits_S f(x,\ y)\,dS = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy \right] dx = \int\limits_a^b \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy\,dx^{**},$$

где $y = \varphi_2(x)$ и $y = \varphi_1(x)$ — уравнения верхней $\overset{\frown}{(AmB)}$ и нижней $\overset{\frown}{(AnB)}$ частей кривой, ограничивающей S; a и b — абсциссы крайних левой и правой точек кривой; $dx\,dy = dS$ *(«элемент площади в декартовых координатах»)*. Первое интегрирование производится в предположении, что x — постоянная.

Вычисление в декартовых координатах можно проводить и в обратном порядке (см. рис. 329, *б*)

$$\int\limits_S f(x,\ y)\,dS = \int\limits_\alpha^\beta \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,\ y)\,dx\,dy.$$

---

* Аналогично определяется n-кратный интеграл в n-мерном числовом пространстве. См. Фихтенгольц, т. III, стр. 587 справочника.

** Условливаются не писать квадратных скобок, а относить «внутренний» интеграл (стоящий на втором месте) к переменной, дифференциал которой также является «внутренним» (т. е. стоит на первом месте).

Пример: $A=\int\limits_S xy^2\,dS$, где S — площадь между параболой $y=x^2$ и прямой $y=2x$ (рис. 330):

$$A=\int\limits_0^2\int\limits_{x^2}^{2x} xy^2\,dy\,dx=\int\limits_0^2 x\,dx\left[\frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^{2x}=\frac{1}{3}\int\limits_0^2(8x^4-x^7)\,dx=\frac{32}{5}$$

или

$$A=\int\limits_0^4\int\limits_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} xy^2\,dx\,dy=\int\limits_0^4 y^2\,dy\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}}=\frac{1}{2}\int\limits_0^4 y^2\left(y-\frac{y^2}{4}\right)dy=\frac{32}{5}.$$

2) *В полярных координатах.* Площадь разбивается координатными линиями на элементарные части, ограниченные двумя дугами концентрических окружностей и двумя проходящими через полюс лучами (рис. 331); подинтегральная функция выражается в полярных координатах: $w=f(\rho,\ \varphi)$, и

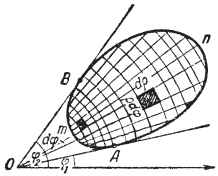


Рис. 331.

Рис. 332.

суммирование производится сначала вдоль каждого сектора, а затем — по всем секторам. Аналитически:

$$\int\limits_S f(\rho,\ \varphi)\,dS=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho,\ \varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi, \qquad (*)$$

где $\rho=\rho_1(\varphi)$ и $\rho=\rho_2(\varphi)$ — уравнения внутренней ($\overset{\frown}{AmB}$) и внешней ($\overset{\frown}{AnB}$) частей кривой, ограничивающей S; φ_1 и φ_2 — полярные углы крайних радиусов-векторов, касающихся площади, $\rho\,d\rho\,d\varphi=dS$ *(элемент площади в полярных координатах)*. Обратный порядок интегрирования применяется редко.

Пример: $A=\int\limits_S \rho\sin^2\varphi\,dS$, где S — площадь полукруга $\rho=3\cos\varphi$ (рис. 332);

$$A=\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{3\cos\varphi}\rho\sin^2\varphi\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\,d\varphi\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{3\cos\varphi}=$$

$$=9\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\cos^3\varphi\,d\varphi=1\frac{1}{5}.$$

3) *В произвольных криволинейных координатах* u, v, определяемых формулами

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

(см. стр. 199). Площадь разбивается координатными линиями $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ на элементарные части (рис. 333), подинтегральная функция выражается в координатах u, v и суммирование производится сначала вдоль одной полосы (например, $v = \text{const}$), а затем — по всем полосам. Аналитически:

$$\int_S f(u, v)\, dS = \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1(u)}^{v_2(u)} f(u, v)\, |D|\, dv\, du, \qquad (**)$$

где $v = v_1(u)$ и $v = v_2(u)$ — уравнения частей $\overset{\frown}{AmB}$ и $\overset{\frown}{AnB}$ кривой, ограничивающей S; u_1 и u_2 — координаты крайних линий, ограничивающих площадь S, $|D|$ — абсолютная величина якобиана

$$D = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

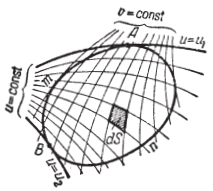


Рис. 333.

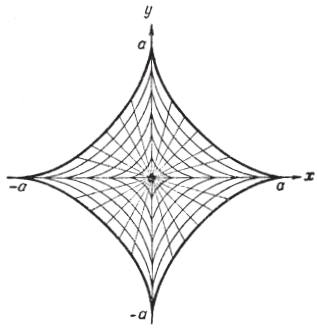


Рис. 334.

$|D|\, dv\, du = dS$ *(элемент площади в криволинейных координатах).*

Формула $(*)$ является частным случаем формулы $(**)$: для полярных координат $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, якобиан $D = \rho$.

Выбор криволинейных координат производится с тем расчетом, чтобы пределы интеграла $(**)$ были возможно более простыми.

Пример:

$$A = \int_S f(x, y)\, dS,$$

где S — площадь астроиды $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ (рис. 334).

Вводят криволинейные координаты $x = u \cos^3 v$, $y = u \sin^3 v$. Координатные линии: $u = c_1$ — семейство подобных астроид $x = c_1 \cos^3 t$, $y = c_1 \sin^3 t$; $v = c_2$ — лучи $y = kx$, где $k = \operatorname{tg}^3 c_2$.

$$D = \begin{vmatrix} \cos^3 v & -3u \cos^2 v \sin v \\ \sin^3 v & 3u \sin^2 v \cos v \end{vmatrix} = 3u \sin^2 v \cos^2 v,$$

$$A = \int_0^a \int_0^{2\pi} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot 3u \sin^2 v \cos^2 v\, dv\, du.$$

Тройной интеграл.

1) *В декартовых координатах.* Объем разбивается координатными поверхностями (в данном случае — плоскостями) на параллелепипеды (рис. 335), и суммирование $f(x, y, z)\,dV$ производится сначала по всем параллелепипедам вдоль каждого вертикального столбца (по z), затем — по столбцам вдоль каждого «пласта» (по y) и, наконец, по всем пластам (по направлению x). Аналитически:

$$\int\limits_V f(x, y, z)\,dV = \int\limits_a^b \left\{ \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int\limits_{\psi_1(x,\,y)}^{\psi_2(x,\,y)} f(x, y, z)\,dz \right] dy \right\} dx =$$

$$= \int\limits_a^b \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int\limits_{\psi_1(x,\,y)}^{\psi_2(x,\,y)} f(x, y, z)\,dz\,dy\,dx;$$

здесь $z = \psi_1(x, y)$ и $z = \psi_2(x, y)$ — уравнения нижней и верхней частей поверхности, ограничивающей объем V, т. е. частей, разделенных кривой Γ, а $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ — уравнения частей кривой C, являющейся проекцией Γ на плоскость xOy, т. е. частей, ограниченных точками $x = a$ и $x = b$.

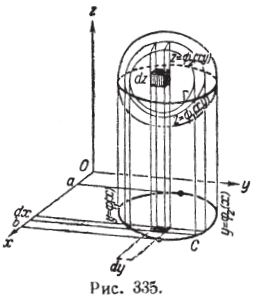


Рис. 335.

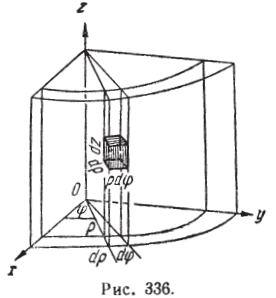


Рис. 336.

Как и в случае двойного интеграла, порядок интегрирования может быть любым; таким образом, вычисление тройного интеграла можно производить шестью способами.

Пример: Вычислить интеграл $I = \int\limits_V (y^2 + z^2)\,dV$, где V — объем пирамиды, ограниченной координатными плоскостями и плоскостью $x + y + z = 1$:

$$I = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} \int\limits_0^{1-x-y} (y^2 + z^2)\,dz\,dy\,dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left\{ \int\limits_0^{1-x} \left[\int\limits_0^{1-x-y} (y^2 + z^2)\,dz \right] dy \right\} dx = \frac{1}{30}.$$

2) *В цилиндрических координатах.* Объем разбивается на элементарные части координатными поверхностями: $\rho = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$, $z = \text{const}$. *Элемент объема*: $dV = \rho\,dz\,d\rho\,d\varphi$ (рис. 336). Функция выражается в цилиндрических координатах: $f(\rho, \varphi, z)$.

Формула:

$$\int\limits_V f(\rho, \varphi, z)\, dV = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \int\limits_{z_1(\rho, \varphi)}^{z_2(\rho, \varphi)} f(\rho, \varphi, z)\, \rho\, dz\, d\rho\, d\varphi. \qquad (*)$$

Пример (рис. 337): Вычислить интеграл $I = \int\limits_V dV$, распространен-

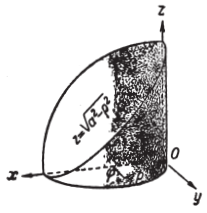


Рис. 337.

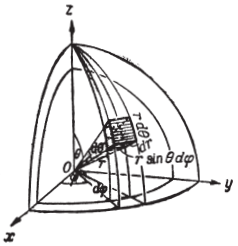


Рис. 338.

ный на объем, ограниченный плоскостями xOy и xOz, цилиндром $x^2+y^2=ax$ и сферой $x^2+y^2+z^2=a^2$ *:

$$z_1=0,\ z_2=\sqrt{a^2-x^2-y^2}=\sqrt{a^2-\rho^2};\ \rho_1=0,\ \rho_2=a\cos\varphi;\ \varphi_1=0,\ \varphi_2=\frac{\pi}{2}.$$

$$I=\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{a\cos\varphi}\int\limits_0^{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho\, dz\, d\rho\, d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/2}\left\{\int\limits_0^{a\cos\varphi}\left[\int\limits_0^{\sqrt{a^2-\rho^2}}dz\right]\rho\, d\rho\right\}d\varphi=\frac{a^3}{18}(3\pi-4).$$

3) *В сферических координатах.* **Объем** разбивается на элементарные части координатными поверхностями: $r=\text{const}$, $\varphi=\text{const}$, $\theta=\text{const}$. *Элемент объема*: $dV=r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$ (рис. 338). Функция выражается в сферических координатах: $f(r, \varphi, \theta)$:

$$\int\limits_V f(r, \varphi, \theta)\, dV=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int\limits_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)}\int\limits_{r_1(\theta, \varphi)}^{r_2(\theta, \varphi)} f(r, \varphi, \theta)\, r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi. \qquad (**)$$

---

* Поскольку здесь $f=1$, интеграл численно равен объему данного тела.

Пример: Вычислить интеграл $I=\int\limits_V \frac{\cos\theta}{r^2}\,dV$, распространенный на объем конуса, высота которого равна h, угол при вершине равен 2α и

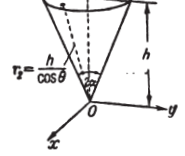


Рис. 339.

который расположен относительно системы координат согласно рис. 339.

$$r_1=0,\ r_2=\frac{h}{\cos\theta},\ \theta_1=0,\ \theta_2=\alpha,\ \varphi_1=0,\ \varphi_2=2\pi.$$

$$I=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\alpha}\int\limits_0^{h/\cos\theta}\frac{\cos\theta}{r^2}\,r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left\{\int\limits_0^{\alpha}\cos\theta\sin\theta\left[\int\limits_0^{h/\cos\theta}dr\right]d\theta\right\}d\varphi=2\pi h(1-\cos\alpha).$$

4) *В произвольных криволинейных координатах u, v, w*, определяемых формулами

$$x=x(u,\ v,\ w),\ y=y(u,\ v,\ w),\ z=z(u,\ v,\ w)$$

(см. стр. 217). Объем разбивается на элементарные части координатными поверхностями: $u=\text{const}$, $v=\text{const}$, $w=\text{const}$. *Элемент объема*:

$$dV=|D|\,du\,dv\,dw,\ \text{где}\ D=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}.$$

Подинтегральная функция выражается в координатах u, v, w:

$$\int\limits_V f(u,\ v,\ w)\,dV=\int\limits_{u_1}^{u_2}\int\limits_{v_1(u)}^{v_2(u)}\int\limits_{w_1(u,v)}^{w_2(u,v)}f(u,\ v,\ w)\,|D|\,dw\,dv\,du.\quad (***)$$

Формулы (*) и (**) являются частными случаями формулы (***); для цилиндрических координат $D=\rho$, для сферических $D=r^2\sin\theta$. Выбор криволинейных координат производится с тем расчетом, чтобы пределы интеграла (***) были возможно более простыми.

18. Приложения кратных интегралов

Двойные интегралы

Величина	Общая формула	В декартовых координатах	В полярных координатах
Площадь плоской фигуры	$S=\int\limits_S dS$	$=\iint dy\,dx$	$=\iint \rho\,d\rho\,d\varphi$
Площадь поверхности	$S_{\text{пов}}=\int\limits_S \frac{dS}{\cos\gamma}$ *	$=\iint\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dy\,dx$	$=\iint\sqrt{\rho^2+\rho^2\left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}\,d\rho\,d\varphi$
Объем цилиндрического тела (см. стр. 421)	$V=\int\limits_S z\,dS$	$=\iint z\,dy\,dx$	$=\iint z\,\rho\,d\rho\,d\varphi$
Момент инерции плоской фигуры относительно оси Ox	$I_x=\int\limits_S y^2\,dS$	$=\iint y^2\,dy\,dx$	$=\iint \rho^3\sin^2\varphi\,d\rho\,d\varphi$
Момент инерции плоской фигуры относительно полюса O	$I_O=\int\limits_S \rho^2\,dS$	$=\iint (x^2+y^2)\,dy\,dx$	$=\iint \rho^3\,d\rho\,d\varphi$
Масса плоской фигуры с поверхностной плотностью δ (функцией точки)	$M=\int\limits_S \delta\,dS$	$=\iint \delta\,dy\,dx$	$=\iint \delta\,\rho\,d\rho\,d\varphi$
Координаты центра тяжести однородной плоской фигуры	$x_c=\frac{\int\limits_S x\,dS}{S}$	$=\frac{\iint x\,dy\,dx}{\iint dy\,dx}$	$=\frac{\iint \rho^2\cos\varphi\,d\rho\,d\varphi}{\iint \rho\,d\rho\,d\varphi}$
	$y_c=\frac{\int\limits_S y\,dS}{S}$	$=\frac{\iint y\,dy\,dx}{\iint dy\,dx}$	$=\frac{\iint \rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi}{\iint \rho\,d\rho\,d\varphi}$

* См. ниже — интеграл по поверхности. В данном случае S — проекция поверхности на плоскость xOy, γ — угол, образованный нормалью к элементу поверхности с осью Oz.

Тройные интегралы

Величина	Общая формула	В декартовых координатах	В цилиндрических координатах	В сферических координатах
Объем тела	$V=\int\limits_V dv$	$=\iiint dz\,dy\,dx$	$=\iiint \rho\,dz\,d\rho\,d\varphi$	$=\iiint r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$
Момент инерции тела относительно оси Oz	$I_z=\int\limits_V \rho^2\,dv$	$=\iiint (x^2+y^2)\,dz\,dy\,dx$	$=\iiint \rho^3\,dz\,d\rho\,d\varphi$	$=\iiint r^4\sin^3\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$
Масса тела с плотностью δ функцией точки	$M=\int\limits_V \delta\,dv$	$=\iiint \delta\,dz\,dy\,dx$	$=\iiint \delta\rho\,dz\,d\rho\,d\varphi$	$=\iiint \delta\, r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$
Координаты центра тяжести однородного тела	$x_c=\dfrac{\int\limits_V x\,dv}{V}$	$=\dfrac{\iiint x\,dz\,dy\,dx}{\iiint dz\,dy\,dx}$		
	$y_c=\dfrac{\int\limits_V y\,dv}{V}$	$=\dfrac{\iiint y\,dz\,dy\,dx}{\iiint dz\,dy\,dx}$		
	$z_c=\dfrac{\int\limits_V z\,dv}{V}$	$=\dfrac{\iiint z\,dz\,dy\,dx}{\iiint dz\,dy\,dx}$		

19. *Поверхностные интегралы первого типа*

(Интегралы по площади поверхности)*

Определение. *Поверхностным интегралом первого типа*

$$\int_S f(x, y, z)\, dS$$

от функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ (заданной в некоторой связной области), *взятым по площадке* S *заданной поверхности* (эта площадка находится в той же области), называется число, получаемое следующим образом:

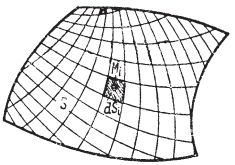


Рис. 340.

1) площадка S (рис. 340) разбивается произвольным образом на n «элементарных площадок»;

2) внутри (или на границе) каждой элементарной площадки произвольно выбирается одна точка $M_i(x_i, y_i, z_i)$;

3) значение функции $f(x_i, y_i, z_i)$ в этой точке умножается на величину площади dS_i соответствующей площадки;

4) все полученные n произведений $f(x_i, y_i, z_i)\, dS_i$ складываются;

5) находится предел полученной суммы $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, dS_i$, когда каждая площадка стягивается в точку** и, следовательно, число их $n \to \infty$.

Если этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения площади S на элементарные площадки, ни от выбора точек $M_i(x_i, y_i, z_i)$, то он называется поверхностным интегралом первого типа:

$$\int_S f(x, y, z)\, dS = \lim_{\substack{dS_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i, y_i, z_i)\, dS_i$$

Теорема существования. Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в рассматриваемой области, а функции, выражающие уравнение поверхности, непрерывны и имеют непрерывные производные, то поверхностный интеграл первого типа существует.

Вычисление поверхностного интеграла первого типа сводится к вычислению двойного интеграла по плоской области (см. стр. 422—424).

Если уравнение поверхности S дано в *явной форме*

$$z = \varphi(x, y).$$

---

* Эти интегралы являются таким же обобщением двойных интегралов (стр. 420), как криволинейный интеграл первого типа (стр. 412) — для простого определенного интеграла (стр. 383).

** В том же смысле, какой указан в сноске *** на стр. 420.

то

$$\int\limits_S f(x, y, z)\, dS = \iint\limits_{S'} f[x, y, \varphi(x, y)] \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy, \qquad (1)$$

где S' — проекция S на плоскость xOy, $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$ *.

Так как уравнение нормали к поверхности $z = \varphi(x, y)$ имеет вид $\dfrac{X-x}{p} = \dfrac{Y-y}{q} = \dfrac{Z-z}{-1}$ (см. стр. 258), то $\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \cos\gamma$, где γ — угол между направлением нормали и осью Oz **; поэтому уравнение (1) можно писать в следующем виде:

$$\int\limits_S f(x, y, z)\, dS = \iint\limits_{S_{xy}} f[x, y, \varphi(x, y)] \frac{dS_{xy}}{\cos\gamma}, \qquad (2)$$

где $S_{xy} = \mathrm{Пр}_{xy} S$.

Если уравнение поверхности дано в *параметрической* форме.

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v)$$

(рис. 341), то

$$\int\limits_S f(x, y, z)\, dS = \iint\limits_{\Delta} f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv. \qquad (3)$$

где E, F и G имеют значения, указанные на стр. 259, $\sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = dS$ (*элемент поверхности*), а Δ — область изменения аргументов u, v, соответствующая данной площадке S. Интеграл (3) вычисляется с помощью повторного интегрирования по формуле

$$\int\limits_S \Phi(u, v)\, dS = \int\limits_{u_1}^{u_2} \int\limits_{v_1(u)}^{v_2(u)} \Phi(u, v) \sqrt{EG - F^2}\, dv\, du. \qquad (4)$$

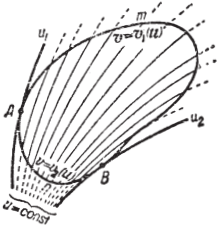


Рис. 341.

где u_1, u_2 — координаты крайних координатных линий $u = \text{const}$, между которыми заключена площадка S (см. рис. 341), а $v = v_1(u)$ и $v = v_2(u)$ — уравнения контура, ограничивающего площадку S (на рис. 341 — линии AmB и AnB).

---

* При этом предполагается, что площадка S такова, что каждой точке ее проекции S' на плоскость xOy соответствует единственная точка площадки S (точка поверхности однозначно определяется заданием x и y). Если этого нет, то площадку S разбивают на несколько частей, каждая из которых обладает этим свойством, и поверхностный интеграл, взятый по всей площадке S, рассматривают как сумму интегралов, взятых по его частям.

В указанном ограничении нет необходимости, если поверхность выражена уравнениями в параметрической форме.

** Этот угол γ в вычислении поверхностного интеграла первого типа всегда считается острым: $\cos\gamma > 0$.

Формула (1) — частный случай формулы (3) при

$$u = x,\ v = y,\ E = 1 + p^2,\ F = pq,\ G = 1 + q^2.$$

Приложения поверхностного интеграла первого типа:

1) *Площадь* кривой площадки S:

$$S = \int\limits_S dS$$

2) *Масса* неоднородной кривой площадки S, если δ — переменная поверхностная плотность [$\delta = f(x, y, z)$]:

$$M_S = \int\limits_S \delta\, dS$$

20. *Поверхностные интегралы второго типа*

(Интегралы по проекции)

Понятие ориентированной поверхности. Обычно поверхность имеет две стороны, одну из которых можно, по произволу, назвать лицевой, а другую — изнанкой*. Поверхность, у которой одна сторона выбрана в качестве лицевой, называется *ориентированной*. У замкнутой несамопересекающейся поверхности, заключающей внутри себя некоторый объем (шар, эллипсоид и т. д.), лицевой стороной обычно называют внешнюю, а изнанкой — внутреннюю сторону.

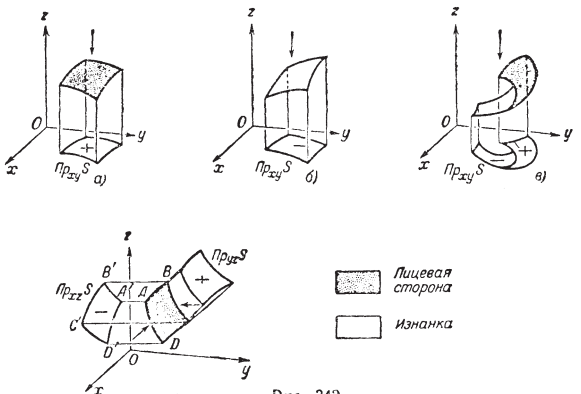


Рис. 342.

Проекция ориентированной площадки на координатную плоскость. Проектируя ограниченную ориентированную поверхность — площадку S — на координатную плоскость, например на плоскость xOy, можно приписать этой проекции $Пр_{xy}S$ знак «+» или «−» следующим образом (рис. 342). Если смотря на пло-

* Существуют поверхности, у которых нельзя указать двух сторон (например, *лист Мёбиуса* — см. Фихтенгольц, т. III, стр. 587 справочника). В математическом анализе такие поверхности не рассматриваются.

скость xOy со стороны положительного направления третьей оси координат (в данном случае со стороны оси Oz, т. е. сверху) мы видим лицевую сторону площадки S, то проекция $\Pr_{xy} S$ считается положительной (рис. 342, *а*), если же изнанку, то — отрицательной (рис. 342, *б*). Если поверхность расположена так, что часть ее видна с лицевой стороны, а часть с изнанки, то $\Pr_{xy} S$ получаем как алгебраическую сумму проекций ее частей, видных с лицевой стороны и с изнанки (рис. 342, *в*). На рис. 342, *г* изображены проекции S_{xz} и S_{yz} площадки S (одна из них положительна, а другая — отрицательна).

Проекция замкнутой ориентированной поверхности на координатную плоскость равна нулю.

Определение поверхностного интеграла второго типа по проекции на координатную плоскость. Поверхностным интегралом второго типа

$$\int\limits_S f(x, y, z)\, dx\, dy$$

от функции трех переменных $f(x, y, z)$ (заданной в некоторой связной области), взятым по проекции ориентированной площадки S (лежащей в той же области) на плоскость xOy, называется число, получаемое так же, как и поверхностный интеграл первого типа (см. стр. 430), с одним отличием: в этапе 3) значение функции $f(x_i, y_i, z_i)$ умножается не на площадку dS_i, а на величину проекции $\Pr_{xy} dS_i$ этой площадки (ориентированной) на плоскость xOy (эта проекция берется со знаком «+» или «—», см. выше):

$$\int\limits_S f(x, y, z)\, dx\, dy = \lim_{\substack{dS_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \Pr_{xy} dS_i. \qquad (1_{xy})$$

Аналогично определяются поверхностные интегралы второго типа, взятые по проекции ориентированной площадки S на плоскость yOz и на плоскость zOx:

$$\int\limits_S f(x, y, z)\, dy\, dz = \lim_{\substack{dS_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \Pr_{yz} dS_i, \qquad (1_{yz})$$

$$\int\limits_S f(x, y, z)\, dz\, dx = \lim_{\substack{dS_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \Pr_{zx} dS_i. \qquad (1_{zx})$$

Теорема существования. Поверхностные интегралы второго типа (1_{xy}), (1_{yz}), (1_{zx}) существуют, если функция $f(x, y, z)$, а также функции, выражающие уравнение поверхности, — непрерывны и имеют непрерывные производные.

Вычисление поверхностных интегралов второго типа сводится к вычислению двойных интегралов. Если уравнение поверхности дано *в явном виде* $z = \varphi(x, y)$, то интеграл (1_{xy}) вычисляется по следующей формуле:

$$\int\limits_S f(x, y, z)\, dx\, dy = \int\limits_{\Pr_{xy} S} f[x, y, \varphi(x, y)]\, dS_{xy}, \qquad (2_{xy})$$

где $S_{xy} = \Pr_{xy} S$.

Аналогично вычисляются поверхностные интегралы от функции $f(x, y, z)$ по проекциям ориентированной площадки S на другие

координатные плоскости:

$$\int\limits_S f(x, y, z)\,dy\,dz = \int\limits_{\Pr_{yz} S} f[\psi(y, z), y, z]\,dS_{yz}, \qquad (2_{yz})$$

где $x = \psi(y, z)$ — уравнение поверхности S, разрешенное относительно x, $S_{yz} = \Pr_{yz} S$, $S_{zx} = \Pr_{zx} S$,

$$\int\limits_S f(x, y, z)\,dz\,dx = \int\limits_{\Pr_{zx} S} f[x, \gamma(z, x), z]\,dS_{zx}, \qquad (2_{zx})$$

где $y = \gamma(z, x)$ — уравнение поверхности S, разрешенное относительно y.

При изменении ориентации поверхности (замене лицевой стороны на изнанку и обратно) интеграл по проекции меняет знак на обратный.

Если уравнение поверхности дано в параметрической форме

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

то интегралы (1_{xy}), (1_{yz}), (1_{zx}) вычисляются по формулам:

$$\int\limits_S f(x, y, z)\,dx\,dy = \int\limits_\Delta f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \frac{D(x, y)}{D(u, v)}\,du\,dv, \quad (3_{xy})$$

$$\int\limits_S f(x, y, z)\,dy\,dz = \int\limits_\Delta f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \frac{D(y, z)}{D(u, v)}\,du\,dv, \quad (3_{yz})$$

$$\int\limits_S f(x, y, z)\,dz\,dx = \int\limits_\Delta f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \frac{D(z, x)}{D(u, v)}\,du\,dv. \quad (3_{zx})$$

Здесь $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$, $\frac{D(y, z)}{D(u, v)}$, $\frac{D(z, x)}{D(u, v)}$ — якобианы пар функций x, y, z от u, v; Δ — область изменения аргументов u, v, соответствующая данной площадке S.

Поверхностный интеграл общего вида. Если в некоторой связной области даны три функции трех переменных $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ и ориентированная площадка S поверхности, то *поверхностным интегралом общего вида* называется сумма интегралов второго типа по всем проекциям:

$$\int\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \int\limits_S P\,dy\,dz + \int\limits_S Q\,dz\,dx + \int\limits_S R\,dx\,dy^*.$$

Общая формула, сводящая поверхностный интеграл общего вида к обыкновенному двойному интегралу:

$$\int\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy =$$

$$= \int\limits_\Delta \left[P \frac{D(y, z)}{D(u, v)} + Q \frac{D(z, x)}{D(u, v)} + R \frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right] du\,dv,$$

где $\frac{D(y, z)}{D(u, v)}$ и т. д. и Δ имеют значения, указанные выше.

---

* Векторное изложение теории поверхностного интеграла общего вида см. в главе «Теория поля» (стр. 539).

Свойства поверхностного интеграла:

1) Если область интегрирования — площадка S — каким-либо образом разбита на части S_1, S_2, то

$$\int_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy =$$

$$= \int_{S_1} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy + \int_{S_2} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy.$$

2) При перемене ориентации поверхности (замене лицевой стороны на изнанку и обратно) интеграл меняет знак на обратный:

$$\int_{S^+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = -\int_{S^-} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$$

(здесь через S^+ и S^- обозначена одна и та же поверхность, но с двумя противоположными ориентациями).

3) Поверхностный интеграл в общем случае зависит как от кривой линии, ограничивающей поверхность S, так и от самой поверхности: интегралы по поверхностям S_1 и S_2 «натянутые» на один и тот же криволинейный контур C (рис. 343) в общем случае не равны между собою:

$$\int_{S_1} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy \neq$$

$$\neq \int_{S_2} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy.$$

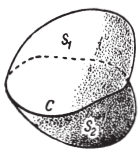


Рис. 343.

Объем V тела, ограниченного замкнутой поверхностью S, может быть вычислен как поверхностный интеграл

$$V = \frac{1}{3}\int_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy,$$

где S ориентирована так, что лицевая ее сторона является внешней.

21. Формулы Стокса, Грина и Остроградского-Гаусса *

Формула Стокса (выражение криволинейного интеграла через поверхностный). Если S — ориентированная поверхность, лежащая внутри некоторой области и ограниченная замкнутым контуром (K), и P, Q, R — функции трех переменных x, y, z, заданные в той же области, то имеет место соотношение

$$\int_K P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx **, \quad (1)$$

---

* Векторное изложение этих теорем см. в главе «Теория поля», см. стр. 545—546.

** Формула имеет место при условии существования и непрерывности функций P, Q, R и их частных производных первого порядка.

где криволинейный интеграл в левой части берется по контуру K в том направлении, которое кажется наблюдателю, стоящему на лицевой стороне поверхности S против часовой стрелки (рис. 344).

Формула Грина – частный случай формулы Стокса для функций P, Q двух переменных в плоской области (выражение криволинейного интеграла по плоскому контуру через двойной). Если S – плоская площадка,

Рис. 344.

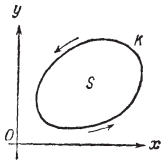


Рис. 345.

лежащая внутри некоторой области и ограниченная замкнутым контуром K, и P, Q – функции двух переменных x, y, заданные в той же области, то имеет место соотношение

$$\int_K P\,dx + Q\,dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy\,^*. \qquad (2)$$

где криволинейный интеграл в левой части берется по контуру в направлении против часовой стрелки (рис. 345).

Формула Остроградского-Гаусса (выражение тройного интеграла через поверхностный). Если S – замкнутая ориентированная поверхность (лицевая сторона – внешняя), ограничивающая объем V, и P, Q, R – функции трех переменных, заданные в односвязной области, заключающие эту поверхность, то имеет место соотношение,

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dV = \iint_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy\,^*. \qquad (3)$$

---

* См. сноску ** на предыдущей странице.

IV. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Общие понятия

Дифференциальное уравнение — уравнение, содержащее неизвестные функции, независимые переменные и производные неизвестных функций (или их дифференциалы).

Примеры: 1) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - xy^5\frac{dy}{dx} + \sin y = 0$;

2) $x\,d^2y\,dx - dy\,(dx)^2 = e^y(dy)^3$; 3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = xyz\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}$.

Если неизвестные функции зависят от одной независимой переменной, — дифференциальное уравнение называется *обыкновенным* (примеры 1, 2). Если неизвестные функции зависят от нескольких независимых переменных, дифференциальное уравнение носит название *уравнения с частными производными* (пример 3). *Порядком дифференциального уравнения* называется наивысший из порядков производных, или дифференциалов, входящих в уравнение [уравнение 1) — 1-го порядка, уравнения 2), 3) — 2-го порядка].

Интеграл дифференциального уравнения — одно или несколько уравнений, связывающих неизвестные функции и независимые переменные, таких, что данное дифференциальное уравнение обращается в тождество при подстановке в него неизвестных функций и их производных, выраженных из этих уравнений.

Нахождение интегралов дифференциального уравнения называется его *интегрированием*. Интеграл, выражающий явно неизвестную функцию через независимые переменные, называется *решением* дифференциального уравнения.

Интегралы дифференциальных уравнений могут содержать постоянные величины или функции, могущие быть выбранными произвольно (*произвольные постоянные и функции*). Таким образом, интегралы дифференциального уравнения определяются неоднозначно. Обычно на неизвестные функции накладывают добавочные, так называемые *начальные* или *граничные* условия, заключающиеся в том, что неизвестные функции, а также и некоторые их производные должны принимать заданные значения при некоторых определенных значениях независимых переменных. При этих добавочных условиях решение задачи может оказаться однозначным. Например, обыкновенное дифференциальное уравнение $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots y^{(n-1)})$ имеет (при некоторых ограничениях) единственное решение если потребовать, чтобы $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ принимали заданные значения при $x = a$ (точнее см. стр. 449).

Интеграл дифференциального уравнения является *общим*, если из него может быть получен надлежащим выбором произвольных постоянных или функций определенный *частный* интеграл, соответствующий любым начальным или граничным условиям, допускающим однозначное решение. Дифференциальное уравнение может иметь так называемые *особые* интегралы, которые не могут быть получены из общего интеграла ни при каких частных значениях произвольных постоянных или функций (см. стр. 443).

А. Обыкновенные дифференциальные уравнения

2. *Уравнения 1-го порядка*

Теоретические сведения. *Теорема существования* (Коши). Если $f(x, y)$ непрерывна в некоторой области около точки (x_0, y_0), т. е. при $|x - x_0| < a$ и $|y - y_0| < b$ то существует по крайней мере одно решение уравнения

$$y' = f(x, y), \qquad (a)$$

принимающее при $x = x_0$ значение y_0, определенное и непрерывное в некотором интервале около x_0. Если, кроме того, в этой области выполнено *условие Липшица*, т. е.

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < N|y_1 - y_2|,$$

причем N не зависит от x, y_1 и y_2, то это решение единственное и является непрерывной функцией от y_0.

Условие Липшица заведомо выполняется, если $f(x, y)$ имеет в рассматриваемой области ограниченную частную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$. (Примеры нарушения условий теоремы Коши см. стр. 443 и 444.)

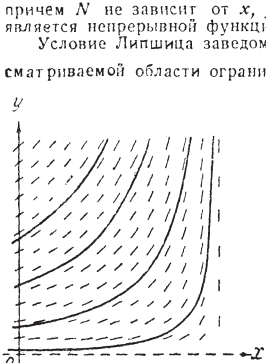


Рис. 346.

Поле направлений. Если через точку $M(x, y)$ проходит график решения $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, то угловой коэффициент касательной к графику в данной точке $\left(\text{равный } \frac{dy}{dx}\right)$ может быть определен непосредственно из дифференциального уравнения; таким образом, дифференциальное уравнение определяет в каждой точке направление касательной к графику решения. Совокупность этих направлений образует *поле направлений* (рис. 346). Точку вместе с заданным в ней направлением называют *элементом* поля направлений. Интегрирование дифференциального уравнения 1-го порядка сводится геометрически к соединению элементов в *интегральные кривые*, касательные к которым имеют в каждой точке направление, совпадающее с направлением поля.

Во многих задачах приходится иметь дело с полем, в котором встречаются и вертикальные направления, что соответствует обраще-

вию $f(x, y)$ в бесконечность. В таких случаях меняют роли зависимой и независимой переменной, считая уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)} \qquad (б)$$

равносильным заданному. В той области, где выполнены условия теоремы Коши для уравнений (а) или (б), через каждую точку $M(x_0, y_0)$ проходит единственная интегральная кривая (рис. 347).

Совокупность всех интегральных кривых будет зависеть от одного параметра, и уравнение этого семейства — общий интеграл уравнения 1-го порядка — будет содержать *одну произвольную постоянную*. Для получения из общего интеграла $F(x, y, C) = 0$ частного интеграла $y = \varphi(x)$, удовлетворяющего условию $y_0 = \varphi(x_0)$, необходимо определить C из уравнения

$$F(x_0, y_0, C) = 0.$$

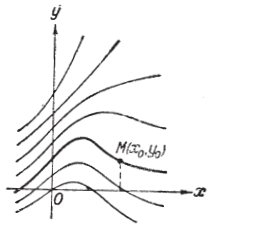


Рис. 347.

Основные методы интегрирования. *Разделение переменных.* Если уравнение может быть приведено к виду

$$M(x)\,N(y)\,dx + P(x)\,Q(y)\,dy = 0,$$

то его можно представить в виде

$$R(x)\,dx + S(y)\,dy = 0$$

где переменные x и y *разделены*; для этого нужно все уравнение разделить на $P(x) \cdot N(y)$, после чего общий интеграл будет иметь вид

$$\int \frac{M(x)}{P(x)}\,dx + \int \frac{Q(y)}{N(y)}\,dy = C.$$

Если $P(x)$ или $N(y)$ обращаются в нуль при каких-либо значениях $\overline{x}$ или $\overline{y}$, то $x = \overline{x}$ и $y = \overline{y}$ также будут интегралами данного уравнения.

Пример. $x\,dy + y\,dx = 0$;

$$\int \frac{dy}{y} + \int \frac{dx}{x} = C;\ \ln y + \ln x = C = \ln c;\ \ yx = c.$$

Однородные уравнения. Если $M(x, y)$ и $N(x, y)$ являются однородными функциями своих аргументов одинаковой степени (см. стр. 289) то в уравнении $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ переменные разделятся (см. выше) после введения вместо y новой переменной $u = \dfrac{y}{x}$.

Пример $y^2dx + x(x - y)\,dy = 0$; $y = ux$; $dy = u\,dx + x\,du$;

$$u^2x^2dx + x^2(1 - u)(x\,du + u\,dx) = 0;\quad \frac{dx}{x} + \frac{(1 - u)\,du}{u} = 0;$$

$\ln x + \ln u - u = C = \ln c$, $ux = ce^u$; $y = ce^{y/x}$. Прямая $x = 0$ также будет интегральной линией (см. выше, разделение переменных).

Уравнением в полных дифференциалах называется уравнение вида

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0, \qquad (*)$$

если существует функция $\Phi(x, y)$ такая, что

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy \equiv d\Phi(x, y)$$

(см. стр. 305). Если в некоторой односвязной области $M(x, y)$ и $N(x, y)$ непрерывны со своими частными производными 1-го

порядка, то условие $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ является необходимым и достаточным, для того чтобы уравнение (*) было уравнением в полных дифференциалах. В этом случае $\Phi(x, y) = C$ будет общим интегралом уравнения (*). Функция $\Phi(x, y)$ может быть найдена по формуле [см. стр. 419, формула (4_2)]

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(\xi, y)\, d\xi + \int_{y_0}^{y} N(x_0, \eta)\, d\eta$$

(x_0 и y_0 произвольны).

Пример см. ниже.

Интегрирующий множитель — такая функция $\mu(x, y)$, что уравнение $M\,dx + N\,dy = 0$ от умножения на нее обращается в уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель удовлетворяет уравнению

$$N\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}.$$

причем любое частное решение этого уравнения является интегрирующим множителем.

Если известен интегрирующий множитель μ уравнения (*), при умножении на который оно обращается в $d\Phi(x, y) = 0$, то общий вид интегрирующего множителя этого уравнения будет $\tilde{\mu} = \mu f(\Phi)$, где f обозначает произвольную функцию.

Пример. Найти решение уравнения: $(x^2 + y)\,dx - x\,dy = 0$. Уравнение для интегрирующего множителя: $-x\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - (x^2+y)\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = 2$. Ищем интегрирующий множитель, не зависящий от y; тогда $x\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = -2$ или $\mu = \frac{1}{x^2}$. Умножаем данное дифференциальное уравнение на μ: $\left(1 + \frac{y}{x^2}\right)dx - \frac{1}{x}\,dy = 0$.

Общий интеграл ($x_0 = 1$, $y_0 = 0$):

$$\Phi(x, y) \equiv \int_1^x \left(1 + \frac{y}{\xi^2}\right)d\xi - \int_0^y d\eta = C \text{ или } x - \frac{y}{x} = C_1.$$

Линейное уравнение. Уравнение вида

$$y' + P(x)\, y = Q(x),$$

в которое неизвестная функция и ее производная входят линейно (т. е. в первой степени), называется *линейным дифференциальным уравнением 1-го порядка*. Оно имеет интегрирующий множитель $\mu = e^{\int P\,dx}$. Общий интеграл находится по формуле

$$y = e^{-\int P\,dx}\left[\int Q e^{\int P\,dx}\,dx + C\right]. \qquad (**)$$

Если заменить везде в этой формуле неопределенное интегрирование интегрированием в пределах от x_0 до x*, то получается решение, принимающее значение C при $x = x_0$. Если известно какое-либо частное

---

* См. стр. 331.

решение $y_1(x)$ линейного уравнения, то его общее решение найдется по формуле $y = y_1 + Ce^{-\int P\,dx}$. Если известны два линейно независимых (см. стр. 451) частных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$, то общее решение линейного уравнения найдется без интегрирования: $y = y_1 + C(y_2 - y_1)$.

Пример. Найти решение уравнения $y' - y \operatorname{tg} x = \cos x$, удовлетворяющее начальным условиям $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

Вычисляем

$$e^{-\int_0^x \operatorname{tg} x\,dx} = \cos x$$

и по формуле (**) получим:

$$y = \frac{1}{\cos x}\int_0^x \cos^2 x\,dx = \frac{1}{\cos x}\left[\frac{\sin x \cos x + x}{2}\right] = \frac{\sin x}{2} + \frac{x}{2\cos x}.$$

Уравнение Бернулли

$$y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^n$$

сводится к линейному делением на y^n и введением новой переменной $z = y^{-n+1}$.

Пример. $y' - \frac{4y}{x} = x\sqrt{y}$. Здесь $n = \frac{1}{2}$. Разделив на $\sqrt{y}$ и введя новую переменную $z = \sqrt{y}$, получим $\frac{dz}{dx} - \frac{2z}{x} = \frac{x}{2}$. По формуле решения линейного уравнения: $e^{\int P dx} = \frac{1}{x^2}$ и $z = x^2\left[\int \frac{x}{2}\frac{1}{x^2}\,dx + C\right] = x^2\left[\frac{1}{2}\ln x + C\right]$; следовательно, $y = x^4\left(\frac{1}{2}\ln x + C\right)^2$.

Уравнение Риккати

$$y' = P(x)\,y^2 + Q(x)\,y + R(x),$$

вообще говоря, не интегрируется в квадратурах (т. е. нахождение его решения не может быть сведено к конечному числу последовательных интегрирований). Если же известно одно частное решение y_1 уравнения Риккати, то введением новой переменной z: $y = y_1 + \frac{1}{z}$ уравнение Риккати может быть сведено к линейному уравнению. Если известно еще одно решение y_2 уравнения Риккати, то $z_1 = \frac{1}{y_2 - y_1}$ будет являться частным решением линейного уравнения для переменной z, что позволит упростить его интегрирование. Если для уравнения Риккати известно три частных решения: y_1, y_2 и y_3, то его общим интегралом будет $\frac{y - y_2}{y - y_1} : \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} = C$. Заменой переменных $y = \frac{u}{P(x)} + \beta(x)$ уравнение Риккати всегда может быть приведено к каноническому виду: $\frac{du}{dx} = u^2 + R(x)$.

Подстановкой $y = -\frac{v'}{P(x)\,v}$ можно свести уравнение Риккати к линейному уравнению 2-го порядка (см. стр. 463):

$$Pv'' - (P' + PQ)\,v' + P^2Rv = 0.$$

Пример: $y' + y^2 + \frac{1}{x}y - \frac{4}{x^2} = 0$. Делаем замену $y = z + \beta(x)$. После замены коэффициент при z в первой степени будет равен $2\beta + \frac{1}{x}$ и, следовательно, он исчезнет, если взять $\beta(x) = -\frac{1}{2x}$. Получим: $z' + z^2 - \frac{15}{4x^2} = 0$. Естественно искать частное решение $z_1 = \frac{a}{x}$. Подстановкой находим $a_1 = -\frac{3}{2}$, $a_2 = \frac{5}{2}$ (два частных решения: $z_1 = -\frac{3}{2x}$, $z_2 = \frac{5}{2x}$). Делаем новую замену: $z = \frac{1}{u} + z_1 = \frac{1}{u} - \frac{3}{2x}$. Получим $u' + \frac{3u}{x} = 1$. Используя частное решение этого уравнения $u_1 = \frac{1}{z_2 - z_1} = \frac{x}{4}$, находим его общее решение: $u = \frac{x}{4} + \frac{C}{x^3} = \frac{x^4 + C_1}{4x^3}$; отсюда

$$y = \frac{1}{u} - \frac{3}{2x} - \frac{1}{2x} = \frac{2x^4 - 2C_1}{x^5 + C_1 x}.$$

Уравнения, не разрешенные относительно y': $F(x, y, y') = 0$. Если в некоторой точке $M(x_0, y_0)$ уравнение $F(x_0, y_0, p) = 0$, где $p = \frac{dy}{dx}$, имеет n действительных корней $p_1, \ldots, p_n$, причем при $x = x_0$, $y = y_0$, $p = p_i$ функция $F(x, y, p)$ со своими первыми производными непрерывна и $\frac{\partial F}{\partial p} \neq 0$, то через точку M проходит n интегральных кривых.

Если данное уравнение возможно разрешить относительно y', то оно распадается на n уравнений рассмотренного ранее вида, решив которые, получим уравнения n семейств интегральных кривых. Если уравнение можно представить в виде $x = \varphi(y, y')$ или $y = \psi(x, y')$, то, обозначая $y' = p$ и рассматривая p как вспомогательную переменную, после дифференцирования по y или по x получим уравнение относительно $\frac{dp}{dy}$ или $\frac{dp}{dx}$, разрешенное относительно производной. Его решение вместе с исходным уравнением определяет в параметрической форме искомое решение.

Пример: $x = yy' + y'^2$; $y' = p$; $x = py + p^2$. Дифференцируем по y, полагая $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}$:

$$\frac{1}{p} = p + (y + 2p)\frac{dp}{dy} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dp} - \frac{py}{1 - p^2} = \frac{2p^2}{1 - p^2}.$$

Это уравнение — линейное относительно y; решая его, получим $y = -p + \frac{c + \arcsin p}{\sqrt{1 - p^2}}$; присоединяя к нему исходное уравнение $x = py + p^2$, получим искомое решение в параметрической форме.

Уравнение Лагранжа $a(y')\,x + b(y')\,y + c(y') = 0$ всегда интегрируется в квадратурах указанным выше способом. Если $a(p) + b(p)\,p = 0$ при $p = p_0$, то $a(p_0)\,x + b(p_0)\,y + c(p_0) = 0$ есть особый интеграл (см. ниже) уравнения Лагранжа. Если $a(p) + b(p)\,p \not\equiv 0$, то имеем *уравнение Клеро*, которое всегда можно привести к виду $y = y'x + f(y')$. Его общее решение: $y = Cx + f(C)$. Кроме общего решения (дающего геометрически семейство прямых, зависящее от одного параметра), уравнение Клеро имеет особый интеграл, получающийся исключением C из уравнений $y = Cx + f(C)$ и $0 = x + f'(C)$ (второе уравнение получается дифференцированием первого по C; геометрически особый интеграл есть огибающая данного семейства прямых, рис. 348) (см. стр. 249).

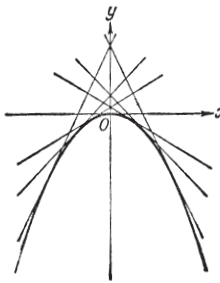


Рис. 348.

Пример: $y = xy' + y'^2$; общий интеграл: $y = Cx + C^2$; особый интеграл (присоединяем уравнение $x + 2C = 0$ и исключаем C):

$$x^2 + 4y = 0.$$

Интегральные кривые рассмотренного дифференциального уравнения изображены на рис. 348.

Особые интегралы. Элемент (x_0, y_0, y_0') называется *особым* если он, кроме уравнения $F(x, y, y') = 0$, удовлетворяет также уравнению $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$. Интегральная кривая, образованная особыми элементами, называется *особой*. Для всех ее точек нарушается свойство единственности решения (см. теорему Коши, стр. 438). Огибающие (см. стр. 249) интегральных кривых (см. рис. 348) будут являться особыми интегральными кривыми. Уравнение особой интегральной кривой $\varphi(x, y) = 0$ представляет собой *особый интеграл*. Как правило, он не получается из общего ни при каком значении произвольной постоянной. Для нахождения особого интеграла дифференциального уравнения $F(x, y, p) = 0$, где $p = y'$, к данному уравнению присоединяют уравнение $\frac{\partial F}{\partial p} = 0$, и исключают p. Если полученное соотношение является интегралом данного дифференциального уравнения, то это будет особый интеграл (при этом уравнение должно быть предварительно приведено к виду, не содержащему многозначных функций *, в частности радикалов). Если известно уравнение семейства интегральных кривых, т. е. общий интеграл данного дифференциального уравнения, то для нахождения огибающих этого семейства, дающих особые решения, могут быть применены методы дифференциальной геометрии (см. стр. 250).

Примеры: 1) $x - y - \frac{4}{9}p^2 + \frac{8}{27}p^3 = 0.$

Дополнительное уравнение $\left(\text{т. е. } \frac{\partial F}{\partial p} = 0\right)$:

$$-\frac{8}{9}p + \frac{8}{9}p^2 = 0.$$

---

* Учитываются и комплексные значения функции.

Исключая p, получим: а) $x - y = 0$, б) $x - y = \frac{4}{27}$; а) не является решением, б) — особое решение [общее решение этого уравнения: $(y - C)^2 = (x - C)^3$]. Интегральные кривые и линии а) и б) показаны на рис. 349.

2) $y' - \ln|x| = 0$. Переписываем в виде $e^p - |x| = 0$, так как $\ln|x|$

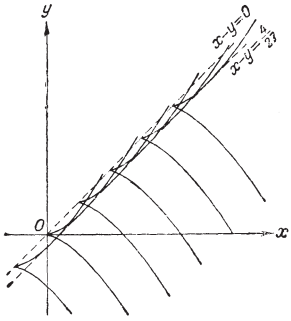


Рис. 349.

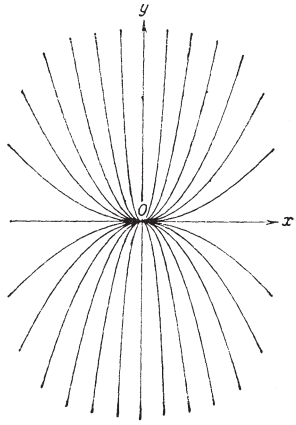


Рис. 350

— функция многозначная (см. стр. 499). $\frac{\partial F}{\partial p} \equiv e^p = 0$. Исключая p, получим особый интеграл $x = 0$.

Особые точки дифференциального уравнения. Для дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + ey} \quad (ae - bc \neq 0)$$

точка (0, 0) является *изолированной особой точкой*, так как в этой точке нарушаются условия теоремы Коши (см. стр. 438), выполняющиеся в любой другой как угодно близко лежащей точке *. Поведение интегральных кривых вблизи этой особой точки зависит от корней *характеристического уравнения*:

$$\lambda^2 - (b + c)\lambda + bc - ae = 0,$$

а именно:

1) Если корни действительные, одного знака, то особая точка — *узел*. Все интегральные кривые в окрестности особой точки проходят через нее, имея здесь (если корни не совпадают) общую касательную за исключением одной интегральной кривой. Если же корни совпадают, то или все интегральные кривые имеют общую касательную, или в каждом направлении через особую точку проходит единственная кривая:

* Строго говоря, условия теоремы Коши нарушаются и для всех тех точек, для которых $cx + ey = 0$, но они будут выполнены, если поменять ролями зависимую и независимую переменные и рассмотреть уравнение $\frac{dx}{dv} = \frac{ex + ey}{ax + by}$.

Примеры: а) $\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}$; характеристическое уравнение: $\lambda^2-3\lambda+2=0$; $\lambda_1=2$, $\lambda_2=1$; интегральные кривые: $y=Cx^2$ * (рис. 350); б) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x}$; характеристическое уравнение: $\lambda^2-2\lambda+1=0$; $\lambda_1=\lambda_2=1$; интегральные кривые: $y=x\ln|x|+Cx$ (рис. 351); в) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$; характеристическое уравнение: $\lambda^2-2\lambda+1=0$; $\lambda_1=\lambda_2=1$; интегральные кривые: $y=Cx$ (рис. 352).

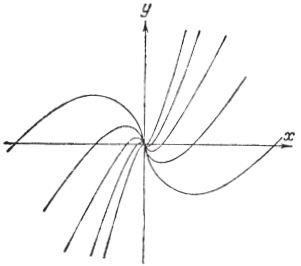


Рис. 351

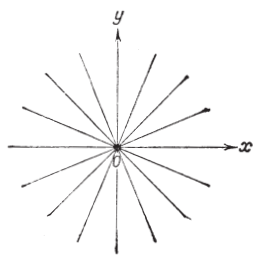


Рис. 352.

2) Если корни действительные, разного знака, то особая точка — *седло*. Через особую точку проходит две интегральные кривые (образующие четыре «уса» седла).

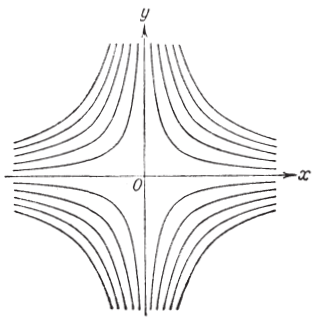


Рис. 353

Пример: $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$; характеристическое уравнение: $\lambda^2-1=0$, $\lambda_1=+1$, $\lambda_2=-1$; интегральные кривые: $xy=C$ (рис. 353), при $C=0$ частные интегралы: $x=0$, $y=0$.

* Прямая $x=0$ также содержится в общем решении, что видно если его записать в виде $x^2=C_1y$.

3) Если корни комплексные сопряженные, то особая точка — *фокус*. Интегральные кривые «накручиваются» на особую точку, совершая при этом бесконечное множество оборотов.

Пример: $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$; характеристическое уравнение: $\lambda^2-2\lambda+2=0$, $\lambda_1=1+i$, $\lambda_2=1-i$; интегральные кривые (в полярных координатах) $\rho=Ce^{\varphi}$ (рис. 354).

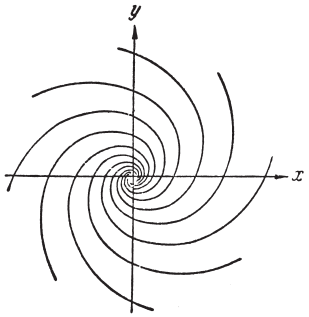


Рис. 354.

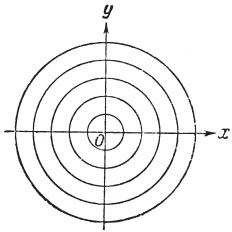


Рис. 355.

4) Если корни чисто мнимые, то особая точка — *центр*. Она окружена семейством замкнутых интегральных кривых.

Пример: $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$; характеристическое уравнение: $\lambda^2+1=0$; $\lambda_1=i$, $\lambda_2=-i$. Интегральные кривые: $x^2+y^2=C$ (рис. 355).

Для уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P(x,\ y)}{Q(x,\ y)}$$

особыми точками являются те, в которых одновременно $P(x,\ y)=0$ и $Q(x,\ y)=0$. Предполагая P и Q функциями с непрерывными частными производными, можно представить данное уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a(x-x_0)+b(y-y_0)+P_1(x,\ y)}{c(x-x_0)+e(y-y_0)+Q_1(x,\ y)},$$

где x_0, y_0 — координаты особой точки и $P_1(x,\ y)$ и $Q_1(x,\ y)$ являются малыми высшего порядка в сравнении с расстоянием точки $(x,\ y)$ до особой точки. Тогда оказывается, что характер особой точки данного дифференциального уравнения будет тот же, что и у особой точки *уравнения первого приближения*, получающегося при отбрасывании P_1 и Q_1. *Исключения*: а) если особая точка уравнения первого приближения — центр, то особая точка основного уравнения может быть центром или фокусом; б) если $ae-bc=0$ $\left(\text{т. е. } \frac{a}{c}=\frac{b}{e}, \text{ или } a=c=0, \text{ или } a=b=0 \text{ и т. п.}\right)$, то для определения характера особой точки требуется рассмотрение членов высшего порядка.

Приближенные методы интегрирования. *Метод последовательных приближений* (Пикара). Уравнение $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y = y_0$ при $x = x_0$ может быть записано в виде

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx. \qquad (1)$$

Если в правую часть вместо y подставить какую-либо функцию $y_1(x)$, мы получим слева новую функцию y_2, не совпадающую с y_1, если только y_1 не есть решение данного уравнения. Подставляя в правую часть уравнения (1) y_2 вместо y, мы получим функцию y_3, и т. д.

Полученная последовательность функций $y_1, y_2, y_3, \ldots$ сходится на некотором интервале, содержащем точку x_0, к искомому решению, если выполнены условия теоремы Коши (см. стр. 438). Метод последовательных приближений называют иногда также методом *итераций* (ср. стр. 145).

Пример: $y' = e^x - y^2$; начальные условия: $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. В интегральной форме уравнение запишется

$$y = \int_0^x (e^x - y^2)\, dx.$$

Применяя метод Пикара, начав с $y_0 = 0$, получим последовательно:

$$y_1 = \int_0^x e^x\, dx = e^x - 1;$$

$$y_2 = \int_0^x [e^x - (e^x - 1)^2]\, dx = 3e^x - \frac{1}{2}\, e^{2x} - x - \frac{5}{2} \text{ и т. д.}$$

Применение рядов. Разложение решения дифференциального уравнения в ряд Тэйлора (см. стр. 322)

$$y = y_0 + (x - x_0)\, y_0' + \frac{(x - x_0)^2}{2}\, y_0'' + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}\, y_0^{(n)} + \ldots$$

может быть написано, если известны значения $y_0', y_0'', y_0''', \ldots, y_0^{(n)}, \ldots$ – всех его производных для начального значения x_0 аргумента. Эти значения могут быть найдены из дифференциального уравнения путем последовательного его дифференцирования и подстановки начальных условий. Если допустимо неограниченное дифференцирование уравнения, полученный ряд всегда будет сходиться в некоторой окрестности начального значения аргумента. Данный метод, очевидно, применим и к уравнениям n-го порядка.

Практически часто удобнее искать решение в виде ряда с неопределенными коэффициентами, которые могут быть определены из условия удовлетворения уравнения при подстановке в него ряда.

Пример: $y' = e^x - y^2$; $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Полагаем

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

Подставляя в уравнение, получим *:

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + [a_1^2 x^2 + 2a_1 a_2 x^3 + (a_2^2 + 2a_1 a_3) x^4 + \ldots] =$$
$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots,$$

* Формулу для квадрата ряда см. стр. 300.

откуда $a_1 = 1$, $2a_2 = 1$, $3a_3 + a_1^2 = \frac{1}{2}$, $4a_4 + 2a_1a_2 = \frac{1}{6}$ и т. д. Решая последовательно эти уравнения и подставляя найденные коэффициенты в ряд, получим:

$$y = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{5}{24}x^4 + \ldots$$

Другой способ: $y' = e^x - y^2$; $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Полагая в уравнении $x=0$, находим $y'_0 = 1$. Далее: $y'' = e^x - 2yy'$; $y''_0 = 1$; $y''' = e^x - 2y'^2 - 2yy''$, $y'''_0 = -1$; $y^{IV} = e^x - 6y'y'' - 2yy'''$, $y^{IV}_0 = -5$ и т. д. По формуле Тэйлора:

$$y = x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \frac{5x^4}{4!} + \ldots$$

Графическое интегрирование уравнений базируется на понятии поля направлений (см. стр. 438). Интегральная кривая приближенно изображается выходящей из заданной начальной точки ломаной (рис. 356), составленной из небольших отрезков, направление каждого из которых совпадает с направлением поля в начальной точке отрезка, являющейся конечной точкой для предыдущего отрезка.

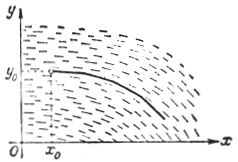


Рис. 356.

Численное интегрирование. При численном интегрировании уравнения $y' = f(x, y)$ составляется последовательно таблица искомой функции для значений аргумента $x_k = x_0 + kh$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$).

Для этого обычно пользуются какими-либо формулами приближенного интегрирования для вычисления $y_{k+1} - y_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f[x, y(x)]\,dx$. Наиболее употребительными разностными формулами являются следующие (обозначения см. стр. 575):

$$y_{k+1} - y_k = h\left[f_k + \frac{1}{2}\Delta f_{k-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 f_{k-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 f_{k-3}\right], \qquad (А)$$

$$y_{k+1} - y_k = h\left[f_{k+1} - \frac{1}{2}\Delta f_k - \frac{1}{12}\Delta^2 f_{k-1} - \frac{1}{24}\Delta^3 f_{k-2}\right]. \qquad (Б)$$

Найдя по формуле (А) первое приближение y_{k+1}, вычисляют f_{k+1} и получают второе приближение y_{k+1} по формуле (Б). Так же может быть найдено и третье приближение, но обычно стараются выбирать шаг так, чтобы в этом не было необходимости.

Пример. Полученные выше члены ряда для решения уравнения $y' = e^x - y^2$, соответствующего начальным условиям $x_0 = 0$; $y_0 = 0$, позволяют вычислить с четырьмя десятичными знаками значения y для $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 0{,}2$ и $x_3 = 0{,}3$. Для вычисления последующих значений y строят таблицу по следующей схеме (до ступенчатой черты):

x	y	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
0	0,0000	1,0000	942	− 147	− 35
0,1	0,1048	1,0942	795	− 182	− 21
0,2	0,2183	1,1737	613	− 203	
0,3	0,3389	1,2350	410		
0,4	0,4646	1,2760			

Значение y_3 целесообразно проверить по формуле (Б):

$$y_3 = 0{,}2183 + 0{,}1\,(1{,}2350 - 0{,}0306 + 0{,}0015 + 0{,}0001) = 0{,}3389.$$

Далее, для $x_4 = 0{,}4$ по формуле (А) получим:

$$y_4 - y_3 = 0{,}1\,(1{,}2350 + 0{,}0306 - 0{,}0076 - 0{,}0013) = 0{,}1257.$$

Вычислив по $y_4 = 0{,}4646$ значение f_4 и продолжив таблицу, найдем по формуле (Б):

$$y_4 - y_3 = 0{,}1\,(1{,}2760 - 0{,}0205 + 0{,}0017 + 0{,}0001) = 0{,}1257.$$

Так как значение y_4 сохраняется, делаем следующий шаг и т. д.

Вместо разностных формул (А) и (Б) употребительны также формулы:

$$y_{k+1} = y_{k-3} + \frac{4}{3}h\,[2f_k - f_{k-1} + 2f_{k-2}]. \qquad (\text{А}_1)$$

$$y_{k+1} = y_{k-1} + \frac{h}{3}\,[f_{k+1} + 4f_k + f_{k-1}]. \qquad (\text{Б}_1)$$

Описанные выше методы легко переносятся на системы дифференциальных уравнений.

Более подробно о численных методах см. Крылов, Милн, стр. 585 справочника.

3. *Уравнения высших порядков и системы уравнений*

Теоретические сведения. *Теорема существования.* Всякое уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} = F(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})$$

введением новых переменных $y_1 = y'$, $y_2 = y''$, $\ldots$, $y_{n-1} = y^{(n-1)}$ может быть сведено к системе n уравнений:

$$\frac{dy}{dx} = y_1,\quad \frac{dy_1}{dx} = y_2,\ \ldots,\quad \frac{dy_{n-1}}{dx} = F(x,\ y,\ y_1,\ \ldots,\ y_{n-1}).$$

Более общая система уравнений:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i\,(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n) \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \qquad (*)$$

имеет единственную систему решений $y_i = y_i\,(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, определенную и непрерывную в некотором интервале $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$, принимающую при $x = x_0$ заданные начальные значения: $y_i\,(x_0) = y_i^0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, если функции $f_i\,(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ непрерывны по всем переменным и удовлетворяют *условию Липшица*:

$$|f_i\,(x,\ y_1 + \Delta y_1,\ y_2 + \Delta y_2,\ \ldots,\ y_n + \Delta y_n) - f_i\,(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)| \leq$$
$$\leq K\,(|\Delta y_1| + |\Delta y_2| + \ldots + |\Delta y_n|$$

для значений x, y_i и $y_i + \Delta y_i$, лежащих в некоторой области вблизи данных начальных значений. В соответствии с этим уравнение $y^{(n)} = f\,(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})$ имеет единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y = y_0$, $y' = y_0'$, $\ldots$, $y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ при $x = x_0$, непрерывное со своими производными до $(n-1)$-го порядка включительно, если $f\,(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})$ непрерывна и удовлетворяет приведенному выше условию Липшица для функций $f_i\,(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$.

Общее решение. Для уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

общее решение содержит n независимых постоянных:

$$y = y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Геометрически это уравнение определяет n-параметрическое семейство интегральных кривых; отдельная интегральная кривая (график соответствующего частного решения) выделяется из этого семейства при определенном выборе значений произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Если частный интеграл должен удовлетворять данным выше начальным условиям, то значения $C_1, C_2, \ldots, C_n$ определяются из уравнений:

$$y(x_0, C_1, \ldots, C_n) = y_0,$$

$$\left[\frac{d}{dx} y(x, C_1, \ldots, C_n)\right]_{x = x_0} = y_0',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} y(x, C_1, \ldots, C_n)\right]_{x = x_0} = y_0^{(n-1)}.$$

Если эти уравнения несовместны для произвольных начальных значений в некоторой области, то решение в ней не является общим — произвольные постоянные не независимы.

Для системы (*) *общее решение* также содержит n произвольных постоянных и может быть дано либо в виде, разрешенном относительно неизвестных функций:

$$y_1 = F_1(x, C_1, \ldots, C_n),\ y_2 = F_2(x, C_1, \ldots, C_n), \ldots, y_n = F_n(x, C_1, \ldots, C_n),$$

либо в виде, разрешенном относительно произвольных постоянных:

$$\varphi_1(x, y_1, \ldots, y_n) = C_1,\ \varphi_2(x, y_1, \ldots, y_n) = C_2, \ldots,\ \varphi_n(x, y_1, \ldots, y_n) = C_n$$

В последнем случае каждое соотношение $\varphi_i(x, y_1, \ldots, y_n) = C_i$ представляет *первый интеграл* системы (*). Первый интеграл может быть определен независимо от общего, как соотношение между $x, y_1, \ldots, y_n$, обращающееся в постоянную, если вместо $y_1, y_2, \ldots, y_n$ подставить какое-либо решение данной системы. Каждый первый интеграл системы (*) удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + f_1(x, y_1, \ldots, y_n)\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_1} + \ldots + f_n(x, y_1, \ldots, y_n)\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_n} = 0.$$

и, наоборот, всякое решение $\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ этого уравнения является первым интегралом системы (*). Совокупность n независимых (см. стр. 289) первых интегралов системы (*) образует ее общий интеграл.

Понижение порядка Одним из основных методов интегрирования уравнений n-го порядка является замена переменных, приводящая к более простым уравнениям в частности, к уравнениям низшего порядка.

Уравнение, не содержащее явно x: $f(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, сводится к уравнению $(n-1)$-го порядка после замены: $\frac{dy}{dx} = p$; $\frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}$ и т. д.

Пример: $yy''-y'^2=0$, $p=y'$, $p\frac{dp}{dy}=y''$, $yp\frac{dp}{dy}-p^2=0$, $y\frac{dp}{dy}-p=0$, $p=Cy=\frac{dy}{dx}$; $y=C_1e^{Cx}$ (при сокращении на p решение не потеряно, так как $p=0$ дает $y=C_1$, что содержится в полученном общем решении при $C=0$).

Уравнение, не содержащее явно y: $f(x, y', \ldots, y^{(n)})=0$, допускает понижение порядка при замене $y'=p$. Если в уравнение не входит k первых производных, следует делать замену $y^{(k+1)}=p$.

Пример: $y''-xy'''+(y''')^3=0$. Замена $y''=p$ приводит к уравнению Клеро: $p-x\frac{dp}{dx}+\left(\frac{dp}{dx}\right)^3=0$. Его общее решение: $p=C_1x+C_1^3$. Отсюда $y=\frac{C_1x^3}{6}-\frac{C_1^3x^2}{2}+C_2x+C_3$. Особое решение уравнения Клеро $p=\frac{2\sqrt{3}}{3}x^{3/2}$ дает особое решение исходного уравнения:

$$y=\frac{8\sqrt{3}}{315}x^{7/2}+C_1x+C_2.$$

Уравнение $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})=0$, где функция f – *однородная* (см. стр. 289) *относительно* $y, y', \ldots, y^{(n)}$, допускает понижение порядка при введении новой функции $z=\frac{y'}{y}$ (т. е. $y=e^{\int z\,dx}$).

Пример: $yy''-y'^2=0$; $z=\frac{y'}{y}$, $\frac{dz}{dx}=\frac{yy''-y'^2}{y^2}$, следовательно, $z=C_1$, откуда $\ln y=C_1x+C_2$ или $y=Ce^{C_1x}$, где $\ln C=C_2$.

Уравнение $y^{(n)}=f(x)$. Общее решение получается последовательным интегрированием в виде

$$y=C_1+C_2x+C_3x^2+\ldots+C_nx^{n-1}+\psi(x),$$

где

$$\psi(x)=\int\int\ldots\int f(x)\,(dx)^n=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}f(t)\,(x-t)^{n-1}dt.$$

Здесь x_0 не является дополнительной произвольной постоянной. Изменение x_0 изменяет C_k, так как $C_k=\frac{1}{(k-1)!}y^{(k-1)}(x_0)$.

Линейные уравнения. Линейным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=F, \qquad (L)$$

где a_i и F (*правая часть*) – функции от x, которые мы будем предполагать непрерывными на некотором интервале. Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – постоянные, то уравнение называется *уравнением с постоянными коэффициентами*. Линейное уравнение называется *однородным*, если $F=0$, и *неоднородным* в противном случае.

Система решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ однородного линейного уравнения называется *фундаментальной*, если эти функции *линейно независимы* на рассматриваемом интервале, т. е. если их линейная комбинация $C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n$ ни при каких значениях $C_1, C_2, \ldots, C_n$, кроме $C_1=C_2=\ldots=C_n=0$, не обращается тождественно для всех значений x

на данном интервале) в нуль. Решения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ однородного линейного уравнения образуют фундаментальную систему тогда и только тогда, когда их *определитель Вронского*

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Для любой системы решений однородного линейного уравнения имеет место *формула Лиувилля*:

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(x)\,dx},$$

в силу чего определитель W может обращаться в нуль только тождественно [т. е. только если $W(x_0) = 0$]. Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ образуют фундаментальную систему решений, то $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$ является общим решением линейного однородного уравнения.

Если известно одно частное решение y_1 однородного уравнения, то его порядок может быть понижен с сохранением линейности путем введения новой неизвестной функции $u = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y}{y_1}\right)$.

Теорема наложения. Если y_1 и y_2 являются решениями уравнения (L) для различных правых частей F_1 и F_2, то их сумма $y = y_1 + y_2$ будет решением такого же уравнения с правой частью $F = F_1 + F_2$. Отсюда следует, что для получения общего решения неоднородного уравнения достаточно к какому-либо его частному решению прибавить общее решение однородного уравнения.

Теорема разложения. Если уравнение (L) имеет действительные коэффициенты и $F = F_1 + iF_2$, где F_1 и F_2 также действительны, то решение его будет комплексным $y = y_1 + iy_2$, причем y_1 и y_2 будут решениями уравнения (L) с правой частью, равной соответственно F_1 и F_2.

Решение неоднородного уравнения (L) может быть получено с помощью квадратур, если известна фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения, одним из следующих методов.

Метод вариации постоянных. Записав искомое решение в виде $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$, считаем $C_1, C_2, \ldots, C_n$ не постоянными, но функциями x. Потребовав удовлетворения соотношений

$$\begin{gathered} C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots + C_n' y_n = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + \ldots + C_n' y_n' = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_1' y_1^{(n-2)} + C_2' y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0, \end{gathered}$$

получим, подставляя y в уравнение (L):

$$C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = F.$$

Решая линейную систему уравнений, найдем $C_1', C_2', \ldots, C_n'$ и далее квадратурами $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Метод Коши. Определим в общем решении однородного уравнения $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$ постоянные так, чтобы при $x = \alpha$ было $y = 0,\ y' = 0,\ \ldots,\ y^{(n-2)} = 0,\ y^{(n-1)} = F(\alpha)$, где α — произвольный параметр. Если обозначить теперь полученное таким образом решение однородного уравнения через $\varphi(x, \alpha)$, то $y = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, \alpha)\, d\alpha$ будет частным решением уравнения (L), обращающимся в нуль со своими производными до $(n-1)$-го порядка включительно при $x = x_0$.

4. *Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами*

Операторная запись. Уравнение (L) (см. стр. 451) может быть записано символически в виде

$$P_n(D)\, y \equiv (D^n + a_1D^{n-1} + a_2D^{n-2} + \ldots + a_{n-1}D + a_n)\, y = F,$$

где D есть оператор дифференцирования:

$$Dy = \frac{dy}{dx}, \quad D^k y = \frac{d^k y}{dx^k}.$$

Если коэффициенты a_i постоянны, то $P_n(D)$ является многочленом n-й степени относительно оператора D (с числовыми коэффициентами).

Решение однородного уравнения $P_n(D)\, y = 0$. Для нахождения общего решения необходимо найти корни $r_1, r_2, \ldots, r_n$ алгебраического уравнения (см. стр. 140—146) $P_n(r) = 0$ (*характеристическое уравнение*). Каждому корню r_i соответствует решение e^{r_ix} уравнения $P_n(D)\, y = 0$. Если r_i является корнем k-й кратности, то $xe^{r_ix}, x^2e^{r_ix}, \ldots, x^{k-1}e^{r_ix}$ также являются решениями. Линейная комбинация этих решений для всех корней r_i

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} + \ldots + e^{r_ix}(C_i + C_{i+1}x + \ldots + C_{i+k-1}x^{k-1}) + \ldots$$

является общим решением однородного уравнения.

Если среди корней есть комплексные (они могут быть только попарно сопряженными *), например, если: $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$, то в соответствующих членах общего решения функции e^{r_1x} и e^{r_2x} должны быть заменены на $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$. Получающиеся при этом выражения вида $C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x$ могут быть представлены также в виде $A\cos(\beta x + \varphi)$, где A и φ — произвольные постоянные.

Пример. Для уравнения $y^{VI} + y^{IV} - y'' - y = 0$ характеристическое уравнение $r^6 + r^4 - r^2 - 1 = 0$ имеет корни: $r_1 = 1$, $r_2 = -1$, $r_{3,4} = i$, $r_{5,6} = -i$. Общее решение будет:

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + (C_3 + C_4x)\cos x + (C_5 + C_6x)\sin x$$

или

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + A_1\cos(x + \varphi_1) + xA_2\cos(x + \varphi_2).$$

* Мы предполагаем, что коэффициенты a_k действительны.

Теорема Гурвица. В теории колебаний и других приложениях часто бывает важно установить, что любое решение данного линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами стремится к нулю при $x \to +\infty$. Это будет иметь место, если действительные части всех корней характеристического уравнения окажутся отрицательными. Все корни уравнения

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0 \quad (a_0 > 0)$$

будут иметь отрицательные действительные части тогда и только тогда, когда все определители

$$D_1 = a_1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \ldots$$

$$\ldots, D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & \ldots & a_n \end{vmatrix} \quad (\text{где } a_m = 0, \text{ при } m > n)$$

положительны (*теорема Гурвица*).

Решение неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами всегда может быть найдено методом вариации постоянных или методом Коши (см. стр. 452—453). Другой метод — операторный (см. стр. 460). Наиболее просто частное решение такого уравнения определяется, если правая часть имеет специальный вид (см. ниже).

Специальная правая часть. В некоторых случаях частное решение неоднородного уравнения $P_n(D)\, y = F(x)$ может быть найдено простыми алгебраическими приемами.

Если $F(x) = Ae^{kx}$ и $P_n(k) \neq 0$, то частным решением является $y = \dfrac{Ae^{kx}}{P_n(k)}$. Если k является корнем характеристического уравнения кратности m, т. е. $P_n(k) = P_n'(k) = \ldots = P_n^{(m-1)}(k) = 0$, то частным решением является $y = \dfrac{Ax^m e^{kx}}{P_n^{(m)}(k)}$. При помощи теоремы разложения (стр. 452) эти формулы могут быть использованы и в случае, когда $F(x) = Ae^{kx} \cos \omega x$ или $Ae^{kx} \sin \omega x$. Соответствующие частные решения получатся как действительная или мнимая часть решения того же уравнения для правой части: $F(x) = Ae^{kx}(\cos \omega x + i \sin \omega x) = Ae^{(k+i\omega)x}$.

Примеры: 1) Для уравнения $y'' - 6y' + 8y = e^{2x}$ частное решение: $y = -\dfrac{xe^{2x}}{2}$, так как $P(D) = D^2 - 6D + 8$, $P(2) = 0$ и $P'(D) = 2D - 6$, $P'(2) = 2 \cdot 2 - 6 = -2$. 2) Для уравнения $y'' + y' + y = e^x \sin x$ частное решение $y_1 = \dfrac{e^x}{13}(2 \sin x - 3 \cos x)$ получается как мнимая часть от решения

$$y = \frac{e^{(1+i)x}}{(1+i)^2 + (1+i) + 1} = \frac{e^x(\cos x + i \sin x)}{2 + 3i}$$

уравнения $(D^2 + D + 1)\, y = e^{(1+i)x}$.

Если $F(x)$ имеет вид $Q_p(x)\, e^{kx}$, где $Q_p(x)$ — многочлен степени p, то всегда может быть найдено частное решение того же вида, т. е. $y = R(x) e^{kx}$. Здесь $R(x)$ есть многочлен степени p, умноженный на x^m, если k — m-кратный корень характеристического уравнения. Записав

это решение с неопределенными коэффициентами у $R(x)$ и требуя, чтобы оно удовлетворяло данному уравнению, получают линейные алгебраические уравнения для определения неизвестных коэффициентов *.

Пример: $y^{IV}+2y'''+y''=6x+2x\sin x$; корни характеристического уравнения $k_1=k_2=0$, $k_3=k_4=-1$. В силу теоремы наложения (см. стр. 452) можно искать порознь частные решения, соответствующие отдельным слагаемым правой части. Полагая $y_1=x^2(ax+b)$ и подставляя в уравнение, получим $12a+2b+6ax=6x$, откуда $a=1$, $b=-6$. Так же для второго слагаемого полагаем $y_2=(cx+d)\sin x+(fx+g)\cos x$, что дает $(2g+2f-6c+2fx)\sin x-(2c+2d+6f+2c x)\cos x=2x\sin x$, откуда $c=0$, $d=-3$, $f=1$, $g=-1$. Окончательно, общее решение будет

$$y=c_1+c_2x-6x^2+x^3+(c_3x+c_4)e^{-x}-3\sin x+(x-1)\cos x.$$

Уравнение Эйлера вида $\sum_{k=0}^{n}a_k(cx+d)^k y^{(k)}=F(x)$ сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами подстановкой $cx+d=e^t$.

Пример: Уравнение $x^2y''-5xy'+8y=x^2$ после подстановки $x=e^t$ переходит в рассмотренное на стр. 454 уравнение $\frac{d^2y}{dt^2}-6\frac{dy}{dt}+8y=e^{2t}$. Следовательно, $y=C_1e^{2t}+C_2e^{4t}-\frac{t}{2}e^{2t}=C_1x^2+C_2x^4-\frac{x^2}{2}\ln x$

5. *Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами*

Нормальные системы 1-го порядка. Простейшим случаем системы линейных уравнений 1-го порядка с постоянными коэффициентами являются так называемые *нормальные* системы:

$$\left.\begin{aligned}
y_1' &= a_{11}y_1+a_{12}y_2+\ldots+a_{1n}y_n,\\
y_2' &= a_{21}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{2n}y_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y_n' &= a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\ldots+a_{nn}y_n.
\end{aligned}\right\}\qquad (N)$$

Для нахождения общего решения такой системы необходимо прежде всего решить алгебраическое *характеристическое уравнение* **

$$\begin{vmatrix}
a_{11}-r & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22}-r & \ldots & a_{2n}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-r
\end{vmatrix}=0.$$

Каждому не кратному корню r_i характеристического уравнения

* Этот метод применим, в частности, если $F(x)=Q_p(x)$ (т. е. $k=0$) и если $F(x)=Q_p(x)e^{rx}\cos\omega x$ или $F(x)=Q_p(x)e^{rx}\sin\omega x$, что соответствует $k=r\pm i\omega$. В последнем случае решение следует искать в виде $y=x^m e^{rx}[M_p(x)\cos\omega x+N_p(x)\sin\omega x]$.

** Об определениях см. стр. 146.

соответствует система частных решений:

$$y_1 = A_1 e^{r_i x},\quad y_2 = A_2 e^{r_i x},\ \ldots,\ y_n = A_n e^{r_i x} \qquad (*)$$

где коэффициенты A_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ определяются из системы линейных однородных уравнений

$$\begin{gathered}(a_{11} - r_i) A_1 + a_{12} A_2 + \ldots + a_{1n} A_n = 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1} A_1 + a_{n2} A_2 + \ldots + (a_{nn} - r_i) A_n = 0.\end{gathered}$$

Поскольку из этой системы могут быть определены только отношения A_k (см. стр. 153), полученная указанным способом система частных решений для каждого r_i будет содержать одну произвольную постоянную. Если все корни характеристического уравнения различны, то сумма всех таких частных решений будет содержать n независимых произвольных постоянных и будет давать общее решение системы. Если какой-либо корень r_i характеристического уравнения имеет кратность m то этому корню будет соответствовать система частных решений вида:

$$y_1 = A_1(x)\, e^{r_i x},\quad y_2 = A_2(x)\, e^{r_i x},\ \ldots,\ y_n = A_n(x)\, e^{r_i x}$$

где $A_1(x), \ldots, A_n(x)$ — многочлены степени не выше $m - 1$. Подставляя эти выражения с неопределенными коэффициентами в данную систему и приравнивая, после сокращения на $e^{r_i x}$, коэффициенты при одинаковых степенях x в правых и левых частях равенств, получают уравнения, позволяющие выразить все неизвестные коэффициенты через какие-либо m из них, остающиеся произвольными. В некоторых случаях степень многочленов может оказаться ниже чем $m - 1$. В частности, в случае, если система (N) симметрична (т. е. $a_{ik} = a_{ki}$), достаточно взять $A_i(x) = \text{const}$. Если среди корней характеристического уравнения окажутся комплексные, то соответствующие члены общего решения могут быть приведены к действительному виду, так же как и в случае одного уравнения с постоянными коэффициентами (см. стр. 453).

Пример: Для системы

$$y_1' = 2y_1 + 2y_2 - y_3;\quad y_2' = -2y_1 + 4y_2 + y_3;\quad y_3' = -3y_1 + 8y_2 + 2y_3$$

характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2-r & 2 & -1 \\ -2 & 4-r & 1 \\ -3 & 8 & 2-r \end{vmatrix} = -(r-6)(r-1)^2 = 0.$$

Для простого корня $r_1 = 6$ получим:

$$-4A_1 + 2A_2 - A_3 = 0,\quad -2A_1 - 2A_2 + A_3 = 0,\quad -3A_1 + 8A_2 - 1A_3 = 0,$$

откуда $A_1 = 0$, $A_2 = \frac{1}{2}$, $A_3 = C_1$, т. е. $y_1 = 0$, $y_2 = C_1 e^{6x}$, $y_3 = 2C_1 e^{6x}$,

Для кратного корня $r_2 = 1$ полагаем

$$y_1 = (P_1 x + Q_1) e^x,\ y_2 = (P_2 x + Q_2) e^x,\ y_3 = (P_3 x + Q_3) e^x,$$

Подставляя в уравнения, получим:

$$\begin{gathered}P_1 x + (P_1 + Q_1) = (2P_1 + 2P_2 - P_3) x + (2Q_1 + 2Q_2 - Q_3);\\ P_2 x + (P_2 + Q_2) = (-2P_1 + 4P_2 + P_3) x + (-2Q_1 + 4Q_2 + Q_3);\\ P_3 x + (P_3 + Q_3) = (-3P_1 + 8P_2 + 2P_3) x + (-3Q_1 + 8Q_2 + 2Q_3).\end{gathered}$$

откуда

$$P_1 = 5C_2,\ P_2 = C_2,\ P_3 = 7C_2;\ Q_1 = 5C_3 - 6C_2,\ Q_2 = C_3,\ Q_3 = 7C_3 - 11C_2.$$

Общее решение системы:

$$\begin{gathered}y_1 = (5C_2 x + 5C_3 - 6C_2) e^x,\ y_2 = C_1 e^{6x} + (C_2 x + C_3) e^x,\\ y_3 = 2C_1 e^{6x} + (7C_2 x + 7C_3 - 11C_2) e^x\end{gathered}$$

Однородные системы 1-го порядка. Общий вид системы линейных однородных уравнений 1-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} y'_k + \sum_{k=1}^{n} b_{ik} y_k = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Если определитель $|a_{ik}|$* не равен 0, то эта система может быть приведена к нормальному виду. Однако решение может быть получено непосредственно из данной системы по тому же методу, что и в случае нормальной системы. Характеристическое уравнение примет вид $|a_{ik} r + b_{ik}| = 0$, а коэффициенты A_i в решении (*), соответствующем простому корню r_i, определяются в этом случае из уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik} r_i + b_{ik}) A_k = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

В остальном методика нахождения решения та же, что и в случае нормальной системы.

Случай $|a_{ik}| = 0$ нуждается в дополнительном исследовании (см. Степанов, стр. 587 справочника).

Пример: $5y'_1 + 4y_1 - 2y'_2 - y_2 = 0$; $y_1 + 8y_1 - 3y_2 = 0$. Характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 5r + 4 & -2r - 1 \\ r + 8 & -3 \end{vmatrix} = 2r^2 + 2r - 4 = 0; \; r_1 = 1, \; r_2 = -2.$$

Находим A_1 и A_2 для $r_1 = 1$: $9A_1 - 3A_2 = 0$, $9A_1 - 3A_2 = 0$, или $A_2 = 3A_1 = 3C_1$; точно так же для $r_2 = -2$ получим $\overline{A_2} = 2\overline{A_1} = 2C_2$. Отсюда общее решение: $y_1 = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$, $y_2 = 3C_1 e^{x} + 2C_2 e^{-2x}$.

Неоднородные системы линейных уравнений 1-го порядка. Общий вид:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k + \sum_{k=1}^{n} b_{ik} y_k = F_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Теорема наложения. Если $y_j^{(1)}$ и $y_j^{(2)}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ – решения неоднородных систем, отличающихся только правыми частями, равными соответственно $F_i^{(1)}$ и $F_i^{(2)}$, то $y_j = y_j^{(1)} + y_j^{(2)}$ $(j = 1, \ldots, n)$ будет являться решением такой же системы уравнений, но с правыми частями $F_i(x) = F_i^{(1)}(x) + F_i^{(2)}(x)$. Отсюда следует, что для получения общего решения неоднородной системы достаточно к ее частному решению прибавить общее решение соответствующей однородной системы. Для нахождения частного решения неоднородной системы может быть применен *метод вариации постоянных*: общее решение однородной системы подставляют в неоднородную систему, заменяя произвольные постоянные $C_1, \ldots, C_n$ неизвестными функциями $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$. При этом в выражениях для производных y_k появятся члены, содержащие производные от новых неизвестных функций $C_k(x)$. При подстановке в заданную систему в левых частях останутся только эти доба-

* Сокращенное обозначение определителя с элементами a_{ik}

вочные члены, остальные же сократятся, так как $y_1, \ldots, y_n$ по предположению являются решением однородной системы. Таким образом, для $C_k'(x)$ получится неоднородная система линейных алгебраических уравнений. Решая ее и выполняя n интегрирований, найдем функции $C_1(x), \ldots, C_n(x)$. Подставляя эти функции вместо постоянных в решение однородной системы, получим искомое частное решение.

Пример: $5y_1' + 4y_1 - 2y_2' - y_2 = e^{-x}$; $y_1' + 8y_1 - 3y_2 = 5e^{-x}$. Общее решение однородной системы (см. стр. 457) $y_1 = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$, $y_2 = 3C_1 e^{x} + 2C_2 e^{-2x}$; подставляя его в данные уравнения и считая C_1 и C_2 функциями x, получим: $5C_1' e^{x} + 5C_2' e^{-2x} - 6C_1' e^{x} - 4C_2' e^{-2x} = e^{-x}$; $C_1' e^{x} + C_2' e^{-2x} = 5e^{-x}$, или $C_2' e^{-2x} - C_1' e^{x} = e^{-x}$; $C_1' e^{x} + C_2' e^{-2x} = 5e^{-x}$. Отсюда $2C_1' e^{x} = 4e^{-x}$, $C_1 = -e^{-2x} + \text{const}$; $2C_2' e^{-2x} = 6e^{-x}$, $C_2 = 3e^{x} + \text{const}$. Считая все $\text{const} = 0$ (так как ищется частное решение), получим $y_1 = 2e^{-x}$, $y_2 = 3e^{-x}$; общее решение: $y_1 = 2e^{-x} + C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$, $y_2 = 3e^{-x} + 3C_1 e^{x} + 2C_2 e^{-2x}$.

В случае специальных правых частей вида $Q_p(x)\, e^{kx}$ может быть с успехом применен метод неопределенных коэффициентов, аналогично тому как это описано на стр. 454—455 для одного уравнения n-го порядка.

Системы 2-го порядка. Данные выше методы могут быть перенесены на системы линейных уравнений более высокого порядка В частности, для системы

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k'' + \sum_{k=1}^{n} b_{ik} y_k + \sum_{k=1}^{n} c_{ik} y_k = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

также можно искать частные решения вида $y_i = A_i e^{r_i x}$, где r_i определяется из характеристического уравнения $|a_{ik} r^2 + b_{ik} r + c_{ik}| = 0$, а A_i — из соответствующих линейных однородных алгебраических уравнений.

6. *Операторный метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений*

Изображение функций. *Изображением* заданной функции (*оригинала*) $\varphi(t)$ по Карсону-Хэвисайду называют функцию комплексной переменной p, определяемую равенством

$$f(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} \varphi(t)\, dt. \qquad (*)$$

При этом мы будем считать, что при $t < 0$ $\varphi(t) = 0$, а при $t > 0$ удовлетворяется неравенство $|\varphi(t)| < Me^{at}$, где M и a — некоторые положительные постоянные.

Методами теории функций комплексной переменной может быть получена *формула обращения*, позволяющая однозначно определить функцию-оригинал $\varphi(t)$, если известно ее изображение $f(p)$:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{r \to \infty} \int_{s-ir}^{s+ir} e^{pt} \frac{f(p)}{p}\, dp,$$

где s выбирается так, чтобы все особые точки подинтегральной функции лежали левее прямой $\mathrm{Re}\, p = s$ (об интегрировании функций комплексной переменной см. стр. 513; о формуле обращения подробнее см Смирнов, стр. 587 справочника). Соотношение $(*)$ будем условно записывать в виде $f(p) \doteq \varphi(t)$ *. В таблице на стр. 462 приведены некоторые простейшие функции и их изображения.

Основные свойства изображений функций. Из формулы $(*)$ могут быть получены следующие:

$$\frac{d\varphi}{dt} \doteq p f(p) - \varphi(0)\ p;\quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} \doteq p^2 f(p) - p^2\varphi(0) - p\varphi'(0); \ldots$$

$$\ldots;\ \frac{d^n\varphi}{dt^n} \doteq p^n f(p) - p^n\varphi(0) - p^{n-1}\varphi'(0) - \ldots - p\varphi^{(n-1)}(0)\ **.$$

$$\int_0^t \varphi(t)\,dt \doteq \frac{1}{p} f(p);\quad \varphi(at) \doteq f\left(\frac{p}{a}\right).\quad (a = \mathrm{const} > 0).$$

Если $\varphi_1(t) \doteq f_1(p)$ и $\varphi_2(t) \doteq f_2(p$, то $a_1\varphi_1(t) + a_2\varphi_2(t) \doteq a_1 f_1(p) + a_2 f_2(p)$

Теорема смещения. Если $\varphi(t) \doteq f(p)$, то $e^{-at}\varphi(t) \doteq \dfrac{p}{p+a} f(p + a)$

Теорема запаздывания. Если $\varphi(t) \doteq f(p)$, и $\lambda > 0$, то

$$e^{-\lambda p} f(p) \doteq \begin{cases} \varphi(t-\lambda) & \text{при } t > \lambda, \\ 0 & \text{при } t < \lambda. \end{cases}$$

Теорема Бореля. Если $\varphi_1(t) \doteq f_1(p)$, $\varphi_2(t) \doteq f_2(p)$, то

$$\int_0^t \varphi_1(t-\tau)\,\varphi_2(\tau)\,d\tau \doteq \frac{1}{p} f_1(p) f_2(p).$$

Импульсивная функция. Оригиналом для $f(p) = p$ является так называемая *дельта-функция* $\delta(t)$, обращающаяся в нуль при $t \neq 0$ и в бесконечность при $t = 0$, так что при этом $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$. Эту функцию можно определить иначе, например: $\delta(t) = \lim_{h \to 0} f(t, h)$, где $f(t, h) = \dfrac{1}{h}$ при $0 < t < h$ и $f(t, h) = 0$ вне этого интервала. Дельта-функция служит для представления мгновенных импульсов (механических, электрических и т. п.; см. пример 3 на стр. 461).

Операторный метод. Этот метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений заключается в основном в том, что от уравнения для неизвестной функции переходят к уравнению для ее изображения (так называемое *вспомогательное уравнение*). Это уравнение будет уже не дифференциальным, а простым алгебраическим. Получив изображение, находят по нему искомую функцию. Таким образом основная трудность в операторном методе заключается не в решении уравнения, а в переходе от функции к ее изображению и обратно

---

* Функция $\dfrac{f(p)}{p}$ называется *изображением* $\varphi(t)$ *по Лапласу* или кратко *L-изображением.*

** При этом предполагается, что $\dfrac{d^n\varphi}{dt^n}$ удовлетворяет введенному выше неравенству для функций, имеющих изображение.

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

$L_n(D)\,y \equiv (D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \ldots + a_{n-1}D + a_n)\,y = F(t)$ (D — оператор дифференцирования по независимой переменной t).

Пусть $y(t) \doteqdot \bar{y}(p)$, $F(t) \doteqdot \bar{F}(p)$. Тогда в силу формул стр. 459 вспомогательное уравнение будет:

$$L_n(p)\,\bar{y} = \bar{F}(p) + (p^n y_0 + p^{n-1}y_0' + \ldots + p y_0^{(n-1)}) + a_1(p^{n-1}y_0 + p^{n-2}y_0' + \ldots + p y_0^{(n-2)}) + \ldots + a_{n-2}(p^2 y_0 + p y_0') + a_{n-1} p y_0 \equiv \bar{F}(p) + M(p), \qquad (**)$$

где $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ — значения функции y и ее производных при $t=0$. В простейшем случае, когда $y_0 = y_0' = \ldots = y_0^{(n-1)} = 0$, $M(p) \equiv 0$. Соответствующее этим начальным условиям решение называется *нормальным*. Из $(**)$ следует, что $\bar{y} = \dfrac{\bar{F}(p) + M(p)}{L_n(p)}$. Для нахождения y во многих случаях можно воспользоваться методом разложения на элементарные дроби (см. стр. 130) и формулами (2) — (9) в таблице на стр. 462, так как эти формулы содержат в числителе p, то разлагают обычно дроби со знаменателем $pL_n(p)$ и результат умножают на p. В простейшем случае, когда все корни p_k знаменателя $L_n(p)$ различны, а числитель — многочлен $P_m(p)$ степени не выше n, это приводит к *формуле разложения Хэвисайда*:

$$\frac{P_m(p)}{L_n(p)} \doteqdot \frac{P_m(0)}{L_n(0)} + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{P_m(p)}{pL_n'(p)}\right]_{p=p_k} e^{p_k t}$$

Если $\dfrac{\bar{F}(p)}{L_n(p)}$ не рациональная функция, то разлагают на простейшие дроби $\dfrac{1}{pL_k(p)}$ и пользуются формулами

$$\frac{\bar{F}(p)}{p-a} \doteqdot e^{at}\int_0^t F(x)\,e^{-ax}dx$$

или

$$\frac{\bar{F}(p)}{(p-a)^m} \doteqdot \frac{e^{at}}{(m-1)!}\int_0^t F(x)\,e^{-ax}\,(t-x)^{m-1}\,dx.$$

При наличии комплексных корней у уравнения $L_n(p) = 0$ употребление последних формул в промежуточных вычислениях может приводить к комплексным величинам, однако конечный результат всегда можно будет представить в действительной форме.

Примеры: 1) Найти нормальное решение уравнения

$$y''' - y'' - y' + y = t.$$

$L(p) = (p+1)(p-1)^2$, $M(p) = 0$, $\bar{F}(p) = \dfrac{1}{p^2}$; $\bar{y} = \dfrac{1}{p(p+1)(p-1)^2} =$

$$= \frac{p}{p^2(p+1)(p-1)^2} = \frac{1}{p} + 1 + \frac{1}{4}\frac{p}{p+1} - \frac{5}{4}\frac{p}{p-1} + \frac{1}{2}\frac{p}{(p-1)^2}$$

Отсюда на основании формул (1), (2) и (9) стр. 462:

$$y = t + 1 + \frac{1}{4}e^{-t} + \left(\frac{1}{2}t - \frac{5}{4}\right)e^t$$

2) Найти общее решение уравнения $y''+m^2y=a\sin mt$; $L(p)=p^2+m^2$

$$\bar{F}(p)=\frac{amp}{m^2+p^2}.\quad M(p)=p^2y_0+py_0';\quad \bar{y}=\frac{amp}{(p^2+m^2)^2}+\frac{p^2y_0+py_0'}{p^2+m^2}.$$

Чтобы воспользоваться формулами таблицы на стр. 462, преобразуем первое слагаемое к виду $A\frac{p(p^2-m^2)}{(p^2+m^2)^2}+B\frac{pm}{p^2+m^2}$. Найдя A и B методом неопределенных коэффициентов, получим на основании формул (3), (4), (8) стр. 462:

$$y=\left(y_0-\frac{a}{2m}t\right)\cos mt+\frac{a+2my_0'}{2m^2}\sin mt.$$

3) Найти закон движения материальной точки массы m под действием мгновенного импульса A, приложенного в момент $t=0$. Начальная координата $x_0=0$, начальная скорость $x_0=0$.

Уравнение движения $m\frac{d^2x}{dt^2}=A\delta(t)$. Вспомогательное уравнение

$$mp^2\bar{x}=Ap.\ \text{Отсюда}\ \bar{x}=\frac{A}{mp},\ \text{т. е.}\ x=\frac{At}{m}.$$

Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Заменив каждое уравнение системы соответствующим вспомогательным уравнением, аналогично тому как это было показано выше для одного уравнения, решают полученную *алгебраическую* систему линейных уравнений относительно изображений неизвестных функций. При этом предполагается, что определитель системы отличен от нуля *. Для перехода от изображений к оригиналам пользуются обычно, как и для одного уравнения, методом разложения на простейшие дроби.

Пример: $(5D+4)y_1-(2D+1)y_2=e^{-x}$; $(D+8)y_1-3y_2=5e^{-x}$. При $x=0$ $y_1=y_{10}$, $y_2=y_{20}$. Вспомогательные уравнения будут:

$$(5p+4)\bar{y}_1-(2p+1)\bar{y}_2=\frac{p}{p+1}+5py_{10}-2py_{20};$$

$$(p+8)\bar{y}_1-3\bar{y}_2=\frac{5p}{p+1}+py_{10}.$$

Решая их относительно $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$, получим после разложения на простейшие дроби:

$$\bar{y}_1=\frac{2p}{p+1}+(3y_{10}-y_{20}-3)\frac{p}{p+2}+(-2y_{10}+y_{20}+1)\frac{p}{p-1};$$

$$\bar{y}_2=\frac{3p}{p+1}+(6y_{10}-2y_{20}-6)\frac{p}{p+2}+(-6y_{10}+3y_{20}+3)\frac{p}{p-1},$$

откуда

$$y_1=2e^{-x}+(3y_{10}-y_{20}-3)e^{-2x}+(1-2y_{10}+y_{20})e^{x},$$

$$y_2=3e^{-x}+(6y_{10}-2y_{20}-6)e^{-2x}+(3-6y_{10}+3y_{20})e^{x}.$$

Применение операторных методов к решению уравнений в частных производных см. стр. 490.

---

* Случай обращения определителя в нуль встречается весьма редко и требует дополнительного исследования.

Таблица изображений функций по Карсону-Хэвисайду

$\varphi(t) \quad (t>0)$ *	$f(p)=p\int_0^\infty e^{-pt}\varphi(t)\,dt$
1. $\frac{t^n}{\Gamma(n+1)}$	$\frac{1}{p^n}$
2. e^{-at}	$\frac{p}{p+a}$
3. $\sin kt$	$\frac{pk}{p^2+k^2}$
4. $\cos kt$	$\frac{p^2}{p^2+k^2}$
5. $e^{-at}\sin kt$	$\frac{pk}{(p+a)^2+k^2}$
6. $e^{-at}\cos kt$	$\frac{p(p+a)}{(p+a)^2+k^2}$
7. $t\sin kt$	$\frac{2kp^2}{(p^2+k^2)^2}$
8. $t\cos kt$	$\frac{p(p^2-k^2)}{(p^2+k^2)^2}$
9. $e^{-at}\,\frac{t^n}{n!}$	$\frac{p}{(p+a)^{n+1}}$
10. $\frac{(2t)^n}{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)\sqrt{\pi t}}$	$\frac{\sqrt{p}}{p^n}$ (n — целое, >0)
11. $\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{a^2}{4t}}$	$\sqrt{p}\,e^{-a\sqrt{p}}$ $(a>0)$
12. $\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}}\,e^{-\frac{a^2}{4t}}$	$pe^{-a\sqrt{p}}$
13. $1-\Phi\left(\frac{a}{\sqrt{2t}}\right)$ $(a>0)$ **	$e^{-a\sqrt{p}}$
14. $J_0(t)$ ***	$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$
15. $J_0(t)$ ***	$\frac{p}{\sqrt{p^2-1}}$
16. $\int_t^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx.$	$\ln(1+p)$

* При $t<0$ всегда $\varphi(t)=0$.
** Определение $\Phi(x)$ см. стр. 563.
*** О бесселевых функциях $J(x)$ и $I(x)$ см. стр. 464–465.

7. Линейные уравнения 2-го порядка

Общие методы. *Уравнение* $y''+p(x)y'+q(x)y=F(x)$. Общее решение однородного уравнения [$F(x)=0$]:

$$y=C_1y_1+C_2y_2,$$

где y_1 и y_2 — его два линейно независимых частных решения (см. стр. 451). Если известно одно частное решение y_1, то второе может быть определено по формуле

$$y_2=Ay_1\int\frac{e^{-\int p\,dx}}{y_1^2}\,dx, \text{ где } A \text{ произвольно.} \qquad (*)$$

являющейся следствием формулы Лиувилля (см. стр. 452). Частное решение неоднородного уравнения в этом случае может быть получено по формуле

$$y=\frac{1}{A}\int_{x_0}^{x}F(\xi)\,e^{\int p(\xi)\,d\xi}\,[y_2(x)\,y_1(\xi)-y_1(x)\,y_2(\xi)]\,d\xi,$$

где y_1 и y_2 — указанные выше частные решения однородного уравнения с той же левой частью.

Для нахождения частного решения неоднородного уравнения может быть применен также метод вариации произвольных постоянных (см. стр. 452).

Если в уравнении $s(x)\,y''+p(x)\,y'+q(x)\,y=F(x)$ функции $s(x)$, $p(x)$, $q(x)$ и $F(x)$ являются многочленами или разлагаются в сходящиеся ряды по степеням $x-x_0$ в некоторой области, и $s(x_0)\neq 0$, то решения этого уравнения также разлагаются в ряды по степеням $x-x_0$, сходящиеся в той же области. Эти решения могут быть найдены методом неопределенных коэффициентов: искомое решение в виде ряда $y=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots$ подставляется в данное уравнение; приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x-x_0$, получим уравнения для определения $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots$

Пример: $y''+xy=0$. Подставляя $y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$, $y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots$, $y''=2a_2+6a_3x+\ldots$, получим: $2a_2=0$, $6a_3+a_0=0,\ \ldots,\ n(n-1)\,a_n+a_{n-3}=0,\ \ldots$

Решая эти уравнения, получим: $a_2=0$, $a_3=-\frac{a_0}{2\cdot 3}$, $a_4=-\frac{a_1}{3\cdot 4}$, $a_5=0,\ \ldots$, откуда

$$y=a_0\left(1-\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}-\ldots\right)+a_1\left(x-\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}-\ldots\right).$$

Уравнение $x^2y''+xp(x)\,y'+q(x)\,y=0$. Если функции $p(x)$ и $q(x)$ разлагаются в сходящиеся ряды по степеням x, то методом неопределенных коэффициентов могут быть найдены решения вида:

$$y=x^r(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots).$$

Значения показателя r находятся из *определяющего уравнения*

$$r(r-1)+p(0)\,r+q(0)=0.$$

Если корни этого уравнения различны и их разность не равна целому числу, мы получим два независимых решения нашего уравнения. В противном случае метод неопределенных коэффициентов даст только одно решение.

Данная на стр. 463 формула (✳) может быть использована или для непосредственного нахождения второго решения, или для определения вида, в котором может быть найдено это решение по методу неопределенных коэффициентов.

Пример: Для уравнения Бесселя (см. ниже) при n целом методом неопределенных коэффициентов может быть получено только одно решение вида $y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{n+2k}$ $(a_0 \neq 0)$, совпадающее с $J_n(x)$ с точностью до постоянного множителя. Так как здесь $e^{-\int p\,dx} = \frac{1}{x}$, то вторым решением по формуле (✳) будет:

$$y_2 = Ay_1 \int \frac{dx}{x \cdot x^{2n}(\Sigma a_k x^{2k})^2} = Ay_1 \int \frac{\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{2k}}{x^{2n+1}}\,dx = By_1 \ln x + x^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^{2k}.$$

Получение последовательно коэффициентов c_k и d_k по a_k затруднительно, но последнее выражение может быть использовано для нахождения решения методом неопределенных коэффициентов (очевидно, такой вид имеет разложение в ряд функции $Y_n(x)$, см. ниже).

Уравнение Бесселя $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$. Определяющее уравнение: $r(r-1) + r - n^2 \equiv r^2 - n^2 = 0$, откуда $r = \pm n$. Подставляя $y = x^n(a_0 + a_1x + \ldots)$ в уравнение, мы получим, приравнивая нулю коэффициент при x^{n+k}: $k(2n+k)a_k + a_{k-2} = 0$; при $k = 1$ получим $(2n+1)a_1 = 0$. Давая k значения 2, 3, ..., получим $a_{2m+1} = 0$ $(m = 1, 2, \ldots)$; $a_2 = -\frac{a_0}{2(2n+2)}$; $a_4 = \frac{a_0}{2 \cdot 4 \cdot (2n+2)(2n+4)}$, ...; a_0 произвольно.

Бесселевы функции. Полученный ряд при $a_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)}$ * определяет *бесселеву* (или *цилиндрическую*) функцию n-го порядка 1-го рода

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n \Gamma(n+1)}\left(1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot (2n+2)(2n+4)} - \ldots\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!\,\Gamma(n+k+1)}$$

Графики функций J_0 и J_1 изображены на рис. 357.

Общее решение уравнения Бесселя при n, не равном целому числу, имеет вид: $y = C_1J_n(x) + C_2J_{-n}(x)$, где $J_{-n}(x)$ определяется рядом, получающимся из приведенного выше ряда для $J_n(x)$ заменой n на $-n$. При n целом $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$. В общем решении в этом случае $J_{-n}(x)$ должна быть заменена бесселевой функцией 2-го рода $Y_n(x)$ (*функцией Вебера*), определяемой равенством

$$Y_n(x) = \lim_{m \to n} \frac{J_m(x)\cos m\pi - J_{-m}(x)}{\sin m\pi}\ **.$$

Графики функций Y_0 и Y_1 изображены на рис. 358.

---

* О функции Γ см. стр. 162.

** Разложение функции $Y_n(x)$ в ряд см. Рыжик и Градштейн, стр. 585 справочника. Иногда эта функция обозначается $N_n(x)$.

В некоторых приложениях встречаются бесселевы функции чисто мнимого аргумента: при этом обычно рассматриваются произведения $i^{-n}J_n(ix)$, которые обозначают $I_n(x)$:

$$I_n(x) = i^{-n}J_n(ix) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{\Gamma(n+1)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2}}{1!\,\Gamma(n+2)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+4}}{2!\,\Gamma(n+3)} + \ldots$$

Эти функции являются решением дифференциального уравнения

$$x^2y'' + xy' - (x^2 + n^2)\,y = 0.$$

В качестве второго решения этого уравнения обычно берут *функцию Макдональда*

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2}\,\frac{I_{-n}(x) - I_n(x)}{\sin n\pi}$$

Это выражение стремится к определенному пределу, когда n стремится к целому числу *.

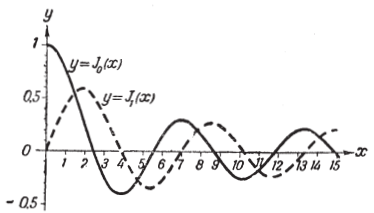


Рис. 357.

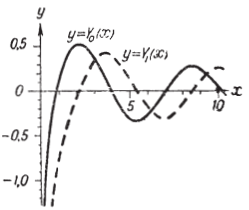


Рис. 358.

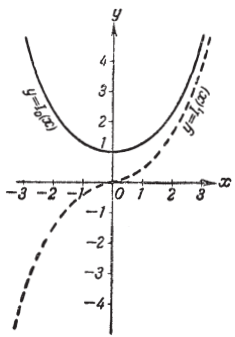


Рис. 359.

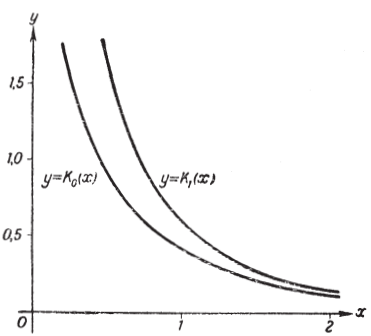


Рис. 360.

Графики функций I_0 и I_1 изображены на рис. 359, а функций K_0 и K_1 — на рис. 360. Таблицы функций $J_0(x)$, $J_1(x)$, $Y_0(x)$, $Y_1(x)$, $I_0(x)$, $I_1(x)$, $K_0(x)$, $K_1(x)$ см. стр. 76—77.

* Разложение $K_n(x)$ в ряд см. Рыжик и Градштейн, стр. 585 справочника.

Основные формулы для бесселевых функций:

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x); \quad \frac{dJ_n(x)}{dx} = -\frac{n}{x} J_n(x) + J_{n-1}(x);$$

[эти же формулы справедливы и для функций $Y_n(x)$];

$$I_{n-1}(x) - I_{n+1}(x) = \frac{2nI_n(x)}{x}; \quad \frac{dI_n(x)}{dx} = I_{n-1}(x) - \frac{n}{x} I_n(x);$$

$$K_{n+1}(x) - K_{n-1}(x) = \frac{2nK_n(x)}{x}; \quad \frac{dK_n(x)}{dx} = -K_{n-1}(x) - \frac{n}{x} K_n(x).$$

Для n целого: $J_{2n}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin\varphi) \cos 2n\varphi \, d\varphi;$

$$J_{2n+1}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(x \sin\varphi) \sin(2n+1)\varphi \, d\varphi$$

или в комплексной форме

$$J_n(x) = \frac{(-i)^n}{\pi} \int_0^{\pi} e^{ix\cos\varphi} \cos n\varphi \, d\varphi.$$

$J_{n+1/2}(x)$ выражаются через элементарные функции, в частности

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x; \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

Отсюда выражения для $J_{n+1/2}(x)$ при любом целом n могут быть получены последовательным применением приведенных выше рекуррентных формул.

При больших значениях x имеют место следующие асимптотические формулы:

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right)\right];$$

$$I_n(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right];$$

$$Y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\sin\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right)\right];$$

$$K_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right],$$

где $O\left(\frac{1}{x}\right)$ обозначает бесконечно малую величину того же порядка, что и $\frac{1}{x}$ (см. стр. 281).

Дальнейшие сведения о бесселевых функциях см. Ватсон, Бесселевы функции.

Уравнение Лежандра $(1 - x^2)\,y'' - 2xy' + n(n+1)\,y = 0$. Для целого n одним из решений этого уравнения являются *полиномы Лежандра (шаровые функции)*:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n\left[(x^2-1)^n\right]}{dx^n}.$$

Графики $P_n(x)$ от $n = 1$ до $n = 7$ см. рис. 361. Таблицы этих функций см. стр. 78.

$$P_0(x) = 1; \quad P_1(x) = x;$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1);$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x);$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3);$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x);$$

$$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5).$$

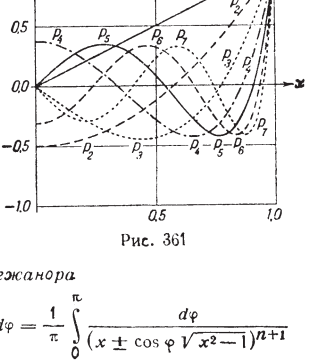


Рис. 361

Основные свойства полиномов Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x \pm \cos\varphi\,\sqrt{x^2-1}\right)^n d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\left(x \pm \cos\varphi\,\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1}}$$

(знак в обеих формулах любой);

$$(n+1)\,P_{n+1}(x) = (2n+1)\,xP_n(x) - nP_{n-1}(x);$$

$$(x^2-1)\,\frac{dP_n(x)}{dx} = n\,[xP_n(x) - P_{n-1}(x)];$$

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x)\,P_n(x)\,dx = 0 \quad \text{для} \quad m \neq n, \qquad \int_{-1}^{+1}[P_m(x)]^2\,dx = \frac{1}{2m+1}$$

Полиномы Лежандра могут быть получены при разложении в ряд по степеням z функции

$$(1 - 2xz + z^2)^{-1/2} = P_0(x) + P_1(x)\,z + P_2(x)\,z^2 + \ldots \quad (|z| < 1).$$

Дальнейшие сведения о полиномах Лежандра см. Смирнов, т. III, стр. 585 справочника.

Гипергеометрическое уравнение

$$x(1-x)\,\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)\,x]\,\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0,$$

где α, β и γ — параметры, охватывает большое число важных частных случаев. Например, при $\alpha = n+1$, $\beta = -n$, $\gamma = 1$ и $x = \frac{1-z}{2}$, оно превращается в уравнение Лежандра.

Если γ отлично от нуля или целого отрицательного числа, то частным решением гипергеометрического уравнения является *гипергеометрический ряд*

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n)}{1 \cdot 2 \ldots (n+1) \cdot \gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n)} x^{n+1} + \ldots, \quad (1)$$

сходящийся абсолютно при $|x| < 1$ *. Если $2 - \gamma$ отлично от нуля и отлично от целого отрицательного числа, то частным решением гипергеометрического уравнения является

$$y = x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x).$$

В ряде случаев гипергеометрический ряд сводится к простым элементарным функциям, например

$$F(1, \beta, \beta, x) = F(\alpha, 1, \alpha, x) = \frac{1}{1-x}, \quad F(-n, \beta, \beta, -x) = (1+x)^n,$$

$$F(1, 1, 2, -x) = \frac{\ln(1+x)}{x}, \qquad F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, x^2\right) = \frac{\arcsin x}{x}.$$

8. *Краевые задачи*

Постановка задачи. Во многих случаях, особенно в связи с решением уравнений математической физики (см. стр. 478), приходится, в отличие от рассматривавшихся выше задач с начальными условиями, решать так называемые *краевые задачи*, в которых искомое решение дифференциального уравнения должно удовлетворять некоторым условиям на концах заданного промежутка изменения независимой переменной. Мы ограничимся здесь рассмотрением следующей, наиболее важной краевой задачи.

Найти решение $y(x)$ *самосопряженного уравнения*

$$[py']' - qy + \lambda \rho y = f, \qquad (*)$$

удовлетворяющее однородным условиям

$$A_0 y(a) + B_0 y'(a) = 0, \quad A_1 y(b) + B_1 y'(b) = 0,$$

причем на интервале $a \leq x \leq b$ ** функции $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$, $f(x)$ непрерывны и притом $p(x) > p_0 > 0$, $\rho(x) > \rho_0 > 0$. Величина λ — постоянная (параметр уравнения). Полагая $f = 0$, получим *однородную* краевую задачу, соответствующую данной *неоднородной*.

Уравнение 2-го порядка $Ay'' + By' + Cy + \lambda Ry = F$ может быть приведено к виду $(*)$ умножением на $\frac{p}{A}$, где $p = e^{\int \frac{B}{A} dx}$, если на рассматриваемом интервале $A \neq 0$. При этом $q = -\frac{pC}{A}$, $\rho = \frac{pR}{A}$.

---

* Сходимость гипергеометрического ряда (1) при $x = 1$ и $x = -1$ зависит от числа $\delta = \gamma - \alpha - \beta$. При $x = 1$ ряд (1) абсолютно сходится, если $\delta > 0$, и расходится, если $\delta \leq 0$. При $x = -1$ ряд (1) абсолютно сходится, если $\delta > 0$, условно сходится, если $-1 < \delta \leq 0$, и расходится, если $\delta \leq -1$.

** В дальнейшем предполагается, что интервал (a, b) конечен. В случае бесконечного интервала результаты существенно видоизменяются (см., например, Тихонов и Самарский, стр. 587 справочника).

Задача отыскания решения, удовлетворяющего неоднородным условиям $A_0y(a)+B_0y'(a)=C_0$, $A_1y(b)+B_1y'(b)=C_1$, сводится к задаче с однородными условиями, но с другой правой частью $f(x)$ простой заменой неизвестной функции $y=z+u$, где u — любая дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая неоднородным краевым условиям, а z — новая неизвестная функция, удовлетворяющая, очевидно, соответствующим однородным краевым условиям.

Задача Штурма-Лиувилля. При фиксированном значении параметра λ справедливо следующее: либо неоднородная задача имеет решение при любых $f(x)$, и тогда это решение единственное, а соответствующая однородная задача имеет лишь *тривиальное* (тождественно равное нулю) решение, либо соответствующая однородная задача имеет нетривиальные (отличные от нуля) решения, и тогда неоднородная задача разрешима не для всех правых частей, а в случае существования решения оно не определяется однозначно. Те значения параметра λ, при которых имеет место второй случай (однородная задача имеет нетривиальное решение), называются *собственными значениями* данной краевой задачи, а соответствующие нетривиальные решения называются *собственными функциями*, отвечающими данному собственному значению. Задача отыскания собственных значений и собственных функций для уравнения (*) носит название *задачи Штурма-Лиувилля*.

Основные свойства собственных функций и собственных значений.

1. Собственные значения краевой задачи образуют последовательность действительных чисел

$$\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_n<\ldots,$$

стремящуюся к бесконечности. Собственная функция, соответствующая собственному значению λ_n, имеет ровно n нулей в интервале $a<x<b$.

2. Если $y(x)$ и $z(x)$ — собственные функции, отвечающие данному собственному значению λ; то $y(x)=cz(x)$, где c — постоянная.

3. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — собственные функции, соответствующие различным собственным значениям λ_1 и λ_2, то

$$\int_a^b y_1(x)\,y_2(x)\,\rho(x)\,dx=0$$

(свойство *ортогональности с весом* $\rho(x)$).

4. Если в уравнении (*) коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ заменить на $\tilde{p}(x)\geqslant p(x)$ и $\tilde{q}(x)\geqslant q(x)$, то собственные числа не уменьшатся, т. е. $\tilde{\lambda}_n\geqslant\lambda_n$, где $\tilde{\lambda}_n$ и λ_n — n-е собственные значения измененного и исходного уравнений. Если заменить коэффициент $\rho(x)$ на $\tilde{\rho}(x)\geqslant\rho(x)$, то собственные числа не возрастут, т. е. $\tilde{\lambda}_n\leqslant\lambda_n$. При этом n-е собственное значение непрерывно зависит от коэффициентов уравнения, т. е. достаточно малым изменениям коэффициентов соответствуют сколь угодно малые изменения n-го собственного значения.

5. При уменьшении отрезка $[a, b]$ собственные значения не убывают.

Разложение по собственным функциям. Выберем для каждого λ_n такую собственную функцию $\varphi_n(x)$, чтобы $\int_a^b[\varphi_n(x)]^2\rho(x)\,dx=1$ (такая собственная функция называется *нормированной*)

С каждой функцией $g(x)$, заданной в промежутке $[a, b]$, можно связать ее *«ряд Фурье»* по собственным функциям данной краевой задачи

$$g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \quad c_n = \int_a^b g(x) \varphi_n(x) \rho(x)\, dx,$$

если только выписанные интегралы имеют смысл.

Если функция $g(x)$ имеет непрерывную производную и удовлетворяет краевым условиям рассматриваемой задачи, то ряд Фурье функции $g(x)$ по собственным функциям краевой задачи абсолютно и равномерно сходится к $g(x)$ (*теорема о разложении*).

Примеры собственных функций и разложений по ним см. стр. 482—486.

Равенство Парсеваля

$$\int_a^b [g(x)]^2 \rho(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2$$

имеет место всегда, если интеграл в левой части имеет смысл. В этом случае ряд Фурье функции $g(x)$ по собственным функциям краевой задачи сходится к $g(x)$ в среднем, т. е.

$$\lim_{N \to \infty} \int_a^b \left[g(x) - \sum_{n=0}^{N} c_n \varphi_n(x) \right]^2 \rho(x)\, dx = 0.$$

Особые случаи. При применении метода Фурье в решении задач математической физики часто возникают краевые задачи рассмотренного выше типа с тем, однако, отличием, что в концевых точках промежутка $[a, b]$ могут иметь место особенности дифференциального уравнения, например обращение в нуль функции $p(x)$. В таких особых точках накладываются некоторые ограничения на поведение решения, как, например, непрерывность или конечность решения или обращение его в бесконечность не выше заданного порядка. Эти условия играют роль однородного краевого условия (см. стр. 481, пример 2). Кроме того, в некоторых краевых задачах приходится рассматривать однородные краевые условия, связывающие значения функции и ее производной на разных концах промежутка. Наиболее важными из таких условий являются условия

$$y(a) = y(b), \quad p(a) y'(a) = p(b) y'(b),$$

которые в случае $p(a) = p(b)$ можно рассматривать как условия периодичности. Для граничной задачи с такими условиями справедливо все изложенное выше, кроме утверждения 2 (см. стр. 469). Подробнее см. Курант-Гильберт, т. I. стр. 587 справочника.

Б. Уравнения в частных производных

9. Уравнения 1-го порядка

Линейные уравнения. *Линейным* уравнением с частными производными 1-го порядка называется уравнение

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = Y, \qquad (1)$$

где z — неизвестная функция независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$.

а $X_1, \ldots, X_n, Y$ — заданные функции от $x_1, \ldots, x_n$. Если в (1) функции $X_1, \ldots, X_n, Y$ зависят также и от z, то уравнение называется *квазилинейным*. Если $Y \equiv 0$:

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0, \tag{1a}$$

то уравнение называется *однородным*.

Задача интегрирования линейного однородного уравнения равносильна задаче интегрирования так называемой *характеристической системы*

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} *. \tag{2}$$

Оказывается, что всякий первый интеграл системы (2) является решением однородного линейного уравнения (1а) и, обратно, всякое решение уравнения (1а) является первым интегралом системы (2) (см. стр. 450). При этом если $n-1$ первых интегралов

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

независимы (см. стр. 451), то

$$z = \Phi(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}),$$

где Φ — произвольная функция от $(n-1)$-го аргумента, является общим решением линейного однородного уравнения (1а).

Решение z линейного неоднородного и квазилинейного уравнения (1) ищется в неявном виде $V(x_1, \ldots, x_n, z) = C$. При этом функция V оказывается решением однородного линейного уравнения с $n+1$ независимой переменной

$$X_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial V}{\partial x_n} + Y \frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

характеристическая система которого

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dz}{Y} \tag{2'}$$

называется *характеристической системой исходного уравнения* (1).

Геометрическое изображение. В случае уравнения с двумя независимыми переменными $x_1 = x$ и $x_2 = y$,

$$P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z), \tag{1$_1$}$$

решение $z = f(x, y)$ изображается поверхностью в пространстве xyz, которая называется *интегральной поверхностью* этого уравнения.

---

* При решении системы такого вида за независимую переменную можно принять любую из x_k, для которой $X_k \neq 0$ (система принимает вид $\frac{dx_j}{dx_k} = \frac{X_j}{X_k}$, $j = 1, \ldots, n$). Однако удобнее, сохраняя симметрию, ввести новую независимую переменную — параметр t, положив $\frac{dx_j}{X_j} = dt$ или $\frac{dx_j}{dt} = X_j$

Уравнение (1_1) означает, что в каждой точке интегральной поверхности $z = f(x, y)$ вектор нормали $\left\{ \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1 \right\}$ ортогонален заданному в этой точке вектору $\{P, Q, R\}$. Система (2′) принимает при этом вид

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}, \qquad (2_1)$$

откуда следует (см. стр. 534), что интегральные кривые этой системы, так называемые *характеристики*, касательны к векторам $\{P, Q, R\}$. Поэтому характеристика, имеющая с интегральной поверхностью $z = f(x, y)$ общую точку, целиком лежит на этой поверхности. Через каждую точку пространства проходит интегральная кривая характеристической системы (при условии выполнения теоремы на стр. 449), и интегральные поверхности составляются из характеристик.

Задача Коши. Пусть задано n функций от $(n-1)$ независимых переменных $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}),\quad x_2 = x_2(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}),\ \ldots, \\ x_n &= x_n(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}). \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

Задачей Коши для уравнения (1) называется задача отыскания такого его решения

$$z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

которое при подстановке $(*)$ обращается в заданную функцию $\psi(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})$:

$$\varphi[x_1(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}), x_2(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}), \ldots, x_n(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})] = \psi(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}).$$

Для случая двух независимых переменных эта задача сводится к отысканию интегральной поверхности, проходящей через заданную кривую. Если заданная кривая имеет непрерывно вращающуюся касательную и ни в одной точке не касается характеристики, то в некоторой окрестности этой кривой задача Коши всегда имеет решение и притом единственное. Интегральная поверхность образуется из совокупности всех характеристик, пересекающих заданную кривую. Более точную формулировку теоремы существования решения задачи Коши см. Понтрягин, Обыкновенные дифференциальные уравнения, стр. 587 справочника.

Примеры: 1) $(mz - ny)\frac{\partial z}{\partial x} + (nx - lz)\frac{\partial z}{\partial y} = ly - mx$ (l, m, n — постоянные). Уравнения характеристик: $\frac{dx}{mz - ny} = \frac{dy}{nx - lz} = \frac{dz}{ly - mx}$. Интегралы этой системы: $lx + my + nz = C_1$, $x^2 + y^2 + z^2 = C_2$. Характеристики — окружности с центрами, расположенными на прямой, которая проходит через начало координат и направляющие косинусы которой пропорциональны l, m, n. Интегральными поверхностями будут служить поверхности вращения, имеющие эту прямую осью вращения.

2) Найти интегральную поверхность уравнения $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z$, проходящую через кривую $x = 0$, $z = \varphi(y)$. Уравнения характеристик: $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{z}$. Характеристики, проходящие через точку (x_0, y_0, z_0): $y = x - x_0 + y_0$, $z = z_0 e^{x - x_0}$. Полагая $x_0 = 0$, $z_0 = \varphi(y_0)$, найдем $y = x + y_0$, $z = e^x \varphi(y_0)$ — параметрическое представление искомой интегральной поверхности. Исключая y_0, получим $z = e^x \varphi(y - x)$.

Нелинейные уравнения. Общий вид уравнения с частными производными 1-го порядка

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0. \tag{3}$$

Решение уравнения (3)

$$z = \varphi(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_n),$$

зависящее от n параметров $a_1, \ldots, a_n$, для которого якобиан (см. стр. 290) $\dfrac{\partial(\varphi'_{x_1}, \ldots, \varphi'_{x_n})}{\partial(a_1, \ldots, a_n)}$ отличен от нуля для рассматриваемых значений $x_1, \ldots, x_n, z$, называется *полным интегралом* уравнения (3).

Интегрирование уравнения (3) сводится к интегрированию так называемой *характеристической системы* дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{P_1} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{p_1P_1 + \ldots + p_nP_n} = \frac{-dp_1}{X_1 + p_1Z} = \ldots = \frac{-dp_n}{X_n + p_nZ}, \tag{4}$$

где

$$Z = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad X_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}, \quad P_i = \frac{\partial F}{\partial p_i} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Решения характеристической системы (4), удовлетворяющие дополнительному условию $F(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0$, называются *характеристическими плоскостями*.

Канонические системы. Часто удобнее рассматривать уравнение, не содержащее явно неизвестную функцию z. Переход к такому уравнению достигается введением дополнительной независимой переменной $x_{n+1} = z$ и такой неизвестной функции $V(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$, для которой уравнением $V(x_1, \ldots, x_n, z) = C$ определяется z как неявная функция от $x_1, \ldots, x_n$. При этом вместо $\dfrac{\partial z}{\partial x_i}$ в (3) подставляем $-\dfrac{\partial V}{\partial x_i} \Big/ \dfrac{\partial V}{\partial x_{n+1}}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Если, кроме того, разрешить дифференциальное уравнение относительно частной производной функции V по какой-либо независимой переменной, обозначив ее через x и соответственно изменив нумерацию остальных независимых переменных, то уравнение (3) примет вид:

$$\left.\begin{aligned} &p + H(x_1, \ldots, x_n, x, p_1, \ldots, p_n) = 0, \\ &p = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad p_i = \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

Система характеристических дифференциальных уравнений переходит в следующую систему:

$$\frac{dx_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{5}$$

и

$$\frac{dV}{dx} = p_1\frac{\partial H}{\partial p_1} + \ldots + p_n\frac{\partial H}{\partial p_n} - H, \quad \frac{dp}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \tag{6}$$

Уравнения (5) сами по себе образуют определенную систему из $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений. Такая система, соответ-

ствующая любой функции $H(x_1, \ldots, x_n, x, p_1, \ldots, p_n)$ от $2n+1$ переменных, называется *канонической системой* дифференциальных уравнений. К системам такого вида приводят многие задачи механики и теоретической физики. Знание полного интеграла

$$V = \varphi(x_1, \ldots, x_n, x, a_1, \ldots, a_n) + a$$

уравнения (3′) дает возможность найти общее решение канонической системы (5), так как уравнения $\frac{\partial \varphi}{\partial a_i} = b_i$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = p_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ с $2n$ произвольными параметрами a_i и b_i определяют $2n$-параметрическое решение канонической системы (5).

Уравнение Клеро. Задача отыскания полного интеграла оказывается особенно простой в случае, если уравнение имеет вид

$$z = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n + f(p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i} \quad (i = 1, \ldots, n) \text{ (уравнение Клеро).}$$

Полным интегралом такого уравнения будет

$$z = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n + f(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — произвольные параметры.

Пример: Задача о двух телах. Движение двух материальных точек, взаимно притягивающихся по закону Ньютона, происходит постоянно в одной плоскости. Поэтому, выбрав положение одной из точек за начало координат, можно уравнения движения записать в следующем виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad V = \frac{k^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Эта система после введения *функции Гамильтона*

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) - \frac{k^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

переходит в систему канонических дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} \qquad (*)$$

для величин

$$x, \; y, \; p = \frac{dx}{dt}, \; q = \frac{dy}{dt}.$$

Соответствующим уравнением в частных производных будет

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] - \frac{k^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

После перехода к полярным координатам ρ, φ нетрудно обнаружить, что это уравнение имеет полный интеграл:

$$z = -at - b\varphi + c - \int_{\rho_0}^{\rho} \sqrt{2a + \frac{2k^2}{r} - \frac{b^2}{r^2}}\, dr,$$

зависящий от параметров a, b, c. Поэтому из уравнений $\frac{\partial z}{\partial a} = -t_0$, $\frac{\partial z}{\partial b} = -\varphi_0$ получаем общее решение системы $(*)$.

Случай двух независимых переменных ($x_1 = x$, $x_2 = y$, $p_1 = p$, $p_2 = q$). В этом случае характеристическую полоску можно геометрически истолковать как кривую, в каждой точке (x, y, z) которой задана плоскость $p(\xi - x) + q(\eta - y) = \zeta - z$, касательная к кривой. Отыскание интегральной поверхности уравнения

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0,$$

проходящей через заданную кривую (задача Коши), сводится к проведению через точки начальной кривой тех характеристических полосок, соответствующая плоскость которых касательна к этой кривой. Значения p и q в точках начальной кривой определяются при этом из соотношений $F(x, y, z, p, q) = 0$ и $p\,dx + q\,dy = dz$, которые в случае нелинейного уравнения имеют, вообще говоря, несколько решений. Поэтому при постановке задачи Коши для получения определенного решения следует вдоль начальной кривой выделить пару непрерывных функций p, q, удовлетворяющих двум указанным соотношениям.

Более точно о существовании решения задачи Коши см. Понтрягин, Обыкновенные дифференциальные уравнения, стр. 587 справочника.

Пример: Для уравнения $pq = 1$ и начальной кривой $y = x^3$, $z = 2x^2$ можно вдоль кривой задать $p = x$, $q = \frac{1}{x}$. Характеристическая система имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = q, \quad \frac{dy}{dt} = p, \quad \frac{dz}{dt} = 2pq, \quad \frac{dp}{dt} = 0, \quad \frac{dq}{dt} = 0.$$

Характеристическая полоска с начальными условиями x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 при $t = 0$ будет: $x = x_0 + q_0 t$, $y = y_0 + p_0 t$, $z = 2p_0 q_0 t + z_0$, $p = p_0$, $q = q_0$. В случае $p_0 = x_0$, $q_0 = \frac{1}{x_0}$ кривая, принадлежащая характеристической полоске, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0) начальной кривой, будет:

$$x = x_0 + \frac{t}{x_0}, \quad y = x_0^3 + t x_0, \quad z = 2t + 2x_0^2.$$

Исключая параметры x_0, t, находим $z^2 = 4xy$. Если вдоль начальной кривой задать другие допустимые значения для p и q, положив, например, $p = 3x$, $q = \frac{1}{3x}$, то в результате получим другое решение.

Поверхность, огибающая однопараметрическое семейство интегральных поверхностей, является также интегральной поверхностью. Используя это обстоятельство, можно решить задачу Коши при помощи полного интеграла, выделяя однопараметрическое семейство решений, которые касаются в точках начальной кривой заданных плоскостей и находя огибающую этого семейства.

Пример: Пусть для уравнения $z - px - qy + pq = 0$ (уравнение Клеро) требуется найти интегральную поверхность, проходящую через кривую $y = x$, $z = x^2$. Рассматриваемое уравнение имеет полный интеграл $z = ax + by - ab$. Так как вдоль начальной кривой следует положить $p = q = x$, то условие $a = b$ выделяет нужное однопараметрическое семейство. Находя огибающую, получаем $z = \frac{1}{4}(x + y)^2$.

Уравнения в полных дифференциалах. Уравнение в полных дифференциалах имеет вид

$$dz = f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2 + \ldots + f_n\,dx_n, \tag{7}$$

где $f_1, f_2, \ldots, f_n$ — заданные функции переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$. Уравнение (7) называется *вполне интегрируемым*, если существует единственное соотношение между $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$, содержащее произвольную постоянную, следствием которого является уравнение (7). В этом случае существует единственное решение $z = z(x_1, \ldots, x_n)$ уравнения (7), принимающее заданное значение z^0 при начальных значениях $x_1^0, \ldots, x_n^0$ независимых переменных. Для $n = 2$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, это означает, что через каждую точку пространства проходит одна и только одна интегральная поверхность. Уравнение (7) вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда оказываются выполненными тождественно по всем переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$ следующие $\frac{n(n-1)}{2}$ соотношений:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} + f_k \frac{\partial f_i}{\partial z} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i} + f_i \frac{\partial f_k}{\partial z} \quad (i, k = 1, \ldots, n).$$

Если уравнение (7) задано в симметричной форме $f_1 dx_1 + \ldots + f_n dx_n = 0$ то условиями полной интегрируемости будут тождества

$$f_i\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_j} - \frac{\partial f_j}{\partial x_k}\right) + f_j\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \frac{\partial f_k}{\partial x_i}\right) + f_k\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) = 0$$

для всех комбинаций индексов i, j, k.

В случае полной интегрируемости нахождение решения уравнения (7) приводится к интегрированию одного обыкновенного уравнения с $(n-1)$ параметрами *

10. Линейные уравнения 2-го порядка

Общий вид линейного уравнения 2-го порядка в случае двух независимых переменных x, y и неизвестной функции u:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = f, \qquad (1)$$

где коэффициенты A, B, C, a, b, c и свободный член f — заданные функции от x и y.

Классификация. Характер решений этого уравнения во многом определяется знаком *дискриминанта* $\delta = AC - B^2$. Уравнение (1) называется уравнением *гиперболического типа* в некоторой области, если в ней $\delta < 0$, уравнением *параболического* типа, если в рассматриваемой области тождественно $\delta = 0$, уравнением *эллиптического* типа, если в рассматриваемой области $\delta > 0$. Если δ меняет знак в рассматриваемой области, то уравнение (1) называется уравнением *смешанного* типа. Знак дискриминанта δ остается неизменным при любом преобразовании независимых переменных (введение новой системы координат на плоскости Oxy). Поэтому тип уравнения инвариантен относительно выбора независимых переменных.

Характеристиками уравнения (1) называются интегральные кривые дифференциального уравнения

$$A\,dy^2 - 2B\,dx\,dy + C\,dx^2 = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{-\delta}}{A}.$$

Уравнение гиперболического типа имеет два семейства действительных характеристик, уравнение параболического типа имеет одно семейство

* Подробнее см. Гурса, Курс математического анализа, т. II.

действительных характеристик, уравнение эллиптического типа не имеет действительных характеристик. Уравнение, получающееся из уравнения (1), если в последнем ввести новые независимые переменные, имеет те же характеристики, что и уравнение (1). Если семейство характеристик совпадает с одним из семейств координатных линий, то в уравнении (1) отсутствует член, содержащий вторую производную неизвестной функции по соответствующей независимой переменной. В параболическом случае при этом также будет отсутствовать член, содержащий смешанную производную.

Каноническая форма. Путем введения новых независимых переменных $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ уравнение (1) может быть приведено к одной из трех *канонических* форм:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \ldots = 0 \quad (\delta < 0, \text{ гиперболический тип}), \tag{а}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \ldots = 0 \quad (\delta = 0, \text{ параболический тип}), \tag{б}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \ldots = 0 \quad (\delta > 0, \text{ эллиптический тип}), \tag{в}$$

где точки обозначают члены, не содержащие частных производных второго порядка неизвестной функции.

Если в гиперболическом случае выбрать два семейства характеристик в качестве семейств координатных линий новой системы координат, т. е. положить $\xi_1 = \varphi(x, y)$, $\eta_1 = \psi(x, y)$, где $\varphi(x, y) = \text{const}$, $\psi(x, y) = \text{const}$ — уравнения семейств характеристик, то уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \, \partial \eta_1} + \ldots = 0.$$

Эту форму также называют канонической формой уравнения гиперболического типа. От нее с помощью замены $\xi = \xi_1 + \eta_1$, $\eta = \xi_1 - \eta_1$ можно перейти к канонической форме (а). Для приведения уравнения параболического типа к канонической форме (б) достаточно выбрать в качестве семейства $\xi = \text{const}$ единственное в этом случае семейство характеристик, взяв за η любую независимую от ξ функцию от x и y. Если коэффициенты $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$ — аналитические функции (см. стр. 505), то уравнение характеристик в эллиптическом случае определяет два комплексно-сопряженных семейства кривых $\varphi(x, y) = \text{const}$, $\psi(x, y) = \text{const}$. Уравнение приводится к канонической форме (в), если положить $\xi = \varphi + \psi$, $\eta = i(\varphi - \psi)$.

Все высказанное выше относительно классификации и приведения к канонической форме применимо к уравнениям несколько более общего вида:

$$A(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} + C(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$$

Число независимых переменных больше двух. Линейное дифференциальное уравнение в частных производных 2-го порядка с числом независимых переменных, большим двух, имеет вид

$$\sum_{i,\,k} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_k} + \ldots = 0, \tag{2}$$

где a_{ik} — заданные функции независимых переменных, а точки означают члены, не содержащие производных второго порядка неизвестной функции.

Уравнение (2) вообще уже невозможно привести с помощью преобразований независимых переменных к простым нормальным формам. Однако и для него может быть дана имеющая важное значение классификация, подобная приведенной выше *.

Уравнения с постоянными коэффициентами. Если коэффициенты a_{ik} в уравнении (2) постоянны, то его можно привести при помощи линейной однородной замены независимых переменных к следующей нормальной форме:

$$\sum_i \varkappa_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \ldots = 0, \qquad (2')$$

где все коэффициенты $\varkappa_i$ равны ± 1 или 0.

Если все коэффициенты $\varkappa_i$ отличны от нуля и имеют один и тот же знак, то уравнение называется *эллиптическим*. Если все коэффициенты $\varkappa_i$ отличны от нуля, а знак одного из них отличен от знака остальных, то уравнение называется *гиперболическим* **. Если один из коэффициентов $\varkappa_i$, равен нулю, а остальные отличны от нуля и имеют одинаковые знаки, то уравнение называется *параболическим*.

Если в линейном уравнении постоянны не только коэффициенты при старших производных, но и коэффициенты при первых производных неизвестной функции, то с помощью замены неизвестной функции в уравнении можно избавиться от членов с первыми производными по тем переменным, для которых $\varkappa_i \neq 0$. Для этого достаточно положить $u = ve^{-\frac{1}{2}\sum \frac{b_k}{\varkappa_k} x_k}$, где b_k — коэффициент при $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ в (2'), а суммирование распространено по всем $\varkappa_k \neq 0$. Таким образом, все дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами в эллиптическом случае приводятся к виду $\Delta v + kv = g$, а в гиперболическом случае — к виду $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v + kv = g$, где Δ — оператор Лапласа:

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 v}{\partial x_n^2}.$$

Постановка задач. Рассмотрение различных физических явлений в непрерывных средах (механических, электрических, тепловых и пр.) приводит к дифференциальным уравнениям в частных производных, которые поэтому и называются *уравнениями математической физики*. При этом наиболее важными и чаще всего встречающимися оказываются линейные уравнения 2-го порядка. Для решения физической задачи, приводящейся к дифференциальным уравнениям в частных производных, требуется обычно отыскание такого решения дифференциального уравнения, которое удовлетворяет каким-то дополнительным, так называемым *граничным* и *начальным условиям*. Совокупность этих условий должна определять решение уравнения однозначно. Кроме того, и это не менее важно, решение должно быть

---

* См. Тихонов и Самарский, стр. 587 справочника.

** Если имеется не меньше двух коэффициентов каждого знака, то, уравнение называется *ультрагиперболическим*.

устойчивым относительно малых изменений начальных и граничных условий, т. е. изменяться сколь угодно мало, если достаточно мало изменены условия. В этом случае говорят, что задача поставлена *корректно*. Только при выполнении этого условия математическая задача решения дифференциального уравнения может считаться применимой для описания реальных явлений. При этом оказывается, что для уравнений гиперболического типа, к которым, в частности, приводит изучение колебаний непрерывных сред, корректной является «задача Коши» — задание на начальном «многообразии» (кривой, поверхности) значений искомой функции и ее производной по некасательному направлению (в частности, по нормали), в то время как для уравнений эллиптического типа, к которым приводит изучение стационарных процессов и равновесия непрерывных сред, корректной является «краевая задача» — задание значений неизвестной функции (или ее нормальной производной) на границе рассматриваемой области независимых переменных, причем если рассматриваемая область неограничена, то обычно накладывается некоторое требование на поведение искомой функции «в бесконечности», т. е. на поведение функции при неограниченном возрастании аргументов.

Неоднородные условия и неоднородные уравнения. Решение линейного уравнения (однородного или неоднородного) при неоднородных начальных или граничных условиях (см. стр. 468) может быть сведено к решению уравнения, отличающегося от данного только свободным (от неизвестной функции) членом, но уже при однородных условиях. Для этого достаточно заменить искомую функцию разностью между ней и произвольной (дважды непрерывно дифференцируемой) функцией удовлетворяющей заданным условиям.

Решение линейного неоднородного уравнения при данных неоднородных начальных или граничных условиях является суммой решения этого же уравнения при нулевых условиях и решения соответствующего однородного уравнения при данных условиях.

Наконец, решение линейного неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L[u] = g(x,\ t)\ *$$

при однородных начальных условиях $u\Big|_{t=0} = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$ сводится следующим образом к решению задачи Коши для соответствующего однородного уравнения:

$$u = \int_0^t \varphi(x,\ t;\ \tau)\, d\tau,$$

где $\varphi(x,\ t;\ \tau)$ — решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L[u] = 0$$

при условиях $u\Big|_{t=\tau} = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=\tau} = g(x,\ \tau)$.

---

* Здесь x — символ n пространственных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а $L[u]$ — линейное дифференциальное выражение, содержащее, быть может, производную $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, но не содержащее высших производных по t,

Наиболее часто встречающиеся уравнения.

1) *Волновое уравнение* — уравнение распространения колебаний в однородной среде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = Q(x, t).$$

где $Q(x, t)$ — правая часть (x — символ пространственных переменных $x_1, \ldots, x_n$), равная нулю при отсутствии возмущающих сил. Для однородного уравнения ($Q(x, t) = 0$) решение, удовлетворяющее начальным условиям $u\Big|_{t=0} = \varphi(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x)$, дается следующими формулами:

при $n = 3$

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{4\pi a^2}\left[\iint\limits_{S_{at}} \frac{\psi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{t}\, d\sigma + \frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_{at}} \frac{\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{t}\, d\sigma\right],$$

где интегрирование ведется по сфере $(\alpha_1 - x_1)^2 + (\alpha_2 - x_2)^2 + (\alpha_3 - x_3)^2 = a^2 t^2$ (*формула Кирхгофа*);

при $n = 2$

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi a}\left[\iint\limits_{k_{at}} \frac{\psi(\alpha_1, \alpha_2)\, d\alpha_1\, d\alpha_2}{\sqrt{a^2 t^2 - (\alpha_1 - x_1)^2 - (\alpha_2 - x_2)^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{k_{at}} \frac{\varphi(\alpha_1, \alpha_2)\, d\alpha_1\, d\alpha_2}{\sqrt{a^2 t^2 - (\alpha_1 - x_1)^2 - (\alpha_2 - x_2)^2}}\right],$$

где интегрирование ведется по кругу $(\alpha_1 - x_1)^2 + (\alpha_2 - x_2)^2 \leqslant a^2 t^2$ (*формула Пуассона*);

при $n = 1$

$$u(x_1, t) = \frac{\varphi(x_1 + at) + \varphi(x_1 - at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x_1 - at}^{x_1 + at} \psi(\alpha)\, d\alpha.$$

формула Даламбера).

Если исходное уравнение неоднородно, то к правым частям этих формул необходимо соответственно добавить:

при $n = 3$ — так называемый *запаздывающий потенциал*

$$\frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{r \leqslant at} \frac{Q\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t - \frac{r}{a}\right)}{r}\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3,$$

где $r = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2}$;

при $n = 2$

$$\frac{1}{2\pi a}\iiint\limits_{K} \frac{Q(\xi_1, \xi_2, \tau)\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\tau}{\sqrt{a^2 (t - \tau)^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2}},$$

где K — область пространства ξ_1, ξ_2, τ, определенная неравенствами $0 \leqslant \tau \leqslant t$, $(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 \leqslant a^2 (t - \tau)^2$;

при $n = 1$

$$\frac{1}{2a} \iint\limits_T Q(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau,$$

где T — треугольник $0 \leqslant \tau \leqslant t$, $|\xi - x_1| \leqslant a|t - \tau|$.

Из приведенных формул следует, что a есть скорость распространения возмущения.

2) *Уравнение распространения тепла* в однородной среде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = Q(x, t)\ *.$$

Здесь $Q(x, t)$ — правая часть, равная нулю при отсутствии источников и поглотителей тепла. Для этого уравнения обычно ставится следующая *задача Коши:* найти ограниченное при $t > 0$ решение, если $u|_{t=0} = f(x)$. Условие ограниченности обеспечивает единственность решения. Для однородного уравнения имеем:

$$u(x_1, \ldots, x_n, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, e^{-\frac{(x_1-\alpha_1)^2+\ldots+(x_n-\alpha_n)^2}{4a^2 t}}\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n.$$

При $Q(x, t) \not\equiv 0$ к правой части этого равенства надо прибавить

$$\int_0^t \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{\left[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right]^n} e^{-\frac{(x_1-\alpha_1)^2+\ldots+(x_n-\alpha_n)^2}{4a^2(t-\tau)}}\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n \right] d\tau.$$

Задача отыскания $u(x, t)$ для $t < 0$, если заданы значения $u(x, 0)$, оказывается поставленной некорректно.

3) *Уравнения теории потенциала*

$$\Delta u = -4\pi\rho\ *,$$

где ρ — заданная функция точки (*уравнение Пуассона*). Если $\rho \equiv 0$, получаем *уравнение Лапласа* $\Delta u = 0$ (см. стр. 547—548).

Методы интегрирования. *Разделение переменных.* Для многих дифференциальных уравнений математической физики можно получить с помощью специальных подстановок если не всю совокупность решений, то все же семейство решений, зависящее от произвольных параметров. У линейных дифференциальных уравнений, в особенности 2-го порядка, часто можно применить подстановку $u(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2) \ldots \varphi_n(x_n)$. Для определения каждой из этих функций $\varphi_k(x_k)$, при условии разделения переменных после подстановки такого произведения в исходное уравнение (см. примеры), получают обыкновенное линейное дифференциальное уравнение. При этом, для того чтобы решение исходного уравнения удовлетворяло требуемым однородным граничным условиям, может оказаться достаточным, чтобы часть функций $\varphi_1(x_1)$, $\varphi_2(x_2)$, ..., $\varphi_n(x_n)$ удовлетворяла некоторым краевым условиям.

---

* Δ — оператор Лапласа для n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (см. стр. 478).

Из полученных решений с помощью процессов суммирования, дифференцирования и интегрирования можно получать новые решения. При этом параметры следует выбрать так, чтобы оказались выполненными оставшиеся граничные и начальные условия (см. примеры). Следует помнить, что полученное по этому способу решение в виде ряда или несобственного интеграла является лишь «формальным решением», и после его получения необходимо проверить, имеет ли оно смысл (т. е. сходится ли ряд и т. п.) и удовлетворяет ли оно данному уравнению и граничным условиям (т. е. допустимо ли почленно его дифференцировать, переходить к пределу при подходе к границе и т. п.).

Во всех следующих примерах ряды и несобственные интегралы сходятся, если на функции, которыми задаются начальные условия, наложить соответствующие ограничения (например, непрерывность второй производной в примерах 1 и 2).

Примеры: 1) Найти решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее начальным условиям $u\Big|_{t=0} = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi(x)$ и краевым условиям $u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=l} = 0$ (*колебания закрепленной струны*).

Ищем решение в виде $u = X(x)\,T(t)$. Подставляя в уравнение, получим $\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X}$ (переменные разделены). Так как левая часть не зависит от x, а правая — от t, то каждая из них есть величина постоянная. Обозначая ее через $-\lambda^2$ *, получим $X'' + \lambda^2 X = 0$, $T'' + a^2\lambda^2 T = 0$. Кроме того, из краевых условий имеем $X(0) = X(l) = 0$. Таким образом, $X(x)$ оказывается собственной функцией краевой задачи Штурма-Лиувилля, а λ^2 — собственным значением этой задачи (см. стр. 469). Из уравнения для X и краевых условий найдем $X(x) = C \sin \lambda x$, причем $\sin \lambda l = 0$, т. е. $\lambda = \frac{n\pi}{l}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Интегрируя теперь уравнение $T'' + \lambda^2 a^2 T = 0$, получим частное решение исходного уравнения в виде

$$u_n = \left(a_n \cos \frac{na\pi}{l}\, t + b_n \sin \frac{na\pi}{l}\, t\right) \sin \frac{n\pi}{l}\, x.$$

Потребовав, чтобы $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ обращалось при $t = 0$ в $f(x)$, а $\frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ — в $\varphi(x)$, получим, используя формулы разложения в ряд Фурье по синусам (см. стр. 549):

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx, \quad b_n = \frac{2}{na\pi} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx.$$

2) Рассмотрение продольных *колебаний стержня*, один из концов которого свободен, а к другому приложена в начальный момент постоянная сила p, приводит к рассмотренному в примере 1 дифферен-

* Из дальнейшего видно, что при положительных значениях этой постоянной не удается удовлетворить краевым условиям.

циальному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

с начальными условиями $u\Big|_{t=0} = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi(x)$, но с неоднородными краевыми условиями: $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0$ (свободный конец), $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = kp$. Эти условия можно заменить однородными $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0\right)$, вводя вместо u новую неизвестную функцию $z = u - \frac{kpx^2}{2l}$, но тогда дифференциальное уравнение станет неоднородным: $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{a^2 kp}{l}$. Решение его будем искать в виде $z = v + w$ где v удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению, краевым и начальным условиям для z, т. е.

$$z\Big|_{t=0} = f(x) - \frac{kpx^2}{2}, \quad \frac{\partial z}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi(x),$$

а w удовлетворяет неоднородному дифференциальному уравнению и нулевым начальным и краевым условиям. Легко видеть, что $w = \frac{ka^2 pt^2}{2l}$. Полагая $v = X(x)\,T(t)$ и подставляя в уравнение, получим, как и выше, $\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} = -\lambda^2$. Интегрируя уравнение для X с краевыми условиями $X'(0) = X'(l) = 0$, найдем собственные функции данной задачи $X_n = \cos\frac{n\pi x}{l}$ и соответствующие собственные значения $\lambda_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Действуя дальше, как в предыдущем примере, получим окончательно:

$$u = \frac{ka^2 pt^2}{2l} + \frac{kpx^2}{2l} + a_0 + \frac{a\pi}{l} b_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{an\pi t}{l} + \frac{b_n}{n} \sin\frac{an\pi t}{l}\right) \cos\frac{n\pi x}{l},$$

где a_n и b_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — коэффициенты разложения в ряд Фурье по косинусам на интервале $(0, l)$ функций $f(x) - \frac{kpx^2}{2}$ и $\frac{l}{a\pi}\varphi(x)$ (см. стр. 549).

3) Задача о *колебании круглой закрепленной на краю мембраны*. Уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

или в полярных координатах (см. стр. 315)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

при условиях

$$u\Big|_{t=0} = f(r, \varphi), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(r, \varphi), \quad u\Big|_{r=R} = 0.$$

Пусть $u = U(r)\,\Phi(\varphi)\,T(t)$. Подставляя в уравнение, получим $\frac{U''}{U} + \frac{U'}{rU} + \frac{\Phi''}{r^2\Phi} = \frac{1}{a^2}\frac{T''}{T}$. Отсюда, как и выше, $T'' + a^2\lambda^2 T = 0$ и $\frac{r^2U'' + rU'}{U} + \lambda^2 r^2 = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \nu^2$ или $\Phi'' + \nu^2\Phi = 0$.

Из условий $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$, $\Phi'(0) = \Phi'(2\pi)$ находим

$$\Phi(\varphi) = a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi, \quad \nu^2 = n^2 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Для определения U и λ имеем: $[rU']' - \frac{n^2}{r}U = -\lambda^2 rU$ при условии $U(R) = 0$. Присоединяя естественное условие ограниченности $U(r)$ при $r = 0$ и сделав подстановку $\lambda r = z$, найдем

$$z^2U'' + zU' + (z^2 - n^2)\,U = 0, \text{ т. е. } U(r) = J_n(z) = J_n\left(\mu\frac{r}{R}\right)$$

(J_n — бесселевы функции, см. стр. 464), где $\lambda = \frac{\mu}{R}$ и $J_n(\mu) = 0$.

Пусть μ_{nk} — k-й положительный нуль функции $J_n(z)$. Система функций $U_{nk}(r) = J_n\left(\mu_{nk}\frac{r}{R}\right)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ является полной системой всех собственных функций самосопряженной задачи типа Штурма-Лиувилля, ортогональных с весом r (см. стр. 469).

Решение нашей задачи ищем в виде двойного ряда:

$$U = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left[(a_{nk}\cos n\varphi + b_{nk}\sin n\varphi)\cos\frac{a\mu_{nk}t}{R} + (c_{nk}\cos n\varphi + d_{nk}\sin n\varphi)\sin\frac{a\mu_{nk}t}{R}\right]J_n\left(\mu_{nk}\frac{r}{R}\right)$$

Из начальных условий при $t = 0$ получаем:

$$f(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(a_{nk}\cos n\varphi + b_{nk}\sin n\varphi)\,J_n\left(\mu_{nk}\frac{r}{R}\right),$$

$$F(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a\mu_{nk}}{R}(c_{nk}\cos n\varphi + d_{nk}\sin n\varphi)\,J_n\left(\mu_{nk}\frac{r}{R}\right),$$

откуда

$$\begin{matrix} a_{nk} \\ b_{nk} \end{matrix} = \frac{2}{\pi R^2 J_{n-1}^2(\mu_{nk})}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R f(r, \varphi)\begin{matrix}\cos n\varphi \\ \sin n\varphi\end{matrix} J_n\left(\mu_{nk}\frac{r}{R}\right) r\,dr;$$

при $n = 0$ стоящая в числителе двойка должна быть заменена на 1. формулы, определяющие коэффициенты a_{nk} и d_{nk}, получаются из-

формул для a_{nk} и b_{nk} заменой $f(r, \varphi)$ на $F(r, \varphi)$ и умножением на $\dfrac{R}{a\mu_{nk}}$.

4) *Задача Дирихле* (см. стр. 547) для прямоугольника $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$ (рис. 362). Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ и условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u(a, y) = \varphi_2(y), \quad u(x, 0) = \psi_1(x), \quad u(x, b) = \psi_2(x).$$

Решим задачу прежде всего для случая $\varphi_1(y) = \varphi_2(y) = 0$. Подставляя $u = X(x)\,Y(y)$ в уравнение, получаем $\dfrac{X''}{X} = -\dfrac{Y''}{Y} (= -\lambda^2)$. Так как $X(0) = X(a) = 0$, то $X = C \sin \lambda x$, $\lambda = \dfrac{n\pi}{a}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Записав общее решение уравнения $Y'' - \dfrac{n^2\pi^2}{a^2} Y = 0$ в виде

$$Y = a_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} (b - y) + b_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y,$$

получим частное решение уравнения $\Delta u = 0$, удовлетворяющее условию $u(0, y) = u(a, y) = 0$, в виде

$$u_n = \left[a_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} (b - y) + b_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y \right] \sin \frac{n\pi}{a} x.$$

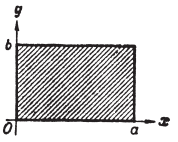


Рис. 362.

Полагая теперь $u = \sum u_n$, из условий при $y = 0$ и $y = b$ находим, что

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} (b - y) + b_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y \right) \sin \frac{n\pi}{a} x,$$

где

$$a_n = \frac{2}{a \operatorname{sh} \dfrac{n\pi b}{a}} \int_0^a \psi_1(x) \sin \frac{n\pi}{a} x \cdot dx, \quad b_n = \frac{2}{a \operatorname{sh} \dfrac{n\pi b}{a}} \int_0^a \psi_2(x) \sin \frac{n\pi}{a} x \cdot dx.$$

Решив аналогично задачу для случая $\psi_1(x) = \psi_2(x) = 0$, найдем решение общей задачи, взяв сумму двух найденных решений.

5) *Распространение тепла в однородном стержне*, один конец которого удален в бесконечность, а на другом поддерживается постоянная температура. Требуется найти ограниченное решение уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(0 \leqslant x < +\infty, t \geqslant 0)$ при условиях $u\big|_{t=0} = f(x)$, $u\big|_{x=0} = 0$ (постоянную на конце стержня температуру принимаем равной нулю). Подставляя $u = X(x)\,T(t)$ в уравнение, получим $\dfrac{T'}{a^2 T} = \dfrac{X''}{X} (= -\lambda^2)$. Отсюда $T(t) = C_\lambda e^{-\lambda^2 a^2 t}$. Из условия ограниченности решения следует, что $\lambda^2 \geqslant 0$. Так как $X(0) = 0$, то $X(x) = C \sin \lambda x$. Итак, $u_\lambda = C_\lambda e^{-\lambda^2 a^2 t} \sin \lambda x$. Здесь λ — любое действительное число, поэтому

можно рассмотреть решения вида

$$u(x, t) = \int_0^\infty C(\lambda)\, e^{-\lambda^2 a^2 t} \sin \lambda x\, d\lambda.$$

Из условия $u\Big|_{t=0} = f(x)$ находим $f(x) = \int_0^\infty C(\lambda) \sin \lambda x\, d\lambda$. Последнее равенство будет выполнено, если положить $C(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(s) \sin \lambda s\, ds$ (см. стр. 549). Подставляя $C(\lambda)$ в $u(x, t)$, получим:

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(s) \left(\int_0^\infty e^{-\lambda^2 a^2 t} \sin \lambda s \sin \lambda x\, d\lambda \right) ds.$$

или, заменяя произведение синусов полуразностью косинусов (см. стр. 184) и используя формулу 5) на стр. 407:

$$u(x, t) = \int_0^\infty f(s)\, \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left[e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+s)^2}{4a^2 t}} \right] ds.$$

Метод Римана решения задачи Коши для уравнения гиперболического типа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = F.$$

Находим «*функцию Римана*» $v(x, y, \xi, \eta)$ (ξ, η рассматриваются как параметры), удовлетворяющую сопряженному * однородному уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial (av)}{\partial x} - \frac{\partial (bv)}{\partial y} + cv = 0$$

и условиям

$$v(x, \eta; \xi, \eta) = e^{\int_\xi^x b(s, \eta)\, ds} \qquad v(\xi, y; \xi, \eta) = e^{\int_\eta^y a(\xi, s)\, ds}$$

---

* Сопряженным к линейному уравнению $\sum_{i,k} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_k} + \sum_i b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f$ называется уравнение $\sum_{i,k} \frac{\partial^2 (a_{ik} v)}{\partial x_i\, \partial x_k} - \sum_i \frac{\partial (b_i v)}{\partial x_i} + cv = 0$.

Функция $u(\xi, \eta)$, удовлетворяющая исходному уравнению и принимающая на заданной кривой Γ (рис. 363; гладкая кривая Γ не должна иметь касательных, параллельных осям координат, т. е. не должна касаться характеристик) вместе со своей производной по нормали к этой кривой (см. стр. 235) заданные значения, находится по формуле

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(uv)_P + \frac{1}{2}(uv)_Q - \int_{QP}\left[buv + \frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]dx - \left[auv + \frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]dy + \iint_{PMQ} Fv\,dx\,dy.$$

Криволинейный интеграл в этой формуле может быть вычислен, так как по значениям на дуге функции и ее производной (по некасательному направлению) можно найти значения обеих частных производных. Часто при постановке задачи Коши вместо производной по направлению нормали задают на кривой значения одной из частных производных искомой функции. В этом случае удобнее воспользоваться другим видом формулы Римана:

$$u(\xi, \eta) = (uv)_P - \int_{QP}\left(buv - u\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx - \left(auv + v\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy + \iint_{PMQ} Fv\,dx\,dy$$

$\left(\text{если на } \Gamma \text{ заданы значения } \frac{\partial u}{\partial y}\right)$.

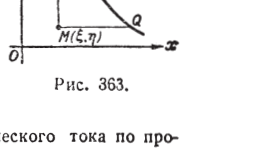


Рис. 363.

Пример: Уравнение распространения электрического тока по проводам (*телеграфное уравнение*) имеет вид

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2b\frac{\partial u}{\partial t} + cu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где $a > 0$, b, c — постоянные.

Заменой неизвестной функции $u = ze^{-(b/a)t}$ оно приводится к виду

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = m^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + n^2 z \qquad \left(m^2 = \frac{1}{a},\ n^2 = \frac{b^2 - ac}{a^2}\right)$$

и заменой независимых переменных $\xi = \frac{n}{m}(mt + x)$, $\eta = \frac{n}{m}(mt - x)$ к виду

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta} - \frac{z}{4} = 0.$$

Функция Римана $v(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ должна удовлетворять этому уравнению и обращаться в единицу при $\xi = \xi_0$ и при $\eta = \eta_0$. Если искать v в виде $v = f(w)$, где $w = (\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)$, то $f(w)$ оказывается решением уравнения $w\frac{d^2 f}{dw^2} + \frac{df}{dw} - \frac{1}{4}f = 0$ с начальным условием $f(0) = 1$. Заменой

$w=\alpha^2$ это уравнение сводится к уравнению Бесселя нулевого порядка $\frac{d^2f}{d\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\frac{df}{d\alpha}-f=0$ (см. стр. 464) и, следовательно, $v=I_0\left[n\sqrt{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}\right]$. Если требуется найти решение исходного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $z\Big|_{t=0}=f(x)$, $\frac{\partial z}{\partial t}\Big|_{t=0}=g(x)$, то, подставляя в формулу Римана найденное значение v и возвращаясь к старым переменным, получим:

$$z(x,t)=\frac{1}{2}[f(x-mt)+f(x+mt)]+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{x-mt}^{x+mt}\left[g(s)\,\frac{I_0\left(\frac{n}{m}\sqrt{m^2t^2-(s-x)^2}\right)}{m}\right.$$

$$\left.-f(s)\,\frac{ntI_1\left(\frac{n}{m}\sqrt{m^2t^2-(s-x)^2}\right)}{\sqrt{m^2t^2-(s-x)^2}}\right]ds.$$

Метод Грина решения краевых задач для уравнений эллиптического типа во многом сходен с методом Римана решения задач Коши для уравнений гиперболического типа. Если требуется найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую в некоторой области уравнению

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu=f$$

и принимающую на границе этой области заданные значения, то прежде всего находим «*функцию Грина*» $G(x, y; \xi, \eta)$, удовлетворяющую следующим условиям (ξ, η рассматриваются как параметры): 1) $G(x, y; \xi, \eta)$ везде, кроме точки $x=\xi$, $y=\eta$, удовлетворяет однородному сопряженному * уравнению

$$\frac{\partial^2G}{\partial x^2}+\frac{\partial^2G}{\partial y^2}-\frac{\partial(aG)}{\partial x}-\frac{\partial(bG)}{\partial y}+cG=0.$$

2) Функция G имеет вид $U\ln\frac{1}{r}+V$, где U и V — непрерывные во всей области вместе со своими производными до 2-го порядка включительно функции, причем U принимает значение 1 в точке $x=\xi$, $y=\eta$, а $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$. 3) На границе рассматриваемой области $G(x, y; \xi, \eta)$ обращается в нуль.

С помощью функции Грина решение краевой задачи определяется по формуле

$$u(\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_S u(x,y)\frac{\partial}{\partial n}G(x,y;\xi,\eta)\,ds-\frac{1}{2\pi}\iint_D f(x,y)\,G(x,y;\xi,\eta)\,dx\,dy,$$

где D — рассматриваемая область, S — ее граница, на которой функция u

* См. примечание на стр. 486.

по условию задана, $\frac{\partial}{\partial n}$ означает производную по направлению внутренней нормали к границе области.

Условие 3) зависит от характера поставленной задачи. Так, например, если на границе области заданы значения не самой искомой функции, а ее производной по направлению нормали к границе, то в условии 3) необходимо потребовать на границе обращения в нуль выражения

$$\frac{\partial G}{\partial n} - (a \cos \alpha + b \cos \beta)\, G,$$

где α, β — углы внутренней нормали к границе области с осями координат. Решение в этом случае определяется формулой

$$u(\xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_S \frac{\partial u}{\partial n} G\, ds - \frac{1}{2\pi} \iint\limits_D fG\, dx\, dy.$$

Метод Грина применим также к тем линейным уравнениям с тремя независимыми переменными, которые имеют вид

$$\Delta u + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c \frac{\partial u}{\partial z} + eu = f.$$

Для отыскания решения этого уравнения принимающего заданные значения на границе рассматриваемой области, строится, так же как выше, функция Грина (с теми изменениями, что теперь она зависит от трех параметров ξ, η, ζ); сопряженное уравнение, которому удовлетворяет функция Грина, имеет вид

$$\Delta G - \frac{\partial (aG)}{\partial x} - \frac{\partial (bG)}{\partial y} - \frac{\partial (cG)}{\partial z} + eG = 0,$$

и в условии 2) требуется, чтобы G имела вид $U \frac{1}{r} + V$, где $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$. Решение задачи дается при этом формулой

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S u \frac{\partial G}{\partial n}\, ds - \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_D fG\, dx\, dy\, dz.$$

Как в методе Римана, так и в методе Грина требуется сначала найти некоторое специальное решение дифференциального уравнения, с помощью которого потом может быть получено решение при любых начальных (граничных) условиях. Существенное отличие функции Грина от функции Римана заключается в том, что тогда как последняя зависит только от вида левой части самого дифференциального уравнения, функция Грина зависит и от рассматриваемой области. Нахождение функции Грина, даже тогда, когда известно ее существование, практически является чрезвычайно трудной задачей, в связи с чем метод Грина применяется преимущественно в теоретических исследованиях.

Примеры: 1) Для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$, если рассматриваемая область является кругом, функция Грина для задачи Дирихле может

быть легко построена. Если радиус окружности равен R и точка M_1 симметрична относительно окружности с точкой $M(\xi, \eta)$, т. е. M и M_1 лежат на одном радиусе и $OM \cdot OM_1 = R^2$, то функция Грина выражается формулой

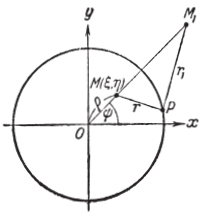


Рис. 364.

$$G(x, y; \xi, \eta) = \ln \frac{1}{r} + \ln \frac{\rho r_1}{R},$$

где $r = MP$, $\rho = OM$ и $r_1 = M_1P$ (рис. 364).

Приведенная выше формула для решения задачи Дирихле в данном случае даст после подстановки нормальной производной от функции Грина и некоторых преобразований так называемый *интеграл Пуассона*:

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\psi - \varphi)} u(\varphi)\, d\varphi$$

(обозначения те же, что и выше, $\xi = \rho \cos \psi$, $\eta = \rho \sin \psi$, $u(\varphi)$ — заданная на окружности функция определяющая граничные значения искомой функции u).

2) Аналогично строится функция Грина для задачи Дирихле уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в пространстве, если рассматриваемая область — шар радиуса R. На этот раз функция Грина будет иметь вид

$$G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{r} - \frac{R}{r_1 \rho},$$

где $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ — расстояние от точки (ξ, η, ζ) до центра шара, r — расстояние от точки (x, y, z) до точки (ξ, η, ζ), r_1 — расстояние от точки (x, y, z) до симметричной к точке (ξ, η, ζ) точки $\left(\frac{R\xi}{\rho}, \frac{R\eta}{\rho}, \frac{R\zeta}{\rho}\right)$. Интеграл Пуассона принимает при этом вид (в тех же обозначениях):

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{R^2 - \rho^2}{Rr^3} u\, ds.$$

Операторный метод. Так же, как для обыкновенных дифференциальных уравнений, при решении уравнений в частных производных может быть с успехом применен операторный метод основанный на переходе от искомой функции к ее изображению (см. стр. 458). При этом искомую функцию считают функцией одной из независимых переменных, рассматривая остальные как параметры. Для изображения искомой функции получают, таким образом, дифференциальное уравнение (*вспомогательное уравнение*), содержащее на одну независимую переменную меньше, чем исходное уравнение. В частности, если исходное уравнение содержало две независимых переменных, для изображения искомой функции получаем обыкновенное дифференциальное уравнение. Если из полученного уравнения можно найти изображение искомой функции, то сама функция находится либо по таблице изображений, либо по формуле обращения.

Примеры: 1) Рассмотрим распространение тепла в твёрдом теле, ограниченном с одной стороны ($x > 0$), температура на границе которого ($x = 0$) изменяется по закону $u = k \cos \omega t$ при $t > 0$, а начальная температура тела равна нулю.

Задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{в области } x>0,\ t>0,$$

при условиях: $u\Big|_{t=0,\ x>0} = 0$, $u\Big|_{x=0,\ t>0} = k\cos\omega t$. Вспомогательное уравнение имеет вид

$$a^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} - p\bar{u} = 0,\ x>0$$

с условием $\bar{u} = \frac{kp^2}{p^2+\omega^2}$ при $x=0$. Решение вспомогательного уравнения, остающееся ограниченным при $x\to\infty$, будет

$$\bar{u} = \frac{kp^2}{p^2+\omega^2} e^{-\frac{x}{a}\sqrt{p}}.$$

Используя формулу (12) на стр. 462 и теорему Бореля (см. стр. 459) для перехода от изображения к функции, получаем:

$$u(x,t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \cos\omega\tau \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau.$$

2) Стержень длины l находится в состоянии покоя, и его конец $x=0$ закреплен. В момент времени $t=0$ к свободному концу стержня приложена сила S (на единицу площади).

Задача исследования колебаний такого стержня сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

в области $0<x<l$, $t>0$, при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$$

для $0<x<l$, и граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = \frac{S}{E}$$

(E — модуль Юнга). Вспомогательное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} - \frac{p^2}{a^2}\bar{u} = 0$$

с условиями $\bar{u}\Big|_{x=0} = 0$, $\frac{d\bar{u}}{dx}\Big|_{x=l} = \frac{S}{E}$.

Решением будет функция $\bar{u} = \frac{Sa}{Ep} \frac{\operatorname{sh}\frac{px}{a}}{\operatorname{ch}\frac{pl}{a}}$.

С помощью разложения изображения $\bar{u}$ на простейшие дроби * или формулы обращения отсюда можно получить:

$$u(x, t) = \frac{Sx}{E} - \frac{8Sl}{\pi^2 E} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \cos \frac{(2n+1)\pi at}{2l}.$$

Приближенные методы. При решении конкретных задач, связанных с интегрированием уравнений в частных производных, широко применяются различные приближенные методы как аналитические, позволяющие получить приближенное аналитическое выражение для искомой функции, так и численные, при помощи которых могут быть получены непосредственно приближенные значения искомой функции для некоторых определенных значений аргументов.

Основа численных методов заключается в замене производных отношениями конечных приращений, в результате чего дифференциальное уравнение переходит в систему алгебраических уравнений, которая в случае линейного исходного уравнения оказывается линейной системой. Кроме того, большое распространение имеет метод *моделирования*, основанный на том, что одно и то же дифференциальное уравнение описывает различные физические явления. Для решения данного уравнения строится модель, в которой протекает один из процессов, описываемых рассматриваемым уравнением, и значения искомой функции получают непосредственными измерениями на модели. Обычно модель содержит элементы, которые могут меняться в определенных пределах, и поэтому на модели оказывается возможным решать задачи для целого класса дифференциальных уравнений.

Более подробно о приближенных методах см. Канторович и Крылов, стр. 587 справочника.

---

* См. Смирнов, т. III, стр. 585 справочника.

ОТДЕЛ ПЯТЫЙ

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ АНАЛИЗА

I. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Основные понятия

Мнимая единица. Формально определяют мнимую единицу i* как число, дающее в квадрате «— 1». Введение мнимой единицы приводит к обобщению понятия о числе — к *комплексным числам*, которые играют большую роль в алгебре и анализе и допускают конкретные интерпретации в некоторых геометрических и физических вопросах.

Комплексные числа. Общая форма комплексного числа $a = \alpha + \beta i$; придавая α и β всевозможные действительные значения, получаем всевозможные комплексные числа a. Число α называется *действительной частью* комплексного числа a; βi — его *мнимой частью*; β — коэффициентом при мнимой части. Обозначения:

$$\alpha = \mathrm{R}\,(a), \quad \beta = \mathrm{I}\,(a)\ **.$$

Если $\beta = 0$, то $a = \alpha$ (действительные числа — частный случай комплексных чисел), если $\alpha = 0$, то $a = \beta i$ («*чисто мнимые*» числа).

Геометрическая интерпретация. Подобно тому как действительные числа могут быть изображены точками числовой прямой, комплексные числа изображают точками плоскости: число $a = \alpha + \beta i$ изображается точкой с абсциссой α и ординатой β (рис. 365). Действительные числа изображаются точками оси абсцисс (*действительная ось*), чисто мнимые — точками оси ординат (*мнимая ось*). Так как каждая точка плоскости вполне определяется радиусом-вектором этой точки (см. стр. 520), то каждому комплексному числу соответствует определенный *вектор*, лежащий в плоскости и идущий из полюса в точку, соответствующую комплексному числу (рис. 366). Таким образом, комплексные числа могут изображаться как точками, так и векторами.

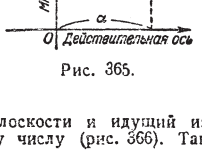


Рис. 365.

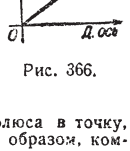


Рис. 366.

---

* i — от франц. imaginaire — мнимый. В электротехнике вместо i употребляют букву j (чтобы не спутать с обозначением i для силы тока).

** R — от франц. réel (действительный), I — imaginaire.

Равенство комплексных чисел. По определению, два комплексных числа считаются *равными*, если равны отдельно их действительные части и коэффициенты при мнимых частях. Геометрически комплексные числа равны, если равны изображающие их векторы. В противном случае числа не равны; понятий «больше» и «меньше» для комплексных чисел не существует.

Тригонометрическая форма комплексного числа. Выражение комплексного числа $a = \alpha + \beta i$ называется *алгебраической* формой его записи; если ввести вместо декартовых координат точки, изображающей комплексное число, ее полярные координаты (стр. 199), то получаем *тригонометрическую форму* записи комплексного числа (рис. 367):

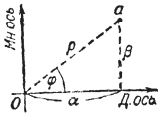


Рис. 367.

$$a = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi);$$

ρ — длина радиуса-вектора соответствующей точки — называется *модулем* или *абсолютной величиной* комплексного числа (обозначается $|a|$), угол φ (в радианах) — *аргументом* комплексного числа (обозначается $\arg a$):

$$\rho = |a|, \quad \varphi = \arg a.$$

Связь между ρ, φ и α, β та же, что и между декартовыми и полярными координатами точки (см. стр. 200):

$$\alpha = \rho\cos\varphi, \quad \beta = \rho\sin\varphi;$$

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \varphi = \operatorname{Arctg}\frac{\beta}{\alpha};$$

при этом $0 \leq \rho < \infty$, а φ может иметь любое значение: $-\infty < \varphi < +\infty$; для данного комплексного числа аргумент φ имеет бесконечное множество значений, отличающихся друг от друга на $2k\pi$ (k — целое). *Главное значение* аргумента заключено в промежутке $-\pi < \varphi \leq +\pi$.

Число *нуль* $(0 + 0i)$ имеет модуль, равный нулю; $\arg 0$ — величина неопределенная.

Показательная форма. Часто применяется следующая форма записи комплексного числа a с модулем ρ и аргументом φ:

$$a = \rho e^{\varphi i} \quad (\textit{показательная форма})\ *.$$

Так, например, число $1 + \sqrt{3}\,i$ может быть записано так:

алгебраическая форма $1 + \sqrt{3}\,i =$

тригонометрическая форма $= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) =$

показательная форма $= 2e^{\frac{\pi}{3}i}$,

а также, если не ограничиваться главным значением аргумента:

$$1 + \sqrt{3}\,i = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)\right] = 2e^{\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)i}.$$

---

* Подробнее об этом см. ниже, стр. 499.

Сопряженные комплексные числа. Два комплексных числа называются *взаимно сопряженными* (обозначаются a и $\bar{a}$), если их действительные части равны, а мнимые отличаются только знаком: $R(\bar{a}) = R(a)$, $I(\bar{a}) = -I(a)$. В геометрической интерпретации точки, изображающие сопряженные числа, расположены симметрично относительно действительной оси. Модули сопряженных чисел равны, аргументы отличаются знаком:

$$a = \alpha + \beta i = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{\varphi i}.$$
$$\bar{a} = \alpha - \beta i = \rho(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \rho e^{-\varphi i}.$$

2. Алгебраические действия

Сложение и вычитание двух или нескольких комплексных чисел определяется формулой

$$(\alpha_1 + \beta_1 i) + (\alpha_2 + \beta_2 i) - (\alpha_3 + \beta_3 i) + \ldots = (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \ldots) + (\beta_1 + \beta_2 - \beta_3 + \ldots) i$$

В геометрической интерпретации для получения вектора, изображающего сумму или разность двух или нескольких чисел, следует сложить или вычесть векторы, изображающие эти числа, по правилу действий над векторами (стр. 520) (рис. 368).

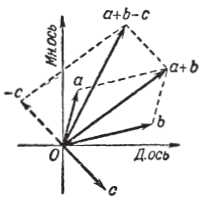


Рис. 368.

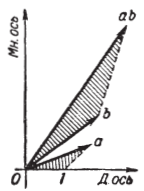


Рис. 369.

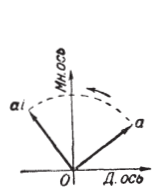


Рис. 370.

Умножение двух комплексных чисел определяется формулой

$$(\alpha_1 + \beta_1 i) \cdot (\alpha_2 + \beta_2 i) = (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) + (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2) i.$$

Если числа даны в тригонометрической форме, то

$$[\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)][\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)] = \rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)],$$

т. е. модуль произведения равен произведению модулей, аргумент произведения равен сумме аргументов сомножителей. В геометрической интерпретации вектор, изображающий произведение a на b, получается поворотом вектора a против часовой стрелки на угол, равный $\arg b$, и растяжением его в $|b|$ раз. Произведение ab можно также получить построением подобного треугольника (рис. 369). В частности, при умножении числа a на i, вектор, изображающий a, поворачивается на $\pi/2$, не изменяя своей длины (рис. 370).

Деление двух комплексных чисел определяется как действие, обратное умножению. В алгебраической форме:

$$\frac{\alpha_1+\beta_1 i}{\alpha_2+\beta_2 i}=\frac{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2}{\alpha_2^2+\beta_2^2}+\frac{\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2}{\alpha_2^2+\beta_2^2}\,i.$$

В тригонометрической форме:

$$[\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)]:[\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)]=\frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)],$$

т. е. модуль частного равен частному модулей делимого и делителя, аргумент частного равен разности их аргументов.

В геометрической интерпретации вектор, изображающий частное $\frac{a}{b}$, получается поворотом вектора, изображающего число a, по часовой стрелке на угол $\arg b$ и сжатием его в $|b|$ раз.

Деление на нуль невозможно.

Общее правило для четырех арифметических действий. Формально вычисления над комплексными числами $\alpha+\beta i$ производятся так же, как и над обыкновенными двучленами, полагая $i^2=-1$. При делении одного комплексного числа на другое «уничтожают мнимость в знаменателе» (аналогично уничтожению иррациональности в знаменателе, см. стр. 132): умножают числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю, пользуясь равенством $(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)=\alpha^2+\beta^2$ (действительное число).

Пример преобразования:

$$\frac{(3-4i)(-1+5i)^2}{1+3i}+\frac{10+7i}{5i}=$$

$$=\frac{(3-4i)(1-10i-25)}{1+3i}+\frac{(10+7i)\,i}{5i\cdot i}=$$

$$=\frac{-2(3-4i)(12+5i)}{1+3i}+\frac{7-10i}{5}=$$

$$=\frac{-2(56-33i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}+\frac{7-10i}{5}=$$

$$=\frac{-2(-43-201i)}{10}+\frac{7-10i}{5}=$$

$$=\frac{1}{5}(50+191i)=10+38{,}2i.$$

Возведение в n-ю степень комплексного числа производится по *формуле Муавра*:

$$[\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$$

— модуль возводится в n-ю степень, а аргумент умножается на n. Формула Муавра применима при любом значении n: целом, дробном, положительном, отрицательном. При дробном n необходимо учитывать многозначность результата (см. ниже).

В частности имеем: $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=+1$ и, далее, $i^{4n+k}=i^k$.

Извлечение корня n-й степени как действие, обратное возведению в степень, производится по формуле Муавра для дробного показателя: если $a = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right).$$

Сложение, вычитание, умножение, деление и возведение в целую степень — действия однозначные; извлечение же корня n-й степени дает всегда n различных значений.

Если давать $\arg a$ значения φ, $\varphi+2\pi$, $\varphi+4\pi$, ..., $\varphi+2(n-1)\pi$, то значения $\arg\sqrt[n]{a}$ будут отличаться друг от друга на $\frac{2\pi}{n}$; при дальнейших значениях k они будут повторяться. В геометрической интерпретации точки, изображающие $\sqrt[n]{a}$, являются вершинами правильного n-угольника с центром в полюсе (на рис. 371 изображено 6 значений $\sqrt[6]{a}$).

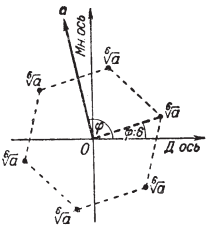


Рис. 371.

Алгебраические функции комплексной переменной. Если величина z является комплексной переменной (величиной, принимающей любое комплексное значение $z = x + yi$), то результат проведения над z (и, может быть, некоторыми постоянными) определенных алгебраических действий является алгебраической функцией этой переменной $w = f(z)$ *. Таковы, например, функции

$$w = az + b, \quad w = \frac{1}{z},$$

$$w = z^2, \quad w = \frac{z+i}{z-i}, \quad w = \sqrt{z^2 - a^2}.$$

3. Элементарные трансцендентные функции

Ряды с комплексными членами. Бесконечная последовательность комплексных чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ имеет предел z ($z = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$), если, начиная с некоторого n, $|z - z_n| < \varepsilon$ (любого малого положительного числа), т. е. начиная с некоторого n, все точки, изображающие числа $z_n, z_{n+1}, \ldots$, попадают в круг радиуса ε с центром в z.

---

* В более общем смысле алгебраическая функция w может быть задана в неявном виде уравнением

$$a_1 z^{m_1} w^{n_1} + a_2 z^{m_2} w^{n_2} + \ldots + a_k z^{m_k} w^{n_k} = 0,$$

которое далеко не всегда может быть разрешено явно (в радикалах) относительно w.

Пример: $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sqrt[n]{a}\right\}=1$ при любом a (здесь под $\left\{\sqrt[n]{a}\right\}$ понимается то значение корня, которое имеет наименьший аргумент, см. рис. 372).

Бесконечный ряд с комплексными членами

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$$

сходится к числу s (сумме ряда), если $s=\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\ldots+a_n)$. В случае сходимости ряда конец ломаной, соединяющей точки, изображающие числа $s_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$, неограниченно приближается к точке s.

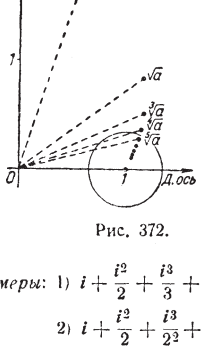


Рис. 372.

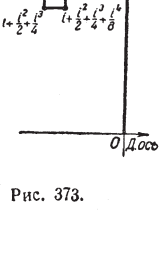


Рис. 373.

Примеры: 1) $i+\frac{i^2}{2}+\frac{i^3}{3}+\frac{i^4}{4}+\ldots$,

2) $i+\frac{i^2}{2}+\frac{i^3}{2^2}+\ldots$ (рис. 373).

Ряд сходится *абсолютно*, если сходится ряд его модулей

$$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\ldots,$$

и условно, если ряд модулей расходится. В примере 1) ряд сходится условно, в примере 2) — абсолютно.

Ряд с переменными членами

$$f_1(z)+f_2(z)+\ldots+f_n(z)+\ldots$$

определяет некоторую функцию от z для тех значений z, при которых он сходится.

Степенной ряд

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots$$

(a_i — комплексные постоянные) сходится абсолютно или для всех значений z (на всей плоскости), или же для значений, лежащих внутри некоторого *круга сходимости* с центром в начале; вне этого круга ряд расходится; радиус этого круга называется *радиусом сходимости* ряда *. Например: для ряда $1+z+z^2+\ldots$ радиус сходимости $R=1$.

* Сходимость ряда в точках, лежащих на самой окружности круга сходимости, нуждается в дополнительном исследовании в каждом отдельном случае.

Простая показательная функция. По определению

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$$

Этот ряд сходится на всей плоскости. Для чисто мнимого показателя yi: $e^{yi} = \cos y + i \sin y$ (*формула Эйлера*), например: $e^{\pi i} = -1$.

В общем случае

$$e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x (\cos y + i \sin y),$$

т. е.

$$R(e^z) = e^x \cos y, \quad I(e^z) = e^x \sin y, \quad |e^z| = e^x, \quad \arg e^z = y.$$

Отсюда вытекает *показательная форма* комплексного числа: $a + bi = \rho e^{\varphi i}$. Функция e^z — периодическая с периодом $2\pi i$: $e^z = e^{z+2k\pi i}$, например: $e^0 = e^{2k\pi i} = 1$, $e^{(2k+1)\pi i} = -1$.

Формулы Эйлера для комплексных чисел:

$$e^{zi} = \cos z + i \sin z,$$

$$e^{-zi} = \cos z - i \sin z$$

(о тригонометрических функциях комплексного аргумента см. ниже).

Натуральный логарифм. По определению

$$w = \operatorname{Ln} z, \quad \text{если} \quad z = e^w.$$

Если $z = \rho e^{\varphi i}$, то $\operatorname{Ln} z = \ln \rho + i(\varphi + 2k\pi)$, т. е. $R(\operatorname{Ln} z) = \ln \rho$, $I(\operatorname{Ln} z) = \varphi + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). $\operatorname{Ln} z$ — функция *многозначная*. Ограничиваясь главным значением φ (стр. 494), получаем *главное значение логарифма* (обозначается $\ln z$):

$$\ln z = \ln \rho + \varphi i \qquad (-\pi < \varphi \leq +\pi).$$

$\operatorname{Ln} z$ существует для всех комплексных чисел z, кроме нуля.

Общая показательная функция. По определению $a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}$ ($a \neq 0$). a^z — функция *многозначная*. Ее главное значение: $e^{z \ln a}$.

Тригонометрические и гиперболические функции.

По определению

$$\left.\begin{aligned}
\sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}, \\
\cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}, \\
\operatorname{sh} z &= z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \\
\operatorname{ch} z &= 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.
\end{aligned}\right\}$$

Ряды сходятся на всей плоскости.

Функции $\sin z$ и $\cos z$ — периодические с периодом 2π, функции $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ — периодические с периодом $2\pi i$.

Выражения функций от чисто мнимого аргумента:

$$\sin yi = i \operatorname{sh} y, \quad \cos yi = \operatorname{ch} y, \quad \operatorname{sh} yi = i \sin y, \quad \operatorname{ch} yi = \cos y.$$

Формулы, имеющие место для тригонометрических и гиперболических функций действительного аргумента (стр. 182—184 и 195), справедливы и для функций комплексного аргумента. В частности, вычисление $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ при $z = x + yi$ производится по формулам $\sin(a+b)$, $\cos(a+b)$, $\operatorname{sh}(a+b)$, $\operatorname{ch}(a+b)$. Например:

$$\cos(x+yi) = \cos x \cos yi - \sin x \sin yi = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$$

и, следовательно:

$$\mathrm{R}(\cos z) = \cos \mathrm{R}(z) \operatorname{ch} \mathrm{I}(z),$$

$$\mathrm{I}(\cos z) = -\sin \mathrm{R}(z) \operatorname{sh} \mathrm{I}(z).$$

Функции $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$ определяются формулами

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z},$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Обратные тригонометрические и гиперболические функции $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$, $\operatorname{Arctg} z$, $\operatorname{Arcctg} z$, $\operatorname{Arsh} z$, $\operatorname{Arch} z$, $\operatorname{Arth} z$, $\operatorname{Arcth} z$ определяются так же, как и для действительного переменного *. Например: $w = \operatorname{Arcsin} z$, если $z = \sin w$.

Эти функции имеют бесконечное множество значений и выражаются через логарифмы посредством формул:

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2}), \qquad \operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2+1}),$$

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2-1}), \qquad \operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2-1}),$$

$$\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}, \qquad \operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z},$$

$$\operatorname{Arcctg} z = -\frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{iz+1}{iz-1}, \qquad \operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z+1}{z-1}.$$

Главные значения обратных тригонометрических и гиперболических функций выражаются такими же формулами через функцию $\ln$ (главное значение логарифма):

$$\arcsin z = -i \ln(iz + \sqrt{1-z^2}), \qquad \operatorname{arsh} z = \ln(z + \sqrt{z^2+1}),$$

$$\arccos z = -i \ln(z + \sqrt{z^2-1}), \qquad \operatorname{arch} z = \ln(z + \sqrt{z^2-1}),$$

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+iz}{1-iz}, \qquad \operatorname{arth} z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z},$$

$$\operatorname{arcctg} z = -\frac{1}{2i} \ln \frac{iz+1}{iz-1}, \qquad \operatorname{arcth} z = \frac{1}{2} \ln \frac{z+1}{z-1}.$$

---

* Стр. 188 и 196.

В нижеследующей таблице приведены выражения действительной и мнимой частей, модуля и аргумента от тригонометрических и гиперболических функций комплексной переменной $z=x\pm iy$.

Выражения $R(w)$ и $I(w)$

Функция $w=f(x\pm iy)$	Действительная часть: $R(w)$	Мнимая часть: $I(w)$
$\sin(x\pm iy)$	$\sin x \operatorname{ch} y$	$\pm \cos x \operatorname{sh} y$
$\cos(x\pm iy)$	$\cos x \operatorname{ch} y$	$\mp \sin x \operatorname{sh} y$
$\operatorname{tg}(x\pm iy)$	$\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x+\operatorname{ch} 2y}$	$\pm \dfrac{\operatorname{sh} 2y}{\cos 2x+\operatorname{ch} 2y}$
$\operatorname{sh}(x\pm iy)$	$\operatorname{sh} x \cos y$	$\pm \operatorname{ch} x \sin y$
$\operatorname{ch}(x\pm iy)$	$\operatorname{ch} x \cos y$	$\pm \operatorname{sh} x \sin y$
$\operatorname{th}(x\pm iy)$	$\dfrac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{ch} 2x+\cos 2y}$	$\pm \dfrac{\sin 2y}{\operatorname{ch} 2x+\cos 2y}$

Выражения $|w|$ и $\arg w$

Функция $w=f(x\pm iy)$	Модуль: $\lvert w\rvert$	Аргумент: $\arg w$
$\sin(x\pm iy)$	$\sqrt{\sin^2 x+\operatorname{sh}^2 y}$	$\pm \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x \operatorname{th} y)$
$\cos(x\pm iy)$	$\sqrt{\cos^2 x+\operatorname{sh}^2 y}$	$\mp \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x \operatorname{th} y)$
$\operatorname{sh}(x\pm iy)$	$\sqrt{\operatorname{sh}^2 x+\sin^2 y}$	$\pm \operatorname{arctg}(\operatorname{cth} x \operatorname{tg} y)$
$\operatorname{ch}(x\pm iy)$	$\sqrt{\operatorname{sh}^2 x+\cos^2 y}$	$\pm \operatorname{arctg}(\operatorname{th} x \operatorname{tg} y)$

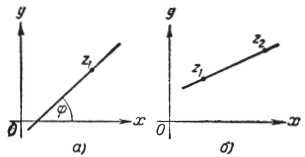
4. *Уравнения кривых в комплексной форме*

Комплексная функция от действительной переменной. Функция $z=f(t)$, где $z=x+yi$, а t — действительная переменная, изображается точками z, образующими при изменении t некоторую кривую. Параметрические уравнения этой кривой: $x=x(t)$, $y=y(t)$; *уравнение в комплексной форме*: $z=f(t)$.

На стр. 502—503 приведены примеры некоторых кривых, представленных в комплексной форме и изображенных на рис. 374.

Примеры некоторых кривых в комплексной форме

Кривая	Уравнение	Чертеж
1. *Прямая линия*:		
а) проходящая через точку z_1 и образующая угол φ с осью Ox	$z = z_1 + te^{\varphi}$	
б) проходящая через две точки z_1 и z_2	$z = z_1 + t(z_2 - z_1)$	
2. *Окружность*:		
в) радиуса r с центром в начале координат	$z = re^{ti}$	
г) радиуса r с центром в точке z_1	$z = z_1 + re^{ti}$	
3. *Гипербола*:		
д) в канонической форме $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$z = a \operatorname{ch} t + ib \operatorname{sh} t$ или $z = ce^{t} + \bar{c}e^{-t}$, где c и $\bar{c}$ — сопряженные комплексные числа: $c = \frac{a+bi}{2}$, $\bar{c} = \frac{a-bi}{2}$	



4. ***Эллипс:***

е) в канонической форме

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

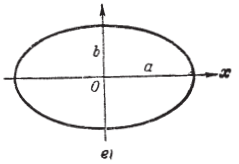
$$z = a\cos t + ib\sin t$$

или

$$z = ce^{ti} + de^{-ti},$$

где $c=\frac{a+b}{2}$, $d=\frac{a-b}{2}$,

т. е. произвольные действительные числа

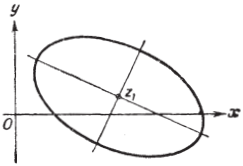


е)

ж) в общем виде (центр в точке z_1, оси повернуты на некоторый угол)

$$z = z_1 + ce^{ti} + de^{-ti}$$

где c и d — произвольные комплексные числа, определяющие длину и поворот осей

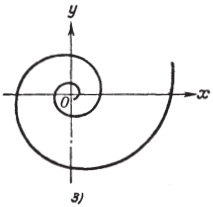


ж)

5. ***Логарифмическая спираль:***

$$z = ae^{bt},$$

где a и b — произвольные комплексные числа



з)

Рис. 374.

5. Функции комплексной переменной

Отображение плоскости. Функция $w=f(z)$, где $z=x+yi$ и $w=u+vi$, определена, если известны две функции от двух действительных переменных:

$$u=u(x, y), \quad v=v(x, y).$$

Функция комплексной переменной производит отображение плоскости z в плоскость w*: каждая точка z_1 переходит в соответствующую точку w_1, геометрические образы (кривые, области) плоскости z при переходе к плоскости w преобразуются в другие. Кривая $x=x(t)$, $y=y(t)$ переходит в кривую $u=u[x(t), y(t)]$, $v=v[x(t), y(t)]$ (t — параметр).

Координатные линии $y=c$ переходят в $u=u(x, c)$, $v=v(x, c)$, где x — параметр; координатные линии $x=c_1$ переходят в $u=u(c_1, y)$, $v=v(c_1, y)$, где y — параметр.

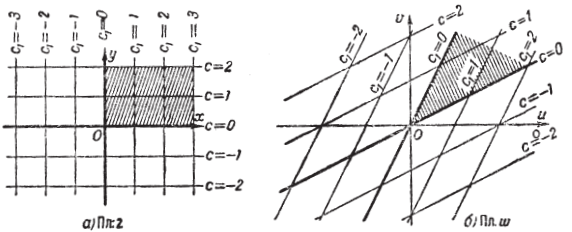


Рис. 375.

Пример отображения: $u=2x+y$, $v=x+2y$ (рис. 375). Линии $y=c$ переходят в $u=2x+c$, $v=x+2c$, т. е. в прямые $v=\frac{u}{2}+\frac{3}{2}c$; аналогично, линии $x=c_1$ переходят в прямые $v=2u-3c_1$; заштрихованная область переходит в заштрихованную.

Предел, непрерывность, производная. Понятия предела, непрерывности и производной функции комплексной переменной $w=f(z)$ определяются формально так же, как и для функции действительной переменной (см. стр. 276, 281 и 302).

Комплексное число A называется *пределом* функции $f(z)$ при z, стремящемся к a:

$$A=\lim_{z\to a} f(z), \qquad (*)$$

если для любого как угодно малого действительного положительного числа ε можно указать такое действительное положительное число η, что для любого комплексного числа z (кроме, может быть, самого

* Если функция $w=f(z)$ — многозначная (например, $\sqrt[n]{z}$, $\operatorname{Ln} z$, $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arth} z$ и др.), то область значений w является совокупностью нескольких плоскостей, наложенных друг на друга; каждое значение функции изображается точкой, лежащей на одной из плоскостей. Эти плоскости скреплены между собой вдоль некоторых линий и образуют так называемую *многолистную*, или *риманову, поверхность*. См. об этом Смирнов, т. III, Лаврентьев и Шабат, стр. 588 справочника.

числа a), удовлетворяющего условию $|a-z|<\eta$, будет выполняться условие $|A-f(z)|<\varepsilon$. Геометрический смысл (рис. 376): любой точке z (кроме, может быть, точки a), лежащей внутри круга радиуса η с центром a, соответствует в отображении, определяемом функцией $w=f(z)$, точка w, лежащая внутри круга радиуса ε с центром A.

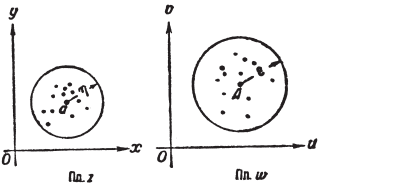


Рис. 376.

Если функция $w=f(z)$ имеет предел при $x\to a$ и при этом

$$\lim_{z\to a} f(z)=f(a) \qquad (**)$$

(т. е. предел функции равен значению функции от предела независимой переменной), то функция w называется *непрерывной* в точке a.

Равносильное определение непрерывности: функция $w=f(z)$ непрерывна в точке z, если из условия $|\Delta z|\to 0$ следует условие

$$|\Delta w|=|f(z+\Delta z)-f(z)|\to 0 \text{ или } \lim_{\Delta z\to 0}\Delta w=0$$

(бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции).

Производной $w'=f'(z)$ от заданной функции $w=f(z)$ называется функция, определяемая при заданном значении z равенством

$$w'=f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}. \qquad (***)$$

Функция, для которой существует в данной точке предел (***), называется *дифференцируемой*, а также *моногенной* или *голоморфной* в этой точке. Геометрический смысл модуля и аргумента производной функции комплексной переменной см. ниже (стр. 508).

Аналитические функции. Если функция $w=f(z)$ дифференцируема во всех точках некоторого круга с центром z_0 (хотя бы произвольно малого радиуса), то она называется *аналитической в точке* z_0; функция называется *аналитической в связной области* (см. стр. 287), если она аналитическая во всех точках этой области. Необходимые и достаточные * условия того, чтобы функция $u+vi=f(x+yi)$ была аналитической:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (\textit{условия Коши-Римана}).$$

Например, функция $w=z^2$ ($u=x^2-y^2$, $v=2xy$) аналитическая всюду; функция $w=u+vi$, определяемая равенствами $u=2x+y$, $v=x+2y$, не аналитическая нигде. В случае аналитической функции $w=u+vi$ функции u и v являются *гармоническими функциями* действительных переменных x и y, т. е. удовлетворяют уравнению Лапласа (см. стр. 547). Зная гармоническую функцию u, можно с точностью до постоянного слагаемого определить *сопряженную* с ней гармоническую функцию v из условий Коши-Римана:

$$v=\int \frac{\partial u}{\partial x}\,dy+\varphi(x), \text{ где } \frac{d\varphi}{dx}=-\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{\partial u}{\partial x}\,dy\right).$$

Аналогично можно по v определить u.

* Для достаточности нужно еще, чтобы частные производные, входящие в условия Коши-Римана, были непрерывны в рассматриваемой области.

Точки, в которых функция является аналитической, называются *правильными*. Если функция является аналитической в некоторой области за исключением некоторых ее точек, то такие точки называются *особыми*. Примеры и классификация особых точек см. стр. 508. Элементарные функции (алгебраические и трансцендентные, см. стр. 272) являются аналитическими во всей плоскости, за исключением некоторых изолированных особых точек.

Аналитические функции имеют во всех правильных точках производные любого порядка. Производные элементарных функций комплексной переменной вычисляются по тем же правилам, что и производные от тех же функций действительной переменной.

Модуль аналитической функции. В различных вопросах теории и приложений функций комплексной переменной существенное значение имеет абсолютная величина (модуль) функции

$$|w| = |f(z)| = \sqrt{[u(x, y)]^2 + [v(x, y)]^2} = \varphi(x, y).$$

Поверхность $|w| = \varphi(x, y)$, где $|w|$ — аппликата, восставленная в точке $z = x + yi$, называется *рельефом* функции. Например, для функции $\sin z = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$

$$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y}.$$

На рис. 377, *а* изображен рельеф этой функции; на рис. 377, *б* — рельеф функции

$$w = e^{1/z}*.$$

Так как модуль функции — величина неотрицательная, то ее рельеф находится всегда над плоскостью z, за исключением точек, для которых $|f(z)| = 0$ и, следовательно, $f(z) = 0$. Такие значения z (корни уравнения $f(z) = 0$) называются *нулями* функции $f(z)$.

Функция называется *ограниченной* в данной области, если существует такое постоянное положительное число N, что $|f(z)| < N$ для любой точки z в этой области, и *неограниченной*, если такого числа N не существует.

Основные теоремы о модуле аналитических функций:

1. Если $w = f(z)$ — функция, аналитическая в замкнутой области, то максимум ее модуля достигается на границе этой области.

2. Если $w = f(z)$ аналитическая во всей плоскости и ограниченная, то эта функция — постоянная: $f(z) = \text{const}$ *(теорема Лиувилля)*.

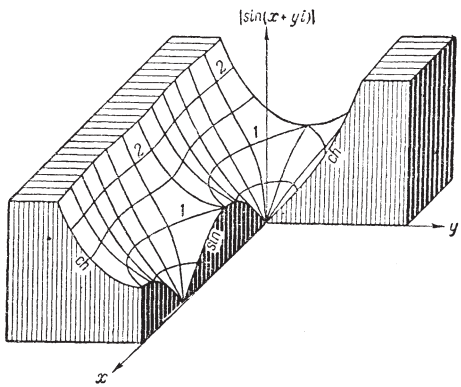
Особые точки. Если функция $w = f(z)$ аналитическая в окрестности точки $z = a$** и ограничена в этой окрестности, то могут быть два случая:

1) $f(a) = \lim\limits_{z \to a} f(z)$. В этом случае функция $f(z)$ является аналитической и в самой точке a.

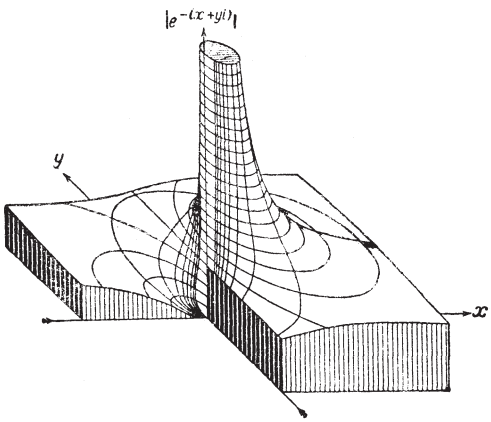
---

* Рельефы многих важных функций приведены в книге Янке и Эмде (стр. 585 справочника).

** То есть внутри как угодно малого круга с центром в точке a, за исключением, может быть, самой этой точки.



а) $|\sin(x+yi)|$.



б) $\left|e^{\frac{1}{x+yi}}\right|$.

Рис. 377.

2) $f(a)$ имеет другое значение или функция не определена в точке a. Такая точка a является особой и называется *устранимой особой точкой*, потому что, заменив в ней значение $f(a)$ числом $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ мы сделаем функцию аналитической и в точке a*.

Если же функция $w = f(z)$, аналитическая в окрестности точки $z = a$, не ограничена в этой окрестности, то точка a является особой; при этом могут быть два случая:

1) $|f(z)| \to \infty$ при приближении z к точке a по любому пути. Такая точка a называется *полюсом*. В этом случае вводят обозначение $f(a) = \infty$. О порядке полюса см. стр. 516.

2) $|f(z)|$ при приближении к точке a не стремится ни к какому числу: последовательности $f(z_1), f(z_2), \ldots, f(z_n), \ldots$ имеют различные пределы в зависимости от выбора точек z_n, приближающихся к a. Такая точка a называется *существенно особой точкой* **

Примеры: Для функции $w = \dfrac{1}{z-a}$ точка a — полюс; для функции $w = e^{1/z}$ точка 0 — существенно особая (см. рис. 377, *б*).

Конформные отображения. Преобразование плоскости, осуществляемое аналитической функцией, обладает следующим важным свойством в окрестности точки z, для которой $w' \neq 0$. Бесконечно малые векторы всех направлений, выходящие из этой точки: 1) увеличиваются (или уменьшаются) по своей длине в одно и то же число раз, равное $|w'|$ (с точностью до бесконечно малых высшего порядка), и 2) поворачиваются на один и тот же угол, равный $\arg w'$. Таким образом, фигуры в бесконечно малой области преобразуются в себе подобные — сохраняют форму (рис. 378). Такое преобразование называется *конформным отображением*. Фигуры конечных размеров искажаются, но углы между двумя кривыми сохраняются (*консерватизм углов*, рис. 379). В частности, координатные линии $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ в конформном отображении преобразуются в два семейства взаимно ортогональных кривых.

Таким образом, с помощью аналитических функций можно получить множество прямоугольных систем криволинейных координат.

Обратно, для любого конформного отображения существует некоторая ортогональная сетка кривых, которая преобразуется в прямоугольную декартову сетку. В примере: $u = 2x + y$, $v = x + 2y$ (стр. 504) ортогональность нарушалась; в примере $w = z^2$ она сохраняется; координатные линии переходят в два семейства софокусных парабол (рис. 380). В точке $z = 0$ имеем $w' = 0$ — конформность нарушается. Первый координатный квадрант переходит в верхнюю полуплоскость.

Конформные отображения применяются в электротехнике, гидро- и аэродинамике и других прикладных вопросах ***. Ниже рассматриваются наиболее употребительные конформные отображения, причем дается чертеж той ортогональной сетки кривых (*изотермическая сетка*), которая преобразуется в декартову прямоугольную сетку. Штриховкой отмечены контуры области, переходящей в верхнюю полуплоскость. Черным отмечена область, переходящая в квадрат с вершинами (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1) (рис. 381).

---

* Этот случай аналогичен устранимому разрыву функции действительной переменной (см. стр. 283).

** В этом случае можно указать такой способ приближения z к точке a, что $f(z)$ будет приближаться к какому угодно комплексному числу.

*** См. Смирнов, т. III; Лаврентьев и Шабат, стр. 588 справочника.

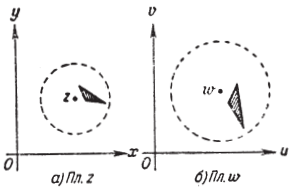


Рис. 378.

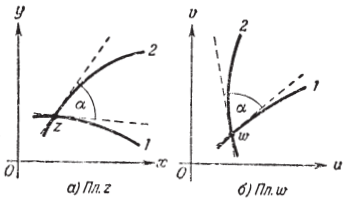


Рис. 379.

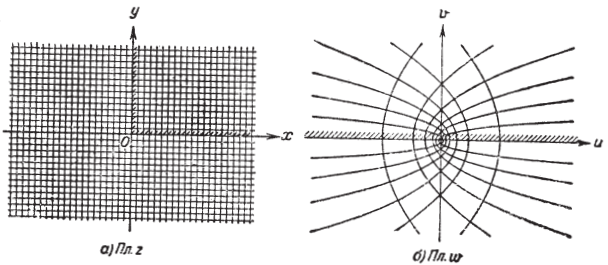


Рис. 380.

Рис. 381.

6. Простейшие конформные отображения

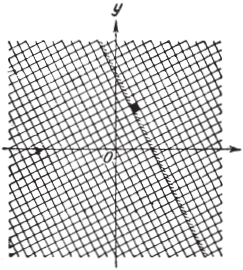
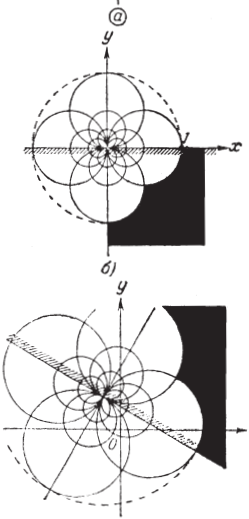
Функции и их свойства	Ортогональная сетка, переходящая в прямоугольную декартову сеть
а) *Линейная функция:* $w = az + b\ (a = \rho e^{\varphi i})$. Преобразование может быть разложено на три: $t = e^{\varphi i} z$ — поворот плоскости на угол φ, $s = \rho t$ — подобное растяжение в ρ раз, $w = s + b$ — параллельный сдвиг на вектор b. В результате фигуры в плоскости z преобразуются в себе подобные, дополнительно поворачиваясь и сдвигаясь. Точки $z_1 = \frac{b}{1-a}$ и $z_2 = \infty$ переходят сами в себя.	
б) *Инверсия:* $w = \frac{1}{z}$. Точка z с радиусом-вектором ρ и полярным углом φ преобразуется в точку с радиусом-вектором $\frac{1}{\rho}$ и углом $-\varphi$. Преобразование состоит из инверсии относительно единичного круга * и зеркального отражения относительно оси Ox. Круги переходят в круги (считая прямую частным случаем круга с радиусом ∞). Точка O переходит в ∞, точки 1 и -1 не сдвигаются с места. Конформность нарушается при $z = 0$.	
в) *Дробно-линейная функция:* $w = \frac{az + b}{cz + d}$. Преобразование может быть разложено на три: $t = cz + d$ (линейная функция), $s = \frac{1}{t}$ (инверсия), $w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} s$ (линейная функция). В результате дробно-линейная функция переводит круг в круг (считая прямую частным случаем круга); две точки, удовлетворяющие уравнению $z = \frac{az + b}{cz + d}$, не сдвигаются с места.	

Рис. 382.

* *Инверсией* относительно данного круга радиуса R называется преобразование точек плоскости, при котором точка M_1, находящаяся на расстоянии d_1 от центра круга, переходит в точку M_2, находящуюся

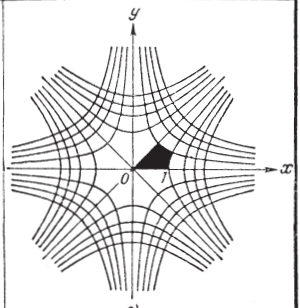
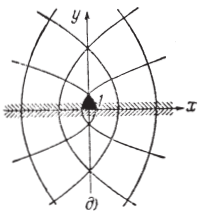
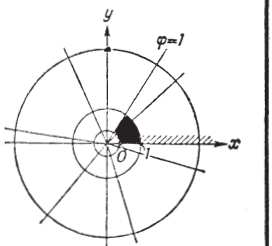
Функции и их свойства	Ортогональная сетка, переходящая в прямоугольную декартову сеть
г) *Квадратичная функция* $w=z^2$. Вся плоскость z переходит в двойную плоскость w. Изотермическая сетка плоскости z состоит из двух семейств гипербол $u=x^2-y^2$ и $v=2xy$. Конформность нарушается при $z=0$. Не сдвигаются точки 0 и 1.	 а)
д) *Квадратный корень* $w=\sqrt{z}$. Функция двузначная; вся плоскость переходит: 1) в верхнюю полуплоскость, 2) в нижнюю полуплоскость. Изотермическая сетка плоскости z состоит из двух семейств софокусных парабол с фокусом в начале и с осями, направленными по положительному и отрицательному направлениям оси Ox. Конформность нарушается при $z=0$. Не сдвигаются точки 0 и $+1$.	 д)
е) *Логарифм:* $w=\operatorname{Ln} z$. $u=\ln\rho$, $v=\varphi+2k\pi$; изотермическая сетка состоит из окружностей $\ln\rho=\text{const}$ и лучей $\varphi=\text{const}$, т. е. является полярной сеткой. Функция имеет бесконечное множество значений; для главного значения логарифма вся плоскость переходит в полосу, ограниченную прямыми $v=-\pi$ и $v=+\pi$ (включая эту последнюю).	 е)

Рис. 382.

на том же радиусе OM_1 (или его продолжении), но на расстоянии $OM_2=d_2=\dfrac{R^2}{d_1}$; при этом точка M_2 переходит в M_1. Точки, лежащие вне круга, переходят внутрь его, и обратно.

7. *Интегралы в комплексной области*

Определение. Интегралом функции комплексной переменной $w = f(z)$ по дуге $\overset{\smile}{AB}$ кривой в плоскости z («путь интегрирования») называется комплексное число, получаемое следующим образом (рис. 383);

1) дуга $\overset{\smile}{AB}$ разбивается на n отрезков произвольными промежуточными точками:

$$M_1(z_1),\ M_2(z_2),\ \ldots,\ M_{n-1}(z_{n-1})^*$$

[полагаем $A \equiv M_0(z_0)$, $B \equiv M_n(z_n)$];

2) внутри (или на границе) каждого отрезка $\overset{\smile}{M_{i-1}M_i}$ выбирается произвольная точка $N_i(\zeta_i)$;

3) значения функции $f(z)$ вычисляются в точках ζ_i и умножаются на соответствующие разности $z_i - z_{i-1}$ (приращения аргумента);

4) полученные n произведений $f(\zeta_i)\cdot(z_i - z_{i-1})$ складываются;

5) находится предел суммы $\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\cdot(z_i - z_{i-1})$, когда каждое приращение аргумента стремится к нулю. Если этот предел существует и не зависит ни от выбора точек M_i, ни от выбора точек N_i, то он называется *интегралом* функции $f(z)$ *по дуге* $\overset{\smile}{AB}$ и обозначается

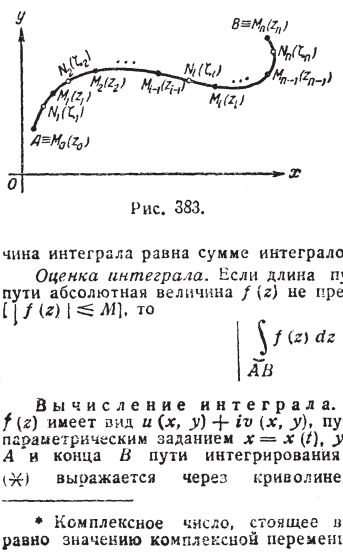


Рис. 383.

$$\int_{\overset{\smile}{AB}} f(z)\,dz. \qquad (*)$$

Свойства. Интеграл $(*)$ обладает теми же свойствами, что и криволинейный интеграл второго типа (см. стр. 417): при перемене направления пути интегрирования интеграл меняет знак; если разбить путь интегрирования на несколько частей, то величина интеграла равна сумме интегралов по отдельным его частям.

Оценка интеграла. Если длина пути $\overset{\smile}{AB}$ равна s и для z на этом пути абсолютная величина $f(z)$ не превышает положительного числа M [$|f(z)| \leqslant M$], то

$$\left|\int_{\overset{\smile}{AB}} f(z)\,dz\right| \leqslant Ms.$$

Вычисление интеграла. Если подинтегральная функция $f(z)$ имеет вид $u(x, y) + iv(x, y)$, путь интегрирования AB определен параметрическим заданием $x = x(t)$, $y = y(t)$ и значения t для начала A и конца B пути интегрирования равны t_A и t_B, то интеграл $(*)$ выражается через криволинейные интегралы от функций

---

* Комплексное число, стоящее в скобках после названия точки, равно значению комплексной переменной, изображаемому этой точкой.

действительных переменных

$$\int\limits_{\overline{AB}} f(z)\,dz = \int\limits_{\overline{AB}} u(x, y)\,dx - v(x, y)\,dy + i \int\limits_{\overline{AB}} v(x, y)\,dx + u(x, y)\,dy,$$

которые вычисляются по правилам, указанным на стр. 416—417.

Независимость интеграла от пути. Для того чтобы интеграл (*) от функции комплексной переменной, определенной в некоторой односвязной * области, не зависел от пути, соединяющего две фиксированные точки $A(z_A)$ и $B(z_B)$, необходимо и достаточно, чтобы функция была аналитической в этой области, т. е. чтобы для нее удовлетворялись условия Коши-Римана (см. стр. 505). Если при соблюдении этих условий фиксировать начальную точку $A_0(z_0)$ и сделать переменной конечную точку $M(z)$ пути интегрирования, то

$$\int\limits_{\overline{A_0M}} f(z)\,dz = F(z),$$

причем $F'(z) = f(z)$; функция $F(z)$ называется *первообразной* от аналитической функции $f(z)$. Первообразная функция зависит от выбора начальной точки A_0; общий вид всевозможных первообразных функций от $f(z)$:

$$F(z) + C = \int f(z)\,dz \qquad (\textit{неопределенный интеграл}).$$

Неопределенные интегралы от элементарных функций комплексной переменной вычисляются по тем же формулам, что и интегралы от тех же функций действительной переменной.

Основная формула интегрального исчисления. Интеграл (*) от аналитической функции $f(z)$ равен приращению первообразной функции при переходе от начальной точки пути в конечную:

$$\int\limits_{\overline{AB}} f(z)\,dz = F(z_B) - F(z_A).$$

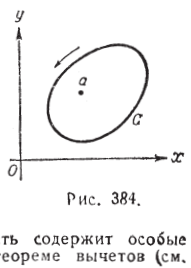


Рис. 384.

Интеграл по замкнутому пути C от функции $f(z)$, аналитической во всей односвязной области, ограниченной этим путем, равен нулю (теорема Коши); если же эта область содержит особые точки, то величина интеграла вычисляется по теореме вычетов (см. стр. 516). В частности, для функции $f(z) = \dfrac{1}{z-a}$, имеющей единственную особую точку $z = a$, интеграл по замкнутому пути, окружающему эту точку и проходимому в направлении против часовой стрелки (рис. 384), равен

$$\int\limits_{C} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i.$$

Формулы Коши. Если функция $f(z)$ — аналитическая в некоторой односвязной области, то ее значение в любой точке z этой области, а также значения ее производных любого порядка выража-

* Об односвязной области см. стр. 287. В случае многосвязной области условие может не выполняться.

ются через значения этой функции на замкнутом контуре C, окружающем эту точку (рис. 385), следующими *формулами Коши:*

$$\left.\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \qquad f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta, \\ f''(z) &= \frac{2}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3}\,d\zeta, \quad \ldots, \quad f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta. \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

где ζ — переменная интеграции; интегралы берутся по пути C в направлении п р о т и в часовой стрелки.

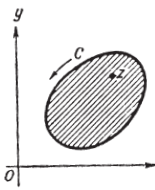


Рис. 385.

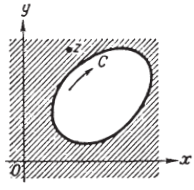


Рис. 386.

Если же функция $f(z)$ аналитическая во всей части плоскости, находящейся в н е контура C, то значение $f(z)$ и ее производных в любой точке z этой области (рис. 386) выражается такими же формулами $(*)$, но интегралы берутся в направлении пути по часовой стрелке C.

Формулы Коши позволяют находить значение некоторых определенных интегралов.

Пример. Полагая $f(z) = e^z$ (функция, аналитическая во всей плоскости) и в качестве пути C — круг с центром z и радиусом r (его уравнение $\zeta = z + re^{i\varphi}$, см. стр. 502), получаем по последней из формул $(*)$:

$$e^z = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{e^\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \frac{e^{z+re^{i\varphi}}}{r^{n+1}e^{i\varphi(n+1)}}\,ire^{i\varphi}\,d\varphi =$$

$$= \frac{n!}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} e^{z + r\cos\varphi + ir\sin\varphi - in\varphi}\,d\varphi.$$

откуда

$$\frac{2\pi r^n}{n!} = \int_0^{2\pi} e^{r\cos\varphi + i(r\sin\varphi - n\varphi)}\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{r\cos\varphi}\left[\cos(r\sin\varphi - n\varphi)\right]d\varphi + i\int_0^{2\pi} e^{r\cos\varphi}\left[\sin(r\sin\varphi - n\varphi)\right]d\varphi.$$

Так как мнимая часть равна нулю, получаем значение интеграла:

$$\int_0^{2\pi} e^{r\cos\varphi}\cos(r\sin\varphi - n\varphi)\,d\varphi = \frac{2\pi r^n}{n!}.$$

8. *Разложение аналитических функций в степенные ряды*

Ряд Тейлора. Всякая функция $f(z)$, аналитическая внутри некоторого круга с центром a, может быть во всех точках внутри этого круга единственным образом представлена в виде степенного ряда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

где коэффициенты разложения c_n — комплексные числа, определяемые формулой

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Таким образом:

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \ldots$$

ряд Тэйлора

Разложение функций e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ в степенные ряды — см. стр. 498—499.

Ряд Лорана. Всякая функция $f(z)$, аналитическая внутри некоторого кольца между двумя концентрическими кругами с центром a*, может быть единственным способом представлена в виде степенного ряда

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n = \begin{cases} c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots \\ \ldots + c_{-1}(z-a)^{-1} + c_{-2}(z-a)^{-2} + \ldots \\ \ldots + c_{-n}(z-a)^{-n} + \ldots \end{cases} \quad (*)$$

(*ряд Лорана*), где коэффициенты разложения c_n — комплексные числа, определяемые формулами

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C (\zeta - a)^{-n-1} f(\zeta)\,d\zeta \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

(C — некоторый замкнутый контур, взятый внутри кольца и обходящий против часовой стрелки точку a).

---

* Радиус внутреннего круга может быть равен нулю, и тогда кольцо обратится в круг, из которого изъята одна точка — его центр.

Особые точки. Если функция $f(z)$ — аналитическая в окрестности точки a*, то характер точки a определяется по виду разложения функции в ряд Лорана (*) в окрестности этой точки следующим образом:

1) Если ряд (*) не содержит членов с отрицательными степенями $z-a$ ($c_n=0$ при $n<0$), то ряд Лорана обращается в ряд Тейлора **; функция $f(z)$ — аналитическая и в самой точке, если $f(a)=c_0$ или a является устранимой особой точкой.

2) Если ряд (*) содержит конечное число членов с отрицательными степенями $z-a$ ($c_m\neq 0$ и все $c_n=0$ при $n<m<0$), то точка a является полюсом (см. стр. 508) функции $f(z)$ (*полюсом m-го порядка*).

3) Если ряд (*) содержит бесконечное число членов с отрицательными степенями $z-a$, то точка a является *существенно особой точкой* (см. стр. 508).

В случаях 2) и 3) коэффициент c_{-1} при $(z-a)^{-1}$ в ряде Лорана называется *вычетом* функции $f(z)$ в точке $z=a$:

$$\text{Выч. } f(z)_{z=a}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} f(\zeta)\,d\zeta. \qquad (**)$$

Теорема вычетов. Из определения (**) вытекает следующая теорема, дающая возможность вычислить интеграл по замкнутому

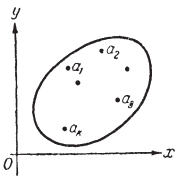


Рис. 387.

контуру, охватывающему особые точки (стр. 513): интеграл, взятый в направлении против часовой стрелки по замкнутому контуру

$$\int\limits_{C} f(z)\,dz,$$

от функции $f(z)$, аналитической во всей односвязной области внутри контура, кроме конечного числа точек $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (рис. 387), равен

---

* См. сноску ** на стр. 506.

** Его коэффициенты в этом случае на основании формул Коши (стр. 514) равны

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}(\zeta-a)^{-n-1}f(\zeta)\,d\zeta=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

произведению $2\pi i$ на сумму вычетов во всех этих особых точках:

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\,[\text{Выч. } f(z)_{z=a_1} + \text{Выч. } f(z)_{z=a_2} + \ldots + \text{Выч. } f(z)_{z=a_k}].$$

Вычет в полюсе m-го порядка может быть вычислен по формуле

$$\text{Выч. } f(z)_{z=a} = \frac{1}{(m-1)!}\,\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\,[f(z)\cdot(z-a)^m]|_{z=a}. \qquad (1)$$

Если $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — функции, аналитические в точке $z=a$, и a является простым корнем (см. стр. 140) уравнения $\psi(z)=0$ [т. е. $\psi(a)=0$, $\psi'(a)\neq 0$], то точка $z=a$ является полюсом (1-го порядка) функции $f(z)$ и формула (1) дает

$$\text{Выч. } \left[\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\right]_{z=a} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \qquad (2)$$

Если a является m-кратным корнем уравнения $\psi(z)=0$ [т. е. $\psi(a)=\psi'(a)=\ldots=\psi^{(m-1)}(a)=0$, $\psi^{(m)}(a)\neq 0$], то точка $z=a$ является полюсом m-го порядка функции $f(z)$.

Применение к вычислению определенных интегралов. Теорема вычетов позволяет находить некоторые определенные интегралы от функций действительной переменной. Если

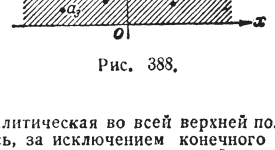


Рис. 388.

$f(z)$ — функция, аналитическая во всей верхней полуплоскости, включая и действительную ось, за исключением конечного числа особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, лежащих сверху от действительной оси (рис. 388), и число «нуль» является кратным корнем уравнения $f\left(\dfrac{1}{z}\right)=0$ кратности $m \geqslant 2$ *, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \text{Выч. } f(z)_{z=a_i}. \qquad (*)$$

---

* См. стр. 140.

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$.

Уравнение $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^3} = \frac{x^6}{(x^2+1)^3} = 0$ имеет шестикратный корень $x = 0$. В верхней полуплоскости функция $w = \frac{1}{(1+z^2)^3}$ имеет единственную особую точку $z = i$, являющуюся полюсом 3-го порядка *.

По формуле (1)

$$\text{Выч.}\ \frac{1}{(1+z^2)^3}_{z=i} = \frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{(z-i)^3}{(1+z^2)^3}\right]_{z=i}.$$

Вычисляя $\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{z-i}{1+z^2}\right)^3 = \frac{d^2}{dz^2}(z+i)^{-3} = 12(z+i)^{-5}$, получаем

$$\text{Выч.}\ \frac{1}{(1+z^2)^3}_{z=i} = 6(z+i)^{-5}_{z=i} = \frac{6}{(2i)^5} = -\frac{3}{16}i$$

и согласно формуле (X)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\left(-\frac{3}{16}i\right) = \frac{3}{8}\pi.$$

Другие применения теории вычетов см. Смирнов, т. III (стр. 585 справочника).

---

* Уравнение $(1+z^2)^3 = 0$ имеет два трехкратных корня: i и $-i$.

II. ВЕКТОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

A. Векторная алгебра и вектор-функции скаляра

1. Основные понятия

Скалярные и векторные величины. Величины, значения которых могут быть изображены положительными или отрицательными числами («скалярами»), называются *скалярными* (масса, температура, работа и т. п.); величины же, значения которых определяются как размерами, так и направлением в пространстве, называются *векторными* (сила, скорость, ускорение, напряженность электрического и магнитного поля и т. п.) и могут быть изображены векторами.

Рис. 389.

Вектор — отрезок (рис. 389), имеющий определенную длину и направление (обозначается $\overline{AB}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots$, иногда $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ или $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$). A — *начало*, B — *конец* вектора; длина вектора $\mathbf{a}$ (*модуль* или абсолютная величина) обозначается a или $|\mathbf{a}|$. *Нуль-вектор* (0) — вектор, начало и конец которого совпадают; его модуль равен 0, а направление неопределенное. Два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ считаются *равными*, если равны их модули и совпадают их направления (т. е. векторы параллельны и ориентированы в одну сторону *).

Коллинеарные векторы — параллельные одной и той же прямой, *компланарные* — параллельные одной и той же плоскости. Взаимно *противоположные* векторы — равные по длине и противоположные по направлению: $\overline{AB} = \mathbf{a}$ и $\overline{BA} = -\mathbf{a}$. *Единичные векторы* — модуль которых равен 1; единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\mathbf{a}$, обозначается $\mathbf{a}^0$ и называется *ортом* этого направления. Вектор $\mathbf{a}$ можно представить в виде: $\mathbf{a} = a\mathbf{a}^0$, где a — модуль вектора $\mathbf{a}$. Орты, имеющие направление прямоугольных координатных

---

* Согласно этому определению вектор не изменится, если его перенести параллельно самому себе так, что его начало попадет в любую точку пространства. Такие векторы образуют систему *свободных* векторов. В некоторых вопросах механики рассматривают векторы, начало которых закреплено в определенной точке пространства (система *связанных* векторов) или может быть перенесено только в точки, лежащие на прямой вдоль направления вектора (система *скользящих* векторов).

осей Ox, Oy, Oz (в сторону возрастания координаты) * обозначаются $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ (рис. 390).

Радиус-вектор точки. Вектор $\overrightarrow{OM}$, начало которого совпадает с началом координат, а конец находится в точке M (см. рис. 390), вполне определяет эту точку и называется *радиусом-вектором* точки M (обозначается $\mathbf{r}$). Начало O называется в этом случае *полюсом*.

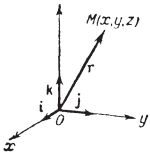


Рис. 390.

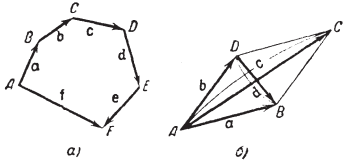


Рис. 391.

Линейные комбинации векторов. *Сумма* нескольких векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, ..., $\mathbf{e}$ есть вектор $\mathbf{f} = \overrightarrow{AF}$, представляющий замыкающую ломаной $ABCDEF$, составленной из слагаемых векторов (рис. 391, *а*); сумма двух векторов $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$ (рис. 391, *б*) — вектор $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c}$, являющийся диагональю параллелограмма $ABCD$. Основные свойства суммы:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a},\ (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}),\ |\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|.$$

Разностью $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ называется сумма векторов $\mathbf{a}$ и $-\mathbf{b}$ (диагональ DB на рис. 391, *б*); $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \mathbf{d}$; свойства разности: $\mathbf{a} - \mathbf{a} = 0$ (нуль-вектор), $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| \geqslant |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$.

Произведением скаляра и вектора ($\alpha\mathbf{a}$ или $\mathbf{a}\alpha$) называется вектор, коллинеарный с вектором $\mathbf{a}$; длина его равна $|\alpha|\,a$, а направление совпадает с направлением $\mathbf{a}$ при $\alpha > 0$ и противоположно ему при $\alpha < 0$; свойства этого произведения:

$$\alpha\mathbf{a} = \mathbf{a}\alpha,\ \alpha\beta\mathbf{a} = \beta\alpha\mathbf{a},\ (\alpha + \beta)\,\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a},\ \alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}.$$

Линейная комбинация векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, ..., $\mathbf{d}$ с коэффициентами α, β, ..., δ (скалярными) есть вектор

$$\mathbf{k} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \ldots + \delta\mathbf{d}. \qquad (*)$$

Любой вектор $\mathbf{a}$ может быть единственным образом разложен на

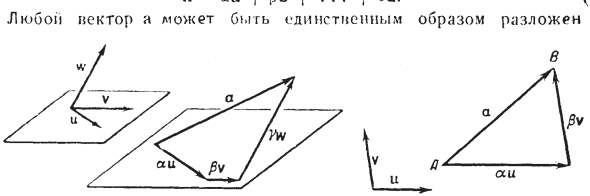


Рис. 392.

сумму трех векторов, параллельных трем данным (некомпланарным) векторам $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ (рис. 392, *а*):

$$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w}; \qquad (**)$$

* В этой главе принята правая система координат (см. стр. 216).

слагаемые $\alpha\mathbf{u}$, $\beta\mathbf{v}$, $\gamma\mathbf{w}$ называются *компонентами*, а скалярные множители α, β, γ — *коэффициентами* этого разложения. Векторы, параллельные одной плоскости, могут быть представлены в виде $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$, где $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ — два данных неколлинеарных вектора (рис. 392, *б*).

Координаты вектора. *Прямоугольные декартовы координаты.* Согласно формуле (✳✳) каждый вектор $\overline{AB} = \mathbf{a}$ в пространстве может быть единственным образом разложен на сумму векторов, параллельных ортам $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ (см. стр. 520):

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}; \tag{1}$$

скаляры a_x, a_y, a_z называются *прямоугольными декартовыми координатами* вектора $\mathbf{a}$ в системе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$; это обозначается так:

$$\mathbf{a}\,\{a_x,\ a_y,\ a_z\}; \tag{2}$$

запись (2) равносильна записи (1). Прямоугольные декартовы координаты вектора являются проекциями этого вектора на координатные оси Ox, Oy, Oz (рис. 393).

При параллельном переносе вектора его координаты не меняются.

Координаты линейной комбинации нескольких векторов равны таким же линейным комбинациям координат этих же векторов: из векторного равенства (✳) вытекают три скалярных:

$$\left.\begin{aligned} k_x &= \alpha a_x + \beta b_x + \ldots + \delta d_x,\\ k_y &= \alpha a_y + \beta b_y + \ldots + \delta d_y,\\ k_z &= \alpha a_z + \beta b_z + \ldots + \delta d_z. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

В частности, для координат суммы или разности векторов $\mathbf{c} = \mathbf{a} \pm \mathbf{b}$:

$$c_x = a_x \pm b_x,\ c_y = a_y \pm b_y,\ c_z = a_z \pm b_z. \tag{4}$$

Декартовы прямоугольные координаты радиуса-вектора $\mathbf{r}$ точки $M(x, y, z)$ равны соответствующим координатам этой точки:

$$r_x = x,\ r_y = y,\ r_z = z;\ \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

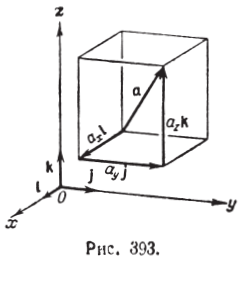


Рис. 393.

Аффинные координаты. Обобщением прямоугольных декартовых координат вектора являются его аффинные координаты в системе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — коэффициенты a^1, a^2, a^3 разложения вектора $\mathbf{a}$ по направлениям трех заданных некомпланарных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 \tag{1'}$$

или в равносильной записи

$$\mathbf{a}\,\{a^1,\ a^2,\ a^3\}\ *. \tag{2'}$$

Формулы (1') и (2') переходят в (1) и (2) при $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{j}$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$. Аналогично, для координат линейной комбинации векторов (✳) и суммы или разности векторов (4) имеют место формулы:

$$\left.\begin{aligned} k^1 &= \alpha a^1 + \beta b^1 + \ldots + \delta d^1,\\ k^2 &= \alpha a^2 + \beta b^2 + \ldots + \delta d^2;\\ k^3 &= \alpha a^3 + \beta b^3 + \ldots + \delta d^3; \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

$$c^1 = a^1 \pm b^1,\ c^2 = a^2 \pm b^2,\ c^3 = a^3 \pm b^3. \tag{4'}$$

* Верхние индексы не следует смешивать с показателями степени. Такое обозначение коэффициентов удобно тем, что скаляры a^1, a^2, a^3 являются контравариантными координатами вектора $\mathbf{a}$ (см. стр. 526).

2. Умножение векторов

Скалярное умножение векторов. *Скалярным произведением* векторов **a** и **b** (обозначается **ab**) называется скаляр, определяемый равенством $\mathbf{ab} = ab\cos\varphi$, где φ — угол между векторами **a** и **b**, приведенными к общему началу (рис. 394).

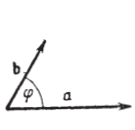


Рис. 394.

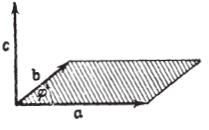


Рис. 395.

Векторное умножение векторов. *Векторным произведением* векторов **a** и **b** (обозначается $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ или $[\mathbf{ab}]$) называется вектор **c**, длина которого равна $ab\sin\varphi$ (т. е. равна площади параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b** как на сторонах) и который направлен перпендикулярно **a** и **b** в такую сторону, чтобы три вектора **a**, **b** и **c** образовали правую тройку (т. е. чтобы после совмещения начал векторов **a**, **b** и **c** кратчайший поворот от **a** к **b** казался наблюдателю, смотрящему с конца вектора **c**, идущим против часовой стрелки, см. рис. 395).

Свойства произведений векторов.

$\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$ (свойство переместительности), но $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ (при перестановке множителей векторное произведение изменяет свое направление на обратное);

$\alpha(\mathbf{ab}) = (\alpha\mathbf{a})\,\mathbf{b}$ и $\alpha(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (\alpha\mathbf{a})\times\mathbf{b}$ (свойство сочетательности по отношению к скалярному множителю α);

$\mathbf{a}(\mathbf{bc}) \neq (\mathbf{ab})\,\mathbf{c}$ и $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \neq (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ (в этих случаях свойство сочетательности не имеет места);

$\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{ab}+\mathbf{ac}$ и $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$ (свойство распределительности);

$\mathbf{ab} = 0$, если $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ (условие перпендикулярности векторов);

$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = 0$, если $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ (условие коллинеарности векторов);

$\mathbf{aa} = \mathbf{a}^2 = a^2$, но $\mathbf{a}\times\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Линейные комбинации векторов можно перемножать как скалярные многочлены, с тем отличием, что для векторного умножения при перестановке множителей (например, при приведении подобных членов) необходимо изменять знак.

Примеры: 1) $(3\mathbf{a}+5\mathbf{b}-2\mathbf{c})(\mathbf{a}-2\mathbf{b}-4\mathbf{c}) = 3\mathbf{a}^2+5\mathbf{ba}-2\mathbf{ca}-6\mathbf{ab}-10\mathbf{b}^2+4\mathbf{cb}-12\mathbf{ac}-20\mathbf{bc}+8\mathbf{c}^2 = 3\mathbf{a}^2-10\mathbf{b}^2+8\mathbf{c}^2-\mathbf{ab}-14\mathbf{ac}-16\mathbf{bc}$.

2) $(3\mathbf{a}+5\mathbf{b}-2\mathbf{c})\times(\mathbf{a}-2\mathbf{b}-4\mathbf{c}) = 3\mathbf{a}\times\mathbf{a}+5\mathbf{b}\times\mathbf{a}-2\mathbf{c}\times\mathbf{a}-6\mathbf{a}\times\mathbf{b}-10\mathbf{b}\times\mathbf{b}+4\mathbf{c}\times\mathbf{b}-12\mathbf{a}\times\mathbf{c}-20\mathbf{b}\times\mathbf{c}+8\mathbf{c}\times\mathbf{c} = 0-5\mathbf{a}\times\mathbf{b}+2\mathbf{a}\times\mathbf{c}-6\mathbf{a}\times\mathbf{b}+0-4\mathbf{b}\times\mathbf{c}-12\mathbf{a}\times\mathbf{c}-20\mathbf{b}\times\mathbf{c}+0 = -11\mathbf{a}\times\mathbf{b}-10\mathbf{a}\times\mathbf{c}-24\mathbf{b}\times\mathbf{c} = 11\mathbf{b}\times\mathbf{a}+10\mathbf{c}\times\mathbf{a}+24\mathbf{c}\times\mathbf{b}$.

Последовательные перемножения векторов. *Двойное векторное произведение* $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ — вектор, компланарный **b** и **c**, может быть вычислен по формуле

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab}).$$

Смешанное произведение $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,\mathbf{c}$ — число, равное объему параллелепипеда, построенного на векторах **a**, **b**, **c**, взятому со знаком «+», если **a**, **b**, **c** образуют правую тройку, и «−», если левую (см. выше). Скобки и знак в смешанном произведении обычно опускают: $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{abc}$.

$\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab} = -\mathbf{acb} = -\mathbf{bac} = -\mathbf{cba}$ (перестановка двух множителей меняет знак смешанного произведения; круговая перестановка всех трех — не меняет).

Формулы для «сложных произведений»

$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{ac})\,(\mathbf{bd}) - (\mathbf{bc})\,(\mathbf{ad})$ *(тождество Лагранжа)*;

$$\mathbf{abc} \cdot \mathbf{efg} = \begin{vmatrix} \mathbf{ae} & \mathbf{af} & \mathbf{ag} \\ \mathbf{be} & \mathbf{bf} & \mathbf{bg} \\ \mathbf{ce} & \mathbf{cf} & \mathbf{cg} \end{vmatrix}.$$

Выражение произведений в прямоугольных декартовых координатах. Если векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ заданы декартовыми прямоугольными координатами

$$\mathbf{a}\,\{a_x, a_y, a_z\}, \quad \mathbf{b}\,\{b_x, b_y, b_z\}, \quad \mathbf{c}\,\{c_x, c_y, c_z\},$$

то произведения векторов вычисляются по следующим формулам:

Скалярное произведение: $\mathbf{ab} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$ (1)

Векторное произведение:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\,\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Смешанное произведение: $$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Выражения произведений в аффинных координатах. *Метрические коэффициенты и взаимные векторы.* Если известны аффинные координаты двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в системе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3. \quad \mathbf{b} = b^1\mathbf{e}_1 + b^2\mathbf{e}_2 + b^3\mathbf{e}_3,$$

то для вычисления скалярного произведения

$$\mathbf{ab} = a^1b^1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + a^2b^2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + a^3b^3\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 + (a^1b^2 + a^2b^1)\,\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + (a^2b^3 + a^3b^2)\,\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + (a^3b^1 + a^1b^3)\,\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 \quad (\text{А})$$

или векторного произведения

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a^2b^3 - a^3b^2)\,\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 + (a^3b^1 - a^1b^3)\,\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 + (a^1b^2 - a^2b^1)\,\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \quad (\text{Б})$$

(так как $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 = 0$)

необходимо знать значения попарных произведений координатных векторов, т. е. для скалярного произведения — шесть чисел (*метрические коэффициенты*):

$$g_{11} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1, \; g_{22} = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2, \; g_{33} = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3,$$

$$g_{12} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1, \; g_{23} = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2, \; g_{31} = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3,$$

а для векторного произведения — три вектора (*взаимные векторы* по отношению к $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$):

$$\mathbf{e}^1 = \Omega\,(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3), \; \mathbf{e}^2 = \Omega\,(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1), \; \mathbf{e}^3 = \Omega\,(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2),$$

где коэффициент Ω, равный обратной величине смешанного произведения координатных векторов

$$\Omega = \frac{1}{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3},$$

вводится для упрощения дальнейших формул.

«Таблицы умножения» координатных векторов.

Скалярное умножение:

	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_1$	g_{11}	g_{12}	g_{13}
$\mathbf{e}_2$	g_{21}	g_{22}	g_{23}
$\mathbf{e}_3$	g_{31}	g_{32}	g_{33}

$(g_{ki} = g_{ik})$

Векторное умножение:

Множимые \ Множители	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_1$	0	$\mathbf{e}^3/\mathcal{Q}$	$-\mathbf{e}^2/\mathcal{Q}$
$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}^3/\mathcal{Q}$	0	$\mathbf{e}^1/\mathcal{Q}$
$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}^2/\mathcal{Q}$	$-\mathbf{e}^1/\mathcal{Q}$	0

В прямоугольных декартовых координатах ($\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{j}$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$) метрические коэффициенты:

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1,$$

$$g_{12} = g_{23} = g_{31} = 0,$$

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{\mathbf{ijk}} = 1;$$

взаимные векторы

$$\mathbf{e}^1 = \mathbf{i},\ \mathbf{e}^2 = \mathbf{j},\ \mathbf{e}^3 = \mathbf{k}$$

совпадают с координатными, и таблицы умножения имеют вид:

Скалярное умножение:

	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	1	0	0
$\mathbf{j}$	0	1	0
$\mathbf{k}$	0	0	1

Векторное умножение:

Множимые \ Множители	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	0	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	0	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	0

Скалярное произведение в координатах. Согласно формуле (А)

$$\mathbf{ab} = \sum_{m=1}^{3} \sum_{n=1}^{3} g_{mn} a^m a^n = g_{\alpha\beta} a^\alpha a^\beta \text{ *}. \qquad (1'')$$

Для прямоугольных декартовых координат формула (1'') переходит в (1) на стр. 523.

Векторное произведение в координатах. Согласно формуле (Б)

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \frac{1}{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3} \begin{vmatrix} \mathbf{e}^1 & \mathbf{e}^2 & \mathbf{e}^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3} [(a^2b^3 - a^3b^2)\,\mathbf{e}^1 + (a^3b^1 - a^1b^3)\,\mathbf{e}^2 + (a^1b^2 - a^2b^1)\mathbf{e}^3]. \qquad (2'')$$

Для прямоугольных декартовых координат формула (2'') переходит в (2) на стр. 523.

---

* Последняя часть равенства (1'') есть сокращенная запись суммы, принятая в тензорном исчислении: вместо всей суммы выписан только один типичный ее член, причем подразумевается, что индекс, встречающийся в этом члене дважды (один раз наверху, а другой – внизу) и обозначенный греческой буквой (*«индекс суммирования»*) пробегает все значения от 1 до 3. Таким образом,

$$g_{\alpha\beta} a^\alpha a^\beta = g_{11}a^1b^1 + g_{12}a^1b^2 + g_{13}a^1b^3 + g_{21}a^2b^1 + g_{22}a^2b^2 + g_{23}a^2b^3 + g_{31}a^3b^1 + g_{32}a^3b^2 + g_{33}a^3b^3.$$

Смешанное произведение в координатах:

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}. \qquad (3'')$$

Для прямоугольных декартовых координат формула (3'') переходит в (3) на стр. 523.

Векторные уравнения

$\mathbf{x}$ — неизвестный вектор, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ — известные векторы, x, y, z — неизвестные скаляры, α, β, γ — известные скаляры.

	Уравнение	Решение
1)	$\mathbf{x}+\mathbf{a}=\mathbf{b}$	$\mathbf{x}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$
2)	$\mathbf{x}\alpha=\mathbf{a}$	$\mathbf{x}=\dfrac{\mathbf{a}}{\alpha}$
3)	$\mathbf{xa}=\alpha$	Уравнение неопределенное; если все векторы $\mathbf{x}$, удовлетворяющие этому уравнению, свести началами в одну точку, то их концы будут лежать в плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{a}$. Уравнение 3) называется *векторным уравнением* этой *плоскости*
4)	$\mathbf{x}\times\mathbf{a}=\mathbf{b}\quad(\mathbf{b}\perp\mathbf{a})$	Уравнение неопределенное; если векторы $\mathbf{x}$, удовлетворяющие этому уравнению, свести началами в одну точку, то их концы будут лежать на прямой, параллельной вектору $\mathbf{a}$. Уравнение 4) называется *векторным уравнением* этой *прямой*
5)	$\begin{cases}\mathbf{xa}=\alpha\\ \mathbf{x}\times\mathbf{a}=\mathbf{b}\quad(\mathbf{b}\perp\mathbf{a})\end{cases}$	$\mathbf{x}=\dfrac{\mathbf{a}\alpha+\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{a^2}$
6)	$\begin{cases}\mathbf{xa}=\alpha\\ \mathbf{xb}=\beta\\ \mathbf{xc}=\gamma\end{cases}$	$\mathbf{x}=\dfrac{\alpha(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\beta(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+\gamma(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}{\mathbf{abc}}=$ $=\alpha\tilde{\mathbf{a}}+\beta\tilde{\mathbf{b}}+\gamma\tilde{\mathbf{c}}$, где $\tilde{\mathbf{a}}$, $\tilde{\mathbf{b}}$, $\tilde{\mathbf{c}}$ — векторы, взаимные по отношению к $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ (см. стр. 523)
7)	$\mathbf{d}=x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c}$	$x=\dfrac{\mathbf{dbc}}{\mathbf{abc}}$, $y=\dfrac{\mathbf{adc}}{\mathbf{abc}}$, $z=\dfrac{\mathbf{abd}}{\mathbf{abc}}$
8)	$\mathbf{d}=x(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+$ $+y(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+z(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$	$x=\dfrac{\mathbf{da}}{\mathbf{abc}}$, $y=\dfrac{\mathbf{db}}{\mathbf{abc}}$, $z=\dfrac{\mathbf{dc}}{\mathbf{abc}}$

3. *Ковариантные и контравариантные координаты вектора*

Определения. Аффинные координаты a^1, a^2, a^3 вектора $\mathbf{a}$ в системе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ определяемые формулой

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 = a^\alpha\mathbf{e}_\alpha{}^*,$$

называются также *контравариантными координатами* этого вектора, в отличие от его *ковариантных координат*, являющихся коэффициентами разложения вектора по трем векторам $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, $\mathbf{e}^3$, взаимным по отношению к $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ (см. стр. 523) **. Ковариантные координаты вектора $\mathbf{a}$ обозначаются через a_1, a_2, a_3:

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}^1 + a_2\mathbf{e}^2 + a_3\mathbf{e}^3 = a_\alpha\mathbf{e}^\alpha.$$

В системе прямоугольных декартовых координат ковариантные координаты вектора совпадают с контравариантными.

Выражения координат через скалярные произведения. Ковариантная координата вектора $\mathbf{a}$ равна скалярному произведению этого вектора на соответствующий координатный вектор:

$$a_1 = \mathbf{ae}_1, \quad a_2 = \mathbf{ae}_2, \quad a_3 = \mathbf{ae}_3. \tag{а}$$

Контравариантная координата вектора $\mathbf{a}$ равна скалярному произведению этого вектора на соответствующий взаимный вектор:

$$a^1 = \mathbf{ae}^1, \quad a^2 = \mathbf{ae}^2, \quad a^3 = \mathbf{ae}^3. \tag{б}$$

Для прямоугольных декартовых координат формулы (а) и (б) совпадают:

$$a_x = \mathbf{ai}, \quad a_y = \mathbf{aj}, \quad a_z = \mathbf{ak}.$$

Выражение скалярного произведения через координаты. Формула (1'') на стр. 524 давала выражение скалярного произведения двух векторов через их контравариантные координаты. В ковариантных координатах ей соответствует формула

$$\mathbf{ab} = g^{\alpha\beta}a_\alpha a_\beta,$$

где $g^{mn} = \mathbf{e}^m\mathbf{e}^n$ — метрические коэффициенты в системе взаимных векторов; они связаны с коэффициентами g_{mn} соотношениями

$$g^{mn} = \frac{(-1)^{m+n}A^{mn}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}},$$

где A^{mn} — минор определителя, стоящего в знаменателе, полученный после вычеркивания строки и столбца, содержащих элемент g_{mn}.

Если вектор $\mathbf{a}$ задан контравариантными координатами, а $\mathbf{b}$ — ковариантными, то их скалярное произведение равно

$$\mathbf{ab} = a^1b_1 + a^2b_2 + a^3b_3 = a^\alpha b_\alpha$$

и аналогично

$$\mathbf{ab} = a_\alpha b^\alpha.$$

---

* См. сноску на стр. 524.

** О значении ковариантных и контравариантных координат см. в курсах тензорного исчисления, например, Н. Е. Кочин, стр. 588 справочника.

4. Геометрические приложения векторной алгебры

Название	Векторная формула	Координатная формула (в прямоугольных декартовых координатах)
Длина вектора $\mathbf{a}$	$a = \sqrt{a^2}$	$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$
Площадь параллелограма, построенного на $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$	$S = \lvert \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rvert$	$S = \sqrt{\left\lvert \begin{matrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{matrix} \right\rvert^2 + \left\lvert \begin{matrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{matrix} \right\rvert^2 + \left\lvert \begin{matrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{matrix} \right\rvert^2}$
Объем параллелепипеда, построенного на $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$	$V = \lvert \mathbf{abc} \rvert$	$V = \left\lvert \begin{matrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{matrix} \right\rvert$
Угол между $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$	$\cos\varphi = \dfrac{\mathbf{ab}}{\sqrt{\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2}}$	$\cos\varphi = \dfrac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$

Применения к аналитической геометрии (векторные уравнения плоскости и прямой) см. стр. 221–227, а также стр. 525

5. Векторная функция скалярной переменной

Определение. Переменный вектор **a** называется *векторной функцией (вектор-функцией)* скалярной переменной t, если каждому значению t соответствует определенное значение вектора **a**.

Обозначение:

$$\mathbf{a} = \mathbf{f}(t).$$

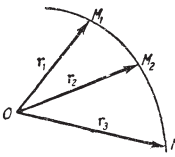


Рис. 396

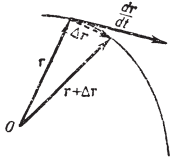


Рис. 397.

Координатное задание вектор-функции

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$

состоит в задании трех скалярных функций от одной независимой переменной:

$$a_x = f_x(t), \quad a_y = f_y(t), \quad a_z = f_z(t).$$

Если представить переменный вектор в виде радиуса-вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ точки M, то при изменении t точка M опишет кривую в пространстве (рис. 396) — *годограф* векторной функции; его координатное задание осуществляется тремя равенствами:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t); \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Производная векторной функции $\mathbf{a} = \mathbf{f}(t)$:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{f}(t + \Delta t) - \mathbf{f}(t)}{\Delta t}$$

представляет новую векторную функцию от t. Геометрическое значение производной от радиуса-вектора: $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ есть вектор, касательный к годографу в соответствующей точке (рис. 397); длина $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ зависит от выбора параметра t. Если t — время, то функция $\mathbf{r}(t)$ определяет движение точки M в пространстве, а $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ по величине и по направлению — скорость этого движения. Если t — длина дуги годографа (от некоторой точки его до M), то $\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = 1$.

Правила дифференцирования векторов:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \ldots) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\mathbf{b}}{dt} + \frac{d\mathbf{c}}{dt} + \ldots$$

$$\frac{d}{dt}(\varphi\mathbf{a}) = \frac{d\varphi}{dt}\mathbf{a} + \varphi\frac{d\mathbf{a}}{dt} \quad (\varphi \text{ — скалярная функция от } t).$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{ab}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt}\mathbf{b} + \mathbf{a}\frac{d\mathbf{b}}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt}$$ (множители нельзя переставлять местами, см. стр. 522).

$$\frac{d}{dt}\mathbf{a}[\varphi(t)] = \frac{d\mathbf{a}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt},$$

Если вектор **г** единичный, то $\mathbf{r}\frac{d\mathbf{r}}{dt}=0$ (касательная перпендикулярна к радиусу-вектору, годограф — *сферическая кривая*).

Ряд Тейлора для векторных функций:

$$\mathbf{a}(t+h)=\mathbf{a}(t)+h\frac{d\mathbf{a}}{dt}+\frac{h^2}{2}\frac{d^2\mathbf{a}}{dt^2}+\ldots+\frac{h^n}{n!}\frac{d^n\mathbf{a}}{dt^n}+\ldots$$

Сходимость этого ряда (и любого ряда с векторными членами определяется так же, как и сходимость ряда с комплексными членами (см. стр. 498). О разложении векторной функции в ряд Тейлора имеет смысл говорить только тогда, когда этот ряд сходится.

Дифференциал функции $\mathbf{a}(t)$ определяется равенством

$$d\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{a}}{dt}\Delta t.$$

Б. Теория поля

6. Скалярное поле

Функции точки. Скалярная величина U, которая принимает определенные значения в каждой точке M пространства, называется скалярной *функцией точки* или *скалярным полем* $U=U(M)$ (например, поле температуры, потенциала, плотности в неоднородной среде и т. п.). Поле может быть определено посредством скалярной функции векторного аргумента **г** (радиуса-вектора точки M при выбранном полюсе O, см. стр. 520):

$$U=U(\mathbf{r}). \tag{1}$$

Поле, определенное только для точек некоторой плоскости, называется *плоским* *.

Центральное и осевое поле. Если функция принимает равные значения для всех точек, находящихся на равных расстояниях от некоторого центра $C(\mathbf{r}_1)$, то поле называется *центральным* или *сферическим*: U зависит только от расстояния $CM=r$, например: $U=r$ (расстояние точки от полюса), $U=\frac{c}{r^2}$ (поле, выражающее освещенность в каждой точке при центральном источнике света), вообще

$$U=f(r). \tag{2}$$

Если функция принимает равные значения для всех точек, находящихся на равных расстояниях от некоторой прямой (*оси поля*), то поле называется *осевым* или *цилиндрическим*.

Координатное задание поля. Определяя точку M ее координатами (декартовыми x, y, z, цилиндрическими ρ, φ, z или сферическими r, θ, φ **), получаем выражение скалярного поля (1) в виде функции трех переменных:

$$U=\Phi(x, y, z), \quad U=\Psi(\rho, \varphi, z) \quad \text{или} \quad U=\chi(r, \theta, \varphi), \tag{1a}$$

---

* Иногда плоским полем называют поле, определенное для точек пространства и обладающее тем свойством, что для всех точек любой прямой, параллельной некоторому постоянному направлению, функция U имеет одно и то же значение. Такое поле правильнее называть *плоско-параллельным*; его изучение сводится к изучению поля в плоскости, перпендикулярной к этому направлению.

** См. стр. 217.

а для плоского поля — в виде функции двух переменных (в декартовых или полярных координатах):

$$U = \Phi(x, y) \quad \text{или} \quad U = \Psi(\rho, \varphi) \tag{1б}$$

(функции U в (1а) и (1б) предполагаются однозначными и непрерывными всюду, за исключением отдельных *точек, линий* и *поверхностей разрыва*). Выражение центрального поля в координатах:

$$U = U(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) = U(\sqrt{\rho^2 + z^2}) = U(r), \tag{2а}$$

осевого:

$$U = U(\sqrt{x^2 + y^2}) = U(\rho) = U(r \sin\theta); \tag{3}$$

для изучения центральных полей наиболее удобны сферические, для осевых — цилиндрические координаты.

Поверхности и линии уровня. Точки для которых функция (1) принимает одно и то же значение

$$U = \text{const} \tag{4}$$

образуют в пространстве *поверхность уровня*, уравнение которой в координатах:

$U = \Phi(x, y, z) = \text{const}$, $U = \Psi(\rho, \varphi, z) = \text{const}$, $U = \chi(r, \theta, \varphi) = \text{const}$. (4а)

При различных $\text{const} = U_0, U_1, U_2, \ldots$ получаются различные поверхности; через каждую точку поля проходит одна такая поверхность (за исключением точек, в которых функция U не определена однозначно).

Примеры: 1) Для поля $U = \mathbf{cr} = c_x x + c_y y + c_z z$ поверхности уровня — параллельные плоскости. 2) Для поля $U = x^2 + 2y^2 + 4z^2$ поверхности уровня — подобные и подобно расположенные эллипсоиды.

Поверхности уровня центрального поля — концентрические сферы, поверхности уровня осевого поля — цилиндры с общей осью.

Для плоского поля уравнение $U = \text{const}$ изображает *линии уровня:*

$$U(x, y) = \text{const}, \quad U(\rho, \varphi) = \text{const}. \tag{4б}$$

На чертежах линии уровня условно проводятся через определенный одинаковый интервал значений U, и на каждой из них надписывается

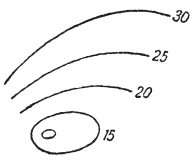


Рис. 398.

соответствующее числовое значение U (рис. 398); например: изобары на синоптических, или горизонтали (линии одинаковой высоты) на топографических картах. В отдельных случаях линии уровня могут выродиться в изолированные точки, а поверхности уровня — в точки и линии.

Примеры: (рис. 399): а) $U = xy$, б) $U = \frac{y}{x^2}$, в) $U = r^2$, г) $U = \frac{1}{r}$

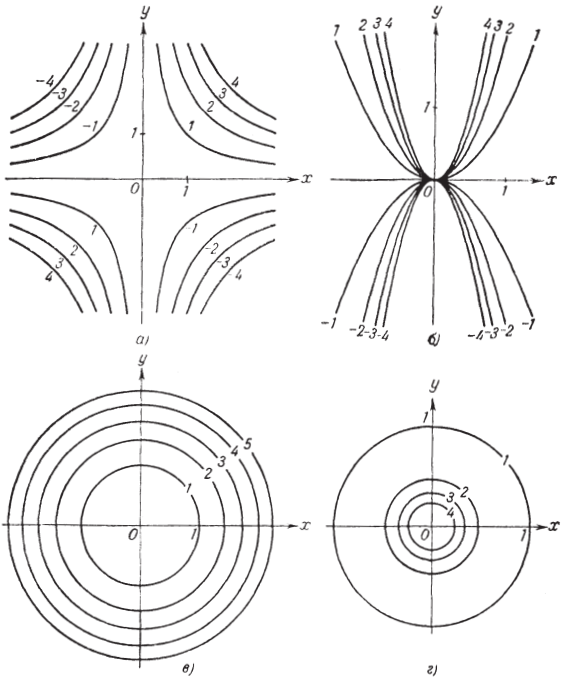


Рис. 399.

7. *Векторное поле*

Вектор-функции точки. Векторная величина **V**, которая принимает определенное значение в каждой точке M пространства, называется *вектор-функцией точки* или *векторным полем* $\mathbf{V} = \mathbf{V}(M)$ (например, поле скоростей частиц движущейся жидкости, силовое поле, поле электрической или магнитной напряженности и т. п.). Поле может быть определено посредством векторной функции векторного аргумента **r**:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{r}). \qquad (1)$$

Векторное поле — *плоское*, если все значения как **r**, так и **V** лежат в одной плоскости *.

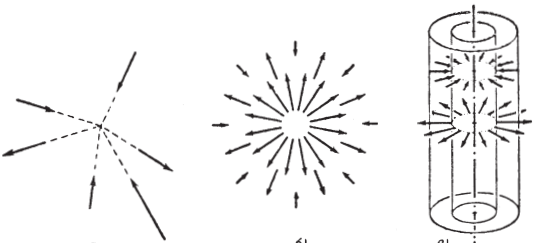
* Ср. сноску * на стр. 529. Аналогичное положение имеет место и для векторного поля.

Часто встречающиеся типы векторных полей.

а) *Центральное векторное поле* (рис. 400, *а*), в котором все векторы $\mathbf{V}$ лежат на прямых, проходящих через одну определенную точку (*центр*). Если поместить полюс в центре, то такое поле определяется формулой $\mathbf{V} = f(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}$; все векторы $\mathbf{V}$ имеют направление радиуса-вектора $\mathbf{r}$. Это поле удобнее выразить формулой

$$\mathbf{V} = \varphi(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{r};$$

$\varphi(\mathbf{r})$ — длина вектора $\mathbf{V}$, $\frac{\mathbf{r}}{r}$ — его орт.



а) *б)* *в)*

Рис. 400.

б) *Сферическое векторное поле* (рис. 400, *б*): $\mathbf{V} = \varphi(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$, важный частный случай центрального поля, в котором длина вектора $\mathbf{V}$ зависит только от расстояния $|\mathbf{r}|$, например, поле притяжения Ньютона (Кулона):

$$\mathbf{V} = \frac{c}{r^3} \mathbf{r} = \frac{c}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

(для плоского поля этот случай называется *круговым полем*).

в) *Цилиндрическое векторное поле* (рис. 400, *в*), в котором все векторы $\mathbf{V}$ 1) лежат на прямых, проходящих через определенную прямую (*ось*) перпендикулярно к ней, 2) для точек, находящихся на одинаковых расстояниях от оси, равны по абсолютной величине и направлены все либо от оси, либо к ней. Если поместить полюс на оси поля, определяемой ортом $\mathbf{c}$, то такое поле определяется формулой $\mathbf{V} = \varphi(\rho) \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho}$, где $\boldsymbol{\rho}$ — вектор, являющийся проекцией $\mathbf{r}$ на плоскость, перпендикулярную к оси: $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{c} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{c})$. В сечении этого поля плоскостями, перпендикулярными к оси, получаем одинаковые круговые поля.

Координатное задание поля. Векторное поле (1) можно определить посредством трех скалярных полей $V^1(\mathbf{r})$, $V^2(\mathbf{r})$ и $V^3(\mathbf{r})$, являющихся коэффициентами разложения $\mathbf{V}$ по трем каким-либо некомпланарным векторам $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{V} = V^1 \mathbf{e}_1 + V^2 \mathbf{e}_2 + V^3 \mathbf{e}_3. \tag{2}$$

Если за эти векторы приняты координатные орты $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, а коэффициенты V^1, V^2, V^3 выражены через декартовы координаты x, y, z, то

$$\mathbf{V} = V_x(x, y, z)\,\mathbf{i} + V_y(x, y, z)\,\mathbf{j} + V_z(x, y, z)\,\mathbf{k}. \tag{2a}$$

т. е. векторное поле определено посредством трех скалярных функций от трех переменных (задание поля в *декартовых координатах*). В *цилиндрических* и *сферических координатах* орты — векторы $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z (= \mathbf{k})$

(рис. 401) и $\mathbf{e}_r \left(= \frac{\mathbf{r}}{r}\right)$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_\theta$ (рис. 402) являются касательными к координатным линиям в каждой точке, а коэффициенты выражены через соответствующие координаты:

$$\mathbf{V} = V_\rho(\rho, \varphi, z)\,\mathbf{e}_\rho + V_\varphi(\rho, \varphi, z)\,\mathbf{e}_\varphi + V_z(\rho, \varphi, z)\,\mathbf{e}_z, \qquad (2б)$$

$$\mathbf{V} = V_r(r, \varphi, \theta)\,\mathbf{e}_r + V_\varphi(r, \varphi, \theta)\,\mathbf{e}_\varphi + V_\theta(r, \varphi, \theta)\,\mathbf{e}_\theta. \qquad (2в)$$

В этих случаях орты изменяют свое направление при переходе от одной точки к другой, оставаясь взаимно перпендикулярными.

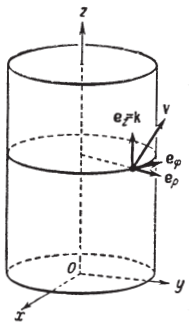


Рис. 401.

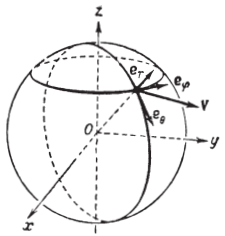


Рис. 402.

Формулы перехода от одной системы к другой.

а) *Выражение декартовых координат через цилиндрические*:

$$V_x = V_\rho \cos\varphi - V_\varphi \sin\varphi, \quad V_y = V_\rho \sin\varphi + V_\varphi \cos\varphi, \quad V_z = V_z.$$

б) *Выражение цилиндрических координат через декартовы*:

$$V_\rho = V_x \cos\varphi + V_y \sin\varphi, \quad V_\varphi = -V_x \sin\varphi + V_y \cos\varphi, \quad V_z = V_z.$$

в) *Выражение декартовых координат через сферические*:

$$V_x = V_r \sin\theta \cos\varphi - V_\varphi \sin\varphi + V_\theta \cos\varphi \cos\theta,$$
$$V_y = V_r \sin\theta \sin\varphi + V_\varphi \cos\varphi + V_\theta \sin\varphi \cos\theta,$$
$$V_z = V_r \cos\theta - V_\theta \sin\theta.$$

г) *Выражение сферических координат через декартовы*:

$$V_r = V_x \sin\theta \cos\varphi + V_y \sin\theta \sin\varphi + V_z \cos\theta,$$
$$V_\varphi = -V_x \sin\varphi + V_y \cos\varphi,$$
$$V_\theta = V_x \cos\theta \cos\varphi + V_y \cos\theta \sin\varphi - V_z \sin\theta.$$

Выражение сферического векторного поля через декартовы координаты:

$$\mathbf{V} = \varphi\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k});$$

выражение цилиндрического поля через декартовы координаты:

$$\mathbf{V} = \varphi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}).$$

Наиболее удобны для изучения сферических полей сферические координаты $[\mathbf{V} = V(r)\,\mathbf{e}_r]$, а для цилиндрических — цилиндрические $[\mathbf{V} = V(\rho)\,\mathbf{e}_\rho]$. В случае плоского поля:

$$\mathbf{V} = V_x(x, y)\,\mathbf{i} + V_y(x, y)\,\mathbf{j} = V_\rho(x, y)\,\mathbf{e}_\rho + V_\varphi(x, y)\,\mathbf{e}_\varphi \quad \text{(рис. 403)},$$

для кругового поля:

$$\mathbf{V} = \varphi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}) = \psi(\rho)\,\mathbf{e}_\rho.$$

Линии тока. Кривая Г, такая, что в каждой ее точке $M(\mathbf{r})$ вектор $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ касается Г, называется *линией тока* векторного поля $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ (рис. 404). Через каждую точку поля проходит одна линия

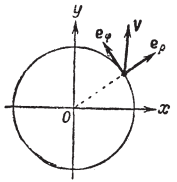


Рис. 403.

Рис. 404.

тока; линии тока между собой не пересекаются (за исключением точек, в которых функция $\mathbf{V}$ не определена или $\mathbf{V} = 0$).

Примеры: Линии тока центрального поля — прямые, соединяющие центр с точкой поля; линии тока поля $\mathbf{V} = \mathbf{c} \times \mathbf{r}$ — окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных к вектору $\mathbf{c}$ и имеющие центры на оси, параллельной $\mathbf{c}$.

Дифференциальные уравнения линий тока поля, выраженного в декартовых координатах:

$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z}; \quad \text{для плоского поля } \frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} \text{ *}.$$

8. Градиент

Производной скалярного поля $U = U(\mathbf{r})$ в данной точке $\mathbf{r}$ по вектору $\mathbf{c}$ называется предел отношения:

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{c}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{U(\mathbf{r}+\varepsilon\mathbf{c}) - U(\mathbf{r})}{\varepsilon} \quad \text{(рис. 405)}.$$

---

* О решении этих дифференциальных уравнений см. стр. 439 и 449.

Производной поля $U=U(\mathbf{r})$ в данной точке $\mathbf{r}$ в направлении орта $\mathbf{c}^0$ называется производная $\dfrac{\partial U}{\partial \mathbf{c}^0}$. Производные по вектору $\mathbf{c}$ и его орту $\mathbf{c}^0$ в данной точке связаны соотношением

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{c}} = |\mathbf{c}|\,\frac{\partial U}{\partial \mathbf{c}^0}.$$

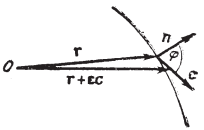


Рис. 405.

$\dfrac{\partial U}{\partial \mathbf{c}^0}$ указывает скорость возрастания функции U в направлении $\mathbf{c}^0$ в каждой точке; из всех производных в данной точке по различным ортам наибольшей является производная $\dfrac{\partial U}{\partial \mathbf{n}}$ в направлении нормали $\mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$ — орт нормали) к поверхности уровня в этой точке (в сторону возрастания функции U); производная по орту в любом другом направлении выражается формулой

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{c}^0} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} \cos(\mathbf{c}^0, \mathbf{n}) = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} \cos\varphi.$$

Градиент поля $U(r)$ (обозначается: $\operatorname{grad} U$ или ∇U *) — вектор, определенный в каждой точке поля, имеющий направление нормали к поверхности уровня (в сторону возрастания U) и длину, равную $\dfrac{\partial U}{\partial \mathbf{n}}$.

Производная $\dfrac{\partial U}{\partial \mathbf{c}^0}$ равна проекции $\operatorname{grad} U$ на направление $\mathbf{c}^0$:

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{c}^0} = \mathbf{c}^0 \operatorname{grad} U.$$

Координаты градиента:
в декартовой системе

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k},$$

в системе цилиндрических координат

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{e}_z,$$

в системе сферических координат

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta.$$

В тех точках поля, где линии уровня, проведенные согласно условию на стр. 530, оказываются начерченными более густо, абсолютная величина градиента больше; в точках максимума и минимума поля [в них поверхности (линии) уровня вырождаются в точку] $\operatorname{grad} U = 0$.

Дифференциал скалярного поля — полный дифференциал функции U (см. стр. 305):

$$dU = \operatorname{grad} U\, d\mathbf{r} = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz.$$

---

* О символе ∇ (набла) см. стр. 543.

Правила вычисления градиента*:

$\operatorname{grad} c = 0$, $\operatorname{grad}(U_1 + U_2) = \operatorname{grad} U_1 + \operatorname{grad} U_2$, $\operatorname{grad}(cU) = c \operatorname{grad} U$,

$\operatorname{grad}(U_1 U_2) = U_1 \operatorname{grad} U_2 + U_2 \operatorname{grad} U_1$, $\operatorname{grad} \varphi(U) = \dfrac{d\varphi}{dU} \operatorname{grad} U$,

$\operatorname{grad}(\mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2) = (\mathbf{V}_1 \operatorname{grad}) \mathbf{V}_2 + (\mathbf{V}_2 \operatorname{grad}) \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_1 \times \operatorname{rot} \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_2 \times \operatorname{rot} \mathbf{V}_1$ **.

В частности, $\operatorname{grad}(\mathbf{rc}) = \mathbf{c}$.

Градиент центрального поля: $\operatorname{grad} U(r) = U'(r) \dfrac{\mathbf{r}}{r}$ (сферическое поле); в частности, $\operatorname{grad} r = \dfrac{\mathbf{r}}{r}$ (поле единичных векторов).

Градиент как объемная производная. Объемная производная скалярного поля (см. стр. 541) есть вектор, являющийся градиентом этого поля; это свойство можно принять за определение градиента:

$$\operatorname{grad} U = \lim_{v \to 0} \frac{\oint\limits_{\Sigma} U d\mathbf{S}}{v}.$$

9. Криволинейный интеграл и потенциал в векторном поле ***

Определение. *Криволинейным* (*линейным*) *интегралом* вектор-функции $\mathbf{V}(\mathbf{r})$, взятым по пути $\overset{\frown}{AB}$ (обозначается $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}$), называют скаляр P, получаемый следующим образом:

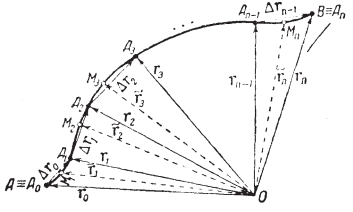


Рис. 406.

1) Пусть $\overset{\frown}{AB}$ (рис. 406) разбивается промежуточными точками

$$A_1(\mathbf{r}_1),\ A_2(\mathbf{r}_2),\ \ldots,\ A_{n-1}(\mathbf{r}_{n-1})$$

$$(A \equiv A_0,\ B \equiv A_n)$$

на n малых отрезков, приближенно изображаемыми векторами $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1} = \Delta\mathbf{r}_{i-1}$.

2) Внутри (или на границе) каждой элементарной дуги $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ выбирается одна произвольная точка M_i, имеющая радиус-вектор $\tilde{\mathbf{r}}_i$.

3) Значения функции $\mathbf{V}(\tilde{\mathbf{r}}_i)$ в этих выбранных точках скалярно умножаются на $\Delta\mathbf{r}_{i-1}$.

4) Все полученные n произведений складываются.

---

* Здесь и дальше c и $\mathbf{c}$ — постоянные.

** О выражениях ($\mathbf{V}$ grad) $\mathbf{W}$ и rot $\mathbf{V}$ см. стр. 544 и 542.

*** Этот параграф является векторным изложением теории криволинейного интеграла второго типа общего вида (см. стр. 416).

5) Вычисляется предел полученной суммы $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(\tilde{\mathbf{r}}_i)\,\Delta\mathbf{r}_{i-1}$, когда длина каждого элементарного вектора $\Delta\mathbf{r}_{i-1}$ стремится к нулю (и, следовательно, $n \to \infty$).

Если этот предел существует и не зависит от выбора точек A_i и M_i, то он называется криволинейным интегралом

$$\int_{\breve{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = \lim_{\substack{\Delta\mathbf{r}\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(\tilde{\mathbf{r}}_i)\,\Delta\mathbf{r}_{i-1}.$$

Если функция $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ непрерывна*, а дуга $\breve{AB}$ непрерывна и имеет непрерывно вращающуюся касательную, то криволинейный интеграл $\int_{\breve{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$ существует.

Механическое значение интеграла. Если поле $\mathbf{V}$ силовое, то $P = \int_{\breve{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$ равно *работе*, которую сила $\mathbf{V}$ произведет при переносе материальной точки по пути $\breve{AB}$.

Свойства криволинейного интеграла:

а) $\int_{\breve{AB}\breve{C}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = \int_{\breve{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} + \int_{\breve{BC}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$;

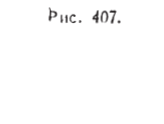


Рис. 407.

б) $\int_{\breve{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = -\int_{\breve{BA}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$ (рис. 407);

в) $\int_{\breve{AB}} [\mathbf{V}(\mathbf{r}) + \mathbf{W}(\mathbf{r})]\,d\mathbf{r} = \int_{\breve{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} + \int_{\breve{AB}} \mathbf{W}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$;

г) $\int_{\breve{AB}} c\,\mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = c\int_{\breve{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$.

Вычисление криволинейного интеграла, заданного в декартовых координатах, сводится к вычислению криволинейного интеграла второго типа общего вида (см. стр. 416—417):

$$\int_{\breve{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = \int_{\breve{AB}} (V_x dx + V_y dy + V_z dz).$$

Циркуляцией векторного поля называется криволинейный интеграл этого поля, взятый по замкнутому контуру (обозначается $\oint_C \mathbf{V}\,d\mathbf{r}$, где C — замкнутая кривая).

* Для непрерывности вектор-функции $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ необходима непрерывность всех трех скалярных функций, являющихся коэффициентами в разложении $\mathbf{V}$ по векторам $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

Консервативное (иначе *потенциальное*) поле — векторное поле, в котором криволинейный интеграл $\int_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{V}\,d\mathbf{r}$ не зависит от пути, соединяющего A и B, а зависит только от положения самих точек A и B. Циркуляция в консервативном поле всегда равна нулю. Консервативное поле всегда *безвихревое*:

$$\operatorname{rot}\mathbf{V}=0 \tag{1}$$

(см. стр. 546); это равенство есть необходимое и достаточное условие при непрерывности частных производных от координат поля для консервативности поля. В декартовых координатах:

$$\frac{\partial V_x}{\partial y}=\frac{\partial V_y}{\partial x},\quad \frac{\partial V_y}{\partial z}=\frac{\partial V_z}{\partial y},\quad \frac{\partial V_z}{\partial x}=\frac{\partial V_x}{\partial z}^{*} \tag{1a}$$

[для плоского поля — только одно первое равенство (1a)].

Потенциал консервативного поля. Если в консервативном поле фиксировать начальную точку A ($\mathbf{r}_0$) и изменять конечную B ($\mathbf{r}$), то интеграл $\int_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$ $\left(\text{обозначается } \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}\right)$ является скалярной функцией $\mathbf{r}$: $\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}=\varphi(\mathbf{r})$, и скалярное поле $\varphi(\mathbf{r})$ называется *потенциальной функцией* или *потенциалом* поля $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ **. Потенциал поля определен с точностью до произвольного постоянного слагаемого, зависящего от нижнего предела $\mathbf{r}_0$; *разность потенциалов*:

$$\varphi(\mathbf{r}_2)-\varphi(\mathbf{r}_1)=\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2}\mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}.$$

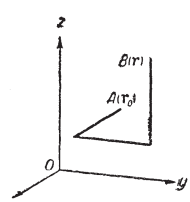


Рис. 408.

Связь градиента, криволинейного интеграла и потенциала. Если $\mathbf{V}(\mathbf{r})=\operatorname{grad}U(\mathbf{r})$, то $U(\mathbf{r})$ есть потенциал поля $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ *** и обратно.

Вычисление потенциала U консервативного поля $\mathbf{V}=V_x\mathbf{i}+V_y\mathbf{j}+V_z\mathbf{k}$, заданного в декартовых координатах, равносильно задаче вычисления функции U по ее полному дифференциалу: $dU=V_x dx+V_y dy+V_z dz$ [V_x, V_y, V_z должны удовлетворять условию (1a)]; U определяется из системы уравнений:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=V_x,\quad \frac{\partial U}{\partial y}=V_y,\quad \frac{\partial U}{\partial z}=V_z.$$

---

* Это *условие интегрируемости* (ср. стр. 418).

** Это *первообразная функция* (ср. стр. 418). В физике *потенциалом* $\varphi(\mathbf{r})$ в точке $\mathbf{r}$ называют иногда величину, противоположную по знаку: «$-\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}}\mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$».

*** Или «минус потенциал поля $\mathbf{V}(\mathbf{r})$» (см. предыдущую сноску).

Практически потенциал вычисляется интегрированием по ломаной (рис. 408), составленной из отрезков, параллельных осям координат (см. вычисление первообразной функции на стр. 419):

$$U = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{V}\, d\mathbf{r} = U(x_0, y_0, z_0) + \int_{x_0}^{x} V_x(x, y_0, z_0)\, dx + \int_{y_0}^{y} V_y(x, y, z_0)\, dy + \int_{z_0}^{z} V_z(x, y, z)\, dz.$$

10. Поверхностные интегралы *

Вектором плоской площадки Σ, ограниченной контуром C, вдоль которого установлено положительное направление,

Рис. 409.

называется вектор $\mathbf{S}$ (рис. 409, *а*), модуль которого равен величине S площади Σ, а направление выбрано перпендикулярно к Σ так, чтобы от его конца положительный обход площадки казался идущим против часовой стрелки. Таким образом, выбор положительного направления на контуре площадки связан с выбором *лицевой стороны* площадки (т. е. стороны, от которой отходит вектор $\mathbf{S}$); эта связь переносится на любую кривую поверхность, ограниченную некоторым контуром (рис. 409, *б* и *в*).

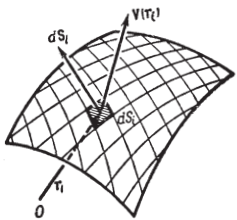


Рис. 410.

Три вида интегралов по поверхности Σ (ограниченной некоторым контуром или замкнутой поверхностью). *Поверхностными интегралами* в скалярном или векторном поле называются величины, образуемые следующим образом: 1) поверхность Σ, на которой выбрана лицевая сторона (рис. 410), разбивается произвольным образом на n малых («элементарных») площадок dS_i, каждая из которых приближенно принимается за плоскую, и соответствующий вектор площадки обозначается $d\mathbf{S}_i$ (при этом в случае замкнутой поверхности положительное направление обхода площадок выбирается так, чтобы лицевая сторона, от которой отходит вектор $d\mathbf{S}_i$, была внешней);

* Этот параграф является векторным изложением теории поверхностного интеграла второго типа общего вида (см. стр. 434).

2) внутри (или на границе) каждой площадки выбирается произвольная точка $\mathbf{r}_i$; 3) составляется произведение: в случае скалярного поля $U(\mathbf{r}_i)\,d\mathbf{S}_i$, а в случае векторного поля $\mathbf{V}(\mathbf{r}_i)\,d\mathbf{S}_i$ или $\mathbf{V}(\mathbf{r}_i)\times d\mathbf{S}_i$; 4) произведения, составленные для каждой площадки, складываются; 5) совершается переход к пределу при $n\to\infty$ и $dS\to 0$ *:

А. *Поток скалярного поля*

$$\mathbf{P}=\lim_{dS_i\to 0}\sum U(\mathbf{r}_i)\,d\mathbf{S}_i=\int\limits_{\Sigma}U(\mathbf{r})\,d\mathbf{S}.$$

Б. *Скалярный поток векторного поля*

$$Q=\lim_{dS_i\to 0}\sum\mathbf{V}(\mathbf{r}_i)\,d\mathbf{S}_i=\int\limits_{\Sigma}\mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{S}.$$

В. *Векторный поток векторного поля*

$$\mathbf{R}=\lim_{dS_i\to 0}\sum\mathbf{V}(\mathbf{r}_i)\times d\mathbf{S}_i=\int\limits_{\Sigma}\mathbf{V}(\mathbf{r})\times d\mathbf{S}\ **.$$

Вычисление интегралов по поверхности в декартовых координатах сводится к вычислению поверхностных интегралов второго типа (см. стр. 432) и производится по следующим формулам:

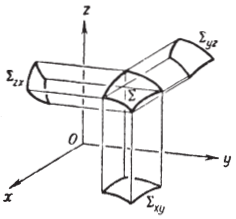


Рис. 411.

$$\text{А)}\quad\int\limits_{\Sigma}U\,d\mathbf{S}=\iint\limits_{\Sigma_{yz}}U\,dy\,dz\,\mathbf{i}+\iint\limits_{\Sigma_{zx}}U\,dz\,dx\,\mathbf{j}+\iint\limits_{\Sigma_{xy}}U\,dx\,dy\,\mathbf{k}.$$

$$\text{Б)}\quad\int\limits_{\Sigma}\mathbf{V}\,d\mathbf{S}=\iint\limits_{\Sigma_{yz}}V_x\,dy\,dz+\iint\limits_{\Sigma_{zx}}V_y\,dz\,dx+\iint\limits_{\Sigma_{xy}}V_z\,dx\,dy.$$

$$\text{В)}\quad\int\limits_{\Sigma}\mathbf{V}\times d\mathbf{S}=\iint\limits_{\Sigma_{yz}}(V_z\mathbf{j}-V_y\mathbf{k})\,dy\,dz+\iint\limits_{\Sigma_{zx}}(V_x\mathbf{k}-V_z\mathbf{i})\,dz\,dx+\iint\limits_{\Sigma_{xy}}(V_y\mathbf{i}-V_x\mathbf{j})\,dx\,dy.$$

Каждый двойной интеграл распространяется на площадь — проекцию Σ на координатные плоскости *** (рис. 411), причем в выражениях, стоящих под знаком интеграла, следует одну из переменных (x, y или z) выразить через две другие из уравнения поверхности Σ.

---

* Площадка стремится к нулю в смысле, указанном в сноске *** на стр. 420.

** Для каждого из этих интегралов имеет место теорема существования, аналогичная приведенной на стр. 433 (точную формулировку ее мы опускаем).

*** Проекция берется со знаком «+» или «—» (см. стр. 432).

Примеры: А) $\mathbf{P} = \int\limits_{\Sigma} xyz\, d\mathbf{S}$ по части плоскости $x + y + z = 1$, заключенной между тремя координатными плоскостями (лицевая сторона верхняя). Имеем:

$$\mathbf{P} = \iint\limits_{yz} (1 - y - z)\, yz\, dy\, dz\, \mathbf{i} + \iint\limits_{zx} (1 - x - z)\, xz\, dz\, dx\, \mathbf{j} + \iint\limits_{xy} (1 - x - y)\, xy\, dx\, dy\, \mathbf{k}:$$

$$\iint\limits_{yz} (1 - y - z)\, yz\, dy\, dz = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-z} (1 - y - z)\, yz\, dy\, dz = \frac{1}{120};$$

остальные два интеграла вычисляются аналогично; результат:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{120}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

Б) $Q = \int\limits_{\Sigma} \mathbf{r}\, d\mathbf{S} = \iint\limits_{yz} x\, dy\, dz + \iint\limits_{zx} y\, dz\, dx + \iint\limits_{xy} z\, dx\, dy$ по той же поверхности. $\iint\limits_{xy} z\, dx\, dy = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} (1 - x - y)\, dy\, dx = \frac{1}{6}$; остальные два интеграла вычисляются аналогично; $Q = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

В) $\mathbf{R} = \int\limits_{\Sigma} \mathbf{r} \times d\mathbf{S} = \int\limits_{\Sigma} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \times (dy\, dz\, \mathbf{i} + dz\, dx\, \mathbf{j} + dx\, dy\, \mathbf{k})$

по той же поверхности. Аналогичные вычисления дают $\mathbf{R} = 0$.

Интегралы по замкнутой поверхности обозначаются: $\oint\limits_{\Sigma} U\, d\mathbf{S}$ $\oint\limits_{\Sigma} \mathbf{V}\, d\mathbf{S}$, $\oint\limits_{\Sigma} \mathbf{V} \times d\mathbf{S}$.

11. Объемное дифференцирование

Определение. *Объемными* (иначе *пространственными*) *производными* скалярного или векторного поля в точке $\mathbf{r}$ называются величины трех видов, получаемые следующим образом: 1) точка $\mathbf{r}$ поля $U(\mathbf{r})$ или $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ окружается замкнутой оболочкой Σ; 2) вычисляется интеграл по поверхности Σ $\left(\oint\limits_{\Sigma} U\, d\mathbf{S}, \oint\limits_{\Sigma} \mathbf{V}\, d\mathbf{S}$ или $\oint\limits_{\Sigma} \mathbf{V} \times d\mathbf{S}\right)$

3) находится предел отношения этого интеграла к объему v, заключенному внутри этой поверхности Σ, если этот объем v стремится к нулю (в смысле, указанном в сноске на стр. 421).

Объемная производная скалярного поля является его **градиентом** (см. стр. 536), а объемные производные векторного поля приводят к понятиям **дивергенции** и **ротации**.

12. Дивергенция векторного поля

Определение. *Дивергенцией* или *расхождением* поля **V** обозначается div **V** или $\nabla\mathbf{V}$ *) называется скаляр, определенный в каждой точке поля и являющийся объемной производной этого поля:

$$\operatorname{div}\mathbf{V}=\lim_{v\to 0}\frac{\int\limits_{\Sigma}\mathbf{V}\,d\mathbf{S}}{v}.$$

Формулы для вычисления дивергенции:

$\operatorname{div}\mathbf{V}=\dfrac{\partial V_x}{\partial x}+\dfrac{\partial V_y}{\partial y}+\dfrac{\partial V_z}{\partial z}$ (в декартовых координатах);

$\operatorname{div}\mathbf{V}=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}(\rho V_\rho)+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}+\dfrac{\partial V_z}{\partial z}$ (в цилиндрических координатах);

$\operatorname{div}\mathbf{V}=\dfrac{1}{r^2}\left[\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2V_r)\right]+\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}+\dfrac{1}{r\sin\theta}\left[\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,V_\theta)\right]$ (в сферических координатах)

Правила вычисления дивергенции:

$\operatorname{div}c=0$, $\operatorname{div}(\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2)=\operatorname{div}\mathbf{V}_1+\operatorname{div}\mathbf{V}_2$, $\operatorname{div}(c\mathbf{V})=c\operatorname{div}\mathbf{V}$,

$\operatorname{div}(U\mathbf{V})=U\operatorname{div}\mathbf{V}+\mathbf{V}\operatorname{grad}U$ [в частности, $\operatorname{div}r\mathbf{c}=\dfrac{\mathbf{rc}}{r}$],

$\operatorname{div}(\mathbf{V}_1\times\mathbf{V}_2)=\mathbf{V}_2\operatorname{rot}\mathbf{V}_1-\mathbf{V}_1\operatorname{rot}\mathbf{V}_2$.

дивергенция центрального поля: $\operatorname{div}\mathbf{r}=3$, $\operatorname{div}\varphi(r)\mathbf{r}=3\varphi(r)+r\varphi'(r)$.

13. Ротация векторного поля

Определения. Ротация (иначе *ротор* или *вихрь*) поля **V** (обозначается: rot **V**, curl **V** или $\nabla\times\mathbf{V}$ *) есть вектор, определенный в каждой точке поля и являющийся объемной производной этого поля, взятой с обратным знаком:

$$\operatorname{rot}\mathbf{V}=-\lim_{v\to 0}\left(\frac{1}{v}\int\limits_{\Sigma}\mathbf{V}\times d\mathbf{S}\right)\text{**}.$$

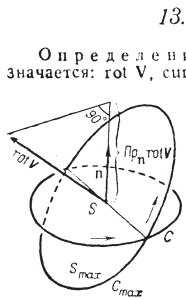


Рис. 412.

$$\operatorname{Пр}_{\mathbf{n}}\operatorname{rot}\mathbf{V}=\lim_{s\to 0}\frac{\int\limits_{C}\mathbf{V}\,d\mathbf{r}}{S}$$

Другое определение: *ротацией* поля **V** называется вектор, образуемый следующим образом: 1) через данную точку **r** проводят небольшую площадку S (рис. 412); 2) вычисляют циркуляцию $\oint\limits_{C}\mathbf{V}\,d\mathbf{r}$ (см. стр. 537) вдоль контура, ограничивающего эту площадку; 3) рассматривают отношение этой циркуляции к площади S, когда S стремится к нулю, стягиваясь к точке **r**, причем положение плоскости площадки остается неизменным; 4) изменяя направление этой площадки, устанавливают направление, при

* О символе ∇ (набла) см. стр. 543.

** Знак «минус» можно устранить, если поставить множители под знаком интеграла в обратном порядке: $\int d\mathbf{S}\times\mathbf{V}$ (см. стр. 522).

котором полученный предел достигает максимума; 5) в точке r определяется вектор rot r, модуль которого равен полученному максимуму, а направление совпадает с направлением вектора площадки $S_{\max}$:

$$|\operatorname{rot} \mathbf{V}| = \lim_{S \to 0} \frac{\int\limits_{(C_{\max})} \mathbf{V}\, d\mathbf{r}}{S_{\max}}; \quad \left.\begin{array}{c}\text{проекция rot V}\\ \text{на нормаль к}\\ \text{площадке } S\end{array}\right\} = \lim_{S \to 0} \frac{\int\limits_{C} \mathbf{V}\, d\mathbf{r}}{S}.$$

Ротация потенциального поля равна нулю (следует из теоремы Стокса, стр. 545).

Координаты ротации:

$$\operatorname{rot} \mathbf{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

(в декартовых координатах),

$$\operatorname{rot} \mathbf{V} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z}\right)\mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho}\right)\mathbf{e}_\varphi + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial (\rho V_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi}\right)\mathbf{e}_z$$

(в цилиндрических координатах),

$$\operatorname{rot} \mathbf{V} = \left[\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta V_\varphi) - \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi}\right)\right]\mathbf{e}_r + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial (r V_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right]\mathbf{e}_\varphi + \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r V_\varphi)\right)\right]\mathbf{e}_\theta$$

(в сферических координатах).

Правила вычисления ротации:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) = \operatorname{rot} \mathbf{V}_1 + \operatorname{rot} \mathbf{V}_2, \quad \operatorname{rot}(c\mathbf{V}) = c \operatorname{rot} \mathbf{V},$$

$$\operatorname{rot}(U\mathbf{V}) = U \operatorname{rot} \mathbf{V} + \operatorname{grad} U \times \mathbf{V},$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2) = (\mathbf{V}_2 \operatorname{grad})\mathbf{V}_1 - (\mathbf{V}_1 \operatorname{grad})\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_1 \operatorname{div} \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_2 \operatorname{div} \mathbf{V}_1 *.$$

Вихревыми линиями поля V называются линии тока поля rot V (стр. 534).

14. *Операторы* ∇ (*Гамильтона*), $(\mathbf{a}\nabla)$ *и* Δ (*Лапласа*)

Оператор Гамильтона ∇ (набла) — символический вектор, заменяющий символы градиента, дивергенции и ротации:

$$\nabla U = \operatorname{grad} U, \quad \nabla \mathbf{V} = \operatorname{div} \mathbf{V}, \quad \nabla \times \mathbf{V} = \operatorname{rot} \mathbf{V};$$

введение его упрощает вычисления в векторном анализе. Выражение оператора Гамильтона в декартовых координатах:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Формально перемножая этот вектор на скаляр U или на вектор V (скалярно или векторно), выраженные в декартовых координатах, получаем формулы для градиента (стр. 535), дивергенции (стр. 542) и ротации (стр. 543) в декартовых координатах.

* О выражении V grad см. стр. 544.

Правила вычисления с оператором ∇. а) Если ∇ стоит перед линейной комбинацией $\sum a_i X_i$, где a_i — постоянные, а X_i — функции точки (безразлично — скалярные или векторные), то $\nabla\left(\sum a_i X_i\right)=\sum a_i \nabla X_i$.

б) Если ∇ стоит перед произведением функций точки X, Y, Z (скалярных или векторных), то он применяется поочередно к каждой из этих функций (над нею в этом случае ставится знак $\downarrow$) и результаты складываются

$$\nabla(XYZ)=\nabla(\overset{\downarrow}{X}YZ)+\nabla(X\overset{\downarrow}{Y}Z)+\nabla(XY\overset{\downarrow}{Z});$$

затем полученные произведения преобразуются по правилам векторной алгебры так, чтобы за оператором ∇ стоял только множитель, снабженный знаком $\downarrow$; этот знак после вычисления можно не писать.

Примеры: 1) $\operatorname{div}(UV)=\nabla(UV)=\nabla(\overset{\downarrow}{U}V)+\nabla(U\overset{\downarrow}{V})=V\cdot\nabla U+U\cdot\nabla V=$ $=V\operatorname{grad}U+U\operatorname{div}V$.

2) $\operatorname{div}(V_1\times V_2)=\nabla(V_1\times V_2)=\nabla(\overset{\downarrow}{V}_1\times V_2)+\nabla(V_1\times\overset{\downarrow}{V}_2)=\nabla\overset{\downarrow}{V}_1V_2+$ $+\nabla V_1\overset{\downarrow}{V}_2=V_2\nabla V_1-V_1\nabla V_2=V_2(\nabla\times V_1)-V_1(\nabla\times V_2)=V_2\operatorname{rot}V_1-V_1\operatorname{rot}V_2$.

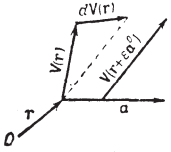


Рис. 413.

Оператор $(a\nabla)$. При вычислениях может получиться операторное выражение $(a\nabla)=$ $=a_x\dfrac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+a_y\dfrac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+a_z\dfrac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$. Вектор $(a\nabla)V=$ $=(a\operatorname{grad})V$ называется *градиентом векторного поля* V по вектору a; он равен производной вектора V по вектору a:

$$(a\nabla)V=(a\operatorname{grad})V=|a|\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{V(r+\varepsilon a^0)-V(r)}{\varepsilon}$$

(рис. 413).

Пример: $\operatorname{grad}(V_1V_2)=\nabla(V_1V_2)=\nabla(\overset{\downarrow}{V}_1V_2)+\nabla(V_1\overset{\downarrow}{V}_2)$.
По формуле $\mathbf{b}(ac)=(ab)\mathbf{c}+a\times(b\times c)$ (см. стр. 522) получаем:

$$\operatorname{grad}(V_1V_2)=(V_2\nabla)V_1+V_2\times(\nabla\times V_1)+(V_1\nabla)V_2+V_1\times(\nabla\times V_2)=$$
$$=(V_2\operatorname{grad})V_1+V_2\times\operatorname{rot}V_1+(V_1\operatorname{grad})V_2+V_1\times\operatorname{rot}V_2.$$

Выражение $(a\nabla)V$ может быть преобразовано по формуле:

$$2(a\nabla)V=\operatorname{rot}(V\times a)+\operatorname{grad}(aV)+a\operatorname{div}V-V\operatorname{div}a-a\times\operatorname{rot}V-V\times\operatorname{rot}a.$$

Двукратные применения ∇; оператор Δ.

$$\left.\begin{aligned}&1)\ \nabla(\nabla\times V)=\operatorname{div}\operatorname{rot}V=0,\\&2)\ \nabla\times(\nabla U)=\operatorname{rot}\operatorname{grad}U=0\\&3)\ \nabla(\nabla U)=\operatorname{div}\operatorname{grad}U=\Delta U\end{aligned}\right\}\text{ для всякого поля.}$$

Δ (иначе $\nabla\nabla$, ∇^2) — *оператор Лапласа*; его координатное выражение:

$$\Delta U=\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2U}{\partial z^2}\ \text{(декартовы координаты)},$$

$$\Delta U=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2U}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2U}{\partial z^2}\ \text{(цилиндрические координаты)}.$$

$$\Delta U=\frac{\partial^2U}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2U}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2U}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2}\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}$$

(сферические координаты).

4) $\nabla(\nabla \mathbf{V}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{V}$ и 5) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{V}$ связаны между собой формулой: $\nabla(\nabla \mathbf{V}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \Delta \mathbf{V}$. Здесь $\Delta \mathbf{V} = (\nabla\nabla)\mathbf{V}$ — оператор Лапласа, примененный к вектору $\mathbf{V}$:

$$\Delta \mathbf{V} = \Delta V_x \mathbf{i} + \Delta V_y \mathbf{j} + \Delta V_z \mathbf{k} = \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right)\mathbf{k}.$$

15. *Интегральные теоремы* *

Теорема Остроградского-Гаусса:

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{V}\, d\mathbf{S} = \int_{v} \operatorname{div}\mathbf{V}\, dv,$$

— скалярный поток поля $\mathbf{V}$ через замкнутую поверхность Σ равен интегралу от дивергенции $\mathbf{V}$ распространенному на объем v заключенный внутри Σ.

В декартовых координатах:

$$\iint_{\Sigma} (V_x\, dy\, dz + V_y\, dz\, dx + V_z\, dx\, dy) = \iiint_{v} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$$

(V_x, V_y, V_z — функции трех переменных: x, y и z).

Теорема Стокса:

$$\oint_{C} \mathbf{V}\, d\mathbf{r} = \int_{\Sigma} \operatorname{rot}\mathbf{V}\, d\mathbf{S},$$

— циркуляция поля по кривой C равна потоку ротации через любую поверхность Σ, ограниченную контуром C **.

В декартовых координатах:

$$\int_{C} (V_x\, dx + V_y\, dy + V_z\, dz) = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) dy\, dz + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) dz\, dx + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

Для плоского контура (*формула Грина*):

$$\int_{C} (V_x\, dx + V_y\, dy) = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) dx\, dy$$

(V_x и V_y — функции двух переменных x и y).

---

* Ср. стр. 435—436.

** Точнее см. стр. 435.

Теоремы Грина:

$$1)\ \int\limits_{\Sigma} U_1 \operatorname{grad} U_2\, d\mathbf{S} = \int\limits_{v} (U_1 \Delta U_2 + \operatorname{grad} U_1 \operatorname{grad} U_2)\, dv,$$

$$2)\ \int\limits_{\Sigma} (U_1 \operatorname{grad} U_2 - U_2 \operatorname{grad} U_1)\, d\mathbf{S} = \int\limits_{v} (U_1 \Delta U_2 - U_2 \Delta U_1)\, dv$$

(U_1 и U_2 — скалярные поля, Σ — поверхность, ограничивающая объем v). В частности (при $U_1 = 1$):

$$3)\ \int\limits_{\Sigma} \operatorname{grad} U\, d\mathbf{S} = \int\limits_{v} \Delta U\, dv.$$

В декартовых координатах теорема 3) принимает следующий вид:

$$\oint\limits_{\Sigma} \frac{\partial U}{\partial x}\, dy\, dz + \frac{\partial U}{\partial y}\, dz\, dx + \frac{\partial U}{\partial z}\, dx\, dy = \int\limits_{v} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) dv.$$

16. Безвихревые и соленоидальные векторные поля

Безвихревым полем $\mathbf{V}$ называется поле, ротация которого всюду равна 0. Если $\operatorname{rot} \mathbf{V} = 0$, то $\mathbf{V} = \operatorname{grad} U$; функция U (потенциал $\mathbf{V}$) * в любой точке M может быть выражена формулой

$$U = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\operatorname{div} \mathbf{V}\, dv}{r}, \tag{1}$$

где r — расстояние dv от M; интеграл распространяется на все пространство **.

Соленоидальным полем $\mathbf{V}$ называется поле, дивергенция которого всюду равна 0. Если $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$, то существует такое соленоидальное поле $\mathbf{W}$ (*векторный потенциал* $\mathbf{V}$), что $\mathbf{V} = \operatorname{rot} \mathbf{W}$ и

$$\mathbf{W} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\operatorname{rot} \mathbf{V}\, dv}{r}; \tag{2}$$

r имеет то же значение, что и в формуле (1); интеграл распространяется на все пространство ***.

Любое векторное поле $\mathbf{V}$, достаточно быстро убывающее при удалении в бесконечность, может быть единственным образом разложено на сумму безвихревого поля $\mathbf{V}_1$ и соленоидального поля $\mathbf{V}_2$ ($\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$), которые определяются формулами:

$$\mathbf{V}_1 = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{grad} \int \frac{\operatorname{div} \mathbf{V}\, dv}{r}, \quad \mathbf{V}_2 = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \int \frac{\operatorname{rot} \mathbf{V}\, dv}{r}.$$

---

* Или «минус потенциал V», см. сноску ** на стр. 538.

** Формула (1) справедлива, если дивергенция поля $\mathbf{V}$ дифференцируема и достаточно быстро убывает при удалении в бесконечность.

*** Формула (2) справедлива, если ротация поля $\mathbf{V}$ дифференцируема и достаточно быстро убывает при удалении в бесконечность.

Поле с точечными источниками. *Поле Ньютона (Кулона)* $\mathbf{E} = \frac{e}{r^3}\mathbf{r}$ безвихревое всюду и соленоидальное всюду за исключением полюса O (источника поля). Его потенциал $U = -\frac{e}{r}$ *. Скалярный поток $\oint_S \mathbf{E}\,d\mathbf{S}$ равен нулю, если поверхность S не заключает внутри себя источника, и равен $4\pi e$, если источник расположен внутри; величина e называется *обильностью* (или интенсивностью) источника.

Ньютоново поле с источником в точке $\mathbf{r}_1$:

$$\mathbf{E} = \frac{e_1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1);$$

с несколькими источниками $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \ldots$, обильность которых соответственно равна $e_1, e_2, e_3, \ldots$:

$$\mathbf{E} = \sum \frac{e_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i).$$

Поток $\oint_S \mathbf{E}\,d\mathbf{S}$ равен нулю, если поверхность S не заключает внутри себя источников, и равен $4\pi\sum' e_i$, если источники расположены внутри ($\sum'$ распространяется на источники, заключенные внутри S).

17. Уравнения Лапласа и Пуассона

Уравнение Лапласа. Разыскание скалярного поля U, для которого $\Delta U = 0$ ($\operatorname{div}\operatorname{grad} U = 0$), приводит к *уравнению Лапласа* — дифференциальному уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

или, на плоскости,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

Функции, удовлетворяющие этому уравнению (непрерывные и имеющие непрерывные частные производные 1-го и 2-го порядков), называются *функциями Лапласа* или *гармоническими функциями*. Если известны значения гармонической функции в точках замкнутой поверхности Σ, то этим вполне определяются значения этой функции во всех точках внутри этой поверхности; нахождение их представляет *задачу Дирихле* (см. Смирнов, т. II, Гольдфайн, стр. 585, 588 справочника). Если на некоторой замкнутой поверхности известны значения гармонической функции U и ее производной $\frac{\partial U}{\partial n}$ в направлении нормали (внешней)

---

* Или $+\frac{e}{r}$; см. сноску ** на стр. 538.

к этой поверхности, то значения U_M в точке M внутри поверхности находятся по формуле

$$U_M = \frac{1}{4\pi} \oint\limits_{\Sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n}\, dS - \frac{1}{4\pi} \oint\limits_{\Sigma} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, U\, dS,$$

где r — расстояние dS от точки M.

Уравнение Пуассона. Разыскание скалярного поля U по данной дивергенции $\rho(x, y, z)$ его градиента приводит к *уравнению Пуассона*

$$\Delta U = \rho(x, y, z)$$

или

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \rho(x, y, z).$$

Если ρ — непрерывная функция и известно, что при $r \to \infty$ (т. е. при удалении точки в бесконечность) функция U стремится к нулю и притом достаточно быстро, то решением уравнения Пуассона является *ньютонов потенциал* функции ρ, определяемый формулой

$$U_M = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho\, dv}{r},$$

где r — расстояние элемента объема dv от точки M; интеграл распространен по всему пространству (подробнее см. Гольдфайн, стр. 588 справочника).

III. РЯДЫ ФУРЬЕ (ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ)

1. Общие сведения

Основные понятия. В целом ряде задач (дифференциальные уравнения, теория колебаний) бывает нужно заменить данную периодическую функцию $f(x)$ с периодом T точно или приближенно тригонометрической суммой

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega x + a_2 \cos 2\omega x + \ldots + a_n \cos n\omega x + \\ + b_1 \sin \omega x + b_2 \sin 2\omega x + \ldots + b_n \sin n\omega x,$$

где $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (если $T = 2\pi$, то $\omega = 1$). Приближение $s_n(x)$ к $f(x)$ является наилучшим (в смысле, указанном ниже, см. стр. 550), если за коэффициенты a_k и b_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) выбраны *коэффициенты Фурье* данной функции:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x) \cos k\omega x \, dx = \frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \cos k\omega x \, dx = \\ = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} [f(x) + f(-x)] \cos k\omega x \, dx,$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x) \sin k\omega x \, dx = \frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \sin k\omega x \, dx = \\ = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} [f(x) - f(-x)] \sin k\omega x \, dx$$

(*формулы Эйлера*).

Если, для некоторой совокупности значений x, $s_n(x)$ при $n \to \infty$ стремится к определенному пределу $s(x)$, то для этих x мы имеем сходящийся.

ряд Фурье данной функции $f(x)$:

$$s(x)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos\omega x+a_2\cos 2\omega x+\ldots+a_n\cos n\omega x+\ldots+$$
$$+b_1\sin\omega x+b_2\sin 2\omega x+\ldots+b_n\sin n\omega x+\ldots$$

Ряд Фурье может быть также записан в виде:
$s(x)=\frac{a_0}{2}+A_1\sin(\omega x+\varphi_1)+A_2\sin(2\omega x+\varphi_2)+\ldots+A_n\sin(n\omega x+\varphi_n)+\ldots$,
где $A_k=\sqrt{a_k^2+b_k^2}$ и $\operatorname{tg}\varphi_k=\frac{a_k}{b_k}$. В комплексной форме ряд Фурье может быть записан так:

$$s(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty}c_n e^{in\omega x}$$

где

$$c_n=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-in\omega x}dx=\begin{cases}\frac{1}{2}(a_n-ib_n) \text{ при } n>0,\\ \frac{1}{2}(a_{-n}+ib_{-n}) \text{ при } n<0.\end{cases}$$

Нахождение ряда Фурье данной функции $f(x)$ составляет задачу *гармонического анализа.*

Основные свойства рядов Фурье.

1. При приближенной замене функции $f(x)$ тригонометрической суммой

$$s_n(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_1^n\alpha_k\cos k\omega x+\sum_1^n\beta_k\sin k\omega x$$

средняя квадратическая ошибка (см. стр. 572)

$$\delta^2=\frac{1}{T}\int_0^T[f(x)-s_n(x)]^2dx$$

будет наименьшей, если за коэффициенты α_k и β_k взять коэффициенты Фурье данной функции.

2. Для всякой ограниченной и кусочно-непрерывной на интервале $0<x<T$ (см. стр. 282) функции ряд Фурье *сходится в среднем* к данной функции, т. е.

$$\int_0^T[f(x)-s_n(x)]^2dx\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Из сходимости в среднем следует, что

$$\frac{2}{T}\int_0^T[f(x)]^2dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\qquad \textit{(равенство Парсеваля).}$$

3. Если функция $f(x)$ удовлетворяет *условиям Дирихле*, т. е.: а) интервал, на котором функция определена, может быть разбит на конечное число интервалов, в каждом из которых $f(x)$ непрерывна и монотонна, и б) во всякой точке разрыва $f(x)$ существуют $f(x+0)$ и $f(x-0)$ (см. стр. 282), то ряд Фурье для этой функции *сходится*, и сумма его равна $f(x)$ в точках непрерывности $f(x)$, а в точках разрыва она равна $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.

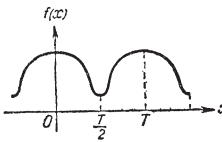


Рис. 414.

4. Если периодическая функция $f(x)$ непрерывна со своими производными до k-го порядка включительно, то $a_n n^k \to 0$ и $b_n n^k \to 0$ при $n \to \infty$.

Симметрия. Если $f(x)$ — функция *четная*, т. е. $f(-x) = f(x)$ (*симметрия I рода*, рис. 414), то

$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos k\frac{2\pi x}{T}\,dx \text{ и } b_k = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Если $f(x)$ — функция *нечетная*, т. е. $f(-x) = -f(x)$ (*симметрия II рода*, рис. 415), то

$$a_k = 0 \text{ и } b_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin k\frac{2\pi x}{T}\,dx \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

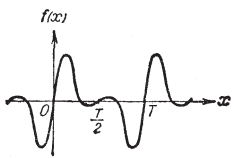


Рис. 415.

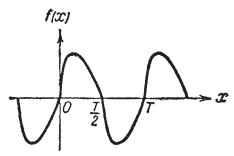


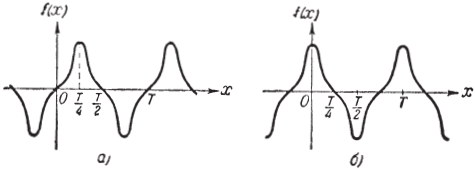
Рис. 416.

Если $f\left(x+\frac{T}{2}\right) = -f(x)$ (*симметрия III рода*, рис. 416), то

$$\left.\begin{aligned} a_{2k+1} &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos(2k+1)\frac{2\pi x}{T}\,dx,\ a_{2k} = 0,\\ b_{2k+1} &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin(2k+1)\frac{2\pi x}{T}\,dx,\ b_{2k} = 0 \end{aligned}\right\} (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Если функция нечетная и, кроме того, обладает симметрией III рода (*симметрия рода* IVа, рис. 417, *а*), то

$$a_k = b_{2k} = 0 \text{ и } b_{2k+1} = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(x)\sin(2k+1)\frac{2\pi x}{T}\,dx \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$



а) *б)*

Рис. 417.

Если функция четная и, кроме того, обладает симметрией III рода (*симметрия рода* IVб, рис. 417, *б*), то

$$b_k = a_{2k} = 0 \text{ и } a_{2k+1} = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(x)\cos(2k+1)\frac{2\pi x}{T}\,dx \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Разложение в ряд Фурье непериодической функции. Всякая функция $f(x)$, удовлетворяющая на промежутке $0 \leq x \leq l$ условиям Дирихле (см. стр. 551), может быть разложена на этом промежутке в сходящиеся ряды видов:

1) $$f_1(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos\frac{2\pi x}{l} + a_2\cos 2\frac{2\pi x}{l} + \ldots + a_n\cos n\frac{2\pi x}{l} + \ldots + b_1\sin\frac{2\pi x}{l} + b_2\sin 2\frac{2\pi x}{l} + \ldots + b_n\sin n\frac{2\pi x}{l} + \ldots$$

или

2) $$f_2(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos\frac{\pi x}{l} + a_2\cos 2\frac{\pi x}{l} + \ldots + a_n\cos n\frac{\pi x}{l} + \ldots$$

или

3) $$f_3(x) = b_1\sin\frac{\pi x}{l} + b_2\sin 2\frac{\pi x}{l} + \ldots + b_n\sin n\frac{\pi x}{l} + \ldots$$

Функция $f_1(x)$ является периодической с периодом $T = l$, совпадающей с $f(x)$* на промежутке $0 < x < l$ (рис. 418). Коэффициенты разложения находятся по формулам Эйлера (см. стр. 549) при $\omega = \frac{2\pi}{l}$. Функция $f_2(x)$ является периодической с периодом $T = 2l$, обладает

---

* В точках разрыва считаем $f(x) = \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$.

симметрией I рода и на промежутке $0 \leq x \leq l$ совпадает с $f(x)$ (рис. 419). Коэффициенты разложения $f_2(x)$ находятся по формулам для случая симметрии I рода, при $T = 2l$. Функция $f_3(x)$ является периодической с периодом $T = 2l$, обладает симметрией II рода и на промежутке $0 < x < l$ совпадает с $f(x)$ (рис. 420). Коэффициенты разложения $f_3(x)$ находятся по формулам для случая симметрии II рода при $T = 2l$.

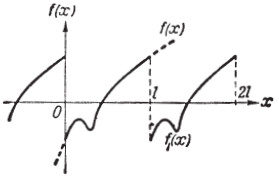


Рис. 418.

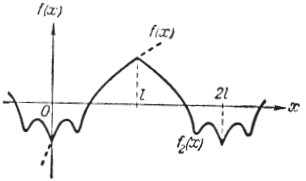


Рис. 419.

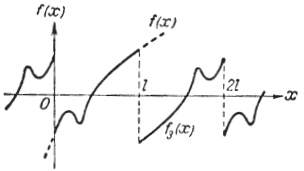


Рис. 420.

И н т е г р а л Ф у р ь е. Если функция $f(x)$ на любом конечном интервале удовлетворяет условиям Дирихле (см. стр. 551), и, кроме того, интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сходится (см. стр. 398), то имеет место формула * (*интеграл Фурье*):

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{iux}\,du \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-iut}\,dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} du \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos u(t-x)\,dt$$

(в точках разрыва принимается $f(x) = \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$). Эта формула может быть рассматриваема как предельная для формулы разложения в тригонометрический ряд непериодической функции $f(x)$ на интервале $(-l, +l)$ при $l \to \infty$. В то время как ряд Фурье дает представление периодической функции (с периодом T) в виде суммы гармонических колебаний с частотами $u_n = n\frac{2\pi}{T}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и амплитудами A_n, интеграл Фурье представляет функцию $f(x)$ как бы в виде суммы бесконечно большого числа колебаний с непрерывно

* Менее жесткие условия, при которых справедлива формула интеграла Фурье, см. Фихтенгольц, т. III, стр. 587 справочника.

меняющейся частотой u; говорят, что интеграл Фурье дает разложения функции в *непрерывный спектр*, причем частоте u соответствует *плотность спектра*

$$g(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-iut}\, dt.$$

Интеграл Фурье принимает более простой вид, если $f(x)$ **четная**:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos ux\, du\int_0^{\infty} f(t)\cos ut\, dt,$$

и если $f(x)$ **нечетная**:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin ux\, du\int_0^{\infty} f(t)\sin ut\, dt.$$

Пример: Для четной функции $f(x)=e^{-|x|}$ получим, что плотность спектра равна

$$g(u)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-t}\cos ut\, dt=\frac{2}{\pi}\frac{1}{u^2+1},\quad \text{т. е. } e^{-|x|}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos ux}{u^2+1}\, du.$$

2. *Таблица некоторых разложений в ряд Фурье*

Ниже даны разложения в тригонометрический ряд некоторых простейших функций, заданных на определенном интервале и далее продолженных периодически. Рядом с разложением дан соответствующий график. Многие простейшие периодические функции могут быть приведены к данному в таблице виду изменением масштаба как по оси Ox, так и по оси Oy, а также переносом координатных осей. Например, функция с периодом T (рис. 421), заданная условиями

Рис. 421.

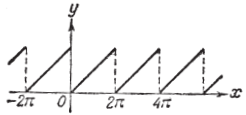
$$y=2\left(0<x<\frac{T}{4}\right),$$

$$y=0\left(\frac{T}{4}<x<\frac{T}{2}\right),$$

$f(-x)=f(x)$, сводится к виду 5 ($a=1$, см. таблицу) введением переменных $Y=y-1$, $X=\frac{2\pi x}{T}+\frac{\pi}{2}$. Так как $\sin(2n+1)\left(\frac{2\pi x}{T}+\frac{\pi}{2}\right)=$ $=(-1)^n\cos(2n+1)\frac{2\pi x}{T}$, то, выполняя замену переменных в ряде (5), получим для нашей функции

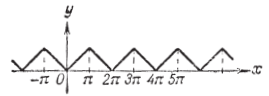
$$y=1+\frac{4}{\pi}\left(\cos\frac{2\pi x}{T}-\frac{1}{3}\cos 3\frac{2\pi x}{T}+\frac{1}{5}\cos 5\frac{2\pi x}{T}-\ldots\right).$$

1. $y = x$ для $0 < x < 2\pi$



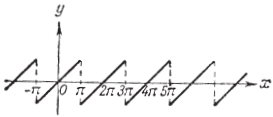
$$y = \pi - 2\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots\right)$$

2. $y = x$ для $0 \leqslant x \leqslant \pi$



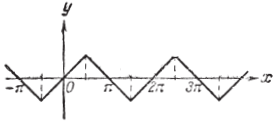
$$y = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right)$$

3. $y = x$ для $-\pi < x < \pi$



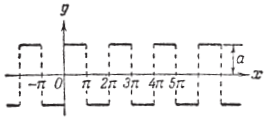
$$y = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right)$$

4. $y = x$ для $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$



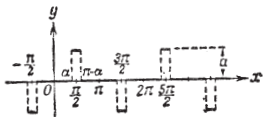
$$y = \frac{4}{\pi}\left(\sin x - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \ldots\right)$$

5. $y = a$ для $0 < x < \pi$



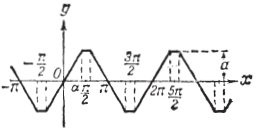
$$y = \frac{4a}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right)$$

6. $y = 0$ для $0 \leqslant x < \alpha$ и для $\pi - \alpha < x \leqslant \pi$,
$y = a$ для $\alpha < x < \pi - \alpha$



$$y = \frac{4a}{\pi}\left(\cos\alpha \sin x + \frac{1}{3}\cos 3\alpha \sin 3x + \frac{1}{5}\cos 5\alpha \sin 5x + \ldots\right)$$

7. $y = \frac{a}{\alpha} x$ для $0 \leqslant x \leqslant \alpha$,
$y = a$ для $\alpha \leqslant x \leqslant \pi - \alpha$,
$y = \frac{a(\pi - x)}{\alpha}$ для $\pi - \alpha \leqslant x \leqslant \pi$

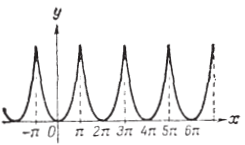


$$y = \frac{4}{\pi}\frac{a}{\alpha}\left(\sin\alpha \sin x + \frac{1}{3^2}\sin 3\alpha \sin 3x + \frac{1}{5^2}\sin 5\alpha \sin 5x + \ldots\right)$$

В частности, при $\alpha = \frac{\pi}{3}$:

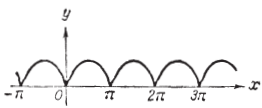
$$y = \frac{6\sqrt{3}a}{\pi^2}\left(\sin x - \frac{1}{5^2}\sin 5x + \frac{1}{7^2}\sin 7x - \frac{1}{11^2}\sin 11x + \ldots\right)$$

8. $y = x^2$ для $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$



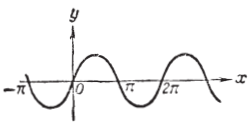
$$y = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \ldots\right)$$

9. $y = x(\pi - x)$ для $0 \leqslant x \leqslant \pi$



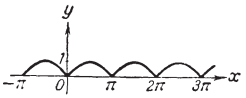
$$y = \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\cos 2x}{1^2} + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \ldots\right)$$

10. $y = x(\pi - x)$ для $0 \leqslant x \leqslant \pi$



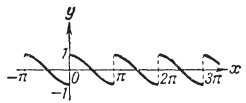
$$y = \frac{8}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3^3}\sin 3x + \frac{1}{5^3}\sin 5x + \ldots\right)$$

11. $y = \sin x$ для $0 \leq x \leq \pi$



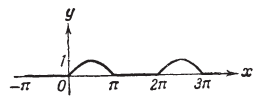
$$y = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \ldots\right)$$

12. $y = \cos x$ для $0 < x < \pi$



$$y = \frac{4}{\pi}\left(\frac{2 \sin 2x}{1 \cdot 3} + \frac{4 \sin 4x}{3 \cdot 5} + \frac{6 \sin 6x}{5 \cdot 7} + \ldots\right)$$

13. $y = \sin x$ для $0 \leq x \leq \pi$,
$y = 0$ для $\pi \leq x \leq 2\pi$



$$y = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \ldots\right)$$

14. $y = \cos ux$ для $-\pi \leq x \leq \pi$

$$y = \frac{2u \sin u\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2u^2} - \frac{\cos x}{u^2 - 1} + \frac{\cos 2x}{u^2 - 4} - \frac{\cos 3x}{u^2 - 9} + \ldots\right]$$

(u — произвольное, нецелое число)

15. $y = \sin ux$ для $-\pi < x < \pi$

$$y = \frac{2 \sin u\pi}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1 - u^2} - \frac{2 \sin 2x}{4 - u^2} + \frac{3 \sin 3x}{9 - u^2} - \ldots\right)$$

(u — произвольное, нецелое число)

16. $y = x \cos x$ для $-\pi < x < \pi$

$$y = -\frac{1}{2}\sin x + \frac{4 \sin 2x}{1 \cdot 3} - \frac{6 \sin 3x}{3 \cdot 5} + \frac{8 \sin 4x}{5 \cdot 7} - \ldots$$

17. $y = -\ln\left(2 \sin \frac{x}{2}\right)$ для $0 < x \leq \pi$

$$y = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x + \ldots$$

18. $y = \ln\left(2 \cos \frac{x}{2}\right)$ для $0 \leq x < \pi$

$$y = \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x - \ldots$$

19. $y = \frac{1}{2}\ln \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$ для $0 < x < \pi$

$$y = \cos x + \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x + \ldots$$

Большое число формул разложения функций в тригонометрические ряды может быть получено из степенных рядов для функций комплексной переменной. Например, из разложения

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots \quad (|z| < 1)$$

следует, если положить

$$z = ae^{i\varphi}$$

и отделить действительную и мнимую части:

$$\left.\begin{aligned} 1 + a\cos\varphi + a^2\cos 2\varphi + \ldots + a^n \cos n\varphi + \ldots &= \frac{1 - a\cos\varphi}{1 - 2a\cos\varphi + a^2}, \\ a\sin\varphi + a^2\sin 2\varphi + \ldots + a^n \sin n\varphi + \ldots &= \frac{a\sin\varphi}{1 - 2a\cos\varphi + a^2}. \end{aligned}\right\} \quad |a| < 1.$$

3. *Приближенный гармонический анализ*

Формулы Бесселя. Приближенное вычисление коэффициентов рядов Фурье базируется на замене интегралов в формулах Эйлера (см. стр. 549) суммами по одной из формул приближенного интегрирования. Наиболее удобной является здесь формула трапеций (см. стр. 390). При помощи нее могут быть получены следующие *формулы Бесселя* для приближенного гармонического анализа. Пусть период T разделен на $2n$ равных частей (рис. 422), абсциссы точек деления $x_k = \frac{kT}{2n}$, ординаты в точках деления $f(x_k) = y_k$ $(k = 0, 1, \ldots, 2n)$. Тогда приближенно

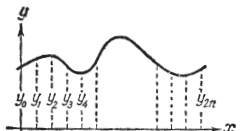


Рис. 422.

$$na_0 = \sum_{k=0}^{2n-1} y_k$$

$$na_m = \sum_{k=0}^{2n-1} y_k \cos\frac{km\pi}{n},$$

$$nb_m = \sum_{k=0}^{2n-1} y_k \sin\frac{km\pi}{n},$$

$$m = 1, 2, \ldots, n$$

(при этом всегда $b_n = 0$).

Если составить тригонометрическую сумму

$$s_r(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{r} a_k \cos k\frac{2\pi x}{T} + \sum_{k=1}^{r} b_k \sin k\frac{2\pi x}{T}, \quad r < n,$$

то эта сумма даст наилучшее приближение в смысле метода наименьших квадратов (см. стр. 573) к функции, заданной ординатами y_k $(k = 1, 2, \ldots, 2n)$, если ее коэффициенты будут вычислены по формулам Бесселя. В случае $r = n$ тригонометрическая сумма

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos\frac{2\pi x}{T} + a_2\cos 2\frac{2\pi x}{T} + \ldots + \frac{a_n}{2}\cos n\frac{2\pi x}{T} + b_1\sin\frac{2\pi x}{T} + b_2\cos 2\frac{2\pi x}{T} + \ldots + b_{n-1}\sin(n-1)\frac{2\pi x}{T},$$

коэффициенты которой вычислены по формулам Бесселя, принимает при $x = x_k$ заданные значения y_k и, следовательно, решает задачу *тригонометрической интерполяции* для периодической функции (см. стр. 573).

Шаблоны и приборы. Для вычислений по формулам Бесселя применяют специальные вычислительные схемы и шаблоны. Ниже даны схемы для гармонического анализа при делении периода на 12 и 24 части.

Если функция $f(x)$ задана графически, то для приближенного гармонического анализа, кроме применения формул Бесселя, могут быть использованы специальные приборы, называемые *гармоническими анализаторами*. После обвода графика заданной функции штифтом анализатора специальные счетчики прибора дают приближенные значения коэффициентов Фурье.

Схемы для приближенного гармонического анализа

Схема 1. *Период T разделен на 12 равных частей.* Ординаты точек деления: $y_0, y_1, \ldots, y_{11}$. Находятся суммы и разности по следующей схеме:

$\pm$	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	s_0	s_1	s_2	s_3	d_1	d_2	d_3
		y_{11}	y_{10}	y_9	y_8	y_7		s_6	s_5	s_4		d_5	d_4	
Суммы	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	δ_1	δ_2	δ_3
Разности		d_1	d_2	d_3	d_4	d_5		τ_0	τ_1	τ_2		γ_1	γ_2	

Дальнейшие вычисления производятся по следующей схеме:

	Члены с косинусами								Члены с синусами					
1	σ_0	σ_1		τ_0		σ_0	$-\sigma_3$	τ_0 τ_2	δ_2				δ_1	δ_3
	σ_2	σ_3												
$1 - 0{,}134$ $(= 0{,}866)$				τ_1						δ_2	γ_1	γ_2		
0,5				τ_2		$-\sigma_2$	σ_1		δ_1					
Суммы		II	I	II	I	II	I	II		II	I	II	I	II
Суммы I+II . . .	$6a_0$*		$6a_1$		$6a_2$		—		$6b_1$		$6b_2$		—	
Разности I—II . .	$6a_6$*		$6a_5$		$6a_4$		$6a_3$		$6b_5$		$6b_4$		$6b_3$	

* Следует иметь в виду, что в формулу интерполяционного тригонометрического многочлена (см. стр. 558) входят не a_0 и a_n, но $\frac{1}{2}a_0$ и $\frac{1}{2}a_n$.

При вычислениях по этой схеме вместо σ, τ, δ и γ должны быть помещены соответствующие величины, умноженные на стоящие в той же строке слева множители (вместо 0,866 написано 1—0,134, так как, употребляя счетную линейку, на 0,134 можно умножить точнее, чем на 0,866).

Схема II. *Период T разделен на 24 части.* Ординаты точек деления $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{23}$ записывают следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccc} y_0 & y_2 & y_4 & y_6 & y_8 & y_{10} & y_{12} \\ & y_{22} & y_{20} & y_{18} & y_{16} & y_{14} & \\ y_3 & y_5 & y_7 & y_9 & y_{11} & y_{13} & y_{15} \\ & y_1 & y_{23} & y_{21} & y_{19} & y_{17} & \end{array}$$

Для каждой группы ординат отдельно ведутся вычисления по данной выше схеме для 12 ординат. Обозначим коэффициенты, полученные от первой группы ординат, через A_k и B_k, а от второй — через A'_k и B'_k. Вычислив $\overline{A}_k$ и $\overline{B}_k$ по формулам:

$$\overline{A}_0 = A_0, \quad \overline{A}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_1 - B'_1), \quad \overline{A}_2 = -B'_2, \quad \overline{A}_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(A'_3 + B'_3),$$

$$\overline{A}_4 = -A_4, \quad \overline{A}_5 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(A'_5 - B'_5),$$

$$\overline{B}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(A'_1 + B'_1), \quad \overline{B}_2 = A_2, \quad \overline{B}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(A'_3 - B'_3),$$

$$\overline{B}_4 = -B_4, \quad \overline{B}_5 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(A'_5 + B'_5), \quad \overline{B}_6 = -A_6$$

(фактически нужно вычислять не $\overline{A}_k$ и $\overline{B}_k$, а их значения, умноженные на 6, см. ниже), находят суммы и разности дающие искомые коэффициенты:

	$6A_0$	$6A_1$	$6A_2$	$6A_3$	$6A_4$	$6A_5$	$6A_6$
	$6\overline{A}_0$	$6\overline{A}_1$	$6\overline{A}_2$	$6\overline{A}_3$	$6\overline{A}_4$	$6\overline{A}_5$	
Суммы	$12a_0$*	$12a_1$	$12a_2$	$12a_3$	$12a_4$	$12a_5$	$12a_6$
Разности	$12a_{12}$*	$12a_{11}$	$12a_{10}$	$12a_9$	$12a_8$	$12a_7$	
	$6\overline{B}_1$	$6\overline{B}_2$	$6\overline{B}_3$	$6\overline{B}_4$	$6\overline{B}_5$	$6\overline{B}_6$	
	$6B_1$	$6B_2$	$6B_3$	$6B_4$	$6B_5$		
Суммы	$12b_1$	$12b_2$	$12b_3$	$12b_4$	$12b_5$	$12b_6$	
Разности	$12b_{11}$	$12b_{10}$	$12b_9$	$12b_8$	$12b_7$		

Синтез. Под *синтезом* понимают обычно вычисление значений периодической функции $f(x)$, заданной своим рядом Фурье. Если в пределах допустимой степени точности можно ограничиться в ряде Фурье первыми шестью гармониками (т. е. считать $a_k = b_k = 0$ при $k > 6$), то

* См. сноску на предыдущей странице.

вычисление значений $y_k = f(x_k)$ в точках $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{11}$, делящих период на 12 равных частей, может быть проведено с помощью данной выше схемы I (стр. 559). Для этого необходимо поставить на место $s_0, s_1, \ldots, s_6$ заданные коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_6$, а на место $d_1, d_2, \ldots, d_5$ — коэффициенты $b_1, \ldots, b_5$ (коэффициент b_6 отбрасывается, так как легко видеть, что соответствующий член ряда никак не влияет на значения функции в рассматриваемых точках) и произвести вычисления согласно схеме до конца. Получающиеся в последних двух строчках таблицы стр. 559 числа (вместо $6a_0, 6a_1, \ldots, 6a_6, 6b_1, \ldots, 6b_5$) обозначим через $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_6, \beta_1, \ldots, \beta_5$. Тогда для получения искомых значений функции остается только произвести сложения и вычитания по схеме:

	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
		β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	
Суммы	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
Разности		y_{11}	y_{10}	y_9	y_8	y_7	

ОТДЕЛ ШЕСТОЙ

ОБРАБОТКА НАБЛЮДЕНИЙ

I. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ТЕОРИИ ОШИБОК

1. Теория вероятностей

Случайные события. Если некоторое событие при заданных условиях может произойти или не произойти, то оно называется *случайным*. Количественной оценкой возможности появления данного случайного события является его *вероятность*.

Определение вероятности. Если при некоторых условиях должно произойти одно из n несовместимых случайных событий, причем нет никаких оснований ожидать, что одно из них предпочтительнее других, то говорят, что эти события имеют одинаковую вероятность, равную $p = \frac{1}{n}$.

Если некоторое случайное событие A появляется как следствие какого-либо из m событий при общем числе n возможных событий (несовместимых и равновероятных), то *вероятностью* события A называют число $p = \frac{m}{n}$. Невозможному событию соответствует вероятность 0, а достоверному — вероятность 1. Вероятность любого события заключается между 0 и 1.

Сложение и умножение вероятностей. Вероятность появления какого-либо одного (безразлично какого) из нескольких несовместимых событий равна *сумме вероятностей* этих событий. Вероятность совместного появления нескольких событий равна *произведению вероятностей* этих событий, причем если события совершаются последовательно, при вычислении вероятности каждого события должно учитываться возможное влияние всех наступивших ранее событий. Например, в ящике находятся 5 черных, 3 белых и 2 красных шара. Вероятность вынуть наудачу белый шар равна 0,3; вероятность вынуть красный шар равна 0,2; вероятность вынуть белый или красный шар равна $0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}5$. Вероятность вынуть последовательно белый и красный шар равна: $0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06$, если первый вынутый шар кладется обратно, и $0{,}3 \cdot \frac{2}{9} = 0{,}067$, если вынутый шар не возвращается.

Повторные испытания. Если производится n независимых испытаний и при каждом из них вероятность события A равна p, то вероятность того, что событие A появится m раз, равна

$$P_{m,\,n} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \qquad (1)$$

Эта вероятность будет наибольшей при $np+p-1 \leqslant m < np+p$. При больших m и n можно получить приближенное значение $p_{m,\,n}$ при помощи формулы Стирлинга (см. стр. 161)

$$p_{m,\,n} \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \tag{2}$$

где $\sigma = \sqrt{np\,(1-p)}$, $x = \dfrac{m-np}{\sigma}$.

При малых значениях p более точное значение дает *формула Пуассона*:

$$p_{m,\,n} \approx \frac{y^m}{m!}\, e^{-y}, \quad \text{где } y = np\,^*. \tag{3}$$

С возрастанием числа испытаний n наивероятнейшая *частота* $\dfrac{m}{n}$ события A будет приближаться к вероятности p этого события. При этом вероятность того, что частота события A будет лежать между

$$p - \frac{a\sigma}{n} \quad \text{и} \quad p + \frac{a\sigma}{n},$$

будет приближаться к пределу, равному

$$\Phi(a) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a e^{-x^2/2}\, dx \qquad (\textit{теорема Лапласа}).$$

Функция $\Phi(a) = \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^a e^{-x^2/2}\, dx$ называется *интегралом вероятности* ** Гаусса (таблицы $\Phi(x)$ см. стр. 81—82).

Примеры 1) Какова вероятность того, что при 400 бросаниях монеты частота появления герба будет отличаться от вероятности $p = {}^1/_2$ меньше чем на ${}^1/_{25}$, т. е. что число появлений герба будет заключено между 216 и 184? Так как $\sigma = \sqrt{400 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 10$ и $\dfrac{a\sigma}{n} = \dfrac{1}{25}$, то $a = \dfrac{400}{10 \cdot 25} = 1{,}6$. Искомая вероятность по теореме Лапласа $\approx \Phi(1{,}6) = 0{,}8904$.

2) Пусть вероятность получить бракованное изделие равна 0,01. Какова вероятность наличия не более трех бракованных изделий в партии из 100 штук? Искомая вероятность равна $p = p_{0,\,100} + p_{1,\,100} + p_{2,\,100} + p_{3,\,100}$. По формуле Пуассона ($y = 1$) получим $p \approx \dfrac{1}{e}\left(1 + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6}\right) = 0{,}9810$.

Применение интеграла Гаусса в данном примере дает слишком грубый результат ($p = 0{,}928$). Немногим лучший результат ($p = 0{,}938$) получается с помощью формулы (2). Точное значение $p = 0{,}9816$.

---

* При p, близких к единице, также применяется формула Пуассона путем рассмотрения события, противоположного A («не A»), имеющего малую вероятность $q = 1 - p$.

** Часто интегралом вероятности называют функцию

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt = \Phi(x\sqrt{2}).$$

Закон больших чисел. Следствие теоремы Лапласа: С вероятностью, сколь угодно близкой к 1, можно ожидать, что при достаточно большом числе испытаний частота события A будет сколь угодно мало отличаться от его вероятности (*закон больших чисел — теорема Бернулли*).

Случайные величины. *Случайной величиной* называется переменная величина, значения которой зависят от случая. Примеры случайных величин: число попаданий в мишень при данном числе выстрелов, число очков, выпадающее при бросании игральной кости, скорость молекулы газа.

Для характеристики случайной величины нужно знать совокупность возможных значений этой величины, а также вероятности, с которыми эти значения могут появляться. Эти данные образуют *закон распределения* случайной величины. Если случайная переменная величина A может принимать любые значения, находящиеся в некотором интервале (a, b) (такая случайная величина называется *непрерывной*), то вероятность того, что величина A примет какое-либо определенное значение x, равна нулю, так как число возможных случаев бесконечно. Считая, что для каждого малого участка, находящегося на интервале (a, b) допустимых значений переменной A, вероятность попадания A на этот участок пропорциональна его длине, можно охарактеризовать случайную величину A, указав вероятность $\psi(x)\,dx$ того, что $x < A < x + dx$. Функция $\psi(x)$ называется *плотностью распределения вероятности* случайной величины A. Из теоремы о сложении вероятностей следует, что вероятность попадания A в интервал от x_0 до x_1 равна $\int\limits_{x_0}^{x_1} \psi(x)\,dx$. Так как случайная переменная величина всегда принимает какое-либо значение, то $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\,dx = 1$.

Среднее значение случайной величины. Если случайная величина x может принимать значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с вероятностями соответственно $p_1, p_2, \ldots, p_n$, то *средним значением* величины x (ее *математическим ожиданием*) называется

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i.$$

Для непрерывной случайной величины y с плотностью распределения вероятности $\psi(y)$ математическое ожидание равно

$$\bar{y} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\psi(y)\,dy.$$

Примеры: 1) В лотерее из 1000 билетов имеется один выигрыш в 1000 руб., 10 выигрышей по 100 руб. и 100 выигрышей по 20 руб. Закон распределения случайной величины a выигрыша по одному билету (в рублях) дается таблицей:

a_i	1000	100	20	0
p_i	0,001	0,01	0,1	0,889

Математическое ожидание a равно $\bar{a} = 1000 \cdot 0{,}001 + 100 \cdot 0{,}01 + 20 \cdot 0{,}1 = 4$ рубля.

2) Закон распределения Максвелла (в кинетической теории газов): $\psi(v) = 4\sqrt{\frac{k^3}{\pi}}\, v^2 e^{-kv^2}$; вероятность того, что скорость молекулы однородного газа, находящегося в тепловом равновесии, заключена между v и $v+dv$, равна $\psi(v)\,dv$, (k — положительная постоянная). Среднее значение скорости равно $\bar{v} = \int\limits_0^\infty v\psi(v)\,dv = \frac{2}{\sqrt{k\pi}}$ (см. стр. 407).

Дисперсия. *Дисперсией* случайной величины называется среднее значение квадрата отклонения случайной величины от ее среднего значения.

Пример: Для данного выше закона распределения Максвелла дисперсия равна

$$\overline{(v-\bar{v})^2} = \int\limits_0^\infty (v-\bar{v})^2\,\psi(v)\,dv = \int\limits_0^\infty v^2\psi(v)\,dv - (\bar{v})^2 = \frac{3}{2k} - \frac{4}{\pi k} = \frac{0{,}227}{k}$$

Полученное в данном примере равенство $\overline{(v-\bar{v})^2} = \overline{v^2} - (\bar{v})^2$ является тождеством и обычно используется при вычислении дисперсии.

2. Теория ошибок

Случайные ошибки. Полученные из опыта величины неизбежно содержат погрешности, обусловленные самыми разнообразными причинами. Среди них следует различать погрешности *систематические* и *случайные*. Систематические ошибки обусловливаются причинами, действующими вполне определенным образом, и могут быть всегда устранены или достаточно точно учтены (например: ошибки, вносимые неправильно проградуированными приборами, вносимые внешними условиями опыта и т. п.). Случайные ошибки вызываются, как правило, весьма большим числом отдельных причин, действующих в каждом отдельном измерении различным образом. Исключить совершенно эти ошибки невозможно; учесть же их можно только *в среднем*, для чего необходимо знать законы, которым подчиняются случайные ошибки. Будем обозначать измеряемую величину через A, а случайную ошибку при измерении через x. Так как ошибка x может принимать любые значения, то она является непрерывной случайной величиной, которая вполне характеризуется своим законом распределения (см. стр. 564). Плотность распределения вероятности $\varphi(x)$ случайной ошибки в подавляющем большинстве случаев, как показывает опыт, должна обладать следующими свойствами: 1) $\varphi(x)$ — функция *четная*: $\varphi(-x) = \varphi(x)$, т. е. ошибки разного знака равновероятны. 2) $\varphi(x)$ для $x > 0$ является *монотонно убывающей функцией*, т. е. ошибки, бо́льшие по абсолютной величине, менее вероятны. 3) Математическое ожидание абсолютной величины ошибки, т. е. $2\int\limits_0^\infty x\varphi(x)\,dx$, есть величина конечная. Определенные законы распределения можно получить, добавляя еще какие-либо условия.

Нормальный закон распределения. Мера точности. Наиболее простым и по большей части достаточно точно отображающим действительность является так называемый

нормальный закон распределения ошибок:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}.$$

Этот закон распределения может быть получен из различных теоретических предпосылок, в частности, из требования, чтобы наиболее вероятным значением неизвестной величины, для которой непосредственным измерением получен ряд значений с одинаковой степенью точности, являлось среднее арифметическое этих значений. Величина σ^2 является *параметром* нормального закона: она может иметь любые значения. Так как $\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\,dx = 0$ и $\bar{x}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\varphi(x)\,dx = \sigma^2$, то $\sigma^2 = \bar{x}^2 - (\bar{x})^2$ является дисперсией ошибки x. С увеличением σ^2 уменьшается максимум $\varphi(x)$, соответствующий $x = 0$ и равный $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. Так как при этом пло-

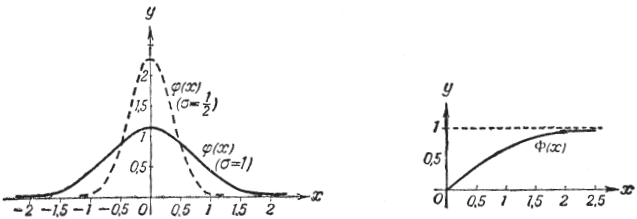


Рис. 423.

щадь под графиком $\varphi(x)$ (рис. 423) остается неизменной (= 1, см. стр. 564), то, следовательно, увеличению дисперсии соответствует увеличение вероятности бо́льших ошибок. Вероятность того, что ошибка x по абсолютной величине не превышает a, в случае нормального закона, равна

$$\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{a/\sigma} e^{-t^2/2}\,dt.$$

Величина $X = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$, являющаяся линейной комбинацией случайных величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, с нормальным законом распределения и дисперсиями соответственно $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$, подчиняется нормальному закону с дисперсией σ^2:

$$\sigma^2 = \lambda_1^2\sigma_1^2 + \lambda_2^2\sigma_2^2 + \ldots + \lambda_n^2\sigma_n^2.$$

Кроме дисперсии σ^2, для характеристики нормального закона распределения применяются следующие величины:

1) *Простая средняя ошибка* η, представляющая собой математическое ожидание абсолютной величины ошибки:

$$\eta = \overline{|x|} = 2\int_0^\infty x\varphi(x)\,dx.$$

2) *Средняя квадратическая ошибка*, или *стандарт* σ, равная корню квадратному из дисперсии.

3) *Вероятная ошибка* r — такая величина, что вероятность ошибки, не превосходящей r по абсолютной величине, равна $^1/_2$:

$$\int_{-r}^{+r}\varphi(x)\,dx = \Phi\left(\frac{r}{\sigma}\right) = \frac{1}{2}.$$

4) *Мера точности*: $h = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sigma}$. Все эти величины связаны между собой следующими соотношениями *:

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{\pi}h} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma = \frac{r}{\rho\sqrt{\pi}},\quad \sigma = \frac{1}{\sqrt{2}h} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\eta = \frac{r}{\sqrt{2}\rho},$$

$$r = \frac{\rho}{h} = \rho\sqrt{2}\sigma = \rho\sqrt{\pi}\eta,\qquad h = \frac{1}{\sqrt{\pi}\eta} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} = \frac{\rho}{r},$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071 = \frac{1}{1{,}4142},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0{,}5642,\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0{,}7979 = \frac{1}{1{,}2533},\right.$$

$$\left.\rho = 0{,}4769,\ \rho\sqrt{2} = 0{,}6745 = \frac{1}{1{,}4826},\ \rho\sqrt{\pi} = 0{,}8454 = \frac{1}{1{,}1829}\right).$$

Определение дисперсии по опытным данным. Если для какой-либо величины A непосредственным измерением получено n значений a_i с одинаковой степенью точности и если ошибки величины A подчинены нормальному закону распределения, то наиболее вероятным значением A будет *среднее арифметическое*

$$a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Обозначим через ε_i отклонение наблюдаемого значения a_i (для каждого наблюдения) величины A от среднего арифметического a: $\varepsilon_i = a_i - a$.

Для определения дисперсии нормального закона распределения ошибок в этом случае пользуются формулой

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2}{n-1}\ **$$

---

* Величина ρ определяется из уравнения $\Phi(\rho\sqrt{2}) = \dfrac{1}{2}$.

** В теории вероятностей и математической статистике для обозначения суммирования часто пользуются обозначениями Гаусса: $[\varepsilon\varepsilon]$ вместо $\sum\varepsilon_i^2$, $[ab]$ вместо $\sum a_i b_i$ и т. п.

или определяют σ по простой средней ошибке, которая находится по формуле

$$\eta = \frac{\sum |\varepsilon_i|}{\sqrt{n(n-1)}} \approx \frac{\sum |\varepsilon_i|}{n - \frac{1}{2}}.$$

Если значения σ, полученные двумя способами, будут значительно отличаться друг от друга, то это будет показывать неприменимость в данном случае нормального закона распределения.

Если отдельные значения a_i величины A получены с различной степенью точности, характеризуемой средней квадратической ошибкой σ_i, то наиболее вероятным значением величины A является *среднее взвешенное*

$$a = \frac{w_1 a_1 + w_2 a_2 + \ldots + w_n a_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n},$$

где *веса* w_i — некоторые числа, обратно пропорциональные квадратам соответствующих средних квадратических ошибок. Средняя квадратическая ошибка отдельного значения a_i с весом w_i равна

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \varepsilon_i^2}{(n-1) w_i}},$$

где ε_i — отклонение a_i от среднего взвешенного. В соответствии с формулой для дисперсии линейной комбинации средние квадратические ошибки среднего арифметического и среднего взвешенного определяются по формулам:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2}{n(n-1)}} \quad \text{и} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \varepsilon_i^2}{(n-1)(w_1 + w_2 + \ldots + w_n)}}.$$

Пример: Непосредственным измерением были по пять раз определены размеры внутреннего (d) и внешнего (D) диаметров полого цилиндрического сосуда. Результаты измерения даны в следующей таблице.

№ наблюдения (i)	d	D	ε_{d_i}	$\varepsilon^2_{d_i}$	ε_{D_i}	$\varepsilon^2_{D_i}$
1	17,3	22,7	0,06	0,0036	−0,08	0,0064
2	17,0	22,8	−0,24	0,0576	0,02	0,0004
3	17,3	23,0	0,06	0,0036	0,22	0,0484
4	17,4	22,8	0,16	0,0256	0,02	0,0004
5	17,2	22,6	−0,04	0,0016	−0,18	0,0324
$\sum_i$	86,2	113,9	0,56 *	0,0920	0,52 *	0,0880

* В этом столбцу вычислена сумма абсолютных величин.

Найдя средние арифметические $d=17{,}24$ и $D=22{,}78$, подсчитываем отклонения ε_{d_i} и ε_{D_i}. По данным выше формулам находим для отдельного измерения d:

$$\sigma=\sqrt{\frac{0{,}0920}{4}}=0{,}152 \text{ или } \eta=\frac{0{,}56}{\sqrt{20}}=0{,}125 \text{ (что дает } \sigma=0{,}157);$$

для отдельного измерения D:

$$\sigma=\sqrt{\frac{0{,}0880}{4}}=0{,}148 \text{ или } \eta=\frac{0{,}52}{\sqrt{20}}=0{,}116 \text{ (что дает } \sigma=0{,}146).$$

Совпадение полученных двумя способами значений σ вполне удовлетворительно. Для средних арифметических:

$$\sigma_d=\frac{0{,}152}{\sqrt{5}}=0{,}068,\quad \sigma_D=\frac{0{,}148}{\sqrt{5}}=0{,}066.$$

Для толщины стенок сосуда $m=\frac{1}{2}(D-d)=2{,}77$ средняя квадратическая ошибка: $\sigma_m=\sqrt{\frac{1}{4}\sigma_d^2+\frac{1}{4}\sigma_D^2}=0{,}047$.

Метод наименьших квадратов. Если из опыта определяются значения f_i некоторых функций

$$\varphi_i(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

неизвестных величин $x_1, \ldots, x_n$, то для определения этих величин необходимо решить систему *условных уравнений*

$$\varphi_i(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)-f_i=0\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Эта система, вообще говоря, несовместна (при $m>n$), и для неизвестных величин ищутся наиболее вероятные значения. Если ошибки величин $f_1, \ldots, f_n$ имеют нормальный закон распределения (что обычно и допускают), то для наиболее вероятной системы значений неизвестных сумма квадратов отклонений $\varepsilon_i=\varphi_i-f_i$ будет наименьшей. Если условные уравнения линейны:

$$\begin{aligned}
a_1x_1+b_1x_2+\ldots+l_1x_n&=f_1,\\
a_2x_1+b_2x_2+\ldots+l_2x_n&=f_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_mx_1+b_mx_2+\ldots+l_mx_n&=f_m,
\end{aligned}$$

то требование минимума (см. стр. 321) суммы квадратов отклонений приводит к системе линейных *нормальных уравнений* *:

$$\begin{aligned}
[aa]\,x_1+[ab]\,x_2+\ldots+[al]\,x_n&=[af],\\
[ba]\,x_1+[bb]\,x_2+\ldots+[bl]\,x_n&=[bf],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
[la]\,x_1+[lb]\,x_2+\ldots+[ll]\,x_n&=[lf].
\end{aligned}$$

Для получения k-го нормального уравнения необходимо каждое условное уравнение умножить на коэффициент при x_k и все уравнения сложить.

* В обозначениях Гаусса, см. сноску на стр. 567.

В случае нелинейных зависимостей обычно находят грубо приближенно значения $x_1^0, \ldots, x_n^0$ искомых величин $x_1, \ldots, x_n$ и разлагают $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$ в ряд по степеням $\xi_1 = x_1 - x_1^0, \ldots, \xi_n = x_n - x_n^0$. Отбрасывая члены выше первого порядка, получают линейные условные уравнения, при помощи которых определяют наиболее вероятные значения поправок ξ_i.

Указанный метод годится для случая, когда все значения имеют одинаковую точность. В противном случае каждое условное уравнение должно быть предварительно умножено на вес, обратно пропорциональный средней квадратической погрешности соответствующего значения f_i.

Пример: Измерения электрического сопротивления R медного стержня при разной температуре ($t°$ по Цельсию) дали результаты, помещенные в следующей таблице (первые два столбца):

t	R	t^2	tR	$R_{\text{вычисл.}}$
19,1	76,30	364,8	1457,3	76,26
25,0	77,80	625,0	1945,0	77,96
30,1	79,75	906,0	2400,5	79,43
36,0	80,80	1296,0	2908,8	81,13
40,0	82,35	1600,0	3294,0	82,28
45,1	83,90	2034,0	3783,9	83,76
50,0	85,10	2500,0	4255,0	85,16
$\sum$ 245,3	566,00	9325,8	20044,5	

Если искать зависимость R от t в виде $R = a + bt$, то для определения постоянных a и b получим семь условных уравнений вида

$$R_i = a + bt_i,$$

где t_i и R_i — соответствующие значения t и R.

Нормальные уравнения будут:

$$7a + [t]\, b = [R], \quad [t]\, a + [t^2]\, b = [tR]$$

или

$$7a + 245{,}3b = 566{,}0, \quad 245{,}3a + 9325{,}8b = 20\,044{,}5.$$

Решая их, получим $a = 70{,}76$ и $b = 0{,}288$. Значения R, вычисленные по формуле $R = 70{,}76 + 0{,}288\, t$, даны в последнем столбце таблицы.

II. ЭМПИРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ И ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

1. Приближенное изображение функциональной зависимости

Постановка задачи. Во многих случаях бывает необходимо подобрать для функции, заданной только таблицей или графиком, аналитическое выражение, приближенно изображающее эту функцию. Подобная задача может возникать и для функции, заданной формулой, если эта формула оказывается слишком сложной или неподходящей для требуемых целей (например, функция должна быть проинтегрирована, а интеграл от нее не выражается через элементарные функции). Формулы, изображающие функциональную зависимость, полученную из опыта в виде таблицы или графика, называются *эмпирическими формулами*. Обычно для приближенного изображения заданной функции $f(x)$ выбирают *аппроксимирующую* (приближающую) функцию $\varphi(x)$ из функций определенного вида, например, ищут $\varphi(x)$ в виде многочлена

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

или в виде

$$\varphi(x) = Ae^{rx} + Be^{sx} + \ldots \text{ и т. п.},$$

требуя, чтобы функция $\varphi(x)$ наиболее близко приближалась к $f(x)$ на некотором определенном интервале $(a \leq x \leq b)$. В зависимости от того способа, которым оценивается близость функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, будет получаться то или другое наилучшее приближение.

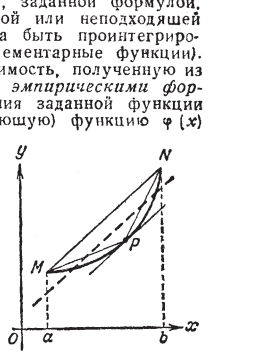


Рис. 424.

Равномерное приближение. Теоретически целесообразно требовать для наилучшего приближения, чтобы максимум величины $|f(x) - \varphi(x)|$ на том интервале $a \leq x \leq b$, на котором нам нужно получить приближенное изображение $f(x)$, был бы наименьшим (по сравнению с другим выбором $\varphi(x)$). Однако не существует методов эффективного получения таких *равномерных приближений*, кроме отдельных частных случаев. Так, например, если на интервале $a < x < b$ у функции $f(x)$ существует вторая производная, которая сохраняет знак, линейная функция наилучшего равномерного приближения на этом интервале находится следующим образом (рис. 424). На графике функции $y = f(x)$ находится точка P, касательная в которой параллельна хорде MN. Прямая, соединяющая середины хорд MP и PN, является графиком искомой линейной функции.

Равномерные приближения применяются главным образом в теоретических рассмотрениях. Теория таких приближений была в значительной степени разработана П. Л. Чебышевым.

Приближение по методу наименьших квадратов. Наиболее употребительным является такое приближение $\varphi(x)$, для которого наименьшее значение имеет величина

$$M=\int_a^b [f(x)-\varphi(x)]^2\,dx.$$

Потребовав обращения в нуль частных производных от M по параметрам, определяющим функцию $\varphi(x)$ (см. стр. 321), получают уравнения, позволяющие найти наилучшие (в указанном смысле) значения этих параметров. Величина $\delta=\sqrt{M:(b-a)}$ называется в этом случае *средней квадратической погрешностью*.

Если функция $\varphi(x)$ ищется в виде линейной комбинации некоторых заданных функций

$$\varphi(x)=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+\ldots+a_n\varphi_n(x)$$

(например, $\varphi(x)$ – многочлен, если $\varphi_0=1$, $\varphi_1=x$, ..., $\varphi_n=x^n$, или тригонометрический многочлен, если $\varphi_0=1$, $\varphi_1=\cos x$, $\varphi_2=\sin x$, ..., $\varphi_{2n-1}=\cos nx$, $\varphi_{2n}=\sin nx$), то для определения a_0, a_1, ..., a_n получается система линейных уравнений

$$\frac{1}{2}\frac{\partial M}{\partial a_k}=\sum_{i=0}^{n} a_i\int_a^b \varphi_i(x)\,\varphi_k(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,\varphi_k(x)\,dx=0$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Эта система принимает особенно простой вид, если функции $\varphi_i(x)$ обладают свойством *ортогональности* на интервале $(a,\ b)$, т. е.

$$\int_a^b \varphi_i(x)\,\varphi_k(x)\,dx=0 \quad \text{при } i\neq k\ *.$$

В этом случае

$$a_k\int_a^b [\varphi_k(x)]^2\,dx=\int_a^b f(x)\,\varphi_k(x)\,dx \quad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$$

(ср. формулы Эйлера, стр. 549). В связи с этим упрощением, если требуется найти аппроксимирующий полином $b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n$, удобнее преобразовать заданный интервал $(a,\ b)$ в $(-1,\ +1)$ подстановкой $x=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t$ и искать этот полином в виде:

$$\varphi(x)=a_0P_0+a_1P_1+\ldots+a_nP_n,$$

где $P_k(t)$ – полиномы Лежандра.

---

* Два примера ортогональных систем функций:

1) $1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \ldots;\ \sin x,\ \ldots,\ \sin nx,\ \ldots$ на интервале $(0,\ 2\pi)$.

2) Полиномы Лежандра $P_i(x)$ на интервале $(-1,\ +1)$ (см. стр. 467).

Пример: Найти наилучшее приближение для $y = \sin x$ в виде многочлена 2-й степени на интервале $0 \leqslant x \leqslant \pi$. Заменяя независимую переменную $x = \frac{\pi}{2}(t+1)$, переводим интервал $(0, \pi)$ в $(-1, +1)$. Ищем приближение в виде

$$\varphi = a_0 + a_1 P_1(t) + a_2 P_2(t).$$

Тогда (см. стр. 366):

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \sin\frac{\pi}{2}(t+1)\,dt = \frac{2}{\pi}, \quad a_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{+1} t \sin\frac{\pi}{2}(t+1)\,dt = 0,$$

$$a_2 = \frac{5}{2}\int_{-1}^{+1} \left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2}(t+1)\,dt = \frac{10}{\pi}\left(1 - \frac{12}{\pi^2}\right).$$

Итак

$$\sin x \approx \frac{2}{\pi} + \frac{10}{\pi}\left(1 - \frac{12}{\pi^2}\right)\left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right) \approx 0{,}980 - 0{,}418\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2.$$

Приближение в отдельных точках. Во многих случаях, в особенности если функция $f(x)$ задана графиком или таблицей, для оценки степени приближения рассматривают разности $f(x) - \varphi(x)$ не для всех точек интервала (a, b), на котором требуется приближенно изобразить функцию $f(x)$, но только для отдельных, заранее выбранных точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Функция $\varphi(x)$ считается наилучшим приближением к $f(x)$ (по методу наименьших квадратов), если для нее $S = \sum_{i=0}^{n} [f(x_i) - \varphi(x_i)]^2$ имеет наименьшее значение в сравнении с другими функциями, из числа которых выбирается искомое приближение *. Если $\varphi(x)$ вполне определяется параметрами $k, l, m, \ldots$, то наилучшие (в указанном смысле) значения этих параметров найдутся решением системы уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial k} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial l} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial m} = 0, \ldots$$

Если число параметров, определяющих функцию $\varphi(x)$, равно числу выбранных точек $(n+1)$, то, вообще говоря, возможно подобрать $\varphi(x)$ так, чтобы $\varphi(x_i) = f(x_i)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$, решая эту систему $n+1$ уравнений с $n+1$ неизвестными. Тогда функция $\varphi(x)$ называется *интерполирующей* функцией, а процесс нахождения и вычисления значений $\varphi(x)$ — *интерполяцией*.

Наиболее распространенной является *параболическая интерполяция*, когда в качестве интерполирующей функции берется многочлен $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$. Для периодических функций применяется *тригонометрическая интерполяция* — см. стр. 559.

Приближение по методу средних — см. стр. 578.

---

* Как и выше, можно определить также наилучшее приближение как такое, для которого максимум $|f(x_i) - \varphi(x_i)|$ будет наименьшим; однако нахождение приближения по этому способу практически затруднительно.

2. *Параболическая интерполяция*

Общий случай. Какова бы ни была заданная функция $f(x)$ и как бы ни были выбраны *узлы интерполяции* $x_0, x_1, \ldots, x_n$, всегда существует единственный многочлен n-й степени $\varphi_n(x)$, принимающий в этих точках те же значения, что и $f(x)$: $\varphi(x_i) = f(x_i)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$. Для нахождения интерполяционного многочлена может служить *формула Лагранжа:*

$$\varphi_n(x) = L_0(x) f_0 + L_1(x) f_1 + \ldots + L_n(x) f_n,$$

где

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

и

$$f_i = f(x_i).$$

Если требуется вычислить значение $\varphi_n(x)$ при каком-либо определенном x, может быть использована следующая схема («крест на крест»), особенно удобная при применении счетной машины:

$$\begin{array}{llll}
x_0 - x & f_0 & & \\
x_1 - x & f_1 & (f_0, f_1) & \\
x_2 - x & f_2 & (f_0, f_2) & (f_0, f_1, f_2) \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
x_n - x & f_n & (f_0, f_n) & (f_0, f_1, f_n)\ldots(f_0, f_1, \ldots, f_n).
\end{array}$$

Каждый символ $(f_0, f_1, \ldots, f_k)$ обозначает значение в точке x интерполяционного многочлена, построенного по узлам $x_0, x_1, \ldots, x_k$. Эти числа вычисляются, столбец за столбцом, следующим образом. Числа столбца (f_0, f_k) получаются по формуле

$$(f_0, f_k) = \frac{(x_0 - x) f_k - (x_k - x) f_0}{(x_0 - x) - (x_k - x)}.$$

Каждый следующий столбец получается из предыдущего по такой же схеме, например:

$$(f_0, f_1, f_k) = \frac{(x_1 - x)(f_0, f_k) - (x_k - x)(f_0, f_1)}{(x_1 - x) - (x_k - x)} \quad \text{и т. д.}$$

Порядок расположения узлов может быть выбран произвольно.

Пример: Требуется вычислить $\sin 50°$, используя пятизначные значения синусов 0°, 30°, 45°, 60°, 90°. Схема «крест на крест» будет в этом случае выглядеть следующим образом:

−50	0,00000					
−20	0,50000	0,83333				
− 5	0,70711	0,78568	0,7	6980		
10	0,86603	0,72169	0,7	5890	66	17
40	1,00000	0,55556	0,7	4074	66	57 04

Если первые цифры в каком-либо столбце оказываются одинаковыми (в приведенном примере они отделены), их можно не вводить в дальнейшие вычисления. Так, например, в последнем столбце получаются последние цифры результата:

$$\frac{10 \cdot 57 - 40 \cdot 17}{10 - 40} = 04.$$

Окончательно, $\sin 50° = 0{,}76604$.

Равноотстоящие узлы. Таблицы разностей. Очень часто встречается случай, когда интерполяционные узлы находятся на равном расстоянии. Постоянная величина $h = x_{i+1} - x_i$ в этом случае называется *шагом* заданной таблицы значений $f(x)$: $x_k = x_0 + hk$. (Это обозначение сохраняется и при $k < 0$.)

Первые разности функции по отношению данному шагу h определяются формулами:

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x), \quad \Delta f_i = f_{i+1} - f_i.$$

Разности первых разностей образуют *разности 2-го порядка* (или вторые разности):

$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x); \quad \Delta^2 f_i = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i.$$

Так же определяются и разности более высоких порядков. Разности могут быть выражены через заданные значения функции:

$$\Delta^k f_0 = f_k - kf_{k-1} + \frac{k(k-1)}{2} f_{k-2} - \ldots \pm f_0$$

[символически: $\Delta^k f_0 = (E-1)^k f_0$, если обозначить $E^i f_0 = f_i$]. Для целей интерполяции по заданным значениям функции составляется *таблица разностей* по следующей схеме:

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	
...	...					
x_{-2}	f_{-2}	Δf_{-3}	$\Delta^2 f_{-3}$		$\Delta^4 f_{-4}$	N_{II}
		Δf_{-2}		$\Delta^3 f_{-3}$		
x_{-1}	f_{-1}		$\Delta^2 f_{-2}$		$\Delta^4 f_{-3}$	
		Δf_{-1}		$\Delta^3 f_{-2}$		
x_0	f_0		$\Delta^2 f_{-1}$		$\Delta^4 f_{-2}$	S
		Δf_0		$\Delta^3 f_{-1}$		B
x_1	f_1		$\Delta^2 f_0$		$\Delta^4 f_{-1}$	
		Δf_1		$\Delta^3 f_0$		
x_2	f_2		$\Delta^2 f_1$		$\Delta^4 f_0$	N_I
		Δf_2		$\Delta^3 f_1$		
x_3	f_3		$\Delta^2 f_2$			
...	...					

В этой таблице всякое число (кроме находящихся в первых двух столбцах) является разностью двух чисел предыдущего столбца стоящих на полстроки ниже и на полстроки выше рассматриваемого * При составлении таблицы разностей следует иметь в виду, что наличие в первом столбце ошибок, не превышающих ε по абсолютной величине, может привести к ошибкам, доходящим до 2ε во втором, 4ε в третьем, $2^{m-1}\varepsilon$ в m-м столбце. Поэтому даже незначительные погрешности (например, погрешности округления) в значениях функции могут сильно повлиять на разности высших порядков. Вычисления разностей следует прекращать, если все числа некоторого столбца оказываются почти равными между собой («разности постоянны»). Разности m-го порядка будут постоянными для многочлена m-й степени. Поэтому приблизительное их постоянство показывает, что данная функция может быть с достаточной точностью изображена многочленом m-й степени. (Для таблицы на стр. 577 $m = 3$; четвертые разности излишни.)

* Пример такой схемы см. стр. 577.

Разностные интерполяционные формулы. При помощи разностей интерполяционный многочлен может быть найден по одной из следующих формул (введено обозначение $u = \frac{x - x_0}{h}$);

$$N_{\mathrm{I}}(x) = f_0 + u\Delta f_0 + \frac{u(u-1)}{2}\Delta^2 f_0 + \ldots + \frac{u(u-1)\ldots(u-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

$$N_{\mathrm{II}}(x) = f_0 + u\Delta f_{-1} + \frac{u(u+1)}{2}\Delta^2 f_{-2} + \ldots + \frac{u(u+1)\ldots(u+n-1)}{n!}\Delta^n f_{-n}$$

(формулы Ньютона).

$$S(x) = f_0 + u\,\frac{\Delta f_0 + \Delta f_{-1}}{2} + \frac{u^2}{2}\Delta^2 f_{-1} + \frac{u(u^2-1)}{3!}\,\frac{\Delta^3 f_{-2} + \Delta^3 f_{-1}}{2} + \frac{u^2(u^2-1)}{4!}\Delta^4 f_{-2} + \ldots + \frac{u^2(u^2-1)\ldots[u^2-(n-1)^2]}{(2n)!}\Delta^{2n} f_{-n}$$

(формула Стирлинга),

$$B(x) = f_0 + u\Delta f_0 + \frac{u(u-1)}{2}\,\frac{\Delta^2 f_{-1} + \Delta^2 f_0}{2} + \frac{u(u-1)(u-0{,}5)}{3!}\Delta^3 f_{-1} + \frac{u(u^2-1)(u-2)}{4!}\,\frac{\Delta^4 f_{-2} + \Delta^4 f_{-1}}{2} + \ldots + \frac{(u-0{,}5)\,u\,(u^2-1)\ldots[u^2-(n-1)^2](u-n)}{(2n+1)!}\Delta^{2n+1} f_{-1}$$

(формула Бесселя).

Формулы Ньютона дают интерполяционный многочлен, если x_0 является соответственно первым или последним из интерполяционных узлов, тогда как для формул Бесселя и Стирлинга x_0 является средним или одним из средних интерполяционных узлов. Разности, используемые при вычислениях по той или иной формуле, отмечены на схеме, помещенной на стр. 575. Интерполяционные формулы применяются главным образом для вычисления промежуточных значений функции, заданной таблицей. Надлежащим выбором x_0 можно всегда сделать $|u| < 1$. При $|u| \leqslant 0{,}25$ наиболее целесообразно применять формулу Стирлинга, при $0{,}25 \leqslant u \leqslant 0{,}75$ — формулу Бесселя. Формулы Ньютона употребляются при невозможности использования формул S или B, т. е. когда x лежит вблизи начала или конца таблицы.

Пример: Вычислить для $x = 22$ значение функции $f(x)$, заданной таблицей на стр. 577 *.

Как уже было замечено, здесь следует ограничиться третьими разностями. Если взять $x_0 = 20$, то $u = \frac{22-20}{5} = 0{,}4$.

По формуле Бесселя:

$$f(22) = 25{,}34 + 0{,}4 \cdot 9{,}82 - \frac{0{,}4\cdot 0{,}6}{2}\,\frac{1{,}72 + 1{,}99}{2} + \frac{0{,}4\cdot 0{,}6\cdot 0{,}1}{6}\,0{,}27 = 29{,}05.$$

По формуле Стирлинга:

$$f(22) = 25{,}34 + 0{,}4\,\frac{8{,}10 + 9{,}82}{2} + \frac{0{,}16}{2}\,1{,}72 - \frac{0{,}4\cdot 0{,}84}{6}\cdot\frac{0{,}34 + 0{,}27}{2} = 29{,}04.$$

По первой формуле Ньютона:

$$f(22) = 25{,}34 + 0{,}4\cdot 9{,}82 - \frac{0{,}4\cdot 0{,}6}{2}\,1{,}99 + \frac{0{,}4\cdot 0{,}6\cdot 1{,}6}{6}\,0{,}32 = 29{,}05.$$

Если бы мы ограничились вторыми разностями, то получили бы по формуле B 29,05, по формуле S 29,06 и по формуле N 29,03.

* В таблице разностей обычно не ставят знака дробности, выражая разности в единицах разряда последней значащей цифры.

x	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
0	0				
		487			
5	4,87		78		
		565		29	
10	10,52		107		2
		672		31	
15	17,24		138		3
		810		34	
20	25,34		172		−7
		982		27	
25	35,16		199		5
		1181		32	
30	46,97		231		1
		1412		33	
35	61,09		264		
		1676			
40	77,85				

Погрешность интерполяции. Если $f(x)$ задана аналитически и имеет в рассматриваемом интервале достаточное число непрерывных производных, то погрешность, получающаяся от замены $f(x)$ интерполяционным многочленом по формуле Лагранжа, равна

$$f(x) - \varphi_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n),$$

где ξ есть некоторое промежуточное значение между наибольшим наименьшим из чисел x, x_0, x_1, ..., x_n. Для разностных формул:

$$f(x) - N_{\mathrm{I}}(x) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \cdot u(u-1)\ldots(u-n),$$

$$f(x) - N_{\mathrm{II}}(x) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \cdot u(u+1)\ldots(u+n),$$

$$f(x) - S(x) = \frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(\xi) \cdot u(u^2-1)\ldots(u^2-n^2),$$

$$f(x) - B(x) = \frac{h^{2n+2}}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi) \cdot u(u^2-1)\ldots(u^2-n^2)(u-n-1),$$

(Число членов в $N_{\mathrm{I}}(x)$, $N_{\mathrm{II}}(x)$, $S(x)$ и $B(x)$ предполагается то же, что и на стр. 576; ξ – некоторое промежуточное значение между интерполяционными узлами, разное в различных формулах: ξ зависит от x.)

Приложения интерполяционных формул. Формулы интерполирования могут быть использованы для приближенного интегрирования и дифференцирования. Для этой цели заданную функцию $f(x)$ заменяют интерполяционным многочленом $\varphi(x)$ и выполняют над ним соответствующие операции. Так, например, применяя интерполяционную формулу Стирлинга, можно получить следующую формулу для приближенного значения производной от $f(x)$ при $x = x_0$

$$\left[\frac{df}{dx}\right]_{x=x_0} = \frac{1}{h}\left[\frac{\Delta f_0 + \Delta f_{-1}}{2} - \frac{1}{6}\,\frac{\Delta^3 f_{-1} + \Delta^3 f_{-2}}{2} + \frac{1}{30}\,\frac{\Delta^5 f_{-2} + \Delta^5 f_{-3}}{2} - \ldots\right]$$

Наиболее удобные формулы интегрирования, получающиеся из интерполяционных формул, даны на стр. 391.

3. Подбор эмпирических формул

Сравнение графиков. Процесс подбора эмпирической формулы для установленной из опыта функциональной зависимости $y=f(x)$ распадается на две части: сначала выбирается вид формулы и уже после этого определяются численные значения параметров, для которых приближение к данной функции оказывается наилучшим. Если нет каких-либо теоретических соображений для подбора вида формулы, обычно выбирают функциональную зависимость из числа наиболее простых, сравнивая их графики с графиком заданной функции. Так как сходство графиков, определяемое грубо на-глаз, может оказаться обманчивым, следует, выбрав какую-либо формулу, прежде чем определять значения параметров, проверить возможность ее применения по методу *выравнивания*.

Метод выравнивания заключается в следующем: в предположении, что между y и x существует зависимость определенного вида, находятся некоторые величины $X=\varphi(x, y)$ и $Y=\psi(x, y)$, которые при сделанном предположении связаны линейной зависимостью (например, если $y=\frac{x}{a+bx}$, то берут $X=x$, $Y=\frac{x}{y}$ или $X=\frac{1}{x}$, $Y=\frac{1}{y}$). Вычисляя для заданных значений x и y соответственные значения X и Y и изображая их графически, легко сразу увидеть, близка ли зависимость между X и Y к линейной (ложатся ли соответствующие точки приблизительно на прямую линию) и, следовательно, подходит ли выбранная формула или нет.

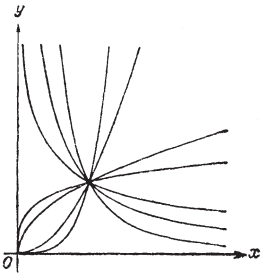
Указания относительно выравнивания некоторых простейших формул даны ниже с указаниями на соответствующие графики — см. стр. 579—583. *Пример* — см. стр. 583.

Определение параметров. Наиболее точным методом определения параметров является метод наименьших квадратов (см. стр. 569 и 573). Однако в большинстве случаев могут быть успешно применены более простые методы, в частности, *метод средних*. Если полученная по этому методу формула окажется недостаточно точной, для дальнейшего ее уточнения уже может быть использован метод наименьших квадратов, причем знание приближенных значений параметров позволит сделать вычисления менее громоздкими (см. стр. 570). По методу средних сначала определяется линейная зависимость между «выравненными» переменными X и Y: $Y=aX+b$. Для этого условные уравнения $Y_i=aX_i+b$ для имеющихся пар значений X_i и Y_i делятся на две равные (или почти равные) группы в порядке возрастания переменной X_i или Y_i. Складывая уравнения каждой группы, получим два уравнения, из которых и определяются a и b. Выражая X и Y через первоначальные переменные, получим искомую зависимость между x и y. Если при этом еще не все параметры будут определены, то следует применить вновь тот же метод, выравнивая уже другие величины X и Y (см., например, формулу XIII — стр. 583). *Пример* — см. стр. 583.

Наиболее употребительные эмпирические формулы. Ниже даны некоторые простейшие формулы с соответствующими графиками. На каждом чертеже приведено несколько кривых для различных значений входящих в формулы параметров (исследование влияния изменения параметров на форму кривых см. в главе «Графики»—стр. 83—101). При рассмотрении графиков следует всегда иметь в виду, что при пользовании эмпирическими формулами используется лишь часть кривой, соответствующая некоторому интервалу изменения независимой переменной. Поэтому, например, не следует думать, что формула $y=ax^2+bx+c$ (см. ниже) удобна только при наличии у заданной кривой максимума или минимума.

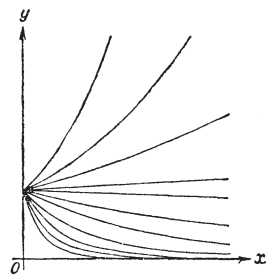
I. $y = ax^b$. График — см. рис. 6, 12, 15 и 16 и пояснения к ним, стр. 85, 89 и 91. Выравниваются $X = \lg x$ и $Y = \lg y$:

$$Y = \lg a + bX.$$



II. $y = ae^{bx}$. График — см. рис. 17 и пояснения к нему, стр. 92. Выравниваются x и $Y = \lg y$:

$$Y = \lg a + b \lg e \cdot x.$$



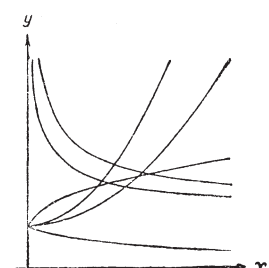
III. $y = ax^b + c$. Графики те же, что и для формулы I, смещенные в направлении оси Oy. Если b задано, выравнивают $X = x^b$ и y:

$$y = aX + c.$$

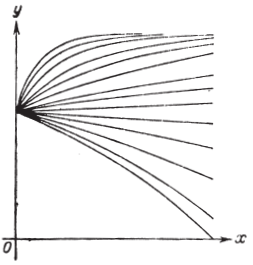
Если b неизвестно, выравнивают $X = \lg x$ и $Y = \lg (y - c)$,

$$Y = \lg a + bX,$$

определив сначала c. Для этого находят на графике заданной функции три точки с абсциссами x_1, x_2 и $x_3 = \sqrt{x_1 x_2}$ и ординатами, соответственно, y_1, y_2, y_3 (x_1 и x_2 выбирают произвольно) и принимают $c = \dfrac{y_1 y_2 - y_3^2}{y_1 + y_2 - 2y_3}$ *.



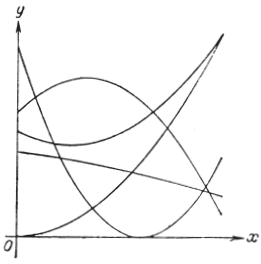
* После определения a и b можно заново выбрать с равным среднему значению $y - ax^b$.



IV. $y = ae^{bx} + c$. Графики те же, что и для формулы II, смещенные в направлении оси Oy. Выравнивают $Y = \lg(y - c)$ и x:

$$Y = \lg a + b \lg e \cdot x,$$

определив сначала c. Для этого находят на графике заданной функции три точки с абсциссами x_1, x_2 и $x_3 = {}^1/_2 (x_1 + x_2)$ (x_1 и x_2 произвольны) и ординатами соответственно, y_1, y_2 и y_3 и принимают $c = \dfrac{y_1 y_2 - y_3^2}{y_1 + y_2 - 2y_3}$ *.



V. $y = ax^2 + bx + c$. График — см. рис. 3 и пояснение к нему стр. 83. Если выбрать на графике заданной функции какую-либо точку (x_1, y_1), то выравниваются x и $Y = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$:

$$Y = (b + ax_1) + ax.$$

Если заданные значения x образуют арифметическую прогрессию с разностью h, то выравниваются $Y = \Delta y$ и x:

$$Y = (bh + ah^2) + 2ahx$$

В обоих случаях после определения a и b находят c из уравнения

$$\sum y = a \sum x^2 + b \sum x + nc,$$

где n — число заданных значений x, по которым производится суммирование.

VI. $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$. График — см. рис. 8 и пояснение к нему, стр. 86. На графике заданной функции выбирают какую-либо точку (x_1, y_1) и выравнивают $Y = \dfrac{x - x_1}{y - y_1}$ и x:

$$Y = A + Bx;$$

определением A и B здесь и ограничиваются, переписывая полученную формулу в виде

$$y = y_1 + \frac{x - x_1}{A + Bx}$$

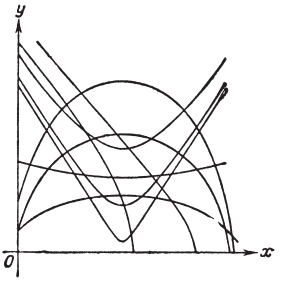
Иногда можно ограничиться формулами вида

$$y = \frac{x}{cx + d} \quad \text{или} \quad y = \frac{1}{cx + d}.$$

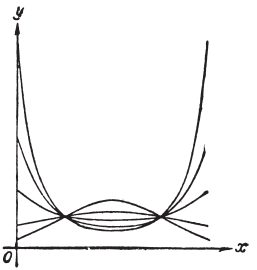
Тогда выравниваются $X = \dfrac{1}{x}$ и $Y = \dfrac{1}{y}$ или x и $Y = \dfrac{x}{y}$ в первом случае и x и $Y = \dfrac{1}{y}$ — во втором

* После определения a и b можно заново выбрать c равным среднему значению $y - ae^{bx}$.

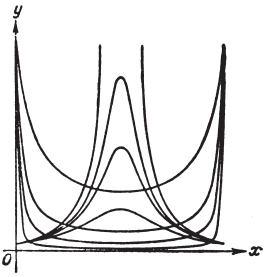
VII. $y^2 = ax^2 + bx + c$. График — см. рис. 14 и пояснение к нему, стр. 91. Если ввести новую переменную $\bar{y} = y^2$, то дальше можно вести вычисления, как для формулы V.

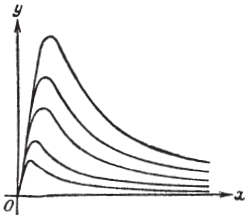


VIII. $y = ae^{bx+cx^2}$ или $\lg y = \lg a + \lg e \cdot bx + \lg e \cdot cx^2$. График — см. рис. 21 и пояснение к нему, стр. 94. Введением новой переменной $\bar{y} = \lg y$ этот случай сводится к формуле V

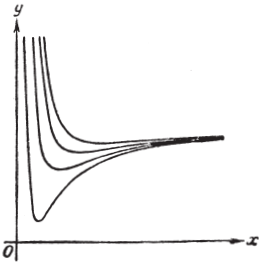


IX. $y = \dfrac{1}{ax^2 + bx + c}$. График — см рис. 10 и пояснение к нему, стр. 87. Введением новой переменной $\bar{y} = \dfrac{1}{y}$ этот случай сводится к формуле V.

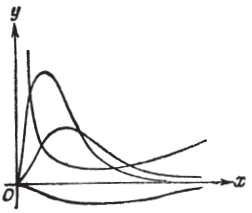




X. $y = \dfrac{x}{ax^2 + bx + c}$. График — см. рис. 11 и пояснение к нему, стр. 88. Введением новой переменной $\bar{y} = \dfrac{x}{y}$ этот случай сводится к формуле V.



XI. $y = a + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x^2}$. График — см. рис. 9 и пояснение к нему стр. 87. Введением новой переменной $\bar{x} = \dfrac{1}{x}$ этот случай сводится к формуле V.



XII. $y = ax^b e^{cx}$. График — см. рис. 22 и пояснение к нему. стр. 94—95. Если заданные значения x образуют арифметическую прогрессию с разностью h, то выравниваются $Y = \Delta \lg y$ и $X = \Delta \lg x$:

$$Y = hc \lg e + bX.$$

Если же данные значения x образуют геометрическую прогрессию со знаменателем q, то выравниваются $Y = \Delta_1 \lg y$ и x:

$$Y = b \lg q + c\,(q - 1) \lg e \cdot x$$

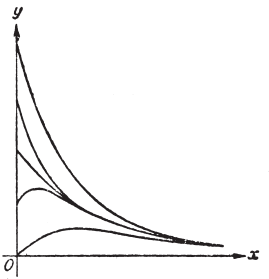
($\Delta_1 \lg y$ — разность двух последовательных значений $\lg y$). После определения b и c, прологарифмировав данное уравнение, находят $\lg a$ аналогично тому, как для формулы V находилось c.

XIII. $y = ae^{bx} + ce^{ax}$. График—см. рис. 20 и пояснения к нему, стр. 93. Если значения x образуют арифметическую прогрессию с разностью h и y, y_1 и y_2 — какие-либо три последовательные значения данной функции, то выравниваются $Y = \frac{y_2}{y}$ и $X = \frac{y_1}{y}$:

$$Y = (e^{bh} + e^{dh})\, X - e^{bh} \cdot e^{dh}.$$

После определения b и d из этого уравнения выравнивают $\overline{Y} = ye^{-dx}$ и $\overline{X} = e^{(b-d)x}$:

$$\overline{Y} = a\overline{X} + c.$$



Более подробно о подборе эмпирических формул см. Гутер и Овчинский, стр. 588 справочника.

Пример: Требуется найти эмпирическую формулу для зависимости между x и y, заданной таблицей, которая помещена на следующей странице (первые два столбца).

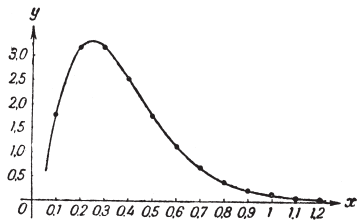


Рис. 425.

Построив график (рис. 425) и сравнивая его с графиками, помещенными на стр. 579—583, убедимся, что для данного случая могут подойти формулы X или XII. Для формулы X должны выравниваться $\Delta\frac{x}{y}$ и x, однако вычисления явно показывают, что зависимость между x и $\Delta\frac{x}{y}$ далека от линейной. Для проверки пригодности формулы XII строим график зависимости между $\Delta \lg x$ и $\Delta \lg y$ (для $h = 0{,}1$; рис. 426), а также между $\Delta_1 \lg y$ и x (для $q = 2$; рис. 427). В обоих случаях можно считать совпадение с прямой линией достаточно удовлетворительным и, следовательно, принять $y = ax^b e^{cx}$

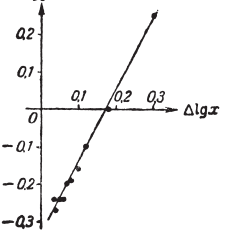


Рис. 426.

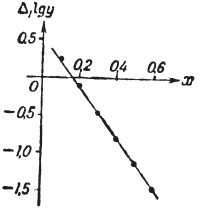


Рис. 427.

Для определения констант a, b и c ищем линейную зависимость между x и $\Delta_1 \lg y$ по методу средних. Складывая условные уравнения

$$\Delta_1 \lg y = b \lg 2 + cx \lg e$$

по группам (каждая из трех уравнений), получим

$$-0{,}292 = 0{,}903\, b + 0{,}2606\, c,$$
$$-3{,}392 = 0{,}903\, b + 0{,}6514\, c,$$

откуда $b = 1{,}966$ и $c = -7{,}932$. Для определения a складываем все уравнения вида $\lg y = \lg a + b \lg x + c \lg e \cdot x$, что дает

$$-2{,}670 = 12 \lg a - 6{,}529 - 26{,}87,$$

откуда $\lg a = 2{,}561$, $a = 364$. Значения y, вычисленные по формуле $y = 364\, x^{1{,}966}\, e^{-7{,}932x}$ даны в последнем столбце помещенной ниже таблицы.

x	y	$\frac{x}{y}$	$\Delta \frac{x}{y}$	$\lg x$	$\lg$	$\Delta \lg x$	$\Delta \lg y$	$\Delta_1 \lg y$	y выч
0,1	1,78	0,056	0,007	−1,000	0,250	0,301	0,252	0,252	1,78
0,2	3,18	0,063	0,031	−0,699	0,502	0,176	+0,002	−0,097	3,15
0,3	3,19	0,094	0,063	−0,523	0,504	0,125	−0,099	−0,447	3,16
0,4	2,54	0,157	0,125	−0,398	0,405	0,097	−0,157	−0,803	2,52
0,5	1,77	0,282	0,244	−0,301	0,248	0,079	−0,191	−1,134	1,76
0,6	1,14	0,526	0,488	−0,222	0,057	0,067	−0,218	−1,455	1,14
0,7	0,69	1,014	0,986	−0,155	−0,161	0,058	−0,237	–	0,70
0,8	0,40	2,000	1,913	−0,097	−0,398	0,051	−0,240	–	0,41
0,9	0,23	3,913	3,78	−0,046	−0,638	0,046	−0,248	–	0,23
1,0	0,13	7,69	8,02	0,000	−0,886	0,041	−0,269	–	0,13
1,1	0,07	15,71	14,29	0,041	−1,155	0,038	−0,243	–	0,07
1,2	0,04	30,0	–	0,079	−1,398	–	–	–	0,04

УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ

А. ОБЩИЕ РУКОВОДСТВА И СПРАВОЧНИКИ

1. Руководства

1) *Смирнов В. И.*, Курс высшей математики, т. I — V, ФМ *.

2) *Березин Н. С.* и *Жидков Н. П.*, Методы вычислений, т. I и II изд. 2, ФМ, 1962.

3) *Милн В. Э.*, Численный анализ, ИЛ **, 1951.

В книгах 2) и 3) освещены вопросы, связанные с численными методами и приближенными вычислениями в различных отделах математики.

2. Справочники.

4) *Градштейн И. С.* и *Рыжик И. М.*, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, изд. 4, ФМ, 1962. Очень подробный справочник по интегралам, элементарным и специальным функциям.

5) *Двайт Г. Б.*, Таблицы интегралов и другие математические формулы, «Лань», 2005. Содержит много формул, относящихся к элементарным и некоторым специальным функциям, а также таблицы числовых значений.

6) *Маделунг Э.*, Математический аппарат физики (Справочное руководство), перев. с 6-го нем. изд., ФМ, 1961. Содержит много теоретических сведений и формул по различным отделам математики и физики.

7) «Справочная математическая библиотека» (*СМБ*). Серия справочников по различным отделам математики под общей редакцией Л. А. Люстерника и А. Р. Янпольского, ФМ. Вышли следующие выпуски: 1—3 — «Математический анализ» (1—Функции пределы ряды, цепные дроби, 1961; 2— Вычисление элементарных функций 1963; 3 — Дифференциальное и интегральное исчисление, 1961); 4— «Высшая алгебра» (линейная алгебра, многочлены, общая алгебра, 1962); 5 — «Интегральные преобразования и операционное исчисление» (1961); 6 — «Метод статистических испытаний» (Монте-Карло, 1961); 7 — «Программирование» (1963); 8 — «Элементы теории функций» (функции действительного переменного, приближение функций, почти-периодические функции, 1963). Издание продолжается.

Б. ЛИТЕРАТУРА К ОТДЕЛЬНЫМ ГЛАВАМ

Отдел 1 Таблицы и графики

8) *Янке Е.*, *Эмде Ф.*, *Лёш Ф.*, Специальные функции (формулы таблицы, графики), перев. с 6-го нем. перераб. изд. «Наука» 1964.

---

* ФМ — Государственное издательство физико математической литературы («Физматгиз»), Москва.

** ИЛ — издательство «Иностранная литература» Москва.

Содержит много таблиц и графиков элементарных и специальных функций в действительной и комплексной области.

Таблицы

9) Таблицы *Барлоу* — квадратов, кубов, корней квадратных, корней кубических и обратных величин целых чисел от 1 до 15 000, изд. 3, «Мир», 1964.

10) *Сегал Б. И.* и *Семендяев К. А.*, Пятизначные математические таблицы, изд. 3, ФМ, 1962. Содержит элементарные и специальные функции (интеграл вероятностей, гамма-функцию эллиптические интегралы, бесселевы функции и др.).

11) *Милн-Томсон Л. М.* и *Комри Л. Дж.*, Четырехзначные математические таблицы, перев. с англ., ФМ, 1961 (элементарные функции и их логарифмы).

12) *Хренов Л. С.*, Пятизначные таблицы тригонометрических функций, изд. 4, ФМ, 1962.

13) *Хренов Л. С.*, Шестизначные таблицы тригонометрических функций, ФМ, 1960.

14) *Бремикер К.*, Логарифмо-тригонометрические таблицы с шестью десятичными знаками, ФМ, 1962.

Графики

15) *Савелов А. А.*, Плоские кривые (систематика, свойства, применения), Справочное руководство ФМ, 1960.

См. также *Выгодский* [16].

Отдел 2. Элементарная математика

16) *Выгодский М. Я.*, Справочник по элементарной математике (таблицы, арифметика, алгебра, геометрия, тригонометрия, функции и графики), изд. 15, ФМ, 1963.

Приближенные вычисления

17) *Хаусхолдер А. С.*, Основы численного анализа, ИЛ, 1956.

18) *Панов Д. Ю.*, Счетная линейка, изд. 16, ФМ, 1962.

19) *Румшиский Л. З.*, Счетная линейка, ФМ, 1963.

20) *Семендяев К. А.*, Счетная линейка, изд. 11, ФМ, 1960.

См. также *Березин* и *Жидков* [2], т. I, *СМБ* [7], № 2.

Алгебра

21) *Фаддеев Д. К.* и *Соминский И. С.*, Алгебра (для самообразования), ФМ, 1960.

22) *Соминский И. С.*, Алгебра (дополнительный курс), ФМ, 1962.

23) *Курош А. Г.*, Высшая алгебра, изд. 8, ФМ, 1963.

24) *Гельфанд И. М.*, Лекции по линейной алгебре, изд. 2, ФМ, 1951.

25) *Фаддеев Д. К.* и *Фаддеева В. И.*, Вычислительные методы линейной алгебры, ФМ, 1960.

См. также *Смирнов* [1], т. I, *Березин* и *Жидков* [2], т. II, *Милн* [3], *Маделунг* [6].

Тригонометрия

26) *Бермант А. Ф.* и *Люстерник Л. А.*, Тригонометрия, изд. 3, ФМ, 1960.

27) *Янпольский А. Р.*, Гиперболические функции, ФМ, 1960.

Отдел 3. Аналитическая и дифференциальная геометрия

Аналитическая геометрия

28) *Привалов И. И.*, Аналитическая геометрия, «Лань», 2008.
29) *Ефимов И. В.*, Краткий курс аналитической геометрии изд. 6, ФМ, 1962.
30) *Ефимов Н. В.*, Квадратичные формы и матрицы, ФМ, 1963.
31) *Выгодский М. Я.*, Аналитическая геометрия, ФМ, 1963.

Дифференциальная геометрия

32) *Рашевский П. К.*, Курс дифференциальной геометрии, изд. 4, ФМ, 1956.
См. также *Смирнов* [1], т. I—II, *Маделунг* [6], разд. 8.

Отдел 4. **Основы математического анализа**

33) *Бермант А. Ф.*, Краткий курс математического анализа «Лань», 2008.
34) *Толстов Г. П.*, Курс математического анализа, т. I, II, изд. 2, ФМ, 1957.
35) *Фихтенгольц Г. М.*, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, II, III, ФМ.
36) *Натансон И. П.*, Краткий курс высшей математики, «Лань», 2007.
37) *Мышкис А. Д.*, Лекции по высшей математике, «Наука», 1964.
См. также *СМБ* [7], № 1—3, 5.

Интегральное исчисление

38) *Смолянский М. Л.*, Таблицы неопределенных интегралов изд. 2, ФМ, 1962.
См. также *Градштейн и Рыжик* [4], *Двайт* [5], *Хаусхолдер* [17].

Дифференциальные уравнения

39) *Гутер Р. С. и Янпольский А. Р.*, Дифференциальные уравнения, ФМ, 1962.
40) *Степанов В. В.*, Курс дифференциальных уравнений, изд. 8 ФМ, 1959.
41) *Понтрягин Л. С.*, Обыкновенные дифференциальные уравнения, ФМ, 1961.
42) *Петровский И. Г.*, Лекции об уравнениях с частными производными, изд. 3, ФМ, 1961.
43) *Тихонов А. Н. и Самарский А. А.*, Уравнения математической физики, изд. 2, ФМ, 1953.
44) *Канторович Л. В. и Крылов В. И.*, Приближенные методы высшего анализа, изд. 5, ФМ, 1962.
45) *Араманович И. Г. и Левин В. И.*, Уравнения математической физики, «Наука», 1964.
46) *Камке Э.*, Справочник по дифференциальным уравнениям, «Лань», 2003.
47) *Рихтмайер Р. Д.*, Разностные методы решения краевых задач, ИЛ, 1960.
См. также *Смирнов* [1], т. II—IV, *Березин и Жидков* [3], т. II.

Отдел 5. Дополнительные главы анализа

48) *Романовский П. И.*, Ряды Фурье; теория поля; аналитические и специальные функции; преобразование Лапласа, изд. 3, ФМ. 1961.

Комплексные числа и функции комплексной переменной

49) *Фукс Б. А.* и *Шабат Б. В.*, Функции комплексного переменного и некоторые их приложения, изд. 2, ФМ. 1959.
50) *Лаврентьев М. А.* и *Шабат Б. В.*, Методы теории функций комплексного переменного, «Лань», 2002.
См. также *Смирнов* [1], т. I, III.

Векторное исчисление

51) *Меркин Д. Р.*, Алгебра свободных и скользящих векторов, ФМ, 1962.
52) *Гольдфайн И. А.*, Векторный анализ и теория поля, ФМ. 1962.
См. также *Маделунг* [6].

Ряды Фурье

53) *Толстов Г. П.*, Ряды Фурье, изд. 2, ФМ. 1960.
См. также *Смирнов* [1], т. II.

Отдел 6. Обработка наблюдений

Основы теории вероятностей и теории ошибок

54) *Вентцель Е. С.*, Теория вероятностей, изд. 2, ФМ. 1962.
55) *Смирнов М. В.* и *Дунин-Барковский И. В.*, Краткий курс математической статистики для технических приложений, ФМ. 1959.
56) *Гутер Р. С.* и *Овчинский Б. В.*, Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта, ФМ. 1962

Эмпирические формулы и интерполяция

См. *Березин* и *Жидков* [2], *Милн* [3], *Хаусхолдер* [17].

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

(Цифры обозначают страницы)

А

Абеля теорема 300
Абсолютная величина: вектора 519
действительного числа 274 комплексного числа 494
—погрешность (предельная 115
—сходимость несобственного интеграла 400, 404
— — ряда 295, с комплексными членами 498
Абсолютно интегрируемая функция 400, 404
Абсцисса 198, 216
Адъюнкта определителя 147
Алгебра 127—164 основная теорема 140
—векторная 519—529
—комплексных чисел 495—497
Алгебраическая дробь правильная неправильная 129—130
—иррациональность 266
—кривая 201
—функция 272, комплексной переменной 497
Алгебраическое выражение 127
—уравнение 136, система высших степеней) 155
Алгоритм Евклида 129
Алфавит латинский и греческий 14
Амплитуда синусоиды 96, 181
Анализ гармонический 549—561, определение 550, приближенный 558
—математический 265—492, дополнительные главы 493—561
Анализатор гармонический 559
Аналитическая геометрия 198—233
—функция 505
Аналитическое выражение, область определенности 271, 288
Антилогарифмы, таблица 46—47
Аньези локон 102
Аполлония теорема 207
Апофема правильного многоугольника 167
правильной пирамиды 172
Аппликата 216
Аппроксимирующая функция 571
Аргумент 269, 285
—комплексного числа 494
—целочисленный 270
Ареа-функции (ареа-синус, ареа косинус, ареа-тангенс, ареа-котангенс) 196, графики 101
Арифметическая прогрессия 159, формулы 160
Арифметическое среднее 160
Арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс 188, графики 98—99
Архимедова спираль 111
Асимптотическая точка 244
Асимптотический конус 230
Асимптоты 216—247
—гиперболы 209
Астроида 110
Аффинные координаты векторов 521

Б

Базис циклоиды 107
Бегунок (счетной линейки) 120
Безвихревое поле 538, 546
Бернулли теорема (закон больших чисел) 564
—уравнение 441
—числа 297
Бесконечно большая величина 281
—малая величина 280
—убывающая геометрическая прогрессия, сумма 160
Бесконечность 265, 277
Бесконечный предел интеграла 393
— — последовательности 268
— — функции 277
— разрыв 282
— ряд см. Ряды
Беспорядок (инверсия) 147

Бесселевы функции 464, основные формулы 466, таблицы 76—77
Бесселя уравнение 464
— формулы: интерполяционная 576, квадратичной интерполяции 15, в приближенном гармоническом анализе 558
Биквадратное уравнение 140
Бином Ньютона 163
Биномиальные коэффициенты 164
Биномный дифференциал 341
Бинормаль 251, уравнение 253
Биссектриса треугольника 165, 187
Большая ось эллипса 206
Больших чисел закон 564
Большой круг 176, 190
Бореля теорема 459
Бочка 178
Бригговы логарифмы 134
Буняковского-Шварца неравенство 157, аналог 158

В

Вариация постоянных 452, 457
Вебера функция 464
Вейерштрасса признак (равномерной сходимости) 299
Вектор 519, радиус-вектор 199, длина вектора 527
— площадки 539
Вектор-функция: скаляра 519—529, точки 531
Векторная алгебра 519—529
— диаграмма 185
— функция см. Вектор-функция
Векторное исчисление 519—548
— поле 531, центральное, сферическое, цилиндрическое 532
— произведение 522
— — двойное 522
Векторные величины 519
— уравнения 525
Векторный потенциал 546
— поток 540
Величины: абсолютная, векторная, бесконечно малая и т. п. — см. соотв. названия
Верные десятичные знаки 115
Вероятная ошибка 567
Вероятностей теория 562—565
Вероятности интеграл 563, таблица 81—82
Вероятность 562
Вершина конической поверхности 176
— кривой 243
— эллипса 206, гиперболы 208, параболы 211
Вес 469, 568
Ветви гиперболы 208
Вещественные (действительные) числа 266
Взаимно простые многочлены 129
Взаимные векторы 523
Взвешенное среднее 568
Винтовая линия 255
Вихревые линии 543
Вихрь 542
Вогнутость и выпуклость 238
Возврата точка 244
Возвратное уравнение 140
Возрастающая монотонно последовательность 268
— прогрессия арифметическая 159, геометрическая 160
Волна, длина волны синусоиды 184
Волновое уравнение 480
Вписанной окружности радиус 187, центр 165
Вписанный угол 168
Вполне интегрируемое уравнение 476
Вращения поверхность 220, вычисление площади при помощи интеграла 395
— параболоид 230
— эллипсоид вытянутый, сплющенный 228
Вронского определитель 452
Вспомогательное уравнение (в операторном методе) 459, 490
Вторая квадратичная форма 262
— производная 305
Второго порядка кривые 213—215
— — линейные дифференциальные уравнения: обыкновенные 463 в частных производных 476
— — поверхности 228—233
Вынесение за знак корня 132
— за скобки 128
Выпуклость и вогнутость 238
Выравнивания метод 578
Выражение алгебраическое 127
— аналитическое (область определенности) 271, 288
— дифференциальное (замена переменных) 313
— подинтегральное 331, 384
Высота треугольника 166, 187
— пирамиды 172
Высших порядков дифференциальные уравнения 449
Вытянутый эллипсоид вращения 228
Вычет 516
Вычетов теорема 516
Вычисления приближенные 115—126

Г

Гамильтона оператор (набла, ∇) 543
— функция 474
Гамма-функция 162, 405, таблица 75
Гармонические функции 505, 547
Гармонический анализ 549—561, определение 550, приближенный 558
— анализатор 559
— ряд 293
— синтез 560
Гармоническое колебание 184
Гаусса интеграл вероятности 563
— кривая 92
Гаусса-Остроградского теорема 436, 545
Гауссова кривизна 263
Гауссовы (криволинейные) координаты 257
Геодезические линии на поверхности 264, на сфере 191
Геометрическая прогрессия 160
Геометрическое среднее 161
Геометрия (элементарная) 165—178
— аналитическая 198—233
— дифференциальная 234—264
— на сфере 190—191
Гипербола 208—210
— равнобочная 85, 86, 210
—, график иррациональной функции 90
—, уравнение в комплексной форме 502
Гиперболическая спираль 111
— точка 263
— тригонометрия 193—197
Гиперболические (натуральные) логарифмы 134
— уравнения 144
— функции (синус, косинус, тангенс, котангенс) 193—194, 499—500, геометрическое определение 196, таблицы 52—55, графики 100, интегрирование 346, таблица интегралов 377—378
— — обратные 196, 500, графики 101, интегрирование 346, таблица интегралов 383
Гиперболический параболоид 231
— синус, косинус, тангенс и котангенс см. Гиперболические функции
— цилиндр 232
Гиперболического типа уравнение 476
Гиперболическое уравнение (дифференциальное) 478
Гиперболоид однополостный, двуполостный 228
Гиперболы сопряженные 209
Гипергеометрическое уравнение 467
Гипергеометрический ряд 468
Гиперповерхность 286
Гипотенуза 166
Гипотрохоида 110
Гипоциклоида 109, удлиненная и укороченная 110
Главная нормаль 251, уравнение 253
Главное значение аргумента (комплексного числа) 494
— — логарифма 499
— — несобственного интеграла 399, 402
— — обратной тригонометрической функции 188
Главные нормальные сечения 261
— радиусы кривизны 261
Годограф 528
Голоморфная функция 505
Градиент скалярного поля 535, векторного поля 544
Градусы, перевод в радианы 179, таблица 71
Граничные условия 437, 478
Графики 83—114, см. также названия функций
—, построение 247
Графический метод оценки корней уравнения 144
Графическое дифференцирование 312
— интегрирование 392, дифференциальных уравнений 448
Греческий алфавит 14
Грина метод решения дифференциальных уравнений 488
— теоремы 546
— формула 436, 545
— функция 488
Группировки способ (разложение на множители) 128
Гурвица теорема 454
Гюльдена теоремы 397—398

Д

Давление 396
Даламбера признак сходимости 294
— формула 480
Движок (счетной линейки) 120—121
Двойная точка 244
Двойное векторное произведение 522
Двойной интеграл 420, вычисление 422, приложения 428
Двоякой кривизны линии 250—256
Двугранный угол 170

Двукратный интеграл см. Двойной интеграл
Двуполостный гиперболоид 228
Двусвязная область 287
Двугольник сферический 191
Действительная ось гиперболы 208
– – комплексной плоскости 493
– часть комплексного числа 493
Действительные числа 266
Декарта правило 142
Декартов лист 102
Декартовы координаты 198, 216
– – вектора 521
Декремент логарифмический затухания 96
Деление в крайнем и среднем отношении 161
– отрезка в данном отношении 200, 219
– сокращенное, формулы 128
Делитель общий наибольший 129
Дельта-функция 459
Десятичные логарифмы 134, таблица 44–45
Детерминанты (определители) 146
Диаграмма векторная 185
Диаметр площадки 420, тела 421
– эллипса 206, гиперболы 210, параболы 211
Дивергенция 542
Директрисы, директориальное свойство: эллипса 206, гиперболы 209, параболы 211, кривой второго порядка 213
Дирихле задача 485, 547
– условия 551
Дискриминант квадратного уравнения 138, кубического уравнения 138, дифференциального уравнения 2-го порядка 476
Дисперсия 565
Дифференциал 304, частный 304, полный 305, второй и высших порядков 306
– биномный, интегрирование 341
– векторной функции 529
– дуги 235, на поверхности 259
– полный: интегрируемость 418, уравнение в полных дифференциалах 439, 475
– скалярного поля 535
Дифференциальная геометрия 234–264
Дифференциальное исчисление 302–329
Дифференциальные выражения (замена переменных) 313
– уравнения 305, 437–492, см. также название типа дифференциального уравнения
Дифференцирование 305, техника 306 основные правила 308, неявной функции 310, параметрически заданной функции 312
– векторов 528
– графическое 312
– интеграла по параметру 405
– объемное 541
Дифференцируемая функция 304, 505
Длина вектора 527
– волны синусоиды 184
– дуги 260, 394, см. также название линии
Додекаэдр 174
Долгота 217, на сфере 257
Дроби, преобразование дробных выражений 129–132
– элементарные (простые), разложение алгебраической дроби 130, некоторые случаи 354
Дробно-линейная функция 272, график 86, комплексной переменной 510
Дробные рациональные выражения, преобразования 127, 129–132
– – функции 272, графики 85–89, интегрирование 334, таблица интегралов 346–354
Дробь правильная, неправильная (в алгебре) 129–130
Дуги дифференциал 235, на поверхности 259
– длина 260, 394, см. также название линии
– центр тяжести 397

Е

«*e*», основание натуральных логарифмов 278, таблицы величин, связанных с *e*, 16, 52–58
Евклида алгоритм 129
Единица мнимая 493
Единичные векторы 519

Ж

«*g*» (же), ускорение силы тяжести, таблица величин связанных с *g*, 16

З

Зависимые функции 289
Задача, см. соотв. название
Закон больших чисел 564
– распределения нормальный 565
Замена переменных 313–315
Замкнутый интервал, замкнутый конец интервала 270

Заострения точка 244
Запаздывания теорема 459
Запаздывающий потенциал 480
Затухания логарифмический декремент 96
Затухающее колебание 95
Знакочередующийся ряд 296
Знаменатель, уничтожение иррациональности 132, обращение в нуль 137
Значащие цифры 115
Золотое сечение 161

И

Избыток сферический 191
Изгибание поверхности 260
Излома точки 244
Измерения на поверхности 260
Изображение функций (в операторном методе) 458, 490, таблица 462
Изолированная точка: кривой 244, дифференциального уравнения 444
Изотермическая сетка 508
Икосаэдр 174
Импульсивная функция 459
Инвариантность дифференциала 304, 305
Инвариантные свойства 234
Инварианты кривой 2-го порядка 213
— поверхности 2-го порядка 232
Инверсия (беспорядок) 147
— (преобразование) 510
Инволюта 248
Индекс суммирования 524
Инерции момент 396, 428, 429
Интеграл, интеграла знак 331
— в комплексной области 512
— вероятности (Гаусса) 563, таблица 81—82
— двойной (двукратный) 420, вычисление 422, приложения 428
— дифференциального уравнения 437, общий, частный, особый 438
— зависящий от параметра 404
— кратный 420—432
— криволинейный (линейный): первого типа (по отрезку кривой) 412, второго типа (по проекции) 415, в теории поля 536
— неопределенный 331, таблицы 346—383, см. также Интегралов таблицы
— от аналитической функции 513
— несобственный 398, 401, главное значение 399, 402
— — абсолютно сходящийся 400
Интеграл определенный 383, вычисление 387, приложения 393, таблицы 407—412
— особый 438
— от разрывной функции 401
— первый 450
— поверхностный: первого типа (по поверхности) 430, второго типа (по проекции) 432, в теории поля 539
— полный 473
— псевдоэллиптический 342
— Пуассона 490
— с бесконечными пределами 398
— Стильтьеса 398
— тройной (трехкратный) 421, вычисление 425, приложения 429
— Фурье 553
—Эйлера 162, 405
— эллиптический 342, таблицы 79—80
Интегралов таблицы:
— — основных 333
— — от рациональных функций:
содержащих $ax+b$ 346—349
» ax^2+bx+c 349—350
» $a^2 \pm x^2$ 351—352
» $a^3 \pm x^3$ 352—353
» $a^4 \pm x^4$ 353—354
— — от иррациональных функций:
содержащих $\sqrt{x}$ 354—355
» $\sqrt{ax+b}$ 355—356
» $\sqrt{ax+b}$ и $\sqrt{fx+g}$ 357
» $\sqrt{a^2-x^2}$ 358—359
» $\sqrt{x^2+a^2}$ 359—361
» $\sqrt{x^2-a^2}$ 361—363
» $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 363—365
» другие иррациональные выражения 365—366
— — от тригонометрических функций:
содержащих синус 366—369
» косинус 369—372
» синус и косинус 372—375
» тангенс 376
» котангенс 376
— — от других трансцендентных функций:
гиперболических 377—378
показательных 378—379
логарифмических 379—381
обратных тригонометрических 381—383
обратных гиперболических 383

Интегральная кривая 438, особая 443
— поверхность 471
— показательная функция 378
Интегралы см. Интеграл, Интегралов таблицы
Интегральное исчисление 330—436, основная теорема (формула) 386, 513
Интегральные теоремы (теории поля) 545
Интегральный косинус 369
— логарифм 332, 380
— признак сходимости 294
— синус 274, 367
Интеграф 392
Интеграции переменная 384
Интегрирование 331, правила 332, см. также Интегралов таблицы
— биномных дифференциалов 341
— гиперболических функций 346
— графическое 392
— дифференциальных уравнений 437, графическое 448, численное 448
— иррациональных функций 340
— показательных функций 345
— по частям 332, 388
— под знаком интеграла 406
— подстановкой 332
— приближенное 390
— рациональных функций 334
— трансцендентных функций 345—346
— тригонометрических функций 344
Интегрирования область 421
— постоянная 331
— путь 412
Интегрируемая функция 384, абсолютно 400, 404
Интегрируемое вполне уравнение 476
Интегрируемости условия 418, 538
Интегрирующий множитель 440
Интервал числовой (открытый, замкнутый, полуоткрытый) 270
Интерполирующая функция 573
Интерполяционная поправка 15
Интерполяционные формулы 576
Интерполяция 15, 573
— квадратичная 15, таблица 74
— линейная 15, 145
— параболическая 573, 574
— тригонометрическая 559, 573
Иррациональная функция 273, графики 90—91, интегрирование 340, таблица интегралов 354—366
Иррациональное выражение 127, 132—133
— уравнение 137
— число 266
Иррациональность алгебраическая 266
— в знаменателе (уничтожение) 132
Искусственная форма логарифма (отрицательного) 135
Источники поля 547
Исчисление векторное 519—548
— дифференциальное 302—329
— интегральное 330—436, основная теорема (формула) 386, 513
Итераций метод 145, 447

К

Каноническая система дифференциальных уравнений 474
— — линейных уравнений 149
— форма алгебраического уравнения 136
— — дифференциального уравнения 2-го порядка 477
Каноническое уравнение: эллипса 206, гиперболы 208, параболы 211
— — поверхностей 2-го порядка 228
Кардана формула 139
Кардиоида 105
Карсона-Хэвисайда операторный метод 458, таблица изображений 462
Касательная к плоской кривой 236, построение 312
— к пространственной кривой 251, уравнение 253
— к эллипсу 207, к гиперболе 209, к параболе 212
— плоскость 257
Касательной отрезок 237
Кассини овалы 106
Катет 166
Квадрат 166
Квадратическая ошибка средняя 567
— погрешность средняя 572
Квадратическое среднее 161
Квадратичная интерполяция 15, таблица 74
— форма первая 260, вторая 262
— функция 272, график 83, комплексной переменной 511
Квадратное уравнение 138
Квадратный корень: таблица 18—37, график 90, функция комплексной переменной 511

Квадратный трехчлен, график 83
Квадратов наименьших метод 569
Квадраты чисел, таблица 18—37, целых чисел 38—39
Квазилинейное уравнение 471
Кирхгофа формула 480
Клеро уравнение 443
Клин 173
Клотоида 113
Ковариантные координаты вектора 526
Колебание гармоническое 184
— — затухающее 95
— мембраны 483
— стержня 482
— струны 482
— функции 285
Коллинеарные векторы 519
Кольцо круговое 169
Комбинация линейная 147, вектороз 520
Компланарные векторы 519
Комплексная форма уравнения кривой 501—503
Комплексное число 493, форма алгебраическая, тригонометрическая, показательная 494, 499
Комплексной переменной функция 497, 504—518
Комплексные числа 493—518, сопряженные 495, действия над ними 495—497
Компоненты вектора 521
Конечное приращение (теорема Лагранжа) 317
Конечные величины 281
— числовые ряды 160
Конечный разрыв 282
Коническая поверхность 176, уравнение 220
— точка 259
Конические сечения 213—215
Консервативное поле 538
Консерватизм углов 508
Константа 272, таблица 16
Контравариантные координаты вектора 526
Конус, усеченный конус 176, уравнение 230
Конформное отображение 508, 510—511
Конхоида, конхоида Никомеда 104
Координатные линии 199, 217, 257
— поверхности 216
Координаты точки: на плоскости 198, в пространстве 216
— вектора 521, ковариантные и контравариантные 526
Координаты векторного поля 532
— гауссовы на поверхности 257
— декартовы прямоугольные 198, 216, преобразование 199, 218
— криволинейные 199, 217, 257
— полярные 199, 217
— сферические 217
— цилиндрические 217
Корень квадратный, кубический, таблица 18—37
— многочлена 140
— уравнения 136, оценка 144
Корректно поставленная задача 479
Косеканс 179, график 98
— гиперболический 194
Косинус 179, таблица 48—49, график 96
— гиперболический 193, таблица 52—55, график 100
— интегральный 369
Косинусов теорема 186, 193
Косинусоида 97
Косинусы направляющие 218
Косоугольный треугольник, формулы 186—187
Котангенс 179, таблица 50—51, график 97
— гиперболический 194, график 100
Коши задача 472, 481
— метод решения дифференциальных уравнений 453
— неравенство 157
— признак существования предела 276
— — сходимости 294, интегральный 294
— теорема 284, 318, 438, 513
— формулы 514
Коши-Буняковского неравенство 157, его аналог 158
Коши-Римана условия 505
Коэффициенты биномиальные 164
— метрические вектора 523
— неопределенные, метод 131
— разложения векторов 521
— угловые 202
— Фурье 549
Краевые задачи 468—476, задача однородная, неоднородная 468
Крайнее и среднее отношение, деление 161
Крамера формулы 149
Кратная точка 244
Кратные интегралы 420—432
Кратный корень уравнения 140

Кратчайшее расстояние между прямыми 223
Кривая, общее исследование 247
— алгебраическая 201
— второго порядка 213—215
— интегральная 438
— мнимая 201
— плоская 234—250
— пространственная 250—256
— трансцендентная 201
—, уравнение 234, 250, в векторной форме 528, в комплексной форме 501
—, см. также названия отдельных кривых
Кривизна кривой 239, 254
— поверхности 261, средняя, гаусова 263
Кривизны двоякой линия 250
— главные радиусы 261
— круг 240
— линии 262
— постоянной поверхности 263
— радиус 239, 254
— центр 240
Криволинейная трапеция, площадь 394
Криволинейные координаты 199, 217, 257
Криволинейный интеграл см. Интеграл криволинейный
— отрезок: длина 394, 414, масса 414, момент инерции 396, центр тяжести 397
— сектор, площадь 394
Круг, окружность 168, уравнение 205
— большой 176, 190
— кривизны 240
— сходимости 498
Круга площадь 169, таблица 64—65
Круглые тела 174—178
Круглый прямой конус 176
— — цилиндр 175
— цилиндр усеченный 175
Круговая точка 262
— частота 184
Круговое кольцо 169
Круговое поле 532
Круговые функции 188—190, графики 98—99
Кручение, кручения радиус 255
Куб 172, 174
Кубическая парабола 84
Кубические корни, таблица 18—37
Кубическое уравнение 138
Кубы чисел, таблица 18—37, целых чисел 38—39
Кулона поле 547
Кусочно-непрерывная функция 282

Л

Лагранжа метод (нахождения условного максимума и минимума) 322
— теорема 317
— тождество 523
— уравнение 443
— формула (параболической интерполяции) 574
Лапласа изображение функции 459
— оператор 315, 478, 544
— теорема 563
— уравнение 481, 547
— функция 547
Латинский алфавит 14
Левая винтовая линия 255
— координатная система 216
Лежандра полиномы 467, таблица 78
— уравнение 467
Лейбница теорема 296
— формула 310
Лейбница-Ньютона теорема 386
Лемниската 107
Линейка счетная 120—126
Линейная интерполяция 15, 145
— комбинация 147, векторов 520
— функция 272, график 83, комплексной переменной 510
Линейно независимые решения системы линейных уравнений 153
— — функции 451
Линейное уравнение алгебраическое 137, система 149
— — дифференциальное: 1-го порядка 440, 2-го порядка 463, высших порядков 451, с постоянными коэффициентами 451, 453—455, 460, системы 455—458, 461; в частных производных: 1-го порядка 470, 2-го порядка 476—492
Линейный интеграл см. Интеграл криволинейный
— угол 170
— элемент поверхности 259
Линейчатая поверхность 263
Линии вихревые 543
— геодезические на поверхности 264, на сфере 191
— координатные 199, 217, 257
— кривизны 262
— тока 534
— уровня 530
Линия, уравнение линии 201, в пространстве 220, см. также: Прямая линия, Кривая, а также названия отдельных кривых линий

Липшица условие 438, 449
Лист декартов 102
Лишние корни уравнения 137
Лиувилля теорема 506
— формула 452
Лиувилля-Штурма задача 469
Лобачевского метод решения алгебраических уравнений 142
Логарифм, определение и свойства, системы 134
Логарифм десятичный (бриггов) 134, таблица мантисс 44—45 антилогарифмов 46—47
— интегральный 332, 380
— натуральный (неперов, гиперболический) 134, таблица 58—60, комплексной переменной 499, 511 главное значение 499
Логарифмика, натуральная логарифмика 92
Логарифмирование 134, 135
Логарифмическая (счетная) линейка 120—126
— производная 308
— спираль 112, уравнение в комплексной форме 503
— функция 273, график 92
— шкала 120
Логарифмический декремент затухания 96
Логарифмическое выражение 128, 135
— уравнение 143
Локальные свойства геометрических образов 234
— элементы кривой 235
Локон Аньези 102
Лопиталя правило 279
Лорана ряд 515

М

Мажоранта 299
Макдональда функция 465
Маклорена ряд 323, таблица разложений 324—329
Максимум 318, нахождение максимума и минимума 318—322
Малая ось эллипса 206
Мантисса логарифма 134, таблица 44—45
Масса 414, 428, 429, 432
Математическое ожидание 564
Математической физики уравнения 478
Матрица, ранг матрицы 150
Мёбиуса лист 432
Медиана треугольника 165, 187
Мембраны колебание 483
Менье теорема 261
Мера точности 567
Меридиан 257
Метрика поверхности 260
Метрические коэффициенты вектора 523
Минимальные поверхности 263
Минимум 318, минимума и максимума нахождение 318—322
Минор определителя 147, матрицы 150
Мнимая единица 493
— кривая 201
— ось гиперболы 208, комплексной плоскости 493
— поверхность 2-го порядка 233
— часть комплексного числа 493
Многогранники 171—174
— правильные, таблица элементов 174
Многогранный угол 170
Многозначная функция 269, 285
Многолистная поверхность 504
Многомерное пространство 286
Многосвязная область 287
Многоугольник 167, площадь 201
— правильный 167, таблица элементов 168
Многочлен 272, корень 140, разложение на множители 128, графики 83—85
Многочлены взаимно простые 129
Множество всюду плотное, упорядоченное 265
— непрерывное 266
Множитель, разложение многочлена на множители 128
— интегрирующий 440
— нормирующий 203, 221
Модуль вектора 519
— комплексного числа 494
— перевода системы логарифмов 134
Момент инерции 396, 428, 429
Моногенная функция 505
Монотонная последовательность 268
— функция 275, условие 315
Муавра формула 496

Н

Набла (оператор ∇) 543
Наблюдений обработка 562—584
Наибольшего сближения точка 249
Наибольшее и наименьшее значения функции: существование 285, 292, нахождение 319—320
Наибольший общий делитель 129.

Наибольший предел 300
Наименьших квадратов метод 569
Наклон касательной 237
Наложение поверхностей при изгибании 260
Наложения теорема 452, 457
Направление в пространстве 218
— на кривой положительное 234
Направлений поле 438
Направляющая: конической поверхности 176, цилиндрической поверхности 174
Направляющие косинусы 218
Натуральная логарифмика 92
— показательная кривая 92
Натуральные логарифмы 134, таблица 58—60, комплексной переменной 499, 511
Натуральный ряд 267
Начало координат 198, 216
Начальная фаза 96, 184
Начальное условие 437, 478
Невозрастающая монотонная последовательность 268
Независимая переменная 269
Независимые уравнения 155
— функции 289, условие независимости 290
— — линейно 451—452
Неизвестное (в уравнении) 136
Нелинейные уравнения (в частных производных) 473
Неограниченная область 270, 287
— функция комплексной переменной 506
Неоднородная краевая задача 468
Неоднородные линейные уравнения, система 149, дифференциальные уравнения 454, система дифференциальных уравнений 457
Неопределенная система линейных уравнений 151
Неопределенности, раскрытие 279
Неопределенные интегралы 331, таблицы 346—383, см. также Интегралов таблицы
— — от аналитической функции 513
Неопределенных коэффициентов метод 131
Непера правило 192
Неперовы (гиперболические, натуральные) логарифмы 134
Неполная форма логарифма (отрицательного) 135
Неполные эллиптические интегралы 343
Неправильная дробь (алгебраическая) 129
Непрерывная случайная величина 564
— функция 281, 291, 505, равномерно 285, 291
Непрерывные множества 266
Непрерывность 281—285, равномерная 285, 291
Непрерывный спектр 554
Неравенства 156—159
Неравенство Буняковского-Коши 157, его аналог 158
— Коши 157
— первой, второй степени 159
— Чебышева 158
Неравномерно сходящийся ряд 298
Несобственный интеграл 398, 401, главное значение 399, 402
— — абсолютно сходящийся 400, 404
Несовместная система линейных уравнений 149
Несократимая дробь (алгебраическая) 130
Неубывающая монотонная последовательность 268
Нечетная функция 275
Неэлементарные функции 273
Неявное задание функции 271, 289, дифференцирование 310
Никомеда конхоида 104
Нормаль: к плоской кривой 236, ее отрезок 237, к пространственной кривой 251, к поверхности 257
— главная 251, уравнение 253
Нормальная плоскость 251, уравнение 253
— система дифференциальных уравнений 455
Нормальное решение линейного дифференциального уравнения 460
— сечение главное 261
— уравнение (в методе наименьших квадратов) 569
— — прямой 203, плоскости 221
Нормальный вид иррационального выражения 132
— закон распределения 566, кривая 92
Нормированная собственная функция 469
Нормирующий множитель 203, 221
Нулевое решение системы линейных уравнений 153
Нули функции 500
Нуль-вектор 519
Нутации угол 219

Ньютона бином 163—164
— метод приближенного решения уравнения 145
— поле 547
— потенциал 548
— формула 163
— — интерполяционная 576
Ньютона-Лейбница теорема 386

О

Обелиск 173
Обильность источника поля 547
Область: одной переменной — связная 270, неограниченная, ограниченная (слева, справа) 270; нескольких переменных — связная 287, 288, односвязная, двусвязная, многосвязная 287
— задания функции 269, 286
— интегрирования 421
— определенности аналитического выражения 271, 288
— существования 271, 288
— сходимости ряда 298
Обозначения математические 11
Обработка наблюдений 562—584
Образующая конической поверхности 176, цилиндрической поверхности 174
— прямолинейная поверхности 2-го порядка 231
Обратная пропорциональность, график 85
— функция 271, существование 284, производная 312
Обратные величины, таблицы 40—41
Обратные гиперболические функции 196, 500, графики 101, интегрирование 346, таблица интегралов 383
— тригонометрические функции 188—190, 273, 500, графики 98—99, интегрирование 346, таблица интегралов 381—383
Обрыв функции 282
Общий интеграл дифференциального уравнения 438
— наибольший делитель 129
Объем тела 395, 428, 429, вращения 395, см. также названия отдельных тел
Объемная производная 541
Объемное дифференцирование 541
Обыкновенное дифференциальное уравнение 437
Овалы Кассини 106
Огибающая 249
Ограниченная область, слева, справа 270
— последовательность 269
— функция 275, 292, 506
Однозначная функция 269, 285,
Однополостный гиперболоид 228
Однородная краевая задача 468
— система линейных уравнений 149
— функция 289
Однородное дифференциальное уравнение 439, линейное 453 система 457, в частных производных 471
Односвязная область 287
Ожидание математическое 564
Округление 116
Окружность 168, длина 169, таблица длины 62—63, уравнение 205, уравнение в комплексной форме 502
Октаэдр 174
Омбилическая точка 262
Оператор Гамильтона (набла, ∇) 543
— дифференцирования (D) 453
— Лапласа (Δ) 544
Операторная запись дифференциального уравнения 453
Операторный метод решения дифференциальных уравнений 458, в частных производных 490
Описанной окружности радиус 187
Определенности область (аналитического выражения) 271, 288
Определенная система линейных уравнений 149, 151
Определенный интеграл 383, вычисление 387 приложения 393, таблица 407—412
Определитель (детерминант) 146
— Вронского 452
— преобразования 218
— системы линейных уравнений 149
Определяющее уравнение 463
Ордината 198, 216
Оригинал (в операторном методе) 458
Ориентированная поверхность 432
Орт 519
— нормали к поверхности 257
Ортогональность (системы функций) 469, 572
Ортоцентр треугольника 166
Осевое поле 529
Основание системы логарифмов 134
Основная теорема алгебры 140
Особая интегральная кривая 443

Особая точка кривой 244, поверхности 259, дифференциального уравнения 444, функции комплексной переменной 506, 508, 516
Особый интеграл, особое решение дифференциального уравнения 438, 443
Остаток, остаточный член ряда 293, 298
Остроградского (Гаусса) теорема, формула 436, 545
— метод интегрирования 338
Ось абсцисс, ординат 198, 216, аппликат 216
— действительная, мнимая: гиперболы 208, комплексной плоскости 493
— поля 529, 532
— полярная 199
— эллипса 206, гиперболы 208, параболы 211
Открытый интервал, открытый конец интервала 270
Относительная погрешность (предельная) 115
Отношение: деление отрезка в данном отношении 200, 219, деление в крайнем и среднем отношении 161
Отображение плоскости 504, конформное 508, 510—511
Отрезок: длина 414, масса 414
—, деление отрезка в данном отношении 200, 219
—, уравнение прямой в отрезках 202, уравнение плоскости в отрезках 221
Отрезок цилиндра 175
Оценка интеграла 386
— корней уравнения 144
— остатка ряда 296
Ошибка простая средняя, средняя квадратическая, вероятная 567, случайная 565, кривая нормального закона распределения ошибок 92
Ошибок теория 565—570

П

Парабол формула (Симпсона) 391
Парабола 211—212, график функции 83, 90
— кубическая 84
— *n*-го порядка 85
— полукубическая 102
Параболическая интерполяция 573, 574
— точка 263
Параболического типа уравнение 476
Параболическое уравнение 478
Параболический цилиндр 232
Параболоид эллиптический 230, вращения 230, гиперболический 231
Параллелепипед 172, объем векторная формула) 527
Параллели (на сфере) 257
Параллелограм 166, площадь (векторная формула) 527
Параллельные прямые, плоскости 170, условие параллельности прямых на плоскости 204, прямых и плоскостей в пространстве 227
Параллельный перенос осей координат 199, 218
Параметр 127, 271, интегралы, зависящие от параметра 404
— нормального закона распределения 566
— фокальный эллипса 206, гиперболы 208, параболы 211
Параметрическое задание функции 271, 289, ее дифференцирование 312
Парсеваля равенство 550
Паскаля треугольник 164
— улитка 105
Первая квадратичная форма 260
Первого порядка дифференциальные уравнения 438—449, в частных производных 470—476
Первообразная функция 330, 513, 538
Первый интеграл 450
Перегиба точка 241—243
Переменная интеграции 384
— комплексная, функции 504—518
— независимая 269
Переменных замена 313—315
— разделение 439, 481
Перенос параллельный осей координат 199, 218
Пересечение, точка пересечения прямых, плоскостей 203, 224—225, условие пересечения прямых в пространстве 223
Перестановки 163
Периметр эллипса 208
Период 184, 275
Периодическая функция 275
Перпендикулярность прямых 204, прямых и плоскостей в пространстве 227
π «пи», отношение длины окружности к диаметру 169, таблица величин, связанных с π, 16
Пикара метод последовательных приближений 447
Пирамида 172, правильная 172, усеченная 173

Пифагора теорема 166
Планиметр 392
Планиметрия 165—169
Плоские кривые 234—250
— фигуры 165—169, площадь 394, 418, 428
Плоское поле скалярное 529, векторное 531
Плоско-параллельное поле 529
Плоскостей пучок 222
Плоскость: уравнение 221, векторное уравнение 525
— и прямая в пространстве 221—227
— касательная 257
— комплексная 493
— нормальная, соприкасающаяся, спрямляющая, 251, их уравнения 253
Плотное всюду множество 265
Плотность распределения вероятностей 564
— спектра 554
Площадь плоской фигуры 418, 428, поверхности 260, 428, 432 см. также названия отдельных фигур
Поверхности 256—264
— кривизна 261, средняя, гауссова 263
— линейный элемент 259
— метрика 260
— площадь 260, 428, 432
— уравнение 220, 256
Поверхностный интеграл см. Интеграл поверхностный
Поверхность вращения 220, 395
— второго порядка 228, 232
— интегральная 471
— коническая 176, 220
— координатная 216
— линейчатая 263
— минимальная 263
— многолистная (римановa) 504
— ориентированная 432
— постоянной кривизны 263
— развертывающаяся 263
— уровня 530
— центральная 228
— цилиндрическая 174, 220
Поворот осей координат 199, 218
Повторный предел 291
Погрешность интерполяции 577
— предельная абсолютная, относительная 115
— средняя квадратическая 572
— функции 116
Подинтегральная функция 331, 384
Подинтегральное выражение 331, 384
Подкасательная 237, полярная 238
Поднормаль 237, полярная 238
Подобные треугольники и многоугольники 166
Подстановки правило (при интегрировании) 332, 387
— символ 387
— Эйлера 340
Подсчет цифр, правила 117
Показатель степени, обобщение понятия 133
Показательная кривая 92, натуральная 92
— интегральная функция 378
— функция 273, таблицы 52—58 графики 92—96, интегрирование 345, таблица интегралов 378—379
— комплексной переменной 498
Показательное выражение 127 133
— уравнение 143
Поле, теория поля 529—548
— безвихревое 538, 546
— векторное 531
— консервативное (потенциальное) 538
— направлений 438
— притяжения (Ньютона) 547
— осевое 529
— плоское 529, 531, плоско-параллельное 529
— Ньютона (Кулона) 547
— скалярное 529
— соленоидальное 546
— сферическое 529, 532
— центральное 529, 532
— цилиндрическое 529, 532
Полином 272
— Лежандра 467, таблица 78
— Чебышева 190
Полное приращение 304
Полный дифференциал 305, интегрируемость 418, уравнение в полных дифференциалах 439, 475
— интеграл 473
— эллиптический интеграл 343, таблица 80
Положительное направление на кривой 234
Положительные корни уравнения 142
Полоска характеристическая 473
Полукубическая парабола 102
Полуоткрытый интервал 270
Полюс 199, 520, функции комплексной переменной 508, 516
Полярная касательная, нормаль, подкасательная, поднормаль 238
— ось 199

Полярное расстояние 217, 257
— уравнение кривой 2-го порядка 213
Полярные координаты 199, в пространстве 217
Полярный угол 199
Понижение порядка дифференциального уравнения 450
Поправка интерполяционная 15
Порядок бесконечно малых 281
— дифференциального уравнения 437, понижение 450
— кривой 201
— разности 575
Последовательность 267, монотонная 268, ограниченная 269, фундаментальная 269, предел последовательности 267, бесконечный 268, признак существования предела 269
Последовательных приближений метод 447
Постоянная интегрирования 331
— произвольная 437
— Эйлера 16, 278
Постоянной кривизны поверхность 263
Постоянные величины, таблица 16
—, метод вариации постоянных 452 457
Потенциал 418, 538
— векторный 546
— запаздывающий 480
— ньютонов 548
—, уравнения теории потенциала 481
Потенциальная функция 538
Потенциальное поле 538
Потенцирование 134
Поток скалярного, векторного поля 540
Правая винтовая линия 255
— координатная система 216
Правило, см. соотв. название
Правильная дробь (алгебраическая) 129
— пирамида 172
— призма 171
— точка 506
Правильные многогранники, таблица элементов 174
— многоугольники 167 таблица элементов 168
Правильный тетраэдр 174
Предел определенного интеграла верхний, нижний 384
— последовательности 267, бесконечный 269, признак существования 269
Предел функции 276—280, 290, признак существования 276, бесконечный 277, слева и справа 277, повторный 291, наибольший 300, комплексной переменной 504
Предельная погрешность абсолютная, относительная 115
Прекращения точка 244
Преобразование координат 199, 218
Преобразования тождественные 127—135
Прецессии угол 219
Приближение в отдельных точках 573
— последовательное, метод 447
— равномерное 571, по методу наименьших квадратов 572
Приближенное изображение функциональной зависимости 571—573
— интегрирование 390
— решение уравнений 144, дифференциальных 492
Приближенные вычисления 115—126, правила 115—118
— формулы 118—119
— числа 116
Приближенный гармонический анализ 558
Призма 171, усеченная 171
Признаки существования предела 276
— сходимости рядов 293—296
Приращение конечное, теорема Лагранжа 317
— полное 304
Притяжения поле (Ньютона) 547
Прогрессия арифметическая 159
— геометрическая 160
Произведения векторов (скалярное, векторное, смешанное, двойное векторное) 522
Производная 302, таблица производных 307
— аналитической функции 505
— векторной функции 528
— высшего порядка, таблица 309
— логарифмическая 308
— неявной функции 310
— обратной функции 312
— объемная (пространственная) 541
— параметрически заданной функции 312
— скалярного поля 534
— слева, справа 303
— частная 303, второго порядка 306, смешанная 306
Производные пропорции 132
Произвольные постоянные, функции 437

Пропорции, преобразование 132
— производные 132
Пропорциональное среднее 161
Пропорциональность обратная, график 85
Пропорциональные части, таблица 72—73
Простые взаимно многочлены 129
— (элементарные) дроби, разложение алгебраической дроби 130, некоторые частные случаи 354
— корни алгебраического уравнения 140
Пространственная производная 541
Пространственные кривые 250—256
Пространство *n*-мерное 286
Противоположные векторы 519
Прямая линия, уравнение и задачи: на плоскости 202—204, в пространстве 222—227, векторное уравнение 525, уравнение в комплексной форме 502
— призма 171
Прямые параллельные, скрещивающиеся 170
Прямых пучок 203
Прямолинейная тригонометрия 179—190
Прямолинейные образующие поверхности 2-го порядка 231
Прямоугольник 166
Прямоугольников формула (приближенного интегрирования) 390
Прямоугольные декартовы координаты 198, 216, 521
Прямоугольный параллелепипед 172
Прямоугольный треугольник 166, формулы 186
Псевдосфера 263
Псевдоэллиптические интегралы 342
Пуассона интеграл 490
— формула 480, 563
— уравнение 481, 548
Путь, вычисление 396
— интегрирования 412
Пучок плоскостей 222
— прямых 203

Р

Работа 396, 537
Равенство Парсеваля 550
Равнобедренный треугольник 166
Равнобочная (равносторонняя) гипербола 85, 86, 210
— трапеция 167
Равномерная непрерывность 285, 291
Равномерная сходимость ряда 298, 299
Равномерное приближение 571
Равносильные бесконечно малые 281
— неравенства 156
— уравнения 136
Равносторонняя (равнобочная) гипербола 85, 86, 210
Равносторонний треугольник 166
Радиан 179, таблица перевода градусов в радианы 171
Радиус вписанной, описанной окружности 187
— кривизны: плоской кривой 239, пространственной кривой 254, главный 261, эллипса 207, гиперболы 210, параболы 212
— кручения 255
— сходимости 300, в комплексной области 498
Радиус-вектор 199, 217, 520
Развертка окружности 112
Развертывающая 248
Развертывающаяся поверхность 263
Разделение переменных 439, 481
Разложение функций в ряд см. Ряды
— дроби на простые (элементарные) см. Дроби
— по собственным функциям 470
Разложения теорема 452
— формула (Хэвисайда) 460
Размещения 163
Разности функции, таблицы 575
Разрыв функции 281, бесконечный, конечный, устранимый 282—283, интегралы от разрывных функций 401
Разрыва точка 281—283
Ранг матрицы 150
Распадающаяся кривая 2-го порядка 213
Распределения закон 564 нормальный 565, кривая нормального закона распределения 92
Распространение тепла, уравнение 481, 485
Расстояние между двумя точками 200, 219, между параллельными плоскостями 222, от точки до прямой 203, 223, от точки до плоскости 222, кратчайшее между двумя прямыми 223
— полярное 217
Расходимость несобственного интеграла 398, 401
Расходящийся ряд 293
Расхождение (дивергенция) 542

Рациональная точка 265
— функция (дробная) 272, графики 85—89, интегрирование 334, таблица интегралов 346—354
Рациональное число 265
Рациональные выражения (целые, дробные) 127
«Regula falsi» (линейная интерполяция) 145
Резольвента 155
Рельеф функции 506
Решение уравнения 136, приближенное 144, системы алгебраических уравнений 136, дифференциального уравнения 437
Риккати уравнение 441
Римана метод решения дифференциальных уравнений 486
— теорема 295
— функция 486
Римана-Коши условия 505
Риманова поверхность 504
Ролля теорема 316
Ромб 167
Ротация, ротор 542
Ряд гармонический 293
— гипергеометрический 468
— Лорана 515
— Маклорена 323, таблица разложений 324—329
— натуральный 267
— Тэйлора 322, 323, 515, 529
— Фурье 470, 549—561, таблица разложений 554—558
Ряды числовые конечные 160, бесконечные 292, таблица сумм 296—297, сходимость абсолютная, условная 295, признаки сходимости 293, знакочередующиеся ряды 296, с комплексными членами 497, 498
— функциональные 298, сходящиеся равномерно, неравномерно 298
— степенные 300, 322, таблица первых членов степеней ряда 300, таблица разложений функций в ряды 324—329, применение к решению дифференциальных уравнений 447, разложение аналитических функций 515—518
— тригонометрические 549—561

С

C, постоянная Эйлера 16, 278
Самоприкосновения точка 244
Самосопряженное уравнение 468
Саррюса правило 148
Сближения наибольшего точки 249
Свободные векторы 519
Связанные векторы 519
Связная область 270, 287, 288
Сегмент круга 169, таблицы 66—70
— шаровой 177
Седло (особая точка) 445
Седлообразная точка 263
Секанс 179, график 97
— гиперболический 194
Сектор криволинейный площадь 394
— круга 169
— шаровой 177
Секущие 169
Серре-Френе формулы 256
Сетка изотермическая 508
Сечение золотое 161
Сечения конические 213—215
— нормальные главные 261
Сигнум 274
Симметрия периодических функций I, II, III, IV рода 551—552
Симпсона формула 391
Синтез гармонический 560
Синус 179, таблица 48—49, график 96
— гиперболический 193, таблица 52—55, график 100
— интегральный 274, 367
Синусов теорема 186, 193
Синусоида 96, общая 96, 184
Синусоидальные величины 184
Система координат 198, 216
— логарифмов 134
— уравнений алгебраических 136, линейных 149
— — дифференциальных 449—453, 455, каноническая 474, характеристическая 471, 473
Скаляр, скалярная величина 519
Скалярное поле 529
— произведение 522
Скалярный поток 540
Скобки, вынесение за скобки 128
Скользящие векторы 519
Скрещивающиеся кривые 170
Сложная функция 273, дифференцирование 306, 310
Слой шаровой 177
Случайное событие 562
Случайные величины 564
— ошибки 565
Смешанная производная 306
Смешанного типа уравнение 476
Смешанное произведение 522
Смещения теорема 459
Собственная функция 469, нормированная 469
Собственное значение краевой задачи 469
Событие случайное 562

Соединение 163
Сокращенного умножения и деления формулы 128
Соленоидальное поле 546
Соприкасающаяся плоскость 251, уравнение 253
Сопровождающий трехгранник 251
Сопряженные гармонические функции 505
– гиперболы 209
– диаметры эллипса 207, гиперболы 210
– комплексные числа 495
– корни уравнения 141
– линейные уравнения 486
Сочетания 163
Спектр, плотность спектра 554
Специальные функции 274, таблицы 75–82
Спирали 111–113
Спираль Архимеда 111, гиперболическая 111, логарифмическая 112, 503
Сплюснены, эллипсоид вращения 228
Спрямляюща плоскость 251, уравнение 253
Среднее арифметическое 160
– взвешенное 168
– геометрическое (пропорциональное) 161
– значение, теорема о среднем значении 385
– – случайной величины 564
– квадратическое 161
Средних метод 578
Средняя величина 160–161
– квадратическая погрешность 572
– кривизна поверхности 263
– линия треугольника 166, трапеции 167
– ошибка простая, квадратическая 567
Стандарт 567
Степени, преобразования 133, целых чисел, таблицы 38–39, 43
Степенная функция, графики 85, 89, 90
Степенной ряд 300, таблица первых членов 300
Степенные ряды, разложение функций 322, таблица 324–329, в комплексной области 498
Степень однородности 289, уравнения 136
Стереометрия 170–178
Стержня колебание 482, распространение тепла в стержне 485
Стильтьеса интеграл 398
Стирлинга формула 161, интерполяционная 576
Стокса теорема, формула 435, 545
Стрелка сегмента круга, таблицы 67–70
Строфоида 103
Струны колебания 482
Суммирования индекс 524
Сумма ряда 292, 298
Существенно особая точка 508, 516
Существования область 271, 288
– теоремы: первообразной функции 331, определенного интеграла 384, криволинейного интеграла 413, 415, двойного интеграла 421, поверхностного интеграла 430, 433, решения дифференциального уравнения 438, 449
Сфера 176, 190–191, 228, 263
Сферическая тригонометрия 190–193
Сферические координаты 217
Сферический избыток 191
– треугольник 191, решение 192–193
– эксцесс 191
Сферическое поле 529, 532
Схемы для гармонического анализа 559
Сходимости круг 498
– область 298
– радиус 300, 498
Сходимость несобственного интеграла 398, 401, абсолютная 400, 404
Сходимость ряда абсолютная, условная 295
Сходящийся ряд 292, равномерно, неравномерно 298, признаки 293
Счетная линейка 120–126

Т

Таблица с двумя входами 288
Таблицы: элементарных функций 16–74, специальных функций 75–82, см. также соотв. названия
Тангенс 179, таблица 50–51, график 97
– гиперболический 193, таблица 52–55, график 100
Тангенсов теорема 186
Тангенсоида 97
Телеграфное уравнение 487
Телесный угол 171
Тело: задача о двух телах 474, объем 395, 428, 429, объем тела вращения 395
Теорема, см. соотв. название
Теория, см. соотв. название
Тепло, уравнение распространения 481, 485

Тетраэдр 173, правильный 174
Тождественное неравенство 156
Тождественные преобразования 127—135
Тождество 127, 136
Тока линии 534
Тор 178
Точечные источники поля 547
Точка n-мерного пространства 286
— наибольшего сближения 249
— особая кривой: асимптотическая, возврата (заострения), излома, изолированная, кратная (двойная, тройная), прекращения, самопересечения, узловая 244
— — дифференциального уравнения: изолированная, узел, седло, фокус, центр 444—446
— — функции комплексной переменной; устранимая, полюс, существенно особая 506—508, 516
— перегиба 241
— пересечения прямых 203, прямых и плоскостей 224—225
— поверхности: эллиптическая, гиперболическая, параболическая, круговая (омбилическая) 262, 263, коническая 259
— правильная 506
— разрыва 281—283
— рациональная 265
— характеристическая 249
Точки функция 286, 529
Точности мера 567
Трактриса 114
Трансцендентные кривые 201
— уравнения 143—146
— функции 272, элементарные 273, интегрирование 345, таблица интегралов 377
Трансцендентные числа 266
Трапеций формула (приближенного интегрирования) 390
Трапеция 167, равнобочная 167, криволинейная (площадь) 394
Треугольник 165—166, площадь (в аналитической геометрии) 201, решение (в тригонометрии) 186
— Паскаля 164
— сферический 191, 192—193
Трехгранник сопровождающий 251
Трехгранный угол 171
Трехкратный интеграл см. Тройной интеграл
Трехчлен квадратный, график 83
Тригонометрическая интерполяция 559, 573
Тригонометрические уравнения 144
— функции 179, 273, таблицы 48—55, графики 96—98, интегрирование 345, таблица интегралов 366—377, комплексной переменной 499
— — обратные 188—190, 273, графики 98—99, интегрирование 346, таблица интегралов 381—383, комплексной переменной 500.
Тригонометрия 179—197, прямолинейная 179—190, сферическая 190—193, гиперболическая 193—197
Тройная точка 244
Тройной (трехкратный) интеграл 421, вычисление 425, приложения 429
Трохоиды 108
Труба цилиндрическая 175
Тэйлора ряд 322, 323, для функции комплексной переменной 515, для векторной функции 529
Тэйлора теорема, формула 322, 323
Тяжести центр 200, 219, 397, 428, 429

У

Убывающая монотонная последовательность 268
— прогрессия: арифметическая 159, геометрическая 160
Угловой коэффициент 202
Углы, радианное и градусное измерение 179
— Эйлера 219
Угол (в геометрии): между скрещивающимися прямыми 170, вписанный 168, двугранный 170, линейный 170, многогранный 170, трехгранный 171, телесный 171
— между прямыми 204, прямыми и плоскостями 226—227, кривыми 238, кривыми на поверхности 260, векторами 527
— нутации 219
— полярный 199
— прецессии 219
Удлиненная циклоида 108, гипоциклоида 110, эпициклоида 110
Узел (особая точка дифференциального уравнения) 444
Узловая точка 244
Укороченная циклоида 108, гипоциклоида 110, эпициклоида 110
Улитка Паскаля 105
Ультрагиперболическое уравнение 478
Умножение сокращенное, формулы 128
Упорядоченное множество 265

Уравнение 127, 135—155, см. также соотв. название
Уровня поверхности, линии 530
Усеченная пирамида 173, призма 171
Усеченный конус 176, цилиндр 175
Условие, см. соотв. название
Условно сходящийся ряд 295
Условное уравнение 569
Условный максимум и минимум 322
Устранимая особая точка 508, 516
Устранимый разрыв 282

Ф

Фаза начальная 96, 184
Факториал 161, таблица 42, таблица обратных величин 42
Ферма теорема 316
Фигуры плоские 165—169
Физики математической уравнения 478
Фокальное свойство эллипса 206, гиперболы 208 параболы 211
Фокальный параметр эллипса 206 гиперболы 208, параболы 211
Фокус, особая точка дифференциального уравнения 446
Фокусы эллипса 206, гиперболы 208, параболы 211, кривой 2-го порядка 213
Форма квадратичная первая 260, вторая 262
Формула, см. соотв. название
Френе-Серре формулы 256
Фундаментальная последовательность 269
— система решений уравнений: алгебраических 153, дифференциальных 451
Функциональный ряд 298
Функция 269, 285, см. также соназвание
Фурье коэффициенты 549
— ряд 470, 549—561 таблица разложений 554—558
— интеграл 553

Х

Характеристика логарифма 134
— семейства кривых 249
— для уравнений в частных производных 472, 476
Характеристическая точка 249
— система 471, 473
Характеристическое уравнение 444, 453, 455
Хэвисайда-Карсона операторный метод 458, формула разложения 460, таблица изображений 462

Ц

Целая (рациональная) функция 272, интегрирование 334
Целочисленного аргумента функция 270
Целые рациональные выражения 127, 128—129
Центр, особая точка дифференциального уравнения 446
— вписанной, описанной окружности 165
— кривизны 240
— поверхности 228
— тяжести 200, 219, 397, 428, 429
— эллипса 206, гиперболы 208
Центральная поверхность 228
Центральное поле скалярное 529, векторное 532
Цепная линия 100, 113
Цепное правило 309
Циклическая (круговая) частота 184
Циклоида 107, удлиненная, укороченная 108
Цилиндр 174, круглый 175, усеченный 175, эллиптический, гиперболический, параболический 232
Цилиндра отрезок 175
Цилиндрическая поверхность 174, уравнение 220
— труба 175
Цилиндрическое поле 529, векторное 532
Цилиндрические координаты 217
— функции 464, таблицы 76—77
Циркуляция 417, 537
Циссоида 103
Цифр подсчет, правила 117
Цифры значащие 115

Ч

Части, интегрирование по частям 332, 388
— пропорциональные, таблица 72—73
Частичная сумма ряда 292
Частная производная 303, уравнение с частными производными 437, 470—492
Частное решение дифференциального уравнения 438
Частный дифференциал 304
— интеграл 438
Частота колебания 96, 184, события 563

Чебышева неравенство 158
— *полином* 190
— теорема 341
— теория приближений 572
Четная функция 275
Четырехугольник 167
Чисел больших закон 564
Числа: рациональные 265, иррациональные 266, действительные (вещественные) 266, трансцендентные 266, комплексные 493, чисто мнимые 493
— Бернулли 297
— приближенные, действия над ними 116
— Эйлера 297
Численное интегрирование дифференциальных уравнений 448
Числовая последовательность 267
Числовой интервал 270
— ряд 292, конечные ряды 160, бесконечные ряды 296—297 (таблицы)
Чисто мнимые числа 493
Чистого вращения угол 219
Член последовательности 267
— ряда 292, остаточный 293, 298

Ш

Шаблоны для гармонического анализа 559
Шаг таблицы 575
Шар, сфера 176, 190—191, 228, 263
Шаровой сектор, сегмент, слой 177
Шаровые функции 467, таблица 78
Шкала логарифмическая 120
Шкалы счетной линейки 120—121
Штурма теорема, функции 142
Штурма-Лиувилля задача 469

Э

Эвольвента 248, окружности 112
Эволюта 248
Эйлера интеграл 162, 405
— подстановки 340
— постоянная 16, 278
— теорема (о многогранниках) 174
— углы 219
Эйлера уравнение 455
— *формула в теории поверхностей* 261, в комплексных числах 499, в рядах Фурье 549
Эквивалентные бесконечно малые 281
Экстремум 318
Эксцентриситет эллипса 206, гиперболы 208, кривой второго порядка 213
Эксцесс сферический 214
Элемент линейный поверхности 259
— определителя 146
— площади 422, 423, 424, объема 425, 426, 427, поверхности 431
— поля направлений 438
Элементарная математика 115—197
Элементарные (простые) дроби, разложение алгебраической дроби 130, некоторые случаи 354
— функции 272, их непрерывность и точки разрыва 283—284, таблицы 16—74, графики 83—101
— — трансцендентные 273
Эллипс 206—208, площадь 207, периметр 208, график иррациональной функции 90, уравнение в комплексной форме 503
Эллипсоид, эллипсоид вращения 228
Эллиптическая точка 262
Эллиптические интегралы 342, 343, таблицы 79, 80
Эллиптический параболоид 330
— цилиндр 232
Эллиптического типа уравнение 476
Эллиптическое уравнение 478
Эмпирические формулы 571, подбор 578—584
Эпитрохоида 110
Эпициклоида 108, удлиненная, укороченная 110

Я

Явное задание функции 271, 289
Якобиан 290

Подписано в печать 20.04.09.
Бумага офсетная. Гарнитура Литературная. Формат 70×100 $^{1}/_{32}$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 24,70. Тираж 2000 экз.

Заказ № .

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ФГУП ИПК «Ульяновский Дом печати»
432980, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14