

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

---

Санкт-Петербургский государственный  
электротехнический университет «ЛЭТИ»

---

**КВАНТОВАЯ И ОПТИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОНИКА**

Методические указания  
к проведению практических занятий

Санкт-Петербург  
Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»  
2014

УДК 621.38

Квантовая и оптическая электроника: методические указания к проведению практических занятий/ сост. Н. Г. Гоголева. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2014. 32 с.

Содержат примеры решения типовых задач по следующим темам: «Энергия молекулы», «Квантовые переходы», «Уширение спектральных линий», «Пассивные оптические резонаторы», «Усилители и генераторы оптического излучения». Перед каждой темой приведены основные сведения, используемые при решении задач.

Итоговый контроль осуществляется в виде написания контрольных работ, содержащих задачи, аналогичные представленным в данных указаниях. Студент должен проявить умение правильно решить задачи, защитить свой метод решения и продемонстрировать знание физики рассматриваемых явлений.

Составлены в соответствии с программой дисциплины «Квантовая и оптическая электроника» и предназначены для бакалавров, обучающихся по направлению «Электроника и наноэлектроника». Могут быть полезны бакалаврам при изучении дисциплины «Лазерная физика» и магистрантам, обучающимся по программам «Квантовая и оптическая электроника», «Солнечная гетероструктурная фотоэнергетика».

Редактор И. Б. Синишева

---

Подписано в печать 16.12.14. Формат 60×84 1/16.

Бумага офсетная. Печать цифровая. Печ. л. 2.0.

Гарнитура «Times New Roman». Тираж 46 экз. Заказ 197.

---

Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»  
197376, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5

## **Некоторые физические постоянные**

$h \approx 6.625 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – постоянная Планка,  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ .

$c \approx 3 \cdot 10^8$  м/с – скорость света в вакууме.

$e \approx 1.6 \cdot 10^{-19}$  Кл – заряд электрона.

$\epsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м – электрическая постоянная.

$k \approx 1.38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К – постоянная Больцмана.

$m_N \approx 1.67 \cdot 10^{-27}$  кг – масса нуклона.

$m_e \approx 9.1 \cdot 10^{-31}$  кг – масса электрона.

# 1. ЭНЕРГИЯ МОЛЕКУЛЫ

## 1.1. Внутренняя энергия молекулы

Молекулярные спектры существенно отличаются от спектров атомов, так как движение образующих молекулу частиц является более сложным. Наряду с движением электронов в молекуле могут происходить периодическое изменение относительного расположения ядер (колебательное движение молекулы), а также периодические изменения ее ориентации в пространстве как целого (вращательное движение молекулы).

Полная энергия молекулы  $E_M$  состоит из внутренней энергии молекулы  $E_{\text{вн}}$  и кинетической энергии  $E_K$  движения центра масс:  $E_M = E_{\text{вн}} + E_K$ . Внутренняя энергия молекулы состоит, приблизительно, из энергии движения электронов  $E_{\text{эл}}$ , энергии колебаний атомов в молекуле  $E_{\text{кол}}$  и энергии вращения молекулы  $E_{\text{вр}}$ :

$$E_{\text{вн}} \approx E_{\text{эл}} + E_{\text{кол}} + E_{\text{вр}}, \text{ причем } E_{\text{вр}} \ll E_{\text{кол}} \ll E_{\text{вн}}.$$

Все эти виды движения квантованы. Имеется система электронных, колебательных и вращательных уровней. Энергетический зазор между двумя электронными уровнями составляет, приблизительно,  $\Delta E_{\text{эл}} \geq 1 \text{ эВ}$ , между двумя колебательными уровнями  $0.01 \text{ эВ} \leq \Delta E_{\text{кол}} \leq 1 \text{ эВ}$ , между двумя вращательными уровнями  $\Delta E_{\text{вр}} \leq 0.01 \text{ эВ}$ . Этим энергетическим зазорам соответствуют спектры:

$\lambda > 100 \text{ мкм}$  (вращательные);

$1 \text{ мкм} < \lambda < 100 \text{ мкм}$  (колебательные);

$\lambda < 1 \text{ мкм}$  (электронные).

Для усиления излучения в оптическом диапазоне используют переходы между электронными уровнями. Для усиления в ИК-области используют колебательно-вращательные переходы. Описание квантования электронной энергии на примере атома водорода приведено в приложении. На квантовании колебательной и вращательной энергий остановимся более подробно.

## 1.2. Квантование колебательной энергии двухатомной молекулы

Колебательные спектры можно изучать в любом агрегатном состоянии вещества – газообразном, жидким и твердом.

Вопрос об аналитическом виде кривых потенциальной энергии  $U(r)$  двухатомной молекулы в широкой области значений  $r$  достаточно сложен.

Вместе с тем известно, что данные кривые обладают минимумом при  $r = r_0$ . Поэтому независимо от вида функции  $U(r)$  ее можно разложить в ряд в окрестности  $r_0$  по параметру  $q = r - r_0$ . При этом получим

$$U(r) = U(r_0) + \left( \frac{\partial U}{\partial r} \right)_{r_0} (r - r_0) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \right)_{r_0} (r - r_0)^2 + \dots .$$

При малых значениях  $r - r_0$  потенциал  $U(r - r_0) \approx \frac{1}{2} K (r - r_0)^2$ , где

$$K = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \right)_{r_0} .$$

Таким образом, при небольших смещениях ядер из положения равновесия реальная кривая  $U(r)$  с хорошей точностью аппроксимируется кривой параболического типа, т. е. малые колебания двухатомных молекул могут рассматриваться как колебания гармонического осциллятора. Можно показать, что собственная частота осциллятора, которым моделируется реальная двухатомная молекула, в этом случае описывается формулой [1]  $\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{\mu}}$ , где

$\mu$  – приведенная масса двухатомной молекулы:  $\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$ . Здесь  $K$  – коэф-

фициент квазиупругой силы,  $m_1$  и  $m_2$  – массы ядер, составляющих молекулу.

Как вытекает из результатов решения уравнения Шредингера с использованием потенциальной функции в вышеприведенной форме, энергия гармонического осциллятора квантована и определяется следующей простой формулой:

$$E_{\text{кол}} \nu = (\nu + 1/2) \hbar \nu_0,$$

где  $\nu = 0, 1, 2, 3\dots$  – колебательное квантовое число. Этому выражению соответствует система равноотстоящих уровней энергии, расстояние между которыми составляет  $\hbar \nu_0$ . Правило отбора для переходов между этими уровнями  $\Delta \nu = \pm 1$ .

При значительных амплитудах колебаний аппроксимировать двухатомную молекулу гармоническим осциллятором уже нельзя. Реальные колебания молекул всегда в большей или меньшей степени ангармоничны. Естественно, что в этих условиях необходимо рассматривать общий вид

функции  $U(r)$  для широкой области значений  $r$ . Одним из наиболее известных выражений такого рода является формула Морзе [1]:

$$U(r - r_0) = D \left[ 1 - \exp(-a(r - r_0)) \right]^2.$$

Здесь  $a$  – постоянная, характеризующая форму кривой, а  $D$  – энергия диссоциации. Легко видеть, что при  $r \rightarrow \infty$  потенциал  $U(r - r_0) \rightarrow D$ . С другой стороны, при небольших значениях  $(r - r_0)$  можно, разложив экспоненту в ряд по параметру  $(r - r_0)$  и ограничившись двумя первыми членами разложения, переписать формулу Морзе в виде

$$U(r - r_0) = Da^2 (r - r_0)^2.$$

Таким образом, для малых колебаний формула Морзе переходит в уравнение параболы, что является большим достоинством этого приближения. Сопоставив последнюю формулу с формулой для гармонического осциллятора, при малых  $(r - r_0)$  получим, что  $K = 2Da^2$ , т. е. коэффициент квазиупругой силы при прочих равных условиях должен быть пропорционален энергии диссоциации молекулы.

Потенциальной кривой с использованием формулы Морзе соответствуют квантованные значения колебательной энергии ангармонического осциллятора [1]

$$E_{\text{кол}} v = (v + 1/2)hv_0 - (hv_0)^2(v + 1/2)/(4D),$$

где  $v$  – колебательное квантовое число, принимающее, как и ранее, значения 0, 1, 2, 3... Легко видеть, что эти уровни уже не располагаются на одинаковых расстояниях друг от друга, а образуют систему неравноотстоящих уровней, которые постепенно сближаются по мере роста  $v$  и, наконец, сливаются при  $E_{\text{кол}} v \rightarrow D$ . Существенно, что для ангармонического осциллятора претерпевают изменения и правила отбора  $\Delta v = 1, 2, 3\dots$ , т. е. в этом случае между любыми уровнями возможны радиационные переходы.

### 1.3. Квантование вращательной энергии двухатомной молекулы

В наиболее чистом виде вращательные спектры молекул можно наблюдать при изучении разреженных газов. Основной моделью вращательного движения двухатомных молекул в спектроскопии служит модель жесткого ротора, представляющего собой две массы, находящиеся друг от друга на фиксированном расстоянии (равновесное межъядерное расстояние). Мож-

но показать, что квантование вращательной энергии для двухатомной молекулы описывается выражением ([2], [3])

$$E_{\text{вр}} = BhJ(J+1).$$

Здесь  $B$  – вращательная постоянная ( $[B] = \text{Гц}$ ):  $B = \frac{\hbar}{8\pi^2 I}$ ,  $J$  – вращательное

квантовое число,  $I$  – момент инерции молекулы относительно оси, перпендикулярной линии, соединяющей ядра и проходящей через центр масс:  $I = \mu r_0^2$ , где  $r_0$  – расстояние между ядрами,  $\mu$  – приведенная масса.

Таким образом, имеется система неравноотстоящих уровней, расстояние между которыми возрастает по мере увеличения квантового числа  $J$ . Согласно квантовой механике между этими уровнями возможны радиационные переходы, удовлетворяющие следующим правилам отбора:  $\Delta J = \pm 1$ . Вращательный уровень с квантовым числом  $J$  имеет вырождение  $g(J) = 2J + 1$ .

В условиях теплового равновесия более всего заселен не основной уровень ( $J = 0$ ), а уровень, для которого  $2J + 1 = \sqrt{\frac{2kT}{Bh}}$ .

Реальные молекулы не являются жесткими ротаторами. Действительно, на ядра при вращении действуют центробежные силы, которые изменяют межъядерное расстояние, а следовательно, и момент инерции. Кроме того, в процессе вращения в молекуле могут происходить колебания ядер. Учет этих факторов (переход к модели нежесткого ротатора) приводит к более строгому выражению для вращательной энергии [1]:

$$E_{\text{вр}} = BhJ(J+1) + CJ^2(J+1)^2,$$

где  $C$  – постоянная. Второй член практически всегда намного меньше первого, и им в большинстве случаев пренебрегают, рассматривая задачу в приближении жесткого ротатора.

Необходимо отметить, что чисто вращательными спектрами поглощения и испускания обладают не все двухатомные молекулы. Как показывают теория и эксперимент, такие спектры характерны лишь для молекул, имеющих электрический дипольный момент. В связи с этим у симметричных бездипольных молекул типа  $\text{H}_2$ ,  $\text{O}_2$ ,  $\text{Cl}_2$  и т. д. радиационные переходы между вращательными подуровнями запрещены и могут наблюдаться лишь в специальных условиях (например, при больших давлениях газа, приводящих к

появлению у молекул индуцированного дипольного момента, обусловленного межмолекулярными взаимодействиями). С другой стороны, такие полярные молекулы, как CO, обладают весьма развитыми и интенсивными спектрами, позволяющими получать важную информацию о некоторых физико-химических параметрах молекул.

#### 1.4. Примеры решения задач

**Задача 1.** Вычислить расстояние между центрами тяжести ядер в молекуле NaCl. Вращательная постоянная молекулы NaCl равна  $B = 6.54 \cdot 10^9$  Гц.

*Решение:*

$$I = \mu r_0^2 \Rightarrow r_0 = \sqrt{\frac{I}{\mu}} ; \mu = \frac{m_{\text{Na}} \cdot m_{\text{Cl}}}{m_{\text{Na}} + m_{\text{Cl}}}.$$

Число нуклонов в атоме натрия  $N(\text{Na}) = 23$ , число нуклонов в атоме хлора  $N(\text{Cl}) = 35$ . Масса нуклона  $m_N = 1.67 \cdot 10^{-27}$  кг. Тогда получим:

$$\mu = \frac{23 \cdot 35}{23 + 35} \cdot 1.67 \cdot 10^{-27} \approx 2.32 \cdot 10^{-26} \text{ кг.}$$

Зная вращательную постоянную, можно найти момент инерции как

$$B = \frac{h}{8\pi^2 I} \Rightarrow I = \frac{h}{8\pi^2 B} = \frac{6.6 \cdot 10^{-34}}{8 \cdot \pi^2 \cdot 6.54 \cdot 10^9} \approx 1.27 \cdot 10^{-45} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Отсюда

$$r_0 = \sqrt{\frac{I}{\mu}} = \sqrt{\frac{1.27 \cdot 10^{-45}}{2.32 \cdot 10^{-26}}} \approx 2.34 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

*Ответ:*  $r_0 \approx 2.34 \cdot 10^{-10}$  м.

**Задача 2.** Показать, что если упругие постоянные связей N-N и изоэлектронной молекулы CO считать приблизительно одинаковыми, то частота перехода ( $v = 1 \rightarrow v = 0$ ) молекулы N<sub>2</sub> окажется равной частоте  $v$  соответствующего перехода молекулы CO (число нуклонов в атоме углерода – 12, в атоме азота – 14, в атоме кислорода – 16).

*Решение:*

$$\mu(\text{N}_2) \approx 7 \text{ а.е.м.}, \mu(\text{CO}) \approx 6.86 \text{ а.е.м.}$$

По условию  $K(N_2) \approx K(CO)$ . Поэтому  $\frac{v(N_2)}{v(CO)} \approx \sqrt{\frac{\mu(CO)}{\mu(N_2)}} = 0.989$ .

*Ответ:*  $\frac{v(N_2)}{v(CO)} \approx 0.989$ .

## 2. КВАНТОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ

Квантовый переход – это скачкообразный переход квантовой системы (атома, молекулы) с одного уровня энергии на другой. Пусть в квантовой системе имеются уровни  $i$  и  $k$  с энергиями  $E_i$  и  $E_k$  ( $E_k < E_i$ ), населенностями  $N_i$  и  $N_k$  (числом частиц в 1 см<sup>3</sup> на уровнях  $E_i$  и  $E_k$  соответственно), степенями вырождения  $g_i$  и  $g_k$  (степень вырождения – число состояний, соответствующих данному уровню энергии, но различающихся каким-либо квантовым числом). При переходе с более высокого уровня энергии  $E_i$  на более низкий  $E_k$  система отдает энергию, равную  $E_i - E_k$ , а при обратном переходе поглощает ее. Если атом находится в состоянии  $i$ , то в дальнейшем он может перейти в состояние  $k$  с меньшей энергией самопроизвольно или в результате взаимодействия с внешним полем.

Различают *излучательные* и *безызлучательные* переходы. При излучательных квантовых переходах система излучает или поглощает электромагнитное излучение. В случае безызлучательных переходов система отдает или получает энергию при взаимодействии с другими системами.

Квантовые переходы с излучением могут происходить самопроизвольно (спонтанно) и вынужденно (под действием внешнего излучения).

### 2.1. Спонтанные переходы

Процесс самопроизвольного перехода системы в состояние с меньшей энергией называется *спонтанным переходом*, а сопровождающее его излучение – *спонтанным излучением*. При спонтанном излучении поляризация и направление фотонов могут быть любыми. Переход можно характеризовать среднестатистическим временем жизни  $\tau_{\text{сп}}$ . Спонтанное время жизни  $\tau_{\text{сп}}$  – время жизни в верхнем состоянии при спонтанном излучении. Эйнштейн предложил ввести коэффициент  $A_{ik} = 1/\tau_{\text{сп}}$ . Численно  $A_{ik}$  равен числу спонтанных переходов, приходящихся в среднем в 1 с на 1 частицу, находящуюся в состоянии  $E_i$ , т. е.  $A_{ik}$  характеризует вероятность спонтанного перехода  $i \rightarrow k$ .

Если на  $E_i$  находится  $N_i$  частиц, то за 1 с в этой системе произойдет  $Z_{ik}$  спонтанных переходов:  $Z_{ik} = A_{ik} N_i$ . Величина  $A_{ik}$  называется *коэффициентом Эйнштейна для спонтанного испускания*. Коэффициент  $A_{ik}$  связан с частотой

$$\text{перехода } \nu_{ik} \text{ как } A_{ik} \approx \frac{16\pi^4 \nu_{ik}^3 e^2 r_0^2}{3\epsilon_0 h c^3}, \text{ где } r_0 - \text{характерный размер частицы.}$$

При отсутствии внешнего излучения имеются только два процесса – спонтанные и безызлучательные переходы. Степень преобладания того или иного процесса характеризуется *квантовым выходом люминесценции*. Квантовый выход люминесценции  $\phi$  равен отношению числа излученных фотонов к числу частиц, первоначально переведенных на возбужденный уровень. Можно показать, что  $\phi = \tau / \tau_{\text{сп}}$ , где  $\tau$  – наблюдаемое время жизни, вычисляемое как  $1/\tau = 1/\tau_{\text{сп}} + 1/\tau_{\text{без}}$  ( $\tau_{\text{без}}$  – время безызлучательной релаксации).

## 2.2. Вынужденные переходы

Переходы между уровнями под действием внешнего излучения частоты  $\nu_{ik} = \frac{E_i - E_k}{h}$  называют *вынужденными*. Возможны вынужденные переходы как в состояния с меньшей энергией (при этом имеет место *вынужденное излучение*), так и в состояния с большей энергией (при этом имеет место *вынужденное поглощение*). При вынужденном излучении фотон имеет точно такое же направление и поляризацию, что и фотон, вызывающий это испускание; частота поглощенного фотона также в точности совпадает с частотой вынуждающего излучения. Вероятность вынужденных переходов  $k \rightarrow i$  и  $i \rightarrow k$  характеризуется коэффициентами Эйнштейна  $B_{ki}$  и  $B_{ik}$  соответственно. Число вынужденных переходов пропорционально числу фотонов частоты  $\nu$  в единице объема (спектральной плотности энергии вынуждающего излучения  $\rho_\nu$  на частоте перехода  $\nu$ ).

Для вынужденного поглощения число фотонов  $Z_{ki}$ , поглощенных в 1 см<sup>3</sup> за 1 с, пропорционально населенности нижнего уровня  $N_k$  и спектральной плотности излучения  $\rho_\nu$ :  $Z_{ki} = B_{ki} N_k \rho_\nu$ . Величина  $B_{ki}$  называется *коэффициентом Эйнштейна для поглощения*.  $B_{ki}$  характеризует вероятность вынужденного поглощения и равна числу фотонов, поглощаемых в среднем одной частицей за 1 с при единичной плотности излучения  $\rho_\nu = 1$ .

Для вынужденного испускания число фотонов  $Z_{ik}$  пропорционально населенности верхнего уровня и спектральной плотности излучения:  $Z_{ik} = B_{ik} N_i \rho_v$ . Величина  $B_{ik}$  называется *коэффициентом Эйнштейна для испускания*.  $B_{ik}$  характеризует вероятность вынужденного испускания и равна числу фотонов, испускаемых в среднем одной частицей за 1 с при единичной плотности излучения  $\rho_v = 1$ . Существенно, что  $B_{ik}$  и  $B_{ki}$  рассчитываются на единицу плотности излучения.

Можно показать, что коэффициенты Эйнштейна связаны соотношениями  $A_{ik} = \frac{8\pi h v_{ik}^3}{c^3} B_{ik}$ ,  $g_k B_{ki} = g_i B_{ik}$ . Для квантовых переходов между невырожденными уровнями последняя формула сводится к  $B_{ki} = B_{ik}$ , т. е. к равенству вероятностей вынужденных переходов, – прямого и обратного.

### 2.3. Усиливающие и поглощающие среды. Инверсия населенностей

Отношение числа частиц на уровнях  $i$  и  $k$  с учетом вырождения:

$$\frac{N_i}{N_k} = \frac{g_i}{g_k} \exp\left(-\frac{E_i - E_k}{kT}\right).$$

Рассматривая прохождение излучения через среду, можно выделить три случая.

1. При  $N_k/g_k < N_i/g_i$  число актов вынужденного испускания, вызванного волной с частотой  $v_{ik} = \frac{E_i - E_k}{h}$ , превышает число актов вынужденного поглощения и среда усиливает эту волну. Вводят величину  $\Delta N = N_i/g_i - N_k/g_k$ . Если  $\Delta N > 0$ , то говорят, что среда обладает инверсией населенностей.
2. При  $N_k/g_k > N_i/g_i$  число актов вынужденного поглощения превышает число актов вынужденного излучения и среда поглощает эту волну.
3. При  $N_k/g_k = N_i/g_i$  число актов вынужденного испускания равно числу актов вынужденного поглощения. В этом случае при прохождении через среду плотность потока фотонов не меняется.

Величину  $\alpha = \sigma_{ik} \Delta N$  называют коэффициентом усиления, а  $\chi = -\alpha$  – коэффициентом поглощения. Здесь  $\sigma_{ik}$  – сечение поглощения (является характеристикой вещества).  $[\sigma_{ik}] = \text{см}^2$ , соответственно  $[\alpha] = [\chi] = \text{см}^{-1}$ .

## 2.4. Примеры решения задач

**Задача 1.** Рассчитать, во сколько раз отношение  $A_{ik}/B_{ik}$  в оптическом диапазоне ( $\lambda \approx 1 \text{ мкм}$ ) больше, чем отношение  $A_{ik}/B_{ik}$  в диапазоне СВЧ ( $\lambda \approx 1 \text{ см}$ ).

*Решение:*

$$\frac{\left. \frac{A_{ik}}{B_{ik}} \right|_{\text{опт}}}{\left. \frac{A_{ik}}{B_{ik}} \right|_{\text{СВЧ}}} = \left( \frac{\nu_{ik}|_{\text{опт}}}{\nu_{ik}|_{\text{СВЧ}}} \right)^3$$

$$\text{Ответ: } \frac{\left. \frac{A_{ik}}{B_{ik}} \right|_{\text{опт}}}{\left. \frac{A_{ik}}{B_{ik}} \right|_{\text{СВЧ}}} = 10^{12}.$$

**Задача 2.** Имеется молекула CO. Вращательная постоянная  $B = 58 \ 000 \text{ МГц}$ . Можно ли получить усиление излучения между вращательными уровнями  $J = 0$  и  $J = 1$  при температуре 300 К?

*Решение.* Чтобы получить усиление между уровнями  $i$  и  $j$  надо, чтобы  $N_i/N_j > g_i/g_j$ . Отношение числа частиц на уровнях  $i$  и  $j$  с учетом вырождения:

$$\frac{N_i}{N_j} = \frac{g_i}{g_j} \exp\left(-\frac{E_i - E_j}{kT}\right).$$

Вращательный уровень с квантовым числом  $J$  имеет вырождение  $g(J) = 2J + 1$ . Тогда для  $J = 0$  и  $J = 1$  получим  $g(J=0) = 1$ ,  $g(J=1) = 3$ .

Квантование вращательных уровней двухатомной молекулы описывается выражением

$$E_{\text{вр}} = BhJ(J+1).$$

Тогда для  $J = 0$  и  $J = 1$  получим  $E_{\text{Вр}}(J = 0) = 0$ ,  $E_{\text{Вр}}(J = 1) = 2Bh$ .

Таким образом,

$$\frac{n_{J=1}}{n_{J=0}} = 3 \exp\left(-\frac{-2hB}{kT}\right) \approx 2.946, \quad \frac{g(J=1)}{g(J=0)} = 3.$$

Итак,  $N_i/N_j < g_i/g_j$ , поэтому усиления не будет.

*Ответ:* в данной системе усиления получить нельзя.

**Задача 3.** Населенность верхнего и нижнего уровней равна, соответственно,  $N_2 = 1 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$  и  $N_1 = 0.5 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ . Кратность вырождения верхнего уровня  $g_2 = 2$ . Нижний уровень не вырожден, т. е.  $g_1 = 1$ . Возможно ли в рассматриваемой системе усиление? Приписать значение температуры системе двух энергетических уровней.

*Решение:*

$$\frac{N_2}{g_2} = \frac{N_1}{g_1} = 0.5 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}. \text{ Значит, в данной системе нет ни усиления, ни поглощения.}$$

Отношение числа частиц на уровнях 2 и 1 с учетом вырождения:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} \exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{kT}\right).$$

Прологарифмировав правую и левую части, получим:

$$\ln\left(\frac{N_2 / g_2}{N_1 / g_1}\right) = -\frac{E_2 - E_1}{kT}, \quad \ln(1) = 0 \Rightarrow \frac{E_2 - E_1}{kT} = 0 \Rightarrow T = \pm\infty.$$

*Ответ:* в среде нет ни усиления, ни поглощения;  $T = \pm\infty$ .

**Задача 4.** Квантовый выход люминесценции перехода  $S_1 \rightarrow S_0$  в красителе «родамин 6G» равен 0.87, а соответствующее время жизни  $\approx 5$  нс. Вычислите спонтанное  $\tau_{\text{сп}}$  и безызлучательное  $\tau_{\text{без}}$  времена жизни уровня  $S_1$ .

*Решение:*

$$\Phi = \tau / \tau_{\text{сп}} \Rightarrow \tau_{\text{сп}} = \tau / \Phi.$$

Подставив численные значения, получим  $\tau_{\text{сп}} \approx 5.75$  нс;

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_{\text{сп}}} + \frac{1}{\tau_{\text{без}}} \Rightarrow \tau_{\text{без}} = \frac{1}{1/\tau - 1/\tau_{\text{сп}}}.$$

Подставив численные значения, получим  $\tau_{без} \approx 38.4$  нс.

*Ответ:*  $\tau_{сп} \approx 5.75$  нс,  $\tau_{без} \approx 38.4$  нс.

**Задача 5.** Выразить коэффициент поглощения газа  $\chi_{погл}(T)$ , находящегося в состоянии термодинамического равновесия, через его значение  $\chi_{погл}(T = 0)$ . Газ состоит из атомов или молекул, имеющих два невырожденных уровня энергии  $E_1$  и  $E_2$  ( $E_1 < E_2$ ). Рассмотреть два предельных случая:

а)  $kT \gg h\nu_{21}$  и б)  $kT \ll h\nu_{21}$ .

*Решение.* В состоянии термодинамического равновесия  $\frac{N_2}{N_1} = \exp\left(-\frac{h\nu_{21}}{kT}\right)$ .

Отсюда  $N_2 = N_1 \exp\left(-\frac{h\nu_{21}}{kT}\right)$  и  $N_1 - N_2 = N_1 \left(1 - \exp\left(-\frac{h\nu_{21}}{kT}\right)\right)$ .

Умножив обе части на сечение поглощения  $\sigma_{ik}$  и учитывая, что

$N_2(T = 0) = 0$ , получим

$$\chi_{погл}(T) = \chi_{погл}(T = 0) \left(1 - \exp\left(-\frac{h\nu_{21}}{kT}\right)\right).$$

Рассмотрим предельные случаи:

а)  $\frac{h\nu_{21}}{kT} \ll 1 \Rightarrow \chi_{погл}(T) = \chi_{погл}(T = 0) \frac{h\nu_{21}}{kT}$  – этот случай реализуется в

радиодиапазоне;

б)  $\frac{h\nu_{21}}{kT} \gg 1 \Rightarrow \chi_{погл}(T) = \chi_{погл}(T = 0)$  – этот случай реализуется в оп-

тическом диапазоне.

*Ответ:*  $\frac{h\nu_{21}}{kT} \ll 1 \Rightarrow \chi_{погл}(T) = \chi_{погл}(T = 0) \frac{h\nu_{21}}{kT};$

$$\frac{h\nu_{21}}{kT} \gg 1 \Rightarrow \chi_{погл}(T) = \chi_{погл}(T = 0).$$

### **3. УШИРЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ**

#### **3.1. Естественная ширина спектральной линии**

Спектральная линия всегда имеет конечную, так называемую *естественную* ширину  $\Delta\nu_{\text{ест}}$ , неустранимую никакими способами. Это уширение возникает из-за того, что сами уровни не являются бесконечно узкими. Ширина уровней обусловлена соотношением неопределенностей Гейзенберга:

$$\Delta E \tau \approx h,$$

где  $\Delta E$  – неопределенность энергии уровня,  $\tau$  – время жизни частицы на этом уровне. Неопределенность, или «размытие» уровня, а соответственно, и естественная ширина линии, обратно пропорциональны времени жизни частицы в начальном состоянии. И только если время  $\tau$  бесконечно велико, естественная ширина спектральной линии уменьшается до нуля. В действительности время жизни свободной частицы на уровне всегда конечно. Это и приводит к естественной ширине спектральной линии. Полная ширина линии на половине высоты максимума дается выражением  $\Delta\nu_{\text{ест}} = 1/(2\pi\tau_{\text{сп}})$ .

#### **3.2. Механизмы уширения линии**

Любое воздействие на излучающую систему влияет на ширину спектральной линии. Различают однородное и неоднородное уширения. Механизм уширения линии называют *однородным*, когда линия каждого отдельного атома и, соответственно, всей системы, уширяется в одинаковой степени. Механизм уширения называют *неоднородным*, когда действует таким образом, что резонансные частоты отдельных атомов распределяются в некоторой полосе частот и, соответственно, линия всей системы оказывается уширенной при отсутствии уширения линии отдельных атомов. При однородном уширении форма линии описывается функцией Лоренца, а при неоднородном – функцией Гаусса ([2], [3]).

#### **3.3. Однородное уширение**

Все виды уширения спектральной линии, обусловленные конечностью времени жизни возбужденных состояний, относятся к однородному уширению. Естественное уширение является однородным. Типичный пример однородного уширения – *столкновительное* уширение. В газах это уширение проявляется при столкновениях атома с другими атомами, с ионами, со свободными электронами или со стенками резервуара. В твердых телах оно воз-

никает при столкновениях атома с фононами решетки. При столкновениях энергетическое состояние частицы меняется, что равносильно сокращению времени жизни частицы на данном уровне. Уменьшение времени жизни ведет к уширению уровня (соотношение Гейзенберга). Форма линии (форм-фактор) при столкновительном уширении описывается функцией

$$g(v - v_0) = \frac{2\tau_{ct}}{1 + (v - v_0)^2 4\pi^2 \tau_{ct}^2},$$

где  $\tau_{ct}$  – среднее время между столкновениями;  $v_0$  – центральная частота перехода. Время  $\tau_{ct}$  можно вычислить, предполагая, что скорости частиц подчиняются распределению Максвелла:

$$\tau_{ct} = \frac{\sqrt{MkT}}{16\sqrt{\pi}pr_0^2},$$

где  $M$  – масса молекулы,  $r_0$  – радиус молекулы,  $p$  – давление газа. Масса молекулы приблизительно равна массе ядра. Масса ядра  $M_y = m_N N$ , где  $m_N$  – масса нуклона,  $N$  – число нуклонов в ядре.

Полная ширина линии на половине высоты максимума дается выражением  $\Delta v_{ct} = 1/(\pi\tau_{ct})$ .

Функция  $g(v - v_0)$  достигает максимума в точке  $v = v_0$ , значение которого  $g(v - v_0)|_{v=v_0} = 2\tau_{ct}$ .

### 3.4. Неоднородное уширение

Типичный пример неоднородного уширения в газах – *доплеровское уширение*. В соответствии с эффектом Доплера частота излучения атомов (молекул), воспринимаемая приемником, зависит от величины и скорости их движения относительно приемника. Хаотичность теплового движения (со всевозможными по направлению и значению скоростями частиц) приводит к тому, что вместо одной частоты, характерной в идеальном случае для неподвижных частиц, приемник воспринимает широкий спектр частот.

В предположении, что скорости частиц подчиняются распределению Максвелла, форма контура при доплеровском уширении описывается функцией

$$g(v - v_0) = \frac{1}{v_0} \sqrt{\frac{Mc^2}{2\pi kT}} \exp \left\{ -\frac{-Mc^2(v - v_0)^2}{2kT} \frac{1}{v_0^2} \right\}.$$

Полная ширина линии на половине высоты максимума

$$\Delta v_{\text{доп}} = 2v_0 \sqrt{\frac{2kT}{Mc^2} \ln(2)}.$$

Ширина линии пропорциональна частоте перехода. Поэтому роль эффекта Доплера особенно велика в оптическом диапазоне длин волн.

Другим механизмом неоднородного уширения, приводящим к гауссовой форме линии, может быть любое явление, вызывающее случайное распределение частот атомных переходов. В частности, если локальное электрическое поле кристалла от точки к точке изменяется случайным образом (например, из-за дефектов структуры), то благодаря эффекту Штарка возникнут локальные сдвиги энергетических уровней, а вместе с ними – и частот атомных переходов. Аналогичное явление имеет место также и в разупорядоченных средах (таких, как стекло или жидкость), поскольку атомы, окружающие рассматриваемый атом, распределены случайным образом. Что касается ширины линии, то она определяется теперь среднеквадратичным отклонением локального электрического поля.

### 3.5. Примеры решения задач

**Задача 1.** Оценить естественную ширину линии излучения атома размерами  $r_0 \approx 10^{-10}$  м. Длина волны излучения  $\lambda = 0.5$  мкм.

*Решение:*

$$A \approx \frac{\omega^3 e^2 r_0^2}{3\epsilon_0 \hbar c^3}.$$

Подставив численные значения, получим  $A \approx 10^8$  1/с.

$$\Delta v_{\text{ест}} = \frac{1}{2\pi\tau_{\text{сп}}} \approx 16 \text{ МГц.}$$

*Ответ:*  $\Delta v_{\text{ест}} \approx 16$  МГц.

**Задача 2.** Определить столкновительное уширение линии Ne при типичных условиях работы Не-Не-лазера: давление  $p \approx 60$  Па (0.45 мм рт. ст.),  $T = 300$  К. Эффективный радиус молекулы  $r_0 \approx 1.2 \cdot 10^{-10}$  м.

*Решение:*

$$\Delta v_{ct} = \frac{1}{\pi \tau_{ct}}, \quad \tau_{ct} = \frac{\sqrt{MkT}}{16\sqrt{\pi} pr_0^2}.$$

Масса молекулы Ne  $M_{Ne}=m_N N$ , где  $m_N$  – масса нуклона,  $N$  – число нуклонов в ядре:

$$M_N = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}, \quad N(\text{Ne}) = 20 \Rightarrow M_{Ne} = 33.4 \cdot 10^{-27} \text{ кг}.$$

Подставив численные значения, получим  $\tau_{ct} = 0.47 \text{ мкс}$  и  $\Delta v_{ct} = 0.67 \text{ МГц}$ .

*Ответ:*  $\tau_{ct} = 0.47 \text{ мкс}$  и  $\Delta v_{ct} = 0.67 \text{ МГц}$ .

**Задача 3.** Определить доплеровское уширение линий для He-Ne; длина волны излучения 0.63 мкм в газовом разряде в неоне при  $T = 300 \text{ К}$ .

*Решение:*

$$\Delta v_{\text{доп}} = 2v_0 \sqrt{\frac{2kT}{Mc^2} \ln(2)}.$$

*Ответ:*  $\Delta v_{\text{доп}} \approx 1.4 \text{ ГГц}$ .

**Задача 4.** Определить доплеровское уширение линии аммиака для частоты  $v_0 = 24900 \text{ МГц}$  при  $T = 300 \text{ К}$ .

*Ответ:*  $\Delta v_{\text{доп}} \approx 73 \text{ кГц}$ .

**Задача 5.** Вычислить доплеровскую ширину линии перехода с  $\lambda = 10.6 \text{ мкм}$  ( $T = 400 \text{ К}$ ) молекулы CO<sub>2</sub>. В CO<sub>2</sub>-лазере при давлении 133.3(3) Па (или 1 мм рт. ст.) столкновительное уширение этого перехода составляет около 5 МГц. Найти, при каком давлении углекислого газа оба механизма дадут одинаковые вклады в ширину линии.

*Решение:*

$$\Delta v_{\text{доп}} = 2v_0 \sqrt{\frac{2kT}{Mc^2} \ln(2)} \approx 59 \text{ МГц}; \quad \Delta v_{ct} \approx p;$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta v_{ct} \Big|_{p=1 \text{ мм рт. ст.}} &= 5 \text{ МГц} \\ \Delta v_{ct} \Big|_{p=x \text{ мм рт. ст.}} &= \Delta v_{\text{доп}} = 59 \text{ МГц} \end{aligned} \right| \Rightarrow x \approx 11.8 \text{ мм рт. ст.}$$

*Ответ:* в СО<sub>2</sub>-лазере столкновительное и доплеровское уширения дают одинаковый вклад в ширину линии при давлении, приблизительно равном 1600 Па (12 мм рт.ст.).

## 4. ПАССИВНЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ РЕЗОНАТОРЫ

Под пассивным оптическим резонатором понимают замкнутую полость, состоящую из отражающих поверхностей и заполненную однородной изотропной и пассивной диэлектрической средой. *Мода* резонатора ([2], [3], [4]) представляет собой стационарную конфигурацию электромагнитного поля, которая удовлетворяет как уравнениям Максвелла, так и граничным условиям.

Лазерные резонаторы характеризуются двумя главными особенностями: 1) они, как правило, являются открытыми, т. е. не имеют боковой поверхности и 2) их размеры намного превышают длину волны лазерной генерации. Эти две особенности оптического резонатора оказывают значительное влияние на его характеристики. Например то, что резонатор является открытым, приводит к неизбежным потерям для любой моды резонатора (такие потери называются дифракционными).

Рассмотрим основные типы резонаторов.

### 4.1. Основные типы резонаторов

**Плоскопараллельный резонатор.** Простейшим открытым резонатором является резонатор Фабри–Перо. Этот резонатор состоит из двух плоских зеркал, расположенных строго параллельно друг другу. В первом приближении моды такого резонатора можно представить себе как суперпозицию двух плоских электромагнитных волн, распространяющихся в противоположных направлениях вдоль оси резонатора. В результате интерференции в нем устанавливаются стоячие волны. Длина резонатора  $L$  должна быть кратна целому числу полуволн:  $L = q(\lambda/2)$ , где  $q=1, 2, 3, \dots$ .

Такое условие является необходимым для того, чтобы на обоих зеркалах электрическое поле электромагнитной стоячей волны было равно нулю. Отсюда следует, что резонансные частоты определяются следующим образом:  $v = q(c/2L)$ .

**Концентрический резонатор.** Этот резонатор состоит из двух сферических зеркал, имеющих одинаковые радиусы  $R$  и расположенных на расстоянии  $L$  друг от друга таким образом, что центры кривизны зеркал совпадают,

т. е.  $L = 2R$ . В этом случае моды резонатора представляют собой (приближенно) суперпозицию двух сферических волн, распространяющихся в противоположных направлениях.

**Конфокальный резонатор.** Состоит из двух сферических зеркал с одинаковыми радиусами кривизны  $R$ , которые расположены на расстоянии  $L$  друг от друга таким образом, что фокусы зеркал совпадают. Поэтому центр кривизны одного зеркала лежит на поверхности другого, т. е.  $L = R$ .

Разность частот между двумя продольными модами, как и у плоскопараллельного резонатора:  $\Delta\nu_{\text{пр}} = c/2L$ .

Однако расстояние между частотами рядов соседних мод разного порядка здесь составляет  $\Delta\nu_{\text{мод}} = c/4L$ .

Благодаря фокусирующему действию сферических зеркал поле в конфокальном резонаторе сосредоточивается главным образом вдоль оси резонатора. Для конфокального резонатора получены простые аналитические формулы для расчета распределения поля внутри резонатора.

На расстоянии  $\omega_s$  от центра зеркала амплитуда электрического поля на нем уменьшается в  $e$  раз относительно своего максимального значения, причем величина  $\omega_s$  дается выражением:  $\omega_s = \sqrt{L\lambda/\pi}$ .

Размер пучка в центре (расстояние, на котором интенсивность уменьшается в  $e$  раз)  $\omega_0 = \sqrt{L\lambda/2\pi}$ . Расстояние  $\omega_0$  называют размером пятна в *перетяжке* пучка. Зная размер пятна в центре, легко рассчитать размер пучка в любой точке:

$$\omega(z) = \omega_0 \sqrt{\left(1 + (2z/L)^2\right)},$$

где  $z$  – расстояние от центра резонатора вдоль его оси. В фокальной плоскости при  $z = 0$  радиус пучка минимален.

Радиус кривизны волнового фронта также определяется как

$$R(z) = z \left(1 + (L/2z)^2\right).$$

#### 4.2. Обобщенный сферический резонатор. Условие устойчивости

Рассмотренные ранее резонаторы можно рассматривать как частные примеры более общего случая резонатора, образованного двумя сферическими

зеркалами, имеющими различные радиусы кривизны и расположенными на произвольном расстоянии друг от друга. Знак радиуса кривизны берется положительным для вогнутого зеркала и отрицательным для выпуклого зеркала. Эти резонаторы можно подразделить на две категории – устойчивые и неустойчивые. Резонатор называется *неустойчивым*, когда произвольный луч, последовательно отражаясь от каждого из двух зеркал, удаляется на неограниченно большое расстояние от оси резонатора. Резонатор, в котором луч остается в пределах ограниченной области, называется *устойчивым*. Условие устойчивости резонатора :  $0 < g_1 g_2 < 1$ , где  $g_1 = 1 - L/R_1$ , а  $g_2 = 1 - L/R_2$ . Здесь  $R_1$  и  $R_2$  – радиусы кривизны первого и второго зеркал соответственно.

Для обобщенного сферического резонатора получены формулы для расчета размера пятен на зеркалах:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{L\lambda}{\pi}} \cdot \left( \frac{g_2}{g_1(1-g_1g_2)} \right)^{1/4} \text{ – размер пятна на первом зеркале;}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{L\lambda}{\pi}} \cdot \left( \frac{g_1}{g_2(1-g_1g_2)} \right)^{1/4} \text{ – размер пятна на втором зеркале.}$$

Для симметричного резонатора  $R_1 = R_2$  и  $g_1 = g_2 = g$ :

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{L\lambda}{\pi}} \cdot \left( \frac{1}{1-g^2} \right)^{1/4}.$$

Расстояние от перетяжки пучка, на котором размер пятна увеличивается в  $\sqrt{2}$  раз, называется рэлеевской длиной  $z_R$ :  $z_R = \frac{\pi\omega_0^2}{\lambda}$ .

Пусть радиусы кривизны зеркал составляют  $R_1$  и  $R_2$ , а расстояния от первого и от второго зеркал до перетяжки –  $z_1$  и  $z_2$  соответственно. Можно показать, что

$$-R_1 = -z_1 - \frac{z_R^2}{z_1}; \quad R_2 = z_2 + \frac{z_R^2}{z_2}.$$

Очевидно также, что  $L = z_2 - z_1$ .

Концентрический, конфокальный и плоскопараллельный резонаторы лежат на границе области устойчивости. Концентрический резонатор имеет

следующие недостатки: 1) очень небольшой размер пятна в центре резонатора, что может приводить к нежелательным эффектам в лазерах с большой мощностью, и 2) высокую чувствительность к несоосности зеркал. Поэтому концентрические резонаторы применяются довольно редко. В конфокальном резонаторе размер пятна тоже слишком мал, чтобы было можно эффективно использовать все поперечное сечение лазерной среды. Поэтому конфокальные резонаторы применяются тоже редко. Высокую эффективность использования поперечного сечения можно получить в плоскопараллельных резонаторах. Однако эти резонаторы, как и концентрические, весьма чувствительны к несоосности зеркал. По различным упомянутым ранее причинам наиболее широко применяемые лазерные резонаторы образованы либо двумя вогнутыми зеркалами с большими радиусами кривизны, либо плоским зеркалом и вогнутым зеркалом с большим радиусом кривизны.

### 4.3. Примеры решения задач

**Задача 1.** Определите, сколько различных полуволн укладывается на длине резонатора  $L$ , состоящего из двух плоскопараллельных зеркал, и как разнесены резонансные частоты двух соседних типов продольных колебаний, если  $L=1$  м,  $\lambda = 0.63$  мкм, показатель преломления среды, заполняющей резонатор  $n = 1$ .

*Решение:*

$$v = q \left( \frac{c}{2Ln} \right) \Rightarrow q = \frac{2Ln}{\lambda} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 1}{0.63 \cdot 10^{-6}} \approx 3 \cdot 10^6;$$

$$\Delta v = \frac{c}{2Ln} = \frac{3 \cdot 10^8}{2 \cdot 1 \cdot 1} = 150 \text{ МГц.}$$

*Ответ:*  $q \approx 3 \cdot 10^6$  Гц,  $\Delta v = 150$  МГц.

**Задача 2.** Резонатор образован выпуклым сферическим зеркалом с радиусом кривизны  $R_1 = -1$  м и вогнутым сферическим зеркалом с радиусом кривизны  $R_2 = 1.5$  м. Каким должно быть максимальное расстояние  $L_{\max}$  между зеркалами, чтобы резонатор оставался устойчивым?

*Решение.* Условие устойчивости резонатора

$$0 < g_1 g_2 < 1, \text{ где } g_1 = 1 - L/R_1, \text{ а } g_2 = 1 - L/R_2;$$

$$0 < \left(1 - \frac{L}{R_1}\right) \left(1 - \frac{L}{R_2}\right) < 1.$$

Подставив численные значения радиусов кривизны зеркал, получим

$$0 < \left(1 - \frac{L}{-1}\right) \left(1 - \frac{L}{1.5}\right) < 1;$$

$$0 < (1+L) \left(1 - \frac{L}{1.5}\right) < 1;$$

$$g_1 g_2 = 0 \text{ при } L = L_{\max} = 1.5 \text{ м.}$$

*Ответ:*  $L_{\max} = 1.5$  м.

**Задача 3.** В Не-Не-лазере, работающем на длине волны 0.6328 мкм, используется конфокальный резонатор длиной  $L = 1$  м. Найти количество различных по частоте мод, лежащее в пределах ширины линии Ne (определенной по уровню 0.5 от максимального значения).

*Решение.* Межмодовое расстояние в конфокальном резонаторе  $\Delta v_{\text{мод}} = c/4L$ .

Для указанных условий  $\Delta v_{\text{мод}} = \frac{c}{4L} = \frac{3 \cdot 10^8}{4 \cdot 1} \approx 0.75 \cdot 10^8$  Гц.

Чтобы найти количество мод  $N_{\text{мод}}$ , лежащих в пределах ширины линии Ne, надо ширину линии разделить на межмодовое расстояние:

$$N_{\text{мод}} = \frac{\Delta v(\text{Ne})}{\Delta v_{\text{мод}}}.$$

Вначале определим ширину линии Ne при типичных условиях работы Не-Не-лазера. Для этого найдем вклад, вносимый в ширину линии основными механизмами уширения линии.

Для атома размером  $\approx 10^{-10}$  м для  $\lambda \approx 0.63$  мкм естественная ширина линии  $\Delta v_{\text{ест}} \approx 16$  МГц (см. задачу 1 из разд. 3).

Для атома Ne при  $T = 300$  К и давлении 0.5 мм рт. ст. столкновительное уширение составит  $\Delta v_{\text{ст}} \approx 0.67$  МГц (см. задачу 2 из разд. 3).

Для атома Ne при  $T = 300$  К для  $\lambda \approx 0.63$  мкм доплеровское уширение  $\Delta v_{\text{доп}} \approx 1.4$  ГГц (см. задачу 3 из разд. 3).

Таким образом, при указанных условиях  $\Delta v_{ct} \ll \Delta v_{est} \ll \Delta v_{dop}$  и ширина линии Ne определяется в основном доплеровским уширением  $\Delta v(Ne) \approx \approx 1.4 \text{ ГГц}$ . В итоге,

$$N_{\text{мод}} = \frac{\Delta v(Ne)}{\Delta v_{\text{мод}}} = \frac{1.4 \cdot 10^9}{0.075 \cdot 10^9} \approx 20.$$

*Ответ:* 20 мод.

**Задача 4.** Сколько различных мод укладывается в пределах ширины линии CO<sub>2</sub>- лазера при низких давлениях и той же геометрии резонатора (в CO<sub>2</sub>-лазерах используется смесь CO<sub>2</sub>, Ne, He); при низких давлениях полная ширина линии  $\approx 100 \text{ МГц}$ .

*Решение:*

$$N_{\text{мод}} = \frac{\Delta v(\text{CO}_2 + \text{Ne} + \text{He})}{\Delta v_{\text{мод}}} = \frac{1 \cdot 10^8}{0.75 \cdot 10^8} \approx 1.$$

*Ответ:* 1 мода.

**Задача 5.** В Не-Не-лазере, работающем на длине волны 0.6328 мкм, используется конфокальный резонатор длиной  $L = 1 \text{ м}$ . Вычислить размер пятна в центре резонатора и на зеркалах.

*Решение:*

Размер пятна в центре

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{L\lambda}{2\pi}} = \sqrt{\frac{0.6328 \cdot 10^{-6}}{2\pi}} \approx 0.317 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

Размер пятна на зеркалах

$$\omega_s = \sqrt{\frac{L\lambda}{\pi}} = \sqrt{\frac{0.6328 \cdot 10^{-6}}{\pi}} \approx 0.449 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

*Ответ:*  $\omega_0 = 0.317 \text{ мм}$ ,  $\omega_s = 0.449 \text{ мм}$ .

**Задача 6.** Рассмотрим резонатор, образованный двумя вогнутыми сферическими зеркалами с радиусами кривизны 4 м и расстоянием между ними 1 м. Определить размер пятна моды TEM<sub>00</sub> на зеркалах, если резонатор ис-

пользуется для генерации излучения на длине волны  $\lambda=514.5$  нм (одна из линий излучения Ar+ -лазера).

*Решение.*

Резонатор симметричен, поэтому размер пятна на обоих зеркалах одинаков и равен

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{L\lambda}{\pi}} \cdot \left( \frac{1}{1-g^2} \right)^{1/4};$$

$$g = 1 - L/R = 1 - 1/4 = 0.75;$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{514.5 \cdot 10^{-9}}{\pi}} \cdot \left( \frac{1}{1-0.75^2} \right)^{1/4} \approx 498 \cdot 10^{-9} \text{ м.}$$

*Ответ:* размер пятна на зеркалах  $\omega_1 = \omega_2 \approx 498$  нм.

**Задача 7.** Резонатор образован двумя вогнутыми сферическими зеркалами с радиусами кривизны  $R_1 = 4$  м и  $R_2 = 1.5$  м и расстоянием между ними 1 м. Резонатор используется для генерации излучения на длине волны  $\lambda=514.5$  нм (одна из линий излучения Ar+-лазера). Найти размер пятна на зеркалах и положение перетяжки пучка. .

*Решение:*

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{L\lambda}{\pi}} \cdot \left( \frac{g_2}{g_1(1-g_1g_2)} \right)^{1/4} \text{ – размер пятна на первом зеркале;}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{L\lambda}{\pi}} \cdot \left( \frac{g_1}{g_2(1-g_1g_2)} \right)^{1/4} \text{ – размер пятна на втором зеркале;}$$

$$g_1 = 1 - L/R_1 = 1 - 1/4 = 0.75,$$

$$g_2 = 1 - L/R_2 = 1 - 1/1.5 = 0.334.$$

Подставив численные значения, получим  $\omega_1 \approx 0.355$  мм,  $\omega_2 \approx 0.533$  мм.

Положение перетяжки найдем, решив систему уравнений (решение аналогичной задачи подробно рассмотрено в [5]):

$$\begin{cases} -R_1 = -z_1 - \frac{z_R^2}{z_1}; \\ R_2 = z_2 + \frac{z_R^2}{z_2}; \\ L = z_2 - z_1. \end{cases}$$

*Ответ:* перетяжка находится внутри резонатора на расстоянии 14.3 см от первого зеркала (от зеркала с радиусом 4 м); размер пятна на первом зеркале  $\omega_1 \approx 0.355$  мм, размер пятна на втором зеркале  $\omega_2 \approx 0.533$  мм, размер пятна в перетяжке пучка  $\omega_0 \approx 0.349$  мм.

## 5. УСИЛИТЕЛИ И ГЕНЕРАТОРЫ ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

### 5.1. Усилители бегущей волны

Уравнение переноса излучения в активной среде при отсутствии вырождения уровней для непрерывного излучения записывается в виде

$$\frac{dI}{dz} = -\beta I + \alpha(I)I,$$

где  $I$  – интенсивность излучения;  $z$  – координата, вдоль которой распространяется излучение;  $\beta$  – коэффициент нерезонансных потерь;  $\alpha(I)$  – зависящий от интенсивности коэффициент усиления  $\alpha(I) = \frac{\alpha_0}{1 + I/I_s}$ . Здесь  $\alpha_0$  – линейный коэффициент усиления (коэффициент усиления слабого сигнала),  $I_s$  – интенсивность насыщения ) [2].

Под интенсивностью насыщения понимают интенсивность, при которой коэффициент усиления падает в два раза по сравнению с линейным. Действительно, при  $I = I_s$  коэффициент  $\alpha(I) = \alpha_0/2$ .

Таким образом, уравнение переноса можно записать как

$$\frac{dI}{dz} = -\beta I + \frac{\alpha_0}{1 + I/I_s} I.$$

Проанализируем это выражение. Рассмотрим три случая для различных диапазонов интенсивностей:

### 1. $I \ll I_s$

В этом случае  $I/I_s \ll 1$ . Тогда  $1 + I/I_s \sim 1$  и

$$\frac{dI}{dz} \approx -\beta I + \alpha_0 I = (\alpha_0 - \beta) I.$$

Решив это уравнение с начальным условием  $I(z=0) = I_0$ , получим

$$I(z) = I_0 \exp((\alpha_0 - \beta)z).$$

Таким образом, при малых уровнях сигнала наблюдается экспоненциальный рост выходной энергии (линейное усиление).

### 2. $I \gg I_s$

В этом случае  $I/I_s \gg 1$ . Тогда  $1 + I/I_s \sim I/I_s$  и

$$\frac{dI}{dz} \approx -\beta I + \alpha_0 I_s.$$

При значительных входных сигналах рост выходной энергии замедляется и, начиная с некоторой интенсивности, вообще прекращается. Стационарное значение интенсивности излучения достигается, когда все, что может излучить единичный отрезок длины активного вещества в режиме полного насыщения, поглощается за счет нерезонансных потерь в том же отрезке. Этот баланс поглощенной и излученной энергий приводит к исчезновению дальнейшего усиления по мере распространения вдоль усилителя. Если интенсивность достигает предельного значения  $I_{\text{пред}}$ , то это значит, что дальнейшего усиления нет и  $dI/dz = 0$ . Тогда можем записать:

$$0 = -\beta I_{\text{пред}} + \alpha_0 I_s.$$

Отсюда получаем, что  $I_{\text{пред}} = \frac{\alpha_0 I_s}{\beta}$ . Таким образом, в усилителе бегущей волны предельная выходная интенсивность не зависит от входного сигнала, а определяется интенсивностью насыщения, коэффициентом линейного усиления и коэффициентом нерезонансных потерь.

### 3. $I \sim I_s$ .

Проинтегрировав уравнение переноса  $\frac{dI}{dz} = -\beta I + \frac{\alpha_0}{1 + I/I_s} I$  по длине  $l$ ,

получим:

$$(\alpha_0 - \beta)l = \ln\left(\frac{I_{\text{вых}}}{I_{\text{вх}}}\right) - \frac{\alpha_0}{\beta} \ln\left(\frac{\alpha_0 - \beta\left(1 + \frac{I_{\text{вых}}}{I_s}\right)}{\alpha_0 - \beta\left(1 + \frac{I_{\text{вх}}}{I_s}\right)}\right).$$

Это уравнение в общем виде не имеет аналитического решения и решается только численно.

## 5.2. Оптимальное значение пропускания полупрозрачного зеркала в генераторе

Чтобы превратить усилитель в генератор, вводят положительную обратную связь. В лазере обратную связь обычно получают размещением активной среды между двумя зеркалами. Генерация начинается, когда усиление активной среды компенсирует потери. Одно из зеркал делают полупрозрачным для вывода полезного излучения. Если пропускание полупрозрачного зеркала слишком слабое, то выходной сигнал будет мал. Если пропускание полупрозрачного зеркала слишком большое, то обратная связь будет слабая и выходной сигнал опять будет слабым. Существует оптимальное значение пропускания полупрозрачного зеркала, при котором выходной сигнал максимален. Значение оптимального пропускания в первом приближении является функцией трех параметров генератора – длины активной среды, коэффициента нерезонансных потерь и линейного коэффициента усиления.

## 5.3. Примеры решения задач

**Задача 1.** В усилителе бегущей волны коэффициент усиления слабого сигнала  $\alpha_0 = 0.1\text{см}^{-1}$ , коэффициент нерезонансных потерь  $\beta = 0.01\text{см}^{-1}$ . Во сколько раз предельная интенсивность, которая может быть достигнута в усилителе, больше интенсивности насыщения?

*Решение:*

$$I_{\text{пред}} = \frac{\alpha_0 I_s}{\beta} \Rightarrow \frac{I_{\text{пред}}}{I_s} = \frac{\alpha_0}{\beta} = \frac{0.1}{0.01} = 10.$$

*Ответ:* в 10 раз.

**Задача 2.** Определить оптимальный коэффициент пропускания  $T_p$  полупрозрачного зеркала резонатора лазера, позволяющий получить максимальную выходную мощность. Коэффициент линейного усиления на проход

составляет  $\alpha_0 = 0.1 \text{ см}^{-1}$ , коэффициент нерезонансных потерь  $\beta = 0.01 \text{ см}^{-1}$ , длина активной среды  $L = 10 \text{ см}$ . Среда заполняет весь резонатор.

*Решение.* Стоячую волну в резонаторе можно рассматривать как суперпозицию двух бегущих волн. Пусть каждая из волн характеризуется интенсивностью  $I$ . Выходная мощность  $P_{\text{вых}}$  через зеркало лазерного резонатора

$$P_{\text{вых}} = T_p I. \quad (5.1)$$

Далее будем характеризовать потери за счет пропускания зеркал, введя величину

$$g_3 = T_p / L. \quad (5.2)$$

При генерации потери на проход и потери на зеркалах должны компенсироваться усилением на проход, т. е. должно выполняться равенство

$$\frac{\alpha_0}{1 + I / I_s} = \beta + \frac{T_p}{L} \quad (5.3)$$

где  $I_s$  – интенсивность насыщения.

Из (5.3) получим

$$I = I_s \left( \frac{\alpha_0}{\beta + g_3} - 1 \right). \quad (5.4)$$

Из (5.1) и (5.2) получим

$$P_{\text{вых}} = ILg_3. \quad (5.5)$$

Из (5.4) и (5.5) получим

$$P_{\text{вых}} = Lg_3 I_s \left( \frac{\alpha_0}{\beta + g_3} - 1 \right).$$

Оптимальное значение  $P_{\text{вых}}$  ( $g_3$ )<sub>opt</sub> находим из условия  $\frac{\partial P_{\text{вых}}}{\partial g_3} = 0$ :

$$\begin{aligned} \left( Lg_3 I_s \left( \frac{\alpha_0}{\beta + g_3} - 1 \right) \right)' &= (Lg_3 I_s)' \left( \frac{\alpha_0}{\beta + g_3} - 1 \right) + (Lg_3 I_s) \left( \frac{\alpha_0}{\beta + g_3} - 1 \right)' \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\alpha_0}{\beta + g_3} - 1 - \frac{g_3 \alpha_0}{(\beta + g_3)^2} = 0. \end{aligned}$$

После несложных преобразований получим квадратное уравнение:

$$g_3^2 + 2g_3\beta - \alpha_0\beta + \beta^2 = 0.$$

Находим дискриминант уравнения и его корни:

$$D = \sqrt{4\beta^2 - 4(\beta^2 - \alpha_0\beta)} = 2\sqrt{\alpha_0\beta};$$
$$g_{31,2} = \frac{-2\beta \pm 2\sqrt{\alpha_0\beta}}{2} = -\beta \pm \sqrt{\alpha_0\beta}.$$

Корень уравнения  $g_{31} = -\beta - \sqrt{\alpha_0\beta} < 0$  и не имеет смысла. Имеет смысл корень

$$g_{32} = g_3 = -\beta + \sqrt{\alpha_0\beta}.$$

Тогда пропускание полупрозрачного зеркала составит

$$T_p = g_3 L = (-\beta + \sqrt{\alpha_0\beta})L.$$

Подставив численные значения, получим

$$g_3 = -0.01 + \sqrt{0.001} \approx 0.022 \text{ см}^{-1} \text{ и, соответственно, } T_p \approx 22\%.$$

*Ответ:  $T \approx 22\%$ .*

### Список литературы

1. Бахшиев Н. Г. Введение в молекулярную спектроскопию. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1987.
2. Пихтин А. Н. Оптическая и квантовая электроника. М.: Высш. шк., 2001.
3. Звелто О. Принципы лазеров. СПб.: Лань, 2008.
4. Квантовая электроника. Маленькая энциклопедия. М.: Сов. энцикл., 1969.
5. Успенский А. В. Сборник задач по квантовой электронике. М.: Высш. шк., 1976 .

## Приложение

### Электронная оболочка атома водорода

Из бесконечного множества электронных орбит, возможных с точки зрения классической механики, осуществляются в действительности только некоторые дискретные орбиты, удовлетворяющие определенным квантовым условиям. Электрон, находящийся на одной из этих орбит, несмотря на то, что он движется с ускорением, не излучает электромагнитных волн. Условие для стационарных орбит заключается в том, что момент импульса электрона

$$L = m_e v r = n\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots .$$

Здесь  $m_e$  – масса электрона,  $v$  – скорость электрона,  $r$  – радиус орбиты,  $n$  – главное квантовое число.

### Атом водорода

Для атома водорода дискретные уровни энергии определяются по формуле  $E_n = -hcR \frac{1}{n^2}$ , где  $R$  – постоянная Ридберга,  $R \approx 10973730.9 \text{ м}^{-1}$ .

С ростом  $n$  уровни сближаются и при  $n \rightarrow \infty$  сходятся к границе ионизации. Энергия ионизации  $E_{\text{ион}} = hcR = 13.6 \text{ эВ}$ . Частоты всех линий атома водорода можно посчитать по формуле

$$\nu = R c \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right),$$

где  $n$  – значение главного квантового числа для уровня, с которого происходит переход;  $m$  – значение главного квантового числа для уровня, на который происходит переход. В спектре водорода четко выделяются шесть спектральных серий:

$n = 1, m = 2, 3, 4, \dots$  – серия Лаймана;

$n = 2, m = 3, 4, 5, \dots$  – серия Бальмера;

$n = 3, m = 4, 5, 6, \dots$  – серия Пашена;

$n = 4, m = 5, 6, 7, \dots$  – серия Бреккета;

$n = 5, m = 6, 7, 8, \dots$  – серия Пфунда;

$n = 6, m = 7, 8, 9, \dots$  – серия Хамфри.

## **Содержание**

<b>Некоторые физические постоянные.....</b>	3
<b>1. Энергия молекулы .....</b>	4
1.1. Внутренняя энергия молекулы .....	4
1.2. Квантования колебательной энергии двухатомной молекулы.....	4
1.3. Квантования вращательной энергии двухатомной молекулы.....	6
1.4. Примеры решения задач.....	8
<b>2. Квантовые переходы .....</b>	9
2.1. Спонтанные переходы .....	9
2.2. Вынужденные переходы.....	10
2.3. Усиливающие и поглощающие среды. Инверсия населенностей .....	11
2.4. Примеры решения задач.....	12
<b>3. Уширение спектральных линий .....</b>	15
3.1. Естественная ширина спектральной линии.....	15
3.2. Механизмы уширения линии .....	15
3.3. Однородное уширение.....	15
3.4. Неоднородное уширение.....	16
3.5. Примеры решения задач.....	17
<b>4. Пассивные оптические резонаторы.....</b>	19
4.1. Основные типы резонаторов.....	19
4.2. Обобщенный сферический резонатор. Условие устойчивости.....	20
4.3. Примеры решения задач.....	22
<b>5. Усилители и генераторы оптического излучения .....</b>	26
5.1. Усилители бегущей волны .....	26
5.2. Оптимальное значение полупрозрачного зеркала в генераторе .....	28
5.3. Примеры решения задач.....	28
<b>Список литературы.....</b>	30
<b>Приложение. Электронная оболочка атома водорода.....</b>	31