

## ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЯ

### 1. Показатели точности результатов измерений

*Целью обработки результатов измерений (наблюдений) является установление значения измеряемой величины и оценка погрешности их результатов.*

Методы обработки результатов наблюдений могут быть разными в зависимости от предварительной информации, которой располагает экспериментатор об источниках и характере проявления погрешностей, условиях эксперимента, свойствах используемых средств измерений, от вида измерений, числа выполненных измерений (однократные или многократные) и других причин.

В качестве оценок погрешностей используются точечные или интервальные значения:

- *предельные значения* погрешности абсолютной, относительной – *точечные оценки*;
- *доверительный интервал и доверительная вероятность* погрешности (*интервальные оценки*), задающие вероятность нахождения погрешности  $P_d$  в заданном интервале  $\pm\Delta x_d$

$$P\{-\Delta x_d \leq \Delta x \leq +\Delta x_d\} = P_d.$$

Эта оценка используется для случайной погрешности.

При  $P_d = 1$  получаем оценку предельной погрешности в виде  $\pm\Delta x_d$ .

Можно связать доверительный интервал  $\Delta x_d$  и СКО  $\sigma$  для нормального закона распределения погрешности следующим образом

$$\text{При } P_d = 0.95, \Delta x_d = \pm 2\sigma; \text{ при } P_d = 0.997, \Delta x_d = \pm 3\sigma.$$

*Оценка систематической погрешности (точечная оценка) по ряду наблюдений  $x_1, x_2, \dots, x_n$  при многократных измерениях находится по формуле:*

$$\Delta x_{\text{сист}} = x_{\text{ср}} - x_d,$$

где  $x_{\text{ср}} = (\sum x_i) / n$  – оценка математического ожидания (среднее арифметическое ряда наблюдений);  $x_d$  – действительное значение измеряемой величины.

## 2. Оценка погрешности при однократных прямых измерениях по классу точности прибора

На практике для оценки точности результата измерения используется класс точности средства измерения, определяющий пределы допускаемой основной погрешности.

В таблице приведены формулы для оценки пределов допускаемой основной погрешности при заданном значении класса точности.

В формулах, приведенных в таблице:  $x$  – показания прибора;  $x_N$  – нормирующее значение, определяемое видом шкалы прибора;  $x_K$  – больший по модулю из пределов измерения прибора.

Таблица 1 – оценки пределов допускаемой основной погрешности

| Формулы для определения пределов допускаемой основной погрешности СИ:<br>$\gamma$ - приведенной (%);<br>$\delta$ - относительной (%). | Формулы для оценки пределов абсолютной погрешности результата измерения | Числа $p$ , $q$ , $c$ , $d$ задаются в обозначении класса точности на шкале прибора или в документации |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\gamma = \frac{\Delta x}{x_N} 100 = \pm p$                                                                                           | $\Delta x = \pm \frac{p x_N}{100}$                                      | 0,5                                                                                                    |
| $\delta = \frac{\Delta x}{x} 100 = \pm q \%$                                                                                          | $\Delta x = \pm \frac{q x}{100}$                                        | 1,0                                                                                                    |
| $\delta = \pm [c + d ( \frac{x_K}{x}  - 1)] \%$                                                                                       | $\Delta x = \pm \frac{\delta x}{100}$                                   | 0,05/0,02                                                                                              |

Зная класс точности прибора можно из формул, приведенных в таблице, оценить пределы основной абсолютной погрешности  $\pm \Delta x$  для конкретного результата измерения  $x$ . Записывают результат измерения для действительного значения измеряемой физической величины  $x_0$

$$x_0 = x \pm \Delta x,$$

где  $x$  – показание прибора;  $\pm \Delta x$  – пределы допускаемой основной абсолютной погрешности результата измерения, оцениваемые по классу точности (см. таблицу).

## 3. Обработка результатов косвенных однократных измерений

При обработке результатов косвенных измерений  $y = F(x_1, x_2 \dots x_n)$ , где  $x_1, x_2 \dots x_n$  – результаты прямых измерений, оценить предельные погрешности результата косвенных измерений можно при известных оценках предельных погрешностей результатов прямых измерений.

Рассматривая  $y = F(x_1, x_2 \dots x_n)$ , как функцию нескольких переменных, найдем ее полный дифференциал через частные производные отдельных аргументов и их дифференциалы

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n} dx_n \quad (3.1)$$

Заменив дифференциалы в (3.1) на приращения отдельных переменных и рассматривая их как абсолютные погрешности результатов прямых измерений, получим общую формулу для оценки пределов абсолютной погрешности результата косвенных измерений

$$\Delta y = \pm \sum_n \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right| \Delta x_i, \quad (3.2)$$

Т.о. оценить предельную абсолютную погрешность косвенных измерений  $\Delta y$  по выражению (3.2) можно для конкретного вида функции  $y = F(x_1, x_2 \dots x_n)$  после оценки предельных абсолютных погрешностей результатов прямых измерений  $\Delta x_i$ .

В таблице приведены примеры оценок погрешности косвенных измерений  $y = F(x_1, x_2)$  по формуле (3.1) для некоторых случаев функций двух переменных ( $\Delta x_1, \Delta x_2, \delta_1 = (\Delta x_1 / x_1) / 100 \%$ ,  $\delta_2 = (\Delta x_2 / x_2) / 100 \%$  – пределы абсолютных и относительных погрешностей результатов прямых измерений соответственно).

Таблица 2 – оценка пределов погрешности косвенных измерений

| Функция         | Абс. погрешность. $\Delta y$                               | Относит. погрешность $\delta_y = (\Delta y / y) \%$                                      |
|-----------------|------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| $y = x_1 + x_2$ | $\Delta y = \pm (\Delta x_1 + \Delta x_2)$                 | $\delta_y = \pm ((\Delta x_1 + \Delta x_2) / (x_1 + x_2)) 100\%$                         |
| $y = x_1 - x_2$ | $\Delta y = \pm (\Delta x_1 + \Delta x_2)$                 | $\delta_y = \pm ((\Delta x_1 + \Delta x_2) / (x_1 - x_2)) 100\%$                         |
| $y = x_1 x_2$   | $\Delta y = \pm (x_2 \Delta x_1 + x_1 \Delta x_2)$         | $\delta_y = \pm (\delta_1 + \delta_2) = \pm (\Delta x_1 / x_1 + \Delta x_2 / x_2) 100\%$ |
| $y = x_1 / x_2$ | $\Delta y = \pm (x_2 \Delta x_1 + x_1 \Delta x_2) / x_2^2$ | $\delta_y = \pm (\delta_1 + \delta_2) = \pm (\Delta x_1 / x_1 + \Delta x_2 / x_2) 100\%$ |
| $y = x^n$       | $\Delta y = \pm n x^{n-1} \Delta x$                        | $\delta_y = \pm n \delta = \pm n \Delta x / x 100\%$                                     |

Формулы, приведенные в таблице, могут быть распространены на косвенные измерения для суммы и произведения и для другого количества результатов прямых измерений.

Общий порядок обработки результатов однократных косвенных измерений следующий:

1. Вычисляют результат косвенных измерений  $y = F(x_1, x_2 \dots x_n)$ , где  $x_1, x_2 \dots x_n$  – результаты прямых измерений.

2. Если результатами прямых измерений являются показания приборов, то пределы их абсолютных погрешностей  $\Delta x_i$  оценивают по формулам, приведенным в таблице.

3. Затем вычисляют по формуле (3.2) пределы абсолютной погрешности  $\pm \Delta y$  результата косвенных измерений.

4. Записывают результат косвенных измерений по правилам округления

$$y_0 = y \pm \Delta y \quad (3.3)$$

где  $y_0$  – действительное значение результата косвенных измерений;  $y$  – результат косвенных измерений.

Для некоторых косвенных измерений, приведенных выше в таблице справедливы правила:

1. Если результат измерений произведение или частное, то его предельная относительная погрешность  $\delta_y$  равна арифметической сумме предельных относительных погрешностей  $\delta_i$  результатов прямых измерений, а пределы его абсолютной погрешности равны

$$\Delta y = \pm y \delta_y / 100$$

2. Если результат измерений сумма или разность, то его предельная абсолютная погрешность  $\Delta y$  равна арифметической сумме предельных абсолютных погрешностей  $\Delta x_i$  результатов прямых измерений.

#### 4. Обработка результатов прямых многократных измерений

Целью обработки результатов многократных измерений является установление значения измеряемой величины и оценка погрешности полученного результата измерения. При обработке результатов прямых многократных измерений получают более точный результат по сравнению с результатами отдельных наблюдений.

При проведении многократных измерений надо обеспечить следующие условия: *статический режим* проведения измерений и *неизменные условия* проведения измерений.

Порядок действий при обработке результатов наблюдений следующий:

1. Проводят  $n$  отдельных наблюдений. Исключив систематическую погрешность из каждого результата наблюдения, получаем *исправленный ряд* наблюдений  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , математическим ожиданием которого является действительное значение измеряемой величины.

2. Вычисляют среднее арифметическое по  $n$  наблюдениям

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum x_i}{n}, \quad (4.1)$$

которое принимают за *действительное значение* измеряемой величины. Отметим, что среднее арифметическое является случайной величиной.

3. Вычисляют отклонения между отдельными результатами наблюдений и средним арифметическим, т.е. разности  $\rho_1 = x_1 - \bar{x}$ ;  $\rho_2 = x_2 - \bar{x}$ ; ...;  $\rho_n = x_n - \bar{x}$ . Их называются рассеянием результатов в ряду измерений (или остаточными погрешностями).

Они могут быть как положительными, так и отрицательными. На основании свойства среднего арифметического алгебраическая сумма остаточных погрешностей равна нулю, т.е.  $\sum \rho_i = 0$  и этим правилом следует пользоваться для контроля правильности подсчета  $\bar{x}$ .

4. Вычисляют оценку дисперсии ряда наблюдений

$$S^2[x] = \frac{1}{n-1} \sum \rho_i^2, \quad (4.2)$$

5. Вычисляют дисперсию среднего арифметического ряда наблюдений

$$S^2[\bar{x}] = \frac{1}{n} S^2[x] \quad (4.3)$$

6. Определяют по соответствующей таблице коэффициент Стьюдента  $t_p(f)$  для заданного значения доверительной вероятности  $P_d$  и числа степеней свободы  $f = n - 1$  ( $n$  – число проведенных наблюдений).

Коэффициент Стьюдента определяет доверительный интервал для величины

$$t = (\bar{x} - x_{\text{н}}) / S[\bar{x}]. \quad (4.4)$$

В теории вероятностей доказано, что при нормальном законе распределения  $x_i$  случайная величина  $t$ , определяемая выражением (1.8), имеет закон распределения Стьюдента.

С увеличением числа наблюдений (*практически при  $n > 30$* ) закон распределения Стьюдента приближается к нормальному закону.

7. После определения значения  $t_p(f)$ , на основании выражений (4.1), (4.2), (4.3) и (4.4) для заданной доверительной вероятности  $P_d$  оценивают доверительный интервал погрешности и записывают результат измерения в виде

$$x_{\text{и}} = \bar{x} \pm t_p(f) S[\bar{x}] = \bar{x} \pm t_p(f) \frac{S[x]}{\sqrt{n}} \quad (4.5)$$

где  $x_{\text{и}}$  – истинное значение измеряемой величины.

Выражение (4.5) задает интервал, в границах которого с доверительной вероятностью  $P_d$  находится истинное значение измеряемой величины.

## 5 Оценка погрешности многократных измерений при известных характеристиках случайной погрешности

Выше в п. 4 рассматривалась задача оценки точности измерений при статистической обработке ряда наблюдений, т.е. по итогам проведенного измерительного эксперимента. Однако возможен вариант, когда дисперсия  $\sigma^2[x]$  или СКО  $\sigma[x]$  случайной погрешности средства измерения известно, например, из предыдущих экспериментов или из технической документации на применяемые средства измерений. Обычно на практике принимают нормальный закон распределения случайной погрешности и тогда результаты отдельных наблюдений при исключении из них систематической погрешности также будут иметь нормальный закон распределения с математическим ожиданием равным истинному значению измеряемой величины.

Как и в предыдущем случае определяют среднее арифметическое ряда наблюдений  $\bar{X}$ , а дисперсию среднего арифметического ряда наблюдений можно определить по формуле  $\sigma^2[\bar{x}] = \frac{\sigma^2[x]}{n}$ .

Для нахождения доверительного интервала погрешности измерения необходимо найти закон распределения для величины

$$z = (\bar{x} - x_{\text{и}}) / \sigma[\bar{x}] \quad (5.1)$$

Так как в выражение (5.1) входит только одна случайная величина  $\bar{x}$ , то вид закона распределения величины, определяемой этим выражением, определяется видом закона распределения величины  $\bar{x}$ . При нормальном законе распределения отдельных результатов  $x_i$  закон распределения  $\bar{x}$  тоже нормальный. Это объясняется известным из теории вероятностей свойством устойчивости нормального закона, заключающемся в том, что сумма случайных величин, распределенных по нормальному закону, дает случайную величину, распределенную по нормальному закону.

Таким образом, при нормальном законе распределения  $x_i$  случайная величина  $z$ , определяемая выражением (5.1), распределена по нормальному закону

распределения с математическим ожиданием, равным нулю и дисперсией, равной единице.

Следовательно, результат измерения можно записать в виде

$$x_{\text{и}} = \bar{x} \pm z_p \sigma[\bar{x}] = \bar{x} \pm z_p \frac{\sigma[x]}{\sqrt{n}} (\bar{x} - x_{\text{и}}) / \sigma[\bar{x}], \quad (5.2)$$

где  $z_p$  – коэффициент для нормального распределения.

Значение  $z_p$  определяется по табличным значениям для функции Лапласа  $\Phi(x)$  для заданного значения доверительной вероятности из условия  $P_{\text{д}} = 2\Phi(z_p)$ .

Для нормального закона распределения погрешности в (5.2) можно использовать следующие значения  $z_p$ : при  $P_{\text{д}} = 0.95$ ,  $z_p = 2$ ;  $P_{\text{д}} = 0.997$ ,  $z_p = 3$ .

На практике часто встречается однократное измерение, когда измеряемая величина оценивается по результату одного наблюдения. Этот случай можно рассматривать как частный случай многократных измерений (при  $n = 1$ ). Тогда выражение (5.2) примет вид

$$x_{\text{и}} = x \pm z_p \sigma[x],$$

где  $x$  – результат однократного измерения, из которого исключена систематическая погрешность;  $\sigma[x]$  – известное СКО случайной погрешности.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Метрология, стандартизация и сертификация: учебник для студ. учреждений высш. образования / [В.В.Алексеев, Б.Я.Авдеев, Е.М.Антонюк и др.]; под ред. В.В.Алексеева. – М.: Издательский центр «Академия», 2014.