МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
„ЛЭТИ“ им. В. И. Ульянова (Ленина)

ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ ПО РАЗЛИЧНЫМ РАЗДЕЛАМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Санкт-Петербург
Издательство СПбГЭТУ „ЛЭТИ“
2018

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
„ЛЭТИ“ им. В. И. Ульянова (Ленина)

ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ ПО РАЗЛИЧНЫМ РАЗДЕЛАМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство СПбГЭТУ „ЛЭТИ“
2018

УДК 51(07)
ББК В 11я7
Т 43

Т 43 Авторы: А. Л. Белопольский, Н. Г. Гоголева, С. А. Колбина, А. Л. Меркулов, Н. М. Червинская. Типовые расчеты по различным разделам высшей математики: учеб. пособие / СПб.: Изд-во СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, 2018. 80 с.

ISBN ?

Описываются типовые расчеты, выдаваемые студентам первого и второго курсов для самостоятельного выполнения. Для каждого типового расчета подробно, но без доказательств, излагается теоретический материал, необходимый для его выполнения. Кроме того, даются ссылки на учебники и учебные пособия, в которых можно найти доказательство сформулированных теорем и утверждений. В конце каждого раздела пособия приводится вариант задания с его полным решением. Пособие соответствует рабочим программам дисциплин читаемых кафедрой Высшей математики №1 студентам факультетов: электротехники и автоматики (1, 2 курсы), электроники (1, 2 курсы), экономики и менеджмента (1 курс) и открытого факультета (1, 2, 3 курсы).

Предназначено для студентов всех направлений и специальностей факультетов электротехники и автоматики, электроники, экономики и менеджмента и открытого факультета.

УДК 51(07)
ББК В 11я7

Рецензенты: кафедра высшей математики ВШТЭ СПбГУПТД;
д.т.н. проф. А. П. Господариков (СПбГГУ).

Утверждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

ISBN ?

Введение

Данное пособие предназначено для бакалавров первого и второго курса всех направлений и специальностей факультетов электротехники и автоматики, электроники, экономики и менеджмента и открытого факультета СПбГЭТУ. Оно соответствует новым рабочим программам по дисциплинам „Математический анализ“ и „Теория вероятностей и математическая статистика“.

Два последних раздела предназначены для бакалавров второго курса всех направлений и специальностей факультета электроники, а так же третьего курса открытого факультета по направлению 11.03.04 "Электроника и наноэлектроника"и соответствуют новым рабочим программам по дисциплине „Методы математической физики“.

Пособие написано на основе курсов, читаемых авторами, и является исправленным и существенно дополненным изданием учебного пособия [1]. Типовые расчеты (ТР): ТР 2.2 – ТР 2.5, содержащиеся в [1] исправлены, а ТР 2.2 и ТР 2.5 переделаны в соответствии с новыми рабочими программами. ТР 2.6 не включен в данное издание, т. к. отсутствует в новых рабочих программах.

Основным дополнением является включение новых разделов.

1. „Непрерывная случайная величина“. В пособии рассматриваются разделы теории вероятностей, соответствующие первой части новых рабочих программ для бакалавров по дисциплине „Теория вероятностей и математическая статистика“. Материал второй части данной дисциплины изложен в выходящем в 2017 году пособии [2].

2. „Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка“ и „Решение уравнения теплопроводности методами Фурье и сеток“, соответствующие программам для бакалавров факультетов электроники (2 курс) и открытого факультета (3 курс) СПбГЭТУ по дисциплине „Методы математической физики“.

Отметим некоторые стандартные обозначения, принятые в пособии. Множество натуральных чисел обозначается символом $\mathbb{N}$; множество целых чисел – $\mathbb{Z}$; множество вещественных чисел – $\mathbb{R}$; множество комплексных чисел – $\mathbb{C}$. Знак $\otimes$ – конец замечания, знак $\bullet$ – конец примера.

Созданный на кафедре ВМ-1 компьютерный пакет индивидуальных типовых расчетов (ТР) с возможностью генерации любого числа различных вариантов способствует активизации самостоятельной работы студентов и более глубокому усвоению теоретического материала, излагаемого на лекциях.

Данное учебное пособие посвящено подробному описанию ТР, которые выдаются студентам для самостоятельного выполнения. В издании содержатся теоретические сведения, необходимые для этого и примеры выполнения конкретных ТР.

В учебном пособии рассмотрены четыре ТР, которые выдаются студентам 1 курса при изучении дисциплины „ Математический анализ “; один ТР для студентов 2 курса при изучении дисциплины „Теория вероятностей и математическая статистика“ и два ТР для студентов изучающих дисциплину „Методы математической физики“. Все ТР соответствуют рабочим программам.

Дадим список включенных в пособие ТР и ссылки на учебные пособия и учебники, в которых можно найти подробное изложение теории с доказательствами.

1. Построение графика функции (ТР 2.2) см. учебное пособие [3] и учебник [4].

2. Интегрирование рациональных дробей (ТР 2.3) см. учебные пособия [3], [5], учебник [4] и справочник [6].

3. Приближенное вычисление интеграла и специальные функции (ТР 2.4) см. учебные пособия [3], учебник [4] и справочник [7].

4. Экстремумы функций двух переменных (ТР 2.5) см. учебные пособия [8], [9] и учебник [4].

5. Случайная величина с абсолютно непрерывным распределением и ее характеристики (ТР№ 1 по теории вероятностей) см. учебные пособия [2], [10] и [11].

6. Методы математической физики (ТР 3.1) (ТР 3.2) см. учебные пособия [12], [13], [14], [15] и учебник [4]. Учебное пособие [15], содержащее большое количество разнообразных примеров, полезно использовать как справочник при решении домашних заданий к практическим занятиям и при выполнении ТР.

Студенту выдается распечатка, содержащая номер варианта и условие ТР. Алгоритмы выполнения ТР обсуждаются на лекциях и на соответствующих практических занятиях. Все ТР ориентированы на использование калькуляторов. Студенты могут выполнять ТР с использованием программ, реализующих заданный алгоритм, при условии, что приложена распечатка с текстом программы, результатами вычислений и студент может пояснить работу всех операторов и программы в целом.

Отчет по ТР должен включать: 1) стандартный титульный лист; 2) условие ТР (распечатку, содержащую условие ТР, студенты наклеивают в самом начале своего отчета); 3) содержание ТР (в этом разделе формулируется математическая задача, которая решается в ТР); 4) достаточно подробное описание выполнения ТР; 5) ответы на все пункты задания.

Студентам настоятельно рекомендуется делать проверку полученных результатов. В примерах выполнения конкретных ТР в учебном пособии даны указания относительно выполнения проверок.

1. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Пусть задана функция $f\colon X \to Y$, $X \subset \mathbb{R}$ и $Y \subset \mathbb{R}$.

1.1. Непрерывность функции

Подробное изложение теории с доказательствами можно найти в учебном пособии [3] и учебнике [4].

Определение 1.1. *Функция $f : X \to Y$ называется непрерывной в точке $a \in X$, если a – изолированная точка X, или a – предельная точка X и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Если f непрерывна в каждой точке множества X, то она непрерывна на X.

Теорема 1.1. *Пусть функции $f : X \to Y$ и $g : Y \to \mathbb{R}$ непрерывны в точках a и $f(a)$ соответственно. Тогда их суперпозиция $g \circ f$ непрерывна в точке a.*

Теорема 1.2. *Пусть функции $f, g : X \to \mathbb{R}$ непрерывны в точке a. Тогда $f + g$, $f - g$, fg, f/g (при $g(a) \neq 0$) непрерывны в точке a.*

Определение 1.2. *Функция $f : X \to Y$ называется непрерывной слева (справа) в точке $a \in X$, если $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = f(a)$ $\left(\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a)\right)$.*

Теорема 1.3. *Пусть $a \in X$ – предельная точка X. Функция $f : X \to Y$ непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда f непрерывна слева и справа (одновременно) в точке a.*

Предложение 1.1. *Функция $f : X \to Y$ непрерывна в предельной для множества X точке a, если выполнены три условия:*

1) *f определена в точке a;*
2) *существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$;*
3) *$\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Предложение 1.2. *Любая из основных элементарных функций (c, x^α, a^x, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$) непрерывна в своей области определения.*

1.2. Точки разрыва функции

Определение 1.3. *Если в точке a, предельной для множества X, нарушено хотя бы одно из условий 1, 2, 3 предложения 1.1, то a называется точкой разрыва функции f.*

Определение 1.4. *Точка разрыва a функции f называется:*

1) *точкой устранимого разрыва, если существует конечный* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$;

2) *точкой разрыва первого рода, если существуют конечные, но различные* $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$;

3) *точкой разрыва второго рода, если она не является точкой разрыва первых двух типов, т. е. если хотя бы один из односторонних пределов не существует или бесконечен.*

1.3. Асимптоты графика функции

Определение 1.5. *Пусть $f: X \to Y$. Если хотя бы один из пределов* $\lim\limits_{x\to x_0-0} |f(x)|$ *или* $\lim\limits_{x\to x_0+0} |f(x)|$ *равен $+\infty$, то прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой графика f.*

Очевидно, если прямая $x = x_0$ есть вертикальная асимптота графика функции f, то x_0 есть точка разрыва второго рода функции f.

Определение 1.6. *Если существуют такие $k, b \in \mathbb{R}$, что*

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - (kx + b)) = 0,$$

то прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой графика функции f при $x \to +\infty$.

Аналогично определяется наклонная асимптота графика функции f при $x \to -\infty$.

Теорема 1.4. *Для того чтобы прямая $y = kx + b$ была наклонной асимптотой графика функции f при $x \to +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы одновременно существовали конечные пределы*

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx).$$

Аналогичная теорема верна для наклонной асимптоты графика функции f при $x \to -\infty$.

1.4. Монотонность и экстремумы функции

Определение 1.7. *Функция $f: X \to Y$ называется:*

1) *возрастающей (неубывающей), если для любых $x_1, x_2 \in X$, таких, что $x_1 < x_2$ выполнено $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) \le f(x_2))$;*

2) *убывающей (невозрастающей), если для любых $x_1, x_2 \in X$, таких, что $x_1 < x_2$ выполнено $f(x_1) > f(x_2)$ $(f(x_1) \ge f(x_2))$;*

3) *монотонной, если она входит в один из четырех перечисленных классов*;

4) *строго монотонной, если она возрастает или убывает.*

Пусть функция $f : [a, b] \to Y$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b).

Теорема 1.5. 1. *Функция f не убывает (не возрастает, постоянна) на $[a, b]$ тогда и только тогда, когда $f' \geq 0$ (≤ 0, $= 0$) на (a, b);*

2. *Если $f' > 0$ (< 0) на (a, b), то функция f возрастает (убывает) на $[a, b]$.*

Определение 1.8. *Точка x_0 называется внутренней точкой множества X, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что $K_\varepsilon(x_0) \subset X$.*

Определение 1.9. *Пусть $f : X \to Y$, $x_0 \in X$. Говорят, что функция f в точке x_0 достигает:*

1) *максимума (минимума), если x_0 – внутренняя точка X и существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $x \in \overset{\circ}{K}_\varepsilon(x_0) \cap X$ выполнено условие $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$);*

2) *экстремума, если f в точке x_0 достигает максимума или минимума;*

3) *наибольшего (наименьшего) значения, если для любого $x \in X$ справедливо $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$).*

Точки, в которых f достигает максимума (минимума, экстремума) называются точками максимума (минимума, экстремума) функции f.

Теорема 1.6. (Ферма). *Если в точке x_0, внутренней точке множества X, функция f достигает максимума (минимума, наибольшего или наименьшего значения) и существует $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.*

Определение 1.10. *Пусть $f \colon X \to Y$, $x_0 \in X$ внутренняя точка множества X. Если $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует, то x_0 называется критической точкой функции.*

Функция может иметь экстремум только в критических точках.

Теорема 1.7. *Пусть функция f непрерывна в точке x_0. Если для некоторого $\varepsilon > 0$ $K_\varepsilon(x_0) \subset X$ и существует f' в $\overset{\circ}{K}_\varepsilon(x_0)$, тогда:*

1) *если $f' > 0$ на $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ и $f' < 0$ на $(x_0, x_0 + \varepsilon)$, то x_0 – точка максимума;*

2) *если $f' < 0$ на $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ и $f' > 0$ на $(x_0, x_0 + \varepsilon)$, то x_0 – точка минимума;*

3) *если $f' > 0$ ($f' < 0$) на $(x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$, то в x_0 экстремума нет.*

Определение 1.11. *Критическая точка x_0 функции f называется стационарной, если $f'(x_0) = 0$.*

Теорема 1.8. *Пусть x_0 стационарная точка функции f и существует $f''(x_0)$. Тогда, если $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$), то x_0 – точка минимума (максимума).*

1.5. Выпуклость функции. Точки перегиба

Определение 1.12. *Пусть $f\colon X \to Y$ дифференцируема в точке $x_0 \in X$. Будем говорить, что функция f выпукла вниз (вверх) в окрестности точки x_0, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $x \in \overset{\circ}{K}_\varepsilon(x_0) \cap X$ справедливо неравенство*

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0);$$

$$(f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)).$$

Геометрически выпуклость вниз (вверх) в точке x_0 означает, что в некоторой проколотой окрестности x_0 график функции f лежит выше (ниже) касательной к графику f в точке x_0.

Теорема 1.9. *Пусть $f\colon\ X \to Y$ дважды дифференцируема на интервале $(a, b) \subset X$. Если $f'' > 0$ ($f'' < 0$) на (a, b) то функции f выпукла вниз (вверх) на $[a, b]$.*

Определение 1.13. *Точка $x_0 \in X$ называется точкой перегиба функции f, если точка x_0 – внутренняя точка множества X и существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$*

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

и любого $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

или наоборот.

Теорема 1.10. *Пусть x_0 – точка перегиба функции f. Если существует $f''(x_0)$, то $f''(x_0) = 0$.*

Внутренние точки из множества X, в которых вторая производная функции f равна нулю или не существует, называются точками подозрительными на перегиб.

Теорема 1.11. *Пусть x_0 – точка подозрительная на перегиб. Если при переходе через такую точку вторая производная меняет знак, то x_0 – точка перегиба функции f.*

В противном случае в точке x_0 перегиба нет.

1.6. Типовой расчет по теме „Построение графика функции“ (ТР 2.2)

Каждый студент получает индивидуальное домашнее задание следующего вида:

ТР 2.2. Вар.0. Исследовать заданную функцию. Построить эскиз графика функции:

$$f(x) = \begin{cases} -2\sqrt[3]{(x+3)^2} - 2x - 6, & x \le -1 \\ \dfrac{-2(x-2)^2}{(x+1)^2}, & x > -1 \end{cases}.$$

Требуется исследовать функцию $f(x)$ и, используя полученные результаты, построить эскиз графика функции. Типовой расчет рекомендуется выполнить по следующему плану:

1) найти область определения функции;

2) исследовать функцию на четность, нечетность и периодичность;

3) найти точки пересечения графика функции с координатными осями;

4) исследовать функцию на непрерывность: найти точки разрыва и указать тип разрыва;

5) вычислить пределы функции на бесконечности;

6) найти асимптоты графика функции;

7) найти первую производную функции, используя ее, определить интервалы возрастания, убывания и локальные экстремумы функции;

8) найти вторую производную функции, используя ее, определить интервалы выпуклости и точки перегиба функции;

9) заполнить итоговую таблицу;

10) построить эскиз графика функции.

Пример выполнения ТР 2.2. Вар.0.

1. Найдем область определения $f(x)$. Эта функция задана по разным правилам на промежутках $(-\infty; 1]$ и $(-1; +\infty)$. Поскольку функция $-2\sqrt[3]{(x+3)^2} - 2x - 6$ определена для всех $x \le -1$ и функция $\dfrac{-2(x-2)^2}{(x+1)^2}$ определена для всех $x > -1$, то функция $f(x)$ определена на всей числовой оси – $\mathbb{R}$.

2. Проверим заданную функцию $f(x)$ на четность, нечетность и периодичность.

Функция $f(x)$ называется четной, если выполняется условие $f(-x) = f(x)$ и – нечетной, если $f(-x) = -f(x)$ для всех x из области определения функции. Очевидно, что для функции $f(x)$ эти требования не выполняются. Зададим, например, $x = -3$ и $x = 3$:

$$f(-3) = -2\sqrt[3]{(-3+3)^2} - 2(-3) - 6 = 0, \quad f(3) = \frac{-2(3-2)^2}{(3+1)^2} = -\frac{1}{8}.$$

Следовательно, $f(x)$ не является четной и не является нечетной функцией.

Функция $f(x)$ называется периодической, если существует такое положительное число T, что выполняется равенство $f(x+T) = f(x)$ для всех x из области определения функции. Очевидно, что такого числа нет. Поэтому $f(x)$ не является периодической функцией. Значит $f(x)$ – функция общего вида.

3. Найдем точки пересечения графика функции $y = f(x)$ с координатными осями.

Зададим $x = 0$: $f(0) = \dfrac{-2(0-2)^2}{(0+1)^2} = -8$. График пересекает ось OY в точке $(0, -8)$.

Пусть $y = 0$. Решим уравнение $f(x) = 0$.

а. При $x \leq -1$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -2\sqrt[3]{(x+3)^2} - 2(x+3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\sqrt[3]{(x+3)^2} = 2(x+3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2 = -(x+3)^3 \Leftrightarrow (x+3)^2(1+x+3) = 0.$$

Корни: $x = -4$, $x = -3$.

б. При $x > -1$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2(x-2)^2}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

График функции $y = f(x)$ пересекает ось OX в точках $(-4, 0)$, $(-3, 0)$, $(2, 0)$.

4. Исследуем функцию $f(x)$ на непрерывность.

Функция $-2\sqrt[3]{(x+3)^2} - 2x - 6$ непрерывна при $x \leq -1$. Функция $\frac{-2(x-2)^2}{(x+1)^2}$ непрерывна при $x > -1$. Она имеет разрыв в точке $x = -1$ – граничной точке промежутка $x > -1$. Исследуем функцию $f(x)$ в окрестности этой точки. Найдем пределы слева и справа в точке $x = -1$:

$$\lim_{x\to-1-0} f(x) = f(-1) = -2\sqrt[3]{(-1+3)^2} - 2(-1) - 6 = -2\sqrt[3]{4} - 4 \approx -7.175,$$

$$\lim_{x\to-1+0} f(x) = \lim_{x\to-1+0} \frac{-2(x-2)^2}{(x+1)^2} = -\infty.$$

В точке $x = -1$ функция $f(x)$ имеет разрыв 2-го рода. Во всех остальных точках области определения функция непрерывна.

5. Исследуем функцию на бесконечности.

Вычислим пределы функции $f(x)$ на $+\infty$ и $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -2\sqrt[3]{(x+3)^2} - 2(x+3) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2(x-2)^2}{(x+1)^2} = -2.$$

6. Найдем асимптоты графика функции $y = f(x)$.

Прямая $x = -1$ является вертикальной асимптотой графика функции, поскольку в точке $x = -1$ функция $f(x)$ имеет разрыв второго рода: $\lim\limits_{x\to-1+0} f(x) = -\infty$.

Прямая $y = -2$ является горизонтальной асимптотой графика функции при $x \to +\infty$, так как на плюс бесконечности $f(x)$ имеет конечный предел: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$.

На минус бесконечности функция не ограничена, поэтому при $x \to \to -\infty$ график функции может иметь наклонную асимптоту $y = kx + b$. Проверим это вычислив пределы:

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2\sqrt[3]{(x+3)^2} - 2(x+3)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^{\frac{2}{3}}(1+\frac{3}{x})^{\frac{2}{3}}}{x} - 2 - \frac{6}{x} = -2,$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - (-2x)) = \lim_{x\to-\infty} (-2\sqrt[3]{(x+3)^2} - 6) = -\infty.$$

Поскольку получился бесконечный предел, то наклонной асимптоты при $x \to -\infty$ нет.

7. Найдем $f'(x)$:

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{4}{3\sqrt[3]{x+3}} - 2, & x \le -1 \\ \dfrac{-12(x-2)}{(x+1)^3} & x > -1. \end{cases}$$

Используем $f'(x)$ для определения интервалов монотонного поведения и экстремумов функции. Сначала найдем критические точки, т.ė. точки, в которых $f'(x)$ имеет разрыв или равна нулю.

а. Точка $x = -1$ является критической точкой. Это следует из того, что в этой точке $f'(x)$ имеет разрыв второго рода:

$$\lim_{x\to-1+0} f'(x) = \lim_{x\to-1+0} \frac{-12(x-2)}{(x+1)^3} = +\infty.$$

б. При $x < -1$ функция $f'(x)$ имеет разрыв в точке $x = -3$. Найдем на этом интервале точки в которых $f'(x) = 0$:

$$-\frac{4}{3\sqrt[3]{x+3}} - 2 = 0 \Leftrightarrow -\frac{4}{3\sqrt[3]{x+3}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+3} = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + 3 = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \Leftrightarrow x = -3\frac{8}{27}.$$

Таким образом $x \approx -3.296$.

в. При $x > -1$ функция $f'(x)$ непрерывна и $f'(x) = 0$ в точке $x = 2$.

Перечислим все критические точки – точки в которых $f'(x)$ имеет разрыв или равна нулю: $-3.296,\ -3,\ -1,\ 2$. Эти точки выделяют интервалы на которых функция $f(x)$ монотонно возрастает или монотонно убывает. Заполним таблицу, указав знак $f'(x)$ на каждом интервале. Покажем стрелочкой поведение функции.

Таблица 1.1

	$(-\infty, -3.296)$	-3.296	$(-3.296, -3)$	-3	$(-3, -1)$	-1	$(-1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$\bigcirc$	$-$	$\bigcirc$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$		$\nearrow$	max	$\searrow$

Точки $x = -3.296$, $x = -3$, $x = 2$ являются точками экстремума функции. При этом, $x = -3.296$ и $x = 2$ – точки гладкого минимума и максимума, а $x = -3$ – это точка острого максимума функции.

8. Найдем $f''(x)$:

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{9\sqrt[3]{(x+3)^4}}, & x \le -1 \\ \dfrac{-12(7-2x)}{(x+1)^4}, & x > -1. \end{cases}$$

Исследуем функцию с помощью второй производной. Определим сначала критические точки, т. е.точки в которых $f''(x)$ имеет разрыв или равна нулю. Эти точки выделяют интервалы определенного направления выпуклости функции $f(x)$.

а. В точке $x = -1$ функция $f''(x)$ имеет разрыв второго рода:

$$\lim_{x\to -1+0} f(x) = \lim_{x\to -1+0} \frac{-12(7-2x)}{(x+1)^4} = -\infty.$$

б. При $x < -1$ функция $f''(x)$ имеет одну точку разрыва $x = -3$. Точек в которых $f''(x) = 0$ нет.

в. При $x > -1$ точек разрыва функция $f''(x)$ не имеет и $f(x) = 0$, если $x = 3.5$.

Запишем все точки оси OX, в которых $f''(x)$ не существует или равна нулю: $-3, -1, 3.5$. Заполним таблицу, указав знак $f''(x)$ и направление выпуклости функции на интервалах, выделяемых критическими точками.

Таблица 1.2

	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, -1)$	-1	$(-1, 3.5)$	3.5	$(3.5, +\infty)$
$f''(x)$	$+$	$\bigcirc$	$+$	$\bigcirc$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\smile$		$\smile$		$\frown$		$\smile$

Точка $x = 3.5$ является точкой перегиба.

9. Итоговая таблица.

Эту таблицу будем использовать для построения эскиза графика функции. Запишем все точки оси OX в которых функции $f(x)$, $f'(x)$ и $f''(x)$ имеют разрыв или обращаются в нуль: -4, -3.296, -3, -1, 2, 3.5. На интервалах, определяемых точками отметим знаки всех перечисленных функций и используя стрелочки укажем поведение функции $f(x)$.

Таблица 1.3

	$(-\infty,-4)$	-4	(-4,-3.296)	-3.296	(-3.296,-3)	-3	(-3,-1)	(-1,2)	2	(2,3.5)	3.5	$(3.5,+\infty)$
$f(x)$	$+$	0	$-$	-0.296	$-$	0	$-$	$-$	0	$-$	-0.222	$-$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$	$\bigcirc$	$-$	$+$	0	$-$		$-$
$f''(x)$	$+$		$+$		$+$	$\bigcirc$	$+$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow \smile$		$\searrow \smile$	min	$\nearrow \smile$	max	$\searrow \smile$	$\nearrow \frown$	max	$\searrow \frown$		$\searrow \smile$

10. Эскиз графика функции (см. Рис. 1.1)

Сначала построим асимптоты. Затем отметим на рисунке точки пересечения графика функции с координатными осями. После этого выделим на оси OX точки в которых $f'(x)$ и $f''(x)$ имеют разрыв или обращаются в нуль. Далее, используя таблицу, последовательно построим эскиз на выделенных интервалах, начиная с первого.

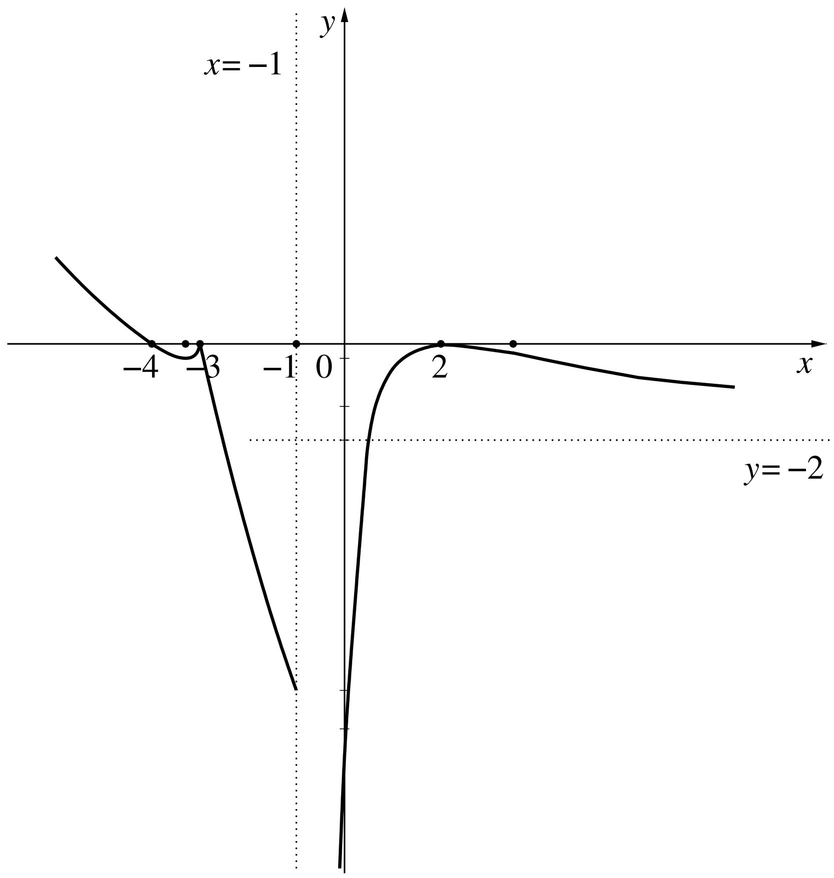

Рис. 1.1

2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

2.1. Многочлены и их свойства

Подробное изложение общей теории с доказательствами можно найти в учебном пособии [5].

Определение 2.1. *Функция* $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, *определенная правилом*

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \quad a_n \neq 0, \tag{2.1}$$

называется многочленом (полиномом) степени n. *Числа* a_n, a_{n-1}, $\ldots$, a_0 *называются коэффициентами многочлена* P (a_n – *старшим коэффициентом), а целое неотрицательное число* n – *его степенью. Степень многочлена* P *будем обозначать* ст.P *и записывать*: ст.$P = n$.

Для многочленов, как и для любых числовых функций с общей областью определения, определены обычным образом сложение, вычитание и умножение, причем сумма, разность и произведение многочленов также, очевидно, являются многочленами.

Теорема 2.1. *Если два многочлена P и Q тождественно совпадают, т. е. $P(z) = Q(z)$ при всех $z \in \mathbb{C}$, то совпадают их степени и коэффициенты (при одинаковых степенях z).*

Многочлены обладают некоторыми свойствами, аналогичными свойствам целых чисел. Известно, что при умножении целых чисел получаем целое число. Это же свойство справедливо и для многочленов – перемножая многочлены, получаем многочлен. Деление же нацело двух целых чисел, т.е. получение в результате целого числа, возможно далеко не всегда. В общем случае при делении целого числа n на целое m получаем некоторое частное k и остаток r. При этом справедливо равенство $n = mk + r$. То же можно сказать и о делении многочленов. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2. *Для любых многочленов P и Q, ст.$Q > 0$, существуют единственные многочлены q и r, такие, что*

$$P(z) = Q(z)q(z) + r(z), \tag{2.2}$$

причем степень многочлена r меньше степени многочлена Q, в частности, возможно $r(z) \equiv 0$. Многочлен q называется частным (от деления P на Q), а r – остатком.

Теорема 2.2 имеет важное следствие.

Теорема 2.3. (Безу). *Пусть P – многочлен, причем* ст.$P \geq 1$. *Тогда остаток от деления P на многочлен $(z - c)$ равен $P(c)$.*

Определение 2.2. *Нулем многочлена P называется корень уравнения $P(z) = 0$, $z \in \mathbb{C}$.*

Ясно, что многочлен нулевой степени нулей не имеет. Пусть ст.$P > 0$. Из теоремы 2.3 следует, что если c – нуль многочлена P, то

$$P(z) = (z - c)q(z), \tag{2.3}$$

где ст.q = (ст.P) $- 1$. Обратное утверждение очевидно. Таким образом, число c является нулем многочлена P тогда и только тогда, когда P представим в виде (2.3).

Если многочлен q тоже обращается в нуль в точке c, то и он представим в аналогичном виде $q(z) = (z - c)q_1(z)$, а значит, для P получаем представление

$$P(z) = (z - c)^2 q_1(z)$$

(ясно, что ст.q_1 = ст.$P - 2$). Продолжая эти рассуждения, приходим к понятию кратности нуля многочлена.

Определение 2.3. *Число c называется нулем многочлена P кратности k ($k \in \mathbb{N}$), если имеет место представление*

$$P(z) = (z-c)^k q(z), \quad q(c) \neq 0. \tag{2.4}$$

Замечание 2.1. Если $k = 1$, то говорят, что c – простой нуль многочлена P.

Теорема 2.4. *Число c является нулем многочлена P кратности k тогда и только тогда, когда*

$$P(c) = P'(c) = \ldots = P^{(k-1)}(c) = 0, \quad P^{(k)}(c) \neq 0. \tag{2.5}$$

Теорема 2.5. (Основная теорема алгебры). *Всякий многочлен ненулевой степени имеет хотя бы один нуль.*

Из основной теоремы алгебры доказывается важное следствие.

Следствие 2.1. *Многочлен*

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$$

степени $n \geq 1$ может быть представлен в виде

$$P(z) = a_n(z-c_1)\ldots(z-c_n), \tag{2.6}$$

где, очевидно, числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$ являются нулями многочлена P. Это представление единственно (с точностью до порядка сомножителей).

В общем случае в разложении (2.6) среди чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$ могут быть равные, т.е. какие-то нули многочлена P могут иметь кратность больше единицы. Пусть различными нулями многочлена P служат числа c_1, $c_2, \ldots, c_m$ ($m \leq n$). Обозначим их кратности через $k_1, k_2, \ldots, k_m$ соответственно.

Тогда разложение (2.6) принимает вид

$$P(z) = a_n(z-c_1)^{k_1}(z-c_2)^{k_2}\ldots(z-c_m)^{k_m}. \tag{2.7}$$

Здесь $1 \leq k_i \leq n, \quad i = 1, \ldots, m, \quad k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$. Формула (2.7) означает, что любой многочлен степени n имеет ровно n нулей с учетом их кратностей.

В ТР встречаются только вещественные многочлены (2.7), у которых a_n, a_{n-1}, $\ldots$, $a_0 \in \mathbb{R}$.

Теорема 2.6. *Многочлен с вещественными коэффициентами принимает в комплексно-сопряженных точках комплексно-сопряженные значения, т. е. $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$.*

Следствие 2.2. *Если c – нуль вещественного многочлена, то $\bar{c}$ – также нуль этого многочлена.*

Замечание 2.2. Можно показать, что кратности комплексно-сопряженных нулей вещественного многочлена совпадают.

Теперь можно уточнить формулу (2.7) разложения вещественного многочлена на множители. Пусть c_1 (где $\mathrm{Im}(c_1) \neq 0$) и $\bar{c}_1$ – комплексно-сопряженные нули вещественного многочлена. В формуле (2.7) этим нулям соответствуют множители $(z - c_1)^{k_1}$ и $(z - \bar{c}_1)^{k_1}$. Их произведение равно

$$\big[(z - c_1)(z - \bar{c}_1)\big]^{k_1} = \big[z^2 - (c_1 + \bar{c}_1)z + c_1\bar{c}_1\big]^{k_1} = (z^2 + \alpha_1 z + \beta_1)^{k_1},$$

где $\alpha_1 = -(c_1 + \bar{c}_1)$ и $\beta_1 = c_1\bar{c}_1$ – вещественные числа, причем $\alpha_1^2 - 4\beta_1 < 0$. Таким образом в разложении (2.7) можно объединить все пары множителей, соответствующих комплексно-сопряженным нулям многочлена P.

Из выше сказанного, справедливо следующее утверждение (в дальнейшем, следуя традиции, аргумент вещественного многочлена обозначаем буквой x.

Утверждение 2.1. *Для любого вещественного многочлена ненулевой степени n справедливо представление*:

$$P(x) = a_n(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{k_1} \ldots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{k_l}(x - d_1)^{n_1} \ldots (x - d_m)^{n_m}, \quad (2.8)$$

где $d_1, \ldots, d_m$ – вещественные нули многочлена P с кратностью $n_1, \ldots, n_m$ соответственно, множители $(x^2 + \alpha_p x + \beta_p)^{k_p}$ отвечают парам комплексно-сопряженных корней кратности k_p, т.е. $\alpha_p, \beta_p \in \mathbb{R}$, $\alpha_p^2 - 4\beta_p < 0$, $p = 1, 2, \ldots, l$, и $2(k_1 + k_2 + \ldots + k_l) + n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$.

2.2. Рациональные дроби

Определение 2.4. *Пусть P и Q – вещественные многочлены, причем P – ненулевой многочлен. Функция R, значения которой вычисляются по правилу*

$$R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}, \quad (2.9)$$

называется вещественной рациональной дробью или вещественной дробно-рациональной функцией. Функция R определена везде, кроме точек, в которых многочлен P обращается в нуль.

Определение 2.5. *Рациональная дробь (2.9) называется правильной, если степень многочлена-числителя Q строго меньше степени многочлена-знаменателя P. В противном случае дробь называется неправильной.*

Заметим, что справедливо утверждение.

Утверждение 2.2. *Если* $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ *и* $R_1,\ R_2$ – *правильные рациональные дроби, то* $\alpha R_1 + \beta R_2$ *и* $R_1 \cdot R_2$ *так же правильные рациональные дроби.*

Если дробь неправильная, то ее можно представить в виде суммы многочлена и правильной дроби. Действительно, на основании теоремы 2.2

$$Q(x) = P(x)p(x) + r(x)$$

и, следовательно,

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = p(x) + \frac{r(x)}{P(x)},$$

где степень r строго меньше степени P.

Определение 2.6. *Вещественные рациональные дроби вида*

$$\frac{A}{(x-c)^k} \text{ и } \frac{Mx+L}{(x^2+\alpha x+\beta)^m},$$

где $k, m \in \mathbb{N}$, $\alpha^2 - 4\beta < 0$, *будем называть простейшими вещественными дробями.*

Теорема 2.7. *Пусть* $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ – *правильная вещественная рациональная дробь, где (см. (2.3))*

$$P(x) = a_n(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{k_1}\ldots(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{k_l}(x-d_1)^{n_1}\ldots(x-d_m)^{n_m}.$$

Тогда эта дробь единственным образом может быть разложена в следующую сумму простейших вещественных дробей:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A^{(1)}_{n_1}}{(x-d_1)^{n_1}} + \frac{A^{(1)}_{n_1-1}}{(x-d_1)^{n_1-1}} + \ldots + \frac{A^{(1)}_1}{x-d_1} + \ldots +$$

$$+\frac{A^{(m)}_{n_m}}{(x-d_m)^{n_m}} + \frac{A^{(m)}_{n_m-1}}{(x-d_m)^{n_m-1}} + \ldots + \frac{A^{(m)}_1}{x-d_m} +$$

$$+\frac{M^{(1)}_{k_1}x + L^{(1)}_{k_1}}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{k_1}} + \frac{M^{(1)}_{k_1-1}x + L^{(1)}_{k_1-1}}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{k_1-1}} + \ldots + \frac{M^{(1)}_1 x + L^{(1)}_1}{x^2+\alpha_1 x+\beta_1} +$$

$$+\ldots+\frac{M^{(l)}_{k_l}x + L^{(l)}_{k_l}}{(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{k_l}} + \frac{M^{(l)}_{k_l-1}x + L^{(l)}_{k_l-1}}{(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{k_l-1}} + \ldots + \frac{M^{(l)}_1 x + L^{(l)}_1}{x^2+\alpha_l x+\beta_l}.$$

Пример 2.1. Разложить в сумму простейших вещественных дробей правильную дробь:

$$R(x) = \frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2x + 3)^2(x + 1)}\,.$$

Разложение с неопределенными коэффициентами имеет вид

$$R(x) = \frac{Ax + B}{(x^2 + 2x + 3)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 3} + \frac{E}{x + 1}\,.$$

Приведем слагаемые, записанные в правой части равенства, к общему знаменателю и приравняем числители исходной и полученной рациональных дробей. Получим

$$x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8 =$$
$$= (Ax + B)(x + 1) + (Cx + D)(x^2 + 2x + 3)(x + 1) + E(x^2 + 2x + 3)^2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, (см. теорему 2.1) находим:

$$\begin{cases} C + E = 1, \\ 3C + D + 4E = 4, \\ A + 5C + 3D + 10E = 11, \\ A + B + 3C + 5D + 12E = 12, \\ B + 3D + 9E = 8, \end{cases}$$

откуда $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$, $D = 0$, $E = 1$ и, следовательно,

$$R(x) = \frac{x - 1}{(x^2 + 2x + 3)^2} + \frac{1}{x + 1}\,. \bullet$$

2.3. Интегрирование рациональных дробей

При выполнении ТР после выделения целой части неправильной рациональной дроби и разложения правильной рациональной дроби в сумму простейших требуется вычислять интегралы от многочленов и простейших рациональных дробей. Приведем необходимые формулы, а полное изложение можно найти в учебнике [2].

Для интегрирования многочлена используется линейность интеграла и формула:

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n + 1}\,x^{n+1} + C, \quad n \geq 0. \tag{2.10}$$

Для интегрирования правильных рациональных дробей знаменатели которых имеют только вещественные корни, используются формулы:

$$\int \frac{dx}{x - a} = \ln|x - a| + C \tag{2.11}$$

и

$$\int \frac{dx}{(x-b)^k} = \frac{1}{1-k}(x-b)^{1-k} + C, \quad k > 1. \tag{2.12}$$

В случае, когда знаменатель правильной рациональной дроби имеет простые комплексно-сопряженные корни, для ее интегрирования используется формула:

$$\begin{gathered}\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+ \\ +\frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)+C.\end{gathered} \tag{2.13}$$

В ТР отсутствуют примеры требующие интегрирования правильных рациональных дробей, когда ее знаменатель имеет кратные комплексно-сопряженные корни, т. е. интегралы вида

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\,dx, \quad k > 1. \tag{2.14}$$

Для вычисления интегралов вида (2.14) можно воспользоваться рекуррентными формулами, которые приведены в подробных таблицах интегралов (см., например [6], с. 27, №№ 160.09 и 160.19) и позволяют понижать степень знаменателя.

2.4. Типовой расчет по теме „Интегрирование рациональных дробей“ (ТР 2.3)

Студентам выдаются индивидуальные задания вида:

ТР 2.3. Вар. 0. Найти интегралы.

1. $\displaystyle\int \frac{x^4+3x^3-7x-9}{(x-2)(x+3)(x-1)}\,dx$, **2.** $\displaystyle\int \frac{-2x^4-13x^3-8x^2+98x+181}{(x+3)^4(x-1)}\,dx$,

3. $\displaystyle\int\limits_{-1}^{0} \frac{2x^3-7x^2+13x-5}{(x-2)^2(x^2-4x+13)}\,dx$.

Требуется найти неопределенные интегралы (первые два задания) и вычислить определенный интеграл (третье задание).

Пример выполнения ТР 2.3. Вар. 0.

1. Найти $I_1 = \displaystyle\int \frac{x^4+3x^3-7x-9}{(x+2)(x+3)(x-1)}\,dx$.

Обозначим $f_1(x) = \dfrac{x^4 + 3x^3 - 7x - 9}{(x+2)(x+3)(x-1)}$. Перемножив двучлены знаменателя, получим $f_1(x) = \dfrac{x^4 + 3x^3 - 7x - 9}{x^3 + 4x^2 + x - 6}$ – неправильную рациональную дробь.

a. Выделим целую часть, для этого разделим числитель на знаменатель с остатком:

$$
\begin{array}{rl|l}
- & x^4 + 3x^3 - 7x - 9 & x^3 + 4x^2 + x - 6 \\ \cline{3-3}
 & \underline{x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x} & \quad x - 1 \\
- & -x^3 - x^2 - x - 9 & \\
 & \underline{-x^3 - 4x^2 - x + 6} & \\
 & 3x^2 \quad - 15 & \text{(остаток)}
\end{array}
$$

Следовательно, $f_1(x) = (x-1) + \dfrac{3x^2 - 15}{x^3 + 4x^2 + x - 6}$.

b. Разложим в сумму простейших правильную рациональную дробь, знаменатель которой имеет простые вещественные нули

$$\frac{3x^2 - 15}{(x+2)(x+3)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-1}.$$

Приведем правую часть последнего равенства к общему знаменателю и приравняем числители в обеих частях равенства. В итоге имеем

$$3x^2 - 15 = A(x+3)(x-1) + B(x+2)(x-1) + C(x+2)(x+3).$$

Для нахождения значений A, B и C применим метод отдельных значений аргумента. Подставим в это равенство корни знаменателя. Этот прием позволяет получить простые соотношения для нахождения A, B и C.

$$
\begin{array}{r|ll}
x = -3 & 4B = 12, & B = 3, \\
x = -2 & -3A = -3, & A = 1, \\
x = 1 & 12C = -12, & C = -1.
\end{array}
$$

Искомое разложение имеет вид

$$\frac{3x^2 - 15}{(x+2)(x+3)(x-1)} = \frac{1}{x+2} + \frac{3}{x+3} - \frac{1}{x-1}.$$

Значит

$$f_1(x) = (x-1) + \frac{1}{x+2} + \frac{3}{x+3} - \frac{1}{x-1}.$$

c. Вычислим интеграл используя формулы (2.10) и (2.11)

$$I_1 = \int f_1(x)\,dx = \int \left((x-1) + \frac{1}{x+2} + \frac{3}{x+3} - \frac{1}{x-1} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x+2| + 3\ln|x-3| - \ln|x-1| + C.$$

2. Найти $I_2 = \displaystyle\int \frac{-2x^4 - 13x^3 - 8x^2 + 98x + 181}{(x+3)^4(x-1)}\,dx.$

a. Пусть $f_2(x) = \dfrac{-2x^4 - 13x^3 - 8x^2 + 98x + 181}{(x+3)^4(x-1)}$. Функция $f_2(x)$ – правильная рациональная дробь, знаменатель которой имеет вещественный нуль $x_1 = 3$ кратности $l_1 = 4$.

$$f_2(x) = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{C}{(x+3)^3} + \frac{D}{(x+3)^4} + \frac{E}{x-1}.$$

Приведение правой части последнего равенства к общему знаменателю дает равенство числителей:

$$-2x^2 - 13x^3 - 8x^2 + 98x + 181 = A(x+3)^3(x-1)+$$
$$+B(x+3)^2(x-1) + C(x+3)(x-1) + D(x-1) + E(x+3)^4.$$

Для нахождения значений A, B, C, D и E сначала применим метод отдельных значений аргумента. Зададим x равным различным корням знаменателя ($x = 1$, $x = -3$). Это позволит просто найти D и E. Затем зададим еще три различных значения x (небольшие целые числа), например $x = 0$, $x = -2$, $x = 2$. В результате получим

$$\begin{array}{l|ll}
x = -3 & 4 = -4D, & D = -1, \\
x = 1 & 256 = 256E, & E = 1. \\
x = 0 & 181 = -27A - 9B - 3C - D + 81E, & \\
x = -2 & 25 = -3A + 25B - 3C - 3D + E, & \\
x = 2 & 209 = 125A + 25B + 5C - D + 625E, &
\end{array}$$

Подставляя в последние три уравнения найденные уже значения $D = -1$ и $E = 1$, приводя подобные члены и сокращая, получим систему линейных уравнений для нахождения A, B и C

$$\begin{cases} 9A + 3B + C = -33, \\ A + B + C = -7, \\ 25A + 5B + C + -83. \end{cases}$$

Решением этой системы являются: $A = -3$, $B = -1$, $C = -3$.

Таким образом, искомое разложение примет вид:

$$f_2(x) = \frac{-3}{x+3} - \frac{1}{(x+3)^2} - \frac{3}{(x+3)^3} - \frac{1}{(x+3)^4} + \frac{1}{x-1}.$$

b. Вычислим интеграл используя формулы (2.11) и (2.12)

$$I_2 = \int f_2(x)\,dx = -3\ln|x+3| + \frac{1}{x+3} + \frac{3}{2(x+3)^2} + \frac{1}{3(x+3)^3} + \ln|x-1| + C.$$

3. Найти $I_3 = \int\limits_{-1}^{0} \frac{2x^3 - 7x^2 + 13x - 5}{(x-2)^2(x^2 - 4x + 13)}\, dx.$

a. Обозначим $f_3(x) = \frac{2x^3 - 7x^2 + 13x - 5}{(x-2)^2(x^2 - 4x + 13)}$. Функция $f_3(x)$ – правильная рациональная дробь, знаменатель которой имеет вещественный нуль $x_1 = 2$ кратности $l_1 = 2$ имеет пару простых комплексно-сопряженных корней (см. следствие 3.1), значит $f_3(x)$ можно разложить в следующую сумму простейших дробей:

$$\frac{2x^3 - 7x^2 + 13x - 5}{(x-2)^2(x^2 - 4x + 13)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 - 4x + 13}.$$

Приведение правой части последнего равенства к общему знаменателю с последующим освобождением от знаменателя в обеих частях равенства дает тождество:

$$\begin{aligned}
&2x^3 - 7x^2 + 13x - 5 = A(x-2)(x^2 - 4x + 13) + B(x^2 - 4x + 13) + \\
&+(Cx + D)(x-2)^2 = A(x^3 - 6x^2 + 21x - 26) + B(x^2 - 4x + 13) + \\
&+C(x^3 - 4x^2 + 4x) + D(x^2 - 4x + 4).
\end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях тождества (см. теорему 2.1) получим:

$$\begin{array}{r|l}
x^3 & A + C = 2, \\
x^2 & -6A + B - 4C + D = -7, \\
x^1 & 21A - 4B + 4C - 4D = 13, \\
x^0 & -26A + 13B + 4D = -5.
\end{array}$$

Для нахождения A, B, C и D решим систему линейных уравнений методом Гаусса–Жордана:

$$\begin{cases}
A + C = 2, \\
-6A + B - 4C + D = -7, \\
21A - 4B + 4C - 4D = 13, \\
-26A + 13B + 4D = -5,
\end{cases}$$

и получим $A = 1$, $B = 1$, $C = 1$, $D = 2$. В итоге имеем

$$f_3(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{x+2}{x^2 - 4x + 13}.$$

b. Вычислим неопределенный интеграл

$$\int f_3(x)dx = \int \frac{1}{x-2}\, dx + \int \frac{1}{(x-2)^2}\, dx + \int \frac{x+2}{x^2 - 4x + 13}\, dx.$$

Сначала, используя формулы (2.11) и (2.12), вычислим первые два слагаемые

$$\int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = \ln|x-2| - \frac{1}{x-2} + C.$$

Третье слагаемое можно вычислить использовав формулу (2.13).

$$\int \frac{x+2}{x^2-4x+13}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2-4x+13) + \frac{4}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-2}{3}\right) + C.$$

c. По формуле Ньютона–Лейбница получаем

$$I_3 = \int\limits_{-1}^{0} f_3(x)\,dx = \left[\ln|x-2| - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{2}\ln(x^2-4x+13) + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-2}{3}\right)\right]\Bigg|_{-1}^{0} = -0.138.$$

Ответ. 1. $I_1 = \dfrac{1}{2}x^2 - x + \ln|x+2| + 3\ln|x-3| - \ln|x-1| + C.$

2. $I_2 = -3\ln|x+3| + \dfrac{1}{x+3} + \dfrac{3}{2(x+3)^2} + \dfrac{1}{3(x+3)^3} + \ln|x-1| + C.$

3. $$I_3 = \int\limits_{-1}^{0} f_3(x)\,dx = \left[\ln|x-2| - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{2}\ln(x^2-4x+13) + \right.$$
$$\left. + \frac{4}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-2}{3}\right)\right]\Bigg|_{-1}^{0} = -0.138$$.

3. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

В этом разделе рассматривается применение формулы трапеций для вычисления значений интегралов и способы приведения некоторых интегралов к специальным функциям (см. учебное пособие [3] и учебник [4]).

3.1. Формула трапеций

Формулы, с помощью которых можно вычислить приближенные значения определенных интегралов, называются квадратурными. Квадратурная формула называется формулой трапеций, если

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)). \tag{3.1}$$

Из этой формулы следует, что площадь под кривой $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ приближается площадью под хордой, соединяющей точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$. Если функция $f(x)$ имеет на $[a, b]$ ограниченную вторую производную, то справедлива оценка

$$R = \left| \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) - \int\limits_a^b f(x)\,dx \right| \le \frac{(b-a)^3}{12} M_2, \tag{3.2}$$

где $M_2 = \max\limits_{a \le x \le b} |f''(x)|$. Как видно, погрешность вычисления интеграла зависит от длины отрезка $[a, b]$.

Чтобы вычислить значение интеграла с погрешностью, не превышающей некоторой заданной величины $\varepsilon > 0$, поступают следующим образом. Отрезок $[a, b]$ разбивают на n равных под отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, ..., n-1$, длины $h = \dfrac{b-a}{n}$, полагая $x_0 = a$, $x_n = b$. На каждом таком отрезке применяют формулу трапеций (3.1)

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \right) \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1})).$$

Таким образом, получаем составную формулу трапеций

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx h \left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right). \tag{3.3}$$

Из (3.2) получается оценка для составной формулы трапеций

$$R = \left| \int\limits_a^b f(x)\,dx - h \left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x) \right) \right| \le \frac{(b-a)h^2}{12} M_2.$$

Число разбиений n отрезка $[a, b]$, достаточное для вычисления интеграла с точностью ε, определяется из неравенства $\dfrac{(b-a)h^2}{12} M_2 < \varepsilon$, т. е.

$$n \ge \left\lceil \sqrt{\frac{M_2(b-a)^3}{12\varepsilon}} \right\rceil, \tag{3.4}$$

где $\lceil \alpha \rceil$ – наименьшее целое, большее или равное $|\alpha|$.

3.2. Интеграл вероятности

Функция $\operatorname{erf}(x)$, называемая интегралом вероятности или функцией ошибок, определяется формулой

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

Эта функция определена на всем множестве вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Перечислим некоторые простейшие свойства интеграла вероятности:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{erf}(x) = 1$;

2) $\operatorname{erf}(0) = 0$;

3) $\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x)$, т. е. функция $\operatorname{erf}(x)$ нечетная;

4) $\operatorname{erf}(x)$ монотонно возрастает на $\mathbb{R}$;

5) существует левая и правая горизонтальные асимптоты $y = -1$ и $y = 1$ соответственно;

6) при $x \to +\infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\operatorname{erf}(x) \sim 1 - \frac{1}{x\sqrt{\pi}}\,e^{-x^2}.$$

Для определения численного значения функции $\operatorname{erf}(x)$ в некоторой точке x следует воспользоваться таблицей значений интеграла вероятности (функции ошибок), например [7].

Пример 3.1. Рассмотрим применение таблиц интеграла вероятности на примере вычисления значения $\int\limits_\alpha^\beta e^{-t^2}\,dt$.

Запишем

$$\int\limits_\alpha^\beta e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\beta e^{-t^2}\,dt - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\alpha e^{-t^2}\,dt\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,[\operatorname{erf}(\beta) - \operatorname{erf}(\alpha)].$$

Определив значения $\operatorname{erf}(\beta)$ и $\operatorname{erf}(\alpha)$ из таблиц, найдем значение искомого интеграла. •

3.3. Интегральный синус и интегральный косинус

Функция $\operatorname{Si}(x)$ (интегральный синус) определяется формулой

$$\operatorname{Si}(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Эта функция определена на всем множестве вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Простейшие свойства функции интегрального синуса:

1) $\mathrm{Si}(0) = 0$;

2) $\mathrm{Si}(-x) = -\mathrm{Si}(x)$, т. е. функция нечетная;

3) $\mathrm{Si}(x)$ имеет максимум в точках $(2k+1)\pi$, $k = 0, 1, 2, ...$, причем $\mathrm{Si}(\pi) \approx 1.35$, $\mathrm{Si}(3\pi) \approx 1.67$, ...; функция $\mathrm{Si}(x)$ имеет минимум в точках $2k\pi$, $k = 1, 2, ...$ и $\mathrm{Si}(2\pi) \approx 1.45$, $\mathrm{Si}(4\pi) \approx 1.49$, ...;

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{Si}(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

Пример 3.2. Вычислить значение интеграла $I = \displaystyle\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin t}{t}\, dt$.

Выразим интеграл через интегральные синусы:

$$I = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin t}{t}\, dt = \int\limits_{0}^{\beta} \frac{\sin t}{t}\, dt - \int\limits_{0}^{\alpha} \frac{\sin t}{t}\, dt = \mathrm{Si}(\beta) - \mathrm{Si}(\alpha).$$

Получив из таблицы значения функций $\mathrm{Si}(\beta)$ и $\mathrm{Si}(\alpha)$, найдем значение интеграла I. •

Определения и таблицы значений интегрального синуса и косинуса приведены в справочнике [7].

Функция $\mathrm{Ci}(x)$ (интегральный косинус) задается формулой

$$\mathrm{Ci}(x) = -\int\limits_{x}^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\, dt$$

и определена на интервале $(0, +\infty)$.

Свойства функции $\mathrm{Ci}(x)$:

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{Ci}(x) = 0$;

2) $\lim\limits_{x \to 0+0} \mathrm{Ci}(x) = -\infty$;

3) в точках $\left(2k + \dfrac{1}{2}\right)\pi$, $k = 0, 1, ...$ функция $\mathrm{Ci}(x)$ достигает максимальных значений; в точках $\left(2k - \dfrac{1}{2}\right)\pi$, $k = 1, 2, ...$ функция $\mathrm{Ci}(x)$ достигает минимальных значений.

Пример 3.3. Вычислить значение интеграла $I = \displaystyle\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\cos t}{t}\, dt$.

Выразим интеграл через интегральные косинусы:

$$I = \int\limits_{\alpha}^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\, dt - \int\limits_{\beta}^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\, dt = -\operatorname{Ci}(\alpha) + \operatorname{Ci}(\beta),$$

следовательно

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\cos t}{t}\, dt = \operatorname{Ci}(\beta) - \operatorname{Ci}(\alpha).$$

Получив из таблицы значения функций $\operatorname{Ci}(\beta)$ и $\operatorname{Ci}(\alpha)$, найдем значение исходного интеграла I. •

3.4. Типовой расчет по теме „Вычисление интеграла по формуле трапеций и с помощью специальных функций“ (ТР 2.4)

Студентам выдаются индивидуальные задания, имеющие следующий вид:

ТР 2.4. Вар. 0.

$$I = \int\limits_{0.6}^{1.2} \frac{\sin\sqrt{3x+16}}{x}\, dt.$$

а. Вычислить приближенное значение интеграла с точностью $\varepsilon = 0.001$ с помощью формулы трапеций.

б. Вычислить значение интеграла, используя таблицы специальных функций [7].

Пример выполнения ТР 2.4. Вар. 0.

а. Приближенное значение интеграла вычисляется по квадратурной формуле трапеций (3.3). Чтобы вычисленное значение по этой формуле отличалось от истинного значения интеграла на величину не более $\varepsilon = 0.001$, необходимо отрезок интегрирования $[0.6, 1.2]$ разбить на n отрезков. Это число разбиений может быть определено из неравенства (3.4). Однако необходимо получить оценку максимума модуля M_2 второй производной от подынтегральной функции.

Имеем

$$f(x) = \frac{\sin\sqrt{3x+16}}{x}.$$

Найдем первую производную:

$$f'(x) = \frac{3}{2}\,\frac{\cos\sqrt{3x+16}}{x\sqrt{3x+16}} - \frac{\sin\sqrt{3x+16}}{x^2}.$$

Для упрощения выкладок обозначим $y_1 = \dfrac{\cos\sqrt{3x+16}}{x\sqrt{3x+16}}$, $y_2 = \dfrac{\sin\sqrt{3x+16}}{x^2}$. Тогда

$$f''(x) = \frac{3}{2}\,y_1' + y_2'.$$

Для вычисления y_1' воспользуемся логарифмической производной

$$\ln y_1 = \ln(\cos\sqrt{3x+16}\,) - \ln x - \frac{1}{2}\,\ln(3x+16).$$

Тогда

$$y_1' = y_1\left[-\frac{3}{2}\,\frac{\sin\sqrt{3x+16}}{\cos\sqrt{3x+16}}\,\frac{1}{\sqrt{3x+16}} - \frac{1}{x} - \frac{3}{2(3x+16)}\right],$$

т. е.

$$y_1' = -\frac{3}{2}\,\frac{\sin\sqrt{3x+16}}{x(3x+16)} - \frac{\cos\sqrt{3x+16}}{x^2\sqrt{3x+16}} - \frac{3}{2}\,\frac{\cos\sqrt{3x+16}}{x(3x+16)^{3/2}};$$

$$y_2' = \frac{3}{2}\,\frac{\cos\sqrt{3x+16}}{x^2\sqrt{3x+16}} - 2\,\frac{\sin\sqrt{3x+16}}{x^3}$$

и окончательно получаем:

$$f''(x) = -\frac{9}{4}\,\frac{\sin\sqrt{3x+16}}{x(3x+16)} - 3\,\frac{\cos\sqrt{3x+16}}{x^2\sqrt{3x+16}} - \frac{9}{4}\,\frac{\cos\sqrt{3x+16}}{x(3x+16)^{3/2}} - 2\,\frac{\sin\sqrt{3x+16}}{x^2}.$$

Для получения оценки $f''(x)$ возьмем модуль от обеих частей этого равенства, получим

$$|f''(x)| \le \frac{9}{4}\left|\frac{\sin\sqrt{3x+16}}{x(3x+16)}\right| + 3\left|\frac{\cos\sqrt{3x+16}}{x^2\sqrt{3x+16}}\right| +$$

$$+\frac{9}{4}\left|\frac{\cos\sqrt{3x+16}}{x(3x+16)^{3/2}}\right| + 2\left|\frac{\sin\sqrt{3x+16}}{x^2}\right|.$$

Учитывая, что $|\sin\sqrt{3x+16}\,| \le 1$, $|\cos\sqrt{3x+16}\,| \le 1$, $0.6 \le x \le 1.2$, $17.8 < (3x+16) < 19.8$ и $4.22 \le \sqrt{3x+16} \le 4.43$, получим

$$|f''(x)| \le \frac{9}{4}\,\frac{1}{0.6\cdot 17.8} + 3\,\frac{1}{(0.6)^2 4.22} + \frac{9}{4}\,\frac{1}{0.6(17.8)^{3/2}} + 2\,\frac{1}{0.6}^{\,2} \approx 7.79.$$

Так как эта оценка выполняется для всех $x \in [0.6,\, 1.2]$, то она справедлива и для x, при котором $|f''(x)|$ достигает максимального значения, т. е.

$$\max|f''(x)| \leq 7.79.$$

Применив формулу (3.4), найдем необходимое число разбиения отрезка интегрирования $[0.6,\, 1.2]$

$$n = \left\lceil \sqrt{\frac{5.57(0.6)^3}{12 \cdot 0.001}} \right\rceil \approx \lceil 11.84 \rceil = 12.$$

Находим длину под отрезка

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{0.6}{12} = 0.05.$$

Вычислив $f(x) = \dfrac{\sin\sqrt{3x+16}}{x}$ в точках $x_i = 0.6 + ih$, $i = 0, 1, ..., 12$, получаем:

$f(x_0) = -1.4679$	$f(x_5) = -1.0811$	$f(x_{10}) = -0.8632$
$f(x_1) = -1.3677$	$f(x_6) = -1.0285$	$f(x_{11}) = -0.8302$
$f(x_2) = -1.2814$	$f(x_7) = -0.9811$	$f(x_{12}) = -0.7997$
$f(x_3) = -1.2061$	$f(x_8) = -0.9382$	
$f(x_4) = -1.1399$	$f(x_9) = -0.8990$	

Применив формулу (3.2)

$$\int\limits_{0.6}^{1.2} \frac{\sin\sqrt{3x+16}}{x}\,dx \approx \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_{11}) + 2\sum_{i=1}^{10} f(x_i)\right) = -0.6375.$$

Округлим найденное число до тысячных и получим значение, которое отличается от истинного значения интеграла на величину не более $\varepsilon = 0.001$:

$$\int\limits_{0.6}^{1.2} \frac{\sin\sqrt{3x+16}}{x}\,dx = -0.638 \pm 0.001.$$

б. Приведем исходный интеграл $I = \displaystyle\int\limits_{0.6}^{1.2} \frac{\sin\sqrt{3x+16}}{x}\,dx$ к выражению, содержащему функции интегрального синуса $\mathrm{Si}(x)$ и интегрального косинуса $\mathrm{Ci}(x)$. Для этого выполним подстановку $u^2 = 3x + 16$, т. е.

$$x = \frac{1}{3}(u^2 - 16), \qquad dx = \frac{2}{3}\,u\,du,$$

и найдем новые пределы интегрирования: при $x_1 = 0.6$ новый предел интегрирования будет $u_1 = \sqrt{3 \cdot 0.6 + 16} = \sqrt{17.8} \approx 4.219$, а при $x_2 = 1.2$ имеем $u_2 = \sqrt{3 \cdot 1.2 + 16} = \sqrt{19.6} \approx 4.427$, т. е.

$$I = 2 \int\limits_{4.219}^{4.427} \frac{u \sin u}{(u^2 - 16)}\, du. \tag{3.5}$$

Выражение $\dfrac{u}{u^2 - 16}$ представим в виде суммы простейших дробей

$$\frac{u}{u^2 - 16} = \frac{A}{u - 4} + \frac{B}{u + 4}.$$

Определив, что $A = B = \dfrac{1}{2}$ и подставив это разложение в интеграл (3.5), получим

$$I = \int\limits_{4.219}^{4.427} \sin u \left(\frac{1}{u - 4} + \frac{1}{u + 4} \right) du = \int\limits_{4.219}^{4.427} \frac{\sin u}{u - 4}\, du + \int\limits_{4.219}^{4.427} \frac{\sin u}{u + 4}\, du. \tag{3.6}$$

В первом интеграле левой части равенства (3.6) опять выполним подстановку $v = u - 4$:

$$\int\limits_{4.219}^{4.427} \frac{\sin u}{u - 4}\, du = \int\limits_{0.219}^{0.427} \frac{\sin(v + 4)}{v}\, dv = \int\limits_{0.219}^{0.427} \frac{\sin v \cos 4 + \cos v \sin 4}{v}\, dv =$$

$$= \cos 4 \int\limits_{0.219}^{0.427} \frac{\sin v}{v}\, dv + \sin 4 \int\limits_{0.219}^{0.427} \frac{\cos v}{v}\, dv =$$

$$= \cos 4(\mathrm{Si}(0.427) - \mathrm{Si}(0.219)) + \sin 4(\mathrm{Ci}(0.427) - \mathrm{Ci}(0.219)).$$

Во втором интеграле левой части равенства (3.6) выполним подстановку $v = u + 4$:

$$\int\limits_{4.219}^{4.427} \frac{\sin u}{u + 4}\, du = \int\limits_{8.219}^{8.427} \frac{\sin(v - 4)}{v}\, dv = \int\limits_{8.219}^{8.427} \frac{\sin v \cos 4 - \cos v \sin 4}{v}\, dv =$$

$$= \cos 4 \int\limits_{8.219}^{8.427} \frac{\sin v}{v}\, dv - \sin 4 \int\limits_{8.219}^{8.427} \frac{\cos v}{v}\, dv =$$

$$= \cos 4(\mathrm{Si}(8.427) - \mathrm{Si}(8.219) - \sin 4(\mathrm{Ci}(8.427) - \mathrm{Ci}(8.219)).$$

Подставляя полученные выражение в (3.6), окончательно получим

$$I = \cos 4[\mathrm{Si}(0.427) - \mathrm{Si}(0.219) + \mathrm{Si}(8.427) - \mathrm{Si}(8.219)] +$$
$$+ \sin 4[\mathrm{Ci}(0.427) - \mathrm{Ci}(0.219) - \mathrm{Ci}(8.427) + \mathrm{Ci}(8.219)].$$

Из таблиц значений функций $\mathrm{Si}(x)$и $\mathrm{Ci}(x)$ [7] имеем:

$\mathrm{Si}(0.219) = 0.2184$	$\mathrm{Ci}(0.219) = -0.9534$
$\mathrm{Si}(0.427) = 0.4227$	$\mathrm{Ci}(0.427) = -0.3190$
$\mathrm{Si}(8.219) = 1.6003$	$\mathrm{Ci}(8.219) = 0.1156$
$\mathrm{Si}(8.427) = 1.6225$	$\mathrm{Ci}(8.427) = 0.1044$

и учитывая, что $\cos(4) \approx -0.6536$ и $\sin(4) \approx -0.7568$, получим $I \approx -0.637$.

Ответ: значение интеграла вычисленного

а) с помощью формулы трапеций $I_1 \approx -0.638$;

б) с использованием таблиц специальных функций $I_2 \approx -0.637$.

4. ФУНКЦИИ ДВУХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

При выполнении ТР „Экстремумы функций двух переменных“ (ТР 2.5), используются функции двух вещественных переменных. Полное изложение теории вещественных функций многих переменных с подробными доказательствами можно найти в учебном пособии [8] и учебнике [4]. В данном пособии мы ограничимся только кратким изложением сведений, необходимых для выполнения ТР.

4.1. Функции двух вещественных переменных, непрерывность

Обозначим через (x, y) произвольную точку плоскости $\mathbb{R}^2$.

Определение 4.1. *Окрестностью $K_\delta(x_0, y_0)$ радиуса $\delta > 0$ точки $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ называется множество точек (x, y) плоскости, для которых справедливо неравенство $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$.*

Множество $\overset{\circ}{K}_\delta\ (x_0, y_0) = K_\delta(x_0, y_0) \backslash \{(x_0, y_0)\}$ называется проколотой окрестностью радиуса $\delta > 0$ точки (x_0, y_0).

Определение 4.2. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$. Правило f, по которому каждой точке $(x, y) \in D$ ставится в соответствие единственное вещественное число $z \in \mathbb{R}$, называется функцией двух вещественных переменных с областью определения D и множеством значений в $\mathbb{R}$. При этом используется обозначение $f : D \to \mathbb{R}$, а $z = f(x, y)$ называется значением функции f в точке (x, y).*

4.2. Частные производные функции двух вещественных переменных

Пусть задана функция $f : D \to \mathbb{R}$ и точка $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Рассмотрим функцию $f(x, y_0)$ переменной x и функцию $f(x_0, y)$ переменной y.

Определение 4.3. *Если существуют пределы:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = f'_x(x, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x},$$

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = f'_y(x_0, y) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y},$$

то они называются частными производными в точке (x_0, y_0) функции $f(x, y)$ по переменной x и по переменной y и обозначаются $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$, соответственно.

Если частные производные существуют в любой точке $(x, y) \in D$, то в области D тем самым определены новые функции двух вещественных переменных

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.$$

Пример. 4.1. Пусть $f(x, y) = x^3 y + x^2 y^2 + y^3$ и $(x_0, y_0) = (2, 1)$, тогда

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{d\left(x^3 y + x^2 y^2 + y^3\right)}{dx} = 3x^2 y + 2xy^2,$$

$$\frac{\partial f(2, 1)}{\partial x} = \left(x^3 1 + x^2 1^2 + 1^3\right)'\Big|_{x=2} = 3x^2 + 2x\Big|_{x=2} = 16,$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{d\left(x^3 y + x^2 y^2 + y^3\right)}{dy} = x^3 + 2x^2 y + 3y^2,$$

$$\frac{\partial f(2, 1)}{\partial y} = \left(8y + 4y^2 + y^3\right)'\Big|_{y=1} = 8 + 4 \cdot 2y + 3y^2\Big|_{y=1} = 19. \bullet$$

Пусть в области D существуют функции

$$g_1(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \text{ и } g_2(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.$$

Если в точке $(x_0, y_0) \in D$ существуют частные производные:

$$\frac{\partial g_1(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial g_1(x_0,y_0)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y \partial x},$$

$$\frac{\partial g_2(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial g_2(x_0,y_0)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2},$$

то они называются частными производными второго порядка от функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1. *Если функция $f(x, y)$ имеет в некоторой окрестности $K_\delta((x_0, y_0))$ частные производные второго порядка, непрерывные в точке (x_0, y_0), то*

$$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y \partial x}.$$

Пример. 4.2. (См. пример 4.1). Пусть $f(x, y) = x^3y + x^2y^2 + y^3$. Тогда

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 6x + 2y^2,$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = 3x^2 + 4xy = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = 3x^2 + 4xy,$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 2x^2 + 6y. \bullet$$

Определение 4.4. *Если функция $f(x, y)$ имеет в точке (x_0, y_0) все частные производные второго порядка, то квадратная матрица*

$$H(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

называется матрицей Гессе функции f в точке (x_0, y_0).

Следствие 4.1. *В условиях теоремы* 4.1 *матрица Гессе – симметрична.*

4.3. Локальные экстремумы функций двух вещественных переменных

Определение 4.5. *Если (x_0, y_0) – внутренняя точка области определения функции $f\ : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ и существует такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{K}_\delta\ (x_0, y_0) \subset D$ точки (x_0, y_0), что для всех $(x, y) \in$ $\in \overset{\circ}{K}_\delta\ (x_0, y_0)$ справедливо неравенство $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ $(f(x, y) >$ $> f(x_0, y_0))$, то точка (x_0, y_0) называется точкой локального максимума (локального минимума) функции f. Принято говорить, что (x_0, y_0) – точка локального экстремума f, если точка (x_0, y_0) – точка локального максимума или локального минимума.*

Определение 4.6. *Если (x_0, y_0) – внутренняя точка области определения функции $f\ : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, в которой существуют частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$, то точка (x_0, y_0) называется стационарной точкой функции f.*

Теорема 4.2. (Необходимое условие экстремума). *Если точка (x_0, y_0) – точка локального экстремума f и функция $f(x, y)$ определена и имеет в некоторой окрестности $K_\delta((x_0, y_0))$ частные производные $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$, то точка (x_0, y_0) является стационарной точкой функции f.*

Заметим, что точка (x_0, y_0) может быть точкой локального экстремума f, даже если частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ не существуют в точке (x_0, y_0).

Пример. 4.3. Пусть $f(x, y) = x^{2/3} + y^{2/3}$, тогда при $x \neq 0$ и $y \neq 0$ частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{2}{3x^{1/3}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \dfrac{2}{3y^{1/3}}$ определены при $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ и не существуют в точке $(0, 0)$. Но очевидно, что точка $(0, 0)$ – точка строгого локального минимума функции f. •

Отметим, что в ТР подобные ситуации исключены.

Определение 4.7. *Квадратичная форма $(H\vec{X}, \vec{X})$ и ее матрица H называются положительно (отрицательно) определенными, если для любого $\vec{X} \neq \vec{0}$ выполняется условие $(H\vec{X}, \vec{X}) > 0\quad ((H\vec{X}, \vec{X}) < 0)$. Квадратичная форма $(H\vec{X}, \vec{X})$ и ее матрица H называются знакопеременными, если $(H\vec{X}, \vec{X})$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения.*

Матрица H будет положительно (отрицательно) определенной, если все собственные числа матрицы $\lambda_i > 0$ $(\lambda_i < 0)$. Матрица H является знакопеременной, если среди ее собственных чисел есть как положительные, так и отрицательные (см. [9] раздел 3.2).

Теорема 4.3. (Достаточное условие экстремума). *Пусть функция $f(x, y)$ определена в точке (x_0, y_0), имеет в некоторой ее окрестности $K_\delta((x_0, y_0))$ все частные производные второго порядка, непрерывные в точке (x_0, y_0) и точка является стационарной точкой функции f. Тогда:*

1) если матрица Гессе функции f в точке (x_0, y_0) положительно определенная (оба собственных числа матрицы положительны), то точка (x_0, y_0) – точка локального минимума функции f;

2) если матрица Гессе функции f в точке (x_0, y_0) отрицательно определенная (оба собственных числа матрицы отрицательны), то (x_0, y_0) – точка локального максимума функции f;

3) если матрица Гессе функции f в точке (x_0, y_0) знакопеременная (собственные числа матрицы Гессе имеют противоположные знаки), то функция f не имеет в точке (x_0, y_0) локального экстремума.

4.4. Типовой расчет по теме „Экстремумы функций двух переменных“ (ТР 2.5)

Студентам выдаются индивидуальные задания вида:

ТР 2.5. Вар. 0. Найти стационарные точки функции $f(x, y)$ и исследовать функцию на экстремум:

$$f(x, y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 5y^3 - 108x - 120y + 7.$$

Пример выполнения ТР 2.5. Вар. 0.

а. Найдем стационарные точки. Для этого найдем частные производные функции $f(x, y)$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 3x^2 + 6xy + 3y^2 - 108$$

и

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 3x^2 + 6xy + 15y^2 - 120.$$

Согласно определению 4.6 точка (x, y) – стационарная, если

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

В этом примере система имеет вид:

$$\begin{cases} 3x^2 + 6xy + 3y^2 - 108 = 0, \\ 3x^2 + 6xy + 15y^2 - 120 = 0. \end{cases}$$

Разделим оба равенства на 3 и вычтем первое уравнение из второго. Получим равносильную систему:

$$\begin{cases} y^2 = 1, \\ x^2 + 2xy + y^2 - 36 = 0, \end{cases}$$

которая, в свою очередь, равносильна двум системам уравнений:

$$\begin{cases} y = 1, \\ x^2 + 2xy + y^2 = 36 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = -1, \\ x^2 + 2xy + y^2 = 36. \end{cases}$$

Подставляя значение y во второе уравнение, получим

$$\begin{cases} y = 1, \\ x^2 + 2x - 35 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = -1, \\ x^2 - 2x - 35 = 0. \end{cases}$$

Решая эти системы, получим 4 стационарные точки: $P_1 = (-7, 1)$, $P_2 = (5, 1)$, $P_3 = (7, -1)$ и $P_4 = (-5, -1)$.

б. Найдем частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 6x + 6y = 6(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 f\,(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f\,(x,y)}{\partial x \partial y} = 6x + 6x = 6(x+y),$$

и

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 6x + 30y = 6(x+5y).$$

Для того, чтобы исследовать стационарные точки на экстремум, посмотрим, какой вид имеет матрица Гессе в каждой из них.

$$H(P_1) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f(-7,1)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(-7,1)}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f(-7,1)}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f(-7,1)}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36 & -36 \\ -36 & -12 \end{bmatrix}.$$

Найдем собственные числа матрицы, для этого решим характеристическое уравнение

$$(-36 - \lambda)(-12 - \lambda) - (-36)^2 = 0$$

или

$$\lambda^2 + 48\lambda - 864 = 0.$$

Получаем два решения:

$$\lambda_1 = \frac{-48 - \sqrt{5760}}{2} \approx -61,947$$

и

$$\lambda_2 = \frac{-48 + \sqrt{5760}}{2} \approx 13,947.$$

Собственные числа матрицы Гессе $H(P_1)$ имеют разные знаки, следовательно. матрица является знакопеременной. И по теореме 4.3 функция f не имеет в точке $P_1 = (-7, 1)$ локального экстремума. Вычислим значение функции в точке P_1 $f(-7, 1) = 431$.

Надо заметить, что знаки собственных чисел можно определить, и не решая квадратное уравнение. Используя теорему Виета, получаем

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -48, \\ \lambda_1\lambda_2 = -864. \end{cases}$$

Так как произведение собственных чисел отрицательно, значит они имеют разные знаки, и матрица Гессе $H(P_1)$ является знакопеременной. При исследовании других стационарных точек будем использовать этот метод, поскольку он менее трудоемкий.

$$H(P_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f(-5,-1)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(-5,-1)}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f(-5,-1)}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f(-5,-1)}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36 & -36 \\ -36 & -60 \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение для нахождения собственных чисел имеет вид:

$$(36 - \lambda)(60 - \lambda) - (36)^2 = 0$$

или

$$\lambda^2 - 96\lambda + 864 = 0.$$

По теореме Виета

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 96, \\ \lambda_1\lambda_2 = 864. \end{cases}$$

Произведение собственных чисел положительно, следовательно, собственные числа имеют один и тот же знак. Но, поскольку их сумма тоже положительна, то оба собственных числа положительны. Это значит, что матрица Гессе $H(P_2)$ положительно определенная, и по теореме 4.3 функция

f имеет локальный минимум в точке $P_2 = (5, 1)$. Вычислим его значение: $f(5, 1) = -433$.

$$H(P_3) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f(7,-1)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(7,-1)}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f(7,-1)}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f(7,-1)}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 & 36 \\ 36 & 12 \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение для нахождения собственных чисел имеет вид:

$$(36 - \lambda)(12 - \lambda) - (36)^2 = 0$$

или

$$\lambda^2 - 48\lambda - 864 = 0.$$

По теореме Виета

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 48, \\ \lambda_1 \lambda_2 = -864. \end{cases}$$

Так как произведение собственных чисел отрицательно, значит они имеют разные знаки, и матрица Гессе $H(P_3)$ является знакопеременной. По теореме 4.3 функция f не имеет в точке $P_3 = (7, -1)$ локального экстремума. Вычислим значение функции в точке P_3 $f(7, -1) = -459$.

$$H(P_4) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f(-5,-1)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(-5,-1)}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f(-5,-1)}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f(-5,-1)}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36 & -36 \\ -36 & -60 \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение для нахождения собственных чисел имеет вид:

$$(-36 - \lambda)(-60 - \lambda) - (-36)^2 = 0$$

или

$$\lambda^2 + 96\lambda + 864 = 0.$$

По теореме Виета

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -96, \\ \lambda_1 \lambda_2 = 864. \end{cases}$$

Произведение собственных чисел положительно, следовательно, собственные числа имеют один и тот же знак. Но их сумма отрицательна, значит оба собственных числа отрицательны, и матрица Гессе $H(P_4)$ отрицательно определенная. По теореме 4.3 функция f имеет локальный максимум в точке $P_4 = (-5, -1)$. Вычислим его значение: $f(-5, -1) = 447$.

Ответ: $P_1 = (-7, 1)$, $P_3 = (7, -1)$ – стационарные точки, в которых функция f не имеет экстремума и $f(-7, 1) = 431$, $f(7, -1) = -459$;
$P_2 = (5, 1)$ – точка локального минимума, $f(5, 1) = -433$;
$P_4 = (-5, -1)$– точка локального максимума, $f(-5, -1) = 447$.

5. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Для выполнения типового расчета необходимо знать числовые характеристики и свойства непрерывной случайной величины.

5.1. Непрерывная случайная величина

Пусть множество элементарных событий $\Omega = \mathbb{R}$.

Определение 5.1 *Случайная величина ξ называется непрерывной, если существует функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям*

$$1)\quad f(x) \geq 0 \text{ для любого } x \in \mathbb{R},$$
$$2)\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1,$$

такая, что для любого множества $A \subset \mathbb{R}$

$$P(\xi \in A) = \int\limits_A f(x)dx.$$

При этом, функция $f(x)$ называется плотностью распределения случайной величины ξ.

Будем рассматривать только такие случайные величины, для которых плотность распределения кусочно непрерывна. Вероятность попадания непрерывной случайной величины на промежуток $[a, b]$ ((a, b), $[a, b)$, $(a, b]$) находится по правилу:

$$P(\xi \in [a, b]) = \int\limits_a^b f(x)\, dx.$$

Очевидно, что вероятность того, что такая случайная величина примет конкретное значение $x \in \mathbb{R}$ равна 0: $P(\xi = x) = 0$. Поэтому обычно говорят о вероятности попадания непрерывной случайной величины на интервал.

Определение 5.2 *Функцией распределения непрерывной случайной величины* ξ *называется функция*

$$F(x) = P(\xi < x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt, \qquad x \in \mathrm{R},$$

определенная на всей вещественной оси.

Свойства функции распределения:
1) $0 \le F(x) \le 1$,
2) $F(x)$ – неубывающая функция,
3) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$,
4) $F(x)$ – непрерывная функция, и во всех точках непрерывности плотности $f(x)$ выполняется равенство $(F(x))^{'} = f(x)$.

Свойства 1, 2 непосредственно следуют из определения и того факта, что вероятность всегда неотрицательна и не превосходит 1. Свойства 3, 4 доказаны в пособиях [6] и [7].

Зная функцию распределения можно найти вероятность попадания случайной величины ξ на любой промежуток вида $[a, b)$:

$$P(\xi \in [a, b)) = F(b) - F(a).$$

Если построить график плотности распределения непрерывной случайной величины ξ, то площадь под графиком будет равна 1. Вероятность того, что случайная величина попадет на интервал $[a, b]$ равна площади криволинейной трапеции под графиком плотности в пределах промежутка $[a, b]$.

5.2. Числовые характеристики случайной величины и их свойства

Определение 5.3 *Математическим ожиданием непрерывной случайной величины* ξ *называется число*

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

Математическое ожидание существует, если этот интеграл сходится абсолютно. В противном случае говорят, что случайная величина ξ не имеет математического ожидания.

Пусть $\phi(x)$ – некоторая функция. Математическое ожидание случайной величины $\eta = \phi(\xi)$ находится по правилу:

$$M(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) f(x) dx.$$

Пусть ξ и η – случайные величины. Перечислим некоторые свойства математического ожидания:
1) если $\xi \equiv C$ – константа, то $M(C) = C$;
2) $M(C\xi) = CM(\xi)$ (C – константа);
3) $M(\xi + \eta) = M(\xi) + M(\eta)$;
4) если случайные величины ξ и η независимы, то $M(\xi\eta) = M(\xi)M(\eta)$.

Определение 5.4 *Дисперсией $D(\xi)$ непрерывной случайной величины ξ называется число, равное математическому ожиданию квадрата отклонения ξ от ее математического ожидания:*

$$D(\xi) = M((\xi - M\xi)^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 f(x) dx. \qquad (5.1)$$

Из свойств математического ожидания следует, что формула (5.1) эквивалентна следующей:

$$D(\xi) = M(\xi^2) - (M(\xi))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - (M(\xi))^2.$$

Дисперсия существует, если этот интеграл сходится абсолютно. В противном случае говорят, что случайная величина ξ не имеет дисперсии.

Свойства дисперсии:
1) $D(\xi) \geq 0$;
2) $D(C) = 0$ (C – константа);
3) $D(C\xi) = C^2 D(\xi)$ (C – константа);
4) $D(\xi + C) = D(\xi)$ (C – константа);
5) если случайные величины ξ и η независимы, то $D(\xi + \eta) = D(\xi) + D(\eta)$.

Дисперсия имеет размерность квадрата размерности случайной величины ξ, поэтому в качестве характеристики разброса значений удобнее использовать другую числовую характеристику – среднее квадратичное отклонение.

Определение 5.5 *Среднее квадратичное отклонением случайной величины σ_ξ называется квадратный корень из дисперсии:* $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$.

5.3. Типовой расчет по теме „Числовые характеристики непрерывной случайной величины“ (ТР 4.1)

Студенты получают индивидуальные задания вида:

ТР 4.1. Вар.0.

$f_1(x)$	$[a_1, b_1]$	$f_2(x)$	$[a_2, b_2]$	$\eta = \varphi(\xi)$
$-4x$	$[-a/2, 0]$	$x/4$	$[0, 2a]$	$\eta = -6\xi + 4$

Требуется:

1. Для кусочно-непрерывной функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a_1, \\ f_1(x), & x \in [a_1, b_1), \\ f_2(x), & x \in [a_2, b_2], \\ 0, & x > b_2 \end{cases}$$

($b_1 = a_2$) найти значение параметра a, при котором $f(x)$ является плотностью распределения непрерывной случайной величины ξ.
2. Найти функцию распределения случайной величины ξ.
3. Построить графики плотности и функции распределения ξ.
4. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратичное отклонение случайной величины ξ.
5. Вычислить вероятность $P\left(\xi \in [M(\xi) - 3\sigma_\xi\,;\ M(\xi) + 3\sigma_\xi]\right)$.
6. Для случайной величины $\eta = a\xi + b$ вычислить математическое ожидание и дисперсию.

Пример выполнения типового расчета ТР 4.1. Вар.0.

1. Учитывая свойства плотности распределения случайной величины ξ, найдем значение параметра a:

$$-\int\limits_{-a/2}^{0} 4x\,dx + \int\limits_{0}^{2a} \frac{x}{4}\,dx = -2x^2\Big|_{-a/2}^{0} + \frac{x^2}{8}\Big|_{0}^{2a} = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = a^2 = 1,$$

следовательно $a = 1$ и плотность распределения ξ имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -\dfrac{1}{2}, \\ -4x, & x \in \left[-\dfrac{1}{2}, 0\right], \\ \dfrac{x}{4}, & x \in [\,0, 2\,], \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

2. Найдем функцию распределения $F(x)$:

При $x < \dfrac{1}{2}$: $\qquad F(x) = 0,$

при $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, 0\right]$: $\quad F(x) = \int\limits_{-1/2}^{x} -4t\,dt = -2t^2\Big|_{-1/2}^{x} = -2x^2 + \dfrac{1}{2},$

при $x \in [\,0, 2\,]$: $\quad F(x) = \dfrac{1}{2} + \int\limits_{0}^{x} \dfrac{t}{4} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{t^2}{8}\Big|_{0}^{x} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x^2}{8},$

при $x \geq 2$: $\qquad F(x) = 1.$

$$\text{Тогда } F(x) = \begin{cases} 0, & x < -\dfrac{1}{2}, \\ -2x^2 + \dfrac{1}{2}, & x \in \left[-\dfrac{1}{2}, 0\right), \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{x^2}{8}, & x \in [\,0, 2\,), \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

3. Построим графики плотности распределения $f(x)$ (рис. 5.1) и функции распределения $F(x)$ (рис. 5.2) случайной величины ξ .

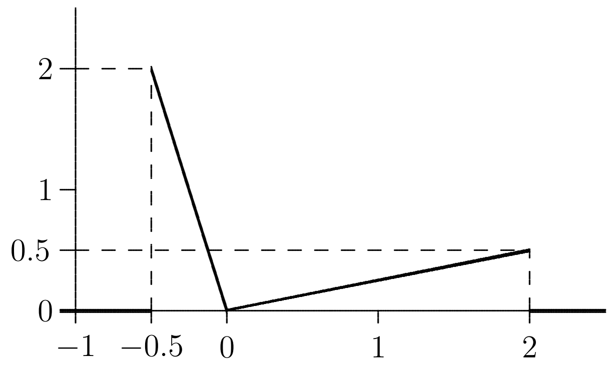

Рис. 5.1

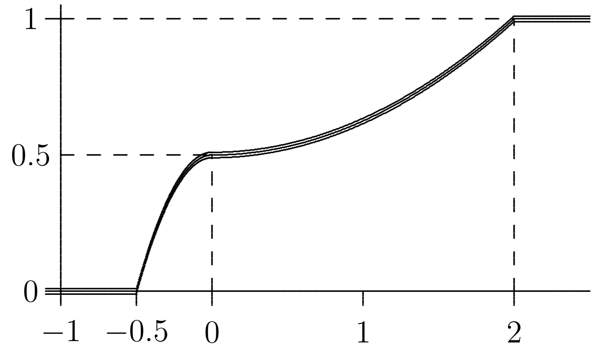

Рис. 5.2

4. Вычислим математическое ожидание ξ:

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx = -\int\limits_{-1/2}^{0} 4x^2\,dx + \int\limits_{0}^{2} \frac{x^2}{4}\,dx =$$

$$= -\frac{4}{3}x^3\Big|_{-1/2}^{0} + \frac{x^3}{12}\Big|_{0}^{2} = -\frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{1}{2} = 0.5.$$

Найдем дисперсию и среднее квадратичное отклонение:

$$D(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M(\xi))^2\,f(x)\,dx = -\int\limits_{-1/2}^{0} 4(x-1/2)^2 x\,dx +$$

$$+\int\limits_{0}^{2} \frac{(x-1/2)^2}{4}\,x\,dx = -\int\limits_{-1/2}^{0} (4x^3 - 4x^2 + x)\,dx + \int\limits_{0}^{2} \left(\frac{x^3}{4} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{16}\right) dx =$$

$$= \frac{13}{16} = 0.8125. \qquad \sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = 0.901.$$

5. Вычислим вероятность $P\left(\xi \in [M(\xi) - 3\sigma_\xi, M(\xi) + 3\sigma_\xi]\right)$:

$$P\left(\xi \in [M(\xi) - 3\sigma_\xi, M(\xi) + 3\sigma_\xi]\right) =$$

$$= F(M(\xi) + 3\sigma_\xi) - F(M(\xi) - 3\sigma_\xi) = F(3.203) - F(-2.203) = 1.$$

6. Для случайной величины $\eta = -6\xi + 4$ вычислим математическое ожидание и дисперсию.

Из свойств математического ожидания и дисперсии следует, что

$$M(a\xi + b) = M(a\xi) + M(b) = aM(\xi) + b,$$

$$D(a\xi + b) = D(a\xi) + D(b) = a^2 D(\xi).$$

Тогда $M(\eta) = -6M(\xi) + 4 = 1$, $D(\eta) = 36D(\xi) = 29.25$.

6. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

6.1. Постановка краевой задачи

Подробно постановка краевых задач, а также особенности, возникающие при решении таких задач разобраны в учебных пособиях [14], [15].

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка, записанное в симметричной форме:

$$-\frac{1}{\rho(x)}\,(p\,(x)y\,')' + q\,(x)y = f\,(x), \tag{6.1}$$

где $\rho(x),\ p\,(x),\ p\,'(x),\ q\,(x),\ f(x)$ – заданные, непрерывные на $[\,a, b\,]$ функции, при этом выполняются условия $\rho(x) \geq \rho_0 > 0, \quad p\,(x) \geq p_0 > 0$.

Общее решение такого уравнения имеет вид [12]

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \tilde{y}(x).$$

Здесь $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – 2 линейно независимых решения однородного уравнения, соответствующего уравнению (6.1), а $\tilde{y}(x)$ – частное решение неоднородного уравнения (6.1); C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Пусть на концах промежутка $[a, b]$ функция $y(x)$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} R_1 y\,'(a) - S_1 y(a) = t_1, \\ R_2 y\,'(b) + S_2 y(b) = t_2, \end{cases} \tag{6.2}$$

где $R_1,\ R_2,\ S_1,\ S_2,\ t_1,\ t_2$ – заданные постоянные, $R_1, R_2, S_1, S_2 \geq 0$, $R_1 + S_1 \neq 0$, $R_2 + S_2 \neq 0$.

Такие условия называются краевыми или граничными.

Задача нахождения на интервале (a, b) решения дифференциального уравнения (6.1), удовлетворяющего в точках $x = a$ и $x = b$ краевым условиям (6.2), называется краевой задачей.

Рассмотрим некоторые частные случаи краевых условий.

Условия: $y(a) = t_1, \quad y(b) = t_2$
$(R_1 = R_2 = 0)$ называются краевыми условиями 1-го рода или условиями Дирихле.

Условия: $y'(a) = t_1, \quad y'(b) = t_2$
$(S_1 = S_2 = 0)$ называются краевыми условиями 2-го рода или условиями Неймана.

Условия: $R_1 y\,'(a) - S_1 y(a) = t_1, \quad R_2 y\,'(b) + S_2 y(b) = t_2$
называются краевыми условиями 3-го рода.

Условия: $R_1 y'(a) - S_1 y(a) = 0, \quad R_2 y'(b) + S_2 y(b) = 0$
$(t_1 = t_2 = 0)$ являются однородными.

Однородными краевыми условиями являются также условия периодичности: $y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b)$.

Если функции $\rho(x)$, $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ непрерывны на открытом интервале (a, b) или если функции $\rho(x)$ или $p(x)$ обращаются в нуль в граничной точке, то в таких случаях в качестве краевого условия используется условие ограниченности $y(x)$ при $x \to a + 0$ или $x \to b - 0$. Такие краевые условия являются однородными.

На концах промежутка $[a, b]$ могут быть заданы краевые условия разных типов.

Пусть требуется решить краевую задачу для однородного линейного дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} -y'' + qy = 0 \quad \text{при} \quad a < x < b, \\ R_1 y'(a) - S_1 y(a) = t_1, \quad R_2 y'(b) + S_2 y(b) = t_2. \end{cases}$$

Общее решение уравнения $-y'' + qy = 0$ имеет вид

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

где функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ – это 2 линейно независимых решения уравнения. Нетрудно заметить, что функции $y_1(x - a)$, $y_2(x - a)$, как и функции $y_1(b - x)$, $y_2(b - x)$ будут другими парами линейно независимых решений. Поэтому общее решение уравнения можно представить в виде

$$y(x) = C_1 y_1(x - a) + C_2 y_2(x - a)$$

или в виде

$$y(x) = C_1 y_1(b - x) + C_2 y_2(b - x).$$

Выбор вида общего решения уравнения зависит от заданных краевых условий.

Краевая задача может иметь единственное решение, бесконечно много решений или не иметь решений (см. примеры 1.1-1.6 в пособии [15]).

Краевую задачу с неоднородными условиями на границе заменой $y(x) = v(x) + w(x)$ всегда можно свести к задаче однородными краевыми условиями. Выбор функции $w(x)$ зависит от краевых условий (см. пример 1.7 в [15]).

6.2. Оператор Штурма–Лиувилля

Пусть $D(L)$ – множество дважды дифференцируемых на промежутке (a, b) функций, удовлетворяющих на концах промежутка однородным краевым условиям, например условиям вида

$$R_1 y'(a) - S_1 y(a) = 0, \quad R_2 y'(b) + S_2 y(b) = 0.$$

Множество $D(L)$ представляет собой линейное пространство. Для элементов $f(x)$ и $g(x)$ этого множества определим скалярное произведение по формуле

$$(f, g) = \int\limits_a^b f(x) g(x) \rho(x) dx,$$

где $\rho(x)$ – непрерывная на $[a, b]$ функция, $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$. Она называется весовой функцией, или весом.

Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются ортогональными, если $(f, g) = 0$.

Пусть $y \in D(L)$. Норма функции $y(x)$, порожденная скалярным произведением, находится по правилу

$$\|y\| = \sqrt{\int\limits_a^b y^2(x) \rho(x) dx}.$$

Множество функций $y \in D(L)$, для которых норма конечна:

$$\|y\| = \sqrt{\int\limits_a^b y^2(x) \rho(x) dx} < +\infty,$$

образует пространство $\mathcal{L}_2[a, b; \rho(x)]$ (см. [13]).

Если весовая функция $\rho(x) = 1$, то пространство обозначается $\mathcal{L}_2[a, b]$.

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор, действующий из пространства $D(L)$ в линейное пространство непрерывных на $[a, b]$ функций, вида

$$L(y) = -\frac{1}{\rho(x)}(p(x) y')' + q(x) y,$$

где $\rho(x)$, $p(x)$, $q(x)$ – непрерывные на $[a, b]$ функции, $p(x) \geq p_0 > 0$, $\rho(x)$ – весовая функция. Такой оператор называется оператором Штурма–Лиувилля.

Для оператора Штурма–Лиувилля $L(y)$ справедливы следующие свойства:

1) оператор симметричен, т. е. $\forall y, z \in D(L)$ справедливо равенство $(L(y), z) = (y, L(z))$;

2) оператор положительно определен, т. е. $\forall y \in D(L)$ справедливо неравенство $(L(y), y) \geq q_0 \|y\|^2$, где $q_0 = \min\limits_{x \in [a,b]} q(x)$.

Доказательство этих свойств приводится в пособии [14].

Определение 6.1 . *Число λ называется собственным числом оператора L, если существует ненулевая функция $y(x) \in D(L)$, для которой $L(y) = \lambda y$. При этом функция $y(x)$ называется собственной функцией оператора.*

Задача нахождения собственных чисел и собственных функций оператора называется задачей Штурма–Лиувилля:

$$\begin{cases} L(y) = \lambda y, \quad a < x < b, \\ R_1 y'(a) - S_1 y(a) = 0, \quad R_2 y'(b) + S_2 y(b) = 0. \end{cases} \tag{6.3}$$

Множество всех собственных чисел называется спектром оператора $L(y)$ или спектром задачи (6.3).

Перечислим основные свойства собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

1. Собственные числа оператора $L(y)$ вещественные.

2. Собственные числа оператора $L(y)$ дискретные, т. е. представляет собой последовательность $\{\lambda_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

3. Последовательность $\{\lambda_n\}$ ограничена снизу: $\lambda_n \geq \min\limits_{x\in[a,b]} q(x)$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$.

4. При некоторых положительных A и B для всех достаточно больших n справедливы неравенства $An^2 \leq \lambda_n \leq Bn^2$.

Для собственных функций оператора Штурма–Лиувилля справедливы следующие утверждения:

1. Каждому собственному числу соответствует только одна (с точностью до постоянного множителя) собственная функция.

2. Так как собственные функции, соответствующие различным собственным числам, ортогональны, значит, система собственных функций оператора $\{y_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$ является ортогональной системой.

3. Ортогональная система $\{y_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$ является полной в пространстве $\mathcal{L}_2[a, b; \rho(x)]$. Это означает, что любая функция из этого пространства может быть разложена в ряд Фурье по системе $\{y_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$ и этот ряд будет сходиться к функции в норме пространства $\mathcal{L}_2[a, b; \rho(x)]$.

Кроме того, для функции из области определения оператора L справедлива теорема Стеклова.

Теорема 6.1. *Пусть $y \in D(L)$. Если функцию $y(x)$ разложить в ряд Фурье по ортогональной, полной в пространстве $\mathcal{L}_2[a, b; \rho(x)]$ системе функций $\{y_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$, то этот ряд будет абсолютно сходиться к $y(x)$ $\forall x \in [a, b]$; этот ряд можно почленно дифференцировать 2 раза. Ряд из первых производных будет по точечно сходиться к $y'(x)$, а ряд из вторых производных сходится к $y''(x)$ в норме пространства $\mathcal{L}_2[a, b; \rho(x)]$.*

Решение задач Штурма–Лиувилля для различных операторов Штурма–Лиувилля $L(y)$ подробно разобрано во второй главе пособия [15] (примеры 2.1 – 2.7).

6.3. Решение краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения методом Фурье

Рассмотрим краевую задачу с однородными краевыми условиями

$$\begin{cases} L(u) \equiv \dfrac{-1}{\rho(x)}(p(x)u')' + q(x)u = f(x), \\ R_1 u'(a) - S_1 u(a) = 0, \\ R_2 u'(b) + S_2 u(b) = 0. \end{cases} \tag{6.4}$$

Как отмечалось в 6.1, задачу с неоднородными краевыми условиями всегда можно свести к виду (6.4). Решение задачи (6.4) будем искать в виде ряда Фурье по системе $\{y_k(x)\}$ собственных функций оператора L:

$$u(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k y_k(x). \tag{6.5}$$

Краевые условия для функции $u(x)$ выполняются автоматически. Так как $u(x) \in D(L)$, то ряд (6.5) можно дважды почленно дифференцировать:

$$L(u) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k L(y_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \lambda_k y_k(x).$$

Разложим правую часть уравнения (6.4) в ряд Фурье $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} f_k y_k(x)$.

Тогда задача (6.4) сводится к равенству

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k \lambda_k y_k(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k y_k(x).$$

Если среди собственных чисел оператора L нет нуля, получаем $c_k = \dfrac{f_k}{\lambda_k}$.

Таким образом, решение задачи (6.4) имеет вид

$$u(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f_k}{\lambda_k} y_k(x).$$

Отметим, что фактически доказано, что если $\lambda_k \neq 0$ для любых $k \in \in \mathbb{N}$, то задача (6.4) имеет единственное решение. Для того чтобы среди собственных чисел λ_k не было нуля, достаточно, например, выполнения неравенства $q(x) \geq q_0 > 0 \ \forall x \in [a, b]$.

6.4. Типовой расчет по теме „Решение краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения“ (ТР 3.1)

Студентам выдаются индивидуальные задания вида:

ТР 3.1. Вар. 0. Решить краевую задачу:

$$-y'' + 2y = 2.2x$$

$$0.4y'(0.7) - 1.7y(0.7) = 2.8, \qquad 0.6y'(1.8) = 2.4.$$

Требуется:

1. На заданном отрезке $[a, b]$ решить краевую задачу аналитическим методом:
1) применяя метод неопределенных коэффициентов найти общее решение дифференциального уравнения;
2) используя краевые условия, получить решение краевой задачи;
3) разбить промежуток $[a, b]$ на 5 равных частей точками $x_i = a + ih$, $i = 0, \ldots, 5$, где $h = \dfrac{b-a}{5}$ и вычислить значения найденной функции в узлах сетки x_0, ..., x_5.

2. Получить решение заданной краевой задачи в виде ряда Фурье по ортогональной системе функций соответствующей задачи Штурма–Лиувилля:
1) заменой $y(x) = v(x) + \alpha x + \beta$ свести заданную задачу к задаче с однородными краевыми условиями;
2) решить задачу Штурма–Лиувилля;
3) найти решение задачи с однородными краевыми условиями в виде ряда Фурье по найденной системе собственных функций дифференциального оператора;
4) найти решение исходной задачи $y(x) = v(x) + \alpha x + \beta$.
5) разбить промежуток $[a, b]$ на 5 равных частей точками $x_0, \ldots, x_5$ и вычислить значения функции $y_3(x) = v_3(x) + \alpha x + \beta$ в узлах сетки ($v_3(x)$ – третья частичная сумма ряда Фурье функции $v(x)$).

Пример выполнения типового расчета ТР 3.1. Вар. 0.

1. Решение краевой задачи аналитическим методом.

1. Общее решение неоднородного дифференциального уравнения найдем, используя метод неопределенных коэффициентов. Функцию $y(x)$, будем искать в виде:

$$y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x),$$

где $y_0(x)$ – общее решение однородного уравнения, $\tilde{y}(x)$ – частное решение неоднородного уравнения.

a. Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение

$$-y_0'' + 2y_0 = 0.$$

Его характеристическое уравнение $-\lambda^2 + 2 = 0$ имеет вещественные решения: $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2} = \pm 1,4142$. Значит, общим решением однородного уравнения будет функция

$$y_0(x) = C_1 \mathrm{e}^{1,4142x} + C_2 \mathrm{e}^{-1,4142x}.$$

b. Частное решение неоднородного уравнения $\tilde{y}(x)$ будем искать в виде $\tilde{y}(x) = A\,x + B$. Подставим его в неоднородное дифференциальное уравнение

$$-(Ax + B)'' + 2(Ax + B) = 2.2x.$$

Приравняв коэффициенты многочленов правой и левой части этого равенства, получим систему относительно коэффициентов A и B:

$$\begin{cases} 2A = 2.2, \\ 2B = 0. \end{cases}$$

В результате получим $\tilde{y}(x) = 1.1\,x$.

Запишем общее решение неоднородного уравнения:

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{1,4142x} + C_2 \mathrm{e}^{-1,4142x} + 1.1\,x.$$

2. Подставим найденную функцию $y(x)$ в краевые условия. Относительно коэффициентов C_1, C_2 получится система линейных уравнений. Решая ее, найдем: $C_1 = 0.1311$, $\;C_2 = -4.8332$. Решением заданной краевой задачи будет функция

$$y(x) = 0.1311\,\mathrm{e}^{1,4142x} - 4.8332\,\mathrm{e}^{-1,4142x} + 1.1\,x.$$

3. Разобьем промежуток $[0.7, 1.8]$ на 5 равных частей. Значения искомой функции y в полученных точках запишем в табл. 6.1.

Таблица 6.1

x	0.7	0.92	1.14	1.36	1.58	1.8
$y(x)$	−0.6732	0.1778	0.9473	1.6870	2.4452	3.2725

2. Решение краевой задачи методом Фурье

1. Так как метод Фурье применим к задачам с однородными краевыми условиями, то с помощью замены $y(x) = v(x) + \alpha x + \beta$ приведем краевые условия к однородным:

$$\begin{aligned} 0.4y'(0.7) - 1.7y(0.7) &= 0.4(v'(0.7) + \alpha) - 1.7(v(0.7) + \alpha \cdot 0.7 + \beta) = \\ &= 0.4v'(0.7) - 1.7v(0.7) - 0.79\alpha - 1.7\beta = 2.8, \end{aligned}$$
$$0.6y'(1.8) = 0.6(v'(1.8) + \alpha) = 2.4.$$

Для того чтобы краевые условия для функции $v(x)$ были однородными, нужно, чтобы α и β удовлетворяли системе уравнений

$$\begin{cases} -0.79\alpha - 1.7\beta = 2.8, \\ 0.6\alpha = 2.4. \end{cases}$$

Отсюда $\alpha = 4$, $\beta = -3.5059$. Подставив $y(x) = v(x) + 4x - 3.5059$ в уравнение, получим краевую задачу для функции v:

$$\begin{cases} -v'' + 2v = -5.8x + 7.0118, \\ 0.4v'(0.7) - 1.7v(0.7) = 0, \\ 0.6v'(1.8) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -v'' + 2v = -5.8x + 7.0118, \\ v'(0.7) - 4.25v(0.7) = 0, \\ v'(1.8) = 0. \end{cases} \tag{6.6}$$

2. Рассмотрим оператор Штурма–Лиувилля задачи (6.6): $L(y) = -y'' + 2y$. Найдем собственные числа и собственные функции этого оператора:

$$\begin{cases} -y'' + 2y = \lambda y, \\ y'(0.7) - 4.25y(0.7) = 0, \\ y'(1.8) = 0. \end{cases}$$

Запишем уравнение задачи в виде $-y'' = (\lambda - 2)y$. Обозначим $\lambda - 2 = \mu^2$ $(\mu \geq 0)$.

При $\mu = 0$ общим решением уравнения $y'' + \mu^2 y = 0$ будет функция $y(x) = C_1 x + C_2$. Подставив эту функцию в краевые условия, получим решение краевой задачи – $y(x) \equiv 0$. Такая функция не является собственной функцией дифференциального оператора.

При $\mu^2 > 0$ общее решение уравнения $y'' + \mu^2 y = 0$ можно записать в виде

$$y(x) = C_1 \cos(\mu(1.8 - x)) + C_2 \sin(\mu(1.8 - x)).$$

Подставив в общее решение краевые условия, получаем систему уравнений относительно C_1 и C_2

$$\begin{cases} (\mu \sin(1.1\mu) - 4.25 \cos(1.1\mu))C_1 - (4.25 \sin(1.1\mu) + \mu \cos(1.1\mu))C_2 = 0, \\ 0 \cdot \mu C_1 - \mu C_2 = 0. \end{cases} \tag{6.7}$$

Очевидно, что в системе (6.7) $C_2 = 0$, а C_1 будет ненулевым, только если

$$\mu \sin(1.1\mu) - 4.25 \cos(1.1\mu) = 0.$$

Полученное уравнение приведем к виду

$$\operatorname{tg}(1.1\mu) = \frac{4.25}{\mu}. \tag{6.8}$$

Уравнение (6.8) имеет бесконечное число корней μ_k, которые можно найти только численными методами. Первые 3 корня уравнения будут $\mu_1 = 1.18149$, $\mu_2 = 3.64012$, $\mu_3 = 6.25457$. Собственные числа оператора $L(y)$ равны $\lambda_k = \mu_k^2 + 2$. Соответственно, первые 3 собственных числа $\lambda_1 = 3.39593$, $\lambda_2 = 15.25049$, $\lambda_3 = 41.11959$. Тогда собственными функциями оператора L будут

$$y_k(x) = \cos(\mu_k(1.8 - x)).$$

Таким образом, для оператора $L(y)$ получены система собственных чисел $\{\lambda_k = \mu_k^2 + 2\}_{k=1}^{+\infty}$ и система собственных функций $\{y_k = \cos(\mu_k(1.8 - x))\}_{k=1}^{+\infty}$, где μ_k – положительные корни уравнения (6.8).

3. Для того чтобы записать ряды Фурье по системе $\{y_k\}_{k=1}^{+\infty}$, понадобятся нормы функций y_k

$$\|y_k\|^2 = \int_{0.7}^{1.8} [\cos(\mu_k(1.8 - x))]^2 dx = 0.55 + \frac{\sin(2.2\mu_k)}{4\mu_k}.$$

Разложим правую часть уравнения (6.6) $g(x) = -5.8x + 7.0118$ в ряд Фурье: $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} g_k y_k(x)$. Коэффициенты Фурье g_k будут:

$$g_k = \frac{(g, y_k)}{\|y_k\|^2} = \frac{1}{\|y_k\|^2} \int_{0.7}^{1.8} (-5.8x + 7.0118) \cos(\mu_k(1.8 - x)) dx =$$

$$= \frac{1}{\|y_k\|^2} \left(\frac{5.8(\cos(1.1\mu_k) - 1)}{\mu_k^2} + \frac{2.9518 \sin(1.1\mu_k)}{\mu_k} \right).$$

Первые 3 коэффициента $g_1 = -0.96325$, $g_2 = -2.16600$, $g_3 = 0.40816$.

Для вычисления интегралов студенты могут использовать пакеты прикладных программ, такие как MATLAB, SCILAB, MAPLE.

Будем искать решение (6.6) в виде $v(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k y_k(x)$. Учитывая, что

$$L(v) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k L(y_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \lambda_k y_k,$$

получаем

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k \lambda_k y_k(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} g_k y_k(x).$$

Отсюда

$$c_k = \frac{g_k}{\lambda_k}.$$

Вычислим значения первых 3 коэффициентов ряда

$$c_1 = -0.28365, \quad c_2 = -0.14203, \quad c_3 = 0.00993.$$

Окончательно решение задачи (6.6) примет вид

$$v(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \cos(\mu_k(1.8 - x)).$$

4. Получим решение исходной задачи

$$y(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \cos(\mu_k(1.8 - x)) + 4x - 3.5059.$$

5. В качестве приближенного решения задачи можно взять частичную сумму ряда Фурье

$$y_N(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \cos(\mu_k(3 - x)) + 4x - 3.5059.$$

В табл. 6.2 приведены значения приближенного решения $y_3(x)$ в точках $x_0, \ldots, x_5$. Для сравнения в таблице записаны значения функции $y(x)$, полученные аналитическим методом в тех же точках.

Таблица 6.2

x	0.7	0.92	1.14	1.36	1.58	1.8
$y_3(x)$	-0.6813	0.1793	0.9519	1.6831	2.4431	3.2784
$y(x)$	-0.6732	0.1778	0.9473	1.6870	2.4452	3.2725

7. УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

7.1. Постановка начально-краевой задачи

Дифференциальное уравнение вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad \text{при} \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

называется уравнением теплопроводности с учетом источников тепла (a^2 – константа). Такое уравнение описывает, например, изменение температуры тонкого стержня длины l с теплоизолированной поверхностью (см. [14]).

Для того чтобы получить единственное решение, к уравнению теплопроводности добавляют начальное и краевые условия.

Начальное условие для уравнения теплопроводности состоит в задании значений функции $u(x,t)$ в начальный момент времени $t = 0$:

$$u(x, 0) = \varphi(x).$$

Краевые условия задаются в точках $x = 0$ и $x = l$.

Все краевые условия в типовом расчете являются линейными. Они могут быть описаны одним соотношением на соответствующей границе:

$$R_1 \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} - S_1 u(0,t) = g_1(t), \quad R_2 \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + S_2(l,t) = g_2(t).$$

При $R_1 = 0$ ($R_2 = 0$) получается краевое условие первого рода, при $S_1 = 0$ ($S_2 = 0$) – краевое условие второго рода, а при $R_1 S_1 \neq 0$ ($R_2 S_2 \neq 0$) – условие третьего рода.

Подробное изложение методов решения уравнения теплопроводности можно найти в учебном пособии [14].

7.2. Решение краевой задачи для уравнения теплопроводности методом Фурье

Рассмотрим начально-краевую задачу для одномерного уравнения теплопроводности. Пусть требуется найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \quad \text{при} \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x),$$

краевым условиям

$$R_1 \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} - S_1 u(0,t) = g_1(t), \quad R_2 \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + S_2 u(l,t) = g_2(t)$$

($|R_1| + |S_1| \neq 0$, $|R_2| + |S_2| \neq 0$). Решением поставленной задачи назовем функцию $u(x,t)$, обладающую следующими свойствами:

а) $u(x,t)$ определена и непрерывна в области $\Omega = [0,l] \times [0,T]$;

б) $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности при $0 < x < l$, $t > 0$;

в) $u(x,t)$ удовлетворяет начальному условию и краевым условиям.

Метод Фурье непосредственно применяется к задачам, в которых искомая функция удовлетворяет однородным краевым условиям ($g_1(t) \equiv 0$ и $g_2(t) \equiv 0$). Если краевые условия неоднородные, тогда сначала задачу следует свести к задаче с однородными условиями. Для этого функцию $u(x,t)$ представляют в виде

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t),$$

где $w(x,t)$ – дифференцируемая функция, удовлетворяющая тем же краевым условиям, что и функция $u(x,t)$:

$$R_1\frac{\partial w(0,t)}{\partial x} - S_1 w(0,t) = g_1(t), \quad R_2\frac{\partial w(l,t)}{\partial x} + S_2 w(l,t) = g_2(t).$$

В этом случае функция $v(x,t)$ будет удовлетворять однородным условиям. Выбор функции $w(x,t)$ зависит от типа граничных условий. Для многих краевых задач функция $w(x,t)$ может быть задана как линейная по переменной x

$$w(x,t) = \alpha(t)x + \beta(t).$$

Сумму функций $v(x,t) + w(x,t)$ подставляют в дифференциальное уравнение и начальные условия, и всю краевую задачу записывают для функции $v(x,t)$, которая удовлетворяет однородным краевым условиям. Задача сводится к нахождению функции $v(x,t)$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f_v(x,t) \quad \text{при} \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{7.1}$$

начальному условию

$$v(x,0) = \varphi_v(x), \tag{7.2}$$

краевым условиям

$$R_1\frac{\partial v(0,t)}{\partial x} - S_1 v(0,t) = 0, \quad R_2\frac{\partial v(l,t)}{\partial x} + S_2 v(l,t) = 0, \tag{7.3}$$

где $f_v(x,t) = f(x,t) - \dfrac{\partial w(x,t)}{\partial t} + a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\varphi_v(x) = \varphi(x) - w(x,0)$.

Далее для задачи с однородными краевыми условиями метод Фурье применяется по следующей схеме.

1. Для линейного дифференциального оператора второго порядка $L_x(u) = -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ решают соответствующую задачу Штурма – Лиувилля:

$$-y''(x) = \lambda y(x), \quad 0 < x < l \quad (y(x) \not\equiv 0),$$
$$R_1 y'(0) - S_1 y(0) = 0, \quad R_2 y'(l) + S_2 y(l) = 0.$$

В результате находят собственные числа $\{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty}$ и систему собственных функций $\{y_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$ оператора краевой задачи.

2. функцию $v(x,t)$ представляют в виде ряда Фурье по собственным функциям $\{y_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(t) y_k(x).$$

Однородные краевые условия (7.3) для $v(x,t)$ при этом автоматически выполняются. Этот ряд подставляют в уравнение (7.1) и начальное условие

(7.2), предварительно разложив функции $f_v(x,t)$ и $\varphi_v(x)$ в ряды Фурье по той же системе функций $\{y_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$. Далее, для коэффициентов $c_k(t)$ получают и решают задачи Коши.

3. искомую функцию $u(x,t)$ записывают в виде

$$u(x,t) = w(x,t) + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(t) y_k(x).$$

7.3. Метод сеток

Метод сеток является методом приближенного решения дифференциальных уравнений. Суть метода заключается в следующем. Область, в которой неизвестная функция, являющаяся решением дифференциального уравнения, определена и непрерывна, покрывается сеткой, т. е. заменяется конечным множеством точек, называемых узлами сетки. Все функции, входящие в дифференциальное уравнение, рассматриваются только в узлах сетки и называются сеточными функциями. При этом производные функций заменяются соответствующими разностными отношениями. Начальные и краевые условия также заменяются разностными условиями. В итоге вместо краевой задачи для дифференциального уравнения получается система алгебраических уравнений. Метод применяется в том случае, если при увеличении числа узлов сетки решение сеточной задачи сходится к решению исходной задачи для дифференциального уравнения. Естественно, при этом встают вопросы о скорости сходимости, точности и устойчивости разностной схемы.

Покажем, как применяется метод сеток для решения начально-краевой задачи для одномерного уравнения теплопроводности. Пусть требуется найти решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \tag{7.4}$$

если функция $u(x,t)$ удовлетворяет начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{7.5}$$

и краевым условиям

$$R_1 \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} - S_1 u(0,t) = g_1(t), \quad R_2 \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + S_2 u(l,t) = g_2(t) \tag{7.6}$$

$$(|R_1| + |S_1| \neq 0, \quad |R_2| + |S_2| \neq 0).$$

Предположим, что переменная t меняется в пределах $0 \leq t \leq T$. Область, в которой находится решение задачи – это прямоугольник $\Omega =$

$= [0,l] \times [0,T]$. Покроем эту область сеткой. Для этого отрезок $[0,l]$ разобьем точками x_0, x_1, ..., x_n на n частей. Для простоты будем считать, что расстояние h между точками одинаковое: $h = x_{i+1} - x_i = \dfrac{l}{n}$ $(i = 0, ..., n)$. Аналогично, отрезок $[0,T]$ разобьем на m частей точками t_0, t_1, ..., t_m, при этом расстояние между точками будет $\tau = t_{j+1} - t_j = \dfrac{T}{m}$ $(j = 0, ..., m)$ (рис. 7.1).

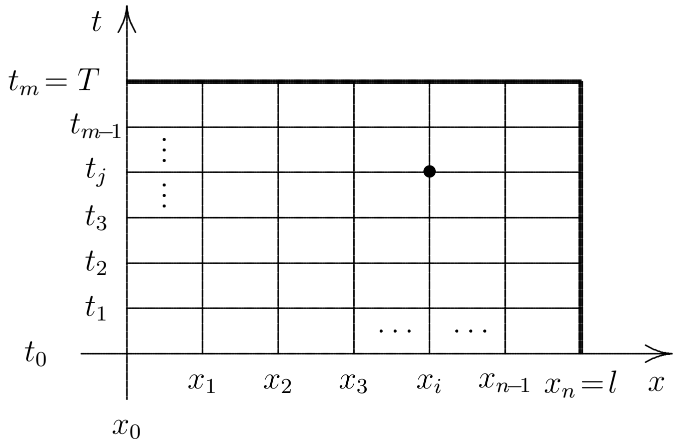

Рис. 7.1

Множество точек плоскости $\omega_{h\tau} = \{(x_i, t_j)\}$, $i = 0, ..., n$, $j = 0, ..., m$, называется сеткой, покрывающей область Ω. Точки плоскости (x_i, t_j) – это узлы сетки. При фиксированном j совокупность узлов сетки (x_i, t_j), $i = 0, ..., n$, называется j-м временным слоем. Будем считать, что функции $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$ из условия задачи определены только в узлах сетки.

Непрерывной в области Ω функции $u(x,t)$ поставим в соответствие сеточную функцию $u(x_i, t_j) = u_i^j$.

Заданное дифференциальное уравнение, начальное и краевые условия запишем в узлах сетки. При этом каждую производную заменим разностным отношением, связывающим значения сеточной функции в нескольких узлах сетки. Производную по времени $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ в узле сетки (x_i, t_j) можно заменить разностным выражением различными способами. Простейшими являются замены разностным отношением “вперед” $\left(\dfrac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} + O(\tau)\right)$ или “назад” $\left(\dfrac{u_i^{j-1} - u_i^j}{\tau} + O(\tau)\right)$. В зависимости от способа аппроксимации производных разностными отношениями получаются различные разностные схемы для уравнения теплопроводности.

Явная разностная схема. Для узлов сетки (x_i, t_j), $i = 1, ..., n-1$,

$j = 0, ..., m-1$, запишем уравнение теплопроводности, заменив $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ разностным отношением “вперед” $\dfrac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} + O(\tau)$, а $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ – разностным отношением $\dfrac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2} + O(h^2)$:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} + O(\tau) = a^2 \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2} + O(h^2) + f(x_i, t_j),$$
$$i = 1, ..., n-1, \quad j = 0, ..., m-1.$$

Для нулевого временного слоя (x_i, t_0), $i = 0, ..., n$, запишем начальное условие

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = 0, ..., n.$$

В граничных узлах сетки (x_0, t_{j+1}) и (x_n, t_{j+1}), $j = 0, ..., m-1$, запишем краевые условия, заменив производные соответствующими разностными отношениями:

$$R_1 \frac{u_1^{j+1} - u_0^{j+1}}{h} + O(h) - S_1 u_0^{j+1} = g_1(t_{j+1}),$$

$$R_2 \frac{u_n^{j+1} - u_{n-1}^{j+1}}{h} + O(h) + S_2 u_m^{j+1} = g_2(t_{j+1}).$$

Считая, что погрешности аппроксимации $O(\tau)$, $O(h^2)$, $O(h)$ в уравнениях и граничных условиях малы, отбросим их. В результате получим систему уравнений относительно неизвестных $\tilde{u}_i^j$ (приближенных значений функции $u(x,t)$ в узлах сетки), которая называется явной разностной схемой для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\tilde{u}_i^{j+1} - \tilde{u}_i^j}{\tau} = a^2 \frac{\tilde{u}_{i-1}^j - 2\tilde{u}_i^j + \tilde{u}_{i+1}^j}{h^2} + f(x_i, t_j), \ i = 1, ..., n-1, \ j = 0, ..., m-1,$$
$$\tilde{u}_i^0 = \varphi(x_i), i = 0, ..., n,$$
$$R_1 \frac{\tilde{u}_1^{j+1} - \tilde{u}_0^{j+1}}{h} - S_1 \tilde{u}_0^{j+1} = g_1(t_{j+1}),$$
$$R_2 \frac{\tilde{u}_n^{j+1} - \tilde{u}_{n-1}^{j+1}}{h} + S_2 \tilde{u}_n^{j+1} = g_2(t_{j+1}), \quad j = 0, ..., m-1.$$

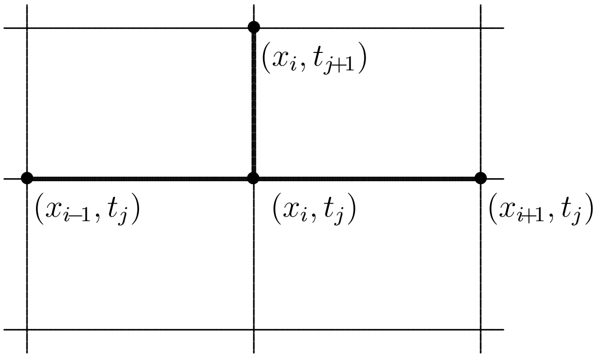

Рис. 7.2

На рис. 7.2 указаны узлы сетки, которые используются при аппроксимации производных, входящих в уравнение. Такой рисунок принято называть шаблоном схемы. Данная разностная схема является четырех точечной двухслойной. Схема называется явной, поскольку значения искомой функции $\tilde{u}_i^{j+1}$ на $(j+1)$-м временном слое можно последовательно в явном виде определить, если известны значения $\tilde{u}_i^j$ на j-м временном слое. Для этого полученные уравнения преобразуем к виду, удобному для вычислений:

$$\begin{cases} \tilde{u}_i^{j+1} = \tilde{u}_i^j + \tau\left(a^2 \dfrac{\tilde{u}_{i-1}^j - 2\tilde{u}_i^j + \tilde{u}_{i+1}^j}{h^2} + f(x_i, t_j)\right), \\ \hfill i = 1, 2, ..., n-1, \\ \tilde{u}_0^{j+1} = \dfrac{R_1}{R_1 + S_1 h}\,\tilde{u}_1^{j+1} - \dfrac{h}{R_1 + S_1 h}\,g_1(t_{j+1}), \\ \tilde{u}_n^{j+1} = \dfrac{R_2}{R_2 + S_2 h}\,\tilde{u}_{n-1}^{j+1} + \dfrac{h}{R_2 + S_2 h}\,g_2(t_{j+1}), \end{cases} \tag{7.7}$$

$$\tilde{u}_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = 0, ..., n.$$

Сначала находятся значения $\tilde{u}_i^0 = u_i^0 = \varphi(x_i)$, $i = 0, ..., n$, на нулевом слое. Затем последовательно определяются значения $\tilde{u}_i^{j+1}$ на всех временных слоях.

Справедливы следующие утверждения.

Утверждение 7.1. *Если* $\tau \le \dfrac{h^2}{2a^2}$, *то явная разностная схема* (7.7) *устойчива по начальным данным и правой части, т. е.*

$$\|\tilde{u}\|_{h,\tau} \le C(\|\varphi\|_h + \|f\|_{h,\tau}),$$

где C *не зависит от* h *и* τ.

Утверждение 7.2. *Явная разностная схема* (7.7) *аппроксимирует задачу для уравнения теплопроводности* (7.4), *с краевыми условиями* (7.6) *с погрешностью* $O(h^2) + O(\tau)$.

Утверждение 7.3. *При* $\tau \le \dfrac{h^2}{2a^2}$ *явная разностная схема* (7.8) *сходится в сеточной норме к решению задачи* (7.4), (7.5) *с краевыми условиями (7.6).*

Доказательство данных утверждений (в частном случае) можно найти в пособии [12].

Устойчивость явной разностной схемы имеет место только при выполнении условия $\tau \le \dfrac{h^2}{2a^2}$. В противном случае явная разностная схема не пригодна для вычислений. В случае $a^2 = 1$ условие устойчивости записывается в виде $\tau \le \dfrac{h^2}{2}$.

Неявная разностная схема. Построим для задачи (7.4), (7.5), (7.6) неявную разностную схему. Для внутренних узлов сетки запишем уравнение теплопроводности, заменив $\dfrac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t}$ разностным отношением „назад“ $\dfrac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\tau} + O(\tau)$, а $\dfrac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x^2}$, как и для явной схемы, разностным отношением $\dfrac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2} + O(h^2)$:

$$\frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\tau} + O(\tau) = a^2 \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2} + O(h^2) + f(x_i, t_j),$$
$$i = 1, ..., n-1, \quad j = 1, ..., m.$$

Для слоя (x_i, t_0) запишем начальное условие:

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = 0, ..., n,$$

а для граничных узлов – краевые условия:

$$R_1 \frac{u_1^j - u_0^j}{h} + O(h) - S_1 u_0^j = g_1(t_j),$$

$$R_2 \frac{u_n^j - u_{n-1}^j}{h} + O(h) + S_2 u_n^j = g_2(t_j),$$
$$j = 1, ..., m.$$

Отбросив в уравнениях неизвестные погрешности $O(h)$, $O(\tau)$, $O(h^2)$ – получим систему относительно приближенных значений $\tilde{u}_i^j$ искомой функции в узлах сетки:

$$\frac{\tilde{u}_i^j - \tilde{u}_i^{j-1}}{\tau} = a^2 \frac{\tilde{u}_{i-1}^j - 2\tilde{u}_i^j + \tilde{u}_{i+1}^j}{h^2} + f(x_i, t_j), \quad i = 1, ..., n-1, \quad j = 1, ..., m,$$

начальное условие:

$$\tilde{u}_i^0 = u_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = 0, ..., n,$$

краевые условия:

$$R_1 \frac{\tilde{u}_1^j - \tilde{u}_0^j}{h} - S_1 \tilde{u}_0^j = g_1(t_j), \quad R_2 \frac{\tilde{u}_n^j - \tilde{u}_{n-1}^j}{h} + S_2 \tilde{u}_n^j = g_2(t_j), \quad j = 1, ..., m.$$

Построенная разностная схема, как и явная, является четырех точечной двухслойной разностной схемой. Ее шаблон изображен на рис. 7.3.

Схема называется неявной, поскольку значения функции $\tilde{u}_i^j$ в данном случае не могут быть вычислены последовательно через значения функции на $(j-1)$-м временном слое. Для их нахождения на каждом временном слое следует решать систему уравнений

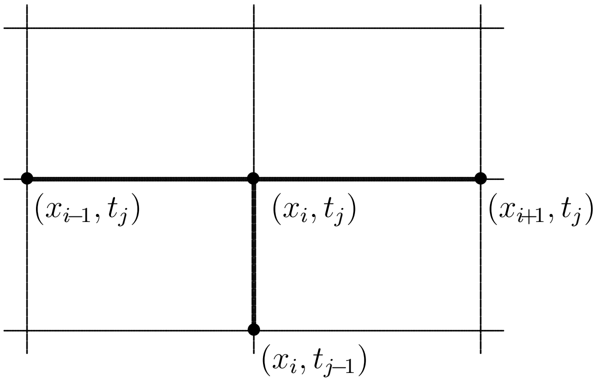

Рис. 7.3

$$\begin{cases} -(R_1 + S_1 h)\tilde{u}_0^j + R_1 \tilde{u}_1^j = h g_1(t_j), \\ \tilde{u}_{i-1}^j - (2 + \dfrac{h^2}{\tau a^2})\tilde{u}_i^j + \tilde{u}_{i+1}^j = -\dfrac{h^2}{\tau a^2}\tilde{u}_i^{j-1} - h^2 f(x_i, t_j), \\ i = 1, ..., n-1, \\ -R_2 \tilde{u}_{n-1}^j + (R_2 + S_2 h)\tilde{u}_n^j = h g_2(t_j). \end{cases} \tag{7.8}$$

Значение $\tilde{u}_i^0$ для нулевого временного слоя определяется из начального условия $\tilde{u}_i^0 = \varphi(x_i)$ $(i = 0, ..., n)$.

Система уравнений для j-го временного слоя удобно записать в матричном виде

$$\begin{bmatrix} B_0 & C_0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ A_1 & B_1 & C_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & A_2 & B_2 & C_2 & ... & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & ... & A_{n-1} & B_{n-1} & C_{n-1} \\ 0 & 0 & ... & 0 & A_n & B_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_0^j \\ \tilde{u}_1^j \\ \tilde{u}_2^j \\ \vdots \\ \tilde{u}_{n-1}^j \\ \tilde{u}_n^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{n-1} \\ F_n \end{bmatrix}.$$

Здесь

$$\begin{array}{llll} & B_0 = R_1 + S_1 h, & C_0 = R_1, & F_0 = h g_1(t_j), \\ A_i = 1, & B_i = -2 + \dfrac{h^2}{\tau a^2}, & C_i = 1, & F_i = -\dfrac{h^2}{\tau a^2}\tilde{u}_i^{j-1} - h^2 f(x_i, t_j), \\ & & & i = 1, ..., n-1 \\ A_n = -R_2, & B_n = R_2 + S_2 h, & & F_n = h g(t_j). \end{array}$$

Кратко эту систему можно записать в виде

$$A\vec{\tilde{u}}^j = \vec{F}^j,$$

где A – матрица коэффициентов, $\vec{\tilde{u}}^j$ – вектор значений функции $\tilde{u}$, $\vec{F}^j$ – вектор значений правой части уравнений для j-го временного слоя. Вектор $\vec{F}^j$ меняется от слоя к слою. Матрица коэффициентов системы A трехдиагональная. Для строк этой матрицы выполняется условие строгого диагонального преобладания $|B_i| > |A_i| + |C_i|$ $(i = 0, ..., n)$. Это условие обеспечивает однозначную разрешимость системы (см. [14] п. 1.9). Кроме того, для решения системы уравнений с подобной матрицей коэффициентов можно применить метод Гаусса без перестановки строк и столбцов матрицы. Такой метод решения системы уравнений с трехдиагональной матрицей коэффициентов называется методом прогонки. Сначала выполняется прямой ход метода прогонки: вычисляются прогоночные коэффициенты

$$\tilde{C}_0 = \frac{C_0}{B_0}, \quad \tilde{F}_0 = \frac{F_0}{B_0}, \tag{7.9}$$

$$\begin{array}{cc} \tilde{C}_i = \dfrac{C_i}{B_i - A_i\tilde{C}_{i-1}}, & \tilde{F}_i = \dfrac{F_i - A_i\tilde{F}_{i-1}}{B_i - A_i\tilde{C}_{i-1}}, \\ i = 1, ..., n-1, & i = 1, ..., n. \end{array} \tag{7.10}$$

При этом матрица коэффициентов системы преобразуется к верхней треугольной матрице, на главной диагонали которой стоят единицы; $\tilde{C}_i$ – ненулевые элементы матрицы, стоящие выше главной диагонали; $\tilde{F}_i$ – числа, стоящие в правой части системы уравнений.

Затем выполняется обратный ход (решается система уравнений с верхней треугольной матрицей коэффициентов):

$$\begin{aligned} &\tilde{u}_n^j = \tilde{F}_n, \\ &\tilde{u}_i^j = \tilde{F}_i - \tilde{C}_i\,\tilde{u}_{i+1}^j, \quad i = n-1, ..., 0. \end{aligned} \tag{7.11}$$

Метод прогонки можно применять только в том случае, когда в формулах для вычисления прогоночных коэффициентов $\tilde{C}_i$, $\tilde{F}_i$ знаменатели не обращаются в нуль. Это требование будет выполняться, если для матрицы коэффициентов справедливо условие строгого диагонального преобладания. Таким образом, при применении неявной разностной схемы для нахождения приближенного решения поставленной задачи значения $\tilde{u}_i^j$ будут определяться последовательно по временным слоям. Для каждого временного слоя необходимо будет решать систему уравнений с трех диагональной матрицей коэффициентов.

Преимущество неявной схемы заключается в том, что в отличие от явной разностной схемы построенная неявная схема является безусловно устойчивой, т. е. она устойчива при любых τ и h.

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 7.4. *Неявная разностная схема* (7.8) *устойчива по начальным данным и правой части, т. е.*

$$\|\tilde{u}\|_{h,\tau} \le C(\|\varphi\|_h + \|f\|_{h,\tau}),$$

где C не зависит от h и τ.

Доказательство данного утверждения (в частном случае) можно найти в пособии [12].

7.4. Типовой расчет по теме „Решение уравнения теплопроводности методом Фурье и разностными методами“ (ТР 3.2)

Студентам выдаются индивидуальные задания вида:

ТР 3.2. Вар. 0. Решить краевую задачу для уравнения теплопроводности методом Фурье и сеточным методом.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + (-3x+3)t + (-0.2\sin t)x + \frac{0.1}{t+1},\ x \in [0, 3.0],\ t \in [0, 0.4],$$

$$u(0,t) = 0.1\ln(t+1),\ \frac{\partial u(3.0,t)}{\partial x} = 0.2\cos t + 0.1,\ u(x,0) = x^2 - 5.70x + 0.00.$$

Требуется:

1. В области $x \in [0, l] \times [0, T]$ получить решение краевой задачи для уравнения теплопроводности в виде ряда Фурье; используя первые 6 слагаемых

ряда Фурье, найти приближенное решение задачи, при $t = T$ в точках $x_1, \ldots, x_6$, разбив промежуток $[0, l]$ на 5 равных частей.
2. Построить явную схему разностной аппроксимации заданной краевой задачи; проверить выполнение условия устойчивости явной разностной схемы; разбив каждый промежуток $[0, l]$, $[0, T]$ на 5 равных частей, найти приближенное решение краевой задачи в узлах сетки.
3. Построить неявную схему разностной аппроксимации заданной краевой задачи; разбив каждый промежуток $[0, l]$, $[0, T]$ на 5 равных частей найти приближенное решение краевой задачи в узлах сетки.

Пример выполнения типового расчета ТР 3.2. Вар. 0.

1. Решение уравнения теплопроводности методом Фурье.

1. Сведем исходную задачу к задаче с однородными краевыми условиями. Для этого выполним замену $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$. Зададим $w(x,t) == \alpha(t)x + \beta(t)$ и подберем $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ так, чтобы функция $w(x,t)$ удовлетворяла тем же краевым условиям, что и функция $u(x,t)$:

$$w(0,t) = 0.1\ln(t+1),\ \frac{\partial w(3,t)}{\partial x} = 0.2\cos t + 0.1.$$

Тогда $v(x,t)$ будет удовлетворять однородным условиям:

$$v(0,t) = 0,\ \frac{\partial v(3,t)}{\partial x} = 0.$$

Подставляя $w(x,t)$ в краевые условия, получим $\beta(t) = 0.1\ln(t+1)$, $\alpha(t) = 0.2\cos\,t + 0.1$ Значит $w(x,t) = (0.2\cos\,t + 0.1)x + 0.1\ln(t+1)$.

Запишем краевую задачу относительно функции $v(x,t)$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + (-3x+3)\,t,\ x \in (0,3),\ t \in (0,0.4], \\ &v(0,t) = 0,\ \frac{\partial v(3,t)}{\partial x} = 0,\ v(x,0) = x^2 - 6x. \end{aligned} \tag{7.12}$$

Эту задачу будем решать методом Фурье. Функцию $v(x,t)$ будем искать в виде ряда по собственным функциям оператора $L_x(v) = -\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$.

2. Решим задачу Штурма–Лиувилля.

$$\begin{cases} -y'' = \lambda\, y, \quad x \in (\,0,3\,), \quad y(x) \neq 0, \\ y(0) = 0, \quad y'(3) = 0, \end{cases}$$

Краевые условия соответствуют условиям решаемой задачи.

Известно, что $\lambda \geq 0$ (см. [12]).

Пусть $\lambda = 0$. Тогда $-y'' = 0$, значит $y(x) = C_1 + C_2\, x$. Подставим эту функцию в краевые условия $\begin{cases} y(0) = C_1 = 0, \\ y'(3) = C_2 = 0, \end{cases} \Bigg| \implies y(x) = 0$ – не является собственной функцией.

Пусть $\lambda > 0$. Обозначим $\lambda = \mu^2$. Тогда $-y'' = \mu^2\, y$. Запишем характеристическое уравнение $-k^2 = \mu^2$. Его корни: $k_{1,2} = \pm\mu\, i$, следовательно

$$y(x) = C_1\, \cos(\mu\, x) + C_2\, \sin(\mu\, x).$$

Подставим найденное решение в краевые условия

$$\begin{cases} y(0) = C_1 = 0, \\ y'(3) = C_2\, \mu\, \cos(3\mu) = 0. \end{cases}$$

Тогда $y(x) = C_2\, \sin(\mu\, x), \quad C_2 \neq 0$, при этом

$$\cos(3\mu) = 0 \;\Leftrightarrow 3\, \mu_k = \frac{\pi}{2} + \pi\, k,\; \lambda_k = \left(\frac{\pi + 2\,\pi\, k}{6}\right)^2, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots .$$

Найдены собственные числа: $\lambda_k = \left(\frac{\pi + 2\,\pi\, k}{6}\right)^2$ и собственные функции: $y_k(x) = \sin\left(\frac{\pi + 2\,\pi\, k}{6}\, x\right)$ $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ оператора Штурма–Лиувилля рассматриваемой задачи.

3. Функцию $v(x,t)$ будем искать в виде ряда Фурье по найденным собственным функциям дифференциального оператора $y_k(x)$:

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(t)\, y_k(x).$$

Функции $f(x,t) = (-3x + 3)t$ и $\varphi(x) = (x^2 - 6\, x)$ из дифференциального уравнения и начального условия также разложим в ряды Фурье:

$$f(x,t) = (-3x+3)t = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)\, y_k(x), \quad f_k(t) = \frac{(f(x,t), y_k(x))}{\|y_k(x)\|^2},$$

$$\varphi(x) = (x^2 - 6\, x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_k\, y_k(x), \quad \varphi_k = \frac{(\varphi(x), y_k(x))}{\|y_k(x)\|^2}.$$

Вычислим $\|y_k(x)\|^2$ и скалярные произведения:

$$\|y_k(x)\|^2 = \int_0^3 \sin^2\left(\frac{\pi + 2\,\pi\, k}{6}\, x\right) dx = \frac{3}{2},$$

$$(f(x,t),y_k(x)) = \int\limits_0^3 (-3x+3)t\,\sin\left(\frac{\pi+2\,\pi\,k}{6}\right)\,x\,dx =$$

$$= \left(\frac{18}{\pi+2\pi\,k} - \frac{108\,(-1)^k}{(\pi+2\pi\,k)^2}\right) t\ ,$$

$$(\varphi(x),y_k(x)) = \int\limits_0^3 (x^2-6\,x)\,\sin\left(\frac{\pi+2\,\pi\,k}{6}\right)\,x\,dx = \frac{-432}{(\pi+2\pi\,k)^3}\ .$$

Найдем коэффициенты Фурье:

$$f_k(t) = \left(\frac{12}{\pi+2\pi\,k} - \frac{72\,(-1)^k}{(\pi+2\pi\,k)^2}\right) t, \qquad \varphi_k = \frac{-288}{(\pi+2\pi\,k)^3}.$$

Подставим полученные ряды в дифференциальное уравнение и начальные условия задачи (7.12).

Выполним подстановку в уравнение $\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + (-3x+3)\,t$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k'(t)\,y_k(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(t)\,y_k''(x) + \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)\,y_k(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} c_k'(t)\,y_k(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-\lambda\,c_k(t)\ + f_k(t))\,y_k(x).$$

Подставим ряды в начальное условие $v(x,0) = x^2 - 6x$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k(0)\,y_k(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_k\,y_k(x).$$

Поскольку разложение в ряд Фурье единственно ([14]), то для коэффициентов $c_k(t)$ выполняются равенства:

$$\begin{cases} c_k'(t)\,y_k(x) = -\lambda\,c_k(t) + f_k(t) \\ c_k(0) = \varphi_k. \end{cases} \tag{7.13}$$

Т. е. коэффициенты $c_k(t)$ являются решениями задачи Коши. Уравнение в задаче (7.13) – линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида $\left(f_k(t) = \left(\dfrac{12}{\pi+2\pi\,k} - \dfrac{72\,(-1)^k}{(\pi+2\pi\,k)^2}\right) t\right)$.

Его можно решить методом неопределенных коэффициентов, или с помощью преобразования Лапласа, или методом вариации постоянной см. [12]. Для решения уравнения задачи (7.13) воспользуемся методом неопределенных коэффициентов.

Сначала найдем общее решение однородного уравнения

$$c'_{k,o}(t)\, y_k(x) = -\lambda\, c_{k,o}(t).$$

Очевидно: $c'_{k,o}(t) = C\,\mathrm{e}^{-\lambda_k t}$.

Частное решение $\tilde{c}_k(t)$ неоднородного уравнения будем искать в виде $\tilde{c}_k(t) = A\,t + B$. Подставив $\tilde{c}_k(t)$ в уравнение, получим

$$A = -\lambda(A\,t + B) + G\,t,$$

где $G = \dfrac{12}{\pi + 2\pi k} - \dfrac{72\,(-1)^k}{(\pi + 2\pi k)^2}$. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t найдем $A = \dfrac{36\,G}{(\pi + 2\pi k)^2}$, $\quad B = -\dfrac{1296\,G}{(\pi + 2\pi k)^4}$.

Запишем общее решение неоднородного уравнения:

$$c_k(t) = C\,\mathrm{e}^{-\lambda_k t} + A\,t + B.$$

Коэффициент C определим используя начальное условие:

$$C = -\frac{288}{(\pi + 2\pi k)^2} + \frac{1296\,G}{(\pi + 2\pi k)^4}.$$

Окончательное решение задачи Коши (7.13) имеет вид:

$$c_k(t) = \frac{432\,t}{(\pi + 2\pi k)^3} - \frac{15552}{(\pi + 2\pi k)^5} - \frac{2592\,t\,(-1)^k}{(\pi + 2\pi k)^4} + \frac{93312\,(-1)^k}{(\pi + 2\pi k)^6} +$$
$$+ \left(-\frac{288}{(\pi + 2\pi k)^3} + \frac{15552}{(\pi + 2\pi k)^5} - \frac{93312\,(-1)^k}{(\pi + 2\pi k)^6} \right) \mathrm{e}^{-\lambda_k t}.$$

При найденных значениях $c_k(t)$, искомая функция $v(x,t)$ – решение краевой задачи (7.12) представляется в виде ряда:

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(t)\, \sin\left(\frac{\pi + 2\,\pi\,k}{6}\,x\right).$$

4. Получим решение исходной задачи $u(x,t)$:

$$u(x,t) = w(x,t) + v(x,t) =$$
$$= (0.2\cos\,t + 0.1)\,x + 0.1\ln(t+1) + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(t)\, \sin\left(\frac{\pi + 2\,\pi\,k}{6}\,x\right).$$

5. Найдем приближенное решение исходной задачи, используя N-ю частичную сумму ряда Фурье при $N = 6$, в точках $x_1, \ldots, x_6$, разбив промежуток $[0, l]$ на 5 равных частей при $t = T = 0.4$.

$$u_6(x_i, T) = (0.2 \cos T + 0.1)\, x_i + 0.1 \ln(T + 1) + \sum_{k=0}^{5} c_k(T) \sin\left(\frac{\pi + 2\pi k}{6} x_i\right).$$

Вычислим значения первых 6 коэффициентов $c_k(T)$ряда Фурье:

Таблица 7.1

k	0	1	2	3	4	5
$c_k(T)$	-8.59186	-0.00511	0.01336	0.01672	0.00534	0.00454

Вычислим значения функции $u(x, T)$ в точках $x_1, \ldots, x_6$:

Таблица 7.2

x	0	0.6	1.2	1.8	2.4	3.0
$u(x, T)$	0.03365	-2.42786	-4.69670	-6.41486	-7.44352	-7.70303

2. Решение уравнения теплопроводности по явной разностной схеме.

Обозначим $f(x, t) = (-3x + 3)\, t + (-0.2\, x \sin(t)) + \dfrac{0.1}{t + 1}$,
$\varphi(x) = x^2 - 5.7\, x$ – функции из уравнения и начального условия,
$g_1(t) = 0.1 \ln(t + 1)$, $g_2(t) = 0.2 \cos t + 0.1$ – функции из краевых условий заданной задачи для уравнения теплопроводности.

Разобьем точками $x_0, \ldots, x_n$ промежуток $[0, l]$ на n равных частей и точками $t_0, \ldots, t_m$ промежуток $[0, T]$ на m равных частей ($n = m = 5$). Получилась сетка, покрывающая область $\Omega = [0, l] \times [0, T]$. Обозначим (x_i, t_j) узлы сетки. Пусть $h = \dfrac{l}{n} = \dfrac{3}{5} = 0.6$, $\tau = \dfrac{T}{m} = \dfrac{0.4}{5} = 0.08$ – шаги сетки по осям Ox и Ot, соответственно. Обозначим $u_i^j = u(x_i, t_j)$ – значение искомой функции в узле (x_i, t_j).

Для нулевого временного слоя (x_i, t_0), $i = 0, ..., n$, используем начальное условие

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = 0, ..., n.$$

В узлах сетки (x_i, t_j) $i = 1, \ldots, n - 1; \quad j = 0, \ldots, m - 1$ запишем дифференциальное уравнение, заменив производные соответствующими разностными отношениями $\dfrac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} = \dfrac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} + O(\tau)$ (производная по времени аппроксимируется разностным отношением „вперед“) и

$$\frac{\partial^2 u(x_i,t_j)}{\partial x^2} = \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2} + O(h^2): .$$

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} + O(\tau) = \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2} + O(h^2) + f(x_i,t_j),$$
$$i = 1, ..., n-1, \quad j = 0, ..., m-1.$$

В граничных узлах сетки (x_0, t_{j+1}) и (x_n, t_{j+1}), $j = 0, ..., m-1$ запишем заданные краевые условия:

$$u_0^{j+1} = g_1(t_{j+1}),$$
$$\frac{u_n^{j+1} - u_{n-1}^{j+1}}{h} + O(h) = g_2(t_{j+1}).$$

Считая, что погрешности аппроксимации $O(\tau)$, $O(h^2)$, $O(h)$ в уравнениях и граничных условиях малы, отбросим их. В результате получим явную разностную схему для уравнения теплопроводности – систему уравнений относительно неизвестных $\tilde{u}_i^j$ (приближенных значений функции $u(x,t)$ в узлах сетки):

$$\tilde{u}_i^0 = \varphi(x_i), i = 0, ..., n,$$
$$\begin{cases} \dfrac{\tilde{u}_i^{j+1} - \tilde{u}_i^j}{\tau} = \dfrac{\tilde{u}_{i-1}^j - 2\tilde{u}_i^j + \tilde{u}_{i+1}^j}{h^2} + f(x_i,t_j), \; i = 1, ..., n-1, \\ \tilde{u}_0^{j+1} = g_1(t_{j+1}), \\ \dfrac{\tilde{u}_n^{j+1} - \tilde{u}_{n-1}^{j+1}}{h} = g_2(t_{j+1}), \quad j = 0, ..., m-1. \end{cases}$$

Из полученных уравнений видно, что значения искомой функции на $(j+1)$-м временном слое выражаются через значения на предыдущем слое. Перепишем полученные уравнения в удобном для расчетов виде, выразив $\tilde{u}_i^{j+1}$ через $\tilde{u}_i^j$.

Сначала вычисляются значения функции на нулевом временном слое:

$$\tilde{u}_i^0 = \varphi(x_i), i = 0, ..., n.$$

Затем определяются значения $\tilde{u}_i^{j+1}$ на следующих временных слоях во внутренних точках:

$$\tilde{u}_i^{j+1} = \tilde{u}_i^j + \frac{\tau}{h^2}(\tilde{u}_{i-1}^j - 2\tilde{u}_i^j + \tilde{u}_{i+1}^j) + \tau f(x_i,t_j) \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

и граничных точках:

$$\tilde{u}_0^{j+1} = g_1(t_{j+1}),$$
$$u_n^{j+1} = u_{i-1}^{j+1} + hg_2(t_{j+1}), \quad j = 0, \ldots, m-1.$$

Проверим выполнение условия устойчивости явной разностной схемы.

Условие устойчивости: $\tau \le \dfrac{h^2}{2a^2}$. В этой задаче: $0.08 \le \dfrac{0.5^2}{2\cdot 1} \Leftrightarrow 0.08 \le$ ≤ 0.18. Условие выполнено, следовательно применение явной разностной схемы возможно.

Воспользуемся полученной разностной схемой.

Вычислим значения функции на нулевом временном слое при $t = 0$: $\tilde{u}_i^0 = x_i^2 - 5.7\,x_i, \quad i = 0, \ldots, n$.

Таблица 7.3

i	0	1	2	3	4	5
x	0	0.6	1.2	1.8	2.4	3.0
$\tilde{u}_i^0$	0.00	−3.06	−5.40	−7.02	−7.92	−8.10

Для краевого условия при $x = 0$ найдем значения функции $\tilde{u}_0^{j+1} = 0.1\ln(t_{j+1}+1), \quad j = 0, \ldots, m-1.$

Таблица 7.4

i	0	1	2	3	4
t_{j+1}	0.08	0.16	0.24	0.32	0.40
$\tilde{u}_0^{j+1}$	0.00770	0.0184	0.02151	0.02776	0.03365

Согласно полученным формулам вычислим значения $\tilde{u}_i^{j+1}$:

$$\tilde{u}_i^{j+1} = \tilde{u}_i^j + \frac{\tau}{h^2}(\tilde{u}_{i-1}^j - 2\tilde{u}_i^j + \tilde{u}_{i+1}^j) + \tau(-3x_i + 3)\,t_{j+1} +$$
$$+\tau\left(-0.2\,x_i\sin(t_{j+1}) + \frac{0.1}{t_{j+1}+1}\right) \quad i = 1, \ldots, n-1,$$
$$u_n^{j+1} = u_{i-1}^{j+1} + h(0.2\cos\,t_{j+1} + 0.1), \quad x = x_n = 3, \ \ j = 0, \ldots, m-1.$$

Получим значения функции $u_i^j, \quad i = 0, \ldots, 5$ на временных слоях $j = 0, \ldots, 5.$

Таблица 7.5

$j \setminus i$	0	1	2	3	4	5
0	0.00	−3.06	−5.40	−7.02	−7.92	−8.10
1	0.00770	−2.88397	−5.23797	−6.87026	−7.78254	−7.60292
2	0.01484	−2.74221	−5.08147	−6.73869	−7.59286	−7.41439
3	0.02151	−2.62217	−4.93956	−6.60673	−7.44673	−7.27017
4	0.02776	−2.51593	−4.81043	−6.48734	−7.33434	−7.16043
5	0.03365	−2.42018	−4.68415	−6.38522	−7.25111	−7.08058

3. Решение уравнения теплопроводности по неявной разностной схеме.

Как и при построении явной разностной схемы, заданную краевую задачу запишем в узлах сетки, покрывающей область Ω.

Для нулевого временного слоя (x_i, t_0), $i = 0, ..., n$, используем начальное условие

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = 0, ..., n.$$

В узлах сетки (x_i, t_j) $i = 1, \ldots, n-1; \quad j = 1, \ldots, m$ запишем дифференциальное уравнение, заменив производные разностными отношениями, но производную по времени теперь аппроксимируем, используя разностное отношение „назад“: $\dfrac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} = \dfrac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\tau} + O(\tau)$. Вторую производную по переменной x аппроксимируем как и раньше симметричным разностным отношением: $\dfrac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x^2} = \dfrac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2} + O(h^2)$. В результате получим:

$$\frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\tau} + O(\tau) = \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2} + O(h^2) + f(x_i, t_j),$$
$$i = 1, ..., n-1, \quad j = 1, ..., m.$$

В граничных узлах сетки (x_0, t_j) и (x_n, t_j), $j = 1, ..., m$, запишем заданные краевые условия:

$$u_0^j = g_1(t_j),$$

$$\frac{u_n^j - u_{n-1}^j}{h} + O(h) = g_2(t_j).$$

Отбросим погрешности аппроксимации $O(\tau)$, $O(h^2)$, $O(h)$. В результате получим неявную схему разностной аппроксимации заданной краевой задачи:

$$\tilde{u}_i^0 = \varphi(x_i), i = 0, ..., n,$$
$$\begin{cases} \dfrac{\tilde{u}_i^j - \tilde{u}_i^{j-1}}{\tau} = \dfrac{\tilde{u}_{i-1}^j - 2\tilde{u}_i^j + \tilde{u}_{i+1}^j}{h^2} + f(x_i, t_j), \ i = 1, ..., n-1, \\ \tilde{u}_0^j = g_1(t_j), \\ \dfrac{\tilde{u}_n^j - \tilde{u}_{n-1}^j}{h} = g_2(t_{j+1}), \quad j = 1, ..., m. \end{cases}$$

Здесь $\tilde{u}_i^j$ – приближенные значения функции $u(x, t)$ в узлах сетки.

В отличии от явной разностной схемы значения искомой функции на j-м временном слое в явном виде не выражаются через значения на предыдущем слое. Для выполнения расчетов перепишем уравнения в виде:

$$\tilde{u}_i^0 = \varphi(x_i), i = 0, ..., n,$$

$$\begin{cases} u_{i-1}^j - \left(2 + \dfrac{h^2}{\tau}\right)\tilde{u}_i^j + u_{i+1}^j = -\dfrac{h^2}{\tau}\tilde{u}_i^{j-1} - h^2 f(x_i, t_j),\ i = 1, ..., n-1, \\ \tilde{u}_0^j = g_1(t_j), \\ \tilde{u}_n^j - \tilde{u}_{n-1}^j = hg_2(t_j), \quad j = 1, ..., m. \end{cases}$$

Сначала из начального условия $\tilde{u}_i^0 = \varphi(x_i)$ $(i = 0, ..., n)$ определяются значения $\tilde{u}_i^0$ для нулевого временного слоя.

Значения $\tilde{u}_i^j$ $(i = 0, ..., n)$ для следующих временных слоев t_j $(j = 1, ..., m)$ можно найти, решая систему линейных уравнений, которую удобно записать в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & -\left(2 + \dfrac{h^2}{\tau}\right) & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & -\left(2 + \dfrac{h^2}{\tau}\right) & 1 & ... & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & ... & 1 & -\left(2 + \dfrac{h^2}{\tau}\right) & 1 \\ 0 & 0 & ... & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_0^j \\ \tilde{u}_1^j \\ \tilde{u}_2^j \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{u}_{n-1}^j \\ \tilde{u}_n^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ F_{n-1} \\ F_n \end{bmatrix},$$

где $F_0 = g_1(t_j);\quad F_i = -\dfrac{h^2}{\tau}\tilde{u}_i^{j-1} - h^2 f(x_i, t_j),\ i = 1, ..., n-1;\quad F_n = hg_2(t_j).$

Кратко эту систему можно записать в виде

$$A\vec{\tilde{u}}^j = \vec{F}^j.$$

Здесь $\vec{\tilde{u}}^j = [\tilde{u}_0^j \tilde{u}_1^j \dots \tilde{u}_n^j]^T$ – матрица-столбец искомых значений функции на j-м временном слое. Матрица коэффициентов системы A трехдиагональная, одинаковая для всех временных слоев.. Для решения системы применим метод прогонки – метод Гаусса без перестановки строк и столбцов матрицы. Решение системы уравнений выполняется в два этапа – прямой и обратный ход.

Прямой ход метода прогонки приводит матрицу A к верхней треугольной матрице, на главной диагонали которой стоят единицы. По формулам (7.9) и (7.10) вычисляются прогоночные коэффициенты – ненулевые элементы новой матрицы коэффициентов и новый столбец свободных членов.

Сначала найдем преобразованную матрицу $\tilde{A}$, используя формулы (7.9) и (7.10). Для решаемого примера:

$$\tilde{C}_0 = \frac{0}{1} = 0,$$

$$\tilde{C}_i = \frac{-1}{2 + h^2/\tau + \tilde{C}_{i-1}} = 0 \quad i = 1, ...n - 1.$$

Запишем матрицу $\tilde{A}$ для рассматриваемого случая n=5:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.15325 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.15758 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0.15767 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.15767 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Эта матрица будет одинаковой для всех временных слоев.

Используя формулы (7.9) и (7.10) определим правые части систем для всех временных слоев:

$$\tilde{F}_0 = \frac{0.1\ln(t_j + 1)}{1} = 0.1\ln(t_j + 1),$$

$$\tilde{F}_1 = \frac{\tilde{u}_i^{j-1}(h^2/\tau) + h^2\left(t_j(3 - 3x_1) - 0.2x_1\sin(t_j) + 0.1/(t_j + 1)\right) + \tilde{F}_0}{2 + h^2/\tau},$$

$$\tilde{F}_i = \frac{\tilde{u}_i^{j-1}(h^2/\tau) + h^2\left(t_j(3 - 3x_i) - 0.2 \cdot x_i\sin(t_j) + 0.1/(t_j + 1)\right) + \tilde{F}_{i-1}}{2 + h^2/\tau + \tilde{C}_{i-1}},$$

$$i = 1, ...\ n - 1,$$

$$\tilde{F}_n = \frac{h(0.2\cos(t_j) + 0.1) + \tilde{F}_{n-1}}{1 + \tilde{C}_{n-1}}.$$

Для решения систем уравнений с матрицей коэффициентов $\tilde{A}$ будем использовать формулы (7.11) – обратный ход метода прогонки.

Последовательно решим системы уравнений с верхней треугольной матрицей коэффициентов для временных слоев $1, \ldots, 5$.

1-й t слой: $\tilde{A} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{u}_0^1 \\ \tilde{u}_1^1 \\ \tilde{u}_2^1 \\ \tilde{u}_3^1 \\ \tilde{u}_4^1 \\ \tilde{u}_5^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00770 \\ -2.10736 \\ -4.15972 \\ -5.64388 \\ -6.52525 \\ -7.53344 \end{bmatrix}$. 2-й t слой: $\tilde{A} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{u}_0^2 \\ \tilde{u}_1^2 \\ \tilde{u}_2^2 \\ \tilde{u}_3^2 \\ \tilde{u}_4^2 \\ \tilde{u}_5^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.01482 \\ -2.00049 \\ -4.03408 \\ -5.52342 \\ -6.38102 \\ -7.36357 \end{bmatrix}$.

$$\text{3-й } t \text{ слой:} \quad \tilde{A} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{u}_0^3 \\ \tilde{u}_1^3 \\ \tilde{u}_2^3 \\ \tilde{u}_3^3 \\ \tilde{u}_4^3 \\ \tilde{u}_5^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.02151 \\ -1,20513 \\ -3.91759 \\ -5.41327 \\ -6.26364 \\ -7.22673 \end{bmatrix}. \quad \text{4-й } t \text{ слой:} \quad \tilde{A} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{u}_0^4 \\ \tilde{u}_1^4 \\ \tilde{u}_2^4 \\ \tilde{u}_3^4 \\ \tilde{u}_4^4 \\ \tilde{u}_5^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.02776 \\ -1.81899 \\ -3.82071 \\ -5.31549 \\ -6.17142 \\ -7.12016 \end{bmatrix}.$$

$$\text{5-й } t \text{ слой:} \quad \tilde{A} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{u}_0^5 \\ \tilde{u}_1^5 \\ \tilde{u}_2^5 \\ \tilde{u}_3^5 \\ \tilde{u}_4^5 \\ \tilde{u}_5^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.03365 \\ -1.74056 \\ -3.71370 \\ -5.23127 \\ -6.10200 \\ -7.04175 \end{bmatrix}.$$

В итоге получим решение задачи по неявной разностной схеме.

Таблица 7.6

$j \setminus i$	0	1	2	3	4	5
0	0.00	−3.06	−5.40	−7.02	−7.92	−8.10
1	0.00770	−2.91362	−5.24069	−6.85998	−7.71305	−7.53344
2	0.01484	−2.78384	−5.09181	−6.71256	−7.54204	−7.36357
3	0.02151	−2.66736	−4.95452	−6.58053	−7.40329	−7.22673
4	0.02776	−2.56199	−4.82952	−6.46553	−7.29406	−7.12016
5	0.03365	−2.46628	−4.71721	−6.36862	−7.21228	−7.04175

Перед защитой ТР студентам предлагается сравнить результаты на последнем временном слое, полученные тремя способами и сделать выводы об их точности.

Список литературы

1. Авторы: Колбина С. А., Коновалов Г. М., Снетков О. А., Сулимов М. Г. Типовые расчеты по дисциплине „Математический анализ“: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ „ЛЭТИ “, 2008.

2. Авторы: Н. Г. Гоголева Е. Е. Жукова, С. А. Колбина, Т. В. Непомнящая, Е. В. Фролова, Е А. Шевченко. Теория вероятностей в примерах и задачах: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ „ ЛЭТИ“, 2017.

3. Авторы: А. Л. Белопольский, А. С. Бондарев, М. Л. Доценко, Е. В. Фролова, А. П. Щеглова. Математический анализ (функции одной вещественной переменной): Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПб-ГЭТУ „ЛЭТИ“, 2013.

4. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Начальный курс. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1987.

5. Комплексные числа, многочлены и рациональные дроби: Учеб. элек. пособие А. Л. Белопольский, Н. А. Бодунов, С. И. Челкак, В. М. Чистяков. [Электронный ресурс] – СПб.: Изд-во СПбГЭТУ „ ЛЭТИ“, 2013.
„ИНФОРМРЕГИСТР“ рег. свид. №32342, номер г. р. эл. изд. – 0321303044.

6. Двайт Г. Д. Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983.

7. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979.

8. Боревич Е. З., Жукова Е. Е., Челкак С. И. Дифференциальное исчисление функций многих вещественных переменных. Учеб. электр. издание.[Электронный ресурс] – СПб : СПбГЭТУ „ ЛЭТИ“, 2011.
„ ИНФОРМРЕГИСТР“ рег. свид. №24842, номер г. р. эл. изд. – 0321200075.

9. Колбина С. А., Пилюгин С. Ю. Линейная алгебра (дополнительные главы): Учеб. пособие. – СПб: СПбГЭТУ „ ЛЭТИ“, 2009.

10. Даугавет А. И., Постников Е. В., Червинская Н. М. Введение в теорию вероятностей: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, 2012.

11. Бородин А.Н. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики: Учеб. пособие для вузов. СПб.: Лань, 2008. (И другие года изданий).

12. Бодунов Н. А., Пилюгин С. Ю. Дифференциальные уравнения: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ “ЛЭТИ”, 2011.

13. Боревич Е. З., Фролова Е. В., Челкак С. И. Ряды Фурье: электрон. учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ „ ЛЭТИ“, 2017.

14. Меркулов А. Л., Трегуб В. Л., Червинская Н. М. Методы математической физики: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, 2016.

15. Меркулов А. Л., Трегуб В. Л., Червинская Н. М. Задачи и упражнения по математической физике: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, 2014.

СОДЕРЖАНИЕ

Белопольский Андрей Львович,
Гоголева Надежда Генриховна,
Колбина Светлана Анатольевна,
Меркулов Александр Львович,
Червинская Нина Михайловна

ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ ПО РАЗЛИЧНЫМ РАЗДЕЛАМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие

Редактор Э. К. Долгатов

Подписано в печать Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Печать цифровая. Гарнитура „Times New Roman“ Печ. л. 5,0.
Тираж 595 экз. Заказ

Издательство СПбГЭТУ „ЛЭТИ“
197376, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5