СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ОСНОВАМ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Под редакцией Ю. А. Бычкова,
В. М. Золотницкого, Э. П. Чернышева,
А. Н. Белянина, Е. Б. Соловьевой

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР
2011

ББК 32.2я73
С 23

С 23 Сборник задач по основам теоретической электротехники: Учебное пособие / Под ред. Ю. А. Бычкова, В. М. Золотницкого, Э. П. Чернышева, А. Н. Белянина, Е. Б. Соловьевой. — СПб.: Издательство «Лань», 2011. — 400 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-1157-3

Содержание сборника соответствует программе Министерства образования и науки РФ курса «Теоретические основы электротехники» и включает наборы задач для индивидуальной работы студентов, описание практических занятий, перечень контрольных вопросов и варианты олимпиадных задач. Рассмотрены анализ цепей во временной и частотной областях, классические и современные приложения, включая анализ дискретных, нелинейных и активных цепей, синтез цепей, а также разнообразные задачи анализа электромагнитных полей.

Учебное пособие предназначено для студентов технических вузов.

ББК 32.2я73

Коллектив авторов:

Александр Николаевич Белянин, Юрий Александрович Бычков, Вадим Дмитриевич Гончаров, Андрей Евгеньевич Завьялов, Владимир Михайлович Золотницкий, Юрий Михайлович Иншаков, Людмила Валентиновна Куткова, Дмитрий Александрович Морозов, Елена Вадимовна Нечкина, Валерий Васильевич Панкин, Марк Саулович Портной, Валентина Александровна Прохорова, Марина Вячеславовна Соклакова, Валентин Николаевич Соколов, Елена Борисовна Соловьева, Эдуард Павлович Чернышев

Рецензенты:

зав. кафедрой ЦОС СПбГУТ, доктор технических наук, профессор *А. А. ЛАННЭ*;
зав. кафедрой ТОЭ СПбГПУ, доктор технических наук, профессор *В. Н. БОРОНИН*

Обложка
Л. А. АРНДТ

Охраняется законом РФ об авторском праве.
Воспроизведение всей книги или любой ее части
запрещается без письменного разрешения издателя.
Любые попытки нарушения закона
будут преследоваться в судебном порядке.

© Издательство «Лань», 2011
© Коллектив авторов, 2011
© Издательство «Лань»,
художественное оформление, 2011

Содержание

Предисловие 7
Список используемых сокращений 9

1. Тестовые и контрольные задачи по теории электрических цепей 11
Введение 12
1.1. Основные понятия теории цепей. Анализ резистивных цепей 14
1.2. Расчет переходных процессов во временной области при постоянных и произвольных воздействиях 25
1.3. Анализ цепей при синусоидальных и экспоненциальных воздействиях 31
1.4. Операторный и спектральный методы анализа цепей 50
1.5. Расчет цепей с многополюсными элементами и зависимыми источниками 65
1.6. Расчет дискретных и нелинейных цепей 76
1.7. Указания, типовые примеры и рекомендации к решению задач 80
Задачи к теме 1.1 «Основные понятия теории цепей. Анализ резистивных цепей» 80
Задачи к теме 1.2 «Расчет переходных процессов во временной области при постоянных и произвольных воздействиях» 84
Задачи к теме 1.3 «Анализ цепей при синусоидальных и экспоненциальных воздействиях» 88
Задачи к теме 1.4 «Операторный и спектральный методы анализа цепей» 92
Задачи к теме 1.5 «Расчет цепей с многополюсными элементами и зависимыми источниками» 101
Задачи к теме 1.6 «Расчет дискретных и нелинейных цепей» 104

2. Практикум по теории электрических цепей 107
Введение 108
2.1. Анализ простых резистивных цепей 109
2.1.1. Исходные понятия 109
2.1.2. Примеры типовых задач 109
2.1.3. Заключение 112
2.2. Метод уравнений Кирхгофа 113
2.2.1. Исходные понятия 113
2.2.2. Примеры типовых задач 113
2.2.3. Заключение 116
2.3. Метод пропорциональных величин, метод наложения 117
2.3.1. Исходные понятия 117
2.3.2. Примеры типовых задач 117
2.3.3. Заключение 118
2.4. Методы контурных токов и узловых напряжений 120
2.4.1. Исходные понятия 120
2.4.2. Примеры типовых задач 120
2.4.3. Заключение 124

2.5. Метод эквивалентных источников ... 125
2.5.1. Исходные понятия ... 125
2.5.2. Примеры типовых задач ... 125
2.5.3. Заключение ... 126
2.6. Вольт-амперные характеристики индуктивного и емкостного элементов цепи ... 127
2.6.1. Исходные понятия ... 127
2.6.2. Примеры типовых задач ... 127
2.6.3. Заключение ... 130
2.7. Анализ переходных процессов в цепях первого порядка во временной области при постоянных воздействиях ... 131
2.7.1. Исходные понятия ... 131
2.7.2. Типовые примеры ... 132
2.7.3. Заключение ... 136
2.8. Анализ переходных процессов в цепях высокого порядка во временной области при постоянных воздействиях ... 137
2.8.1. Исходные понятия ... 137
2.8.2. Типовой пример ... 138
2.8.3. Численный расчет реакции по уравнениям состояния ... 141
2.8.4. Заключение ... 142
2.9. Применение обобщенных функций для анализа переходных процессов во временной области при воздействиях произвольной формы ... 143
2.9.1. Исходные положения ... 143
2.9.2. Типовой пример ... 146
2.9.3. Заключение ... 149
2.10. Начала анализа установившегося синусоидального режима методом комплексных амплитуд ... 150
2.10.1. Исходные понятия ... 150
2.10.2. Примеры типовых задач ... 152
2.10.3. Заключение ... 156
2.11. Расчет установившегося синусоидального режима методом комплексных амплитуд ... 157
2.11.1. Исходные понятия ... 157
2.11.2. Примеры типовых задач ... 157
2.11.3. Расширение применения МКА ... 160
2.11.4. Заключение ... 162
2.12. Мощность в установившемся синусоидальном режиме ... 163
2.12.1. Исходные понятия ... 163
2.12.2. Примеры типовых задач ... 164
2.12.3. Заключение ... 167
2.13. Резонанс в электрических цепях ... 168
2.13.1. Исходные понятия ... 168
2.13.2. Примеры типовых задач ... 169
2.13.3. Заключение ... 172
2.14. Расчет переходных процессов при синусоидальных и экспоненциальных воздействиях ... 173
2.14.1. Исходные понятия ... 173
2.14.2. Примеры типовых задач ... 174
2.14.3. Заключение ... 176
2.15. Расчет трехфазных цепей ... 177
2.15.1. Исходные понятия ... 177
2.15.2. Примеры типовых задач ... 178
2.15.3. Заключение ... 183
2.16. Операторный метод расчета переходных процессов ... 184
2.16.1. Исходные понятия ... 184
2.16.2. Примеры типовых задач ... 186
2.16.3. Заключение ... 189

2.17. Передаточная функция и частотные характеристики цепей ... 190
2.17.1. Исходные понятия ... 190
2.17.2. Типовые примеры ... 191
2.17.3. Заключение ... 195
2.18. Анализ установившегося периодического несинусоидального режима в цепи ... 196
2.18.1. Исходные понятия ... 196
2.18.2. Типовой пример ... 197
2.18.3. Заключение ... 200
2.19. Анализ прохождения периодического сигнала через дифференцирующую *RC*-цепь ... 201
2.19.1. Исходные положения ... 201
2.19.2. Типовой пример ... 202
2.19.3. Заключение ... 207
2.20. Спектральный анализ прохождения одиночного импульса через интегрирующую *RC*-цепь ... 208
2.20.1. Исходные понятия ... 208
2.20.2. Типовой пример ... 210
2.20.3. Заключение ... 214
2.21. Определение сигнала по его спектру ... 215
2.21.1. Исходные понятия ... 215
2.21.2. Типовой пример ... 216
2.21.3. Заключение ... 218
2.22. Анализ индуктивно связанных цепей ... 219
2.22.1. Исходные положения ... 219
2.22.2. Типовые примеры ... 220
2.22.3. Заключение ... 225
2.23. Пассивные и активные четырехполюсники ... 226
2.23.1. Общие положения ... 226
2.23.2. Примеры типовых задач ... 227
2.23.3. Заключение ... 232
2.24. Цепи с зависимыми источниками и операционными усилителями ... 233
2.24.1. Исходные понятия ... 233
2.24.2. Пример типовой задачи ... 233
2.24.3. Формализованные МКТ и МУН ... 235
2.24.4. Цепи с операционными усилителями ... 239
2.24.5. Заключение ... 242
2.25. Расчет нелинейных резистивных цепей ... 243
2.25.1. Исходные понятия ... 243
2.25.2. Типовой пример ... 243
2.25.3. Заключение ... 248

3. Контрольные вопросы по теории электрических цепей ... 249
Введение ... 250
3.1. Основные понятия и законы теории цепей ... 250
3.2. Анализ резистивных цепей ... 250
3.3. Анализ переходных процессов в линейных цепях во временной области при постоянных воздействиях ... 251
3.4. Применение обобщенных функций для анализа переходных процессов при воздействиях произвольной формы ... 252
3.5. Анализ линейных цепей при синусоидальных и экспоненциальных воздействиях ... 253
3.6. Применение преобразования Лапласа для анализа переходных процессов в цепях ... 255
3.7. Анализ установившихся периодических режимов в цепи ... 256
3.8. Спектральный метод анализа цепей ... 256
3.9. Цепи с взаимной индукцией ... 258
3.10. Трехфазные цепи ... 258

3.11. Четырехполюсники и активные цепи ... 259
3.12. Основы теории фильтров ... 259
3.13. Начала синтеза цепей ... 260
3.14. Цепи с распределенными параметрами ... 261
3.15. Дискретные цепи и сигналы ... 261
3.16. Нелинейные цепи ... 262
3.17. Начала синтеза пассивных четырехполюсников ... 263
3.18. Связанные контуры с большой добротностью ... 264
3.19. Основы машинно-ориентированных методов расчета цепей ... 265
3.20. Основы теории чувствительности цепей к изменению параметров ... 265
3.21. Релейные автоколебательные цепи ... 266
3.22. Магнитные цепи при постоянных магнитных потоках ... 267

4. Олимпиадные задачи по теории электрических цепей ... 269
Введение ... 270
4.1. Анализ резистивных цепей ... 270
4.2. Анализ переходных процессов во временной области при постоянных и произвольных воздействиях ... 274
4.3. Анализ установившихся синусоидальных режимов ... 282
4.4. Расчет переходных процессов при синусоидальных воздействиях ... 290
4.5. Анализ установившихся периодических режимов в цепях ... 295
4.6. Расчет трехфазных цепей ... 296
4.7. Анализ цепей с зависимыми источниками ... 297

5. Задачи по теории электромагнитного поля ... 299
Введение ... 300
5.1. Электростатическое поле ... 301
5.2. Поле постоянного тока ... 308
5.3. Постоянное магнитное поле ... 310
5.4. Стационарное и квазистационарное электромагнитное поле ... 318
5.5. Волновое электромагнитное поле ... 326
5.6. Методические указания, рекомендации и решения задач ... 330
5.6.1. Задачи 5.1.1–5.1.44 к теме «Электростатическое поле» ... 330
5.6.2. Задачи 5.2.1–5.2.12 к теме «Поле постоянного тока» ... 344
5.6.3. Задачи 5.3.1–5.3.49 к теме «Постоянное магнитное поле» ... 348
5.6.4. Задачи 5.4.1–5.4.36 к теме «Стационарное и квазистационарное электромагнитное поле» ... 366
5.6.5. Задачи 5.5.1–5.5.22 к теме «Волновое электромагнитное поле» ... 381

Список литературы ... 389

Предисловие

Сборник задач по основам теоретической электротехники обобщает опыт работы кафедры теоретических основ электротехники Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ» за последние десятилетия. Он позволяет студентам постепенно освоить практическую часть дисциплины «Основы теоретической электротехники», которая является базовой в общеинженерной подготовке во многих технических вузах.

Сборник ориентирован на активное овладение студентами второго и третьего курсов навыками самостоятельной работы, когда опыта рационального и эффективного изучения учебного материала у них еще мало. Вначале осваиваются фундаментальные физические свойства цепей как преобразователей сигналов в более физичной и понятной временной области и только затем — в частотной области. После этого даны классические и современные приложения теории цепей, включая практические расчеты дискретных и активных цепей. Затем изучаются вопросы теории электромагнитного поля.

Сборник состоит из пяти взаимосвязанных частей. Первый раздел содержит индивидуальные тестовые контрольные задачи по теории цепей, а также домашние задания. Сюда включено свыше 2000 задач, что значительно больше, чем во многих известных задачниках. В конце раздела приведены методические указания, рекомендации и примеры.

Второй раздел фактически является изложением материала практических занятий по теории цепей. Хотя этот раздел предназначен в первую очередь для студентов заочного и вечернего обучения, а также студентов-иностранцев (у которых затруднено восприятие материала в аудитории), он безусловно будет полезен и студентам дневного обучения при возникновении локальных трудностей в усвоении материала. По каждой теме излагаются базисные сведения, типовые примеры и минимальные требования к уровню знаний.

Третий раздел содержит наборы типовых проверочных вопросов по теории электрических цепей, которые обычно задают студентам во время экзамена и требуют практически мгновенного правильного ответа.

В четвертом разделе помещены наборы задач повышенной сложности — олимпиадных задач по теории цепей, отражающие многолетний успешный опыт кафедры ТОЭ СПбГЭТУ «ЛЭТИ» по проведению внутривузовских, открытых, межвузовских, городских и региональных олимпиад. Успехи в олимпиадах, базирующиеся во многом на решении приведенных в этом разделе задач, позволяют выявить талантливую творческую молодежь уже на втором курсе обучения в вузе и привлечь ее к научно-исследовательской работе.

В заключительном, пятом, разделе, полностью подготовленном доцентом А. Н. Белянины́м, отражен опыт изложения теории электромагнитного поля, накопленный на кафедре ТОЭ. Здесь приведены разнообразные задачи по теории поля, снабженные подробными методическими указаниями.

Авторы благодарят рецензентов профессора А. А. Ланнэ и кафедру теории электрических цепей Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича (заведующий кафедрой — профессор В. Ф. Дмитриков) за советы и замечания, которые способствовали методическому совершенствованию сборника.

Список используемых сокращений

АФХ – амплитудно-фазовая характеристика
АЧХ – амплитудно-частотная характеристика
ВАХ – вольт-амперная характеристика
ВД – векторная диаграмма
ВЧХ – вещественная частотная характеристика
ДЛ – длинная линия
ДП – двухполюсник
ДЦ – дискретная цепь
ЗИ – зависимый источник
ЗНК – закон напряжений Кирхгофа
ЗТК – закон токов Кирхгофа
ИН – источник напряжения
ИНУН – источник напряжения, управляемый напряжением
ИНУТ – источник напряжения, управляемый током
ИСЦ – индуктивно связанная цепь
ИСЭ – индуктивно связанный элемент
ИТ – источник тока
ИТУН – источник тока, управляемый напряжением
ИТУТ – источник тока, управляемый током
ИХ – импульсная характеристика
К – ключ
КЗ – короткозамкнутый элемент (короткое замыкание)
МКА – метод комплексных амплитуд
МКТ – метод контурных токов
МН – метод наложения
МП – магнитное поле
МПВ – метод пропорциональных величин
МУН – метод узловых напряжений
МЦ – магнитный поток
МЧХ – мнимая частотная характеристика
МЭИ – метод эквивалентных источников
МЭИН – метод эквивалентного источника напряжения

МЭИТ – метод эквивалентного источника тока
НУ – начальные условия
НФУ – нелинейное функциональное уравнение
НЦ – нелинейная цепь
НЭ – нелинейный элемент
ОСЗ – операторная схема замещения
ОУ – операционный усилитель
ПД – полоса дифференцирования
ПИ – полоса интегрирования
ПП – полоса пропускания
ПЗФ – полосовой заграждающий фильтр
ППФ – полосовой пропускающий фильтр
ПРН – простейший резонанс напряжений
ПРТ – простейший резонанс токов
ПФ – передаточная функция
ПХ – переходная характеристика
ПЦ – присоединенная цепь
РТ – рабочая точка
РУ – разностное уравнение
РФ – ряд Фурье
РЭ – релейный элемент
ТФЦ – трехфазная цепь
УПР – установившийся периодический режим
ФАЧ – функция абсолютной чувствительности
ФВЧ – фильтр верхних частот
ФДН – формула делителя напряжений
ФДТ – формула делителя токов
ФНЧ – фильтр нижних частот
ФЧХ – фазочастотная характеристика
ХП – характеристический полином
ХХ – холостой ход (оборванный элемент, разрыв в цепи)
ЧП – четырехполюсник
ЧХ – частотная характеристика

1. Тестовые и контрольные задачи по теории электрических цепей

Введение

Цель сборника задач данного раздела — обеспечить студентов индивидуальными наборами задач для самостоятельных, контрольных работ и домашних заданий по разделу «Основы теории цепей» дисциплины «Теоретические основы электротехники». Содержание сборника соответствует программе по теории электрических цепей и ориентировано на учебники [1, 2, 3, 4].

Вследствие ограниченного объема задачника в нем широко используются приведенные ранее сокращения, а также описание схем электрических цепей с помощью троек чисел, которые учитывают топологические особенности цепей.

При выполнении домашних заданий необходимо записать условие задачи, изобразить схему цепи, указать условно положительное направление токов и условно положительную полярность напряжений всех элементов. Должны быть указаны единицы измерений всех параметров и переменных. В условиях задач напряжение u элементов дано в вольтах (В), ток i — в амперах (А), мощность p — в ваттах (Вт), энергия W — в джоулях (Дж); значения сопротивлений R, $|z|$ приведены в омах (Ом), проводимостей G, $|Y|$ — в сименсах (См); индуктивностей L — в генри (Гн), емкостей C — в фарадах (Ф). Угловая частота ω задается в радианах в секунду (1/с), циклическая частота f — в герцах (Гц); в секундах (с) измеряются время t, постоянная времени τ и период T. Для уменьшения объема задачника числовые данные (напряжений, токов, сопротивлений и т. д.) ниже приводятся в цифрах, без указания единиц измерений.

При построении схем по заданным тройкам чисел *первое число* является порядковым номером элемента, *два последующих* — номерами узлов (в том числе устранимых), к которым подключен данный элемент; *для источников напряжения* отсчет узлов производится от «+» к «–», а *для источников тока* — по направлению тока. После тройки чисел приводится условное буквенное обозначение элемента и численное значение соответствующего параметра. Все элементы имеют *различные номера*; узлы и ветви обычно нумеруются слева направо.

При построении схем *вначале* намечают все узлы, а затем соединяют их соответствующими ветвями; возможно, потребуется перечертить схему с целью устранения пересечений ветвей. Большинство схем в задачах относится к типу лестничных или мостовых.

В качестве примера рассмотрим построение схемы цепи, которая задана следующими тройками чисел: 114 — ИН $u_1 = 2$; 212 — $R_2 = 2$; 324 — $L_3 = 2$; 423 — $C_4 = 2$; 534 — $R_5 = 2$; 643 — ИТ $i_6 = 2$.

В цепи 6 ветвей — это определяется наибольшим первым числом в совокупности троек чисел, и 4 узла — наибольшее значение из вторых и третьих чисел троек. Размечаем слева направо узлы 1, 2, 3, а узел 4 — внизу. Далее выполняем соедине-

ние узлов ветвями в соответствии с условиями. На рис. 1.1 приведена схема данной цепи, в которой $u_1 = 2$ В; $R_2 = 2$ Ом; $L_3 = 2$ Гн; $C_4 = 2$ Ф; $R_5 = 2$ Ом; $i_6 = 2$ А.

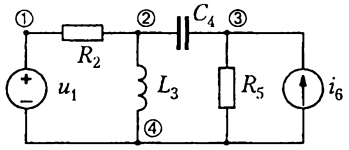


Рис. 1.1

Следует иметь в виду, что

1) в пункте 1.7 приведены *методические указания* к решению задач и *типовые примеры*;

2) при необходимости можно использовать второй раздел — «Практикум по теории электрических цепей», где *детально разбирается материал* практических занятий по соответствующим темам.

1.1. Основные понятия теории цепей. Анализ резистивных цепей

1.1.1. Используя законы Кирхгофа и Ома, определить ток i_k, напряжение u_k и мощность p_k каждого элемента цепи (k — номер элемента).

1. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 1$; 212 — $R_2 = 2$; 332 — ИН $u_3 = 5$; 431 — ИТ $i_4 = 1$.
2. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 2$; 212 — $R_2 = 2$; 323 — ИТ $i_3 = 2$; 413 — ИТ $i_4 = 4$.
3. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 3$; 231 — $R_2 = 2$; 321 — ИН $u_3 = 1$; 432 — ИН $u_4 = 4$.
4. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 12$; 212 — ИТ $i_2 = 2$; 323 — $R_3 = 2$; 432 — ИТ $i_4 = 4$.
5. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 2$; 212 — $R_2 = 2$; 323 — ИТ $i_3 = 6$; 431 — ИТ $i_4 = 3$.
6. Цепь: 131 — ИН $u_1 = 3$; 212 — $R_2 = 2$; 323 — ИН $u_3 = 3$; 431 — ИТ $i_4 = 2$.
7. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 2$; 212 — $R_2 = 2$; 323 — ИН $u_3 = 2$; 434 — $R_4 = 1$; 542 — ИТ $i_5 = 4$.
8. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 10$; 212 — ИН $u_2 = 2$; 332 — ИТ $i_3 = 3$; 423 — $R_4 = 4$.
9. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 2$; 212 — ИТ $i_2 = 2$; 323 — $R_3 = 2$; 432 — ИН $u_4 = 2$.
10. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 3$; 212 — $R_2 = 1$; 332 — ИТ $i_3 = 6$; 423 — $R_4 = 2$.
11. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 2$; 212 — $R_2 = 2$; 332 — ИТ $i_3 = 5$; 413 — ИТ $i_4 = 2$.
12. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 2$; 212 — $R_2 = 2$; 323 — ИН $u_3 = 2$; 434 — $R_4 = 1$; 542 — ИТ $i_5 = 3$.
13. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 2$; 221 — ИТ $i_2 = 1$; 323 — $R_3 = 3$; 423 — ИН $u_4 = 6$.
14. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 4$; 212 — $R_2 = 2$; 323 — ИН $u_3 = 2$; 431 — ИТ $i_4 = 2$.
15. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 2$; 212 — $R_2 = 2$; 332 — ИН $u_3 = 2$; 434 — $R_4 = 1$; 542 — ИТ $i_5 = 4$.
16. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 2$; 212 — $R_2 = 2$; 332 — ИТ $i_3 = 4$; 431 — ИТ $i_4 = 1$.
17. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 3$; 212 — $R_2 = 1$; 323 — ИТ $i_3 = 6$; 432 — $R_4 = 2$.
18. Цепь: 114 — ИТ $i_1 = 4$; 212 — $R_2 = 1$; 323 — ИН $u_3 = 6$; 434 — $R_4 = 2$; 542 — ИТ $i_5 = 2$.
19. Цепь: 131 — ИН $u_1 = 4$; 213 — $R_2 = 2$; 312 — ИТ $i_3 = 3$; 423 — ИН $u_4 = 4$.
20. Цепь: 131 — ИН $u_1 = 2$; 212 — $R_2 = 2$; 332 — ИН $u_3 = 4$; 431 — ИТ $i_4 = 2$.
21. Цепь: 113 — ИТ $i_1 = 2$; 212 — $R_2 = 3$; 323 — $R_3 = 2$; 432 — ИН $u_4 = 2$.
22. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 1$; 212 — ИТ $i_2 = 4$; 312 — $R_3 = 2$; 423 — ИН $u_4 = 3$.
23. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 1$; 213 — ИТ $i_2 = 7$; 331 — $R_3 = 2$; 412 — $R_4 = 1$; 523 — ИН $u_5 = 3$.
24. Цепь: 113 — ИТ $i_1 = 2$; 212 — $R_2 = 2$; 323 — $R_3 = 2$; 423 — ИН $u_4 = 2$.
25. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 1$; 213 — ИТ $i_2 = 7$; 331 — $R_3 = 2$; 412 — $R_4 = 1$; 532 — ИН $u_5 = 3$.

1.1.2. Найти входное сопротивление цепи $R_{вх}$ и указанные реакции, используя ФДН или ФДТ.

1. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 5$; 213 — R_2; 312 — R_3; 423 — R_4; 523 — R_5; $R_k = 2$. Найти i_k по ФДТ.
2. Цепь: 113 — R_1; 231 — ИТ $i_2 = 5$; 312 — R_3; 423 — R_4; 523 — R_5; $R_k = 4$. Найти i_k по ФДТ.
3. Цепь: 124 — ИТ $i_1 = 5$; 221 — R_2; 314 — R_3; 423 — R_4; 534 — R_5; $R_k = 1$. Найти i_k по ФДТ.
4. Цепь: 121 — ИТ $i_1 = 4$; 212 — R_2; 313 — R_3; 434 — R_4; 524 — R_5; $R_k = 1$. Найти i_k по ФДТ.
5. Цепь: 114 — R_1; 212 — R_2; 323 — R_3; 434 — R_4; 542 — ИТ $i_5 = 1$; $R_k = 1$. Найти i_k по ФДТ.
6. Цепь: 113 — R_1; 213 — R_2; 313 — R_3; 412 — R_4; 523 — ИН $u_5 = 4$; $R_k = 1$. Найти u_k по ФДН.
7. Цепь: 113 — R_1; 212 — R_2; 312 — R_3; 423 — R_4; 532 — ИТ $i_5 = 5$; $R_k = 3$. Найти i_k по ФДТ.
8. Цепь: 113 — R_1; 213 — R_2; 331 — ИТ $i_3 = 5$; 412 — R_4; 523 — R_5; $R_k = 6$. Найти i_k по ФДТ.
9. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 15$; 234 — R_2; 313 — R_3; 412 — R_4; 523 — R_5; $R_k = 3$. Найти u_k по ФДН.
10. Цепь: 112 — ИН $u_1 = 5$; 213 — R_2; 334 — R_3; 424 — R_4; 524 — R_5; $R_k = 1$. Найти u_k по ФДН.
11. Цепь: 113 — R_1; 212 — R_2; 323 — R_3; 432 — ИТ $i_4 = 5$; 523 — R_5; $R_k = 2$. Найти i_k по ФДТ.
12. Цепь: 112 — R_1; 212 — R_2; 312 — R_3; 423 — R_4; 513 — ИН $u_5 = 4$; $R_k = 3$. Найти u_k по ФДН.
13. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 5$; 213 — R_2; 312 — R_3; 423 — R_4; 523 — R_5; $R_k = 1$. Найти i_k по ФДТ.
14. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 4$; 212 — R_2; 312 — R_3; 423 — R_4; 523 — R_5; $R_k = 2$. Найти u_k по ФДН.
15. Цепь: 114 — R_1; 214 — R_2; 312 — R_3; 423 — R_4; 543 — ИН $u_5 = 3$; $R_k = 2$. Найти u_k по ФДН.
16. Цепь: 113 — R_1; 212 — R_2; 334 — R_3; 424 — R_4; 542 — ИТ $i_5 = 20$; $R_k = 2$. Найти i_k по ФДТ.
17. Цепь: 114 — R_1; 212 — R_2; 342 — ИТ $i_3 = 10$; 423 — R_4; 534 — R_5; $R_k = 1$. Найти i_k по ФДТ.
18. Цепь: 114 — R_1; 212 — ИН $u_2 = 10$; 324 — R_3; 423 — R_4; 534 — R_5; $R_k = 6$. Найти u_k по ФДН.

19. Цепь: 113 — R_1; 231 — ИТ $i_2 = 5$; 312 — R_3; 412 — R_4; 523 — R_5; $R_k = 1$. Найти i_k по ФДТ.
20. Цепь: 114 — R_1; 212 — R_2; 323 — R_3; 434 — R_4; 542 — ИТ $i_5 = 10$; $R_k = 1$. Найти i_k по ФДТ.
21. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 5$; 213 — R_2; 312 — R_3; 434 — R_4; 523 — R_5; $R_k = 3$. Найти u_k по ФДН.
22. Цепь: 113 — R_1; 213 — R_2; 331 — ИТ $i_3 = 5$; 412 — R_4; 523 — R_5; $R_k = 6$. Найти i_k по ФДТ.
23. Цепь: 113 — R_1; 234 — R_2; 314 — R_3; 412 — R_4; 524 — ИН $u_5 = 5$; $R_k = 3$. Найти u_k по ФДН.
24. Цепь: 113 — R_1; 231 — ИТ $i_2 = 10$; 312 — R_3; 423 — R_4; 523 — R_5; $R_k = 5$. Найти i_k по ФДТ.
25. Цепь: 114 — R_1; 212 — R_2; 312 — R_3; 423 — R_4; 543 — ИН $u_5 = 5$; $R_k = 4$. Найти u_k по ФДН.

1.1.3. Методом наложения *найти токи*, а напряжения — по ЗНК.

1. Цепь: 131 — ИН $u_1 = 4$; 231 — ИТ $i_2 = 2$; 312 — $R_3 = 1$; 432 — ИТ $i_4 = 8$; 523 — — $R_5 = 1$. Найти u_2, u_4.
2. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 10$; 231 — ИТ $i_2 = 4$; 312 — $R_3 = 3$; 423 — $R_4 = 2$; 523 — ИТ $i_5 = 5$. Найти u_2, u_5.
3. Цепь: 113 — $R_1 = 3$; 212 — ИН $u_2 = 5$; 312 — ИТ $i_3 = 3$; 423 — $R_4 = 2$; 523 — ИТ $i_5 = 5$. Найти u_3, u_5.
4. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 15$; 212 — $R_2 = 2$; 323 — $R_3 = 3$; 432 — ИТ $i_4 = 5$; 513 — ИТ $i_5 = 5$. Найти u_4, u_5.
5. Цепь: 113 — ИТ $i_1 = 1$; 212 — $R_2 = 2$; 332 — ИТ $i_3 = 10$; 423 — $R_4 = 3$; 531 — ИН $u_5 = 5$. Найти u_1, u_3.
6. Цепь: 113 — ИТ $i_1 = 10$; 213 — $R_2 = 2$; 312 — $R_3 = 3$; 423 — ИТ $i_4 = 4$; 532 — ИН $u_5 = 5$. Найти u_1, u_4.
7. Цепь: 113 — $R_1 = 3$; 212 — ИТ $i_2 = 10$; 312 — $R_3 = 2$; 432 — ИН $u_4 = 20$; 523 — ИТ $i_5 = 2$. Найти u_2, u_5.
8. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 3$; 213 — $R_2 = 1$; 321 — ИТ $i_3 = 9$; 412 — $R_4 = 2$; 523 — ИН $u_5 = 6$. Найти u_1, u_3.
9. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 6$; 213 — $R_2 = 2$; 312 — ИН $u_3 = 12$; 423 — $R_4 = 4$; 523 — ИТ $i_5 = 18$. Найти u_1, u_5.
10. Цепь: 121 — ИТ $i_1 = 2$; 212 — $R_2 = 2$; 323 — $R_3 = 2$; 413 — ИТ $i_4 = 2$; 523 — ИН $u_5 = 4$. Найти u_1, u_4.
11. Цепь: 112 — ИН $u_1 = 10$; 213 — $R_2 = 2$; 331 — ИТ $i_3 = 5$; 423 — ИТ $i_4 = 5$; 523 — — $R_5 = 3$. Найти u_3, u_4.

12. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 3$; 213 — $R_2 = 1$; 321 — ИН $u_3 = 3$; 432 — ИТ $i_4 = 9$; 523 — — $R_5 = 2$. Найти u_1, u_4.
13. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 10$; 212 — $R_2 = 1$; 321 — ИТ $i_3 = 6$; 432 — ИТ $i_4 = 4$; 523 — — $R_5 = 1$. Найти u_3, u_4.
14. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 10$; 212 — $R_2 = 2$; 324 — $R_3 = 3$; 432 — ИН $u_4 = 4$; 543 — ИТ $i_5 = 5$. Найти u_5, u_{13}.
15. Цепь: 112 — $R_1 = 2$; 213 — ИН $u_2 = 10$; 323 — $R_3 = 3$; 434 — ИН $u_4 = 1$; 542 — ИТ $i_5 = 5$. Найти u_5, u_{41}.
16. Цепь: 112 — ИН $u_1 = 10$; 214 — $R_2 = 2$; 324 — $R_3 = 3$; 443 — ИН $u_4 = 4$; 513 — ИТ $i_5 = 5$. Найти u_5, u_{32}.
17. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 5$; 212 — ИН $u_2 = 2$; 324 — $R_3 = 3$; 423 — $R_4 = 2$; 534 — ИН $u_5 = 10$. Найти u_1, u_{31}.
18. Цепь: 141 — ИН $u_1 = 10$; 243 — $R_2 = 2$; 313 — $R_3 = 3$; 412 — ИН $u_4 = 4$; 532 — ИТ $i_5 = 5$. Найти u_5, u_{24}.
19. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 5$; 213 — ИТ $i_2 = 4$; 312 — $R_3 = 3$; 423 — $R_4 = 2$; 523 — ИТ $i_5 = 5$. Найти u_2, u_5.
20. Цепь: 121 — ИН $u_1 = 14$; 224 — $R_2 = 2$; 313 — $R_3 = 1$; 443 — ИТ $i_4 = 14$; 514 — $R_5 = 5$. Найти u_4, u_{23}.
21. Цепь: 121 — ИН $u_1 = 10$; 213 — $R_2 = 2$; 323 — $R_3 = 3$; 424 — $R_4 = 4$; 543 — ИТ $i_5 = 5$. Найти u_5, u_{14}.
22. Цепь: 112 — $R_1 = 1$; 232 — ИН $u_2 = 8$; 313 — $R_3 = 3$; 434 — ИТ $i_4 = 4$; 514 — $R_5 = 5$. Найти u_4, u_{24}.
23. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 20$; 212 — $R_2 = 2$; 324 — $R_3 = 2$; 423 — $R_4 = 2$; 543 — ИТ $i_5 = 6$. Найти u_5, u_{13}.
24. Цепь: 114 — $R_1 = 2$; 212 — ИН $u_2 = 12$; 323 — ИН $u_3 = 12$; 434 — ИТ $i_4 = 10$; 524 — $R_5 = 2$. Найти u_4, u_{42}.
25. Цепь: 141 — ИН $u_1 = 12$; 212 — $R_2 = 2$; 324 — $R_3 = 2$; 432 — ИН $u_4 = 12$; 534 — ИТ $i_5 = 10$. Найти u_5, u_{13}.

1.1.4. Методом пропорциональных величин найти i_5, u_3, $G_{вх}$, G_{5-1}, H_{U3-1} в нечетных вариантах и i_3, u_5, $R_{вх}$, R_{5-1}, H_{I3-1} в четных вариантах.

В нечетных вариантах рассмотрена цепь: 114 — ИН $u_1 = 120$; 212 — R_2; 324 — R_3; 423 — R_4; 534 — R_5.

1. $R_k = 2$.
3. $R_2 = R_3 = 2$, $R_4 = R_5 = 1$.
5. $R_2 = 2$, $R_3 = R_4 = R_5 = 3$.
7. $R_2 = R_4 = R_5 = 2$, $R_3 = 4$.
9. $R_k = 3$.
11. $R_2 = R_3 = 4$, $R_4 = R_5 = 2$.
13. $R_2 = 4$, $R_3 = R_4 = R_5 = 6$.
15. $R_2 = R_4 = R_5 = 1$, $R_3 = 2$.
17. $R_k = 4$.
19. $R_2 = R_3 = 6$, $R_4 = R_5 = 3$.

21. $R_2 = 2$, $R_3 = R_4 = R_5 = 9$.
23. $R_2 = R_4 = R_5 = 4$, $R_3 = 8$.
25. $R_2 = R_3 = R_5 = 2$, $R_4 = 1$.

В четных вариантах рассмотрена цепь: 131 – ИТ $i_1 = 60$; 213 – R_2; 312 – R_3; 423 – R_4; 523 – R_5.

2. $R_k = 2$.
4. $R_2 = R_4 = R_5 = 2$, $R_3 = 1$.
6. $R_2 = 3$, $R_3 = R_4 = R_5 = 1$.
8. $R_2 = R_3 = 3$, $R_4 = R_5 = 6$.
10. $R_k = 3$.
12. $R_3 = 2$, $R_2 = R_4 = R_5 = 4$.
14. $R_2 = 6$, $R_3 = R_4 = R_5 = 2$.
16. $R_2 = R_3 = 6$, $R_4 = R_5 = 12$.
18. $R_k = 5$.
20. $R_3 = 3$, $R_2 = R_4 = R_5 = 6$.
22. $R_2 = 9$, $R_3 = R_4 = R_5 = 3$.
24. $R_2 = R_3 = 1$, $R_4 = R_5 = 2$.

1.1.5. Используя систему независимых уравнений Кирхгофа, найти токи ИН и R-элементов, напряжения ИТ.

1. Цепь: 131 – ИТ $i_1 = 5$; 213 – $R_2 = 2$; 321 – ИН $u_3 = 10$; 423 – $R_4 = 3$; 523 – ИТ $i_5 = 5$.
2. Цепь: 114 – ИН $u_1 = 2$; 212 – $R_2 = 1$; 342 – ИТ $i_3 = 3$; 423 – $R_4 = 1$; 534 – ИН $u_5 = 1$.
3. Цепь: 113 – ИН $u_1 = 2$; 231 – ИТ $i_2 = 3$; 312 – $R_3 = 1$; 423 – $R_4 = 1$; 532 – ИТ $i_5 = 4$.
4. Цепь: 131 – ИН $u_1 = 5$; 221 – $R_2 = 1$; 323 – $R_3 = 1$; 432 – ИТ $i_4 = 2$; 523 – $R_5 = 1$.
5. Цепь: 114 – ИН $u_1 = 2$; 212 – ИТ $i_2 = 4$; 324 – $R_3 = 1$; 423 – $R_4 = 1$; 543 – ИН $u_5 = 2$.
6. Цепь: 113 – $R_1 = 1$; 231 – ИТ $i_2 = 5$; 312 – ИН $u_3 = 5$; 423 – ИТ $i_4 = 5$; 523 – – $R_5 = 4$.
7. Цепь: 141 – $R_1 = 2$; 221 – ИН $u_2 = 4$; 324 – ИТ $i_3 = 2$; 432 – $R_4 = 2$; 543 – ИН $u_5 = 4$.
8. Цепь: 113 – ИТ $i_1 = 2$; 213 – ИН $u_2 = 2$; 312 – $R_3 = 2$; 423 – $R_4 = 2$; 532 – ИТ $i_5 = 3$.
9. Цепь: 114 – ИН $u_1 = 6$; 212 – $R_2 = 3$; 332 – $R_3 = 1$; 443 – ИТ $i_4 = 2$; 524 – $R_5 = 1$.
10. Цепь: 141 – $R_1 = 2$; 221 – ИН $u_2 = 8$; 324 – $R_3 = 1$; 423 – ИТ $i_4 = 1$; 534 – ИН $u_5 = 2$.
11. Цепь: 113 – ИТ $i_1 = 1$; 231 – $R_2 = 5$; 321 – ИН $u_3 = 5$; 423 – ИТ $i_4 = 5$; 523 – – $R_5 = 5$.
12. Цепь: 141 – ИН $u_1 = 2$; 221 – $R_2 = 1$; 342 – ИТ $i_3 = 5$; 432 – ИН $u_4 = 1$; 534 – – $R_5 = 1$.
13. Цепь: 131 – ИН $u_1 = 3$; 231 – ИТ $i_2 = 1$; 312 – $R_3 = 1$; 423 – ИТ $i_4 = 1$; 523 – – $R_5 = 1$.

14. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 2$; 213 — $R_2 = 2$; 313 — $R_3 = 1$; 412 — ИН $u_4 = 4$; 532 — $R_5 = 2$.
15. Цепь: 141 — ИН $u_1 = 1$; 221 — $R_2 = 1$; 332 — ИН $u_3 = 4$; 443 — ИТ $i_4 = 4$; 524 — — $R_5 = 2$.
16. Цепь: 113 — $R_1 = 4$; 213 — ИТ $i_2 = 1$; 312 — ИН $u_3 = 5$; 432 — ИТ $i_4 = 1$; 532 — — $R_5 = 1$.
17. Цепь: 114 — $R_1 = 2$; 212 — ИН $u_2 = 2$; 324 — ИТ $i_3 = 1$; 423 — ИН $u_4 = 8$; 543 — — $R_5 = 2$.
18. Цепь: 113 — ИТ $i_1 = 4$; 213 — $R_2 = 2$; 312 — $R_3 = 2$; 432 — ИН $u_4 = 4$; 523 — ИТ $i_5 = 4$.
19. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 2$; 243 — $R_2 = 2$; 314 — $R_3 = 1$; 421 — ИН $u_4 = 4$; 524 — $R_5 = 1$.
20. Цепь: 114 — $R_1 = 1$; 212 — $R_2 = 1$; 342 — ИН $u_3 = 4$; 413 — ИТ $i_4 = 2$; 534 — ИН $u_5 = 2$.
21. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 10$; 213 — $R_2 = 3$; 321 — ИН $u_3 = 5$; 423 — $R_4 = 2$; 532 — ИТ $i_5 = 5$.
22. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 5$; 212 — $R_2 = 1$; 342 — ИТ $i_3 = 5$; 432 — ИН $u_4 = 4$; 534 — — $R_5 = 1$.
23. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 3$; 231 — ИТ $i_2 = 1$; 312 — $R_3 = 1$; 423 — $R_4 = 1$; 523 — ИТ $i_5 = 1$.
24. Цепь: 131 — $R_1 = 1$; 221 — ИН $u_2 = 10$; 323 — $R_3 = 4$; 423 — ИТ $i_4 = 4$; 523 — — $R_5 = 4$.
25. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 6$; 212 — $R_2 = 1$; 323 — ИТ $i_3 = 2$; 434 — $R_4 = 2$; 524 — $R_5 = 1$.

1.1.6. Составить уравнения МКТ и МУН, считая все $R_k = 2$. Найти требуемую реакцию.

1. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 2$; 212 — R_2; 324 — ИН $u_3 = 2$; 413 — ИТ $i_4 = 2$; 535 — R_5; 634 — R_6; 754 — ИТ $i_7 = 2$; 845 — R_8. Найти i_2.
2. Цепь: 114 — ИТ $i_1 = 1$; 214 — R_2; 312 — R_3; 424 — ИН $u_4 = 2$; 523 — R_5; 635 — R_6; 713 — ИТ $i_7 = 1$; 845 — ИН $u_8 = 2$. Найти i_6.
3. Цепь: 115 — R_1; 212 — R_2; 324 — ИН $u_3 = 1$; 413 — ИТ $i_4 = 1$; 535 — R_5; 653 — ИТ $i_6 = 1$; 734 — R_7; 845 — ИН $u_8 = 1$. Найти i_2.
4. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 2$; 212 — R_2; 342 — ИН $u_3 = 2$; 413 — R_4; 535 — R_5; 634 — — ИТ $i_6 = 2$; 745 — R_7; 845 — ИТ $i_8 = 2$. Найти i_2.
5. Цепь: 114 — R_1; 241 — ИТ $i_2 = 2$; 312 — R_3; 415 — ИТ $i_4 = 2$; 532 — ИН $u_5 = 2$; 634 — R_6; 735 — ИН $u_7 = 2$; 845 — R_8. Найти i_3.
6. Цепь: 114 — R_1; 213 — R_2; 313 — ИТ $i_3 = 1$; 412 — R_4; 534 — ИН $u_5 = 2$; 625 — — ИН $u_6 = 2$; 735 — ИТ $i_7 = 1$; 845 — R_8. Найти i_4.
7. Цепь: 151 — ИТ $i_1 = 1$; 214 — ИТ $i_2 = 1$; 314 — R_3; 412 — ИН $u_4 = 1$; 523 — R_5; 643 — ИН $u_6 = 1$; 725 — R_7; 845 — R_8. Найти i_5.

8. Цепь: 115 — R_1; 214 — ИН $u_2 = 4$; 312 — R_3; 432 — ИН $u_4 = 4$; 535 — R_5; 634 — — ИТ $i_6 = 2$; 745 — R_7; 854 — ИТ $i_8 = 2$. Найти i_3.
9. Цепь: 115 — ИТ $i_1 = 2$; 215 — R_2; 314 — ИТ $i_3 = 2$; 412 — ИН $u_4 = 2$; 524 — R_5; 623 — R_6; 753 — ИН $u_7 = 2$; 845 — R_8. Найти i_6.
10. Цепь: 114 — R_1; 212 — R_2; 313 — ИН $u_3 = 2$; 423 — ИТ $i_4 = 1$; 523 — R_5; 625 — R_6; 745 — ИН $u_7 = 2$; 835 — ИТ $i_8 = 1$. Найти i_1.
11. Цепь: 115 — R_1; 213 — R_2; 312 — ИТ $i_3 = 1$; 452 — ИТ $i_4 = 1$; 525 — R_5; 623 — ИН $u_6 = 2$; 734 — R_7; 854 — ИН $u_8 = 2$. Найти i_7.
12. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 2$; 214 — R_2; 312 — ИТ $i_3 = 2$; 412 — R_4; 525 — ИТ $i_5 = 2$; 623 — R_6; 734 — ИН $u_7 = 2$; 845 — R_8. Найти i_6.
13. Цепь: 115 — R_1; 241 — ИТ $i_2 = 2$; 314 — R_3; 412 — R_4; 523 — ИН $u_5 = 2$; 634 — ИТ $i_6 = 2$; 753 — ИН $u_7 = 2$; 845 — R_8. Найти i_4.
14. Цепь: 115 — ИТ $i_1 = 2$; 214 — R_2; 312 — R_3; 423 — R_4; 534 — ИН $u_5 = 2$; 612 — ИТ $i_6 = 2$; 725 — R_7; 845 — ИН $u_8 = 2$. Найти i_4.
15. Цепь: 114 — R_1; 213 — ИН $u_2 = 2$; 312 — R_3; 423 — ИТ $i_4 = 1$; 523 — R_5; 652 — ИТ $i_6 = 1$; 745 — ИН $u_7 = 2$; 835 — R_8. Найти i_1.
16. Цепь: 115 — R_1; 251 — ИТ $i_2 = 2$; 313 — R_3; 412 — ИН $u_4 = 2$; 523 — R_5; 624 — R_6; 754 — ИН $u_7 = 2$; 853 — ИТ $i_8 = 2$. Найти i_6.
17. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 2$; 214 — R_2; 312 — R_3; 424 — R_4; 512 — ИТ $i_5 = 2$; 623 — R_6; 735 — ИН $u_7 = 2$; 845 — ИТ $i_8 = 2$. Найти i_6.
18. Цепь: 115 — R_1; 213 — ИТ $i_2 = 1$; 312 — R_3; 425 — R_4; 523 — ИН $u_5 = 4$; 625 — ИТ $i_6 = 1$; 745 — ИН $u_7 = 4$; 834 — R_8. Найти i_8.
19. Цепь: 151 — ИТ $i_1 = 1$; 215 — R_2; 312 — R_3; 413 — ИН $u_4 = 1$; 523 — R_5; 624 — R_6; 745 — ИН $u_7 = 1$; 853 — ИТ $i_8 = 1$. Найти i_6.
20. Цепь: 115 — R_1; 213 — ИТ $i_2 = 2$; 312 — ИН $u_3 = 2$; 452 — ИТ $i_4 = 2$; 525 — R_5; 623 — R_6; 754 — ИН $u_7 = 2$; 834 — R_8. Найти i_8.
21. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 4$; 214 — R_2; 314 — ИТ $i_3 = 2$; 412 — R_4; 523 — ИН $u_5 = 4$; 635 — R_6; 734 — ИТ $i_7 = 2$; 845 — R_8. Найти i_4.
22. Цепь: 114 — R_1; 213 — R_2; 312 — R_3; 423 — ИТ $i_4 = 1$; 523 — R_5; 625 — ИТ $i_6 = 1$; 754 — ИН $u_7 = 2$; 853 — ИН $u_8 = 2$. Найти i_1.
23. Цепь: 115 — R_1; 213 — R_2; 313 — ИТ $i_3 = 2$; 412 — R_4; 532 — ИН $u_5 = 2$; 624 — R_6; 745 — ИН $u_7 = 2$; 853 — ИТ $i_8 = 2$. Найти i_6.
24. Цепь: 151 — ИТ $i_1 = 1$; 214 — R_2; 312 — R_3; 432 — ИН $u_4 = 4$; 515 — R_5; 635 — R_6; 743 — ИТ $i_7 = 1$; 845 — ИН $u_8 = 4$. Найти i_3.
25. Цепь: 115 — R_1; 212 — R_2; 324 — ИН $u_3 = 4$; 413 — ИТ $i_4 = 1$; 534 — ИН $u_5 = 4$; 635 — R_6; 745 — R_7; 854 — ИТ $i_8 = 1$. Найти i_2.

1.1.7. Используя методы эквивалентных источников (и МЭИН, и МЭИТ), определить указанную реакцию цепи.

1. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 7$; 212 — $R_2 = 1$; 323 — $R_3 = 3$; 413 — ИТ $i_4 = 1$; 524 — $R_5 = 3$; 634 — $R_6 = 3$. Найти i_2.
2. Цепь: 114 — ИТ $i_1 = 4$; 214 — $R_2 = 1$; 321 — $R_3 = 2$; 423 — ИН $u_4 = 18$; 534 — ИТ $i_5 = 6$; 634 — $R_6 = 2$. Найти i_3.
3. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 6$; 212 — $R_2 = 2$; 323 — $R_3 = 1$; 413 — $R_4 = 2$; 524 — $R_5 = 2$; 634 — ИН $u_6 = 1$. Найти i_3.
4. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 2$; 212 — $R_2 = 1$; 324 — ИТ $i_3 = 3$; 424 — $R_4 = 1$; 523 — $R_5 = 1$; 643 — ИН $u_6 = 5$. Найти u_2.
5. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 18$; 212 — $R_2 = 3$; 323 — $R_3 = 2$; 413 — $R_4 = 6$; 524 — $R_5 = 6$; 634 — $R_6 = 3$. Найти i_3.
6. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 4$; 212 — $R_2 = 2$; 324 — ИТ $i_3 = 2$; 424 — $R_4 = 1$; 523 — $R_5 = 2$; 634 — ИН $u_6 = 4$. Найти u_4.
7. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 8$; 212 — $R_2 = 2$; 323 — $R_3 = 6$; 413 — $R_4 = 4$; 524 — $R_5 = 6$; 643 — ИН $u_6 = 4$. Найти i_2.
8. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 10$; 212 — $R_2 = 2$; 323 — $R_3 = 2$; 413 — ИТ $i_4 = 5$; 524 — — $R_5 = 2$; 634 — $R_6 = 2$. Найти i_5.
9. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 5$; 214 — $R_2 = 2$; 312 — $R_3 = 1$; 423 — ИН $u_4 = 10$; 534 — ИТ $i_5 = 5$; 634 — $R_6 = 2$. Найти u_2.
10. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 6$; 212 — $R_2 = 2$; 323 — $R_3 = 3$; 413 — $R_4 = 4$; 524 — $R_5 = 4$; 634 — $R_6 = 2$. Найти i_3.
11. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 4$; 212 — $R_2 = 2$; 323 — $R_3 = 2$; 413 — $R_4 = 2$; 524 — $R_5 = 2$; 634 — ИН $u_6 = 2$. Найти i_2.
12. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 8$; 212 — $R_2 = 2$; 342 — ИТ $i_3 = 3$; 424 — $R_4 = 2$; 523 — $R_5 = 2$; 634 — ИН $u_6 = 4$. Найти i_2.
13. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 4$; 214 — $R_2 = 1$; 312 — $R_3 = 1$; 432 — ИН $u_4 = 4$; 534 — $R_5 = 1$; 643 — ИТ $i_6 = 2$. Найти u_2.
14. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 6$; 212 — $R_2 = 1$; 332 — ИТ $i_3 = 3$; 413 — $R_4 = 1$; 524 — $R_5 = 1$; 634 — $R_6 = 1$. Найти i_2.
15. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 8$; 212 — $R_2 = 2$; 324 — ИТ $i_3 = 2$; 424 — $R_4 = 2$; 523 — $R_5 = 2$; 643 — ИН $u_6 = 4$. Найти i_5.
16. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 2$; 212 — $R_2 = 1$; 323 — $R_3 = 1$; 413 — $R_4 = 2$; 524 — $R_5 = 1$; 634 — ИН $u_6 = 4$. Найти i_5.
17. Цепь: 141 — ИН $u_1 = 2$; 212 — $R_2 = 2$; 324 — ИТ $i_3 = 1$; 424 — $R_4 = 1$; 523 — $R_5 = 2$; 634 — ИН $u_6 = 8$. Найти i_4.
18. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 8$; 212 — $R_2 = 2$; 323 — $R_3 = 1$; 413 — $R_4 = 2$; 524 — $R_5 = 1$; 634 — $R_6 = 2$. Найти i_2.

19. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 8$; 212 — $R_2 = 2$; 323 — $R_3 = 1$; 413 — ИТ $i_4 = 1$; 524 — $R_5 = 2$; 634 — $R_6 = 1$. Найти i_3.
20. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 3$; 214 — $R_2 = 1$; 312 — $R_3 = 1$; 423 — ИН $u_4 = 6$; 534 — $R_5 = 1$; 643 — ИТ $i_6 = 6$. Найти i_5.
21. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 3$; 212 — $R_2 = 1$; 323 — ИН $u_3 = 6$; 413 — $R_4 = 2$; 524 — $R_5 = 2$; 634 — $R_6 = 1$. Найти i_5.
22. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 24$; 212 — $R_2 = 2$; 323 — $R_3 = 3$; 413 — $R_4 = 6$; 524 — $R_5 = 3$; 634 — $R_6 = 6$. Найти i_2.
23. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 6$; 212 — $R_2 = 1$; 323 — $R_3 = 3$; 431 — ИТ $i_4 = 3$; 524 — $R_5 = 3$; 634 — $R_6 = 3$. Найти i_2.
24. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 6$; 213 — $R_2 = 4$; 312 — ИН $u_3 = 4$; 434 — $R_4 = 2$; 524 — $R_5 = 2$; 624 — ИТ $i_6 = 6$. Найти i_2.
25. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 12$; 212 — $R_2 = 2$; 323 — $R_3 = 2$; 413 — $R_4 = 1$; 524 — $R_5 = 4$; 634 — $R_6 = 2$. Найти i_4.

1.1.8. На рис. 1.2, *а* приведена схема цепи для нечетных вариантов, на рис. 1.2, *б* — для четных; на рис. 1.2, *в* — график воздействия, состоящего *из двух отдельно стоящих импульсов* (прямоугольной и треугольной форм) $f_1(t) = u_1(t)$ для схемы рис. 1.2, *а*, и $f_1(t) = i_1(t)$ для схемы рис. 1.2, *б*. Параметры накопителей и значения $f_1(t)$ указаны в вариантах задачи (здесь t_1 и t_2, t_3 и t_4 — *моменты начала и конца каждого из импульсов*). Для схем рис. 1.2, *а* найти аналитическое выражение реакции $i_L(t)$, для рис. 1.2, *б* — $u_C(t)$; построить график реакции и проконтролировать его значения в указанные моменты времени t_k, рассчитав *площадь* под графиком $f_1(t)$; начальные условия принять нулевыми.

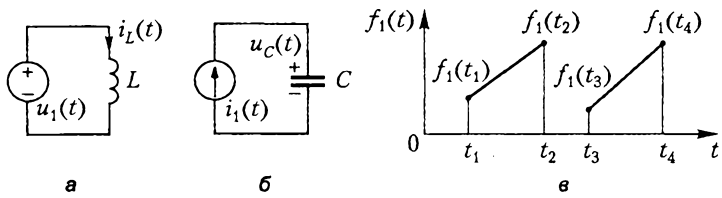


Рис. 1.2

1. $L = 2$; $u_1(0) = 8$; $u_1(1) = 0$; $u_1(3) = 8$; $u_1(4) = 8$.
2. $C = 2$; $i_1(0) = -8$; $i_1(1) = 0$; $i_1(3) = 8$; $i_1(4) = 8$.
3. $L = 2$; $u_1(0) = 8$; $u_1(1) = 0$; $u_1(3) = -8$; $u_1(4) = -8$.
4. $C = 2$; $i_1(0) = 4$; $i_1(1) = 0$; $i_1(2) = 4$; $i_1(3) = 4$.
5. $L = 2$; $u_1(0) = 4$; $u_1(1) = 4$; $u_1(2) = 0$; $u_1(3) = 4$.
6. $C = 0{,}5$; $i_1(0) = 2$; $i_1(1) = 2$; $i_1(2) = -2$; $i_1(3) = 0$.
7. $L = 0{,}5$; $u_1(0) = 3$; $u_1(1) = 3$; $u_1(2) = 0$; $u_1(3) = -3$.

8. $C = 2$; $i_1(0) = 4$; $i_1(1) = 4$; $i_1(2) = 4$; $i_1(3) = 0$.
9. $L = 2$; $u_1(0) = 4$; $u_1(2) = 0$; $u_1(4) = 4$; $u_1(6) = 4$.
10. $C = 2$; $i_1(0) = 8$; $i_1(1) = 0$; $i_1(2) = -8$; $i_1(3) = -8$.
11. $L = 2$; $u_1(1) = 0$; $u_1(2) = 4$; $u_1(3) = 4$; $u_1(4) = 4$.
12. $C = 0{,}5$; $i_1(1) = -2$; $i_1(2) = 0$; $i_1(3) = 2$; $i_1(4) = 2$.
13. $L = 0{,}5$; $u_1(1) = 0$; $u_1(2) = 2$; $u_1(3) = -2$; $u_1(4) = -2$.
14. $C = 2$; $i_1(1) = 4$; $i_1(2) = 0$; $i_1(3) = -4$; $i_1(4) = -4$.
15. $L = 0{,}5$; $u_1(1) = 3$; $u_1(2) = 3$; $u_1(3) = 0$; $u_1(4) = -3$.
16. $C = 0{,}5$; $i_1(0) = -3$; $i_1(1) = 0$; $i_1(3) = 3$; $i_1(4) = 3$.
17. $L = 0{,}5$; $u_1(0) = 5$; $u_1(1) = 0$; $u_1(3) = -5$; $u_1(4) = -5$.
18. $C = 0{,}5$; $i_1(0) = -5$; $i_1(1) = 0$; $i_1(2) = 5$; $i_1(4) = 5$.
19. $L = 0{,}5$; $u_1(0) = 2$; $u_1(1) = 0$; $u_1(2) = 2$; $u_1(4) = 2$.
20. $C = 2$; $i_1(0) = 4$; $i_1(1) = 4$; $i_1(3) = 0$; $i_1(4) = 4$.
21. $L = 2$; $u_1(0) = 4$; $u_1(1) = 4$; $u_1(3) = 4$; $u_1(4) = 0$.
22. $C = 0{,}5$; $i_1(0) = 2$; $i_1(2) = 0$; $i_1(3) = 2$; $i_1(4) = 2$.
23. $L = 0{,}5$; $u_1(0) = 2$; $u_1(2) = 0$; $u_1(3) = -2$; $u_1(4) = -2$.
24. $C = 0{,}5$; $i_1(0) = -3$; $i_1(2) = 0$; $i_1(3) = 3$; $i_1(4) = 3$.
25. $L = 0{,}5$; $u_1(0) = 3$; $u_1(1) = 3$; $u_1(2) = 0$; $u_1(4) = 3$.

1.1.9. Цепь: 171 — ИТ $i_1 = 2$; 212 — $R_2 = 3$; 372 — ИН $u_3 = 4$; 431 — ИН $u_4 = N$ (здесь N — номер варианта); 534 — XX; 676 — $R_6 = N$; 746 — $R_7 = N$; 845 — $R_8 = N$; 956 — ИН $u_9 = 4$. Найти напряжение на оборванном участке цепи (напряжение холостого хода) $u_5 = u_{XX}$.

1.1.10. Цепь: 114 — ИН $u_1 = N$ (здесь N — номер варианта); 212 — R_2; 324 — R_3; 413 — R_4; 534 — R_5; 623 — R_6; $R_k = N$. Найти входное сопротивление $R_{вх}$, входной ток $i_{вх} = i_1$ и ток i_6. При расчете мостового соединения использовать: 1) эквивалентное преобразование соединений треугольником и звездой; 2) очевидные условия работы для резистора R_6 учитывая, что «мост» симметричен.

1.1.11. Решить задачу 1.1.5 методом определяющих величин.

1.1.12. Цепь: 113 — $L_1 = N$ (здесь N — номер варианта); 213 — $L_2 = N$; 312 — $L_3 = N$; 423 — ИН с импульсным напряжением $u_4(t)$ в форме равнобедренного треугольника, действующего в интервале $0 < t < 2$ со значениями $u_4(0) = 0 = u_4(2)$, $u_4(1) = 6N$. Найти u_1, i_1, W_1 к середине и моменту окончания импульса. Начальные условия считать нулевыми.

1.1.13. Решить задачу 1.1.12, заменив L-элементы C-элементами, причем $C_k = N$, где N — номер варианта.

1.1.14. Перенумеровать элементы, составить упорядоченный граф цепи и по нему – матрицы (A), (Q), (B), (F).

1. 151 – ИН; 215 – ИТ; 312 – R; 423 – R; 524 – R; 634 – ИТ; 754 – R.
2. 121 – ИН; 214 – ИТ; 314 – R; 423 – R; 523 – ИТ; 634 – R.
3. 114 – ИН; 212 – R; 342 – ИТ; 442 – R; 532 – ИН; 643 – ИТ.
4. 141 – ИН; 212 – R; 324 – ИТ; 424 – R; 532 – ИТ; 634 – R.
5. 113 – ИН; 213 – R; 312 – R; 423 – R; 532 – ИТ.
6. 114 – ИТ; 214 – R; 312 – ИН; 423 – R; 523 – ИТ; 634 – R.
7. 114 – ИН; 212 – R; 342 – ИТ; 423 – R; 534 – R; 634 – ИТ.
8. 114 – ИТ; 214 – R; 312 – ИН; 423 – R; 532 – ИТ; 634 – R.
9. 114 – ИН; 212 – R; 324 – ИТ; 424 – R; 523 – ИН; 634 – R.
10. 114 – ИН; 214 – R; 312 – R; 432 – ИН; 534 – R; 643 – ИТ.
11. 141 – ИТ; 212 – R; 342 – ИН; 423 – R; 543 – ИТ; 634 – R.
12. 141 – ИН; 221 – ИТ; 312 – R; 424 – R; 532 – ИН; 634 – R.
13. 114 – ИН; 212 – R; 321 – ИТ; 423 – ИН; 524 – R; 634 – R.
14. 132 – ИН; 212 – R; 314 – ИН; 434 – R; 515 – R; 653 – ИН.
15. 141 – ИН; 214 – ИТ; 312 – R; 423 – R; 532 – ИТ; 643 – ИН.
16. 114 – ИТ; 214 – R; 321 – ИН; 432 – R; 532 – ИТ; 634 – R.
17. 141 – ИН; 221 – ИТ; 321 – R; 424 – R; 532 – ИН; 634 – ИТ.
18. 114 – ИН; 214 – R; 312 – R; 423 – R; 532 – ИТ; 643 – ИН.
19. 115 – ИН; 212 – R; 325 – R; 432 – ИН; 534 – ИТ; 645 – R.
20. 114 – ИН; 212 – R; 323 – R; 434 – ИТ; 525 – R; 654 – ИН.
21. 114 – ИН; 214 – ИТ; 312 – R; 423 – R; 523 – ИТ; 643 – ИН.
22. 114 – ИТ; 214 – R; 312 – ИН; 423 – R; 523 – ИТ; 634 – R.
23. 125 – ИН; 212 – R; 313 – R; 435 – ИН; 514 – ИН; 645 – ИТ.
24. 114 – ИН; 212 – R; 342 – ИТ; 424 – R; 523 – R; 643 – ИТ.
25. 113 – ИН; 213 – R; 312 – R; 421 – ИТ; 523 – R; 632 – ИТ.

1.1.15. По схеме задачи 1.1.2: 1) найти изменение реакции $\Delta f_2 = \Delta u_4$ при изменении сопротивления резистора R_k в n раз по теореме компенсации и непосредственным расчетом (здесь R_k – резистор с наибольшим порядковым номером, n – любое «удобное» число); 2) найти функцию абсолютной чувствительности $T_{f_2}^{R_k}$ по присоединенной цепи (ПЦ) на основании теоремы компенсации и по ПЦ на основании теоремы Теледжена; проконтролировать результат непосредственным расчетом.

1.2. Расчет переходных процессов во временной области при постоянных и произвольных воздействиях

1.2.1. В момент $t = 0$ цепь при *нулевых* независимых начальных условиях подключается к источнику с помощью ключа К. Найти для указанной реакции $f_2(0+)$, $f_{2п}$, $f_2(t)$ при $t > 0$; построить график $f_2(t)$.

1. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 30$; 212 — К, замыкается; 323 — R_3; 435 — R_4; 534 — $C_5 = 5$; 634 — R_6; 745 — R_7; $R_k = 2$. Найти i_7.
2. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 4$; 213 — К, размыкается; 313 — $R_3 = 1$; 412 — $R_4 = 1$; 523 — — $L_5 = 2$; 623 — $R_6 = 2$. Найти u_4.
3. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 6$; 212 — К, замыкается; 323 — R_3; 435 — R_4; 534 — КЗ; 645 — $C_6 = 3$; 745 — R_7; $R_k = 2$. Найти i_5.
4. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 4$; 213 — К, размыкается; 313 — $R_3 = 1$; 412 — $R_4 = 2$; 524 — — $C_5 = 1$; 643 — $R_6 = 1$. Найти u_{23}.
5. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 18$; 212 — К, замыкается; 324 — $R_3 = 4$; 423 — $R_4 = 1$; 535 — $R_5 = 2$; 634 — $L_6 = 6$; 745 — $R_7 = 2$. Найти i_3.
6. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 15$; 213 — R_2; 313 — К, размыкается; 412 — R_4; 512 — $C_5 = 3$; 623 — R_6; $R_k = 2$. Найти u_6.
7. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 12$; 212 — К, замыкается; 323 — R_3; 435 — R_4; 534 — $L_5 = 1$; 645 — R_6; $R_k = 2$. Найти i_4.
8. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 15$; 214 — К, размыкается; 312 — $L_3 = 10$; 413 — R_4; 523 — — R_5; 624 — R_6; 734 — R_7; $R_k = 2$. Найти i_6.
9. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 15$; 212 — К, замыкается; 324 — $R_3 = 1$; 423 — $R_4 = 2$; 534 — $C_5 = 3$; 635 — $R_6 = 1$; 745 — $R_7 = 2$. Найти u_7.
10. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 4$; 213 — К, размыкается; 313 — $R_3 = 2$; 412 — $R_4 = 1$; 524 — — $C_5 = 2$; 624 — $R_6 = 4$; 743 — $R_7 = 1$. Найти u_{14}.
11. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 24$; 212 — К, замыкается; 323 — R_3; 435 — R_4; 534 — R_5; 645 — $L_6 = 6$; 745 — R_7; $R_k = 2$. Найти i_5.
12. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 15$; 214 — R_2; 314 — К, размыкается; 413 — R_4; 512 — $C_5 =$ $= 3$; 623 — R_6; 734 — R_7; $R_k = 2$. Найти u_4.
13. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 18$; 212 — К, замыкается; 323 — $R_3 = 1$; 424 — $R_4 = 4$; 534 — $C_5 = 2$; 635 — $R_6 = 2$; 745 — $R_7 = 2$. Найти u_6.

14. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 30$; 214 — R_2; 314 — К, размыкается; 412 — R_4; 524 — R_5; 623 — $L_6 = 10$; 734 — R_7; $R_k = 2$. Найти u_5.
15. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 6$; 212 — К, замыкается; 323 — R_3; 435 — R_4; 534 — КЗ; 645 — $L_6 = 2$; 745 — R_7; $R_k = 2$. Найти i_5.
16. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 15$; 212 — К, замыкается; 323 — R_3; 435 — R_4; 534 — R_5; 645 — $C_6 = 5$; 745 — R_7; $R_k = 2$. Найти u_5.
17. Цепь: 161 — $R_1 = 1$; 221 — ИН $u_2 = 12$; 323 — К, замыкается; 434 — $R_4 = 1$; 545 — $R_5 = 2$; 656 — $C_6 = 2$; 746 — $R_7 = 2$. Найти u_{35}.
18. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 8$; 213 — $R_2 = 2$; 313 — К, размыкается; 412 — $R_4 = 1$; 524 — — $R_5 = 4$; 624 — $L_6 = 2$; 743 — $R_7 = 1$. Найти u_{14}.
19. Цепь: 121 — ИН $u_1 = 6$; 223 — К, замыкается; 335 — R_3; 434 — $C_4 = 1$; 545 — R_5; 651 — R_6; $R_k = 2$. Найти u_3.
20. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 15$; 214 — К, размыкается; 314 — R_3; 412 — R_4; 523 — $L_5 =$ $= 10$; 613 — R_6; 734 — R_7; $R_k = 2$. Найти i_7.
21. Цепь: 121 — ИН $u_1 = 18$; 223 — $R_2 = 1$; 324 — $R_3 = 4$; 434 — $L_4 = 1$; 535 — $R_5 = 2$; 645 — $R_6 = 2$; 751 — К, замыкается. Найти i_3.
22. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 3$; 214 — К, размыкается; 312 — $C_3 = 3$; 413 — R_4; 523 — R_5; 624 — R_6; 734 — R_7; $R_k = 2$. Найти u_6.
23. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 8$; 214 — К, размыкается; 312 — $R_3 = 1$; 413 — $R_4 = 3$; 523 — — $L_5 = 2$; 624 — $R_6 = 2$; 734 — $R_7 = 2$. Найти u_6.
24. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 30$; 214 — К, размыкается; 314 — R_3; 412 — R_4; 523 — R_5; 634 — $C_6 = 3$; 724 — R_7; $R_k = 2$. Найти u_7.
25. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 6$; 212 — К, замыкается; 323 — R_3; 434 — $L_4 = 4$; 534 — R_5; 645 — R_6; $R_k = 2$. Найти u_{35}.

1.2.2. В момент $t = 0$ в цепи замыкается (размыкается) ключ К. Определить независимые начальные условия и найти для указанной реакции $f_2(0+)$, $f_{2\text{п}}$, $f_2(t)$ при $t > 0$; построить график $f_2(t)$.

1. Цепь: 116 — ИН $u_1 = 24$; 212 — $R_2 = 2$; 324 — $R_3 = 2$; 423 — $L_4 = 3$; 535 — $R_5 = 2$; 665 — ИН $u_6 = 12$; 746 — К, замыкается. Найти u_3.
2. Цепь: 114 — ИТ $i_1 = 8$; 214 — $R_2 = 2$; 313 — $R_3 = 3$; 424 — $R_4 = 2$; 512 — $R_5 = 4$; 612 — $L_6 = 6$; 734 — К, размыкается. Найти u_L.
3. Цепь: 116 — ИН $u_1 = 10$; 212 — $C_2 = 3$; 323 — $R_3 = 2$; 435 — $R_4 = 4$; 534 — $R_5 = 4$; 646 — ИН $u_6 = 4$; 756 — К, замыкается. Найти i_4.
4. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 9$; 212 — $R_2 = 3$; 345 — $R_3 = 1$; 424 — $R_4 = 1$; 523 — $R_5 = 1$; 634 — $L_6 = 1{,}5$; 712 — К, замыкается. Найти i_3.
5. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 24$; 212 — $R_2 = 4$; 323 — $R_3 = 3$; 424 — $R_4 = 6$; 534 — $L_5 = 3$; 645 — $R_6 = 6$; 712 — К, замыкается. Найти u_4.

6. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 6$; 214 — $R_2 = 4$; 314 — $C_3 = 3$; 412 — $R_4 = 2$; 523 — ИН $u_5 = 12$; 634 — $R_6 = 2$; 712 — К, размыкается. Найти i_6.
7. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 6$; 223 — $R_2 = 2$; 323 — $L_3 = 0{,}5$; 412 — $R_4 = 1$; 534 — ИТ $i_5 = 6$; 634 — $R_6 = 1$; 712 — К, размыкается. Найти i_1.
8. Цепь: 151 — ИТ $i_1 = 24$; 215 — $R_2 = 2$; 312 — $R_3 = 2$; 423 — $R_4 = 2$; 534 — $R_5 = 2$; 625 — $C_6 = 0,125$; 745 — $L_7 = 1$; 835 — К, замыкается. Найти i_3.
9. Цепь: 121 — ИТ $i_1 = 18$; 214 — $R_2 = 2$; 313 — $R_3 = 2$; 442 — $L_4 = 1$; 532 — ИН $u_5 = 12$; 625 — $R_6 = 2$; 715 — К, замыкается. Найти i_3.
10. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 24$; 212 — $R_2 = 2$; 325 — $R_3 = 2$; 435 — $R_4 = 4$; 545 — $R_5 = 4$; 623 — $L_6 = 1$; 745 — $C_7 = 0{,}5$; 834 — К, размыкается. Найти u_3, i_C.
11. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 9$; 212 — $R_2 = 1$; 324 — $R_3 = 1$; 413 — $R_4 = 1$; 534 — $C_5 = 0{,}5$; 623 — К, замыкается. Найти u_2.
12. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 3$; 212 — $R_2 = 2$; 313 — $R_3 = 2$; 424 — $R_4 = 2$; 534 — $C_5 = 1/3$; 623 — К, размыкается. Найти i_2.
13. Цепь: 141 — ИН $u_1 = 8$; 212 — $R_2 = 2$; 313 — $R_3 = 2$; 424 — $R_4 = 1$; 534 — $L_5 = 4$; 623 — К, замыкается. Найти i_3.
14. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 12$; 212 — $R_2 = 3$; 313 — $R_3 = 1$; 424 — $R_4 = 1$; 534 — $R_5 = 3$; 634 — $C_6 = 0{,}8$; 723 — К, размыкается. Найти i_2.
15. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 15$; 212 — $R_2 = 2$; 324 — $R_3 = 2$; 413 — $R_4 = 2$; 525 — $R_5 = 2$; 634 — $C_6 = 3$; 735 — К, замыкается. Найти i_4.
16. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 36$; 212 — $R_2 = 2$; 325 — $R_3 = 2$; 423 — $R_4 = 1$; 534 — $R_5 = 1$; 634 — $L_6 = 0{,}25$; 745 — К, размыкается. Найти i_5.
17. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 15$; 212 — $R_2 = 3$; 324 — $R_3 = 3$; 413 — $R_4 = 3$; 525 — $R_5 = 3$; 634 — $L_6 = 3$; 735 — К, размыкается. Найти u_4.
18. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 16$; 212 — $R_2 = 4$; 325 — $R_3 = 4$; 423 — $R_4 = 2$; 545 — $R_5 = 4$; 635 — $C_6 = 1$; 734 — К, замыкается. Найти u_3.
19. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 12$; 212 — $R_2 = 2$; 324 — $R_3 = 2$; 424 — $C_4 = 3$; 543 — ИТ $i_5 = 6$; 634 — $R_6 = 2$; 723 — К, замыкается. Найти i_6.
20. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 12$; 212 — $R_2 = 4$; 323 — $L_3 = 3$; 443 — $R_4 = 2$; 543 — ИТ $i_5 = 6$; 634 — К, размыкается. Найти i_4.
21. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 10$; 212 — $R_2 = 2$; 324 — $R_3 = 2$; 424 — $L_4 = 4$; 534 — $R_5 = 2$; 634 — ИТ $i_6 = 6$; 723 — К, замыкается. Найти i_2.
22. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 3$; 214 — $R_2 = 2$; 312 — $C_3 = 1/3$; 423 — $R_4 = 4$; 534 — ИН $u_5 = 5$; 614 — К, размыкается. Найти u_2.
23. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 12$; 223 — $R_2 = 2$; 335 — $R_3 = 2$; 434 — ИТ $i_4 = 12$; 534 — $R_5 = 2$; 645 — $C_6 = 1/6$; 712 — К, замыкается. Найти i_3.
24. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 6$; 214 — $R_2 = 2$; 312 — $R_3 = 2$; 424 — $L_4 = 4$; 523 — $R_5 = 2$; 634 — ИН $u_6 = 6$; 714 — К, размыкается. Найти u_3.

25. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 6$; 214 — $R_2 = 1$; 312 — $R_3 = 1$; 423 — $R_4 = 1$; 524 — $C_5 = 3$; 634 — ИН $u_6 = 3$; 714 — К, размыкается. Найти i_2.

1.2.3. При $t = 0$ в цепи замыкается (размыкается) ключ К. Найти независимые начальные условия, составить уравнения состояния. Для $t > 0$ найти u_C и i_L, использовав аналитическое решение уравнений состояния, а также численное — по методу Эйлера. Затем найти u_L и i_C, использовав уравнения связи, и провести проверку полученных результатов (по ВАХ накопителей).

1. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 6$; 212 — $R_2 = 1$; 323 — $R_3 = 1$; 435 — $L = 1$; 524 — К, размыкается; 645 — $R_6 = 1$; 725 — $C = 1$; 825 — ИТ $i_8 = 3$.
2. Цепь: 116 — ИН $u_1 = 1$; 212 — $R_2 = 1$; 323 — $C = 0{,}5$; 435 — К, размыкается; 556 — — $R_5 = 1$; 634 — $L = 1$; 746 — $R_7 = 1$; 846 — ИТ $i_8 = 4$.
3. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 4$; 213 — $R_2 = 1$; 312 — $L = 4$; 412 — $C = 0{,}25$; 523 — К, размыкается; 623 — $R_6 = 1$; 723 — ИТ $i_7 = 2$.
4. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 4$; 212 — $L = 4$; 325 — $C = 0{,}25$; 423 — $R_4 = 1$; 532 — ИТ $i_5 = 8$; 634 — $R_6 = 1$; 745 — К, замыкается.
5. Цепь: 151 — ИТ $i_1 = 6$; 215 — $R_2 = 1$; 312 — $L = 0{,}5$; 425 — $C = 0{,}5$; 523 — $R_5 = 1$; 634 — К, замыкается; 745 — ИН $u_7 = 2$.
6. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 6$; 212 — $L = 2{,}5$; 324 — $C = 0{,}1$; 423 — $R_4 = 1$; 534 — $R_5 = 1$; 634 — К, размыкается; 743 — ИТ $i_7 = 6$.
7. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 2$; 214 — $R_2 = 4/3$; 314 — $L = 1$; 412 — К, замыкается; 524 — — $C = 0{,}25$; 623 — $R_6 = 4$; 734 — ИН $u_7 = 4$.
8. Цепь: 151 — ИТ $i_1 = 6$; 212 — $L = 1$; 325 — $R_3 = 1$; 415 — $C = 1$; 513 — К, замыкается; 634 — $R_6 = 1$; 745 — ИН $u_7 = 4$.
9. Цепь: 116 — ИН $u_1 = 9$; 212 — $R_2 = 3$; 325 — $L = 0{,}5$; 456 — $C = 1$; 523 — $R_5 = 3$; 634 — К, замыкается; 746 — ИН $u_7 = 3$.
10. Цепь: 151 — ИТ $i_1 = 10$; 215 — $C = 1$; 312 — $R_3 = 1$; 425 — $R_4 = 1$; 523 — $L = 1$; 634 — К, замыкается; 745 — ИН $u_7 = 5$.
11. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 4$; 212 — $R_2 = 1$; 312 — К, замыкается; 423 — $R_4 = 0{,}5$; 553 — ИТ $i_5 = 4$; 654 — $R_6 = 0{,}5$; 734 — $L = 1$; 834 — $C = 0{,}5$.
12. Цепь: 115 — $R_1 = 1$; 212 — К, замыкается; 352 — ИТ $i_3 = 4$; 425 — $C = 1$; 523 — — $L = 1$; 634 — $R_6 = 1$; 745 — ИН $u_7 = 2$.
13. Цепь: 151 — ИТ $i_1 = 2$; 215 — $R_2 = 1$; 315 — $C = 1$; 412 — К, замыкается; 523 — — $R_5 = 1$; 643 — $L = 1$; 745 — ИН $u_7 = 8$.
14. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 2$; 214 — $L = 1$; 321 — $C = 0{,}5$; 423 — $R_4 = 2$; 534 — $R_5 = 1$; 643 — ИТ $i_6 = 2$; 734 — К, размыкается.
15. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 9$; 212 — $R_2 = 5$; 324 — $R_3 = 5$; 445 — $R_4 = 5$; 524 — К, замыкается; 632 — $L = 0{,}5$; 735 — $C = 0{,}5$; 853 — ИТ $i_8 = 1{,}8$.

16. Цепь: 115 — $L = 0{,}5$; 212 — К, замыкается; 312 — $R_3 = 1$; 452 — ИТ $i_4 = 6$; 525 — — $R_5 = 1$; 623 — $R_6 = 1$; 743 — $C = 0{,}5$; 845 — ИН $u_8 = 6$.
17. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 2$; 214 — $C = 0{,}1$; 312 — $R_3 = 6$; 423 — $L = 2$; 534 — К, размыкается; 634 — $R_6 = 6$; 743 — ИТ $i_7 = 4$.
18. Цепь: 116 — ИН $u_1 = 4$; 212 — $L = 1$; 323 — $R_3 = 1$; 436 — $C = 1$; 524 — К, замыкается; 645 — $R_6 = 1$; 756 — ИН $u_7 = 2$.
19. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 6$; 212 — $R_2 = 1$; 323 — $R_3 = 1$; 423 — К, замыкается; 535 — — $C = 1$; 645 — $L = 1$; 734 — $R_7 = 1$; 843 — ИТ $i_8 = 3$.
20. Цепь: 115 — $R_1 = 1$; 221 — $C = 1$; 352 — ИТ $i_3 = 3$; 425 — $R_4 = 1$; 523 — К, замыкается; 643 — $L = 1$; 745 — ИН $u_7 = 6$.
21. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 4$; 212 — $R_2 = 2$; 325 — $L = 0{,}5$; 425 — $C = 0{,}25$; 523 — К, замыкается; 634 — $R_6 = 1$; 745 — ИН $u_7 = 2$.
22. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 1$; 214 — $C = 0{,}25$; 312 — $R_3 = 2$; 423 — $L = 1$; 534 — $R_5 = 2$; 643 — ИТ $i_6 = 1$; 734 — К, размыкается.
23. Цепь: 151 — ИТ $i_1 = 9$; 215 — $R_2 = 0{,}2$; 313 — $R_3 = 0{,}2$; 412 — $R_4 = 0{,}2$; 523 — К, размыкается; 635 — $C = 0{,}5$; 734 — $L = 0{,}5$; 854 — ИН $u_8 = 1{,}8$.
24. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 2$; 212 — $L = 0{,}5$; 325 — $R_3 = 1$; 425 — $C = 0{,}25$; 523 — К, замыкается; 634 — $R_6 = 2$; 754 — ИН $u_7 = 4$.
25. Цепь: 116 — ИН $u_1 = 8$; 212 — $R_2 = 2$; 323 — К, замыкается; 434 — $L = 4$; 546 — — $R_5 = 6$; 635 — $C = 1$; 756 — ИН $u_7 = 4$.

1.2.4. Найти $h_1(t)$, $h(t)$ и $h_2(t)$ для указанной реакции $f_2(t)$; построить графики $h_1(t)$ и $h(t)$. Вычислить $f_2(t)$ для воздействия $f_1(t)$, заданного аналитически в вариантах задачи 1.2.4 и графически в виде *импульса треугольной формы* в соответствующих вариантах задачи 1.1.8.

1. Цепь: 113 — ИН $u_1 = f_1 = [3 + 3\exp(-t)]\delta_1(t)$; 212 — R_2; 312 — R_3; 423 — $C_4 = 3$; 523 — R_5; $R_k = 1$; $f_2 = i_3$.
2. Цепь: 113 — ИТ $i_1 = f_1 = 9\exp(-t/3)\delta_1(t)$; 213 — R_2; 312 — R_3; 423 — R_4; 513 — — $L_5 = 4$; $R_k = 2$; $f_2 = u_4$.
3. Цепь: 114 — ИН $u_1 = f_1 = [2 - 2\exp(-t)]\delta_1(t)$; 212 — R_2; 323 — $C_3 = 1$; 434 — R_4; 534 — R_5; $R_k = 2$; $f_2 = u_{13}$.
4. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = f_1 = 9\exp(-2t)\delta_1(t)$; 213 — R_2; 312 — $L_3 = 6$; 423 — R_4; 523 — R_5; $R_k = 2$; $f_2 = u_2$.
5. Цепь: 114 — R_1; 212 — R_2; 324 — ИН $u_3 = f_1 = [3 - 3\exp(-t)\delta_1(t)$; 413 — $L_4 = 3$; 534 — R_5; $R_k = 1$; $f_2 = i_1$.
6. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = f_1 = 3\exp(-3t)\delta_1(t)$; 213 — R_2; 312 — $C_3 = 1$; 423 — R_4; 523 — — R_5; $R_k = 2$; $f_2 = u_2$.
7. Цепь: 115 — ИН $u_1 = f_1 = 12\exp(-t)\delta_1(t)$; 212 — R_2; 324 — R_3; 454 — R_4; 524 — — $L_5 = 2$; $R_k = 1$; $f_2 = u_{25}$.

8. Цепь: 131—ИТ $i_1 = f_1 = 6\exp(-t)\delta_1(t)$; 213 — R_2; 312 — $C_3 = 1$; 423 — R_4; 513 — — R_5; $R_k = 1$; $f_2 = u_5$.
9. Цепь: 114—ИН $u_1 = f_1 = [9 - 9\exp(-t)]\delta_1(t)$; 212 — R_2; 323 — R_3; 424 — $C_4 = 3$; 534 — R_5; $R_k = 2$; $f_2 = u_{13}$.
10. Цепь: 141—ИТ $i_1 = f_1 = 3\exp(-t)\delta_1(t)$; 214 — R_2; 312 — R_3; 424 — R_4; 523 — R_5; 634 — $L_6 = 2$; $R_k = 1$; $f_2 = u_4$.
11. Цепь: 114—ИН $u_1 = f_1 = 12\exp(-2t)\delta_1(t)$; 212 — R_2; 324 — R_3; 423 — $C_4 = 1$; 534 — R_5; $R_k = 1$; $f_2 = i_3$.
12. Цепь: 141—ИТ $i_1 = f_1 = [6 - 3\exp(-t)]\delta_1(t)$; 212 — R_2; 324 — R_3; 413 — R_4; 534 — $L_5 = 3$; $R_k = 2$; $f_2 = u_3$.
13. Цепь: 113—ИН $u_1 = f_1 = 30\exp(-2t)\delta_1(t)$; 212 — R_2; 323 — R_3; 412 — $L_4 = 2$; 523 — R_5; $R_k = 2$; $f_2 = i_5$.
14. Цепь: 131—ИТ $i_1 = f_1 = 12\exp(-3t)\delta_1(t)$; 213 — R_2; 312 — $L_3 = 3$; 423 — R_4; 513 — R_5; $R_k = 2$; $f_2 = i_2$.
15. Цепь: 114—ИН $u_1 = f_1 = [9 - 18\exp(-t)]\delta_1(t)$; 212 — R_2; 323 — R_3; 423 — $C_4 = 3$; 543 — R_5; $R_k = 2$; $f_2 = u_5$.
16. Цепь: 131—ИТ $i_1 = f_1 = [3 + 6\exp(-t)]\delta_1(t)$; 213 — R_2; 313 — $C_3 = 3$; 412 — R_4; 523 — R_5; $R_k = 1$; $f_2 = i_3$.
17. Цепь: 113—ИН $u_1 = f_1 = 4\exp(-4t)\delta_1(t)$; 212 — R_2; 312 — $C_3 = 1$; 423 — R_4; 523 — R_5; $R_k = 1$; $f_2 = i_5$.
18. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = f_1 = [60 + 30\exp(-t)]\delta_1(t)$; 214 — R_2; 312 — $C_3 = 3$; 413 — R_4; 523 — R_5; 634 — R_6; $R_k = 1$; $f_2 = u_4$.
19. Цепь: 114—ИН $u_1 = f_1 = 18\exp(-t)\delta_1(t)$; 212 — R_2; 324 — $C_3 = 3$; 423 — R_4; 534 — R_5; $R_k = 2$; $f_2 = i_3$.
20. Цепь: 141—ИТ $i_1 = f_1 = 5\exp(-2t)\delta_1(t)$; 212 — R_2; 324 — R_3; 413 — R_4; 523 — R_5; 634 — $L_6 = 5$; $R_k = 2$; $f_2 = i_3$.
21. Цепь: 114—ИН $u_1 = f_1 = [3 + 3\exp(-t)]\delta_1(t)$; 212 — R_2; 324 — R_3; 423 — R_4; 534 — R_5; 634 — $L_6 = 1/5$; $R_k = 1$; $f_2 = i_4$.
22. Цепь: 131—ИТ $i_1 = f_1 = \exp(-2t)\delta_1(t)$; 212 — R_2; 323 — R_3; 412 — R_4; 523 — — $C_5 = 3$; $R_k = 2$; $f_2 = i_5$.
23. Цепь: 114—ИН $u_1 = f_1 = 6\exp(-3t)\delta_1(t)$; 212 — R_2; 324 — R_3; 423 — R_4; 523 — $C_5 = 1$; 634 — R_6; $R_k = 1$; $f_2 = i_6$.
24. Цепь: 131—ИТ $i_1 = f_1 = [15 + 15\exp(-2t)]\delta_1(t)$; 213 — R_2; 312 — R_3; 423 — $L_4 = = 2$; 523 — R_5; $R_k = 1$; $f_2 = i_3$.
25. Цепь: 114 — ИН $u_1 = f_1 = 12\exp(-2t)\delta_1(t)$; 212 — $R_2 = 1$; 313 — $R_3 = 3$; 424 — — $R_4 = 3$; 523 — $L_5 = 1{,}5$; 634 — $R_6 = 1$; $f_2 = i_3$.

1.3. Анализ цепей при синусоидальных и экспоненциальных воздействиях

1.3.1. Используя МКА, определить параметры заданных синусоидальных функций, описывающих напряжения и токи в цепи.

Варианты 1—5. В цепи $i_3 = i_1 + i_2$. При заданных условиях найти i_2, i_3, $\dot{I}_3$, I_{3m}, $\dot{I}_{3m}$, I_3, α_{i3}, ω, f, T. Построить график $i_1(t)$ и ВД токов (количественно).

1. $i_1 = 4\cos(2t - 90°)$; $\dot{I}_2 = -2\sqrt{2}$.
2. $i_1 = 6\sin(2t + 135°)$; $\dot{I}_2 = -3 + j3$.
3. $i_1 = 2\cos(2t + 135°)$; $\dot{I}_2 = -1 - j$.
4. $i_1 = 8\cos(2t + 90°)$; $\dot{I}_2 = -4\sqrt{2}$.
5. $i_1 = 10\sin(2t + 45°)$; $\dot{I}_2 = -5 - j5$.

Варианты 6—10. В цепи $u_3 = u_1 + u_2$. При заданных условиях найти u_2, u_3, $\dot{U}_{3m}$, $\dot{U}_3$, U_{3m}, U_3, α_{u3}, ω, f, T. Построить график $u_1(t)$ и ВД напряжений (количественно).

6. $u_1 = 2\sqrt{2}\cos(4t + 45°)$; $\dot{U}_2 = -\sqrt{2}$.
7. $u_1 = 4\cos(4t - 90°)$; $\dot{U}_2 = -\sqrt{2} + j\sqrt{2}$.
8. $u_1 = 4\cos(4t + 90°)$; $\dot{U}_2 = 2\sqrt{2}(-1 - j)$.
9. $u_1 = 4\sqrt{2}\cos(4t + 135°)$; $\dot{U}_2 = -j2\sqrt{2}$.
10. $u_1 = 6\cos(4t - 135°)$; $\dot{U}_2 = j6$.

Варианты 11—15. При заданных условиях для пассивного ДП найти α_i, i, $\dot{U}_m$, $\dot{U}$, U_m, U, ω, f, T, φ, Z, построить ВД и график $u(t)$.

11. $u = 10\sqrt{2}\cos(2t + 90°)$; $\dot{I} = -5$.
12. $u = 20\cos(2t - 90°)$; $\dot{I} = -2\sqrt{2}$.
13. $u = 20\sqrt{2}\cos(2t + 180°)$; $\dot{I} = j2$.
14. $u = 10\sqrt{2}\cos(2t + 135°)$; $\dot{I} = j\sqrt{2}$.
15. $u = 12\sqrt{2}\cos(2t - 135°)$; $\dot{I} = -2\sqrt{2}j$.

Варианты 16—20. График напряжения ДП $f(t) = u(t)$ приведен на рис. 1.3, *а*. При указанной разности фаз $\varphi = \alpha_u - \alpha_i$ и заданных условиях найти T, f, ω, α_u, u, $\dot{U}_m$, U, $\dot{U}$, I_m, i, $\dot{I}_m$, а также построить ВД и графики $i(t)$, $u(t)$.

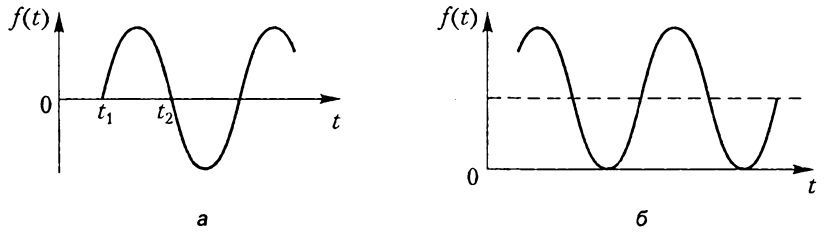


Рис. 1.3

16. $U_m = 10$; $t_1 = \pi/2$; $t_2 = \pi$; $I = \sqrt{2}$; $\varphi = 45°$.
17. $U_m = 20$; $t_1 = -\pi/2$; $t_2 = 0$; $I = 2\sqrt{2}$; $\varphi = -90°$.
18. $U_m = 8$; $t_1 = 0$; $t_2 = \pi/2$; $I = 5$; $\varphi = 90°$.
19. $U_m = 6$; $t_1 = -\pi/2$; $t_2 = 0$; $I = 4$; $\varphi = 45°$.
20. $U_m = 4$; $t_1 = 0$; $t_2 = \pi/2$; $I = 10$; $\varphi = -45°$.

Варианты 21—25. В цепи $u_3 = u_1 + u_2$. Напряжения описываются синусоидальными функциями. При заданных условиях найти u_2, u_3, $\dot{U}_{3m}$, α_{u3}, ω, f, T и построить ВД напряжений (количественно), а также график $u_1(t)$.

21. $u_1 = 10\cos(2t + 90°)$; $\dot{U}_{2m} = -10$.
22. $u_1 = 10\sqrt{2}\cos(2t + 135°)$; $\dot{U}_{2m} = -10j$.
23. $u_1 = 20\cos(2t - 180°)$; $\dot{U}_{2m} = 10 - j10$.
24. $u_1 = 10\sqrt{2}\cos(2t + 45°)$; $\dot{U}_{2m} = -20$.
25. $u_1 = 10\sqrt{2}\cos(2t - 135°)$; $\dot{U}_{2m} = -10 + j10$.

Примечание: в задачах темы использована условная запись функций $\cos(\omega t + \alpha)$, в которой ωt измеряется в радианах, а α — в градусах (при построении графиков следует учитывать, что периоду синусоиды T соответствует угловая мера 360°).

1.3.2. В вариантах 1—15 для режима гармонических колебаний в цепи найти указанные характеристики накопительного элемента и построить графики его тока и напряжения.

1. $L = 2$; $i_L = 4\cos(2t - 135°)$. Найти $\dot{U}_{Lm}$, U_L, u_L.
2. $|Y_C| = 2$; $u_C = 6\cos(2t - 135°)$. Найти C, $\dot{I}_C$, i_C.
3. $C = 1/4$; $i_C = 4\cos(2t + 30°)$. Найти $\dot{U}_{Cm}$, U_C, u_C.
4. $|Z_L| = 1$; $u_L = 4\cos(2t - 30°)$. Найти L, $\dot{I}_{Lm}$, I_L, i_L.
5. $L = 1/3$; $u_L = 2\cos(3t + 45°)$. Найти $\dot{I}_{Lm}$, I_L, i_L.
6. $|Z_C| = 1$; $i_C = 6\cos(3t - 120°)$. Найти C, $\dot{U}_C$, u_C.
7. $C = 3$; $i_C = 24\cos(4t - 30°)$. Найти $\dot{U}_{Cm}$, U_C, u_C.
8. $|Y_L| = 2$; $i_L = 10\cos(2t + 45°)$. Найти L, $\dot{U}_L$, u_L.
9. $L = 4$; $u_L = 4\cos(t + 60°)$. Найти $\dot{I}_{Lm}$, I_L, i_L.

10. $|Y_C| = 1$; $i_C = 3\cos(4t + 120°)$. Найти C, $\dot{U}_C$, u_C.
11. $C = 1/4$; $i_C = 4\cos(t - 45°)$. Найти $\dot{U}_{Cm}$, U_C, u_C.
12. $|Y_L| = 1$; $u_L = 3\cos(2t - 60°)$. Найти L, $\dot{I}_L$, i_L.
13. $L = 1/3$; $i_L = 10\cos(6t + 90°)$. Найти $\dot{U}_{Lm}$, U_L, u_L.
14. $C = 1/3$; $u_C = 3\sqrt{2}\cos(t + 30°)$. Найти $\dot{I}_{Cm}$, I_C, i_C.
15. $|Z_C| = 1/2$; $u_C = 2\sqrt{2}\cos(4t - 45°)$. Найти C, $\dot{I}_C$, i_C.

Для вариантов 16–25 на рис. 1.3, *а* и *б* приведен график $f(t)$, соответствующий одной из характеристик накопительного элемента.

16. Рис. 1.3, *а*; $f(t) = p_C(t)$, построить u_C, i_C, W_C.
17. Рис. 1.3, *б*; $f(t) = W_L(t)$, построить p_L, u_L, i_L.
18. Рис. 1.3, *а*; $f(t) = i_L(t)$, построить u_L, p_L, W_L.
19. Рис. 1.3, *а*; $f(t) = u_C(t)$, построить i_C, p_C, W_C.
20. Рис. 1.3, *б*; $f(t) = W_C(t)$, построить p_C, u_C, i_C.
21. Рис. 1.3, *а*; $f(t) = u_L(t)$, построить i_L, p_L, W_L.
22. Рис. 1.3, *а*; $f(t) = i_C(t)$, построить u_C, p_C, W_C.
23. Рис. 1.3, *б*; $f(t) = W_L(t)$, построить p_L, u_L, i_L.
24. Рис. 1.3, *а*; $f(t) = p_L(t)$, построить u_L, i_L, W_L.
25. Рис. 1.3, *б*; $f(t) = W_C(t)$, построить p_C, u_C, i_C.

1.3.3. Определить указанные характеристики цепи, находящейся в режиме гармонических колебаний.

1. Цепь: 131 — ИТ; 212 — $L = 2$; 313 — $R = 3$; 423 — $C = 0{,}5$; $\omega = 2$. Найти $|Z_{вх}|$, φ, $Y_{вх}$.
2. Цепь: 113 — ИН; 212 — $L = 1$; 323 — $R = 2$; 423 — $C = 0{,}25$; $\omega = 2$. Найти $Z_{вх}$, $|Y_{вх}|$, ψ.
3. Цепь: 114 — ИН; 212 — $C = 0{,}5$; 323 — $L = 0{,}5$; 424 — $R_4 = 2$; 534 — $R_5 = 1$; $\omega = 2$. Найти $|Z_{вх}|$, φ, $Y_{вх}$.
4. Цепь: 121 — ИТ; 212 — $R = 10$; 312 — $C = 0{,}05$; $\omega = 2$. Найти $Z_{вх}$, $|Z_{вх}|$, φ, $Y_{вх}$.
5. Цепь: 131 — ИТ; 212 — L_2; 313 — C_3; 423 — R_4; $|Z_k| = 10$. Найти $Y_{вх}$, ψ, $|Z_{вх}|$, φ.
6. Цепь: 113 — ИН; 212 — $C = 0{,}25$; 323 — $R = 2$; 423 — $L_4 = 1$; $\omega = 2$. Найти $|Z_{вх}|$, φ, $Y_{вх}$.
7. Цепь: 113 — ИН; 212 — $L = 0{,}5$; 323 — $C = 0{,}5$; 423 — $R = 1$; $\omega = 2$. Найти $|Z_{вх}|$, φ, $Y_{вх}$.
8. Цепь: 131 — ИТ; 212 — L_2; 313 — C_3; 423 — R_4; $|Z_k| = 1$. Найти $Z_{вх}$, $|Z_{вх}|$, φ, $Y_{вх}$.
9. Цепь: 114 — ИН; 212 — $R_2 = 2$; 323 — $C = 0{,}1$; 434 — $R_4 = 4$; 534 — $L = 2$; $\omega = 2$. Найти $|Z_{вх}|$, φ, $Y_{вх}$.
10. Цепь: 121 — ИТ; 212 — $G = 3$; 312 — $L = 0{,}1$; $\omega = 2{,}5$. Найти $Y_{вх}$, ψ, $Z_{вх}$.
11. Цепь: 121 — ИТ; 212 — R; 312 — L; $\omega = 2$; $Z_{вх} = 2 + j2$. Найти $|Y_{вх}|$, ψ, L, R.

12. Цепь: 113 — ИН; 212 — C; 323 — R; $\omega = 2$; $Y_{вх} = 4 + j4$. Найти $Z_{вх}$, R, C, φ.
13. Цепь: 121 — ИТ; 212 — R; 312 — $L = 1$; 412 — C; $\omega = 2$; $Y_{вх} = 2 + j2$. Найти $Z_{вх}$, R, C, φ.
14. Цепь: 114 — ИН; 212 — R; 323 — L; 434 — $C = 1$; $\omega = 2$; $Y_{вх} = 1 - j$. Найти $Z_{вх}$, R, L, φ.
15. Цепь: 113 — ИН; 212 — R; 323 — L; $\omega = 2$; $Y_{вх} = 0{,}25 - j0{,}25$. Найти $Z_{вх}$, R, L, φ.
16. Цепь: 121 — ИТ; 212 — R; 312 — C; $\omega = 2$; $Z_{вх} = 0{,}25 - j0{,}25$. Найти $Y_{вх}$, R, C, φ.
17. Цепь: 131 — ИТ; 212 — C; $|Z_C| = 0{,}5$; 313 — $R_3 = 0{,}5$; 423 — $R_4 = 0{,}5$; 523 — L; $|Z_L| = 0{,}25$. Найти $Z_{вх}$, $|Y_{вх}|$, ψ.
18. Цепь: 113 — ИН; 212 — L_2; 323 — R_3; 423 — C_4; $|Z_k| = 2$. Найти $|Z_{вх}|$, φ, $Y_{вх}$.
19. Цепь: 113 — ИН; 212 — L; 323 — C; $|Z_C| = 2$; 423 — $R = 2$; $Z_{вх} = 1$. Найти Z_{RC}, $|Z_{RC}|$, $\varphi_{вх}$, Z_L.
20. Цепь: 131 — ИТ; 212 — L_2; 313 — C_3; 423 — R_4; $|Z_k| = 1$. Найти $Z_{вх}$, $|Z_{вх}|$, φ, $Y_{вх}$.
21. Цепь: 131 — ИТ; 212 — R_2; 313 — C_3; 423 — R_4; 523 — L_5; $|Z_k| = 1$. Найти $|Y_{вх}|$, ψ, $Z_{вх}$, φ.
22. Цепь: 114 — ИН; 212 — L_2; 323 — R_3; 434 — C_4; 534 — R_5; $|Z_k| = 1$. Найти $|Z_{вх}|$, φ, $Y_{вх}$.
23. Цепь: 114 — ИН; 212 — $R_2 = 0{,}5$; 323 — C_3; $|Z_C| = 3$; 434 — L_4; $|Z_L| = 2$; 534 — $R_5 = 2$. Найти $|Z_{вх}|$, φ, $Y_{вх}$.
24. Цепь: 131 — ИТ; 212 — C_2; $|Z_2| = 0{,}2$; 313 — L_3; $|Z_3| = 1{,}2$; 423 — $R_4 = 1/3$; 523 — C_5; $|Z_5| = 1$. Найти $|Y_{вх}|$, ψ, $Z_{вх}$.
25. Цепь: 131 — ИТ; 212 — $R_2 = 0{,}5$; 313 — L_3; $|Z_3| = 1$; 423 — L_4; $|Z_4| = 0{,}25$; 523 — C_5; $|Z_5| = 0{,}5$. Найти $|Y_{вх}|$, ψ, $Z_{вх}$.

1.3.4. Цепь находится в режиме гармонических колебаний. В вариантах 1—19, используя векторную диаграмму, найти указанные величины.

1. Цепь: 114 — ИН; 212 — R_2; 324 — C_3; 413 — R_4; 534 — L_5; $U_1 = 5$; $U_2 = 4$; $U_5 = 3$. Найти U_3, U_4.
2. Цепь: 114 — ИН; 212 — L_2; 323 — C_3; 434 — R_4; $U_1 = U_3 = U_4 = 5$. Найти U_2, U_{24}.
3. Цепь: 131 — ИТ; 213 — L_2; 313 — R_3; 413 — C_4; $I_1 = I_3 = 10$; $I_{34} = I_{RC} = 10\sqrt{2}$. Найти I_2, I_4.
4. Цепь: 114 — ИН; 212 — R_2; 324 — C_3; 413 — L_4; 534 — R_5; $|Z_2| = |Z_C| = |Z_L| = |Z_5|$; $U_1 = 10$. Найти U_2, U_3, U_4, U_5.
5. Цепь: 131 — ИТ; 212 — R_2; 312 — L_3; 423 — C_4; 523 — R_5; $I_1 = 10$; $I_2 = 6$; $I_4 = 8$. Найти I_3, I_5.
6. Цепь: 131 — ИТ; 212 — R_2; 312 — C_3; 423 — R_4; 523 — L_5; $|Z_2| = |Z_C| = |Z_4| = |Z_L|$; $I_1 = 10$. Найти I_2, I_3, I_4, I_5.
7. Цепь: 114 — ИН; 212 — L_2; 323 — C_3; 434 — R_4; 534 — L_5; $|Z_k| = 2$; $I_4 = 5\sqrt{2}$. Найти I_1, U_1, U_2, U_3.

8. Цепь: 131 — ИТ; 213 — C_2; 323 — R_3; 423 — L_4; 512—КЗ; $I_2 = I_3 = I_4 = 2$. Найти I_1, I_5, φ.
9. Цепь: 113 — ИН; 212 — C_2; 323 — R_3; 423 — L_4; $I_2 = 10$; $I_3 = 6$. Найти I_4, φ_{RL}.
10. Цепь: 131 — ИТ; 213 — C_2; 312 — R_3; 423 — L_4; $U_2 = 5$; $U_3 = 3$. Найти U_4, φ_{RL}.
11. Цепь: 114 — ИН; 212 — R_2; 323 — L_3; 434 — C_4; $R_2 = |z_L| = |z_C| = 5$; $I_2 = 2$. Найти U_1, U_{24}.
12. Цепь: 113 — ИН; 212 — L_2; 323 — R_3; 423 — C_4; $I_2 = 5$; $I_3 = 3$. Найти I_4, φ_{RC}.
13. Цепь: 113 — ИН; 213 — L_2; 312 — R_3; 423 — C_4; $U_2 = 5$; $U_3 = 4$. Найти U_4, φ_{RC}.
14. Цепь: 113 — ИН; 212 — R_2; 323 — C_3; 423 — L_4; $I_2 = 5$; $I_3 = 4$. Найти I_4, φ_{LC}.
15. Цепь: 131 — ИТ; 213 — R_2; 323 — L_3; 423 — C_4; 512—КЗ; $I_2 = 2$; $I_3 = 1$; $I_4 = 3$. Найти I_1, I_5, φ.
16. Цепь: 114 — ИН; 212 — L_2; 323 — R_3; 434 — C_4; $U_1 = 10$; $U_2 = 2$; $U_3 = 8$. Найти U_4, U_{24}, φ.
17. Цепь: 113 — ИН; 212 — R_2; 323 — L_3; 423 — C_4; $I_2 = 3$; $I_4 = 4$. Найти I_3, φ_{LC}.
18. Цепь: 114 — ИН; 212 — C_2; 323 — L_3; 434 — R_4; $U_1 = 10$; $U_2 = 2$; $U_3 = 10$. Найти U_4, U_{13}, φ.
19. Цепь: 131 — ИТ; 213 — L_2; 323 — R_3; 423 — C_4; 512—КЗ; $I_2 = 3$; $I_3 = 2$; $I_4 = 1$. Найти I_1, I_5, φ.

В вариантах 20—25 найти φ и построить векторные диаграммы для ω_1 и $\omega_2 = 2\omega_1$, считая амплитудное значение воздействия неизменным.

20. Цепь: 112 — ИН; 212 — R; 312 — L; $R = \omega_1 L$.
21. Цепь: 131 — ИТ; 212 — R; 323 — C; $R = 1/(\omega_1 C)$.
22. Цепь: 131 — ИТ; 212 — R; 323 — L; $R = \omega_1 L$.
23. Цепь: 112 — ИН; 212 — R; 312 — C; $R = 1/(\omega_1 C)$.
24. Цепь: 113 — ИН; 212 — R; 323 — L; $R = \omega_1 L$.
25. Цепь: 121 — ИТ; 212 — R; 312 — C; $R = 1/(\omega_1 C)$.

1.3.5. В цепи установившийся синусоидальный режим. Найти реакцию, построить ее график, а также ВД цепи (качественно).

1. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 10\cos(2t - 180°)$; 231 — $L_2 = 5$; 312 — $R_3 = 5$; 423 — $C_4 = 0{,}1$. Найти $i_2(t)$.
2. Цепь: 113—ИН $u_1 = 100\cos(2t - 90°)$; 212 — $R_2 = 10$; 323 — $L_3 = 2{,}5$; 423 — $C_4 = 0{,}05$. Найти $u_2(t)$.
3. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 10\cos(2t + 180°)$; 231 — $R_2 = 10$; 312 — $L_3 = 10$; 423 — $C_4 = 0{,}05$. Найти $u_1(t)$.

4. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 100\cos(2t + 135°)$; 212 — $L_2 = 5$; 323 — $R_3 = 10$; 423 — $C_4 = 0{,}05$. Найти $u_3(t)$.
5. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 10\cos(0{,}5t - 116{,}5°)$; 213 — $C_2 = 1$; 312 — $R_3 = 4$; 423 — $L_4 = 4$. Найти $i_2(t)$.
6. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 30\cos(3t + 135°)$; 212 — $C_2 = 1/3$; 323 — $R_3 = 1$; 423 — $L_4 = 1/3$. Найти $i_1(t)$.
7. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 10\cos(t + 180°)$; 231 — $L_2 = 10$; 312 — $R_3 = 5$; 423 — $C_4 = 0{,}2$. Найти $i_2(t)$.
8. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 10\cos(2t + 127°)$; 212 — $R_2 = 0{,}5$; 323 — $L_3 = 1$; 423 — $C_4 = 1$. Найти $u_2(t)$.
9. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 10\cos(t - 180°)$; 231 — $R_2 = 5$; 312 — $C_3 = 0{,}1$; 423 — $L_4 = 5$. Найти $u_1(t)$.
10. Цепь: 131—ИТ $i_1 = 10\cos(2t - 180°)$; 231 — $L_2 = 5$; 312 — $C_3 = 0{,}1$; 423 — $R_4 = 5$. Найти $i_3(t)$.
11. Цепь: 113—ИН $u_1 = 100\cos(2t - 90°)$; 212 — $R_2 = 10$; 323 — $L_3 = 2{,}5$; 423 — $C_4 = 0{,}05$. Найти $u_3(t)$.
12. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 10\cos(2t - 127°)$; 212 — $R_2 = 0{,}5$; 323 — $L_3 = 1$; 423 — $C_4 = 1$. Найти $i_1(t)$.
13. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 10\cos(2t + 180°)$; 231 — $R_2 = 10$; 312 — $C_3 = 0{,}05$; 423 — $L_4 = 10$. Найти $i_2(t)$.
14. Цепь: 113—ИН $u_1 = 100\cos(2t + 90°)$; 212 — $L_2 = 5$; 323 — $R_3 = 10$; 423 — $C_4 = 0{,}05$. Найти $u_2(t)$.
15. Цепь: 131—ИТ $i_1 = 10\cos(0{,}5t - 116{,}5°)$; 213 — $C_2 = 1$; 312 — $R_3 = 4$; 423 — $L_4 = 4$. Найти $u_1(t)$.
16. Цепь: 113—ИН $u_1 = 30\cos(3t + 135°)$; 212 — $C_2 = 1/3$; 323 — $R_3 = 1$; 423 — $L_4 = 1/3$. Найти $u_2(t)$.
17. Цепь: 131—ИТ $i_1 = 10\cos(t + 180°)$; 231 — $L_2 = 10$; 312 — $R_3 = 5$; 423 — $C_4 = 0{,}2$. Найти $i_4(t)$.
18. Цепь: 113—ИН $u_1 = 10\cos(2t - 90°)$; 212 — $R_2 = 10$; 323 — $L_3 = 2{,}5$; 423 — $C_4 = 0{,}05$. Найти $i_1(t)$.
19. Цепь: 131—ИТ $i_1 = 10\cos(2t + 180°)$; 231 — $R_2 = 10$; 312 — $L_3 = 10$; 423 — $C_4 = 0{,}05$. Найти $i_3(t)$.
20. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 30\cos(3t + 135°)$; 212 — $C_2 = 1/3$; 323 — $L_3 = 1/3$; 423 — $R_4 = 1$. Найти $u_3(t)$.
21. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 10\cos(2t - 180°)$; 231 — $L_2 = 5$; 312 — $R_3 = 5$; 423 — $C_4 = 0{,}1$. Найти $u_1(t)$.

22. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 10\cos(2t + 127°)$; 212 — $R_2 = 0{,}5$; 323 — $C_3 = 1$; 423 — $L_4 = 1$. Найти $u_4(t)$.
23. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 10\cos(t - 180°)$; 231 — $R_2 = 5$; 312 — $L_3 = 5$; 423 — $C_4 = 0{,}1$. Найти $i_2(t)$.
24. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 100\cos(2t + 90°)$; 212 — $L_2 = 5$; 323 — $C_3 = 0{,}05$; 423 — $R_4 = = 10$. Найти $i_1(t)$.
25. Цепь: 131—ИТ $i_1 = 10\cos(0{,}5t - 116{,}5°)$; 231 — $C_2 = 1$; 312 — $L_3 = 4$; 423 — $R_4 = 4$. Найти $i_3(t)$.

1.3.6. В задаче 1.3.5 найти токи и напряжения, используя метод пропорциональных величин. Определить мощности P, P_Q, P_S, $\tilde{P}_S$ и проверить баланс мощностей.

1.3.7. Используя МКА, найти указанные величины. Варианты 1—18: цепь находится в режиме гармонических колебаний.

1. Цепь: 113 — ИН u_1; 213 — L_2; 312 — R_3; 423 — C_4; $|Z_L| = |Z_C| = R$; $|Z_{вх}| = \sqrt{2}$. Найти R, φ.
2. Цепь: 113 — ИН u_1; 212 — R_2; 323 — C_3; $U_1 = 20$; $I_1 = 4$; $\varphi = -37°$. Найти R, Z_C.
3. Цепь: 113 — ИН u_1; 212 — C_2; 323 — L_3; 423 — R_4; $|Z_L| = R = 2$; $|Z_{вх}| = 1$; $I_R = 2$. Найти Z_C, U_1.
4. Цепь: 114 — ИН, $U_1 = 10$; 212 — R_2; 323 — L_3; 434 — C_4; $U_R = 6$ при частотах ω_1 и $\omega_2 = 5\omega_1$. Найти U_L и U_C при ω_1 и ω_2.
5. Цепь: 113 — ИН u_1; 213 — L_2; 312 — C_3; 423 — R_4; $|Y_L| = |Y_C| = G$; $|Y_{вх}| = 1$. Найти G, φ.
6. Цепь: 121 — ИТ i_1; 212 — R_2; 312 — C_3; $I_1 = 1$; $U_R = 2$; $\varphi = -53°$. Найти R, Z_C.
7. Цепь: 113 — ИН u_1; 212 — C_2; 323 — R_3; 423 — L_4; $I_C = 1$; $U_1 = U_C = U_R = 1$. Найти $|Z_k|$, φ.
8. Цепь: 131 — ИТ i_1; 213 — L_2; 312 — R_3; 423 — C_4; $R = |Z_C| = 8$; $\varphi = 45°$. Найти Z_L.
9. Цепь: 113 — ИН u_1; 212 — C_2; 323 — R_3; 423 — L_4; $R = |Z_L| = 4$; $\varphi = -45°$. Найти Z_C.
10. Цепь: 113 — ИН u_1; 212 — L_2; 323 — R_3; 423 — C_4; $|Z_{вх}| = 2$; $|Z_L| = |Z_C| = R$. Найти R, φ.
11. Цепь: 113 — ИН u_1; 212 — C_2; 323 — L_3; 423 — R_4; $I_C = 2\sqrt{5}$; $U_L = 8$; $I_R = 2$; $|Z_{вх}| = 1$. Найти U, Z_k, φ.
12. Цепь: 113 — ИН u_1; 212 — L_2; 323 — R_3; 423 — C_4; $U_1 = U_L = U_C = 1$; $I_C = 1$. Найти $|Z_k|$, φ.
13. Цепь: 113 — ИН u_1; 212 — R_2; 323 — C_3; 413 — L_4; $I_1 = I_R = I_L = 1$; $U_C = 1$. Найти $|Z_k|$, φ.
14. Цепь: 113 — ИН u_1; 212 — R_2; 323 — L_3; 413 — C_4; $U_1 = 1$; $I_1 = I_R = I_C = 1$. Найти $|Z_k|$.

15. Цепь: 113 — ИН u_1; 212 — C_2; 323 — R_3; 423 — L_4; $I_R = 1$; $U_1 = U_C = U_R = 1$. Найти $|Z_k|$, φ.
16. Цепь: 113 — ИН u_1; 212 — L_2; 323 — C_3; 423 — R_4; $R = |Z_C| = 8$; $\varphi = 45°$. Найти z_L, $Z_{вх}$.
17. Цепь: 113 — ИН u_1; 212 — L_2; 323 — C_3; 423 — R_4; $R = |Z_C| = |Z_L|$; $\alpha_{uL} = 0°$. Найти α_{uC}, α_u.
18. Цепь: 113 — ИН u_1; 213 — C_2; 312 — R_3; 423 — L_4; $|Z_C| = 2$; $U_R = 6$; $U_L = 8$. Найти U, I_C.

Варианты 19—25. В цепи рассматривается вынужденный режим при обобщенном экспоненциальном воздействии.

19. Цепь: 112 — ИН $u_1 = 4\exp(-t)\cos(2t + 45°)$; 212 — $R_2 = 1$; 312 — $C_3 = 1$. Найти $i_{1в}$.
20. Цепь: 113 — ИН u_1; 212 — $R_2 = 1/\sqrt{2}$; 323 — C_3; $|Y_C| = 1$; $u_{Cв} = 4\sqrt{2}\exp(-3t)\cos(3t - 45°)$. Найти u_1, C.
21. Цепь: 131 — ИТ $i = \exp(-t)\cos t$; 213 — $R_2 = 1$; 312 — $R_3 = 1$; 423 — $L_4 = 1$. Найти $i_{Lв}$.
22. Цепь: 114 — ИН u_1; 212 — R_2; 324 — R_3; 423 — R_4; 534 — $L_5 = 2$; $u = 4\exp(-1{,}5t)\cos(0{,}5t - 45°)$; $R_k = 2$. Найти $u_{4в}$.
23. Цепь: 113 — ИН u_1; 212 — R_2; 323 — C_3; 423 — R_4; $R_k = 1$; $C = 0{,}5$; $u = 4\exp(-2t)\cos(2t + 45°)$. Найти $u_{4в}$.
24. Цепь: 113 — ИН u_1; 212 — $R_2 = 4$; 323 — $L_3 = 2$; $i_в = 5\exp(-2t)\cos(3t + 90°)$. Найти u_1, $Z_{вх}$.
25. Цепь: 131 — ИТ $i = 2\exp(-3t)\cos(2t + 90°)$; 213 — R_2; 312 — R_3; 423 — $C_4 = 1$; 523 — R_5; $R_k = 1$. Найти $u_{5в}$.

1.3.8. В цепи установившийся синусоидальный режим. Определить указанные величины и проконтролировать баланс мощностей.

1. Цепь: 113 — ИН u_1; 212 — C_2; 323 — R_3; 423 — L_4; $|Z_2| = R_3 = |Z_4| = 1$; $I_2 = 4$. Найти P, P_Q, P_S, φ, P_{QL}.
2. Цепь: 114 — ИН u_1; 212 — L_2; 323 — R_3; 423 — C_4; 534 — C_5; $P_{S2} = P_{S3} = P_{S4} = P_{S5} = 4$. Найти P_S, φ, I_2/I_4.
3. Цепь: 113 — ИН u_1; 212 — R_2; 323 — R_3; 423 — L_4; $P = 6$; $P_2 = 2$; $|Z_4| = R_3 = 1$. Найти U_4, P_Q, P_S, R_2.
4. Цепь: 113 — ИН u_1; 212 — R_2; 323 — C_3; $I = 1$; $|Z_3| = 2$; $\varphi = -45°$. Найти P, P_Q, P_S, U_1, Z.
5. Цепь: 113 — ИН u_1; 212 — L_2; 323 — R_3; $P = 3$; $P_Q = 4$; $|Z_{вх}| = 5$. Найти P_S, U_1, φ, R_3, Z_2.

6. Цепь: 113 — ИН u_1; 212 — R_2; 323 — L_3; $\varphi = 45°$; $\alpha_{uL} = 0°$. Найти P_S/P, P_Q/P, α_{u1}. Качественно построить графики u_1, i_1, $p\,(t)$.
7. Цепь: 113 — ИН u_1; 212 — L_2; 323 — R_3; $U_1 = 10$; $U_3 = 8$; $P_Q = 6$. Найти Z_2, R_3, P_S, P.
8. Цепь: 113 — ИН u_1; 212 — C_2; 323 — R_3; 423 — L_4; $|Z_k| = 2$; $P = 8$. Найти I_2, I_4, P_Q, P_S.
9. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 10\sqrt{2}\cos 2t$; 212 — R_2; 323 — C_3; $\dot{I} = 5 + j5$. Найти $Z_{вх}$, P, P_Q, P_S, $p\,(t)$. Построить графики u_1, i, $p\,(t)$.
10. Цепь: 113 — ИН u_1; 212 — R_2; 323 — L_3; $U_1 = 10$; $P = 50$; $|Z_3| = 1$. Найти R_2, P_Q, P_S.
11. Цепь: 114 — ИН u_1; 212 — R_2; 323 — L_3; 434 — C_4; $P = 2$; $P_{Q3} = 2$; $P_{Q4} = -4$; $U_1 = \sqrt{2}$. Найти Z_4, P_Q, P_S, φ.
12. Цепь: 113 — ИН u_1; 212 — R_2; 323 — C_3; $P_S = 20\sqrt{2}$; $P = 20$; $\dot{I} = 2j$; $\omega = 4$. Найти P_Q, φ, $Z_{вх}$, $u_1\,(t)$, $p_1\,(t)$.
13. Цепь: 113 — ИН u_1; 212 — R_2; 323 — C_3; $U_1 = 20$; $p\,(t) = 100 + 100\sqrt{2}\cos(4t + 45°)$. Найти P, P_Q, P_S, φ, Z, $i\,(t)$.
14. Цепь: 113 — ИН u_1; 212 — R_2; 323 — R_3; 423 — C_4; $P_Q = -10$; $R_3 = 10$; $I_3 = 1$; $U_2 = 10\sqrt{2}$. Найти Z_4, R_2, U_1, P, P_S.
15. Цепь: 121 — ИТ i_1; 212 — R_2; 312 — C_3; $U_m = 4$; $\varphi = -45°$; $R_2 = 2$. Найти P, P_Q, P_S, I_1, Z_3.
16. Цепь: 121 — ИТ i_1; 212 — R_2; 312 — L_3; $I_1 = 10$; $I_2 = 6$; $P_Q = 128$. Найти Z_3, P, P_3, φ.
17. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 3\sqrt{2}\cos(2t + 90°)$; 212 — L_2; 323 — R_3; 423 — C_4; $|Z_2| = R_3 = |Z_4| = 1$. Найти P, P_Q, P_S, $\tilde{P}_S$, $p\,(t)$.
18. Цепь: 113 — ИН $u_1 = -10\cos 2t$; 212 — R_2; 323 — C_3; $\dot{I}_3 = -5 - j5$. Найти $|Z_{вх}|$, φ, P, P_Q, P_S, $\tilde{P}_S$, $p\,(t)$.
19. Цепь: 113 — ИН u_1; 212 — L_2; 323 — R_3; 423 — C_4; $P = 4$; $|Z_2| = R_3 = |Z_4| = 2$. Найти U_2, P_{Q4}, P_Q, P_S.
20. Цепь: 113 — ИТ i_1; 212 — R_2; 323 — L_3; $I = 1$; $\varphi = 60°$. Найти P, P_Q, P_S, Z, U_1.
21. Цепь: 131 — ИТ i_1; 213 — R_2; 312 — L_3; 423 — $R_4 = 2 = |Z_3|$; $P = 10$; $P_2 = 2$. Найти U_2, U_4, R_2, P_Q, P_S.
22. Цепь: 114 — ИН u_1; 212 — L_2; 323 — R_3; 434 — C_4; $P = 12$; $U_3/U_1 = 0{,}8$; $P_{Q2} = 3$; $|Z_4| = 12$. Найти P_Q, P_S, φ, I.
23. Цепь: 114 — ИН u_1; 212 — L_2; 323 — R_3; 434 — C_4; $P = 10$; $P_Q = 10$; $|Z_{вх}| = 10\sqrt{2}$; $|Z_4| = 5$. Найти P_S, I, φ, Z, Z_2, U_1.
24. Цепь: 113 — ИН u_1; 212 — C_2; 323 — R_3; $P_Q = -8$; $U_1 = 10$; $U_3 = 6$. Найти I, $|Z_2|$, $Z_{вх}$, P, P_S, φ.

25. Цепь: 113 — ИН u_1; 212 — R_2; 323 — L_3; $\dot{U}_1 = -100$; $i_1 = 10\cos(2t + 135°)$. Найти $Z_{вх}$, φ, P_Q, P_S, $\tilde{P}_S$, $p(t)$. Построить графики u_1, i, p.

1.3.9. Для режима гармонических колебаний найти реакцию, используя МКТ и МЭИ.

1. Цепь: 131 — ИН, $\dot{U}_1 = 2$; 212 — L_2; 323 — R_3; 425 — C_4; 514 — R_5; 654 — ИН, $\dot{U}_6 = j4$; 753 — C_7; $|Z_k| = 2$. Найти i_4.
2. Цепь: 115 — ИН, $\dot{U}_1 = 4 + j4$; 212 — $R_2 = 2$; 325 — L_3; 423 — L_4; 534 — C_5; 643 — — ИТ, $\dot{I}_6 = j$; 754 — ИН, $\dot{U}_7 = 2$; $|Z_3| = |Z_5| = 2$; $|Z_4| = 1$. Найти u_5.
3. Цепь: 113 — ИТ, $\dot{I}_1 = 1 - j$; 212 — C_2; 323 — C_3; 414 — L_4; 524 — L_5; 643 — R_6; $|Z_k| = 1$. Найти i_6.
4. Цепь: 114 — ИН, $\dot{U}_1 = j2$; 212 — L_2; 324 — R_3; 423 — L_4; 531 — ИТ, $\dot{I}_5 = 2$; 634 — — C_6; $|Z_2| = |Z_4| = 1$; $|Z_6| = 2$. Найти u_2.
5. Цепь: 113 — ИН, $\dot{U}_1 = 1$; 212 — L_2; 323 — R_3; 442 — ИН, $\dot{U}_4 = j2$; 545 — R_5; 615 — C_6; 735 — ИТ, $\dot{I}_7 = 2$; $|Z_k| = 1$. Найти i_3.
6. Цепь: 131 — ИТ, $\dot{I}_1 = j$; 212 — R_2; 323 — C_3; 424 — ИН, $\dot{U}_4 = 1$; 514 — L_5; 643 — — R_6; $|Z_k| = 1$. Найти u_5.
7. Цепь: 121 — ИТ, $\dot{I}_1 = j$; 212 — C_2; 331 — ИН, $\dot{U}_3 = 1$; 434 — L_4; 552 — L_5; 645 — — C_6; 764 — R_7; 865 — ИН, $\dot{U}_8 = 2$; $|Z_k| = 1$. Найти i_4.
8. Цепь: 113 — ИН, $\dot{U}_1 = j2$; 212 — L_2; 323 — L_3; 424 — C_4; 514 — C_5; 645 — ИН, $\dot{U}_6 = 2$; 753 — $R_7 = 2$; $|Z_2| = |Z_3| = |Z_5| = 2$; $|Z_4| = 1$. Найти i_4.
9. Цепь: 113 — ИН, $\dot{U}_1 = 6$; 212 — L_2; 323 — R_3; 424 — C_4; 545 — R_5; 653 — C_6; 734 — ИТ, $\dot{I}_7 = j3$; $|Z_k| = 1$. Найти u_4.
10. Цепь: 131 — ИТ, $\dot{I}_1 = 4 + j2$; 212 — L_2; 323 — R_3; 414 — C_4; 524 — R_5; 643 — L_6; $|Z_2| = |Z_4| = |Z_6| = 2$; $R_3 = R_5 = 1$. Найти i_4.
11. Цепь: 113 — ИН, $\dot{U}_1 = 1$; 212 — R_2; 323 — C_3; 414 — L_4; 524 — R_5; 634 — ИТ, $\dot{I}_6 = 1 - j2$; $|Z_k| = 1$. Найти i_3.
12. Цепь: 113 — ИН, $\dot{U}_1 = -j4$; 212 — R_2; 323 — C_3; 414 — L_4; 524 — R_5; 643 — R_6; $|Z_k| = 2$. Найти i_4.
13. Цепь: 115 — ИН, $\dot{U}_1 = j5$; 212 — L_2; 325 — ИТ, $\dot{I}_3 = 5 + j5$; 423 — C_4; 535 — C_5; 634 — R_6; 745 — ИН, $\dot{U}_7 = j5$; $|Z_k| = 1$. Найти u_4.
14. Цепь: 113 — ИН, $\dot{U}_1 = -j2$; 212 — C_2; 323 — R_3; 441 — ИТ, $\dot{I}_4 = -1$; 524 — R_5; 643 — L_6; $|Z_k| = 2$. Найти u_2.
15. Цепь: 115 — ИН, $\dot{U}_1 = 2$; 212 — R_2; 323 — L_3; 435 — R_4; 534 — ИТ, $\dot{I}_5 = -j$; 624 — — C_6; 745 — R_7; $|Z_k| = 2$. Найти i_3.
16. Цепь: 141 — ИТ, $\dot{I}_1 = -6 - j2$; 212 — R_2; 324 — C_3; 423 — L_4; 513 — R_5; 634 — R_6; $|Z_k| = 2$. Найти i_2.

17. Цепь: 114 — ИТ, $\dot{I}_1 = j$; 214 — R_2; 312 — L_3; 424 — C_4; 532 — R_5; 634 — ИН, $\dot{U}_6 = 6 + j6$; $|Z_k| = 2$. Найти i_3.
18. Цепь: 115 — ИН, $\dot{U}_1 = j2$; 212 — L_2; 325 — ИТ, $\dot{I}_3 = 1 - j$; 423 — $R_4 = 2$; 543 — ИН, $\dot{U}_5 = 2 + j2$; 624 — C_6; 745 — L_7; $|Z_2| = |Z_7| = 1$; $|Z_6| = 2$. Найти i_6.
19. Цепь: 116 — ИН, $\dot{U}_1 = 4$; 212 — L_2; 326 — C_3; 423 — ИН, $\dot{U}_4 = j4$; 534 — L_5; 645 — $R_6 = 2$; 745 — ИТ, $\dot{I}_7 = j2$; 856 — C_8; $|Z_2| = |Z_5| = |Z_8| = 2$; $|Z_3| = 1$. Найти i_3.
20. Цепь: 113 — ИН, $\dot{U}_1 = 40 + j40$; 212 — R_2; 323 — L_3; 424 — R_4; 514 — ИТ, $\dot{I}_5 = j10$; 643 — C_6; $|Z_k| = 2$. Найти i_4.
21. Цепь: 114 — ИН, $\dot{U}_1 = 2 + j2$; 212 — R_2; 324 — R_3; 423 — L_4; 513 — L_5; 634 — C_6; $|Z_k| = 2$. Найти u_5.
22. Цепь: 141 — ИН, $\dot{U}_1 = -j4$; 221 — C_2; 324 — L_3; 432 — R_4; 534 — R_5; 643 — ИТ, $\dot{I}_6 = j4$; $|Z_k| = 2$. Найти u_3.
23. Цепь: 121 — ИН, $\dot{U}_1 = -2$; 215 — C_2; 325 — R_3; 423 — R_4; 553 — ИТ, $\dot{I}_5 = -j3$; 634 — L_6; 745 — ИН, $\dot{U}_7 = j6$; $|Z_k| = 2$. Найти u_3.
24. Цепь: 151 — ИТ, $\dot{I}_1 = 1 + j$; 215 — L_2; 312 — R_3; 442 — ИТ, $\dot{I}_4 = -j2$; 523 — C_5; 643 — ИН, $\dot{U}_6 = 4$; 754 — ИН, $\dot{U}_7 = -j4$; $|Z_k| = 2$. Найти i_5.
25. Цепь: 115 — ИН, $\dot{U}_1 = j10$; 212 — R_2; 323 — C_3; 435 — R_4; 534 — L_5; 624 — R_6; 745 — ИН, $\dot{U}_7 = j10$; $|Z_k| = 2$. Найти u_3.

1.3.10. Варианты 1—4. Последовательный колебательный контур настроен в резонанс.

1. $R = 1$; $L = 0{,}5$; $\omega_0 = 10$; $I = 2$. Найти $\Delta\omega$, C, Q, U_C.
2. $R = 2$; $\omega_0 = 2$; $Q = 2{,}5$; $U = 2$. Найти L, C, ρ, U_L.
3. $\omega_0 = 10$; $Q = 1$; $\dot{U} = j100$; $I = 2$. Найти R, L, C, $\Delta\omega$, ρ, $u_L(t)$.
4. На рис. 1.4, *а* представлен график $|Y(j\omega)|$; $m = 5$; $\omega_2 - \omega_1 = 50$; $\omega_0 = 100$. Найти R, L, C, Q.

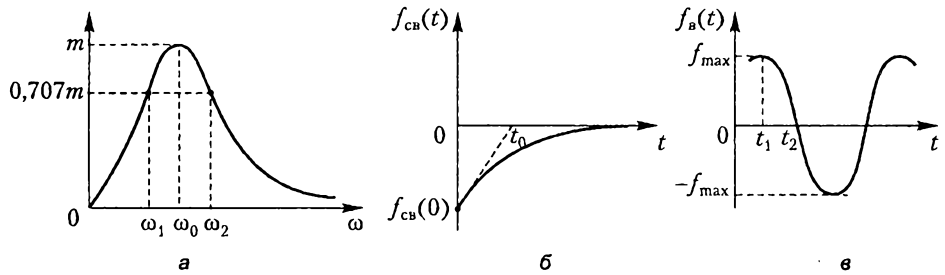


Рис. 1.4

Варианты 5—8. Резонанс в параллельной *RLC*-цепи.

5. $R = 100$; $L = 2$; $\omega_0 = 10$; $I = 2$. Найти C, Q, $\Delta\omega$, I_L.

6. $\omega_0 = 10$; $Q = 5$; $I = 10$; $U = 2$. Найти R, L, C, ρ, I_C.
7. $R = 20$; $\omega_0 L = 10$; $I_C = 10$. Найти Q, I, I_R.
8. На рис. 1.4, *а* представлен график $|Z(j\omega)|$; $m = 2$; $\omega_2 - \omega_1 = 4$; $\omega_0 = 10$. Найти R, L, C, Q.

В вариантах 9–20 цепь находится в состоянии резонанса.

9. Цепь: 113 — ИН u; 212 — C; 323 — R; 423 — L; $R = |Z_L| = 2$. Найти Z_C, U_L/U.
10. Цепь: 113 — ИН u; 212 — L; 323 — R; 423 — C; $R = |Z_C| = 2$. Найти Z_L, U_C/U.
11. Цепь: 131 — ИТ i; 212 — R; 323 — L; 413 — C; $R = |Z_L| = 2$. Найти Z_C, I_L/I.
12. Цепь: 131 — ИТ i; 212 — R; 323 — C; 413 — L; $R = |Z_C| = 2$. Найти Z_L, I_C/I.
13. Цепь: 114 — ИН $U_1 = 8$; 212 — R_2; 324 — L_3; 423 — КЗ; 543 — C_5; 634 — R_6; $|Z_k| = 4$. Найти I_L, $I_{кз}$.
14. Цепь: 141 — ИТ $I_1 = 10$; 214 — R_2; 312 — R_3; 423 — L_4; 534 — C_5; $|Z_k| = 2$. Найти U_C, U_{13}.
15. Цепь: 116 — ИН $U_1 = 100$; 212 — R_2; 323 — L_3; 434 — C_4; 545 — КЗ; 646 — L_6; 756 — R_7; 856 — C_8; $|Z_k| = 10$. Найти I_1, I_5.
16. Цепь: 141 — ИТ $I_1 = 10$; 241 — $R_2 = 2$; 312 — L_3; $|Z_L| = 4$; 423 — C_4; 534 — $R_5 = 2$. Найти U_C, U_{24}.
17. Цепь: 114 — ИН U_1; 212 — $R_2 = 2$; 323 — L_3; $|Z_L| = 2$; 424 — $R_4 = 1$; 534 — C_5; $I_C = 2$. Найти $|Z_C|$, U_{13}, U_1.
18. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 5\cos\omega t$; 212 — R_2; 323 — L_3; 434 — C_4; $Q = 2$. Найти u_{13}, построить графики u_1, u_3.
19. Цепь: 131 — ИТ; 213 — C_1; 312 — КЗ; 423 — L; 523 — R_5; $Q = 2$; $i_R = 4\cos\omega t$. Найти I_3, построить графики i_R, i_L, i_C.
20. Цепь: 114 — ИН $U_1 = 1$; 212 — R_2; 323 — L_3; 434 — C_4. Как изменится Q при увеличении C вдвое? Найти U_{13} и построить векторную диаграмму при $Q = 2$.
21. Цепь: 131 — ИТ; 213 — R_2; 312 — L_3; 412 — C_4; 523 — $R_5 = R_2$. Качественно построить АЧХ $|H(j\omega)| = I_5/I_1$, используя эквивалентные схемы цепи для $\omega = 0$, $\omega \to \infty$ и для резонансной частоты ω_0.
22. Цепь: 112 — R_1; 223 — L_2; 323 — C_3. Качественно построить график $|Y_{13}(j\omega)|$, используя характерные значения $|Y_{13}|$ при $\omega = 0$, $\omega \to \infty$ и при резонансной частоте ω_0.
23. Цепь: 113 — ИН u; 212 — R; 323 — L; 423 — C. Качественно построить АЧХ $|H(j\omega)| = U_C/U$, используя эквивалентные схемы цепи для $\omega = 0$, $\omega \to \infty$ и для резонансной частоты ω_0.
24. Цепь: 131 — ИТ; 213 — $C = 0{,}125$; 312 — R; 423 — $L = 1$; $\omega = 2$. Найти R при резонансе.

25. Цепь: 113 — ИН U; 212 — $L = 1{,}0$; 323 — R; 423 — $C = 0{,}125$; $\omega = 2$. Найти R при резонансе.

1.3.11. В задаче 1.3.5 качественно построить ВД при резонансе и в общем виде найти резонансную частоту.

1.3.12. К моменту $t = 0$ в цепи нулевые начальные условия. Найти указанную реакцию при $t > 0$.

1. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 3\exp(-t)\delta_1(t)$; 213 — R_2; 312 — $C_3 = 2$; 423 — R_4; $R_k = 1$. Найти i_3.
2. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 3\exp(-t)\delta_1(t)$; 212 — R_2; 323 — $L_3 = 2$; 423 — R_4; $R_k = 1$. Найти u_4.
3. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 4\exp(-2t)\delta_1(t)$; 213 — R_2; 312 — R_3; 423 — $C_4 = 1$; 523 — R_5; $R_k = 1$. Найти i_5.
4. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = \exp(-2t)\delta_1(t)$; 213 — R_2; 312 — R_3; 423 — $L_4 = 1$; $R_k = 2$. Найти u_4.
5. Цепь: 113 — ИН $u_1 = \exp(-2t)\delta_1(t)$; 212 — R_2; 323 — R_3; 423 — $C_4 = 2$; $R_k = 1$. Найти i_4.
6. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 2\exp(-3t)\delta_1(t)$; 212 — R_2; 324 — R_3; 423 — R_4; 534 — $L_5 = 1$; $R_k = 3$. Найти u_5.
7. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 3\exp(-2t)\delta_1(t)$; 212 — R_2; 324 — R_3; 423 — $C_4 = 1$; 534 — R_5; $R_k = 1$. Найти u_5.
8. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 4\exp(-2t)\delta_1(t)$; 213 — R_2; 312 — R_3; 423 — $C_4 = 1$; 523 — R_5; $R_k = 1$. Найти i_3.
9. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 2\exp(-3t)\delta_1(t)$; 212 — R_2; 324 — R_3; 423 — R_4; 534 — $L_5 = 1$; $R_k = 3$. Найти i_3.
10. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 3\exp(-t)\delta_1(t)$; 213 — R_2; 312 — R_3; 423 — $L_4 = 2$; 523 — R_5; $R_k = 1$. Найти i_5.
11. Цепь: 114 — ИН $u_1 = \cos t\,\delta_1(t)$; 212 — R_2; 324 — R_3; 423 — R_4; 534 — $L_5 = 2$; $R_k = 1$. Найти u_5.
12. Цепь: 113 — ИН $u_1 = \sqrt{2}\cos(2t + 45°)\delta_1(t)$; 212 — R_2; 323 — R_3; 423 — $C_4 = 1$; $R_k = 1$. Найти u_4.
13. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 5\sin t\,\delta_1(t)$; 212 — R_2; 324 — R_3; 423 — R_4; 534 — $L_5 = 2$; $R_k = 1$. Найти u_5.
14. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 4\cos(t + 45°)\delta_1(t)$; 212 — R_2; 323 — $L_3 = 1$; 423 — R_4; $R_k = 2$. Найти u_4.

15. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 5\cos 2t\,\delta_1(t)$; 213 — R_2; 312 — R_3; 423 — $C_4 = 1$; 523 — R_5; $R_k = 1$. Найти i_4.
16. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 4\cos 3t\,\delta_1(t)$; 212 — R_2; 324 — R_3; 423 — R_4; 534 — $L_5 = 0{,}5$; $R_k = 1$. Найти u_5.
17. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 8\cos(2t + 45°)\,\delta_1(t)$; 213 — R_2; 312 — R_3; 423 — $L_4 = 1$; $R_k = 1$. Найти i_4.
18. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 4\cos(t + 90°)\,\delta_1(t)$; 213 — R_2; 312 — $C_3 = 0{,}5$; 423 — R_4; $R_k = 1$. Найти i_4.
19. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = \exp(-t)\cos\delta_1(t)$; 213 — R_2; 312 — R_3; 423 — $L_4 = 1$; $R_k = 1$. Найти i_4.
20. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 4\exp(-t)\cos(t - 90°)\,\delta_1(t)$; 213 — R_2; 312 — R_3; 423 — $C_4 = 1{,}5$; 523 — R_5; $R_k = 0{,}5$. Найти i_4.
21. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 4\exp(-2t)\cos(t + 45°)\,\delta_1(t)$; 212 — R_2; 324 — R_3; 423 — R_4; 534 — $L_5 = 1$; $R_k = 2$. Найти u_4.
22. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 2\exp(-3t)\cos(2t + 90°)\,\delta_1(t)$; 213 — R_2; 312 — R_3; 423 — $C_4 = 1$; 523 — R_5; $R_k = 1$. Найти u_5.
23. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 6\exp(-t)\cos(t + 45°)\,\delta_1(t)$; 213 — R_2; 312 — R_3; 423 — $L_4 = 1/3$; 523 — R_5; $R_k = 1$. Найти i_5.
24. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 4\exp(-2t)\cos(2t + 45°)\,\delta_1(t)$; 212 — R_2; 323 — R_3; 423 — $C_4 = 0{,}5$; $R_k = 1$. Найти u_3.
25. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 4\exp(-2t)\cos(2t + 45°)\,\delta_1(t)$; 212 — R_2; 323 — R_3; 423 — $C_4 = 0{,}5$; $R_k = 1$. Найти i_2.

1.3.13. В момент $t = 0$ в цепи замыкается (размыкается) ключ К. Определить указанную реакцию для $t > 0$.

1. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 2\cos 2t$; 214 — $R_2 = 1$; 312 — $L_3 = 0{,}5$; 424 — К, замыкается; 523 — $R_5 = 1$; 634 — $C = 0{,}5$; 734 — ИТ $i_7 = 2\cos(2t + 90°)$. Найти u_2 и u_C.
2. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 4\sqrt{2}\cos(2t - 45°)$; 214 — $R_2 = 0{,}25$; 312 — $R_3 = 0{,}25$; 424 — $L_4 = 0{,}25$; 523 — К, размыкается; 634 — $R_6 = 0{,}5$; 734 — $C_7 = 1$. Найти i_C и u_L.
3. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 2\sqrt{2}\cos(t - 45°)$; 212 — $R_2 = 2$; 324 — $L_3 = 1$; 445 — $C_4 = 1$; 545 — К, замыкается; 623 — $R_6 = 2$; 735 — ИН $u_7 = 4\cos(t + 90°)$. Найти i_L и i_2.
4. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 4\cos(2t + 45°)$; 214 — $R_2 = 1$; 312 — $R_3 = 1$; 423 — $L_4 = 0{,}5$; 513 — К, замыкается; 634 — $C_6 = 0{,}5$; 734 — ИТ, $i_7 = 2\sqrt{2}\cos 2t$. Найти u_C и u_L.
5. Цепь: 151 — ИТ $i_1 = 2\cos t$; 215 — $R_2 = 1$; 312 — $R_3 = 1$; 425 — $L_4 = 2$; 523 — К, замыкается; 634 — $R_6 = 1$; 745 — ИН $u_7 = 0{,}5\sqrt{2}\cos(t - 45°)$. Найти i_L и i_3.

6. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 2\cos 2t$; 212 — $R_2 = 1$; 325 — $C_3 = 0{,}5$; 423 — К, размыкается; 535 — $R_5 = 1$; 643 — $L_6 = 0{,}5$; 745 — ИН $u_7 = 2\cos(2t + 90°)$. Найти i_L и i_1.
7. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 10\sqrt{2}\cos(2t + 45°)$; 214 — $R_2 = 0{,}25$; 313 — $C_3 = 1$; 412 — — $R_4 = 0{,}5$; 532 — К, размыкается; 634 — $R_6 = 0{,}25$. Найти i_2 и i_C.
8. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 4\cos(t + 90°)$; 212 — $L_2 = 2$; 325 — $R_3 = 2$; 423 — К, размыкается; 535 — $C_5 = 0{,}5$; 634 — $R_6 = 1$; 745 — $R_7 = 1$; 854 — ИТ $i_8 = 4\cos t$. Найти i_L и i_C.
9. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 4\cos(t + 45°)$; 212 — $R_2 = 1$; 325 — $R_3 = 1$; 423 — $L = 0{,}5$; 535 — К, размыкается; 634 — $R_6 = 1$; 745 — ИН $u_7 = 4\cos(t - 45°)$. Найти i_3 и i_L.
10. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 2\cos t$; 212 — $R_2 = 1$; 324 — $R_3 = 1$; 423 — $C = 2$; 534 — К, размыкается; 634 — $R_6 = 1$; 734 — ИТ $i_7 = 0{,}5\sqrt{2}\cos(t - 45°)$. Найти u_C и i_3.
11. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 10\cos(2t - 90°)$; 213 — К, размыкается; 313 — $R_3 = 0{,}5$; 412 — $L = 0{,}5$; 523 — $R_5 = 0{,}5$; 623 — ИТ $i_6 = 10\cos 2t$. Найти u_3 и i_L.
12. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 10\sqrt{2}\cos(2t - 135°)$; 214 — $R_2 = 0{,}25$; 312 — $R_3 = 0{,}25$; 424 — $C = 1$; 523 — К, размыкается; 634 — $R_6 = 2$; 734 — $L = 0{,}25$. Найти i_C и u_L.
13. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 4\cos(2t + 45°)$; 212 — $R_2 = 1$; 324 — К, размыкается; 445 — $R_4 = 1$; 545 — $C = 0{,}5$; 623 — $L = 0{,}5$; 735 — ИН $u_7 = 2\sqrt{2}\cos 2t$. Найти i_L и i_C.
14. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 4\cos(t - 45°)$; 212 — $R_2 = 1$; 324 — $C = 2$; 445 — К, размыкается; 525 — $L = 0{,}5$; 623 — $R_6 = 1$; 735 — ИН $u_7 = 4\cos(t - 135°)$. Найти i_2 и i_L.
15. Цепь: 151 — ИТ $i_1 = 4\sqrt{2}\cos(2t + 45°)$; 215 — $R_2 = 1$; 312 — $R_3 = 1$; 425 — $C = 0{,}25$; 523 — К, размыкается; 635 — $R_6 = 2$; 734 — $L = 1$; 845 — ИН $u_8 = 2\sqrt{2}\cos(2t + 135°)$. Найти i_C и i_L.
16. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 10\cos(2t - 90°)$; 212 — К, замыкается; 323 — $R_3 = 2$; 435 — — $C = 0{,}5$; 534 — $R_5 = 2$; 645 — ИН $u_6 = 10\cos 2t$. Найти u_C и i_3.
17. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 10\sqrt{2}\cos(2t + 135°)$; 212 — $R_2 = 4$; 325 — $R_3 = 4$; 423 — $C = 0{,}25$; 535 — К, замыкается; 634 — $R_6 = 0{,}5$; 745 — $L = 1$. Найти i_C и u_L.
18. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 10\sqrt{2}\cos(2t + 45°)$; 212 — $R_2 = 4$; 325 — $R_3 = 4$; 423 — $L = 1$; 535 — К, замыкается; 634 — $R_6 = 0{,}5$; 745 — $C = 0{,}25$. Найти i_C и u_L.
19. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 6\cos(2t + 45°)$; 214 — $R_2 = 1$; 312 — $C = 0{,}25$; 413 — К, размыкается; 532 — $R_5 = 1$; 632 — $L = 1$; 724 — $R_7 = 1$; 824 — ИТ $i_8 = 6\cos(2t - 45°)$. Найти i_C и i_L.

20. Цепь: 151 — ИТ $i_1 = 8\cos(t - 90°)$; 215 — $R_2 = 1$; 312 — $R_3 = 1$; 425 — $C = 0{,}5$; 523 — К, замыкается; 634 — $R_6 = 1$; 745 — ИН $u_7 = \sqrt{2}\cos(t + 45°)$. Найти i_2 и i_C.
21. Цепь: 151 — ИТ $i_1 = 4\cos t$; 215 — $R_2 = 1$; 312 — $C = 0{,}5$; 423 — $R_4 = 1$; 535 — К, замыкается; 634 — $L = 2$; 745 — $R_7 = 2$; 845 — ИТ $i_8 = 4\cos(t + 90°)$. Найти i_C и i_L.
22. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 10\sqrt{2}\cos(2t - 135°)$; 212 — $R_2 = 4$; 325 — $R_3 = 4$; 423 — $L = 1$; 534 — $C = 0{,}25$; 645 — $R_6 = 0{,}5$; 735 — К, замыкается. Найти u_L и i_C.
23. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 2\sqrt{2}\cos(t - 90°)$; 212 — $R_2 = 1$; 324 — $R_3 = 1$; 445 — $C = 1$; 525 — К, замыкается; 623 — $L = 1$; 735 — $R_7 = 1$; 835 — ИТ $i_8 = 4\cos(t + 45°)$. Найти i_C и u_L.
24. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 4\cos t$; 212 — $R_2 = 1$; 325 — $L = 0{,}5$; 425 — $R_4 = 1$; 523 — К, размыкается; 635 — $C = 2$; 734 — $R_7 = 0{,}5$; 845 — ИН $u_8 = 4\cos(t + 90°)$. Найти u_L и i_C.
25. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 10\sqrt{2}\cos(2t - 135°)$; 212 — $R_2 = 4$; 323 — $L = 1$; 434 — $R_4 = 2$; 534 — К, замыкается; 624 — $R_6 = 4$. Найти i_L и u_6.

1.3.14. Проанализировать характеристики переходных процессов при синусоидальных воздействиях.

Варианты 1—7. При нулевых начальных условиях последовательная RL (RC)-цепь подключается к источнику напряжения в момент $t = 0$.

1. $u_{Lн} = 100\sqrt{2}\cos(5t + 45°)$; $L = 2$; $R = 10$. Найти i_L и построить график.
2. На рис. 1.4, *б* приведен график $u_{Ссв}$; $u_{Ссв}(0+) = -4\sqrt{2}$; $t_0 = 0{,}5$; $\alpha_{uC} = 45°$; $\tau = T/4$. Найти u_C и построить график.
3. На рис. 1.4, *б* приведен график $i_{Lсв}$; $i_{Lсв}(0+) = -5$; $t_0 = 1/3$; $\alpha_{iL} = 60°$; $\tau = T/3$. Найти i_L и построить график.
4. $u = U_m\cos(2t + 60°)$; $R = 2$; $C = 1/4$; $i(0+) = 5$. Найти U_m, i_C.
5. $R = 2$; $|Z_{вх}| = 2\sqrt{2}$; $i_{Lсв} = 0$. Найти α_u, T/τ.
6. На рис. 1.4, *в* приведен график $u_{Cъ}$; $U_{Cm} = 4$; $t_1 = 1$; $t_2 = 3$; $\tau = T/4$. Найти u_C и построить график.
7. $u_{Cв} = 100\cos 10t$; $R = |Z_C| = 10$. Найти τ, i_C и построить график i_C.

Варианты 8—11. При нулевых начальных условиях параллельная RL (RC)-цепь подключается к источнику тока в момент $t = 0$.

8. На рис. 1.4, *в* приведен график $i_{Lъ}$; $I_{Lm} = 6$; $t_1 = 0{,}5$; $t_2 = 1{,}5$; $\tau = T/2$. Найти i_L и построить график.

9. $u_{Cв} = 4\cos(2t + 60°)$; $C = 1$; $R = 2$. Найти u_C и построить график.

10. $|Y_{вх}| = 2\sqrt{2}$; $L = 0{,}5$; $\omega = 1$; $u_L(0^+) = -5\sqrt{2}$; $\alpha_{iL} = 90°$. Найти ток источника i.

11. На рис. 1.4, *б* приведен график $u_{Cсв}$; $u_{C-в}(0+) = -3\sqrt{2}$; $t_0 = 1$; $\tau = T/4$; $\alpha_{uC} = 45°$. Найти u_C и построить график.

Варианты 12–19. Цепь при нулевых начальных условиях подключается к источнику.

12. Цепь: 114 – ИН u_1; 212 – К, замыкается; 323 – R_3; 434 – L_4; 534 – R_5; $R_3 = R_5 = |Z_L| = 2$; $i_{Lв} = 2\sqrt{2}\cos(2t + 45°)$. Найти $i_{Lсв}$, u_1.

13. Цепь: 131 – ИТ i_1; 213 – К, размыкается; 313 – $R_3 = 2$; 412 – $R_4 = 2$; 523 – $C_5 = 1/4$; $u_{Cв} = 4\cos 2t$. Найти $u_{Ccв}$, i_1.

14. Цепь: 115 – ИН $u_1 = 5\sqrt{2}\cos(2t - 45°)$; 212 – К, замыкается; 323 – $R_3 = 3$; 434 – R_4; 545 – $C_5 = 0{,}25$; 635 – $L_6 = 2$; $u_4(0+) = 2$. Найти R_4, $i_{3в}$.

15. Цепь: 131 – ИТ $i_1 = 6\cos(t + 60°)$; 213 – К, размыкается; 313 – $R_3 = 2$; 412 – $C_4 = 1$; 523 – $R_5 = 2$; 623 – $L_6 = 2$. Найти $i_4(0+)$, $u_5(0+)$, $u_{5в}$.

16. Цепь: 114 – ИН $u_1 = 20\cos(2t - 135°)$; 212 – К, замыкается; 323 – $R_3 = 2$; 434 – $L_4 = 1$; 534 – $C_5 = 0{,}25$; 634 – $R_6 = 2$. Найти $i_5(0+)$, $i_{5в}$.

17. Цепь: 141 – ИТ $i_1 = 5\sqrt{2}\cos(t + 45°)$; 214 – К, размыкается; 314 – R_3; 412 – $L_4 = 2$; 523 – $R_5 = 1$; 634 – $C_6 = 1$; $u_3(0+) = 10$. Найти R_3, $u_{5в}$.

18. Цепь: 115 – ИН $u_1 = 30\cos(2t - 60°)$; 212 – К, замыкается; 323 – $C_3 = 0{,}5$; 435 – $R_4 = 2$; 534 – $R_5 = 2$; 645 – $L_6 = 1$. Найти $i_3(0+)$, $u_6(0+)$, $i_{3в}$.

19. Цепь: 131 – ИТ $i_1 = 2\sqrt{2}\cos(t - 45°)$; 213 – К, размыкается; 313 – $L_3 = 2$; 412 – $R_4 = 1$; 523 – $R_5 = 2$; 623 – $C_6 = 1/2$. Найти $i_6(0+)$, $u_3(0+)$, $u_{3в}$.

Варианты 20–25. В момент $t = 0$ в цепи замыкается (размыкается) ключ К.

20. Цепь: 115 – ИН $u_1 = 8\cos 2t$; 212 – $R_2 = 1$; 325 – $L_3 = 1$; 423 – К, замыкается; 534 – $C_5 = 5$; 645 – $R_6 = 1$. Найти $i_5(0+)$, $u_3(0+)$.

21. Цепь: 131 – ИТ $i_1 = 5\cos t$; 213 – $R_2 = 2$; 312 – $C_3 = 1$; 423 – К, размыкается; 523 – $L_5 = 4$; 623 – $R_6 = 2$. Найти $u_5(0+)$, $i_3(0+)$.

22. Цепь: 115 – ИН $u_1 = 40\cos(5t - 90°)$; 212 – $R_2 = 2$; 325 – $C_3 = 0{,}1$; 423 – К, замыкается; 534 – $R_5 = 2$; 645 – $C_6 = 0{,}1$. Найти $u_2(0+)$, $i_6(0+)$.

23. Цепь: 131 – ИТ $i_1 = 5\cos t$; 213 – $R_2 = 2$; 312 – $L_3 = 1$; 423 – К, размыкается; 523 – $R_5 = 2$; 623 – $L_6 = 2$. Найти $u_3(0+)$, $u_6(0+)$.

24. Цепь: 114 – ИН $\dot{U}_{m1} = 20 + j20$; $\omega = 2$; 212 – $R_2 = 2$; 324 – $L_3 = 1$; 423 – К, размыкается; 534 – $C_5 = 0{,}25$; 634 – $R_6 = 2$. Найти $u_3(0+)$, $i_{3в}$, i_5.

25. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 8\cos(t + 60°)$; 214 — $R_2 = 2$; 312 — $C_3 = 0{,}5$; 424 — К, замыкается; 523 — $L_5 = 2$; 634 — $R_6 = 2$. Найти $i_3(0+)$, $u_{3\text{н}}$, u_5.

1.3.15. Определить указанные характеристики трехфазных цепей. Порядок следования фаз — прямой, система линейных напряжений $U_л$ — симметричная.

Варианты 1—6. Построить векторную диаграмму линейных и фазных токов и напряжений при $|Z_L| = |Z_C| = R$.

1. Цепь: $1A0_1 - XX$; $2B0_1 - L$; $3C0_1 - R$.
2. Цепь: $1A0_1 - C$; $2B0_1$ — КЗ; $3C0_1 - R$.
3. Цепь: $1A0_1 - R$; $2B0_1 - C$; $3C0_1 - XX$.
4. Цепь: $1Aa - XX$; $2Bв$ — КЗ; $3Cc$ — КЗ; $4aв - R$; $5вc - R$; $6ca - C$.
5. Цепь: $1Aa$ — КЗ; $2Bв - XX$; $3Cc$ — КЗ; $4aв - R$; $5вc - L$; $6ca - R$.
6. Цепь: $1Aa$ — КЗ; $2Bв$ — КЗ; $3Cc$ — КЗ; $4aв - L$; $5вc - XX$; $6ca - R$.
7. Соединение звездой без нулевого провода: $U_л = 20$, $Y_a = 0$, $Y_b = 1$, $Y_c = j$. Найти U_{A0_1}, U_{B0_1}.
8. Соединение звездой с нулевым проводом: $Z_a = j10$; обрыв фазы «c»; $I_Л = I_B = I_0 = 1$. Найти Z_b.
9. Соединение звездой без нулевого провода: $i_Л(t) = 10\cos(\omega t - 90°)$; $u_{BC}(t) = 100\sqrt{3}\cos(\omega t - 90°)$; $Z_a = Z_b = Z_c = Z_ф$. Найти $Z_ф$.
10. Соединение треугольником: $U_л = 20$; $Z_{ab} = Z_{bc} = Z_{ca} = Z_ф$. Найти U_{Aa} при обрыве линейного провода фазы «A».
11. Соединение треугольником: $U_л = 10$; $Z_{ab} = 10\exp(j30°)$, $Z_{bc} = j10$, $Z_{ca} = 10\exp(j60°)$. Найти $I_Л$, I_B, I_C.
12. Решить задачу 11 при обрыве фазы «$aв$».
13. Решить задачу 11 при $Z_{ab} = 10\exp(-j60°)$.
14. Решить задачу 11 при $Z_{ab} = 10\exp(-j60°)$ и обрыве линейного провода фазы «A», а также найти U_{Aa}.
15. Соединение звездой без нулевого провода: все $Z_ф$ одинаковы; $I_ф = 2$. Найти токи при обрыве фазы «C».
16. Решить задачу 15 при КЗ фазы «a».
17. Соединение звездой с нулевым проводом: $1a0_1 - L$; $2b0_1 - C$; $3c0_1 - R$; $I_Л = I_B = I_0 = 1$. Найти I_C.
18. Решить задачу 17 при резистивных элементах во всех фазах.
19. Соединение звездой без нулевого провода: $Z_b = 5\exp(-j60°)$; КЗ фазы «a»; $I_Л = 0$. Найти Z_c.

20. Соединение звездой без нулевого провода: $Z_a = Z_c = 2; Z_b = 0; I_B = 3$. Определить I_A, I_C.
21. Решить задачу 20 при $Z_c = 2\exp(j60°)$.
22. Решить задачу 20 при $Z_a = 2\exp(j30°)$; $I_B = 4$.
23. Соединение треугольником: $i_A(t) = 10\sqrt{3}\cos(\omega t + 30°)$; $Z_{ab} = Z_{bc} = Z_{ca} = 10\exp(j30°)$. Найти $u_{BC}(t)$.
24. Решить задачу 23 при обрыве фазы «*ca*».
25. Соединение треугольником: $Z_{ab} = 10; Z_{bc} = Z_{ca} = 10\exp(j30°)$; $i_A(t) = 10\sqrt{2}\cos(\omega t + 30°)$. Найти $u_{BC}(t)$.

1.4. Операторный и спектральный методы анализа цепей

1.4.1. По *изображениям* тока индуктивности $f(t) = i_L(t)$ при $L = 1$ найти *вначале* $i_L(0+)$, $U_L(s)$ и $u_L(0+)$, используя теорему о начальном значении и ОСЗ, а *затем* оригиналы функций. Построить график $f_2(t)$, указав на нем постоянную времени τ и период T затухающей синусоиды, а также *проконтролировав* рассчитанное *вначале* значение $i_L(0+)$ и знак производной $i'_L(0+) = u_L(0+)/L$.

1. $F_1(s) = \dfrac{12}{s(s+2)^2}$; $F_2(s) = \dfrac{4s^2 + 12s + 20}{s(s^2 + 2s + 10)}$.

2. $F_1(s) = \dfrac{12(2s+1)}{s(s+2)^2}$; $F_2(s) = \dfrac{3s^2 + 2s + 20}{s(s^2 + 2s + 10)}$.

3. $F_1(s) = \dfrac{2s}{(s+1)^2(s+2)}$; $F_2(s) = \dfrac{10 - 5s}{s^2 + 2s + 10}$.

4. $F_1(s) = \dfrac{s^2 + 2s + 2}{s(s+1)^2}$; $F_2(s) = \dfrac{2s + 8}{s^2 + 2s + 10}$.

5. $F_1(s) = \dfrac{12(s^2 + 1)}{s(s+2)^2}$; $F_2(s) = \dfrac{10\sqrt{2}(s-3)}{s^2 + 2s + 17}$.

6. $F_1(s) = \dfrac{s^2 + 5s + 4}{s(s+2)^2}$; $F_2(s) = \dfrac{10\sqrt{2}(s-1{,}5)}{s^2 + s + 4{,}25}$.

7. $F_1(s) = \dfrac{3(s^2 + 3)}{s^2(s+3)}$; $F_2(s) = \dfrac{10\sqrt{2}(s+2{,}5)}{s^2 + s + 4{,}25}$.

8. $F_1(s) = \dfrac{s^2 + 2}{s(s+2)^2}$; $F_2(s) = \dfrac{10\sqrt{2}(-s+1{,}5)}{s^2 + s + 4{,}25}$.

9. $F_1(s) = \dfrac{12(2s+3)}{s(s+3)^2}$; $F_2(s) = \dfrac{10\sqrt{2}(s-1{,}75)}{s^2 + 0{,}5s + 4{,}0625}$.

10. $F_1(s) = \dfrac{2s+1}{(s+1)^2(s+2)}$; $F_2(s) = \dfrac{25 - 10s}{s^2 + s + 9{,}25}$.

11. $F_1(s) = \dfrac{50}{s(s+5)^2}$; $F_2(s) = \dfrac{35s + 92{,}5}{s(s^2 + s + 9{,}25)}$.

12. $F_1(s) = \dfrac{4(s^2 + 1)}{s(s+2)^2}$; $F_2(s) = \dfrac{20s^2 - 15s + 92{,}5}{s(s^2 + s + 9{,}25)}$.

13. $F_1(s)=\dfrac{s^2+5s+3}{s(s+1)^2}$; $F_2(s)=\dfrac{10s+35}{s^2+s+9{,}25}$.

14. $F_1(s)=\dfrac{s+2}{s(s+1)^2}$; $F_2(s)=\dfrac{\sqrt{2}(s+5)}{s^2+2s+17}$.

15. $F_1(s)=\dfrac{2s+3}{(s+2)^2(s+3)}$; $F_2(s)=\dfrac{20s^2+45s+92{,}5}{s(s^2+s+9{,}25)}$.

16. $F_1(s)=\dfrac{s^2+5s+2}{s(s+1)^2}$; $F_2(s)=\dfrac{5\sqrt{2}(-s+3)}{s^2+2s+17}$.

17. $F_1(s)=\dfrac{s^2-3s-1}{(s+4)(s+1)^2}$; $F_2(s)=\dfrac{5\sqrt{2}(s+5)}{s^2+2s+17}$.

18. $F_1(s)=\dfrac{24s+12}{s(s+2)^2}$; $F_2(s)=\dfrac{2\sqrt{5}(s-7)}{s^2+2s+17}$.

19. $F_1(s)=\dfrac{4s+4}{s(s+2)^2}$; $F_2(s)=\dfrac{10\sqrt{2}(s-2{,}5)}{s^2+s+9{,}25}$.

20. $F_1(s)=\dfrac{5s+2}{s^2(s+2)}$; $F_2(s)=\dfrac{-25s+92{,}5}{s(s^2+s+9{,}25)}$.

21. $F_1(s)=\dfrac{5s^2+11s+5}{(s+1)^2(s+2)}$; $F_2(s)=\dfrac{5\sqrt{2}(s+4{,}5)}{s^2+s+16{,}25}$.

22. $F_1(s)=\dfrac{2s^2+5s+5}{(s+1)^2(s+2)}$; $F_2(s)=\dfrac{10s-35}{s^2+s+16{,}25}$.

23. $F_1(s)=\dfrac{2s^2+18}{s(s+3)^2}$; $F_2(s)=\dfrac{3s^2+8s+20}{s(s^2+2s+10)}$.

24. $F_1(s)=\dfrac{5s^2+20s+18}{s(s+3)^2}$; $F_2(s)=\dfrac{5\sqrt{2}(s-2)}{s^2+2s+10}$.

25. $F_1(s)=\dfrac{4s^2+8s+4}{s(s+2)^2}$; $F_2(s)=\dfrac{7-2s}{s^2+s+16{,}25}$.

1.4.2. Используя условие задачи 1.2.3, определить операторным методом реакции i_L и u_C. Проконтролировать $i_L(0+)$, $u_C(0+)$.

1.4.3. В момент $t=0$ замыкается (размыкается) ключ К. Найти $u_C(0-)$, $i_L(0-)$ и составить операторную схему замещения (ОСЗ) цепи. *По указанию преподавателя* найти $u_C(t)$, $i_L(t)$.

1. Цепь: 115 — ИН $u_1=30\sqrt{2}\cos(t+45°)$; 212 — $R_2=1$; 312 — К, замыкается; 423 — $R_4=4$; 534 — $L_5=1$; 645 — $C_6=0{,}5$; 745 — $R_7=2$.

2. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 6\sqrt{2}\cos(t + 45°)$; 212 — $R_2 = 1$; 324 — $R_3 = 3$; 413 — $R_4 = 2$; 534 — $L_5 = 4$; 634 — $C_6 = 1/12$; 724 — К, замыкается.
3. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 15\sqrt{2}\cos(t + 45°)$; 212 — $R_2 = 4$; 313 — $R_3 = 4/3$; 423 — К, размыкается; 524 — $L_5 = 1/3$; 645 — $C_6 = 1$; 725 — $R_7 = 2$.
4. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 15\sqrt{2}\cos(t + 45°)$; 212 — $L_2 = 1$; 324 — $R_3 = 1$; 414 — $R_4 = 0{,}5$; 514 — $C_5 = 0{,}5$; 613 — К, размыкается; 734 — $R_7 = 2$.
5. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 30\sqrt{5}\cos(3t + 26{,}5°)$; 212 — $R_2 = 2$; 312 — К, замыкается; 423 — $R_4 = 1$; 534 — $L_5 = 1{,}25$; 634 — $C_6 = 0{,}2$.
6. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 6\sqrt{5}\cos(3t - 26{,}5°)$; 214 — $R_2 = 5$; 312 — $L_3 = 1$; 424 — $C_4 = 0{,}25$; 513 — К, размыкается; 634 — $R_6 = 2{,}5$.
7. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 10\sqrt{2}\cos(4t - 45°)$; 212 — $R_2 = 1$; 324 — $L_3 = 5/8$; 424 — $C_4 = 1/10$; 523 — К, размыкается; 634 — $R_6 = 1$.
8. Цепь: 151 — ИТ $i_1 = 5\sqrt{2}\cos(t + 45°)$; 212 — $R_2 = 1$; 325 — $L_3 = 1$; 413 — $C_4 = 0{,}5$; 535 — $R_5 = 2$; 634 — $R_6 = 2$; 745 — К, размыкается.
9. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 20\sqrt{2}\cos(4t - 45°)$; 212 — $R_2 = 2$; 324 — $L_3 = 5/8$; 424 — $C_4 = 1/10$; 523 — К, замыкается; 634 — $R_6 = 2$.
10. Цепь: 151 — ИТ $i_1 = 25\sqrt{2}\cos(2t - 45°)$; 212 — $R_2 = 2$; 325 — $L_3 = 1$; 413 — $R_4 = 1$; 535 — $C_5 = 0{,}5$; 614 — К, размыкается; 745 — $R_7 = 1$.
11. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 16\sqrt{5}\cos(3t + 26{,}5°)$; 212 — $R_2 = 1$; 312 — $C_3 = 1/4$; 424 — $L_4 = 4/3$; 523 — К, размыкается; 634 — $R_6 = 2$.
12. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 10\sqrt{2}\cos(4t - 45°)$; 214 — $R_2 = 1$; 312 — $L_3 = 0{,}1$; 423 — $C_4 = 5/8$; 534 — $R_5 = 1$; 634 — К, замыкается.
13. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 10\sqrt{2}\cos(t + 45°)$; 212 — $R_2 = 2$; 312 — $C_3 = 0{,}5$; 424 — $L_4 = 1$; 523 — $R_5 = 1$; 634 — $R_6 = 1$; 734 — К, замыкается.
14. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 10\sqrt{2}\cos(2t + 45°)$; 214 — $R_2 = 2$; 312 — К, размыкается; 424 — $R_4 = 0{,}4$; 513 — $C_5 = 0{,}5$; 613 — $R_6 = 1$; 734 — $L_7 = 0{,}25$.
15. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 10\sqrt{2}\cos(2t + 45°)$; 212 — $R_2 = 5$; 312 — К, замыкается; 423 — $R_4 = 1$; 534 — $L_5 = 1$; 645 — $R_6 = 2$; 735 — $C_7 = 1/8$.
16. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 25\cos(2t - 37°)$; 212 — $L_2 = 0{,}5$; 324 — $C_3 = 1/4$; 424 — $R_4 = 2$; 514 — $R_5 = 4$; 613 — К, размыкается; 734 — $R_7 = 0{,}8$.
17. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 30\sqrt{2}\cos(4t - 45°)$; 212 — $R_2 = 4$; 312 — $L_3 = 1{,}5$; 424 — $C_4 = 1/24$; 523 — К, размыкается; 634 — $R_6 = 3$.

18. Цепь: 116 — ИН $u_1 = 45\sqrt{2}\cos(2t - 45°)$; 212 — $R_2 = 6$; 323 — $L_3 = 1$; 434 — $C_4 = 0{,}25$; 546 — $R_5 = 3$; 625 — К, замыкается; 756 — $R_7 = 3$.
19. Цепь: 151 — ИТ $i_1 = 4\sqrt{5}\cos(2t - 26{,}5°)$; 215 — $R_2 = 2$; 312 — $C_3 = 1/3$; 423 — $L_4 = 1/4$; 534 — $L_5 = 1$; 645 — $R_6 = 1$; 735 — К, замыкается.
20. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 20\sqrt{2}\cos(6t + 45°)$; 212 — $R_2 = 5$; 312 — К, замыкается; 423 — $R_4 = 1$; 534 — $R_5 = 2$; 645 — $C_6 = 1/12$; 735 — $L_7 = 2/3$.
21. Цепь: 151 — ИТ $i_1 = 5\sqrt{2}\cos(2t - 45°)$; 215 — $R_2 = 4$; 312 — $L_3 = 1$; 423 — $C_4 = 1/4$; 535 — $R_5 = 1$; 614 — К, размыкается; 745 — $R_7 = 0{,}8$.
22. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 5\sqrt{2}\cos(2t - 45°)$; 212 — $R_2 = 0{,}25$; 323 — $R_3 = 1{,}25$; 423 — К, замыкается; 534 — $C_5 = 1$; 634 — $L_6 = 0{,}25$; 734 — $R_7 = 1$.
23. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 5\cos(2t - 37°)$; 212 — $R_2 = 1$; 324 — $L_3 = 2{,}5$; 424 — $C_4 = 0{,}1$; 513 — $R_5 = 1$; 634 — $R_6 = 2$; 734 — К, замыкается.
24. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 10\sqrt{2}\cos(3t - 45°)$; 212 — $R_2 = 1$; 323 — $L_3 = 5/9$; 423 — $C_4 = 1/5$; 524 — К, замыкается; 643 — $R_6 = 1$.
25. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 10\sqrt{2}\cos(3t - 45°)$; 214 — $R_2 = 1$; 312 — $L_3 = 1/5$; 423 — $C_4 = 5/9$; 534 — $R_5 = 1$; 634 — К, размыкается.

1.4.4. Составить операторную схему замещения цепи. Определить указанную реакцию $f_2(t)$; проконтролировать $f_2(0+)$.

1. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 2\exp(-t)\delta_1(t)$; 212 — $R_2 = 4$; 323 — $R_3 = 4$; 423 — $C_4 = 0{,}25$; $u_4(0-) = 4$. Найти u_4.
2. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 4\exp(-2t)\delta_1(t)$; 213 — $R_2 = 1$; 312 — $L_3 = 1$; $i_3(0-) = 2$; 423 — $R_4 = 1$. Найти u_3.
3. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 4\exp(-3t)\delta_1(t)$; 212 — $R_2 = 1$; 323 — $R_3 = 1$; 423 — $L_4 = 0{,}25$; $i_4(0-) = 4$. Найти u_4.
4. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 8\exp(-4t)\delta_1(t)$; 213 — $R_2 = 1$; 312 — $R_3 = 1$; 423 — $C_4 = 0{,}25$; $u_4(0-) = 8$. Найти u_4.
5. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 3\delta_1(t)$; 212 — $R_2 = 3$; 323 — $L_3 = 1$; 434 — $C_4 = 0{,}5$; $u_4(0-) = 6$. Найти u_4.
6. Цепь: 121 — ИТ $i_1 = 4\delta_1(t)$; 212 — $R_2 = 0{,}5$; 312 — $L_3 = 0{,}2$; 412 — $C_4 = 1$; $u_4(0-) = 2$. Найти u_4.
7. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 4\delta_1(t)$; 212 — $R_2 = 2$; 323 — $L_3 = 0{,}5$; $i_3(0-) = 4$; 434 — $C_4 = 2/3$. Найти u_3.
8. Цепь: 121 — ИТ $i_1 = 2\delta_1(t)$; 212 — $R_2 = 0{,}4$; 312 — $L_3 = 1/3$; $i_3(0-) = 1$; 412 — $C_4 = 0{,}5$. Найти i_3.

9. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 4[1+\exp(-t)]\delta_1(t)$; 212 — $R_2 = 1$; 323 — $L_3 = 1$; $i_3(0-) = 2$. Найти u_3.
10. Цепь: 121 — ИТ $i_1 = 2[1+\exp(-2t)]\delta_1(t)$; 212 — $R_2 = 0{,}25$; 312 — $C_3 = 1$; $u_3(0-) = 2$. Найти i_3.
11. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 4[1+\exp(-3t)]\delta_1(t)$; 212 — $R_2 = 2$; 323 — $C_3 = 1/8$; $u_3(0-) = 4$. Найти u_3.
12. Цепь: 121 — ИТ $i_1 = [2+2\exp(-6t)]\delta_1(t)$; 212 — $R_2 = 2$; 312 — $L_3 = 0{,}5$; $i_3(0-) = 2$. Найти i_3.
13. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 4t\,\delta_1(t)$; 212 — $R_2 = 4$; 323 — $L_3 = 1$; $i_3(0-) = 4$; 423 — $R_4 = 4$. Найти i_3.
14. Цепь: 121 — ИТ $i_1 = 2\exp(-t)\delta_1(t)$; 212 — $R_2 = 2$; 312 — $C_3 = 0{,}5$; $u_3(0-) = 4$. Найти i_3.
15. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 4\exp(-3t)\delta_1(t)$; 212 — $R_2 = 3$; 323 — $L_3 = 1$; $i_3(0-) = 2$. Найти u_3.
16. Цепь: 121 — ИТ $i_1 = (2+2t)\delta_1(t)$; 212 — $R_2 = 1$; 312 — $C_3 = 1$; $u_3(0-) = 2$. Найти u_3.
17. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 8\exp(-2t)\delta_1(t)$; 212 — $L_2 = 1$; 323 — $C_3 = 1$; $u_3(0-) = 4$. Найти u_3.
18. Цепь: 121 — ИТ $i_1 = 2\exp(-t)\delta_1(t)$; 212 — $L_2 = 1$; 312 — $C_3 = 0{,}25$; $u_3(0-) = 8$. Найти i_3.
19. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 4\exp(-t)\delta_1(t)$; 212 — $L_2 = 1$; $i_2(0-) = 2$; 323 — $C_3 = 1/9$. Найти u_2.
20. Цепь: 121 — ИТ $i_1 = 4\exp(-t)\delta_1(t)$; 212 — $C_2 = 1$; 312 — $L_3 = 0{,}25$; $i_3(0-) = 4$. Найти u_3.
21. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 4\exp(-4t)\delta_1(t)$; 212 — $R_2 = 4$; 323 — $L_3 = 1$; $i_3(0-) = 4$. Найти u_3.
22. Цепь: 121 — ИТ $i_1 = 2(1+t)\delta_1(t)$; 212 — $R_2 = 1$; 312 — $L_3 = 1$; $i_3(0-) = 2$. Найти i_3.
23. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 6\exp(-3t)\delta_1(t)$; 212 — $R_2 = 1$; 323 — $C_3 = 1/3$; $u_3(0-) = 6$. Найти u_3.
24. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 4\delta_1(t)$; 212 — $L_2 = 1$; $i_2(0-) = 2$; 323 — $C_3 = 0{,}1$; 413 — $R_4 = 2$. Найти u_2.
25. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 8\exp(-2t)\delta_1(t)$; 212 — $R_2 = 4$; 323 — $L_3 = 1$; 434 — $C_4 = 1/3$; $u_4(0-) = 4$. Найти u_4.

1.4.5. Составить операторную схему замещения, определить указанную реакцию и дать трактовку полученному результату.

1. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 4\delta_1(t)$; 212 — $R_2 = 2$; 323 — $L_3 = 1$; 413 — $L_4 = 1$. Найти u_4.
2. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 5$; 212 — $R_2 = 1$; 324 — $C_3 = 0{,}2$; 423 — К, замыкается; 534 — $C_5 = 0{,}8$. Найти i_5.
3. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 4\delta_1(t)$; 212 — $R_2 = 1$; 323 — $C_3 = 2$; 413 — $C_4 = 2$. Найти i_4, u_4.
4. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 4\exp(-t)\delta_1(t)$; 212 — $L_2 = 2$; 323 — $R_3 = 2$; 423 — $L_4 = 2$. Найти i_2, u_2.
5. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 2$; 214 — $R_2 = 1$; 312 — $R_3 = 1$; 424 — $C_4 = 1$; 523 — К, замыкается; 634 — $C_6 = 1$. Найти i_6.
6. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 16$; 212 — $L_2 = 0{,}5$; 323 — $R_3 = 4$; 434 — $L_4 = 1$; 545 — $R_5 = 4$; 624 — К, размыкается. Найти u_2.
7. Цепь: 151 — ИТ $i_1 = 6$; 212 — $R_2 = 1$; 325 — $L_3 = 0{,}5$; 413 — $L_4 = 0{,}5$; 534 — $R_5 = 2$; 645 — $L_6 = 0{,}5$; 735 — К, размыкается. Найти u_{35}.
8. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 15\cos t$; 212 — $C_2 = 1$; 323 — $C_3 = 1/2$; 424 — $R_4 = 2$; 543 — К, размыкается. Найти u_2.
9. Цепь: 121 — ИТ $i_1 = 8$; 212 — $R_2 = 0{,}5$; 312 — $C_3 = 0{,}25$; 413 — К, замыкается; 532 — $C_5 = 0{,}75$; 632 — $L_6 = 1$. Найти i_3.
10. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 16$; 212 — $R_2 = 4$; 323 — $L_3 = 0{,}5$; 434 — $L_4 = 1{,}5$; 545 — $C_5 = 0{,}1$; 635 — К, размыкается. Найти u_3.
11. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 4\delta_1(t)$; 213 — $L_2 = 0{,}5$; 312 — $L_3 = 0{,}5$; 423 — $C_4 = 1$. Найти u_2.
12. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 4\delta_1(t)$; 212 — $L_2 = 2$; 323 — $C_3 = 1$; 423 — $L_4 = 2$. Найти i_2.
13. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 3\exp(-t)\delta_1(t)$; 212 — $R_2 = 1$; 323 — $C_3 = 0{,}5$; 413 — $C_4 = 0{,}5$. Найти u_4.
14. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 2\exp(-3t)\delta_1(t)$; 212 — $L_2 = 1$; 323 — $R_3 = 2$; 413 — $L_4 = 1$. Найти u_4.
15. Цепь: 121 — ИТ $i_1 = 12$; 212 — $R_2 = 1$; 313 — $L_3 = 0{,}5$; 434 — $R_4 = 1$; 545 — $L_5 = 1$; 652 — $R_6 = 1$; 742 — К, размыкается. Найти u_{42}.
16. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 5\exp(-2t)\delta_1(t)$; 212 — $C_2 = 0{,}8$; 323 — $C_3 = 0{,}2$; 423 — $R_4 = 1$. Найти i_2.
17. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 4$; 214 — $R_2 = 1{,}5$; 312 — $L_3 = 0{,}5$; 424 — $C_4 = 0{,}5$; 623 — К, замыкается; 734 — $C_7 = 0{,}5$. Найти i_7.
18. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 8$; 212 — $R_2 = 2$; 323 — $L_3 = 1$; 434 — $L_4 = 3$; 545 — $R_5 = 2$; 635 — К, размыкается. Найти u_{13}.

19. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = \exp(-3t)\delta_1(t)$; 212 — $L_2 = 1$; 324 — $R_3 = 0{,}5$; 413 — $L_4 = 0{,}5$; 534 — $R_5 = 1$. Найти u_1.
20. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 4\exp(-2t)\delta_1(t)$; 212 — $R_2 = 1$; 323 — $C_3 = 2$; $u_{C3}(0-) = 2$; 434 — $C_4 = 2$; $u_{C4}(0-) = 4$. Найти u_3.
21. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 8\delta_1(t)$; 213 — $C_2 = 2$; 312 — $L_3 = 0{,}25$; 423 — $C_4 = 2$. Найти u_4.
22. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 8\delta_1(t)$; 212 — $C_2 = 0{,}5$; 323 — $L_3 = 0{,}25$; 423 — $C_4 = 0{,}5$. Найти $u_2(t)$.
23. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 12\cos 2t\,\delta_1(t)$; 212 — $L_2 = 0{,}5$; 323 — $R_3 = 3$; 413 — $L_4 = 1$. Найти u_4.
24. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 16\cos t\,\delta_1(t)$; 212 — $C_2 = 0{,}25$; 323 — $C_3 = 0{,}75$; 423 — $R_4 = 1$. Найти i_2.
25. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 6$; 214 — $R_2 = 3$; 312 — $R_3 = 3$; 424 — $C_4 = 0{,}5$; 523 — К, замыкается; 634 — $C_6 = 0{,}5$; 734 — $R_7 = 3$. Найти i_6.

1.4.6. В вариантах 1—8 найти изображение указанного сигнала (из представленных на рис. 1.5).

1. Сигнал 1: $F_m = 5$; $t_1 = 1$; $t_2 = \pi + 1$.
2. Сигнал 2: $F_m = 10$; $t_3 = 2$; $t_4 = 4$; $t_5 = 6$.
3. Сигнал 3: $F_m = 9$; $t_6 = 1$; $t_7 = 4$.
4. Сигнал 4: $F_m = 8$; $t_8 = 0$; $t_9 = 4$.
5. Сигнал 5: $F_m = 6$; $t_{10} = \pi$; $t_{11} = 3\pi$.
6. Сигнал 6: $F_m = 9$; $t_{12} = 0$; $t_{13} = 3$; $t_{14} = 5$.
7. Сигнал 7: $F_m = 6$; $t_{15} = 0$; $t_{16} = 2$; $t_{17} = 5$.
8. Сигнал 8: $F_m = 10$; $t_{18} = 0$; $t_{19} = 2$; $t_{20} = 5$.

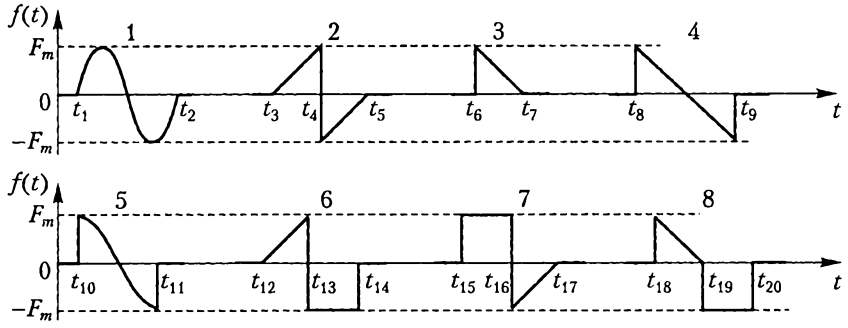


Рис. 1.5

В вариантах 9—18 по заданным характеристикам цепи и воздействию $f_1(t)$ найти реакцию $f_2(t)$; построить график $f_1(t)$.

9. $h(t) = 4\delta(t) - 2\exp(-t)\delta_1(t);\ f_1(t) = 10\delta_1(t) - 10\delta_1(t-2).$
10. $h(t) = 2\exp(-2t)\delta_1(t);\ f_1(t) = 4\delta_1(t) - 8\delta_1(t-2) + 4\delta_1(t-4).$
11. $h(t) = 2\delta(t) - 3\exp(-t)\delta_1(t);\ f_1(t) = t\delta_1(t) - (t-1)\delta_1(t-1) - \delta_1(t-1).$
12. $h(t) = 2\exp(-0{,}5t)\delta_1(t);\ f_1(t) = 5\sin(t)\delta_1(t) + 5\sin(t-\pi)\delta_1(t-\pi).$
13. $h(t) = 3\delta(t) - 4\exp(-2t)\delta_1(t);\ f_1(t) = 5\cos(t)\delta_1(t) + 5\cos(t-\pi)\delta_1(t-\pi).$
14. $h_1(t) = [2 - 2\exp(-0{,}5t)]\delta_1(t);$
$f_1(t) = 6\sin(0{,}5t)\delta_1(t) + 6\sin[0{,}5(t-2\pi)]\delta_1(t-2\pi).$
15. $h(t) = 5\delta(t) + 2{,}5\exp(-0{,}5t)\delta_1(t);\ f_1(t) = 4t\delta_1(t) - 4(t-4)\delta_1(t-4).$
16. $h_1(t) = [4 - 4\exp(-0{,}5t)]\delta_1(t);\ f_1(t) = (5-5t)\delta_1(t) + 10(t-2)\delta_1(t-2) -$
$-5(t-3)\delta_1(t-3).$
17. $h(t) = 6\delta(t) - 2\exp(-t/3)\delta_1(t);\ f_1(t) = (10 - 10t)\delta_1(t) + 10\delta_1(t-10) +$
$+10(t-20)\delta_1(t-20).$
18. $h(t) = \delta(t) - \exp(-t)\delta_1(t);\ f_1(t) = 3t\delta_1(t) - 3(t-4)\delta_1(t-4).$

В вариантах 19—25 указана реакция $f_{2a}(t)$ на воздействие $f_{1a} = \delta_1(t)$. Определить реакцию той же цепи на воздействие $f_{1б}(t)$.

19. $f_{2a}(t) = 2\exp(-4t)\delta_1(t);\ f_{1б}(t) = 2t\delta_1(t).$
20. $f_{2a}(t) = [3 - 3\exp(-t)]\delta_1(t);\ f_{1б}(t) = \exp(-2t)\delta_1(t).$
21. $f_{2a}(t) = [2\exp(-t)\cos t]\delta_1(t);\ f_{1б}(t) = 2t\delta_1(t).$
22. $f_{2a}(t) = [4 - 2\exp(-2t)]\delta_1(t);\ f_{1б}(t) = 2\delta(t).$
23. $f_{2a}(t) = [3 + \exp(-t)]\delta_1(t);\ f_{1б}(t) = t\delta_1(t) - 2(t-1)\delta_1(t-1) + (t-2)\delta_1(t-2).$
24. $f_{2a}(t) = [5 - 2\exp(-2t)\delta_1(t)];\ f_{1б}(t) = \exp(-t)\delta_1(t).$
25. $f_{2a}(t) = [1 + 2\exp(-3t)]\delta_1(t);\ f_{1б}(t) = 3t\,\delta_1(t).$

1.4.7. Решить задачу 1.2.4 операторным методом, рассчитав вначале передаточную функцию цепи $H(s)$. Дополнительно найти АЧХ, ФЧХ; качественно построить графики АЧХ, ФЧХ, АФХ. Проконтролировать по схемам замещения величины $h_1(0+)$, $h_1(\infty)$ и значения $H(s)$ при $s \to 0$ и $s \to \infty$. Проверить выполнение соотношения $h(t) = h_1'(t)$ по результатам расчета.

1.4.8. В цепи установившийся периодический режим; воздействие, *спектр которого необходимо построить*, представлено рядом Фурье.

1. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 10 + 10\cos t + 12\sqrt{2}\cos(2t + 90°)$; 212 — $L_2 = 3/2$; 312 — — $C_3 = 2/3$; 423 — $C_4 = 1/8$; 523 — $R_5 = 4$; 634 — $R_6 = 1$. Найти u_6, U_6, U_1, P.
2. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 10 + 4\cos(t + 90°) + 6\sqrt{2}\cos(2t + 90°)$; 212 — $L_2 = 2/3$; 324 — $C_3 = 3/2$; 413 — $R_4 = 1/4$; 534 — $L_5 = 1/8$; 614 — $R_6 = 1$. Найти i_6, I_6, I_1, P.
3. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 10 + 12\sqrt{2}\cos(t - 90°) + 4\cos(2t + 90°)$; 212 — $C_2 = 1/3$; 312 — $L_3 = 3/4$; 423 — $L_4 = 4$; 523 — $R_5 = 4$; 634 — $R_6 = 1$. Найти u_6, U_6, U_1, P.

4. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 10 + 6\sqrt{2}\cos(t + 180°) + 4\cos(2t - 90°)$; 214 — $R_2 = 1$; 312 — $L_3 = 1/3$; 424 — $C_4 = 3/4$; 513 — $R_5 = 1/4$; 634 — $C_6 = 4$. Найти i_2, I_2, I_1, P.
5. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 10 + 10\sqrt{2}\cos(t - 90°) + 6\sqrt{2}\cos 2t$; 212 — $L_2 = 0{,}5$; 323 — — $L_3 = 0{,}5$; 423 — $C_4 = 1$; 534 — $R_5 = 2$. Найти u_5, U_5, U_1, P.
6. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 10 + 5\sqrt{2}\cos(t + 90°) + 6\sqrt{2}\cos 2t$; 213 — $C_2 = 0{,}5$; 312 — — $L_3 = 1$; 423 — $C_4 = 0{,}5$; 513 — $R_5 = 0{,}5$. Найти i_5, I_5, I_1, P.
7. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 10 + 6\sqrt{2}\cos t + 10\sqrt{2}\cos(2t - 90°)$; 212 — $C_2 = 1$; 323 — — $C_3 = 1$; 423 — $L_4 = 0{,}5$; 534 — $R_5 = 2$. Найти u_5, U_5, U_1, P.
8. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 10 + 10\sqrt{2}\cos t + 10\sqrt{2}\cos(2t + 90°)$; 213 — $R_2 = 0{,}5$; 313 — — $L_3 = 1$; 412 — $C_4 = 0{,}5$; 523 — $L_5 = 1$. Найти i_2, I_2, I_1, P.
9. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 5 + 12\sqrt{2}\cos(t + 90°) + 9\sqrt{2}\cos 2t$; 212 — $C_2 = 1/6$; 323 — — $L_3 = 4$; 434 — $C_4 = 1/4$; 524 — $R_5 = 6$; 645 — $R_6 = 6$. Найти u_6, U_6, U_1, P.
10. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 10 + 6\sqrt{2}\cos(t + 180°) + 9\sqrt{2}\cos(2t + 90°)$; 213 — $L_2 = 1/6$; 313 — $R_3 = 1/6$; 412 — $R_4 = 1/6$; 523 — $C_5 = 4$; 623 — $L_6 = 1/4$. Найти i_3, I_3, I_1, P.
11. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 12 + 9\sqrt{2}\cos(t + 90°) + 12\sqrt{2}\cos(2t - 90°)$; 212 — $L_2 = 3$; 323 — $C_3 = 1/8$; 434 — $L_4 = 2$; 524 — $R_5 = 6$; 645 — $R_6 = 6$. Найти u_6, U_6, U_1, P.
12. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 12 + 9\cos t + 6\sqrt{2}\cos(2t + 180°)$; 213 — $R_2 = 1/6$; 313 — $C_3 = 3$; 412 — $R_4 = 1/6$; 523 — $L_5 = 1/8$; 623 — $C_6 = 2$. Найти i_2, I_2, I_1, P.
13. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 5 + 12\sqrt{2}\cos t + 9\sqrt{2}\cos(2t + 90°)$; 212 — $C_2 = 1/6$; 324 — — $C_3 = 1/2$; 423 — $R_4 = 1$; 534 — $L_5 = 1$; 645 — $R_6 = 4$. Найти u_6, U_6, U_1, P.
14. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 3 + 6\sqrt{2}\cos(t + 90°) + 9\sqrt{2}\cos(2t - 90°)$; 213 — $L_2 = 1/6$; 313 — $R_3 = 1/4$; 412 — $L_4 = 1/2$; 523 — $R_5 = 1$; 623 — $C_6 = 1$. Найти i_3, I_3, I_1, P.
15. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 8 + 9\sqrt{2}\cos t + 12\sqrt{2}\cos(2t - 90°)$; 212 — $L_2 = 3$; 324 — $L_3 = 1$; 423 — $C_4 = 1/2$; 534 — $R_5 = 1$; 645 — $R_6 = 4$. Найти u_6, U_6, U_1, P.
16. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 4 + 9\sqrt{2}\cos(t - 90°) + 6\sqrt{2}\cos(2t + 90°)$; 213 — $R_2 = 1/4$; 313 — $C_3 = 3$; 412 — $C_4 = 1$; 523 — $R_5 = 1$; 623 — $L_6 = 1/2$. Найти i_2, I_2, I_1, P.
17. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 8 + 6\sqrt{2}\cos(t - 90°) + 9\sqrt{2}\cos(2t + 90°)$; 212 — $R_2 = 2$; 323 — $L_3 = 2$; 413 — $C_4 = 1/4$; 534 — $R_5 = 2$. Найти u_5, U_5, U_1, P.
18. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 4 + 6\cos t + 6\sqrt{2}\cos(2t + 90°)$; 213 — $R_2 = 1/2$; 312 — $L_3 = 1/4$; 423 — $R_4 = 1/2$; 523 — $C_5 = 2$. Найти i_2, I_2, I_1, P.
19. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 2 + 3\sqrt{2}\cos(t - 90°) + 6\cos(2t + 90°)$; 213 — $L_2 = 2$; 312 — — $R_3 = 2$; 423 — $C_4 = 1/4$; 534 — $R_5 = 2$. Найти u_5, U_5, U_1, P.
20. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 6 + 6\sqrt{2}\cos(t + 180°) + 6\sqrt{2}\cos 2t$; 212 — $C_2 = 2$; 323 — $R_3 = 1/2$; 423 — $L_4 = 1/4$; 513 — $R_5 = 1/2$. Найти i_5, I_5, I_1, P.

21. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 2 + 6\cos t + 6\sqrt{2}\cos(2t + 90°)$; 212 — $L_2 = 6$; 323 — $C_3 = 1/6$; 423 — $R_4 = 4$. Найти u_4, U_4, U_1, P.
22. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 4 + 3\cos(t + 90°) + 6\sqrt{2}\cos(2t - 90°)$; 213 — $C_2 = 6$; 312 — — $L_3 = 1/6$; 423 — $R_4 = 1/4$. Найти i_4, I_4, I_1, P.
23. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 8 + 6\cos(t - 90°) + 6\cos(2t + 90°)$; 212 — $C_2 = 1$; 323 — — $R_3 = 1/3$; 423 — $L_4 = 1/4$. Найти u_4, U_4, U_1, P.
24. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 3 + 6\sqrt{2}\cos t + 6\sqrt{2}\cos(2t + 90°)$; 213 — $L_2 = 1$; 312 — $R_3 = 3$; 423 — $C_4 = 1/4$. Найти i_4, I_4, I_1, P.
25. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 4 + 6\cos t + 6\cos(2t - 90°)$; 212 — $L_2 = 1/2$; 324 — $R_3 = = 1/3$; 423 — $L_4 = 1/2$; 534 — $C_5 = 1$. Найти u_3, U_3, U_1, P.

1.4.9. В вариантах 1–3 ток представлен рядом Фурье. Построить график $i(t)$, амплитудный и фазовый спектры, найти T, I.

1. $i(t) = 5 + 10\cos t + 10\sin t + 10\sin 2t$.
2. $i(t) = 4 + 4\cos(1{,}2t + 30°) + \sqrt{2}\cos(1{,}6t - 30°)$.
3. $i(t) = 2 + 4\cos\omega_1 t + 4\sin\omega_1 t + 4\sin 2\omega_1 t$; $\omega_2 = 20$.
4. Качественно оценить коэффициенты a_0, a_k, b_k ряда Фурье сигналов $u(t)$ рис. 1.6, *а*, *б*. Как изменятся амплитудные спектры при увеличении периода в 2 раза?

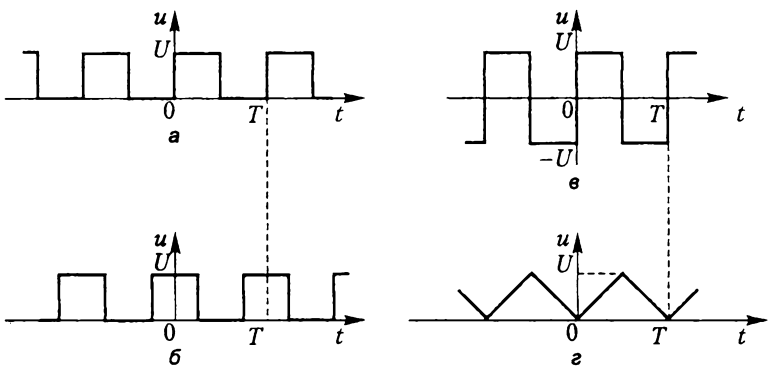


Рис. 1.6

5. Качественно оценить a_0, a_k, b_k ряда Фурье сигналов $u(t)$ (рис. 1.6, *в*, *г*). Как изменяются амплитудные спектры с ростом k?

В вариантах 6–11 в цепи последовательно соединены элементы R, L или C и ИН $u(t) = U_0 + \Sigma U_{km}\cos(k\omega_1 t + \alpha_{uk})$. Найти U, I, P, u_L (или u_C); *построить амплитудный и фазовый спектры* $u(t)$.

6. $R = 1$; $C = 0{,}5$; $U_0 = 2$; $i = 2\cos t + \cos 2t$.

7. $R = 1$; $L = 0{,}5$; $i = 2 + 2\cos 2t + \cos 4t$.

8. $R = 3$; $L = 1$; $C = 1/12$; $U_0 = 3$; $i = \cos 2t + \cos 6t$.

9. $L = 1$; $C = 0{,}1$; $U_0 = 5$; $i = 2\cos 2t + 2\cos 4t$.

10. R, L, C; $U_0 = 0$; $i = 2\cos \omega_1 t + 2\cos 2\omega_1 t$; на частоте ω_1 известны $U_{R1} = 4$, $U_{L1} = 4$, $U_{C1} = 8$.

11. C; $R = 1/(\omega_1 C)$; $U_0 = 30$; $U_{1m} = 20\sqrt{2}$; $i = 10\cos \omega_1 t + 10\cos 2\omega_1 t$.

В вариантах 12–16 в цепи параллельно соединены элементы R, L или C и ИТ $i(t) = I_0 + \Sigma I_{km} \cos(k\omega_1 t + \alpha_{ik})$. Найти $i(t)$, P, U, i_L (или i_C); *построить амплитудный и фазовый спектры* $i(t)$.

12. $R = 1$; $L = 0{,}5$; $I_0 = 2$; $u = 2\cos t + \cos 2t$.

13. $R = 1$; $C = 0{,}5$; $u = 2 + 2\cos 2t + \cos 4t$.

14. $R = 1/3$; $C = 1$; $L = 1/12$; $I_0 = 3$; $u = \cos 2t + \cos 6t$.

15. $C = 1$; $L = 0{,}1$; $I_0 = 5$; $u = 2\cos 2t + 2\cos 4t$.

16. R, L, C, $I_0 = 0$; $u = 2\cos \omega_1 t + 2\cos 2\omega_1 t$. На частоте ω_1 известны $I_{R1} = 4$; $I_{C1} = 4$; $I_{L1} = 8$.

В вариантах 17–18 заданы напряжение и ток пассивного линейного ДП. Определить T, U, I, P; вычислить $Z(j\omega)$ для указанных частот, *построить амплитудный и фазовый спектры* $u(t)$.

17. $u = 10 + 20\sqrt{2}\cos t + 10\sqrt{2}\cos 2t + 5\sqrt{2}\cos(3t - 30°)$,
$i = 10\sqrt{2}\cos(t - 60°) + 4\sqrt{2}\cos(3t + 30°)$.

18. $u = 5 + 4\sqrt{2}\cos t + 3\sqrt{2}\cos(3t + 90°)$,
$i = 2 + 2\sqrt{2}\cos(t + 60°) + 2\cos(3t + 45°)$.

19. На входе пассивного линейного ДП $u = 10 + 10\cos 2t + 10\cos 4t$;
$i = I_{1m}\cos(2t + \alpha_{i1})$. Предложить вариант схемы ДП при $\alpha_{i1} = 90°$ и при $\alpha_{i1} = 45°$.

20. Последовательное соединение $R = 1$ и $L = 0{,}5$; $i = 10 - 10\cos 2t$. Построить график и спектр $i(t)$. Найти u, u_L, I, P.

21. Напряжение ДП $u = 10 + 10\cos t$, проводимость $Y(j\omega) = 1 + j\omega$. Найти i, I, P; построить график и спектр $i(t)$.

В вариантах 22–23 последовательный RLC-контур используется как делитель напряжения. С учетом указанных значений построить график АФХ цепи на интервале $\omega = 0$ до $\omega = \infty$. Найти параметры цепи, реакцию, *построить ее спектр.*

22. $R = 2$; $H_U = \dot{U}_C/\dot{U}$; АФХ: $0{,}5\exp(-j\,90°)$ при $\omega = 1$; $0{,}2\exp(-j\,127°)$ при $\omega = 2$; $0{,}1\exp(-j\,143°)$ при $\omega = 3$, $u = 10 + 10\cos t + 5\cos 2t$.

23. $R=2$; $H_U=\dot{U}_L/\dot{U}$; АФХ: $0{,}5\exp(j90°)$ при $\omega=1$; $0{,}8\exp(j53°)$ при $\omega=2$; $0{,}9\exp(j37°)$ при $\omega=3$; $u=10+10\cos t+5\cos 2t$.

В вариантах 24–25 параллельная *RLC*-цепь используется как делитель тока. С учетом указанных значений построить график АФХ цепи на интервале от $\omega=0$ до $\omega=\infty$. Найти параметры цепи, реакцию, *построить ее спектр.*

24. $R=0{,}5$; $H_I=\dot{I}_L/\dot{I}$; АФХ: $0{,}5\exp(-j90°)$ при $\omega=1$; $0{,}2\exp(-j127°)$ при $\omega=2$; $0{,}1\exp(-j143°)$ при $\omega=3$; $i=10+10\cos t+5\cos 2t$.

25. $R=0{,}5$; $H_I=\dot{I}_C/\dot{I}$; АФХ: $0{,}5\exp(j90°)$ при $\omega=1$; $0{,}8\exp(j53°)$ при $\omega=2$; $0{,}9\exp(j37°)$ при $\omega=3$; $i=10+10\cos t+5\cos 2t$.

1.4.10. На вход интегрирующей *RC*-цепи ($R=1$; $C=1$) подается периодический сигнал $u_{вх}(t)$ с периодом $T=12$, имеющий в пределах периода форму равнобедренного треугольника с амплитудой $U_m=12$ и длительностью $t_и=12$. При $t=N$ и $t=N+12$, где N — номер варианта, значения $u_{вх}=0$.

Найти ряд Фурье входного сигнала. Ограничиться постоянной составляющей и двумя ненулевыми гармониками. Построить график сигнала после аппроксимации его рядом Фурье и сравнить с графиком исходного сигнала. Обосновать вид ряда исходя из симметрии сигнала и его среднего значения. Построить амплитудный и фазовый спектры, а также записать ряд Фурье выходного сигнала $u_C(t)$, используя спектры входного сигнала, АЧХ и ФЧХ цепи. Построить график выходного сигнала $u_{вых}=u_C(t)$ и сравнить его с графиком $u_{вх}(t)$. Объяснить изменение формы сигнала, проходящего через цепь.

По указанию преподавателя провести *точный расчет* $u_{вых}(t)$, построить график и сравнить с данными приближенного расчета по ряду Фурье.

1.4.11. В вариантах 1–5 для указанного апериодического сигнала $u(t)$ найти спектр $U(j\omega)$ и его значение при $\omega=0$; построить график $u(t)$.

1. $u=U\delta_1(t)-2U\delta_1(t-t_и/2)+U\delta_1(t-t_и)$.
2. $u=U\delta_1(t)-U\delta_1(t-t_и/3)-U\delta_1(t-2t_и/3)+U\delta_1(t-t_и)$.
3. $u=U\delta_1(t)+U\delta_1(t-t_и/3)-U\delta_1(t-2t_и/3)-U\delta_1(t-t_и)$.
4. $u=U\delta_1(t)-U\delta_1(t-t_и/3)+U\delta_1(t-2t_и/3)-U\delta_1(t-t_и)$.
5. $u=at\delta_1(t)-2a(t-t_и/2)\delta_1(t-t_и/2)+a(t-t_и)\delta_1(t-t_и)$.

В вариантах 6–10 дана функция передачи $H(S)$ по напряжению (току) цепи 1-го порядка. Изобразить возможный вариант схемы цепи; найти полосу пропускания цепи и время запаздывания проходящих сигналов; определить отношение площадей, ограниченных графиками сигналов на выходе и входе цепи.

6. $H_U(s)=1/(s+1)$.
7. $H_U(s)=1/(s+2)$.
8. $H_U(s)=0{,}5/(s+2)$.
9. $H_I(s)=1/(s+1)$.

10. $H_I(s) = 1/(s+2)$.

В вариантах 11–14 на вход цепи с заданной функцией передачи $H_U(s) = U_2(s)/U_1(s)$ действует с момента $t = 0$ импульс напряжения с амплитудой U и длительностью $t_и$; известны значение спектра $U_1(j\omega)$ при $\omega = 0$ и частота первого узла $\omega_{1-} \neq 0$. Найти длительность и амплитуду импульса $u_1(t)$; определить $u_2(0+)$ и площадь, ограниченную графиком сигнала на выходе цепи.

11. $H_U(s) = (s+1)/(s^2+s+1)$; прямоугольный импульс; $U_1(j0) = 2$; $\omega_{1-} = 100\pi$.
12. $H_U(s) = (s+2)/(s+4)$; треугольный равнобедренный импульс; $U_1(j0) = 4$; $\omega_{1-} = 50\pi$.
13. $H_U(s) = (s^2+1)/(s^2+2s+1)$; треугольный равнобедренный импульс; $U_1(j0) = 20$; $\omega_{1-} = 10\pi$.
14. $H_U(s) = (s+4)/(s+8)$; прямоугольный импульс; $U_1(j0) = 10$; $\omega_{1-} = 1000\pi$.

В вариантах 15–18 АФХ цепи $H(j\omega) = A(\omega)\exp[j\Phi(\omega)]$ задана множеством троек чисел $\{\omega_k,\ A(\omega_k),\ \Phi(\omega_k)\}$. Построить графики АФХ, АЧХ, ФЧХ; определить полосу пропускания цепи и время запаздывания проходящих сигналов; найти отношение площадей, ограниченных графиками сигналов на выходе и входе цепи.

15. 0, 100, 0°; 1, 90, –27°; 2, 70, –45°; 3, 55, –56°; 4, 45, –67°; ∞, 0, –90°.
16. 0, 100, 0°; 1, 90, –28°; 2, 80, –54°; 3, 65, –74°; 4, 50, –90°; 6, 25, –135°; ∞, 0, –180°.
17. 0, 50, 0°; 2, 45, –27°; 4, 35, –45°; 6, 28, –56°; 8, 22, –67°; ∞, 0, –90°.
18. 0, 20, 0°; 10, 18, –28°; 20, 16, –54°; 30, 13, –74°; 40, 10, –90°; ∞, 0, –180°.
19. Оценить по 90 %-ному энергетическому критерию ширину спектра экспоненциального импульса.
20. Оценить по 10 %-ному амплитудному критерию ширину спектра экспоненциального импульса.
21. Оценить по 95 %-ному энергетическому критерию ширину спектра экспоненциального импульса.

В вариантах 22, 23 указана импульсная (переходная) характеристика цепи. Найти функцию передачи $H(s)$, полосу пропускания цепи, время запаздывания проходящих сигналов, отношение площадей, ограниченных графиками сигналов на выходе и входе цепи.

22. $h(t) = 0{,}5\exp(-2t)\delta_1(t)$.
23. $h_1(t) = 0{,}5\delta_1(t) - 0{,}5\exp(-t/2)\delta_1(t)$.

В вариантах 24, 25 на вход интегрирующей *RC*-цепи, функция передачи которой указана, воздействует прямоугольный импульс $f_1(t) = 10\delta_1(t) - 10\delta_1(t-2)$. Сравнив полосу пропускания цепи с шириной спектра воздействия, оцените ожидаемое изменение формы сигнала на выходе. Найдите площадь, ограниченную графиком сигнала на выходе. Будет ли реакция разрывной функцией?

24. $H(s) = 0{,}5/(0{,}05s+1)$.
25. $H(s) = 0{,}5/(s+1)$.

1.4.12. На вход дифференцирующей RC-цепи ($R = 1$; $C = 1$) подается сигнал $u_{вх}(t)$ в виде одиночного импульса, имеющего форму равнобедренного треугольника с амплитудой $U_m = 12$ и длительностью $t_и = 12$. При $t < N$ и $t > N + 12$, где N — номер варианта, значения $u_{вх}(t) = 0$.

Сравнив спектр сигнала с частотными характеристиками цепи, оценить ожидаемое изменение формы сигнала на выходе. Найти реакцию $u_R(t)$ операторным методом, построить ее график и сравнить с графиком $u'_{вх}(t)$. *По указанию преподавателя* найти амплитудный, фазовый, вещественный и мнимый спектры реакции; построить их графики. Используя один из методов расчета сигнала по спектру, приближенно найти реакцию, построить ее график и сравнить с графиком точного решения.

1.4.13. Сопоставив ЧХ цепи и спектр воздействия $f_{вх}(t)$ приближенно оценить вид ожидаемой реакции $\tilde{f}_{вых}(t)$. Найти сигнал на выходе цепи $f_{вых}(t)$. Сравнив графики $\tilde{f}_{вых}(t)$ и $f_{вых}(t)$, убедиться в справедливости предварительной оценки. Проконтролировать отношение площадей реакции и воздействия, а также $f_{вых}(0+)$.

В вариантах 1–8 ширину спектра определять по 10 %-ному амплитудному критерию, в остальных — по критерию первого лепестка. В вариантах 9–16 входной сигнал — прямоугольный импульс, а в 17–25 — меандр с амплитудой U_{m1} (или I_{m1}) и длительностью $t_и$. В условиях задач $R_k = 1$.

1. Цепь: 112 — ИТ $i_1 = 27\exp(-t)\delta_1(t)$; 212 — R_2; 323 — $L_3 = 0{,}15$; 431 — R_4; 531 — R_5. Реакция — i_5.
2. Цепь: 121 — ИН $u_1 = 27\exp(-2t)\delta_1(t)$; 223 — R_2; 331 — R_3; 434 — $C_4 = 1/30$; 541 — R_5. Реакция — u_5.
3. Цепь: 121 — ИН $u_1 = 27\exp(-0{,}5t)\delta_1(t)$; 223 — R_2; 331 — $C_3 = 0{,}3$; 434 — R_4; 541 — R_5. Реакция — u_5.
4. Цепь: 112 — ИТ $i_1 = 27\exp(-t)\delta_1(t)$; 221 — R_2; 323 — R_3; 431 — R_4; 531 — $L_5 = 1/15$. Реакция — i_4.
5. Цепь: 112 — ИТ $i_1 = 54\exp(-10t)\delta_1(t)$; 221 — R_2; 321 — $C_3 = 1{,}5$; 423 — R_4; 531 — R_5. Реакция — u_5.
6. Цепь: 121 — ИН $u_1 = 27\exp(-10t)\delta_1(t)$; 223 — R_2; 331 — $L_3 = 2/3$; 434 — R_4; 541 — R_5. Реакция — u_5.
7. Цепь: 121 — ИН $u_1 = 54\exp(-t)\delta_1(t)$; 223 — R_2; 331 — R_3; 434 — $L_4 = 0{,}15$; 541 — R_5. Реакция — u_5.
8. Цепь: 112 — ИТ $i_1 = 27\exp(-0{,}1t)\delta_1(t)$; 221 — R_2; 323 — $C_3 = 2/3$; 431 — R_4; 531 — R_5. Реакция — i_5.
9. Цепь: 112 — ИТ $I_{m1} = 30$, $t_и = 1$; 212 — R_2; 323 — $L_3 = 0{,}15$; 431 — R_4; 531 — R_5. Реакция — i_5.

10. Цепь: 121 — ИН $U_{m1} = 30$, $t_и = 0{,}5$; 223 — R_2; 331 — R_3; 434 — $C_4 = 1/30$; 541 — R_5. Реакция — u_5.
11. Цепь: 121 — ИН $U_{m1} = 6$, $t_и = 0{,}05$; 223 — R_2; 331 — $C_3 = 0{,}3$; 434 — R_4; 541 — R_5. Реакция — u_5.
12. Цепь: 112 — ИТ $I_{m1} = 15$, $t_и = 0{,}02$; 221 — R_2; 323 — R_3; 431 — R_4; 531 — $L_5 = 1/15$. Реакция — i_4.
13. Цепь: 112 — ИТ $I_{m1} = 12$, $t_и = 0{,}25$; 221 — R_2; 321 — $C_3 = 1{,}5$; 423 — R_4; 531 — R_5. Реакция — u_5.
14. Цепь: 121 — ИН $U_{m1} = 3$, $t_и = 10$; 223 — R_2; 331 — $L_3 = 2/3$; 434 — R_4; 541 — R_5. Реакция — u_5.
15. Цепь: 121 — ИН $U_{m1} = 15$, $t_и = 1$; 223 — R_2; 331 — R_3; 434 — $L_4 = 0{,}15$; 541 — R_5. Реакция — u_5.
16. Цепь: 112 — ИТ $I_{m1} = 6$, $t_и = 0{,}2$; 221 — R_2; 323 — $C_3 = 2/3$; 431 — R_4; 531 — R_5. Реакция — i_5.
17. Цепь: 112 — ИТ $I_{m1} = 30$, $t_и = 2$; 212 — R_2; 323 — $L_3 = 0{,}15$; 431 — R_4; 531 — R_5. Реакция — i_5.
18. Цепь: 121 — ИН $U_{m1} = 30$, $t_и = 10$; 223 — R_2; 331 — R_3; 434 — $C_4 = 1/3$; 541 — R_5. Реакция — u_5.
19. Цепь: 121 — ИН $U_{m1} = 12$, $t_и = 1$; 223 — R_2; 331 — $C_3 = 3$; 434 — R_4; 541 — R_5. Реакция — u_5.
20. Цепь: 112 — ИТ $I_{m1} = 12$, $t_и = 2$; 221 — R_2; 323 — R_3; 431 — R_4; 531 — $L_5 = 10/3$. Реакция — i_4.
21. Цепь: 112 — ИТ $I_{m1} = 12$, $t_и = 2$; 221 — R_2; 321 — $C_3 = 6$; 423 — R_4; 531 — R_5. Реакция — u_5.
22. Цепь: 121 — ИН $U_{m1} = 3$, $t_и = 20$; 223 — R_2; 331 — $L_3 = 2/3$; 434 — R_4; 541 — R_5. Реакция — u_5.
23. Цепь: 121 — ИН $U_{m1} = 6$, $t_и = 4$; 223 — R_2; 331 — R_3; 434 — $L_4 = 0{,}3$; 541 — R_5. Реакция — u_5.
24. Цепь: 112 — ИТ $I_{m1} = 6$, $t_и = 0{,}4$; 221 — R_2; 323 — $C_3 = 2/3$; 431 — R_4; 531 — R_5. Реакция — i_5.
25. Цепь: 112 — ИТ $I_{m1} = 30$, $t_и = 0{,}5$; 221 — R_2; 323 — $L_3 = 1{,}5$; 431 — R_4; 531 — R_5. Реакция — i_5.

1.4.14. В задаче 1.3.5 для указанной реакции найти функцию цепи $H(s)$, ее нули s_{0k} и полюсы s_k, а также частотную характеристику $H(j\omega)$. Построить качественно АЧХ, ФЧХ и АФХ, используя, в частности, данные расчета при $\omega = 0$, $\omega \to \infty$, $\omega = |s_k|$ и $\omega = |s_{0k}|$. Проконтролировать частотную характеристику по эквивалентным схемам цепи при $\omega = 0$ и $\omega \to \infty$.

1.4.15. Решить задачу 1.4.12 для случая интегрирующей RC-цепи. График реакций $u_{вых}(t) = u_C(t)$ сравнить с графиком интеграла от $u_{вх}(t)$, считая, что входной сигнал имеет форму равнобедренного треугольника с длительностью $t_и = 1$с.

1.5. Расчет цепей с многополюсными элементами и зависимыми источниками

1.5.1. Пассивный четырехполюсник, находящийся в *установившемся синусоидальном режиме*, имеет входной вывод 1, выходной — 2; вывод 4 является общим.

В вариантах 1–4 найти z-параметры ЧП.

1. Схема ЧП: 113 — R_1; 234 — C_2; 332 — R_3; 412 — L_4; $|Z_k| = 1$.
2. Схема ЧП: 113 — $R_1 = 1$; 234 — L_2; $|Z_L| = 1$; 332 — $R_3 = 2$; 412 — $R_4 = 2$.
3. Схема ЧП: 112 — $R_1 = 1$; 212 — C_2; $|Z_C| = 2$; 323 — $R_3 = 0{,}2$; 434 — L_4, $|Z_L| = 0{,}4$.
4. У симметричного ЧП $H_I = 0{,}25\,(1 + j)$ при $Z_н = 2$ и $H_I = 0{,}5$ при $Z_н = j2$.

В вариантах 5–8 найти y-параметры ЧП.

5. Схема ЧП: 112 — R_1; 212 — C_2; 323 — R_3; 434 — L_4; $|Z_k| = 1$.
6. Схема ЧП: 113 — R_1; 234 — L_2; 332 — R_3; 412 — C_4; $|Z_k| = 1$.
7. Схема ЧП: 114 — C_1, $|Z_1| = 1$; 213 — $R_2 = 0{,}5$; 332 — L_3, $|Z_3| = 1$; 424 — C_4, $|Z_4| = 0{,}5$.
8. Схема ЧП: 113 — R_1; 234 — C_2; 332 — L_3; 424 — R_4; $|Z_k| = 1$.
9. Для ЧП задачи 1 найти параметры элементов эквивалентной Т-схемы.
10. Схема ЧП: 113 — $R_1 = 1$; 234 — L_2, $|Z_L| = 1$; 332 — $R_3 = 2$. Найти a-параметры.
11. Параметры пассивного ЧП: $a_{11} = 1 + j2$; $a_{12} = -1 + j$; $a_{21} = j2$. Найти входное сопротивление ЧП и функцию передачи по напряжению при $Z_н = j2$.
12. Для ЧП задачи 10, используя a-параметры, найти функцию передачи по напряжению при $Y_н = j2$.
13. У симметричного ЧП: $H_U = 2/3$ при $Y_н = 0$ и $H_U = 1/4$ при $Y_н = 1$. Найти a-параметры.
14. Схема ЧП: 113 — R_1; 212 — C_2; 334 — L_3; $|Z_k| = 1$. Используя a-параметры, найти функцию передачи по току при $Z_н = 1$.
15. У симметричного ЧП: $Z_{хх} = -j$; $Z_{кз} = j3$. Найти a-параметры.
16. У симметричного ЧП: $H_U = -j/3$ и $H_I = -j/2$ при $Z_н = 1$. Найти a-параметры.
17. По заданным a-параметрам пассивного ЧП ($a_{11} = 1$; $a_{12} = 1 + j$; $a_{21} = j$) найти y-параметры.
18. Для ЧП задачи 8, используя y-параметры, найти функцию передачи по напряжению в режиме холостого хода.
19. По заданным y-параметрам пассивного ЧП ($y_{11} = 1 - j2$; $y_{21} = j2$; $y_{22} = -j1{,}5$) найти параметры элементов эквивалентной П-схемы.

20. Найти z-параметры ЧП задачи 19.
21. Для ЧП задачи 5, используя y-параметры, найти входное сопротивление при $Z_н = 1$.
22. У симметричного ЧП: $H_U = 0{,}5$ при $Y_н = -j$ и $H_U = 0{,}2$ при $Y_н = -j3$. Найти a-параметры.
23. У симметричного ЧП: $H_U = 1/5$ при $Y_н = 1$ и $H_U = 1/8$ при $Y_н = 2$. Найти y-параметры.
24. По заданным a-параметрам симметричного четырехполюсника ($a_{11} = 0{,}5$; $a_{12} = 1{,}5$) найти $u_2(t)$ при $Z_н = j0{,}5$ и $\dot{I}_1 = j2$.
25. Для ЧП задачи 11 найти $u_2(t)$ и потребляемую мощность на входе при $\dot{U}_1 = 6$; $Z_н = 1$.

1.5.2. Цепь с ИСЭ находится *в режиме гармонических колебаний.* Найти i_3, i_4, u_3, u_4 как в исходной схеме (используя уравнения Кирхгофа), так и в эквивалентной схеме замещения без магнитной связи.

1. Цепь: 114 — ИН, $\dot{U}_1 = j2\sqrt{2}$; 224 — $R_2 = 2$; 312 — L_3; 423 — L_4; 534 — C_5; $|Z_3| = |Z_м| = 2$; $|Z_4| = |Z_5| = 4$; узлы 1, 3 — однополярные выводы ИСЭ.
2. Цепь: 131 — ИТ, $\dot{I}_1 = j2$; 213 — C_2; 313 — L_3; 412 — L_4; 523 — $R_5 = 1$; $|Z_2| = |Z_м| = 1$; $|Z_3| = |Z_4| = 2$; узлы 3, 2 — однополярные выводы ИСЭ.
3. Цепь: 114 — ИН, $\dot{U}_{1m} = -j12$; 212 — $R_2 = 3$; 323 — L_3; 434 — L_4; 534 — C_5; $|Z_3| = |Z_4| = 2$; $|Z_5| = |Z_м| = 1$; узлы 2, 3 — однополярные выводы ИСЭ.
4. Цепь: 131 — ИТ, $i_1 = 2\sqrt{5}\cos(t - 26{,}5°)$; 212 — $R_2 = 1$; 323 — $L_3 = 1$; 414 — $L_4 = 4$; 543 — $C_5 = 1$; $|M| = 1$; узлы 1, 2 — однополярные выводы ИСЭ.
5. Цепь: 114 — ИН, $u_1 = 2\sqrt{2}\cos(2t - 45°)$; 212 — $C_2 = 0{,}5$; 323 — $L_3 = 0{,}5$; 424 — $L_4 = 1{,}5$; 534 — $R_5 = 2$; $|M| = 0{,}5$; узлы 2, 4 — однополярные выводы ИСЭ.
6. Цепь: 131 — ИТ, $\dot{I}_{1m} = 2\exp(j45°)$; 213 — C_2; 312 — L_3; 423 — L_4; 523 — $R_5 = 1$; $|Z_2| = 3$; $|Z_3| = |Z_4| = 2$; $|Z_м| = 1$; узлы 1, 2 — однополярные выводы ИСЭ.
7. Цепь: 115 — ИН, $U_{1m} = 4$; 212 — C_2; 323 — L_3; 424 — L_4; 535 — $R_5 = 2$; 645 — C_6; $|Z_2| = |Z_3| = |Z_6| = |Z_м| = 1$; $|Z_4| = 2$; узлы 3, 2 — однополярные выводы ИСЭ.
8. Цепь: 131 — ИТ, $\dot{I}_{1m} = 5\exp(j37°)$; 213 — $R_2 = 3$; 312 — L_3; 423 — L_4; 523 — C_5; $|Z_3| = |Z_5| = |Z_м| = 1$; $|Z_4| = 2$; узлы 2, 3 — однополярные выводы ИСЭ.
9. Цепь: 114 — ИН, $u_1 = 2\cos 2t$; 212 — $C_2 = 0{,}25$; 324 — $L_3 = 1$; 423 — $L_4 = 1$; 534 — — $R_5 = 2$; $|M| = 0{,}5$; узлы 4, 3 — однополярные выводы ИСЭ.
10. Цепь: 131 — ИТ, $\dot{I}_{1m} = \sqrt{2}$; 212 — C_2; 323 — L_3; 413 — L_4; 513 — $R_5 = 1$; $|Z_2| = |Z_3| = 2$; $|Z_4| = 3$; $|Z_м| = 1$; узлы 2, 1 — однополярные выводы ИСЭ.

11. Цепь: $114 - ИН$, $\dot{U}_1 = 3 + j3$; $223 - R_2 = 1$; $312 - L_3$; $425 - L_4$; $534 - C_5$; $654 - C_6$; $|Z_3| = |Z_5| = |Z_м| = |Z_6| = 2$; $|Z_4| = 3$; узлы 1, 5 — однополярные выводы ИСЭ.

12. Цепь: $131 - ИТ$, $\dot{I}_1 = 2\exp(j45°)$; $223 - R_2 = 2$; $313 - L_3$; $412 - L_4$; $523 - C_5$; $|Z_3| = |Z_4| = |Z_5| = 2$; $|Z_м| = 1$; узлы 3, 2 — однополярные выводы ИСЭ.

13. Цепь: $114 - ИН, \dot{U}_{1m} = 5\exp(-j26{,}5°)$; $212 - R_2 = 1$; $323 - L_3$; $425 - L_4$; $534 - C_5$; $654 - C_6$; $|Z_3| = |Z_4| = |Z_5| = |Z_6| = 2$; $|Z_м| = 1$; узлы 2, 5 — однополярные выводы ИСЭ.

14. Цепь: $121 - ИТ$, $\dot{I}_1 = 1 - j3$; $212 - R_2 = 2$; $312 - L_3$; $412 - L_4$; $512 - C_5$; $|Z_3| = |Z_4| = |Z_5| = 2$; $|Z_м| = 1$; узлы 1, 2 — однополярные выводы ИСЭ.

15. Цепь: $115 - ИН, \dot{U}_1 = j4$; $212 - R_2 = 2$; $324 - L_3$; $423 - L_4$; $534 - C_5$; $645 - C_6$; $|Z_4| = |Z_6| = |Z_м| = 1$; $|Z_3| = |Z_5| = 2$; узлы 4, 3 — однополярные выводы ИСЭ.

16. Цепь: $114 - C_1$; $212 - R_2 = 1$; $323 - L_3$; $434 - L_4$; $534 - R_5 = 1$; $641 - ИТ, \dot{I}_6 = 6\exp(j26{,}5°)$; $|Z_1| = |Z_м| = 1$; $|Z_3| = |Z_4| = 2$; узлы 2, 4 — однополярные выводы ИСЭ.

17. Цепь: $113 - ИН, \dot{U}_1 = \sqrt{5}\exp(j135°)$; $212 - C_2$; $323 - L_3$; $445 - L_4$; $554 - R_5 = 2$; $|Z_2| = 1$; $|Z_3| = 3$; $|Z_4| = 2$; $|Z_м| = \sqrt{2}$; узлы 2, 5 — однополярные выводы ИСЭ.

18. Цепь: $113 - ИН, u_1 = 12\sqrt{2}\cos(t + 45°)$; $212 - R_2 = 2$; $323 - L_3 = 3$; $446 - L_4 = 3$; $554 - C_5 = 1$; $665 - L_6 = 2$; $|M| = 2$; узлы 2, 4 — однополярные выводы ИСЭ.

19. Цепь: $113 - ИН$, $\dot{U}_1 = 3 + j3$; $212 - R_2 = 2$; $323 - L_3$; $446 - L_4$; $554 - R_5 = 2$; $665 - C_6$; $|Z_3| = |Z_4| = 4$; $|Z_6| = |Z_м| = 2$; узлы 3, 4 — однополярные выводы ИСЭ.

20. Цепь: $113 - ИН, \dot{U}_1 = j2$; $212 - R_2 = 1$; $323 - L_3$; $446 - L_4$; $554 - C_5$; $656 - ИН$, $\dot{U}_6 = 2$; $|Z_3| = |Z_4| = 2$; $|Z_5| = |Z_м| = 1$; узлы 2, 4 — однополярные выводы ИСЭ.

21. Цепь: $114 - ИН, \dot{U}_{1m} = \sqrt{10}\exp(j26{,}5°)$; $212 - C_2$; $323 - L_3$; $456 - L_4$; $565 - R_5 = 1$; $634 - R_6 = 1$; $|Z_2| = |Z_3| = 2$; $|Z_4| = |Z_м| = 1$; узлы 2, 5 — однополярные выводы ИСЭ.

22. Цепь: $112 - R_1 = 2$; $223 - L_2$; $313 - L_3$; $445 - L_4$; $545 - ИН, \dot{U}_{5m} = j2$; $631 - ИТ$, $\dot{I}_{6m} = 2$; $|Z_2| = |Z_4| = |Z_м| = 1$; $|Z_3| = 2$; узлы 1, 5 — однополярные выводы ИСЭ.

23. Цепь: $113 - ИН, u_1 = 8\cos(t - 63{,}5°)$; $212 - L_2 = 2$; $323 - L_3 = 2$; $446 - L_4 = 3$; $554 - R_5 = 2$; $665 - C_6 = 0{,}5$; $|M| = 2$; узлы 3, 6 — однополярные выводы ИСЭ.

24. Цепь: $112 - L_1$; $223 - C_2$; $334 - L_3$; $456 - L_4$; $565 - R_5 = 2$; $614 - ИН, \dot{U}_6 = -2 + j2$; $|Z_1| = |Z_3| = |Z_4| = 2$; $|Z_2| = 3$; $|Z_м| = \sqrt{2}$; узлы 3, 5 — однополярные выводы ИСЭ.

25. Цепь: 113 – ИН, $\dot{U}_1 = 20$; 212 – $R_2 = 1$; 323 – L_3; 447 – L_4; 554 – $R_5 = 1$; 665 – C_6; 767 – ИН, $\dot{U}_7 = 10$; $|Z_3| = 2$; $|Z_4| = |Z_6| = |Z_м| = 1$; узлы 2, 4 – однополярные выводы ИСЭ.

1.5.3. Цепь с индуктивной связью находится *в режиме гармонических колебаний.*

1. Цепь: 115 – ИН; 212 – $R_2 = 2$; 323 – $L_3 = 3$; 434 – $L_4 = 2$; 545 – $C_5 = 0{,}125$; $|M| = 1{,}5$. Найти добротность и резонансную частоту при согласном и встречном включении.
2. Цепь: 114 – ИН, $U_1 = 20$; 212 – $R_2 = 2$; 323 – L_3; $|Z_3| = 2$; 434 – C_4; $|Z_4| = 2$; 556 – L_5; $|Z_5| = 2$; 657 – $R_6 = 1$; 767 – XX; $|Z_м| = 1$. Найти U_{67}.
3. Цепь: 112 – L_1; $|Z_1| = 2$; 223 – L_2; $|Z_2| = 2$; 334 – $R_3 = 1$; 425 – C_4; $|Z_C| = 1$; $|Z_м| = 1$; $\dot{I}_{12} = 1 + j$; $\dot{I}_{43} = 2$; $\omega = 10$; однополярные выводы ИСЭ – узлы 1 и 2. Найти $u_{45}(t)$.
4. Цепь: 112 – $R_1 = 4$; 223 – L_2; $|Z_2| = 2$; 334 – L_3, $|Z_3| = 4$; $|Z_м| = 1$; 445 – C_4, $|Z_C| = 4$; $\dot{U}_{15} = 20$. Найти I при согласном и встречном включении.
5. Цепь: 112 – ИН, $U_1 = 20$; 212 – L_2, $|Z_2| = 1{,}6$; 334 – L_3, $|Z_3| = 3$; 434 – $R_4 = 1$; $|Z_м| = 2$. Найти $Z_{вх}$, I_1, P.
6. Цепь: 113 – ИН, $U_1 = 10$; 212 – C_2; 323 – L_3, $|Z_3| = 2$; 445 – L_4, $|Z_4| = 1$; 545 – $R_5 = 1$; $|Z_м| = 1$; в цепи резонанс. Найти Z_C, I_C, I_R.
7. Цепь: 112 – ИН; 212 – L_2, $|Z_2| = 2$; 334 – L_3, $|Z_3| = 2$; 434 – $R_4 = 2$; $|Z_м| = 1$; $I_1 = 4$. Найти I_4, U_1.
8. Цепь: 114 – ИН, $U_1 = 10$; 212 – $R_2 = 3$; 323 – $L_3 = 2$; 434 – $L_4 = 4$; $M = -1$; $\omega = 1$. Найти I, P, U_{13}.
9. Цепь: 114 – ИН, u_1; 212 – L_2; 324 – ИН u_3; 423 – L_4, $|Z_4| = 3$; 534 – $R = 2$; $|Z_м| = 2$; $\dot{I}_{12} = 2$; $\dot{I}_{24} = 2 + j2$; однополярные выводы ИСЭ узлы 1 и 3. Найти $u_3(t)$.
10. Цепь: 114 – ИН, $\dot{U}_1 = 4$; 212 – $L_2 = 2$; 323 – $L_3 = 1$; 423 – $R_4 = 2$; 534 – $C_5 = 0{,}125$; $|M| = 1$; $\omega = 2$. Однополярные выводы ИСЭ – узлы 1 и 3. Найти $z_{вх}$, I_1.
11. Цепь: 112 – ИН; 212 – L_2, $|Z_2| = 2$; 334 – L_3, $|Z_3| = 2$; 434 – $R_4 = 2$; $|Z_м| = 1$; $P = 8$. Найти I_1, I_4.
12. Цепь: 112 – ИН u_1; 212 – L_2, $|Z_2| = 2$; 334 – L_3, $|Z_3| = 1$; 434 – R_4; $|Z_м| = \sqrt{2}$; $I_1 = 5\sqrt{2}$; $I_4 = 2\sqrt{5}$. Найти R, U_1.
13. Цепь: 114 – ИН, $U_1 = 30$; 212 – $L_2 = 3$; 323 – $L_3 = 2$; 434 – $C_4 = 0{,}25$; $\omega = 2$; при согласном включении $I = 3$. Найти $|M|$, I при встречном включении.
14. Цепь: 112 – ИН, $\dot{U}_1 = 9 + j3$; 212 – L_2, $|Z_2| = 2$; 334 – L_3, $|Z_3| = 2$; 434 – ИН, $\dot{U}_4 = -3 - j9$; $|Z_м| = 1$; однополярные выводы ИСЭ – узлы 1 и 3. Найти $\dot{I}_2, \dot{I}_3$.

15. Цепь: 113 — ИН, $\dot{U}_1 = -j$; 212 — L_2, $|Z_2| = 1$; 323 — C_3; 445 — L_4, $|Z_4| = 3$; 545 — $R = 1$; $|Z_м| = 1$; $\dot{I}_{12} = 3 - j$. Найти I_5, Z_C, P.

16. Цепь: 113 — ИН, $U_1 = 40\sqrt{2}$; 212 — $R_2 = 2$; 323 — L_3, $|Z_3| = 2$; 446 — L_4, $|Z_4| = 3$; $|Z_{34}| = 1$; 545 — $R_5 = 2$; 656 — L_6, $|Z_6| = 4$; 756 — C_7, $|Z_C| = 4$. Найти I_1, I_7.

17. Цепь: 113 — ИН; 212 — $R = 2$; 323 — L_3, $|Z_3| = 1$; 445 — L_4, $|Z_4| = 3$; 545 — C_5; $|Z_5| = 4$; $|Z_м| = 1$; $P = 8$. Найти I_5, $Z_{вх}$, U_1.

18. Цепь: 113 — ИН, $U_1 = 2\sqrt{2}$; 212 — C_2, $|Z_2| = 2$; 323 — L_3, $|Z_3| = 2$; 445 — L_4, $|Z_4| = 2$; 545 — $R_5 = 2$; $k_{св} = 0{,}5$. Найти I_2, I_5.

19. Цепь: 115 — ИН, $U_1 = 100$; 212 — $R_2 = 2$; 323 — L_3, $|Z_3| = 2$; 434 — L_4, $|Z_4| = 4$; 545 — $R_5 = 4$; 635 — C_6, $|Z_6| = 2$; $|Z_м| = 2$; однополярные выводы ИСЭ — узлы 2 и 4. Найти токи.

20. Цепь: 112 — ИН, $U_1 = 12$; 212 — L_2, $|Z_2| = 4$; 334 — L_3, $|Z_3| = 4$; 434 — C_4, $|Z_4| = 2$; $|Z_м| = 2$. Найти I_4.

21. Цепь: 113 — ИН, $\dot{U}_1 = 8 + j8$; 212 — $R_2 = 2$; 323 — L_3, $|Z_3| = 4$; 446 — L_4, $|Z_4| = 4$; 545 — $R_5 = 2$; 656 — C_6, $|Z_6| = 4$; $|Z_м| = 2$. Найти P, i_6.

22. Цепь: 113 — ИН, u_1; 213 — L_2; 312 — R_3; 423 — L_4; однополярные выводы ИСЭ — узлы 1 и 2; при согласном включении $\dot{I}_2 = 1, \dot{I}_4 = 1 + j$. Качественно построить векторную диаграмму.

23. Цепь: 114 — ИН, u_1; 212 — C_2; 323 — L_3; 434 — L_4; 534 — R_5; однополярные выводы ИСЭ — узлы 2 и 4. Составить уравнения Кирхгофа в t-области и эквивалентную схему без индуктивной связи.

24. Цепь: 114 — ИН; 212 — L_2, $|Z_2| = 4$; 313 — R_3; 432 — L_4; $|Z_4| = 4$; $|Z_м| = 2$; 524 — C_5; $\dot{I}_{12} = 2$; $\dot{I}_{13} = 1 + j$; однополярные выводы ИСЭ — узлы 1 и 3. Найти R_3.

25. Цепь: 112 — $R_1 = 2$; 223 — L_2, $|Z_2| = 2$; 334 — L_3, $|Z_3| = 2$; 435 — $R_4 = 2$; $|Z_м| = 2$; однополярные выводы ИСЭ — узлы 2 и 4; $\dot{I}_{12} = 2$; $\dot{I}_{43} = 1$. Найти $\dot{U}_{15}$ при данных условиях и при $\dot{I}_{43} = -1$.

1.5.4. Рассчитать операторным методом переходный процесс и найти токи ИСЭ при $t > 0$.

В вариантах 1–18 в момент $t = 0$ ключ К замыкается, а в вариантах 19–25 размыкается.

1. Цепь: 112 — ИН $u_1 = 6$; 213 — R_2; 334 — L_3; 442 — R_4; 556 — L_5; 656 — R_6; 713 — К; $|M| = 1$; $R_k = 3$; $L_k = 2$. Однополярные выводы ИСЭ — 3 и 5.

2. Цепь: 112 — ИН $u_1 = 12$; 213 — R_2; 334 — L_3; 442 — R_4; 556 — L_5; 657 — R_6; 776 — ИН $u_7 = 6$; 813 — К; $|M| = 0{,}5$; $L_k = 1$; $R_k = 3$. Однополярные выводы ИСЭ — 3 и 6.

3. Цепь: 121 — ИТ $i_1 = 5$; 212 — $R_2 = 4$; 313 — $R_3 = 6$; 432 — $L_4 = 3$; 545 — $L_5 = 1$; 645 — $R_6 = 2$; 713 — К; |М| = 1. Однополярные выводы ИСЭ — 2 и 4.
4. Цепь: 121 — ИТ $i_1 = 4$; 212 — R_2; 313 — R_3; 432 — L_4; 546 — L_5; 645 — R_6; 756 — ИН $u_7 = 5$; 813 — К; |М| = 2; $L_k = 3$; $R_k = 5$. Однополярные выводы ИСЭ — 3 и 4.
5. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 3$; 212 — $L_2 = 2$; 323 — R_3; 445 — $L_4 = 1$; 553 — R_5; 643 — R_6; 714 — К; $R_k = 1$; |М| = 1. Однополярные выводы ИСЭ — 1 и 4.
6. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 3$; 212 — $L_2 = 2$; 323 — R_3; 414 — R_4; 545 — $L_5 = 4$; 653 — R_6; 714 — К; |М| = 2; $R_k = 2$. Однополярные выводы ИСЭ — 2 и 4.
7. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 9$; 212 — R_2; 323 — L_3; 434 — R_4; 556 — L_5; 664 — R_6; 725 — К; |М| = 1; $L_k = 2$; $R_k = 3$. Однополярные выводы ИСЭ — 2 и 5.
8. Цепь: 112 — R; 212 — $L_2 = 0{,}5$; 313 — К; 423 — ИТ $i_4 = 2$; 534 — $L_5 = 1$; 642 — R_6; $R_k = 1$; |М| = 0,5. Однополярные выводы ИСЭ — 1 и 3.
9. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 6$; 212 — R_2; 323 — $L_3 = 2$; 434 — R_4; 554 — $L_5 = 1$; 654 — R_6; 725 — К; |М| = 1; $R_k = 2$. Однополярные выводы ИСЭ — 2 и 5.
10. Цепь: 121 — ИТ $i_1 = 6$; 212 — $R_2 = 2$; 313 — $L_3 = 4$; 432 — $R_4 = 1$; 542 — $L_5 = 2$; 642 — $R_6 = 2$; 714 — К; |М| = 2. Однополярные выводы ИСЭ — 1 и 4.
11. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 1{,}8$; 212 — $L_2 = 6$; 323 — $R_3 = 2$; 414 — $R_4 = 2$; 543 — $L_5 = 1$; 643 — $R_6 = 1$; 714 — К; |М| = 1. Однополярные выводы ИСЭ — 1 и 3.
12. Цепь: 121 — ИТ $i_1 = 5$; 212 — $R_2 = 1$; 313 — $L_3 = 2$; 432 — $R_4 = 3$; 514 — $R_5 = 3$; 642 — $L_6 = 1$; 714 — К; |М| = 1. Однополярные выводы ИСЭ — 1 и 4.
13. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 17$; 212 — $L_2 = 4$; 323 — $R_3 = 4{,}5$; 414 — $R_4 = 4{,}5$; 543 — $L_5 = 2$; 643 — $R_6 = 1$; 723 — К; |М| = 2. Однополярные выводы ИСЭ — 2 и 4.
14. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 5$; 212 — $R_2 = 1$; 323 — $L_3 = 1{,}5$; 434 — $R_4 = 3$; 526 — $R_5 = 3$; 664 — $L_6 = 6$; 734 — К; |М| = 2. Однополярные выводы ИСЭ — 2 и 4.
15. Цепь: 112 — ИН $u_1 = 6$; 213 — R_2; 334 — L_3; 442 — R_4; 556 — L_5; 656 — R_6; 713 — К; |М| = 1; $R_k = 3$; $L_k = 2$. Однополярные выводы ИСЭ — 3 и 6.
16. Цепь: 112 — ИН $u_1 = 12$; 213 — R_2; 334 — L_3; 442 — R_4; 556 — L_5; 657 — R_6; 776 — ИН $u_7 = 6$; 813 — К; |М| = 0,5; $L_k = 1$; $R_k = 3$. Однополярные выводы ИСЭ — 3 и 5.
17. Цепь: 121 — ИТ $i_1 = 5$; 212 — $R_2 = 4$; 313 — $R_3 = 6$; 432 — $L_4 = 3$; 545 — $L_5 = 1$; 645 — $R_6 = 2$; 713 — К; |М| = 1. Однополярные выводы ИСЭ — 3 и 4.
18. Цепь: 121 — ИТ $i_1 = 4$; 212 — R_2; 313 — R_3; 432 — L_4; 546 — L_5; 645 — R_6; 756 — ИН $u_7 = 5$; 813 — К; |М| = 2; $L_k = 3$; $R_k = 5$. Однополярные выводы ИСЭ — 3 и 6.
19. Цепь: 112 — ИН $u_1 = 6$; 213 — $R_2 = 1{,}5$; 334 — L_3; 442 — $R_4 = 1{,}5$; 556 — L_5; 656 — $R_6 = 3$; 713 — К; |М| = 1; $L_k = 2$. Однополярные выводы ИСЭ — 3 и 5.

20. Цепь: 112 — ИН $u_1 = 12$; 213 — $R_2 = 1{,}5$; 334 — L_3; 442 — $R_4 = 1{,}5$; 556 — L_5; 657 — $R_6 = 3$; 776 — ИН $u_7 = 6$; 813 — К; $|M| = 0{,}5$; $L_k = 1$. Однополярные выводы ИСЭ — 3 и 6.

21. Цепь: 121 — ИТ $i_1 = 3$; 212 — R_2; 313 — R_3; 432 — $L_4 = 3$; 545 — $L_5 = 1$; 645 — R_6; 713 — К; $|M| = 1$; $R_k = 2$. Однополярные выводы ИСЭ — 2 и 4.

22. Цепь: 121 — ИТ $i_1 = 2$; 212 — $R_2 = 2{,}5$; 313 — $R_3 = 2{,}5$; 432 — L_4; 546 — L_5; 645 — $R_6 = 5$; 756 — ИН $u_7 = 5$; 813 — К; $|M| = 2$; $L_k = 3$. Однополярные выводы ИСЭ — 3 и 4.

23. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 3$; 212 — $L_2 = 2$; 323 — $R_3 = 2$; 414 — $R_4 = 1$; 545 — $L_5 = 4$; 653 — $R_6 = 1$; 714 — К; $|M| = 2$. Однополярные выводы ИСЭ — 2 и 4.

24. Цепь: 121 — ИТ $i_1 = 6$; 212 — R_2; 313 — $L_3 = 2$; 432 — R_4; 514 — R_5; 642 — $L_6 = 1$; 714 — К; $|M| = 1$; $R_k = 2$. Однополярные выводы ИСЭ — 1 и 4.

25. Цепь: 112 — ИН $u_1 = 3$; 213 — $R_2 = 1{,}5$; 334 — L_3; 442 — $R_4 = 1{,}5$; 556 — L_5; 657 — $R_6 = 3$; 776 — ИН $u_7 = 6$; 813 — К; $|M| = 0{,}5$; $L_k = 1$. Однополярные выводы ИСЭ — 3 и 5.

1.5.5. Рассчитать цепи с зависимыми источниками.

1. Схема ЧП: 113 — R_1; 232 — R_2; 334 — R_3; 423 — ИТУТ $i_4 = \alpha i_{34}$; 14 — вход ЧП, 24 — выход. Найти z-параметры.

2. Схема ЧП: 113 — R_1; 234 — R_2; 335 — ИНУН $u_3 = \mu u_{13}$; 452 — R_4; 14 — вход ЧП, 24 — выход. Найти z-параметры.

3. Схема ЧП: 113 — $R_1 = 1$; 232 — $R_2 = 1$; 324 — $R_3 = 1$; 432 — ИТУН $i_4 = 4u_{34}$; 14 — вход ЧП, 24 — выход. Найти y-параметры.

4. Схема ЧП: 114 — $R_1 = 1$; 212 — $R_2 = 1$; 323 — $R_3 = 1$; 443 — ИНУН $u_4 = 2u_{14}$; 14 — вход ЧП, 24 — выход. Найти y-параметры.

5. Схема ЧП: 113 — $R_1 = 1$; 232 — $R_2 = 1$; 324 — $R_3 = 1$; 432 — ИТУН $i_4 = 4u_{34}$; 14 — вход ЧП, 24 — выход. Найти a-параметры.

6. Схема ЧП: 113 — $R_1 = 1$; 232 — $R_2 = 1$; 334 — КЗ; 423 — ИТУТ $i_4 = 0{,}8i_{34}$; 14 — вход ЧП, 24 — выход. Найти a-параметры.

7. Цепь: 114 — ИН u_1; 212 — $R_2 = 1$; 324 — $R_3 = 1$; 423 — $C_4 = 1$; 534 — ИТУТ $i_5 = 0{,}5i_{42}$; 634 — $R_6 = 1$. Найти $H(s) = U_6(s)/U_1(s)$, $h(t)$.

8. Цепь: 141 — ИТ i_1; 214 — $R_2 = 1$; 312 — $R_3 = 1$; 423 — $C_4 = 1$; 534 — ИТУТ $i_5 = 0{,}8i_2$; 634 — КЗ. Найти $H(s) = I_6(s)/I_1(s)$, $h(t)$.

9. Цепь: 115 — ИН u_1; 212 — R_2; 323 — R_3; 435 — ИНУТ $u_4 = k_4 i_{12}$; 524 — пассивный ДП, $z_5(s)$; 645 — ИНУН $u_6 = k_6 u_1$. При каких значениях k_4, k_6 входное операторное сопротивление $Z_{вх}(s) = R_2 R_3 / Z_5(s)$?

10. Цепь: 114 — ИН u_1; 212 — $C_2 = 1$; 323 — $R_3 = 1$; 434 — ИНУН $u_4 = 3u_{12}$; 524 — $R_5 = 1$. Найти $H(s) = U_{24}(s)/U_1(s)$, $h(t)$.

11. Цепь: 115 – ИН u_1; 212 – $R_2 = 1$; 325 – $C_3 = 1$; 423 – ИНУН $u_4 = 5u_{12}$; 534 – $R_5 = 1$; 645 – $R_6 = 1$. Найти $H(s) = U_6(s)/U_1(s)$, $h(t)$.

В вариантах 12–18 решить задачу, представив ЧП (или ИСЭ) схемой замещения с зависимыми источниками. ЧП – задан тройкой чисел: первая цифра – входной, вторая – выходной, третья – общий выводы ЧП.

12. Цепь: 114 – ИН $u_1 = 11$; 212 – $R_2 = 1$; 324 – $R_3 = 1$; 423 – $R_4 = 1$; ЧП – 231 ($z_{11} = 2$; $z_{12} = 0$; $z_{21} = -10$; $z_{22} = 1$). Найти u_{34}.

13. Цепь: 114 – ИН u_1; 212 – $R_2 = 1$; 323 – $R_3 = 1$; 434 – $R_4 = 1$; 534 – $L_5 = 2$; 624 – $L_6 = 2$; $|M| = 1$; узлы 3 и 2 – однополярные выводы ИСЭ. Использовав МКТ, найти $H(s) = U_6(s)/U_1(s)$, а затем $h(t)$.

14. Цепь: 114 – ИН u_1; 212 – $R_2 = 1$; 324 – $L_3 = 2$; 423 – $R_4 = 1$; 534 – $L_5 = 2$; 634 – $R_6 = 1$; $|M| = 1$; узлы 2 и 3 – однополярные выводы ИСЭ. Использовав МКТ, найти $H(s) = U_6(s)/U_1(s)$, а затем $h(t)$.

15. Цепь задачи 14: использовав МУН и Г-параметры ИСЭ, найти $H(s) = U_6(s)/U_1(s)$, а затем $h(t)$.

16. Цепь: 114 – ИН $u_1 = 11$; 212 – $R_2 = 1$; 323 – $R_3 = 1$; 424 – $R_4 = 1$; ЧП – 234 ($y_{11} = 0{,}5$; $y_{12} = 0$; $y_{21} = 5$; $y_{22} = 1$). С помощью МУН найти u_{34}.

17. Цепь: 114 – ИН u_1; 212 – $R_2 = 1$; 324 – $L_3 = 2$; 423 – $R_4 = 1$; 523 – $L_5 = 2$; 634 – $R_6 = 1$; $|M| = 1$; узлы 4 и 3 – однополярные выводы ИСЭ. Использовав МУН и Г-параметры ИСЭ, найти $H(s) = U_6(s)/U_1(s)$, а затем $h(t)$.

18. Цепь: 113 – ИН u_1; 212 – $R_2 = 2$; 324 – $R_3 = 2$; 423 – $L_4 = 1$; 543 – $L_5 = 2$; $|M| = 1$, однополярные узлы ИСЭ – 2, 4; 643 – $R_6 = 1{,}5$. Найти $H(s) = U_6(s)/U_1(s)$, $h(t)$.

19. Цепь: 131 – ИТ i_1; 213 – $R_2 = 1$; 312 – $R_3 = 1$; 412 – ИНУН $i_4 = 3u_{13}$; 523 – $C_5 = 1$; 623 – $R_6 = 1$. Найти $H(s) = I_6(s)/I_1(s)$, $h(t)$.

20. Цепь: 115 – ИН u_1; 212 – $R_2 = 1$; 325 – $C_3 = 0{,}5$; 423 – $R_4 = 1$; 543 – ИНУН $u_5 = 2u_{45}$; 645 – $R_6 = 0{,}5$. Найти $H(s) = U_6(s)/U_1(s)$, $h(t)$.

21. Цепь: 141 – ИТ i_1; 214 – $R_2 = 1$; 312 – $C_3 = 0{,}5$; 423 – $R_4 = 2$; 534 – $R_5 = 2$; 631 – ИТУТ $i_6 = 0{,}5i_{14}$. Найти $H(s) = I_5(s)/I_1(s)$, $h(t)$.

22. Цепь: 114 – ИН u_1; 212 – $R_2 = 1$; 324 – $C_3 = 0{,}5$; 423 – $R_4 = 1$; 532 – ИТУН $i_5 = 0{,}5u_{24}$; 634 – $R_6 = 1$. Найти $H(s) = U_6(s)/U_1(s)$, $h(t)$.

23. Цепь: 115 – ИН u_1; 212 – $R_2 = 1$; 323 – $R_3 = 1$; 435 – $C_4 = 1$; 524 – ИНУТ $u_5 = i_{12}$; 645 – $R_6 = 1$. Найти $H(s) = U_6(s)/U_1(s)$, $h(t)$.

24. Цепь: 141 – ИТ i_1; 241 – $R_2 = 1$; 312 – $C_3 = 1$; 423 – ИНУН $u_4 = 0{,}5u_{12}$; 534 – $R_5 = 1$; 624 – $R_6 = 2$. Найти $H(s) = I_6(s)/I_1(s)$, $h(t)$.

25. Цепь: 115 – ИН u_1; 212 – $R_2 = 1$; 323 – $R_3 = 1$; 435 – ИНУН $u_4 = u_{54}$; 524 – $C_5 = 1$; 645 – $R_6 = 1$. Найти $H(s) = U_6(s)/U_1(s)$, $h(t)$.

1.5.6. Рассчитать цепи с операционными усилителями. Во всех вариантах ОУ (идеальные или с конечным усилением) заданы тройками чисел: первая цифра — инвертирующий вход, вторая — неинвертирующий; третья — выход. При решении задач рекомендуется использовать МУН, имея в виду, что базисному узлу («земле») присваивается наибольший номер. В случае ОУ с конечным усилением $k_{\text{ОУ}}$ в тексте после соответствующей тройки чисел указывается $k_{\text{ОУ}}$; при этом принимается $k_{\text{ОУ}} > 0$.

1. Цепь: 115 — ИН u_1; 212 — R_2; 313 — R_3; 435 — $C_4 = 1$; 524 — R_5; ОУ — 234; $R_k = 1$. Найти $H(s) = U_{45}(s)/U_1(s)$, $h(t)$.
2. Цепь: 116 — ИН $u_1 = 4\exp(-2t)\delta_1(t)$; 226 — ИН $u_2 = 8\exp(-t)\delta_1(t)$; 313 — $R_3 = 1$; 424 — $R_4 = 1$; 535 — $C_5 = 1$; 646 — $C_6 = 1$; ОУ — 345. Найти $u_{56}(t)$, указать назначение схемы.
3. Цепь: 115 — ИН u_1; 212 — $C_2 = 1$; 323 — $C_3 = 1$; 435 — $R_4 = 1$; 524 — $R_5 = 1$; ОУ — 534, $k_{\text{ОУ}} = 3$. Найти $H(s) = U_{45}(s)/U_1(s)$, $h(t)$.
4. Цепь: 115 — ИН u_1; 212 — $R_2 = 0{,}5$; 323 — $R_3 = 0{,}5$; 425 — $C_4 = 3$; 524 — $R_5 = 0{,}5$; 634 — $C_6 = 1/3$; ОУ — 354. Найти $H(s) = U_{45}(s)/U_1(s)$, $h(t)$.
5. Цепь: 115 — ИН u_1; 212 — R_2; 313 — R_3; 423 — R_4; 524 — C_5; 635 — C_6; ОУ — 534, $k_{\text{ОУ}}$; $R_k = 1$. $C_k = 1$. Найти $H(s) = U_{45}(s)/U_1(s)$, установить, при каких значениях $k_{\text{ОУ}}$ цепь будет неустойчивой. Определить $h(t)$ при $k_{\text{ОУ}} = 2$.
6. Цепь: 116 — ИН u_1; 212 — R_2; 323 — R_3; 434 — $C_4 = 1$; 546 — R_5; 635 — R_6; ОУ — 265; $R_k = 3$. Найти $H(s) = U_{56}(s)/U_1(s)$, $h(t)$.
7. Цепь: 141 — ИТ i_1; 214 — $R_2 = 0{,}5$; 312 — $C_3 = 1$; 413 — $C_4 = 1$; 532 — $R_5 = 1$; ОУ — 243. Найти $Z_{14}(s)$, качественно построить график $|Z_{14}(j\omega)|$.
8. Цепь: 114 — ИН u_1; 212 — R_2; 323 — R_3; 434 — R_4; ОУ — 312. Найти $G_{\text{вх}} = G_{14}$; указать назначение схемы.
9. Цепь: 115 — ИН u_1; 212 — $R_2 = 1$; 323 — $R_3 = 0{,}5$; 424 — $C_4 = 1$; 535 — $C_5 = 1$; ОУ — 534, $k_{\text{ОУ}} = 1{,}5$. Найти $H(s) = U_{45}(s)/U_1(s)$, $h_1(t)$.
10. Цепь: 116 — ИН u_1; 212 — R_2; 323 — R_3; 423 — C_4; 534 — R_5; 645 — R_6; 745 — C_7; ОУ1 — 263; ОУ2 — 465; $R_k = 1$; $C_k = 1$. Найти $H(s) = U_{56}(s)/U_1(s)$, $h(t)$.
11. Цепь: 134 — R_1; 212 — R_2; 323 — R_3; ОУ — 312; 514 — ИН. Найти G_{14}, указать назначение схемы.
12. Цепь: 115 — ИН u_1; 212 — $R_2 = 1$; 323 — $C_3 = 1$; 424 — $R_4 = 1$; 525 — $C_5 = 1$; 635 — $R_6 = 2$; ОУ — 534, $k_{\text{ОУ}} = 2{,}5$. Найти $H(s) = U_{45}(s)/U_1(s)$, установить пределы изменения ФЧХ на интервале $0 < \omega < \infty$.
13. Цепь: 115 — ИН u_1; 212 — $R_2 = 0{,}5$; 323 — $C_3 = 1$; 424 — $C_4 = 1$; 543 — $R_5 = 1$; ОУ — 354. Найти $H(s) = U_{45}(s)/U_1(s)$, $h(t)$.
14. Цепь: 141 — ИТ i_1; 212 — $R_2 = 1$; 314 — $C_3 = 1{,}5$; 413 — $R_4 = 0{,}5$; 523 — $C_5 = 2/3$; ОУ — 243. Найти $Z_{\text{вх}}$, $h(t)$.

15. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 2\delta_1(t)$; 212 — $R_2 = 1$; 324 — $R_3 = 0{,}5$; 424 — $C_4 = 1$; 513 — $C_5 = 1$; ОУ — 423, $k_{\text{ОУ}} = 2$. Определить u_{34}; при каких значениях $k_{\text{ОУ}}$ цепь будет неустойчивой?
16. Цепь: 141 — ИТ i_1; 212 — R_2; 313 — R_3; 423 — C_4; ОУ — 243. Найти входную проводимость $Y_{14}(s)$; изобразить схему пассивной цепи, эквивалентную заданной, построить качественно АЧХ.
17. Цепь: 115 — ИН u_1; 212 — R_2; 324 — R_3; 434 — R_4; 535 — R_5; 625 — C_6; ОУ — 324; $R_k = 1$; $C = 1$. Определить $H(s) = U_{45}(s)/U_1(s)$, найти $u_{45}(t)$ при $u_1 = 4\delta_1(t) - 4\delta_1(t-2)$. Указать назначение схемы.
18. Цепь: 116 — ИН u_1; 212 — $R_2 = 0{,}1$; 334 — $R_3 = 0{,}5$; 425 — $C_4 = 1$; 546 — $C_5 = 1$; ОУ1 — 623, $k_{\text{ОУ}} = 2$; ОУ2 — 645, $k_{\text{ОУ}} = 2$. Найти $H(s) = U_{56}(s)/U_1(s)$, $h(t)$.
19. Цепь: 115 — ИН u_1; 212 — R_2; 323 — C_3; 424 — R_4; 535 — C_5; 635 — R_6; ОУ — 534, $k_{\text{ОУ}} = 3$; $R_k = 1$; $C_k = 1$. Найти $H(s) = U_{45}(s)/U_1(s)$, $h(t)$. При каких значениях $k_{\text{ОУ}}$ цепь будет неустойчивой?
20. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 2\delta_1(t)$; 212 — R_2; 324 — R_3; 423 — R_4; 534 — C_5; 625 — C_6; ОУ — 354; $R_k = 0{,}5$; $C_k = 2$. Найти u_{45}.
21. Цепь: 115 — ИН u_1; 212 — R_2; 325 — C_3; 435 — R_4; 534 — C_5; ОУ — 324; $R_2C_3 = R_4C_5 = 1$. Найти $H(s) = U_{45}(s)/U_1(s)$. Определить $u_{45}(t)$ при $u_1(t) = 2\exp(-2t)\delta_1(t)$.
22. Цепь: 115 — ИН u_1; 212 — R_2; 325 — R_3; 423 — R_4; 534 — C_5; ОУ — 354; $R_k = 1$; $C_5 = 1$. Определить $H(s) = U_{45}(s)/U_1(s)$. Найти $u_{45}(t)$ при $u_1(t) = 3\sin t\,\delta_1(t) + 3\sin(t-\pi)\delta_1(t-\pi)$.
23. Цепь: 116 — ИН u_1; 212 — $R_2 = 1$; 326 — $C_3 = 2$; 423 — $R_4 = 1$; 534 — $C_5 = 1$; 645 — $C_6 = 1$; 746 — $R_7 = 0{,}5$; ОУ — 365. Определить $H(s) = U_{56}(s)/U_1(s)$, указать назначение схемы. Вычислить $u_{56}(t)$ при $u_1(t) = 2e^{-t}\delta_1(t)$.
24. Цепь: 115 — ИН u_1; 212 — R_2; 324 — C_3; 434 — R_4; 545 — C_5; $R_k = 1$, $C_k = 1$; ОУ — 523, $k_{\text{ОУ}} = 2$. Определить $H(s) = U_{35}(s)/U_1(s)$, $h(t)$. При каких значениях $k_{\text{ОУ}}$ цепь будет неустойчивой?
25. Цепь: 116 — ИН $u_1 = 2$; 212 — $R_2 = 1$; 324 — $R_3 = 0{,}5$; 423 — $C_4 = 1$; 546 — $C_5 = 1$; 635 — ключ, замыкается; ОУ — 645, $k_{\text{ОУ}} = 1{,}5$; $u_{C4}(0-) = 0$. Определить $u_{56}(t)$.

1.5.7. Дана схема симметричного ФНЧ (фильтра типа k), находящегося в режиме согласованной нагрузки: 113 — $L_1 = N + 1$ (здесь N — порядковый номер варианта); 234 — $C_2 = N + 1$; 332 — $L_3 = L_1$; 414 — ИН $u_1 = u_{\text{пх}}$; 524 — $Z_5 = Z_{\text{н}} = Z_{\text{с}}$. Требуется: 1) найти ПП и частоту среза $\omega_{\text{ср}}$; 2) найти характеристическое сопротивление $Z_{\text{с}}$ и функцию передачи по напряжению $H_U = e^{-\gamma} = \sqrt{(Z_{\text{хх}} - Z_{\text{с}})/(Z_{\text{хх}} + Z_{\text{с}})}$, их значения на частотах $\omega = 0, \infty, \omega_{\text{ср}}$ и качественно построить графики $|Z_{\text{с}}(j\omega)|$ и АЧХ; 3) найти параметры фильтра Баттерворта третьего порядка с рассчитанной выше

$\omega_{ср}$ при $R_н = Z_C(0)$; 4) спроектировать ФВЧ (при $\Omega_{ср} = 1$; $R_н = 2$), а также ППФ и ПЗФ (при $\Omega_{ср1} = 1$; $\Omega_{ср2} = 4$; $R_н = 2$) по ФНЧ-прототипу.

1.5.8. Синтезировать схемой на операционных усилителях ПФ

$$H_U(s) = \frac{(s+N)^2}{(s+M)^2(s+T)^2}$$

при $N \neq M \neq T \neq N$, где N — порядковый номер варианта; M — номер месяца рождения; T — оценка по ТОЭ.

1.5.9. Синтезировать двумя принципиально различными вариантами схем пассивный LC-четырехполюсник с ПФ

$$H_U^{XX}(s) = \frac{k(s^2+N)}{s^2+M}$$

при $N \neq M$, где N — порядковый номер варианта; M — номер месяца рождения; k — коэффициент.

1.5.10. Синтезировать двумя принципиально различными схемами пассивный RC-четырехполюсник с ПФ

$$H_U(s) = \frac{k(s+M)}{s+N}$$

при $M \neq N$, где N — порядковый номер варианта; M — номер месяца рождения. Считать сопротивление нагрузки $R_н = 2$.

1.5.11. ИН $u_0 = 20 = \text{const}$ с выходным сопротивлением источника $Z_и$, равным волновому $Z_в$ (при $Z_и = Z_в$), подключается при $t = 0$ к линии без потерь (длиной l), нагруженной на сопротивление $Z_н = \beta Z_в$ (при $\beta = 20/M$, где M — номер месяца рождения, а значение β округлено до целого). Найти напряжение и ток на входе и выходе ДЛ (u_1, u_2, i_1, i_2) и построить соответствующие графики. По указанию преподавателя решить задачу: 1) при $Z_н = 0$; 2) при $Z_и = Z_н = 0$. При расчетах принять $l = 50$ км и рассматривать цепь с распределенными параметрами как ЛБП с погонными параметрами $R_0 = 0$; $G_0 = 0$; $L_0 = 0{,}24 \cdot 10^{-2}$ Гн/км; $C_0 = 0{,}667 \cdot 10^{-8}$ Ф/км; проверить что скорость движения волны в ДЛ $V_Ф < 3 \cdot 10^5$ км/с (меньше скорости света).

1.5.12. Синтезировать RC-ДП с входным сопротивлением $Z_{вх.1}$ (для нечетных вариантов N) или $Z_{вх.2}$ (для четных вариантов N):

$$Z_{вх.1}(s) = \frac{2(s+\beta+2)}{(s+\beta)(s+\beta+3)}; \quad Z_{вх.2}(s) = \frac{2(s+\beta)(s+\beta+3)}{s(s+\beta+2)},$$

где β — остаток от деления N на 4. При синтезе использовать схемы ДП и последовательной, и параллельной, и лестничной структур.

1.5.13. В Т-схеме симметричного ЧП сопротивление продольных плеч $R_1 = R_3 = N$, а сопротивление поперечного плеча $R_2 = 1{,}5N$, где N — порядковый номер варианта. Используя сопротивления XX и КЗ, найти характеристическое сопротивление, функции передачи по напряжению и току в режиме согласованной нагрузки. Проверить полученные данные непосредственным расчетом по схеме.

1.6. Расчет дискретных и нелинейных цепей

1.6.1. Найти указанные реакции аналитически и численно (3–4 значения); составить схему ДЦ. Обозначения: f_1 и f_2 — входная и выходная дискретные последовательности; h и h_1 — импульсная и переходная характеристики ДЦ; T — период дискретизации; $n = 0, 1, 2, 3...$

1. $h(nT) = 6n0{,}5^n\,\delta_1(nT)$. Найти $h_1(nT)$.
2. $h_1(nT) = [-6n0{,}5^n - 12\cdot 0{,}5^n + 12\cdot 1^n]\,\delta_1(nT)$. Найти $h(nT)$.
3. $f_2(nT) - f_2(nT-T) + 0{,}25f_2(nT-2T) = 3f_1(nT-T)$. Найти $h_1(nT)$.
4. $f_2(nT) - f_2(nT-T) + 0{,}25f_2(nT-2T) = 6f_1(nT)$. Найти $h_1(nT)$.
5. $f_2(nT) - f_2(nT-T) + 0{,}25f_2(nT-2T) = 2\delta_1(nT)$. Найти $f_2(nT)$.
6. $h(nT) = 12n\cdot 0{,}5^n\,\delta_1(nT)$; $f_1(nT) = (-0{,}5)^n\,\delta_1(nT)$. Найти $f_2(nT)$.
7. $f_2(nT) - 0{,}25f_2(nT-2T) = 2f_1(nT-T)$; $f_1(nT) = 0{,}5^n\,\delta_1(nT)$. Найти $f_2(nT)$.
8. $f_2(nT) = [6n\cdot 0{,}5^n + 3\cdot 0{,}5^n - 3(-0{,}5)^n]\,\delta_1(nT)$; $f_1(nT) = 2(-0{,}5)^n\,\delta_1(nT)$. Найти $h(nT)$.
9. $f_1(nT) = (-0{,}5)^n\,\delta_1(nT)$; $f_2(nT) = [6\cdot 0{,}5^n + 12n\cdot 0{,}5^n - 6(-0{,}5)^n]\,\delta_1(nT)$. Найти $h_1(nT)$.
10. Передаточная функция аналогового прототипа $H(s) = 2/(s+2)$. Период дискретизации $T = 1/49$. Найти $f_2(nT)$ при $f_1(nT) = 10n\,\delta_1(nT)$.
11. $f_1(nT) = 2\cdot 0{,}5^n\,\delta_1(nT)$; $h_1(nT) = (6\cdot 0{,}5^n + 6\cdot 1^n)\,\delta_1(nT)$. Найти $f_2(nT)$.
12. $h(nT) = 6\cdot 0{,}5^n\,\delta_1(nT)$; $f_1(nT) = (2\cdot 0{,}5^n - 2\cdot 1^n)\,\delta_1(nT)$. Найти $f_2(nT)$.
13. $f_2(nT) - f_2(nT-T) + 0{,}25f_2(nT-2T) = 1{,}5f_1(nT-2T)$. Найти $h(nT)$.
14. $f_2(nT) - f_2(nT-T) + 0{,}25f_2(nT-2T) = 6f_1(nT-2T)$. Найти $h_1(nT)$.
15. $f_2(nT) + f_2(nT-T) + 0{,}25f_2(nT-2T) = 9f_1(nT-T)$. Найти $h_1(nT)$.
16. $h_1(nT) = [4\cdot 1^n - 6n(-0{,}5)^n - 4(-0{,}5)^n]\,\delta_1(nT)$; $f_1(nT) = 2\cdot 0{,}5^n\,\delta_1(nT)$. Найти $f_2(nT)$.
17. $f_2(nT) + f_2(nT-T) + 0{,}25f_2(nT-2T) = 3f_1(nT-T)$; $f_1(nT) = 2\cdot 0{,}5^n\,\delta_1(nT)$. Найти $f_2(nT)$.
18. $f_1(nT) = 4\cdot 0{,}5^n\,\delta_1(nT)$; $f_2(nT) = [-18n(-0{,}5)^n - 9(-0{,}5)^n + 9\cdot 0{,}5^n]\,\delta_1(nT)$. Найти $h_1(nT)$.
19. Передаточная функция аналогового прототипа $H(s) = 4/(s+2)$. Период дискретизации $T = 1/49$. Найти $f_2(nT)$ при $f_1(nT) = 96\cdot 0{,}96^{n-1}\,\delta_1(nT-T)$.
20. Передаточная функция аналогового прототипа $H(s) = 4/(s+2)$. Период дискретизации $T = 1/49$. Найти $f_2(nT)$ при $f_1(nT) = (n-1)\,\delta_1(nT-T)$.

21. Передаточная функция аналогового прототипа $H(s) = 0{,}96/(s+2)^2$. Период дискретизации $T = 1/49$. Найти $h(nT)$.

22. Передаточная функция аналогового прототипа $H(s) = 9{,}6/(s+2)^2$. Период дискретизации $T = 1/49$. Найти $f_2(nT)$ при $f_1(nT) = 10(n-1)(-1)^{n-1}\delta_1(nT-T)$.

23. $h(nT) = n \cdot 0{,}5^n \delta_1(nT) + 0{,}5^{n-1}(n-1)\delta_1(nT-T)$.
Найти $f_2(nT)$ при $f_1(nT) == 10(-1)^{n-1}\delta_1(nT-T)$.

24. $h(nT) = 2\delta_0(nT) + (3n \cdot 0{,}5^n - 2 \cdot 0{,}5^n)\delta_1(nT)$.
Найти $f_2(nT)$ при $f_1(nT) == 10(-1)^{n-2}\delta_1(nT-2T)$.

25. $f_2(nT) - f_2(nT-T) + 0{,}25f_2(nT-2T) = 0{,}5f_1(nT-T) + 0{,}5f_1(nT-2T)$.
Найти $h(nT)$.

1.6.2. Передаточная функция аналогового прототипа $H(s) = (N+2)/[(s+1)\times$ $\times(s+N+2)]$, где N — номер варианта. Составить схему соотетствующей ДЦ; сравнить переходные характеристики аналоговой и дискретной цепей в моменты $t = nT$. Найти $h(nT)$ аналитически и численно (3–4 значения), использовав как решение разностного уравнения ДЦ, так и разложение $H(z)$ в ряд Лорана.

1.6.3. Составить НЦ из источников, линейных R-элементов и резистивного нелинейного элемента с указанными $u_э$ и $R_э$ (схема замещения цепи относительно выводов НЭ представляет собой на основании МЭИН последовательное соединение эквивалентного ИН с напряжением холостого хода $u_э = u_{XX}$ и R-элемента с эквивалентным сопротивлением $R_э$). Найти $u_{нэ}$, $i_{нэ}$ (в области задания ВАХ НЭ) аналитическим методом, используя аппроксимацию характеристики НЭ (по трем точкам) полиномами второй степени: $u_{нэ} = f(i_{нэ})$ и $i_{нэ} = f(u_{нэ})$. В вариантах указаны точки $(u_{нэ}, i_{нэ})$ ВАХ НЭ.

1. $u_э = 4$; $R_э = 1$; НЭ: (0; 0), (1; 1), (2; 4).
2. $u_э = 8$; $R_э = 2$; НЭ: (0; 0), (2; 1), (4; 4).
3. $u_э = 9$; $R_э = 3$; НЭ: (0; 0), (1; 1), (2; 3).
4. $u_э = 5$; $R_э = 1$; НЭ: (0; 0), (2; 1), (4; 3).
5. $u_э = 7$; $R_э = 2{,}5$; НЭ: (0; 0), (2; 1), (3; 3).
6. $u_э = 14$; $R_э = 4$; НЭ: (0; 0), (2; 2), (3; 4).
7. $u_э = 6$; $R_э = 1$; НЭ: (0; 0), (2; 2), (5; 3).
8. $u_э = 9$; $R_э = 2$; НЭ: (0; 0), (1; 2), (3; 5).
9. $u_э = 10$; $R_э = 1{,}5$; НЭ: (0; 0), (3; 3), (6; 4).
10. $u_э = 13$; $R_э = 2$; НЭ: (0; 0), (3; 3), (5; 6).
11. $u_э = 9$; $R_э = 2$; НЭ: (0; 0), (1; 2), (4; 5).
12. $u_э = 8$; $R_э = 1{,}5$; НЭ: (0; 0), (1; 2), (4; 6).
13. $u_э = 6$; $R_э = 1$; НЭ: (0; 0), (2; 2), (3; 6).

14. $u_э = 4$; $R_э = 1$; НЭ: (0; 0), (1; 1), (4; 2).
15. $u_э = 8$; $R_э = 2$; НЭ: (0; 0), (1; 2), (4; 4).
16. $u_э = 9$; $R_э = 3$; НЭ: (0; 0), (1; 1), (3; 2).
17. $u_э = 5$; $R_э = 1$; НЭ: (0; 0), (1; 2), (3; 4).
18. $u_э = 7$; $R_э = 2{,}5$; НЭ: (0; 0), (1; 2), (3; 3).
19. $u_э = 14$; $R_э = 4$; НЭ: (0; 0), (2; 2), (4; 3).
20. $u_э = 6$; $R_э = 1$; НЭ: (0; 0), (2; 2), (3; 5).
21. $u_э = 8$; $R_э = 1{,}5$; НЭ: (0; 0), (2; 1), (6; 4).
22. $u_э = 10$; $R_э = 1{,}5$; НЭ: (0; 0), (3; 3), (4; 6).
23. $u_э = 13$; $R_э = 2$; НЭ: (0; 0), (3; 3), (6; 5).
24. $u_э = 9$; $R_э = 2$; НЭ: (0; 0), (2; 1), (5; 4).
25. $u_э = 6$; $R_э = 1$; НЭ: (0; 0), (2; 2), (6; 3).

1.6.4. Решить задачу 1.6.3 графическим методом.

1.6.5. Решить задачу 1.6.3 методом кусочно-линейной аппроксимации.

1.6.6. Ввести в схему задачи 1.6.3 индуктивный элемент $L = 1$ последовательно с НЭ. Методом припасовывания (кусочно-линейной аппроксимации) найти $i_L(t)$ для $t > 0$ при включении источника $u_э$ в цепь при $t = 0$. Привести схему цепи и график переходного процесса.

1.6.7. В задаче 1.6.6 для установившегося режима при действии источников сигналов синусоидальной формы (с частотой $\omega = 3$, нулевой начальной фазой и указанным действующим значением напряжения XX $U_э$) найти методом гармонической линеаризации первые гармоники напряжения и тока L-элемента; ВАХ НЭ считать нечетной.

1.6.8. Синтезировать резистивно-диодными цепями заданную кусочно-линейную ВАХ. Соответствующие пары значений ВАХ ($i_{нэ}$, $u_{нэ}$) указаны.

1. (−6; −3), (−2; −2), (2; 2), (6; 3).
2. (−3; −5), (−2; −2), (2; 2), (3; 5).
3. (−3; −6), (−2; −2), (2; 2), (6; 3).
4. (−4; −5), (−2; −3), (2; 3), (3; 7).
5. (−4; −4), (−1; −3), (1; 3), (4; 5).
6. (−5; −6), (−4; −2), (2; 1), (4; 5).
7. (−3; −6), (−1; −1), (3; 3), (7; 4).
8. (−6; −4), (−3; −3), (1; 1), (4; 6).
9. (−3; −3), (1; −2), (5; 2), (9; 3).

10. (0; −5), (1; −2), (5; 2), (6; 5).
11. (0; −6), (1; −2), (5; 2), (9; 3).
12. (−1; −5), (1; −3), (5; 3), (6; 7).
13. (−2; −4), (1; −3), (3; 3), (6; 5).
14. (−2; −6), (−1; −2), (5; 1), (7; 5).
15. (−1; −6), (1; −1), (5; 3), (9; 4).
16. (−4; −4), (−1; −3), (3; 1), (6; 6).
17. (−6; 0), (−2; 1), (2; 5), (6; 6).
18. (−3; −2), (−2; 1), (2; 5), (3; 8).
19. (−3; −4), (−2; 0), (2; 4), (6; 5).
20. (−4; −3), (−2; −1), (2; 5), (3; 9).
21. (−4; −2), (−1; −1), (1; 5), (4; 7).
22. (−5; −3), (−4; 1), (2; 4), (4; 8).
23. (−3; −4), (−1; 1), (3; 5), (7; 6).
24. (−6; −2), (−3; −1), (1; 3), (4; 8).
25. (−4; −5), (−4; −2,5), (5; 3), (5; 5).

1.7. Указания, типовые примеры и рекомендации к решению задач

Задачи к теме 1.1 «Основные понятия теории цепей. Анализ резистивных цепей»

1.1.1. Схема цепи типового примера приведена на рис. 1.7, *а*: $i_1 = 1$, $i_2 = 2$, $u_3 = 3$, $u_5 = 5$, $R_4 = 4$. Определить u_k, i_k, p_k (k — номер элемента).

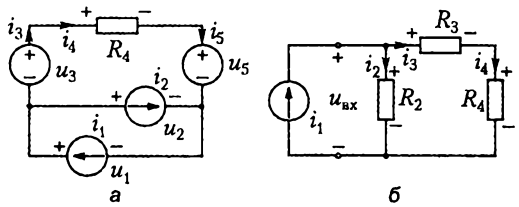


Рис. 1.7

Вначале всегда выбираем произвольно условно положительные направления неизвестных токов и напряжений. Очевидны соотношения: $i_3 = i_4 = i_5$ (последовательное соединение), $u_1 = u_2$ (параллельное соединение). Напряжение u_4 и ток i_4 R-элемента *всегда* должны быть *согласованы*.

По ЗТК $i_3 = i_4 = i_5 = i_1 - i_2 = -1$; по закону Ома $u_4 = R_4 i_4 = -4$.

По ЗНК $u_2 = -u_3 + u_4 + u_5 = -3 - 4 + 5 = -2 = u_1$.

Мощности элементов, для которых направления напряжений и токов *согласованы*: $p_2 = u_2 i_2 = (-2)2 = -4$; $p_4 = u_4 i_4 = (-4)(-1) = 4 = R_4 i_4^2 = G_4 u_4^2$; $p_5 = u_5 i_5 = 5(-1) = -5$. Для остальных элементов (токи и напряжения *не согласованы*): $p_1 = -u_1 i_1 = -(-2)1 = 2$; $p_3 = -u_3 i_3 = -3(-1) = 3$.

При $p_k > 0$ элемент потребляет энергию, при $p_k < 0$ — генерирует энергию; для R-элементов $p_R > 0$ всегда.

Баланс мощностей:

$$\Sigma p_k = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 2 + (-4) + 3 + 4 + (-5) = 0.$$

1.1.2. Схема цепи изображена на рис. 1.7, *б* $i_1 = 12$, $R_k = 2$. Найти $R_{вх}$, $u_{вх}$, i_2 по ФДТ, u_4 по ФДН.

Направления токов согласуем с $u_{вх}$ — см. схему. Элементы R_3, R_4 соединены последовательно, $R_{34} = R_3 + R_4 = 2 + 2 = 4$. R_2 и R_{34} соединены параллельно.

$$R_{вх} = \frac{1}{G_2 + G_{34}} = R_2 R_{34}/(R_2 + R_{34}) = 4/3; \quad u_{вх} = i_1 R_{вх} = 12 \cdot 4/3 = u_2 = u_{34} = 16.$$

По ФДТ $i_2 = i_1 R_{34}/(R_2 + R_{34}) = 12 \cdot 4/(2+4) = 8$.

По ФДН $u_4 = u_{34} R_4/(R_3 + R_4) = 16 \cdot 2/(2+2) = 8$.

1.1.3. Особенности *метода наложения*.

1. В исходной схеме *произвольно* выбирают как направления токов R-элементов и ИН, так и полярность напряжений ИТ.

2. Рассматривают цепь под действием *одного* из источников, *исключая* остальные, причем для исключения ИН выводы, к которым он подключен, замыкают накоротко (КЗ), а при исключении ИТ соответствующую ветвь разрывают (ХХ). Расчет получающейся цепи *с единственным* источником выполняют так, как это проиллюстрировано при решении задачи 1.1.2.

3. Для вычисления истинных реакций *суммируют* их составляющие, полученные при действии каждого источника в отдельности; в случае если направление составляющей реакции *совпало* с выбранным в п. 1, ее учитывают *со знаком «плюс»*.

Примечания: 1) см. проверку решения задачи 1.1.5; 2) метод наложения целесообразно использовать при расчете несложных цепей, содержащих 2–3 источника.

1.1.4. Для иллюстрации *метода пропорциональных величин* рассмотрим схему рис. 1.7, б (цепь лестничная, с единственным источником). Определить u_4, i_3, $R_{вх}$, $H_{I\,4-1} = i_4/i_1$, $R_{4-1} = u_4/i_1$.

Примем реакцию (ток или напряжение) самой *«удаленной»* от источника ветви равной *единице*: $i_{(4)} = 1$. Тогда $u_{(4)} = R_4 i_{(4)} = 2$. Далее находим $i_{(3)} = i_{(4)} = 1$, $u_{(3)} = R_3 i_{(3)} = 2$. Последующий расчет очевиден: по ЗНК $u_{(2)} = u_{(3)} + u_{(4)} = 2 + 2 = 4$; $i_{(2)} = u_{(2)}/R_2 = 4/2 = 2$; $i_{(1)} = i_{(2)} + i_{(3)} = 2 + 1 = 3$ — по ЗТК. Определяем коэффициент пропорционального пересчета $k = i_1/i_{(1)} = 12/3 = 4$. Тогда искомые реакции: $u_4 = ku_{(4)} = 4 \cdot 2 = 8$; $i_3 = ki_{(3)} = 4 \cdot 1 = 4$. Коэффициенты (функции) R-цепи: $R_{вх} = u_2/i_1 = u_{(2)}/i_{(1)} = 4/3$; $R_{4-1} = u_4/i_1 = u_{(4)}/i_{(1)} = 2/3$; $H_{I\,4-1} = i_4/i_1 = i_{(4)}/i_{(1)} = 1/3$.
Проверка: $R_{вх} = R_2 (R_3 + R_4)/(R_2 + R_3 + R_4) = 2(2+2)/(2+2+2) = 4/3$.

1.1.5. В схеме рис. 1.8, *а* $u_1 = 12$, $R_2 = R_3 = R_4 = 2$, $i_5 = 8$. Составить уравнения по законам Кирхгофа, найти токи ветвей и напряжение ИТ.

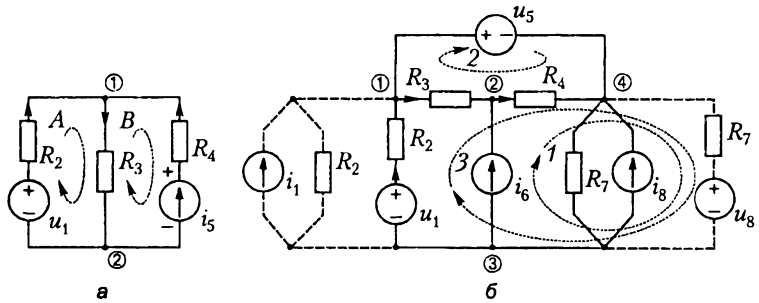


Рис. 1.8

Выбираем *произвольно* направления токов в R_2 и R_3; в R_4 ток $i_4 = i_5$ известен. Число неизвестных реакций, например токов R-элементов, равно 2, *независимых уравнений* в системе должно быть также 2.

По ЗТК следует составить одно уравнение, так как $n_{ЗТК} = n_у - 1 = 1$ (*устранимые узлы не рассматриваем*); по ЗНК уравнений должно быть 2: $n_{ЗНК} = n_в - n_{ЗТК} = 3 - 1 = 2$, но контур с ИТ не рассматриваем, поскольку определяются токи.

Узел 1: $-i_2 + i_3 - i_4 = 0$ (узел 2 — зависимый).

Контур А: $-u_1 + u_2 + u_3 = 0$, выбран так, чтобы в него не вошел ИТ.

Используя закон Ома $u_{Rk} = R_k i_k$ и подставляя численные значения, получаем после упорядочения записи: $-i_2 + i_3 = 8; 2i_2 + 2i_3 = 12$.

Решение системы дает: $i_2 = -1$, $i_3 = 7$. Для определения u_5 используем ЗНК для контура В:

$$-u_4 + u_5 - u_3 = 0; \quad -2 \cdot 8 + u_5 - 2 \cdot 7 = 0; \quad u_5 = 30.$$

Проверка. Найдем ток i_2 методом наложения:

1. Действует ИН u_1; ветвь с ИТ разомкнута, $i_2' = u_1/(R_2 + R_3) = 12/4 = 3$.

2. Действует ИТ i_5; ИН заменен на короткозамкнутую ветвь, по ФДТ $i_2'' = i_5 R_3/(R_2 + R_3) = 8 \cdot 2/4 = 4$.

3. $i_2 = i_2' - i_2'' = 3 - 4 = -1$, суммирование произведено со знаком «–», так как направления i_2' и i_2 — совпадают, а i_2'' и i_2 — противоположны.

1.1.6. Ниже разбирается пример, когда преобразовать некоторые источники элементарно нельзя (см. рис. 1.8, *б*).

Составление уравнений по МКТ.

1. Преобразуем ИТ i_8 и R_7 в ИН u_8 и R_7, $u_8 = R_7 i_8$ (см. пунктир «справа»); ИТ i_6 является *элементарно непреобразуемым.*

2. Если выбрать контур 1, как показано на схеме, то $i_1^k = i_6$; контура 2 и 3 *не должны включать ИТ* i_6.

В цепи 3 ячейки (после преобразования ИТ), но один из трех контурных токов (i_1^k) известен. Следовательно, необходимо составить 2 уравнения для контуров 2 и 3. В развернутой форме уравнения имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} R_{21} i_1^k + R_{22} i_2^k + R_{23} i_3^k &= u_2^k; \\ R_{31} i_1^k + R_{32} i_2^k + R_{33} i_3^k &= u_2^k, \end{aligned}\right\}$$

причем $R_{21} = -R_4$, $R_{22} = R_3 + R_4$, $R_{23} = R_{32} = -R_3$, $R_{31} = R_4 + R_7$, $R_{33} = R_2 + R_3 + R_4 + R_7$, $u_2^k = -u_5$, $u_3^k = u_1 - u_8$.

Определив i_2^k, i_3^k из системы и учитывая $i_1^k = i_6$, находим токи ветвей: $i_2 = i_3^k$, $i_4 = i_1^k - i_2^k + i_3^k$ и т. д.

Составление уравнений по МУН.

1. Преобразуем ИН u_1 и R_2 в ИТ i_1 и R_2 (см. рис. 1.8, *б* пунктир «слева»), $i_1 = u_1 G_1$; ИН u_5 — *элементарно непреобразуем.*

2. В цепи 3 независимых узла, однако если за базисный выбрать узел 4, то $u_1^y = u_5$ (см. схему). Следовательно, по МУН необходимо составить только 2 уравнения, для узлов 2 и 3. Уравнения в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^y \\ u_2^y \\ u_3^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_2^y \\ i_3^y \end{pmatrix},$$

где $G_{21} = -G_3$, $G_{22} = G_3 + G_4$, $G_{23} = 0 = G_{32}$, $G_{31} = -G_2$, $G_{33} = G_2 + G_7$, $i_2^y = i_6$, $i_3^y = -i_1 - -i_8 - i_6$. Определив u_2^y, u_3^y и учитывая $u_1^y = u_5$, находим токи: $i_2 = (u_3^y - u_1^y - u_1)G_2$, $i_4 = u_2^y G_4$ и т. д.

1.1.7. Использование теорем об эквивалентных источниках проиллюстрировано в 2.5.

1.1.8. Дан ток i_C емкостного элемента ($C = 1\Phi$): на интервале $0 < t < 1$ ток $i_C = 10t$; на интервале $2 < t < 3$ ток $i_C = 10$; в остальные моменты времени $i_C = 0$. Найти выражение $u_C(t)$ для каждого интервала времени, если $u_C(0) = 0$.

Исходное соотношение: $u_C(t) = \frac{1}{C}\int_{t_k}^{t} i_C(t)dt + u_C(t_k)$.

1. Интервал $0 < t < 1$; $i_C(t) = 10t$; $t_k = 0$:

$$u_C(t) = 1\int_0^t 10t dt + 0 = 5t^2; \quad u_C(1-) = 5 \text{ В}.$$

2. Интервал $1 < t < 2$; $i_C(t) = 0$; $t_k = 1$:

$$u_c(t) = 1\int_1^t 0dt + 5 = 5; \quad u_c(2-) = 5.$$

3. Интервал $2 < t < 3$; $i_C(t) = 10$; $t_k = 2$:

$$u_c(t) = 1\int_2^t 10dt + 5 = 10t\Big|_2^t + 5 = 10t - 15; \quad u_c(3-) = 15.$$

Проверка: $u_c(2+) = 10 \cdot 2 - 15 = 5 = u_c(2-)$.

4. Интервал $t > 3$; $i_c = 0$; $t_k = 3$:

$$u_c(t) = 1\int_3^t 0dt + 15 = 15.$$

Контроль: 1) $u_C(t)$ есть *непрерывная* функция времени, график $u_C(t)$ не должен иметь разрывов непрерывности («скачков»); 2) площадь, ограниченная графиком $i_C(t)$ и осью t, есть заряд C-элемента; 3) при $i_C = 0$ выводы C-элемента разомкнуты, напряжение его неизменно.

1.1.9. Использовать указания к решению задач 1.1.1–1.1.3.

1.1.10. О расчете мостового соединения см. [1, с. 35–37],[4, с. 169–170].

1.1.11. О методе определяющих величин см. [4, с. 168–169].

1.1.12. Использовать указания к решению задачи 1.1.8 и ФДН (или ФДТ) для цепей из однотипных элементов.

1.1.13. Использовать указания к решению задачи 1.1.12.

1.1.14. Составление матричных уравнений цепи для машинных расчетов описано в [1, с. 400–406], в [2, с. 400–406],а также в[4, с.181–186].

1.1.15. Расчет характеристик чувствительности цепи к изменению ее параметров изложен в [1, с. 415–417, 420–423, 424–428]; см. также[4, с. 179–181].

Задачи к теме 1.2 «Расчет переходных процессов во временной области при постоянных и произвольных воздействиях»

1.2.1. В задачах рассматривается переходный процесс при включении цепи первого порядка (с одним накопительным элементом L или C) под действие источника *постоянного* напряжения или *постоянного* тока; начальные условия — *нулевые*, т. е. $u_C(0-) = 0$ (или $i_L(0-) = 0$).

При решении задачи рекомендуется ознакомиться с анализом переходного процесса в задаче 1.2.2. Необходимо учесть, что *при нулевых независимых начальных условиях* в эквивалентной схеме для $t = 0+$ ветвь с L-элементом *размыкают* (ХХ), а выводы C-элемента *замыкают накоротко* (КЗ), так как $i_L(0+) = i_L(0-) = 0$, $u_C(0+) = u_C(0-) = 0$ по условию задачи.

1.2.2. Рассмотрим анализ переходного процесса в цепи первого порядка, схема которой приведена на рис. 1.9, *а*: $u_{01} = 12$, $i_{02} = 2$, $R_k = 2$, $L = 3$, ключ *размыкается*. Найти токи.

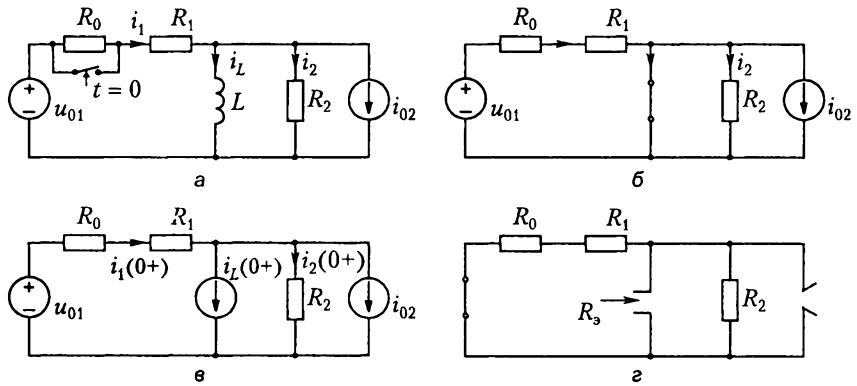


Рис. 1.9

Так как воздействия в цепи *постоянны*, то для анализа можно использовать схемы замещения.

1. Определяем *независимые начальные условия*, т. е. $i_L(0-)$ в данной схеме (или $u_C(0-)$ в цепи с C-элементом). До размыкания ключа в цепи все токи постоянны (полагаем для $t = 0-$ процесс *установившимся*). Тогда выводы L-элемента можно на схеме *замкнуть накоротко* (см. рис. 1.9, *б*), так как $u_L(t) = Li'_L(t)$ при постоянном i_L равно нулю, т. е. $u_L(0-) = 0$.

Примечание: в схеме рис. 1.9, *б* при определении $i_L(0-)$ следует принять $R_0 = 0$, так как ключ при $t < 0$ замкнут.

По методу наложения $i_L(0-) = u_{01}/R_1 - i_{02} = 4$.

В цепи с C-элементом при постоянных воздействиях для определения $u_C(0-)$ следует *ветвь* с этим элементом *разомкнуть*, так как $i_C = Cdu_C/(dt) = 0$ при постоянном u_C.

2. Находим *вынужденные составляющие* реакций. При постоянных воздействиях эти составляющие будут также постоянны (*установившийся* режим, $t \to \infty$), их легко рассмотреть по схеме замещения (рис. 1.9, *б*); ее обоснование — см. п. 1.

Рассчитывая цепь, определяем:

$$i_{1в} = u_{01}/(R_0 + R_1) = 3;\ i_{2в} = 0;\ i_{Lв} = u_{01}/(R_0 + R_1) - i_{02} = 1.$$

3. Находим *зависимые начальные условия* — значения токов $i_1(0+)$, $i_2(0+)$ в момент $t = 0+$. Используем схему рис. 1.9, *в*, в которой вместо L-элемента исходной цепи включен ИТ $i_L(0+) = i_L(0-) = 4$ (в цепи с C-элементом вместо него включают ИН $u_C(0+) = u_C(0-)$).

Далее следует использовать наиболее рациональный для конкретной цепи метод расчета. В примере целесообразно преобразовать ИТ $i_L(0+) + i_{02}$ и R_2 в ИН с R_2, тогда

$$i_1(0+) = \frac{u_{01} + R_2[i_L(0+) + i_{02}]}{R_0 + R_1 + R_2} = \frac{12 + 2(4+2)}{6} = 4;$$

$$i_2(0+) = i_1(0+) - i_L(0-) - i_{02} = 4 - 4 - 2 = -2.$$

4. Определяем *постоянную времени* цепи, для чего рассматриваем схему рис. 1.9, *г*, в которой по сравнению с исходной *исключены источники*; находим эквивалентное сопротивление $R_э$ резистивной части цепи относительно выводов накопительного элемента:

$$R_э = (R_0 + R_1)R_2/(R_0 + R_1 + R_2) = 4/3.$$

Постоянная времени $\tau = L/R_э = 4$ (в цепи с C-элементом $\tau = R_э C$).

5. Выражение *любой реакции* представляем как сумму *вынужденной и свободной* составляющих, например $i_1(t) = i_{1в} + i_{1св} = i_{1в} + A_1 e^{-t/\tau}$; *постоянную интегрирования* находим по начальным условиям: $i_1(0+) = i_{1в} + A_1$, откуда $A_1 = i_1(0+) - i_{1в} =$

$= 4 - 3 = 1$. Следовательно, $i_1(t) = 3 + e^{-t/\Lambda}$. Аналогично определяем: $i_L(t) = 1 + 3e^{-t/\Lambda}$, $i_2(t) = 2e^{-t/\Lambda}$.

Примечание: при построении графика функции $f(t) = B + Ae^{-t/\tau}$ соединяют дугой *экспоненты* начальное значение $f(0+) = B + A$ с конечным $f(\infty) = B$, используя *характерные значения экспоненты* 1; 0,37; 0,14; 0,05 соответственно при $t = 0$, τ, 2τ, 3τ; учитывают, что *любая подкасательная* к экспоненте $e^{-t/\tau}$ равна τ.

1.2.3. Рассмотрим анализ переходного процесса в цепи второго порядка — см. схему рис. 1.10, *а*; $u_{01} = 18$, $i_{02} = 2$ — воздействия постоянны; $R = 2$; $R_1 = 1$; $R_2 = 3$; $L = 1$; $C = 1$.

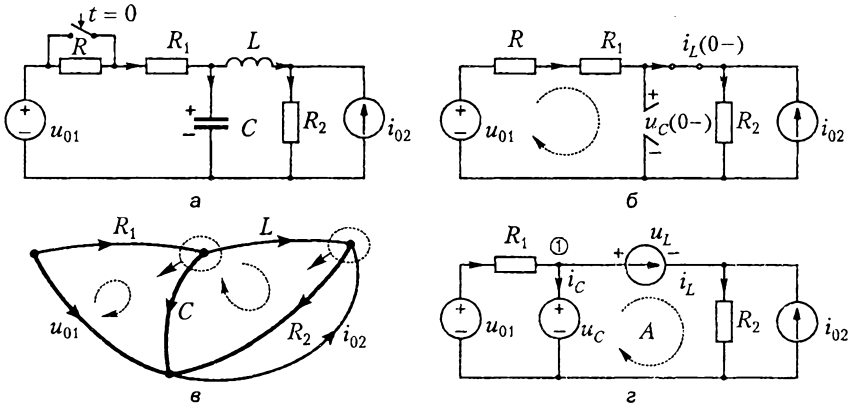


Рис. 1.10

1. Определяем *независимые начальные условия* $u_C(0-)$ и $i_L(0-)$. Так как процесс в цепи перед коммутацией принят *установившимся* при постоянных воздействиях, то рассматриваем схему рис. 1.10, *б*, в которой ветвь с *C*-элементом *разомкнута*, а выводы *L*-элемента *замкнуты накоротко* (см. также решение задачи 1.2.2). Преобразив ИТ и R_2, находим $i_L(0-) = (u_{01} - R_2 i_{02})/(R + R_1 + R_2) = (18 - 3 \cdot 2)/(2 + 1 + 3) = 2$; $u_C(0-) = u_{01} - (R + R_1) i_L(0-) = 18 - (2 + 1) \cdot 2 = 12$.

2. Составляем *уравнения переменных состояния*, за которые принимаем $u_C(t)$ и $i_L(t)$.

а. Формирование уравнений *по графу цепи*.

Выбираем так называемое *нормальное дерево*, к ветвям которого относят ИН, ветви с *C*-элементами и необходимое число резистивных ветвей. На рис. 1.10, *в* представлен граф цепи, на котором дерево выделено.

Составляем уравнения по законам Кирхгофа для *главных сечений и главных контуров*:

$$i_C - i_{R1} + i_L = 0, \qquad (1)$$

т. е. уравнение (1) — для сечения, содержащего ветвь дерева с *C*-элементом;

$$i_{R2} - i_L - i_{02} = 0, \qquad (2)$$

т. е. уравнение (2) — для сечения, содержащего ветвь дерева R_2;

$$u_L + u_{R2} - u_C = 0, \qquad (3)$$

т. е. уравнение (3) — для контура, включающего хорду с L-элементом;

$$u_{R1} + u_C - u_{01} = 0, \qquad (4)$$

т. е. уравнение (4) — для контура, содержащего хорду R_1.

Решая уравнения (1) и (3) относительно i_C и u_L соответственно и *выражая* в них i_{R1} и u_{R2} *через переменные состояния* с использованием уравнений (2) и (4), получаем:

$$u'_C(t) = \frac{1}{C} i_C(t) = -\frac{1}{R_1 C} u_C(t) - \frac{1}{C} i_L(t) + \frac{1}{R_1 C} u_{01} = -u_C(t) - i_L(t) + 18;$$

$$i'_L(t) = \frac{1}{L} u_L(t) = \frac{1}{L} u_C(t) - \frac{R_2}{L} i_L(t) - \frac{R_2}{L} i_{02} = u_C(t) - 3i_L(t) - 6.$$

б. *Формирование* уравнений состояния *по вспомогательной схеме* рис. 1.10, *г*. На схеме L-элемент заменен ИТ $i_L(t)$, а C-элемент — ИН $u_C(t)$; требуется тем или иным методом получить выражения для $i_C(t)$ и $u_L(t)$. Очевидны соотношения: $i_{R1} = (u_{01} - u_C)/R_1$; $i_{R2} = i_L + i_{02}$. ЗТК для узла 1: $i_C = i_{R1} - i_L$; ЗНК для контура A: $u_L + R_2 i_{R2} - u_C = 0$. Используя приведенные соотношения, несложно получить уравнения переменных состояния.

Уравнения состояния в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} u'_C \\ i'_L \end{bmatrix} = [A]\begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + [B]\begin{bmatrix} u_{01} \\ i_{02} \end{bmatrix}; \quad [A] = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}; \quad [B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

3. Находим *частоты собственных колебаний* цепи. *Характеристический полином*:

$$|[A] - p[1]| = \begin{vmatrix} -1-p & -1 \\ 1 & -3-p \end{vmatrix} = p^2 + 4p + 4 = 0,$$

откуда $p_{1,2} = -2$ (частоты *кратные*). *Свободная составляющая* любой реакции имеет вид:

$$f_{\text{св}} = A_1 e^{-2t} + A_2 t e^{-2t}.$$

Примечания: 1) в случае неравных *вещественных* частот, например $p_1 = -2$, $p_2 = -3$, $f_{\text{св}} = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-3t}$; 2) в случае $p_{1,2} = -4 \pm j6$, т. е. *комплексных* частот, $f_{\text{св}} = A_1 e^{-4t} \cos 6t + A_2 e^{-4t} \sin 6t$ (возможны и другие формы записи $f_{\text{св}}$).

Контроль: для пассивных цепей $\operatorname{Re}[p_k] < 0$.

4. Определяем *вынужденные составляющие* переменных состояния, для чего используем полученную ранее систему уравнений. При постоянных воздействиях в цепи наступит *установившийся режим*, в котором реакции будут также *постоянны*. Положив в уравнениях состояния $u'_{C\text{в}} = 0$, $i'_{L\text{в}} = 0$, получим систему:

$$0 = -u_{Cв} - i_{Lв} + 18;\ \ 0 = u_{Cв} - 3i_{Lв} - 6.$$

Решение системы дает: $u_{Cв} = 15$, $i_{Lв} = 3$.

5. Определяем переменные состояния $u_C(t)$ и $i_L(t)$. Имеем:

$u_C(t) = u_{Cв} + u_{Ccв} = 15 + A_1 e^{-2t} + A_2 te^{-2t}$, откуда $u'_C(t) = -2A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-2t} - 2A_2 te^{-2t}$. С учетом $u_C(0+) = 12$ находим $u'_C(0+)$ из уравнения состояния при $t = 0+$: $u'_C(0+) = -u_C(0+) - i_L(0+) + 18 = 4$. Имеем систему уравнений для отыскания постоянных интегрирования:

$$\left.\begin{aligned} u_C(0+) = u_C(0-) = 12 = 15 + A, \\ u'_C(0+) = 4 = -2A_1 + A. \end{aligned}\right\}$$

Из уравнений следует: $A_1 = -3$, $A_2 = -2$ и окончательно $u_C(t) = 15 - 3e^{-2t} - 2te^{-2t}$. Аналогично находим $i_L(t) = 3 - e^{-2t} - 2te^{-2t}$. Остальные реакции можно определять, например, по схеме рис. 1.10, *г*, учитывая, что $u_C(t)$ и $i_L(t)$ известны.

Примечание: в 2.8.3 задача решена численно методом Эйлера.

1.2.4. Об определении характеристик цепи $h_1(t)$, $h(t)$ и $h_2(t)$, а также вычислении реакций при использовании интегралов наложения см. 2.9.

Примечание: при взятии интеграла свертки *рекомендуется* использовать следующий *вариант формулы*: $f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) h(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t f_1(\tau) h_0(t-\tau)\,d\tau + h_1(0+) f_1(t)$, где $h_0(t)$ — часть $h(t)$, *не содержащая* дельта-функцию $\delta(t)$.

Задачи к теме 1.3 «Анализ цепей при синусоидальных и экспоненциальных воздействиях»

1.3.1. Рекомендации.

1. Необходимо освоить переход от обобщенной экспоненты к *комплексной амплитуде*; например: $u(t) = U_m e^{\sigma t}\cos(\omega t + \alpha_u) \div \dot{U}_m = U_m e^{j\alpha_u}$ при комплексной частоте $s = \sigma + j\omega$ или $i(t) = I_m \cos(\omega t + \alpha_i) \div \dot{I}_m = I_m e^{j\alpha_i}$ при $s = j\omega$ (в случае $s = j\omega$ режим в цепи именуется *установившимся* режимом *гармонических* колебаний или чаще — *установившимся синусоидальным режимом*). Знать соотношения $\dot{U}_m = \sqrt{2}\dot{U}$, $\dot{U} = Ue^{j\alpha_u}$, где U — действующее значение напряжения при $s = j\omega$.

2. Следует, изображая комплексные амплитуды на комплексной плоскости, освоить *до автоматизма* переход *от показательной* формы записи комплексного числа *к алгебраической* и наоборот, обратив особое внимание на определение аргумента (фазы). Например:

$$\dot{U}_m = 5\sqrt{2}e^{-j45^\circ} = 5 - j5,\ \ \dot{I}_m = -3 + j3 = 3\sqrt{2}e^{j135^\circ}.$$

Надо знать, что график $\cos(\omega t - \beta)$ *смещен вправо* на угол β относительно графика $\cos\omega t$; следует уметь их строить.

3. Иметь в виду, что при переходе к комплексным амплитудам $\dot{U}_m$, $\dot{I}_m$ и сопротивлениям элементов $Z_R = R$, $Z_L = sL$, $Z_C = 1/(sC)$ (при $s = j\omega$ сопротивления $Z_L = j\omega L = \omega L e^{j90^\circ}$, $Z_C = -j/(\omega C) = \frac{1}{\omega C} e^{-j90^\circ}$) расчет цепи по форме *аналогичен расчету R-цепей.*

4. Знать, что при использовании МКА выражение *закона Ома* для любого пассивного двухполюсника имеет вид $\dot{U}_m = Z\dot{I}_m$, где $Z = |Z| e^{j\varphi}$, причем $\varphi = \alpha_u - \alpha_i$, $|Z| = U_m / I_m$. В установившемся синусоидальном режиме ($s = j\omega$) для пассивных элементов $\varphi_R = 0^\circ$, $\varphi_L = 90^\circ$, $\varphi_C = -90^\circ$, т. е. *ток R-элемента совпадает* по фазе с напряжением, *L-элемента — отстает* на 90° от напряжения, а у *C*-элемента — на 90° *опережает* напряжение.

1.3.2. Использовать рекомендации к задаче 1.3.1.

1.3.3. В цепи (рис. 1.11, *а*) установившийся синусоидальный режим; $|Z_k| = 10$. Определить $Z_{вх}$, $|Y_{вх}|$, φ, ψ; построить качественно векторную диаграмму (ВД), вычислить I_C, φ_{RL}, если $I_R = I_L = 5$.

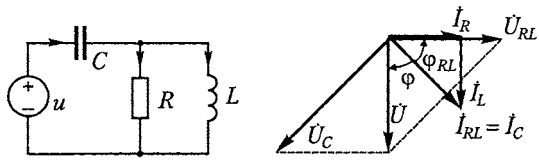


Рис. 1.11

Находим сопротивления элементов в комплексной форме ($s = j\omega$): $Z_L = j\omega L = j|Z_L| = j10$, $Z_C = -j/(\omega C) = -j|Z_C| = -j10$, $Z_R = R = 10$.

Для соединенных параллельно ветвей $Z_{RL} = RZ_L/(R + Z_L) = j100/(10 + j10) = j10(1 - j)/2 = 5 + j5$; $Z_{вх} = Z_C + Z_{RL} = 5 - j5 = 5\sqrt{2}e^{-j45^\circ}$, $Y_{вх} = 1/Z_{вх} = 0{,}1\sqrt{2}e^{j45^\circ}$.

Имеем: $|Y_{вх}| = 0{,}1\sqrt{2}$, $\psi = 45^\circ = -\varphi$.

Контроль: для пассивных цепей в режиме гармонических колебаний $\mathrm{Re}[Z] \geq 0$, $\mathrm{Re}[Y] \geq 0$, $|\varphi| \leq 90^\circ$, $|\psi| \leq 90^\circ$.

Качественное построение ВД обычно ведется в той же последовательности, в какой выполняется расчет цепей *методом пропорциональных величин.* За *исходный вектор* обычно принимают вектор тока (напряжения), *общего* для 2-х и более ветвей, и направляют его произвольно, чаще — *горизонтально.* В примере это $\dot{U}_{RL} = \dot{U}_R = \dot{U}_L$ (см. рис. 1.11, *б*). Вектор $\dot{I}_R$ в фазе с $\dot{U}_R$, $\dot{I}_L$ отстает от $\dot{U}_L$ на 90°; общий ток $\dot{I}_{RL} = \dot{I}_R + \dot{I}_L = \dot{I}_C$; $\dot{U}_C$ отстает от $\dot{I}_C$ на 90°, а $\dot{U} = \dot{U}_{RL} + \dot{U}_C$. Из ВД следует, что $I_C = \sqrt{I_R^2 + I_L^2} = 5\sqrt{2}$; $\varphi_{RL} = \mathrm{arc\,tg}(I_L/I_R) = 45^\circ$.

1.3.4. Использовать указания к задаче 1.3.3.

1.3.5. Рекомендации: 1) использовать указания к задачам 1.3.1, 1.3.3, 1.3.8; 2) записать комплексную амплитуду воздействия (ИН или ИТ) и комплексные сопротивления элементов; далее выполнить вычисления *аналогично расчету R-цепей* и найти комплексную амплитуду реакции; затем по комплексной амплитуде реакции и комплексной частоте записать выражение реакции в *t*-области.

1.3.6. Использовать рекомендации к задачам 1.1.4, 1.3.1, 1.3.3, 1.3.5 и решение типового примера к задаче 1.3.8.

1.3.7. Рекомендации: 1) воспользоваться указаниями к задачам 1.3.1–1.3.4 и 1.3.8; 2) *если не указаны* начальные фазы токов (напряжений), целесообразно начальную фазу *одной* из переменных принять равной нулю; 3) знать, что из выражения *закона Ома* в комплексной форме $\dot{U} = Z\dot{I}$ следует $U = |Z|I$, но в общем случае $|Z_1 + Z_2| \neq |Z_1| + |Z_2|$, $|\dot{I}_1 + \dot{I}_2| \neq I_1 + I_2$ и т. п.; 4) при решении задач вариантов 7, 12–15 целесообразно предварительно *качественно* построить векторную диаграмму.

1.3.8. В схеме рис. 1.11, *а* дано $|Z_k| = 10$, $P = 1000$. Найти I_k, U, P_S, P_Q, $\tilde{P}_S$.

Из *баланса активных мощностей* $P = P_R = RI_R^2$ следует $I_R = \sqrt{P/R} = 10$. Так как начальные фазы не заданы, примем $\alpha_{iR} = 0°$, тогда $\dot{I}_R = 10$. При $Z_L = j10$, $Z_C = -j10$ находим $\dot{U}_R = R\dot{I}_R = 100 = \dot{U}_L$; $\dot{I}_L = \dot{U}_L/Z_L = -j10$; $\dot{I}_C = \dot{I}_R + \dot{I}_L = 10 - j10$; $\dot{U}_C = \dot{I}_C Z_C = (10 - j10)(-j10) = -100 - j100$. $\dot{U} = \dot{U}_C + \dot{U}_R = -j100$. Тогда $I_L = |\dot{I}_L| = 10$, $I_C = |\dot{I}_C| = 10\sqrt{2}$, $U = |\dot{U}| = 100$, *комплексная мощность* $\tilde{P}_S = \dot{U}\dot{I}_C = -j100(10 + j10) = 1000 - j1000 = P + jP_Q$, т. е. *реактивная* мощность $P_Q = -1000$, *полная* мощность $P_S = \sqrt{P^2 + P_Q^2} = |\tilde{P}_S| = 1000\sqrt{2}$.

Проверка: 1. Баланс мощностей. Из задачи 1.3.3 $Z_{вх} = 5 - j5 = r_{вх} + jx_{вх}$, тогда $P = r_{вх} I_C^2 = 5(10\sqrt{2})^2 = 1000 = P_R$; $P_Q = x_{вх} I_C^2 = -1000 = P_{QL} + P_{QC} = |Z_L| I_L^2 - |Z_C| I_C^2$.
2. $P = UI_C \cos\varphi = 100 \cdot 10\sqrt{2}\cos(-45°)$; $P_Q = UI_C \sin\varphi = 100 \cdot 10\sqrt{2}\sin(-45°)$, где $\varphi = -45°$ из задачи 1.3.3.

1.3.9. Использовать рекомендации к задачам 1.1.5, 1.1.6, 1.3.5. Неизвестные в системах из двух-трех уравнений МКТ (или МУН) целесообразно находить, используя метод определителей (метод Крамера).

1.3.10, 1.3.11. В схеме рис. 1.11, *а* найти резонансную частоту $\omega_р = \omega_0$, считая параметры R, L, C известными.

При резонансе в общем случае $\mathrm{Im}Z_{вх} = 0$, $\varphi_{вх} = 0$, $P = P_S$, $P_Q = 0$. Определяем $Z_{вх} = -j/(\omega C) + j\omega LR/(R + j\omega L) = -j/(\omega C) + j\omega LR(R - j\omega L)/(R^2 + \omega^2 L^2)$; откуда $\mathrm{Im}Z_{вх} = [-1/(\omega C) + \omega LR^2/(R_2 + \omega^2 L^2)]$. Из условия $\mathrm{Im}Z_{вх}(j\omega_р) = 0$ находим $\omega_р = \sqrt{R^2/(CLR^2 - L^2)} = \sqrt{1/(CL - L^2/R^2)}$. Если $CL < L^2/R^2$, т. е. $R < \sqrt{L/C}$, резонанс невозможен.

Примечания: 1) в последовательной *RLC*-цепи при резонансе (*простейшем резонансе напряжений*) $|Z_L| = |Z_C|$, $U_L = U_C$, *участок LC эквивалентен* КЗ, $Z_{вх} = R$, $\omega_P = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$; добротность $Q = \rho/R = U_L/U_{вх} = \omega_0/\Delta\omega$, где характеристическое сопротивление $\rho = (\omega_0 C)^{-1} = \omega_0 L = \sqrt{L/C}$, $\Delta\omega$ — полоса пропускания, определяемая по АЧХ цепи на уровне 0,707 от максимума; 2) в параллельной *RLC*-цепи при резонансе (*простейшем резонансе токов*) соотношения *дуальны*.

1.3.12. Схема цепи приведена на рис. 1.12, *а*; $u = 8e^{-4t}\cos(t + 135°)\delta_1(t)$; $R_1 = R_2 = R_3 = 2$; $L = 1$. Найти $i_1(t)$ при $t > 0$.

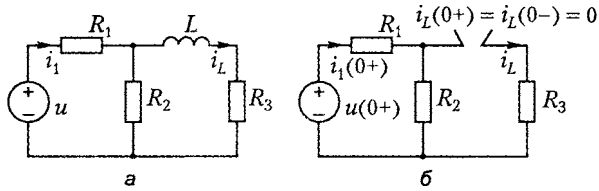


Рис. 1.12

1. *Независимые начальные условия* нулевые, т. е. $i_L(0-) = 0$.

2. *Вынужденную* составляющую реакции находим, используя *метод комплексных амплитуд*. $\dot{U}_m = 8e^{+j135°}$, комплексная частота $s = \sigma + j\omega = -4 + j$, $Z_L = sL = -4 + j$. Тогда $Z_{вх} = R_1 + R_2(Z_L + R_3)/(R_2 + Z_L + R_3) = 4 + j4 = 4\sqrt{2}e^{j45°}$; $\dot{I}_{1m} = \dot{U}_m/Z_{вх} = \sqrt{2}e^{j90°}$. Получаем: $i_{1в}(t) = \sqrt{2}e^{-4t}\cos(t + 90°)$.

3. Определяем *зависимые* начальные условия по схеме замещения рис. 1.12, *б*, в которой выводы *L*-элемента *разомкнуты*, так как $i_L(0+) = i_L(0-) = 0$. Получаем

$$u(0+) = 8\cos 135° = 4\sqrt{2};\ i_1(0+) = u(0+)/(R_1 + R_2) = \sqrt{2}.$$

4. Находим *постоянную времени* цепи, для чего рассматриваем схему рис. 1.12, *б*, в которой исключаем источник напряжения: $R_э = R_3 + R_1R_2/(R_1 + R_2) = 3$; $\tau = L/R_э = 1/3$ или $\delta = 1/\tau = 3$.

5. Записываем *решение*: $i_1(t) = i_{1в} + i_{1-в} = \sqrt{2}e^{-4t}\cos(t + 90°) + Ae^{-t/\tau}$. Так как $i_1(0+) = \sqrt{2} = \sqrt{2}\cos 90° + A$, то $A = \sqrt{2}$, и окончательно получаем: $i_1(t) = \sqrt{2}e^{-4t}\cos(t + 90°) + \sqrt{2}e^{-3t}$.

Примечания: 1) $Z_C = 1/(sC)$; 2) при воздействии $u = 8e^{-4t}\delta_1(t)$ имеем $\dot{U}_m = 8$; $s = -4$; $Z_L = sL = -4$; 3) *недопустим* расчет вынужденного режима в случае $s \neq 0$ по схеме замещения, в которой выводы *L*-элемента *замыкаются накоротко*, а ветвь с *C*-элементом *разрывается*, как это делалось *при постоянных* воздействиях.

1.3.13. Схема цепи приведена на рис. 1.13, *а* при $R = R_0 = 2$, $C = 1/8$, $u = 20\cos 2t$, $i = 10\cos(2t + 90°)$. Найти $i_C(t)$ при $t > 0$ после *размыкания* ключа.

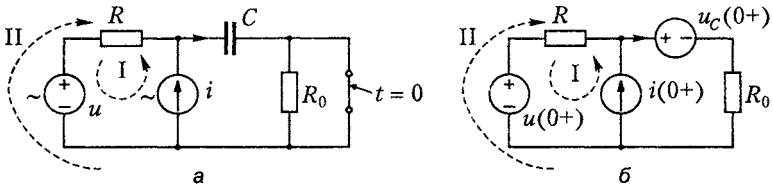


Рис. 1.13

1. Чтобы найти *независимое начальное условие* $u_C(0-)$, рассчитываем установившийся синусоидальный режим перед коммутацией (при $t<0$). $\dot{U}_m = 20; \dot{I}_m = j10$; $Z_C = -j4$. Используем МКТ: $\dot{I}^{к}_{m1} = \dot{I}_m = j10$; $(R+Z_C)\dot{I}^{к}_{m2} - R\dot{I}^{к}_{m1} = \dot{U}_m$, откуда $(2-j4)\dot{I}^{к}_{m2} = 20 + j20$; следовательно, $\dot{I}^{к}_{m2} = \dot{I}_{mC} = -2 + j6$; $\dot{U}_{mC} = \dot{I}_{mC} Z_C = 24 + j8 = 8\sqrt{10}e^{j18,5°}$, т. е. $u_C(t) = 8\sqrt{10}\cos(2t + 18,5°)$. Таким образом, $u_C(0-) = 8\sqrt{10}\cos 18,5° = 24 = u_C(0+) = \mathrm{Re}\dot{U}_{mC}$.

2. *Вынужденный* (*установившийся* синусоидальный) *режим* при $t \to \infty$ рассчитываем аналогично, учитывая R_0. Получим: $(4-j4)\dot{I}^{к}_{m2} = 20 + j20$, откуда

$$\dot{I}^{к}_{m2} = \dot{I}_{mC} = 5j = 5e^{j90°},\ i_{C\text{вын}}(t) = 5\cos(t + 90°).$$

3. Для расчета *зависимых начальных условий* при $t = 0+$ составляем эквивалентную схему замещения (рис. 1.13, *б*): $u_C(0+) = 24, u(0+) = 20, i(0+) = 10\cos 90° = 0$, т. е. ИТ можно заменить ХХ. По МКТ аналогично предыдущему имеем: $i^{к}_1 = 0$, т. е. $(R+R_0)i^{к}_2 = u(0+) - u_C(0+)$, или $4i^{к}_2 = 20 - 24$, откуда $i^{к}_2 = -1 = i_C(0+)$.

4. Цепь первого порядка. По *схеме для свободного режима* (ИН заменен на КЗ, ИТ — на ХХ) находим $R_э = R + R_0 = 4$; $\tau = CR_э = 0,5$.

5. Решение: $i_C(t) = 5\cos(2t + 90°) + Ae^{-2t}$; начальное условие $i_C(0+) = -1 = 5\cos 90° + A$, откуда $A = -1$.

1.3.14. Рекомендация: воспользоваться указаниями к задачам 1.3.12, 1.3.13, учитывая, что в задаче 1.3.14 обычно требуется выполнить только какие-либо 1–2 пункта стандартного расчета.

1.3.15. О расчете трехфазных цепей см. 2.15.

Задачи к теме 1.4 «Операторный и спектральный методы анализа цепей»

1.4.1. Найти *оригиналы* $f_1(t)$ и $f_2(t)$ по *изображениям* $F_1(s) = 12/[(s+2)^2 s(s+1)]$, $F_2(s) = (2s+4)/(2s^2 + 2s + 5)$.

Рекомендации.

1. Оригинал определяют по *теореме разложения*. Изображение должно быть приведено к виду $F(s) = B(s)/A(s)$, где $A(s)$ — приведенный полином степени n (коэффициент $a_n = 1$ при s^n). Если *полюсы* $F(s)$, т. е. корни уравнения $A(s) = 0$, *не-*

кратные, а *степень* полинома $B(s)$ *меньше* n, то, разлагая $F(s)$ на *простые дроби*, находим:

$$F(s)=\sum_{k=1}^{n} B_k/(s-s_k) \div f(t)=\sum_{k=1}^{n} B_k e^{s_k t},$$

где B_k — вычет $F(s)$ в полюсе s_k, т. е. $B_k = \lim(s-s_k)F(s)$ при $s \to s_k$.

2. Если $F(s)$ имеет *комплексные полюсы* (обязательно попарно *сопряженные*), то достаточно определить вычет *лишь в одном* из полюсов. Пусть, например, $s_1 = -\delta + j\omega_C$, $s_2 = -\delta - j\omega_C$ — пара таких полюсов. Тогда $B_1 = \lim(s-s_1)F(s)$ при $s \to s_1$, причем вычет $B_1 = |B_1| e^{j\alpha_1}$ — в общем случае *комплесный*. Так как вычет $B_2 = |B_2| e^{-j\alpha_1}$, то составляющая оригинала, обязанная этой паре полюсов, имеет вид $2|B_1| e^{-\delta t} \cos(\omega_C t + \alpha_1)$.

3. При наличии кратных полюсов, например $s_1 = s_2$, соответствующие простые дроби имеют вид $B_{11}/(s-s_1)^2 + B_{12}/(s-s_1)$, вычеты определяются (при $s \to s_1$) выражениями $B_{11} = \lim(s-s_1)^2 F(s)$ и $B_{12} = \lim\dfrac{d}{ds}(s-s_1)^2 F(s)$, а составляющие оригинала: $B_{11} t e^{s_1 t} + B_{12} e^{s_1 t}$.

Пример 1. Полюсы $F_1(s)$: $s_1 = s_2 = -2$; $s_3 = 0$; $s_4 = -1$, т. е.

$F_1(s) = B_{11}/(s+2)^2 + B_{12}/(s+2) + B_3/s + B_4/(s+1)$. Вычеты:

$B_{11} = 12(s+2)^2/[(s+2)^2 s(s+1)] = 6$ при $s = -2$;

$B_{12} = d[(12/s(s+1)]/(ds) = 9$ при $s = -2$;

$B_3 = 12/[(s+2)^2(s+1)] = 3$ при $s = 0$;

$B_4 = 12/[(s+2)^2 s] = -12$ при $s = -1$.

Оригинал $f_1(t) = 6te^{-2t} + 9e^{-2t} + 3 - 12e^{-t}$.

Пример 2. Так как полином знаменателя $F_2(s)$ *не является приведенным*, делим числитель и знаменатель на 2, т. е. $F_2(s) = (s+2)/(s^2 + s + 2{,}5)$. Полюсы: $s_1 = -0{,}5 + j1{,}5$; $s_2 = -0{,}5 - j1{,}5$, следовательно, $F_2(s) = B_1/(s+0{,}5-j1{,}5) + B_2/(s+0{,}5+j1{,}5)$. Определяем вычет в полюсе s_1:

$B_1 = \lim(s+0{,}5-j1{,}5)(s+2)/[(s+0{,}5-j1{,}5)(s+0{,}5+j1{,}5)]$ при $s \to -0{,}5 + j1{,}5$,

откуда $B_1 = (-0{,}5 + j1{,}5 + 2)/(j3) = 0{,}5\sqrt{2}e^{-j45°}$; $|B_1| = 0{,}5\sqrt{2}$; $\alpha_1 = -45°$. Оригинал $f_2 = \sqrt{2}e^{-0{,}5t}\cos(1{,}5t - 45°)$.

Для приближенного *построения графика* $f_2(t)$ находят *постоянную времени* экспоненты $\tau = 1/\delta = 2$ и *период колебаний* $T = \dfrac{2\pi}{\omega} \approx 4$. Далее *строят экспоненты* $\pm\sqrt{2}e^{-0{,}5t}$ и *косинусоиду* с периодом T и начальной фазой $-45°$, после чего несложно *разметить характерные точки* графика.

1.4.2. Найти $u_C(t)$ при $t > 0$ в задаче 1.2.3 (см. рис. 1.10, *а*) операторным методом.

1. Определяем независимые начальные условия (см. п. 1 задачи 1.2.3) $u_C(0-) = 12$; $i_L(0-) = 2$.

2. Составляем для $t > 0$ *операторную схему замещения*, в которую входят источники, учитывающие независимые условия, например ИН $u_C(0-)/s$ и $Li_L(0-)$ (см. рис. 1.14, *а*). *Важно* выбрать наиболее простой метод расчета схемы: так как после эквивалентных преобразований получим (см. рис. 1.14, *б*) цепь с одной парой узлов, то методом узловых напряжений потребуется составить лишь одно уравнение.

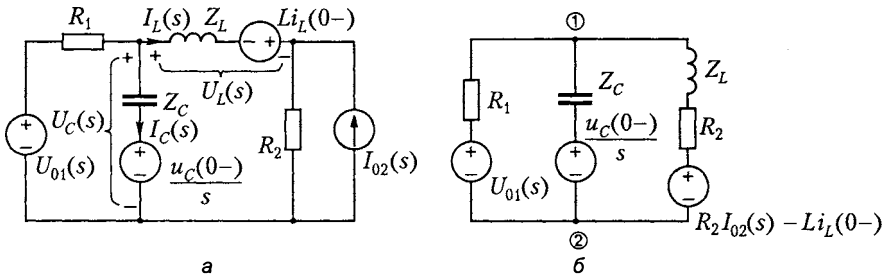


Рис. 1.14

Следует *иметь в виду*, что в схеме рис. 1.14, *а*

$$U_C(s) = Z_C I_C(s) + u_C(0-)/s;\ U_L(s) = Z_L I_L(s) - Li_L(0-).$$

Принимая узел 2 за базисный, по МУН имеем:

$$\left(G_1 + Y_C + \frac{1}{Z_L + R_2}\right)U_1^y(s) = U_{01}(s)G_1 + Y_C u_C(0-)/s + [R_2 I_{02}(s) - Li_L(0-)]/(R_2 + Z_L).$$

Подставляя $G_1 = 1/R_1 = 1$, $Y_C = 1/Z_C = sC = s$, $Z_L = sL = s$, $R_2 = 1$, $U_{01}(s) = 18/s$, $I_{02}(s) = 2/s$, $u_C(0-) = 12$, $i_L(0-) = 2$, после преобразований находим: $U_1^y(s) = U_C(s) = (12s^2 + 52s + 60)/[s(s+2)^2]$.

Переходя к оригиналу (см. решение задачи 1.4.1), получаем $u_C(t) = 15 - 2te^{-2t} - -3^{-2t}$.

1.4.3. В задаче рассматриваются переходные процессы в цепях, содержащих *источники гармонических колебаний*; начальные условия — нулевые. Для определения $u_C(0-)$ и $i_L(0-)$ необходимо *использовать* МКА.

Рекомендуется знать соотношение:

$$f(t) = \cos(\omega t + \alpha) = \cos\alpha \cdot \cos\omega t - \sin\alpha \cdot \sin\omega t \div$$
$$\div F(s) = \cos\alpha \cdot s/(s^2 + \omega^2) - \sin\alpha \cdot \omega/(s^2 + \omega^2).$$

1.4.4. Использовать указания к задачам 1.4.2, 1.4.3.

1.4.5. Использовать указания к задачам 1.4.2, 1.4.3. Иметь в виду: если степень полинома числителя $F(s)$ *равна степени* полинома знаменателя, то необходимо выделить *целую часть* $B_0 = \lim F(s)$ при $s \to \infty$; оригинал $f(t)$ будет содержать *дельта-функцию* $B_0\delta(t)$. Остальные составляющие $f(t)$ определяются так, как это было показано в комментариях к задаче 1.4.1.

1.4.6. Рекомендации.

1. *Знать* соотношения $F_2(s) = H(s)F_1(s)$; $H(s) \div h(t)$; $H_1(s) = H(s)/s \div h_1(t)$; $f(t - t_3) \div F(s)e^{-st_3}$, где t_3 — время запаздывания.

2. Уметь находить изображение сигнала методом представления его суммой *простейших стадартных составляющих*, как показано, например, на рис. 1.15, *а*, где сигнал $u(t) = \{U_m \sin\omega_0 t$ при $0 < t < t_и = T_0/2$; 0 при $t < 0$ и $t > T_0/2\}$ может быть представлен в виде $u(t) = u_1(t) + u_2(t) = U_m \sin\omega_0 t\delta_1(t) + U_m \sin\omega_0(t - T_0/2)\delta_1(t - T_0/2) \div U(s) = \dfrac{U_m\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}(1 + e^{-sT_0/2})$, где $\omega_0 = 2\pi/T_0 = \pi/t_и$.

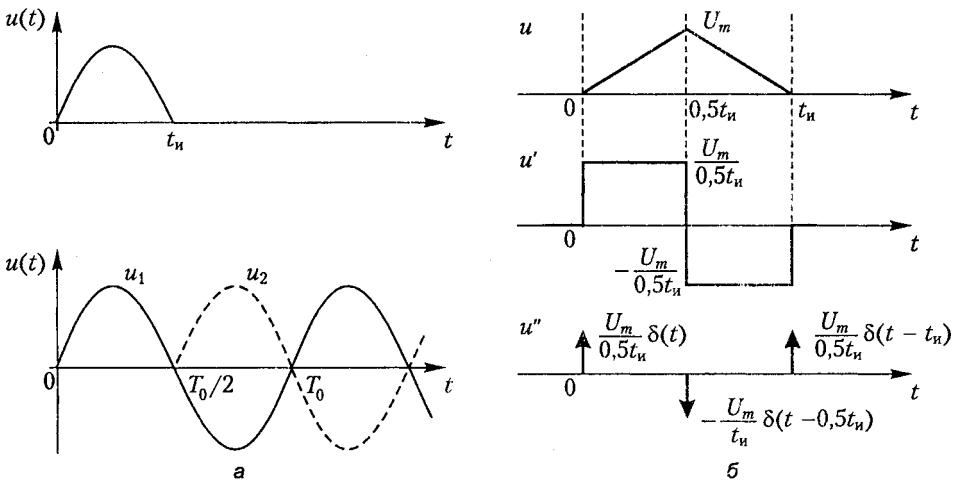


Рис. 1.15

3. Уметь находить изображение кусочно-линейных сигналов *методом двойного дифференцироания*, как показано на рис. 1.15, *б*. *Учитывая*, что $\delta(t) \div 1$, $\delta(t - t_и) \div 1e^{-st_и}$, а *интегрирование* в t-области *соответствует делению* на s в s-области, находим $U(s) = \dfrac{U_m}{0{,}5t_и s^2}(1 - 2e^{-0{,}5t_и s} + e^{-t_и s})$, т. е. представление сигнала простейшими составляющими имеет вид:

$$u(t) = \frac{U_m}{0{,}5t_и}t\delta_1(t) - \frac{U_m}{t_и}(t - 0{,}5t_и)\delta_1(t - 0{,}5t_и) + \frac{U_m}{0{,}5t_и}(t - t_и)\delta_1(t - t_и).$$

1.4.7. Необходимо освоить рекомендации к задаче 1.4.6. Схема примера цепи приведена на рис. 1.16, *а*: $R_1 = 1$; $R_2 = R_3 = 2$; $C = 3/4$. Реакция $f_{\text{вых}} = i_3(t)$. Найти: 1) $h(t)$, $h_1(t)$, $h_2(t)$, АЧХ и ФЧХ; 2) i_3 при $u_{\text{вх}} = 12e^{-t}\delta_1(t)$; 3) i_3, если $u_{\text{вх}}$ — треугольный импульс, показанный на рис. 1.15, *б*: $U_m = 20$, $t_{\text{и}} = 4$.

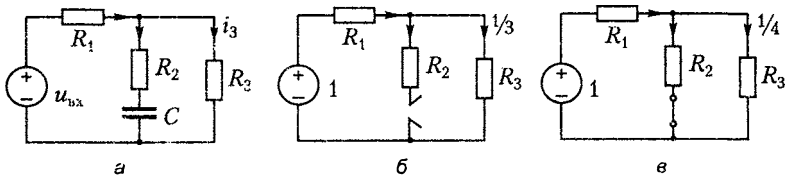


Рис. 1.16

Передаточную функцию цепи $H(s) = I_3(s)/U_{\text{вх}}(s)$ находим *при нулевых начальных условиях*, поэтому операторную схему замещения можно не изображать. Используем для расчета метод пропорциональных величин: примем $I_{(2)} = I_{(C)} = 1$, тогда

$$U_{(2)} = I_{(2)}R = 2;\ U_{(C)} = I_{(C)}Z_C = 4/(3s);$$
$$U_{(3)} = U_{(2)} + U_{(C)} = (6s+4)/(3s);$$
$$I_{(3)} = U_{(3)}/R_3 = (3s+2)/(3s);$$
$$I_{(1)} = I_{(2)} + I_{(3)} = (6s+2)/(3s);$$
$$U_{(1)} = I_{(1)}R_1 = (6s+2)/(3s);$$
$$U_{(\text{вх})} = U_{(1)} + U_{(3)} = (12s+6)/(3s).$$

Находим $H(s) = I_{(3)}/U_{(\text{вх})} = (3s+2)/(12s+6) = 0{,}25(s+2/3)/(s+1/2)$.

Контроль: 1. $H(0) = 1/3$. С другой стороны, при $s \to 0$ в операторной схеме замещения $Z_C(s) = 1/(Cs) \to \infty$, т. е. *С-элемент эквивалентен ХХ* (см. рис. 1.16, *б*). При $U_{\text{вх}}(s) = 1 \div \delta(t)$ получим $I_3 = 1/3$. 2. $H(\infty) = 1/4$. С другой стороны, при $s \to \infty$ в операторной схеме замещения $Z_C(s) \to 0$, т. е. *С-элемент эквивалентен КЗ* (см. рис. 1.16, *в*). При $U_{\text{вх}}(s) = 1$ получим $I_3 = 1/4$. 3. Полюсы $H(s)$ — это *корни характеристического уравнения* цепи, т. е. $s_1 = -1/2$, что соответствует постоянной времени $\tau = 2 = 1/|s_1| = R_э C$, где $R_э = R_2 + R_1R_3/(R_1 + R_3) = 8/3$.

Определяя *импульсную характеристику*, выделяем в $H(s)$ *целую часть*, так как *степени* полиномов числителя и знаменателя *равны*:

$$H(s) = \frac{1/24}{s+1/2} + \frac{1}{4} \div h(t) = \frac{1}{24}e^{-t/2}\delta_1(t) + \frac{1}{4}\delta(t).$$

Находим *переходную характеристику*:

$$H_1(s) = H(s)/s = (s+2/3)/[4s(s+1/2)] = A_1/s + A_2/(s+1/2),$$

причем $A_1 = 1/3$, $A_2 = -1/12$, следовательно $h_1(t) = [(1/3) - (1/42)e^{-t/2}]\delta_1(t)$. Далее находим

$$H_2(s) = H(s)/s^2 = (s+2/3)/[4s^2(s+1/2)] = B_1/s^2 + B_2/(s+1/2) + B_3/s,$$

где $B_1 = 1/3, B_2 = 1/6, B_3 = -1/6$, откуда

$$h_2(t) = [t/3 + + 1/6\exp(-t/2) - 1/6]\delta_1(t) = \int_0^t h_1(t)\,dt.$$

Контроль: 1. $h(t) = h_1'(t)$; $h_1(t) = h_2'(t)$. 2. $h_{1\text{вых}} = 1/3$, что соответствует эквивалентной схеме рис. 1.16, *б*. 3. $h_1(0+) = 1/4$ — см. рис. 1.16, *в*.

Комплексная функция цепи (т. е. обобщенная *частотная характеристика*)

$H(j\omega) = (j\omega + 2/3)/[4(j\omega + 1/2)] = H(s)$ при $s = j\omega$;

АЧХ $A(\omega) = |H(j\omega)| = \sqrt{\omega^2 + (2/3)^2} \,/\, (4\sqrt{\omega^2 + (1/2)^2})$;

ФЧХ = arctg (3ω/2) – arctg (2ω).

Графики строят, производя расчет АЧХ и ФЧХ на различных частотах ω (*в частности*, 0, ∞, 1/2, 2/3). АФХ строится на комплексной плоскости по значениям $н(j\omega) = A(\omega)e^{j\Phi(\omega)}$ при различных ω. *Контроль* АЧХ при $\omega \to 0$ и $\omega \to \infty$ осуществляют по схемам рис. 1.16, *б*, *в*.

При $u_{вх} = 12e^{-t}\delta_1(t)$ находят

$$I_3(s) = U_{вх}(s)H(s) = \frac{12}{s+1}\,\frac{(s+2/3)}{4(s+1/2)} = \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+1/2},$$

т. е. $i_3(t) = 2e^{-t} + e^{-t/2}$ при $t > 0$.

Изображение заданного *кусочно-линейного воздействия* было фактически найдено в задаче 1.4.6 (см. рис. 1.15, *б*): $U_{вх}(s) = \frac{10}{s^2}(1 - 2e^{-2s} + e^{-4s})$. Тогда $I_3(s) = U_{вх}(s)H(s) =$ $= [5(s+2/3)/(2s^2(s+1/2))](1 - 2e^{-2s} + e^{-4s}) = (5/3)[2/s^2 - 1/s + 1/(s+0{,}5)](1 - 2e^{-2s} +$ $+ e^{-4s})$. Итак, $i_3(t) = \frac{5}{3}(2t - 1 + e^{-t/2})\delta_1(t) - \frac{10}{3}[2(t-2) - 1 + e^{-(t-2)/2}]\delta_1(t-2) +$ $+ \frac{5}{3}[2(t-4) - 1 + e^{-(t-4)/2}]\delta_1(t-4)$.

1.4.8. Схема типового примера приведена на рис. 1.17, *а*: $i = 10 + 20\cos(2t - 90°) +$ $+ 10\cos 4t$; $R = 2$, $L = 1$; $C = 1/8$. Найти $u(t)$, U, P; построить амплитудный и фазовый спектры реакции.

Для определения реакции *целесообразно* использовать *передаточную функцию* цепи. В примере $H(s) = Z_{вх}(s)$, причем $s = jk\omega_1$, так как рассматривается установившийся режим при периодическом воздействии, представленном рядом Фурье. Здесь $\omega_1 = 2$, $k = 0, 1, 2$; $Z_{вх}(s) = R[Ls + 1/(sC)]/[R + Ls + 1/(sC)]$. После подстановки значений находим:

$$Z_{вх}(jk\omega_1) = \frac{R(1 - LCk^2\omega_1^2)}{1 - LCk^2\omega_1^2 + jRCk\omega_1} = (2 - k^2)/(1 - 0{,}5k^2 + j0{,}5k).$$

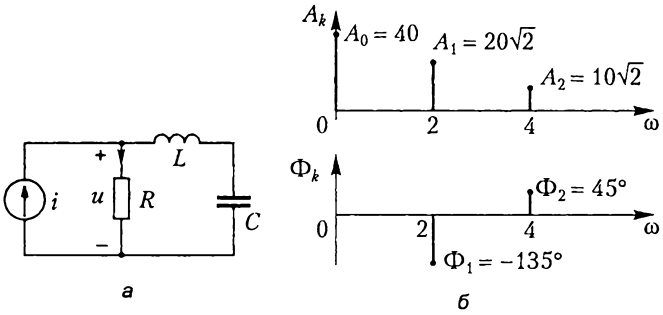


Рис. 1.17

По полученному выражению, подставляя $k = 0, 1, 2$, вычисляем комплексные амплитуды гармоник реакции $\dot{U}_{mk} = Z_{вх}(jk\omega_1)\dot{I}_{mk}$: при $k = 0$ определяем $Z_{вх0} = 2$, $U_0 = 2 \cdot 10 = 20$; при $k = 1$ находим $Z_{вх1} = 1/(0{,}5 + j0{,}5) = \sqrt{2}e^{-j45°}$, $\dot{U}_{m1} = \dot{I}_{m1}Z_{вх1} = 20\sqrt{2}e^{-j135°}$; при $k = 2$ получаем $Z_{вх2} = -2/(-1 + j) = \sqrt{2}e^{j45°}$, $\dot{U}_{m2} = \dot{I}_{m2}Z_{вх2} = 10\sqrt{2}e^{j45°}$.

Приведем также решение задачи *без использования* общего выражения для *функции цепи*.

1. Для *нулевой* гармоники ($k = 0$; $\omega_0 = k\omega_1 = 0$) имеем: $I_0 = 10$; L-элемент эквивалентен КЗ, C — ХХ; следовательно, $U_0 = I_0 R = 20$.

2. Для *первой* (*основной*) гармоники ($k = 1$; $\omega_1 = k\omega_1 = 2$): $\dot{I}_{m1} = 20e^{-j90°}$; $Z_{L1} = j\omega_1 L = j2$; $Z_{C1} = 1/(j\omega_1 C) = -j4$. Находим $Z_{вх1} = R(Z_{L1} + Z_{C1})/(R + Z_{L1} + Z_{C1}) = 1 - j = \sqrt{2}e^{-j45°}$; $\dot{U}_{m1} = \dot{I}_{m1}Z_{вх1} = 20\sqrt{2}e^{-j135°}$.

3. Для второй гармоники ($k = 2$; $\omega_2 = k\omega_1 = 2\omega_1 = 4$): $\dot{I}_{m2} = 10$; $Z_{L2} = j\omega_2 L = j4$; $Z_{C2} = 1/(j2\omega_1 C) = -j2$. Находим $Z_{вх2} = \sqrt{2}e^{j45°}$; $\dot{U}_{m2} = \dot{I}_{m2}Z_{вх2} = 10\sqrt{2}e^{j45°}$.

Итак, *ряд Фурье* реакции $u(t) = 20 + 20\sqrt{2}\cos(2t - 135°) + 10\sqrt{2}\cos(4t + 45°)$. Находим *действующее значение* $U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2} = \sqrt{20^2 + 20^2 + 10^2} = 30$, мощность $P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos(\alpha_{u1} - \alpha_{i1}) + U_2 I_2 \cos(\alpha_{u2} - \alpha_{i2})$; $\alpha_{uk} - a_{ik} = \varphi_k$; $P = 20 \times 10 + 20 \cdot 10\sqrt{2}\cos(-90° + 135°) + 10 \cdot 5\sqrt{2}\cos 45° = 450$.

Контроль: $P = P_R = U_0^2/R + U_1^2/R + U_2^2/R = U/R$.

Амплитудный дискретный (линейчатый) *спектр* A_k определяется *амплитудами* составляющих ряда Фурье на соответствующих частотах (см. рис. 1.17, *б*), *фазовый спектр* Φ_k — начальными *фазами гармоник*.

Примечания: 1) постоянная составляющая (*нулевая* гармоника) $A_0/2$ — это *среднее значение* периодического сигнала; 2) ряды Фурье *четных* сигналов *не имеют синусных* составляющих синусно-косинусной формы ряда ($b_k = 0$), а *нечетных* сигналов — *косинусных* составляющих ($a_k = 0$); если $f(t) = -f(t \pm 0{,}5T)$, где T — период, *отсутствуют гармоники четных номеров*.

1.4.9. Использовать указания к задаче 1.4.8.

1.4.10. При решении учесть следующее:

1. Коэффициенты ряда Фурье периодической функции определяют по формуле:

$$\dot{A}_k = A_k e^{j\Phi_k} = a_k - jb_k = \frac{2}{T} F_1(s)|_{s=jk\omega_1},$$

где $F_1(s)$ — *изображение* по Лапласу описания f_1 сигнала f в пределах любого периода $t_0 < t < t_0 + T$; часто f_1 определяют в интервале $0 < t < T$ и условно называют «*первым периодом*» сигнала f, существующего при $-\infty < t < \infty$.

2. Частота k-й гармоники $\omega_k = kw_1 = \frac{k2\pi}{T}$, а период $T_k = T/k = T_1/k$.

3. В задаче наиболее значительные по величине нулевая и первая гармоники воздействия располагаются в *полосе пропускания* ЧХ цепи. Поэтому сигнал на выход пройдет *с небольшими искажениями* (см. также п. 9 указаний к задаче 1.4.11).

4. О точном расчете реакции см. [4, с. 229–232].

1.4.11. При решении вариантов задачи учесть следующее:

1. Если функция $f(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле и *абсолютной интегрируемости*, то ее спектральная плотность (в дальнейшем — *спектр*) $F(j\omega) = F(s)$ при $s = j\omega$, где $F(s)$ — изображение $f(t)$ по Лапласу.

2. Значение спектра при $\omega = 0$ есть *площадь* сигнала $f(t)$.

3. В ряде случаев спектры апериодических сигналов при конечных значениях частоты ω принимают нулевые значения; эти частоты именуют узлами спектральной характеристики (ω_{y1}, ω_{y2} и т. д.). Для простоты значение ω_{y1} принимают иногда за *ширину спектра* сигнала.

Например, для прямоугольного импульса $\omega_{y1} = 2\pi/t_и$, где $t_и$ — длительность импульса; для меандра и равнобедренного треугольного импульса $\omega_{y1} = 4\pi/t_и$.

4. *Ширину полосы пропускания* цепи $\Delta\omega_{пр}$ определяют как интервал частот, в пределах которого значение АЧХ не меньше 0,707 от максимума АЧХ.

5. *Время запаздывания* $t_з$ проходящего через цепь сигнала оценивают *по наклону* ФЧХ цепи в области *низких частот*, если спектр сигнала в основном располагается в полосе пропускания.

6. Передаточная функция *интегрирующей RC*-цепи

$$H(s) = U_C(s)/U_{вх}(s) = 1/(\tau s + 1),$$

а *дифференцирующей*

$$H(s) = U_R(s)/U_{вх}(s) = \tau s/(\tau s + 1),$$

где $\tau = RC$.

7. Формула Рэлея, определяющая *энергию сигнала*:

$$w_f = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2\,d\omega.$$

8. $F_{вых}(j\omega) = H(j\omega)F_{вх}(j\omega)$; значение *АЧХ на нулевой частоте* характеризует *отношение площадей* реакции и воздействия; значение АЧХ *на бесконечной* частоте показывает, с каким коэффициентом *скачок сигнала* на входе *проходит на выход* цепи.

9. ЧХ цепи обычно удается разбить *на частотные интервалы* (полосы): неискажения, т. е. *пропускания* (если АЧХ $A(\omega) \approx k = \text{const}$), *интегрирования* (если $A(\omega) \approx k/\omega$), *дифференцирования* ($A(\omega) \approx k\omega$), двойного интегрирования ($A(\omega) \approx k/\omega^2$) и т. д. Если спектр воздействия располагается в основном в одном из этих интервалов, можно предсказать ожидаемое изменение формы реакции. Оценкой *границ частотных интервало* иногда можно считать значения модулей *нулей* $|s_{0k}|$ и *полюсов* $|s_k|$ передаточной функции цепи $H(s)$.

1.4.12. Рекомендации:

1. Воспользоваться указаниями к задачам 1.4.7 и 1.4.11.

2. Амплитудный спектр реакции $A_2(\omega) = |F_2(j\omega)|$ или $A_2(\omega) = A_1(\omega)A(\omega)$, где $A(\omega)$ — АЧХ цепи; фазовый спектр $\Phi_2(\omega) = \Phi_1(\omega) + \Phi(\omega)$, где $\Phi(\omega)$ — ФЧХ цепи; вещественный спектр $B_2(\omega) = A_2(\omega)\cos\Phi_2(\omega)$, мнимый $M_2(\omega) = A_2(\omega)\sin\Phi_2(\omega)$.

3. На основании формул

$$f_2(t) = \frac{2}{\pi}\operatorname{Re}\mathscr{L}[B(\omega)]|_{s=jt} = \frac{2}{\pi}\operatorname{Im}\mathscr{L}[M(\omega)]|_{s=jt}$$

находят сигнал по вещественному или мнимому спектрам. Для взятия изображения по Лапласу от спектра производят кусочно-линейную аппроксимацию $B_2(\omega)$ или $M_2(\omega)$.

4. Для отыскания $f_2(t)$ по амплитудному и фазовому спектрам используют *формулу связи спектра одиночного импульса f_2 с дискретным спектром периодического сигнала $f_{2П}(t)$*, составленного из периодической последовательности импульсов f_2:

$$A_{k2} = \frac{2}{T}A_2(k\omega_1),\ \Phi_{k2} = \Phi_2(k\omega_1),$$

причем период $T = 2\pi/\omega_1$ выбирают достаточно *большим*. Записывают ряд Фурье сигнала $f_{2П}$ и строят его график в пределах периода; это приближенный график $f_2(t)$; чем больше период T, тем точнее расчет.

1.4.13. Использовать рекомендации к задачам 1.4.7 и 1.4.11.

1.4.14. В цепи (см. рис. 1.11, *а*) $C = 1$, $R = 1$, $L = 1$. Найти ЧХ функции передачи по напряжению $H(j\omega) = \dot{U}_C/\dot{U}$. Используя обобщенные сопротивления $Z_L = sL = s$, $Z_C = 1/(sC) = 1/s$, определяем по ФДН функцию цепи $H(s) = Z_C/Z_{вх} = (1/s)/[1/s + s/(s+1)] = (s+1)/(s^2 + s + 1)$. Конечный нуль функции цепи $s_{01} = -1$, конечные полюсы $s_{1,2} = -0{,}5 \div j0{,}5\sqrt{3}$. Заменив s на $j\omega$ в выражении $H(s)$, получаем обобщенную частотную характеристику $H(j\omega) = (j\omega + 1)/(-\omega^2 + j\omega + 1)$.

АЧХ цепи $A(\omega)=|H(j\omega)|=\sqrt{(1+\omega^2}\,/\sqrt{(1-\omega^2)^2+\omega^2}$, ФЧХ $\Phi(\omega)=\operatorname{arctg}\omega-$ $-\operatorname{arctg}\dfrac{\omega}{(1-\omega^2)}$. АЧХ определяется как *отношение модулей* числителя и знаменателя $H(j\omega)$, а ФЧХ — как *разность* их *фаз*. Графики АЧХ и ФЧХ строят *качественно*, используя данные расчета при $\omega=0$, $\omega\to\infty$, а также при $\omega=|s_{0k}|$ и $\omega=|s_k|$. В примере $|s_{01}|=|s_1|=1$. Получаем для $\omega=0$, 1, ∞ значения $A(\omega)$, равные 1; $\sqrt{2}$; 0; $\Phi(\omega)$: 0; 45° − 90° = −45°; 90° − 180° = −90°.

Контроль ЧХ осуществляют по эквивалентным схемам, в которых при $\omega=0$ заменяют L-элемент на КЗ, C-элемент на ХХ, при $\omega\to\infty$ заменяют L на ХХ, C — на КЗ.

АФХ представляет собой кривую, *прочерченную* на комплексной плоскости *вектором* $H(j\omega)$ при изменении частоты ω (годограф векторной функции). Длину вектора определяет АЧХ, а фазу ФЧХ.

1.4.15. См. рекомендации к задаче 1.4.12.

Задачи к теме 1.5 «Расчет цепей с многополюсными элементами и зависимыми источниками»

1.5.1. Схема четырехполюсника П-образной структуры приведена на рис. 1.18: $R_1=R_2=2$; $Z_L=j$ (установившийся синусоидальный режим); $Z_н=-j2$. Найти a-параметры и функцию передачи по напряжению.

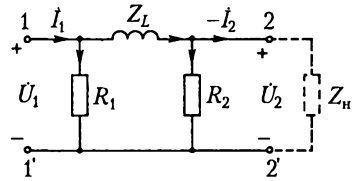


Рис. 1.18

Уравнения ЧП через a-параметры: $\dot U_1=a_{11}\dot U_2+a_{12}(-\dot I_2)$; $\dot I_1=a_{21}\dot U_2+a_{22}(-\dot I_2)$.

В режиме ХХ со стороны выводов 22′ (при $\dot I_2=0$) $a_{11}=\dfrac{\dot U_1}{\dot U_2}$, $a_{21}=\dfrac{\dot I_1}{\dot U_2}$. Используя метод пропорциональных величин при $\dot I_{(R2)}=1=\dot I_{(L)}$, находим: $\dot U_{(2)}=2$; $\dot U_{(L)}=j$; $\dot U_{(1)}=\dot U_{(R1)}=2+j$; $\dot I_{(R1)}=1+j0{,}5$; $\dot I_{(1)}=2+j0{,}5$, откуда $a_{11}=\dot U_{(1)}/\dot U_{(2)}=1+j0{,}5$; $a_{21}=\dot I_{(1)}/\dot U_{(2)}=1+j0{,}25$.

В режиме КЗ со стороны 22′ (при $\dot U_2=0$) $a_{12}=\dot U_1/(-\dot I_2)=Z_L=j$; $a_{22}=\dot I_1/(-\dot I_2)=$ $=(R_1+Z_L)/R_1=1+j0{,}5$ на основании ФДТ.

Контроль: 1) четырехполюсник *пассивный*, поэтому $|a|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=1$; 2) четырехполюсник *симметричный*, поэтому также $a_{11}=a_{22}$.

Добавляя к уравнениям ЧП через a-параметры *уравнение нагрузки* (см. рис. 1.18) $\dot U_2=Z_н(-\dot I_2)$, получим

$$H_U = \frac{\dot U_2}{\dot U_1} = \frac{\dot U_2}{a_{11}\dot U_2 + a_{12}\dot U_2/Z_н} = \frac{1}{(1+j0{,}5)+j/(-j2)} = 1-j.$$

Примечания: 1) уравнения ЧП через z- и y-параметры имеют вид $\dot U_1 = z_{11}\dot I_1 + z_{12}\dot I_2$, $\dot U_2 = z_{21}\dot I_1 + z_{22}\dot I_2$ и $\dot I_1 = y_{11}\dot U_1 + y_{12}\dot U_2$, $\dot I_2 = y_{21}\dot U_1 + y_{22}\dot U_2$;

2) соответственно *условия обратимости* $z_{12} = z_{21}$ и $y_{12} = y_{21}$; при симметрии добавляются $z_{11} = z_{22}$ и $y_{11} = y_{22}$.

1.5.2. Схема типового примера приведена на рис. 1.19, *а*. В цепи *установившийся синусоидальный* режим, $u = 20\cos(\omega t - 45°)$; $|Z_{L1}| = |Z_{L2}| = 3$; $|Z_C| = 2$; $R = |Z_M| = 1$. Составить уравнения в t-области, найти $u_{аб}(t)$ по исходной схеме и эквивалентной схеме без индуктивной связи.

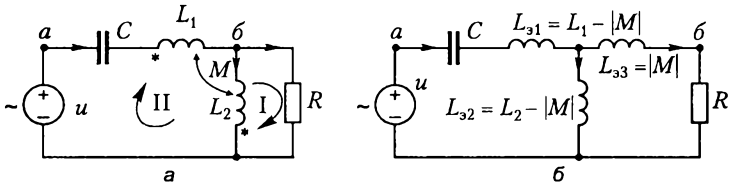


Рис. 1.19

При *выбранных* направлениях токов — *включение встречное*, т. е. $M = -|M| < 0$, $Z_M = j\omega M = -j|Z_M| = -j$.

В t-области независимые уравнения Кирхгофа для узла «б» и контуров I, II имеют вид: $-i_1 + i_2 + i_R = 0$; $u_R - u_{L2} = 0$; $-u + u_C + u_{L1} + u_{L2} = 0$, или $-i_1 + i_2 + i_R = 0$; $Ri_R - -(L_2 i_2' + Mi_1') = 0$; $-u + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_1\,dt + (L_1 i_1' + Mi_2') + (L_2 i_2' + Mi_1') = 0$, т. е. напряжение на ИСЭ, например, $u_{L1} = u_{11} + u_{12} = Li_1' + Mi_2'$ складывается из напряжений *самоиндукции* u_{11} и *взаимной индукции* u_{12}.

При расчете цепи с использованием МКА $-\dot I_1 + \dot I_2 + \dot I_R = 0$; $R\dot I_R - (Z_{L2}\dot I_2 + Z_M\dot I_1) = 0$; $-\dot U + Z_C\dot I_1 + (Z_{L1}\dot I_1 + Z_M\dot I_2) + (Z_{L2}\dot I_2 + Z_M\dot I_1) = 0$.

При $\dot U = 10\sqrt{2}e^{-j45°} = 10 - j10$; $Z_C = -j2$; $Z_{L1} = Z_{L2} = j3$; $Z_M = -j$; $R = 1$ получим систему

$$\left.\begin{aligned} -\dot I_1 + \dot I_2 + \dot I_R &= 0;\\ j\dot I_1 - j3\dot I_2 + \dot I_R &= 0;\\ 0 + j2\dot I_2 + 0 &= 10 - j10, \end{aligned}\right\}$$

откуда определители $D = -2 + j2$; $D_1 = 20\,(20 + j)$; $D_2 = 20$, причем

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1\\ j & -j3 & 1\\ 0 & j2 & 0 \end{vmatrix};\quad D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1\\ 0 & -j3 & 1\\ 10-j10 & j2 & 0 \end{vmatrix};\quad D_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1\\ j & 0 & 1\\ 0 & 10-j10 & 0 \end{vmatrix}.$$

Итак, $\dot{I}_1 = D_1/D = -5 - j15$; $\dot{I}_2 = -5 - j5$, откуда $\dot{I}_R = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = -j10$, $\dot{U}_{хх} = \dot{U}_C + \dot{U}_{L1} = \dot{U} - R\dot{I}_R = 10$, следовательно, $u_{хх}(t) = 10\sqrt{2}\cos\omega t$.

Поскольку L_1 и L_2 имеют общий узел, в котором *сходятся однополярные* выводы, в *эквивалентной схеме без ИСЭ* $|M|$ вычитают из L_1 и L_2, а в третью ветвь добавляют $L_{э3} = |M|$, как показано на рис. 1.19, *б*. При этом комплексные сопротивления $z_{э3} = j\omega L_{э3} = j\omega|M| = j|Z_M| = j$; $Z_{э1} = j(|Z_{L1}| - |Z_M|) = j2 = Z_{э2}$. Расчет такой схемы можно проводить *любым методом*. Поскольку $Z_C + Z_{э1} = 0$, то участок $CL_{э1}$ эквивалентен КЗ, следовательно, $\dot{I}_R = \dot{U}/(R + Z_{э3}) = (10 - j10)/(1 + j) = -j10$ и т. д.

1.5.3. Использовать указания к задаче 1.5.2.

1.5.4. При решении учесть следующее:

1. *Если* использовано *эквивалентное устранение* индуктивной связи (см. задачу 1.5.2, рис. 1.19, *б*), расчет переходных процессов может быть проведен операторным методом в соответствии с рекомендациями к задаче 1.4.2.

2. При решении *без эквивалентного устранения* ИСЭ вначале находят независимые начальные условия $u_C(0-)$, $i_L(0-)$. Затем для $t > 0$ составляют *систему независимых уравнений* в цепи в t-области, преобразуют систему по Лапласу, решают ее и находят изображение, а затем оригинал реакций. Например, операторное уравнение для второго контура цепи рис. 1.19, *а*

$$-U(s) + \left[\frac{1}{sC}I_1(s) + \frac{u_C(0-)}{s}\right] + [sL_1I_1(s) - L_1i_1(0-)] + [sMI_2(s) - Mi_2(0^-)] + \\ + [sL_2I_2(s) - L_2i_2(0-)] + [sMI_1(s) - Mi_1(0-)] = 0,$$

причем $M = -|M| < 0$, поскольку включение встречное.

1.5.5. Рекомендации.

1. При расчете цепей *с зависимыми источниками* можно использовать *любой метод расчета*; к уравнениям метода *добавляют* уравнения зависимых источников.

2. При использовании МКТ для расчета цепей с четырехполюсниками (в том числе в виде ИСЭ) рекомендуется, используя z-форму уравнений, *заменить четырехполюсник схемой замещения* рис. 1.20, *а*.

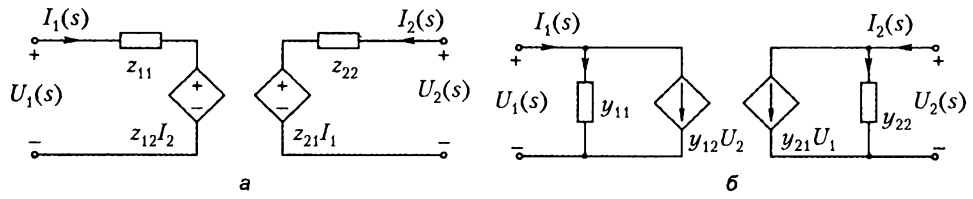


Рис. 1.20

3. При использовании МУН для расчета цепей с четырехполюсниками (в том числе в виде ИСЭ) рекомендуется, используя y-форму уравнений, заменить четырехполюсник схемой замещения рис. 1.20, *б*.

1.5.6. При использовании МУН для расчета цепей с ОУ учесть, что

1) входные *токи* ОУ равны *нулю*;

2) напряжение между входами *идеального* ОУ $u_{вх}^{мУ} = 0$, т. е. узловые напряжения входных выводов ОУ одинаковы; *уравнения* МУН *для выходных узлов* ОУ с неизвестными выходными токами ОУ могут быть *отброшены* (уравнение $u_{вх}^{мУ} = 0$ можно рассматривать как *дополнительное* уравнение МУН);

3) если один из входов ОУ «заземлен» (т. е. непосредственно соединен с базисным узлом), то *узловое напряжение второго входа идеального* ОУ *равно нулю*;

4) *в случае неидеальных* ОУ с конечным усилением дополнительное уравнение МУН имеет вид $u_{вых}^{мУ} = k_{мУ} u_{вых}^{мУ} = k_{мУ}(u_{вх2}^{мУ} - u_{вх1}^{мУ})$.

1.5.7. Расчет характеристик фильтров различных типов описан в [1, с. 271–284]; см. также [4, с. 255–261].

1.5.8. Методика синтеза *LC*- и *RC*-двухполюсников, а также реализация ПФ с отрицательными нулями и полюсами при использовании схем с ОУ изложена в [1, с. 291–298]; см. также [4, с. 261–268].

1.5.9. Методика проектирования пассивных *LC*-четырехполюсников по заданной ПФ приведена в [1, с. 360–375]; см. также [4, с. 268–269, 272–274].

1.5.10. Методика синтеза *RC*-четырехполюсников лестничной структуры рассмотрена в [1, с. 375–383]; см. также [4, с. 271–272, 274–275].

1.5.11. Методика расчета процессов в линии без потерь описана в **[1, с. 311–313],[4, с. 254–255].**

1.5.12. Использовать указания к задаче **1.5.8.**

1.5.13. Методика расчета согласованного режима в симметричном ЧП описана в **[4, с. 250–251].**

Задачи к теме 1.6 «Расчет дискретных и нелинейных цепей»

1.6.1. Необходимо учесть следующее:

1. *Передаточную функцию ДЦ* $H(z)$ определяют по передаточной функции прототипа-аналога обычно по формуле: $H(z) = H(s)$ при $s = 2(z-1)/[T(z+1)]$, причем *частота дискретизации* $\omega_д = 2\pi/T$ должна быть много *больше* учитываемых *частот прототипа.*

2. Теорема *разложения*:

$$F(z) = B(z)/\Pi(z - z_k) = A_0 + \sum A_k z/(z - z_k) \div f(nT) = A_0 \delta_0(nT) + \sum A_k z_k^n \delta_1(nT).$$

Теорема *запаздывания*: $f(nT - mT) \div z^{-m} F(z)$.

3. *Таблица z*-преобразования:

$$\delta_0(nT) \div 1;\ a^n \delta_1(nT) \div z/(z-a);\ na^n \delta_1(nT) \div az/(z-a)^2,$$

откуда $\delta_1(nT) \div z/(z-1)$; $n\delta_1(nT) = z/(z-1)^2$.

4. Разностное уравнение ДЦ

$$a_0 f_2(nT) + a_1 f_2(nT - T) + \ldots + a_m f_2(nT - mT) = b_0 f_1(nT) + b_1 f_1(nT - T) + \ldots$$

связано с передаточной функцией ДЦ:

$$H(z) = F_2(z)/F_1(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots)/(a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_m z^{-m}),$$

причем $H_1(z) = H(z)\, z/(z-1)$.

5. Элементы линейных ДЦ: формулу $f_\Sigma(nT) = f_1(nT) + f_2(nT) + \ldots$ реализует *сумматор*; $f_2(nT) = af_1(nT)$ — масштабный *преобразователь*; $f_2(nT) = f_1(nT - T)$ — элемент *сдвига* на 1 шаг (z^{-1}).

6. *Численный* расчет ДЦ осуществляется либо по *разностному уравнению*, либо на основании формулы $F(z) = \sum f(nT)z^{-n}$ путем разложения $F(z)$ в *ряд Лорана* (по отрицательным степеням z) посредством деления полинома числителя $F(z)$ на полином знаменателя.

7. Примеры расчета ДЦ см. [1, с. 325–338], [4, с. 275–281]

1.6.2. Использовать указания к задаче 1.6.1.

Типовой пример: передаточная функция аналогового прототипа $H(s) = 2/[(s + 1)(s + 2)]$. Сравнить переходные характеристики аналоговой и соответствующей дискретной цепей в моменты $t = nT$.

Находим АЧХ цепи $A(\omega) = |H(j\omega)| = 2/\sqrt{(\omega^2 + 1^2)(\omega^2 + 2^2)}$; очевидно $A(\omega) \to 0$ при $\omega \to \infty$; полоса пропускания $\Delta\omega \approx 1$. Выбираем $\omega_{max} = 314 >>> \Delta\omega$, т. е. значениями АЧХ при $\omega > \omega_{max}$ пренебрегаем. Тогда *по теореме дискретизации* $\omega_д = 2\omega_{max} = 628$; период дискретизации $T = 2\pi/\omega_д = 0{,}01$, что соответствует 1/50 от наименьшей постоянной времени цепи $\tau_{min} = 1/2$.

Передаточная функция ДЦ

$$H(z) = H(s)\Big|_{s = \frac{2(z-1)}{T(z+1)}} = \frac{2}{(200\frac{z-1}{z+1} + 1)(200\frac{z-1}{z+1} + 2)} \cong \frac{0{,}5 \cdot 10^{-4}(z+1)^2}{(z - 0{,}99)(z - 0{,}98)};$$

находим переходную характеристику ДЦ:

$$H_1(z) = H(z)\frac{z}{z-1} = \frac{0{,}5 \cdot 10^{-4}(z+1)^2 z}{(z - 0{,}99)(z - 0{,}98)(z-1)} = A_0 + \frac{A_1 z}{z - 0{,}99} + \frac{A_2 z}{z - 0{,}98} + \frac{A_3 z}{z-1},$$

причем $A_0 = H_1(0) = 0$; $A_1 = H_1(z)(z - 0{,}99)/z \cong -2$ при $z = 0{,}99$; $A_2 = H_1(z)(z - 0{,}98)/z \cong 1$ при $z = 0{,}98$; $A_3 = H_1(z)(z-1)/z = 1$ при $z = 1$. Таким образом, $h_1(nT) \cong \cong [-2 \cdot 0{,}99^n + 1 \cdot 0{,}98^n + 1 \cdot 1^n]\delta_1(nT)$.

Сравним результат с переходной характеристикой *аналоговой* цепи:

$$H_1(s) = H(s)/s = 2/[(s+1)(s+2)s] = -2/(s+1) + 1/(s+2) + 1/s \div h_1(t) =$$
$$= [-2e^{-t} + 1e^{-2t} + 1]\delta_1(t).$$

В дискретные моменты времени $t = nT = 0{,}01n$ получим

$$h_1(0{,}01n) = [-2e^{-0{,}01n} + 1e^{-0{,}02n} + 1]\delta_1(0{,}01n),$$

откуда с учетом $e^{-\alpha} \cong 1 - \alpha$ для малых α находим

$$h_1(0{,}01n) \cong [-2 \cdot 0{,}99^n + 1 \cdot 0{,}98^n + 1]\delta_1(0{,}01n),$$

что соответствует полученному выражению $h_1(nT)$ для ДЦ.

1.6.3. Рекомендации.

1. *Формула Лагранжа* для получения уравнения полинома, проходящего через n точек $\{x_k, y_k\}$ ВАХ нелинейного R-элемента:

$$x(y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \frac{(y-y_1)\ldots(y-y_{k-1})(y-y_{k+1})\ldots(y-y_n)}{(y_k-y_1)\ldots(y_k-y_{k-1})(y_k-y_{k+1})\ldots(y_k-y_n)}$$

причем здесь x, y — это u_R, i_R или i_R, u_R.

2. Алгоритм приближенного численного решения *нелинейного функционального уравнения* $\Phi(x) = 0$ по методу *Ньютона—Рафсона*:

$$x_k = x_{k-1} + \Delta x_k = x_{k-1} - \Phi(x_{k-1})/\Phi'(x_{k-1}).$$

3. См. также примеры расчета в 2.25.

1.6.4. Примеры графического расчета нелинейных R-цепей см. в 2.25.

1.6.5. Пример аналитического расчета нелинейных R-цепей методом кусочно-линейных схем см. в 2.25.

1.6.6. О расчете переходных процессов методом припасовывания (кусочно-линейной аппроксимации) см. [1, с. 356–357; 4, с. 289–290].

1.6.7. Рекомендации: 1) расчет установившегося периодического режима в нелинейной динамической цепи описан в [1, с. 358–359; 4, с. 290–293]; 2) при решении нелинейных функциональных уравнений использовать указания к задаче 1.6.3.

1.6.8. О синтезе ВАХ нелинейных R-элементов кусочно-линейными диодными моделями см. [1, с. 352–355];[4, с. 287 – 288].

2. Практикум по теории электрических цепей

Введение

В этом разделе детально излагается материал большинства практических занятий по теории цепей. «Практикум» в первую очередь предназначен для студентов заочной и вечерней форм обучения, а также для иностранных студентов, которым сложно усвоить материал непосредственно во время аудиторных занятий. В то же время он, безусловно, будет полезен всем студентам, поскольку по каждой теме вначале излагаются базовые сведения и формулы, которые необходимо усвоить, а затем разбираются примеры типовых задач и приводятся контрольные вопросы. В заключение дополнительно акцентируется внимание на основных положениях, которые *абсолютно необходимо* знать и понимать.

2.1. Анализ простых резистивных цепей

2.1.1. Исходные понятия

К простым резистивным цепям относятся цепи относительно несложной структуры с *единственным* источником напряжения (или тока) и резистивными элементами. Считаем известными два закона Кирхгофа и закон Ома, который связывает ток и напряжение резистивного элемента: $u = Ri$ или $i = Gu$, где u — напряжение (в вольтах), i — ток (в амперах), R — сопротивление (в омах), $G = 1/R$ — проводимость (в сименсах).

Первый закон, или *закон токов Кирхгофа* (ЗТК), говорит о том, что в любом узле в любой момент времени алгебраическая сумма токов равна нулю: $\sum i_k = 0$, где k — номер ветви, присоединенной к узлу. Условимся *вытекающим* из узла токам приписывать *знак* «+», а втекающим в узел — знак «–».

Второй закон, или *закон напряжений Кирхгофа* (ЗНК), говорит о том, что в любом контуре в любой момент времени алгебраическая сумма напряжений равна нулю: $\sum u_k = 0$. При этом напряжение элемента берут со знаком «+», если при обходе контура *вначале* «проходим» *положительную полярность* элемента, а затем отрицательную. Обход контура можно выполнять в *произвольном* направлении.

2.1.2. Примеры типовых задач

Пример 2.1.1. $u = 18$ В, $R_1 = 3$ Ом, $R_2 = 6$ Ом (рис. 2.1.1). Найти i, $R_э$, u_2.

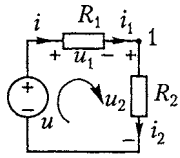


Рис. 2.1.1

Вначале в схеме *всегда необходимо* показать направления токов в элементах и полярности напряжений.

Вспомним, что за положительное направление тока принимается направление движения положительных зарядов. Следовательно, ток от вывода (полюса) «+» источника через R_1 и R_2 будет протекать к выводу «–» источника, а внутри источника будет протекать от «–» к «+». В схеме элементы соединены один за другим *без разветвлений* и по схеме протекает *один и тот же ток*, что следует из ЗТК для устранимого узла 1. Такое соединение называется *последовательным*. Итак, по ЗТК при выбранных направлениях $i = i_1 = i_2$.

Полярность напряжения *резистивного* элемента *всегда согласована* с направлением тока, т. е. в R-элементах ток протекает от «+» к «–». У источников может быть выбрана как согласованная, так и несогласованная полярность. В схеме рис. 2.1.1 *источник* имеет *несогласованную* полярность.

ЗНК для рассматриваемой схемы при обходе контура по часовой стрелке: $u_1 + u_2 - u = 0$. В это уравнение подставим уравнения закона Ома: $R_1 i + R_2 i = u$, т. е. $(R_1 + R_2)i = u$, откуда

$$i = u/(R_1 + R_2) = 18/9 = 2\text{A}. \qquad (2.1.1)$$

Формуле (2.1.1) можно сопоставить схему на рис. 2.1.2, в которой $i = u/R_э$. Ток i в обеих схемах одинаков, если $R_э = R_1 + R_2 = 9$ Ом. Таково условие эквивалентного преобразования схемы рис. 2.1.1 в схему 2.1.2. Таким образом, при последовательном соединении сопротивления R-элементов суммируются.

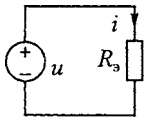


Рис. 2.1.2

Поставим новую задачу: найдем напряжение u_2. По закону Ома

$$u_2 = R_2 i_2 = 12. \qquad (2.1.2)$$

Но этот результат можно получить без непосредственного вычисления тока. Если (2.1.1) подставить в (2.1.2), то

$$u_2 = uR_2/(R_1 + R_2). \qquad (2.1.3)$$

Эту формулу называют *формулой делителя напряжения* (ФДН).

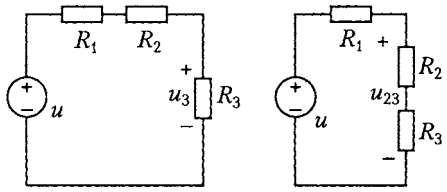


Рис. 2.1.3

Вопрос 1. Как будут выглядеть ФДН для схем, изображенных на рис. 2.1.3, *а* и рис. 2.1.3, *б*?

Из (2.1.3) получим коэффициент передачи по напряжению

$$H_U = u_2/u = R_2/(R_1 + R_2), \qquad (2.1.4)$$

т. е. согласно (2.1.4), H_U *не зависит от значения напряжения источника*, а определяется только величинами резистивных элементов. Если этот коэффициент известен, то при любом воздействии реакция определяется по выражению $u_2 = uH_u$.

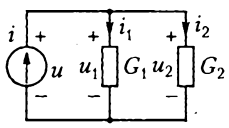


Рис. 2.1.4

Пример 2.1.2. Дана цепь (рис. 2.1.4): $i = 10$ А, $G_1 = 2$ См, $G_2 = 3$ См. Найти $G_э$, u, i_2.

Вначале проставим положительные направления токов и полярности напряжения элементов схемы. Источник тока задает направление движения положительных зарядов. В этой схеме все элементы присоединены *к одним и тем же двум узлам*, а *напряжение* на всех элементах *одинаково*, что следует из ЗНК для любого контура. Это и является *признаком параллельного соединения*. Итак, $u = u_1 = u_2$, причем *полярность* напряжения *единственного источника несогласована*, как и в примере 2.1.1.

По ЗТК $i_1 + i_2 - i = 0$. Дополнив это уравнение вольт-амперными зависимостями, получим

$$G_1 u + G_2 u = i, \qquad (2.1.5)$$

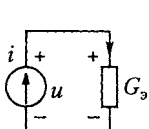


Рис. 2.1.5

т. е. $(G_1 + G_2)u = i$. Если введем эквивалентную проводимость $G_э = G_1 + G_2$, то данной схеме можно сопоставить ей эквивалентную (рис. 2.1.5) с одним резистивным элементом. Иногда проводимость $G_э$ (так же, как $R_э$ в схеме на рис. 2.1.2) называют соответственно *входной проводимостью* $G_{вх}$, а $R_э$ — *входным сопротивлением* $R_{вх}$. Из (2.1.5) напряжение

$$u = i/(G_1 + G_2) = 2\ \text{В}. \qquad (2.1.6)$$

Следовательно, ток

$$i_2 = G_2 u = 6\ \text{А}. \qquad (2.1.7)$$

Ток i_2 можно получить и без непосредственного вычисления напряжения. Для этого, подставив (2.1.6) в (2.1.7), приходим к *формуле делителя токов* (ФДТ):

$$i_2 = iR_1/(R_1 + R_2) = iG_2/(G_2 + G_1). \qquad (2.1.8)$$

Вопрос 2. Как записать ФДТ для схем рис. 2.1.6, *а* и *б*? Из (2.1.8) легко получить коэффициент передачи по току:

$$H_I = i_2/i = G_2/(G_1 + G_2) = R_1/(R_1 + R_2).$$

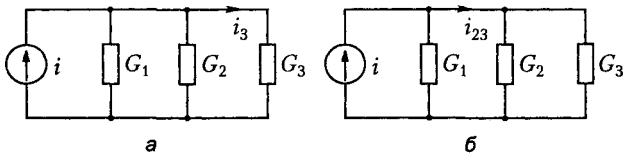


Рис. 2.1.6

Пример 2.1.3. Дана цепь (рис. 2.1.7): $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 3$ Ом, $R_3 = 6$ Ом, $u = 12$ В. Определить $R_{вх}$, токи ветвей.

Как *всегда, вначале* расставим в схеме направления токов элементов и полярности напряжений.

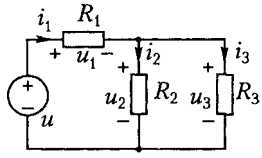


Рис. 2.1.7

Вопрос 3. Какова «логика» направления токов в цепях с *единственным* источником? Как соединены элементы схемы на рис. 2.1.2?

Заметим, что на R_2 и R_3 напряжение одно и то же, так как эти элементы соединены параллельно и их положительные полярности напряжений «собраны» у одного и того же узла. Имеем $G_{23} = G_2 + G_3$, откуда $R_{23} = R_2 R_3/(R_2 + R_3) = 2$ Ом.

Изобразим эквивалентную схему (рис. 2.1.8), в которой все элементы соединены последовательно. От этой схемы легко перейти к схеме с одним резистивным элементом $R_{вх} = R_1 + R_{23} = 4$ Ом. Ток $i_1 = u/R_{вх} = 3$ А.

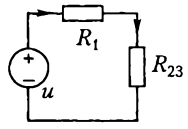


Рис. 2.1.8

Если вернуться к схеме рис. 2.1.7 и применить ФДТ, то $i_3 = i_1 R_2/(R_2 + R_3) = 2$ А. По ЗТК $i_2 = i_1 - i_3 = 1$ А.

Вопрос 4. Почему будет *ошибкой* искать i_1 по выражению $i_1 = u/R_1$?

Вопрос 5. Как найти u_3 по ФДН без определения токов ветвей?

Пример 2.1.4. Дана цепь (рис. 2.1.9). Известны параметры цепи, т. е. значения сопротивлений. Определить $R_{a,б}$.

Решение. Найти $R_{a,б}$ — это значит *эквивалентно преобразовать* схему так, чтобы создать схему с одним сопротивлением $R_{a,б}$ подключенным к точкам *а* и *б*. Начнем с обозначения остальных узлов. Оказалось, что их в схеме всего два. Дадим

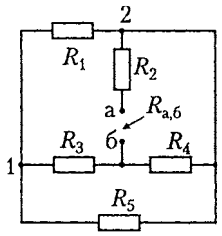


Рис. 2.1.9

им номера 1 и 2. Теперь легче разобраться, какие элементы как соединены между собой. Но лучше всего перечертить схему так, чтобы она выглядела наиболее удобно для анализа (рис. 2.1.10).

Очевидно,

$$R_{а,б} = R_2 + \frac{R_4(R_3 + (R_1R_5)/(R_1 + R_5))}{R_4 + R_3 + (R_1R_5)/(R_1 + R_5)}$$

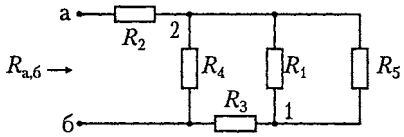


Рис. 2.1.10

Пример 2.1.5. Дана цепь (рис. 2.1.11): $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 8$ Ом. Определить $R_{вх}$.

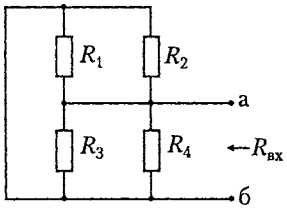


Рис. 2.1.11

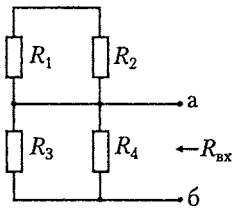


Рис. 2.1.12

Решение. Внешние выводы обозначим буквами *а* и *б*. При внимательном рассмотрении видно, что других узлов в схеме нет. Это значит, что все четыре сопротивления соединены параллельно.

Так как все сопротивления одинаковы, легко доказать, что входное сопротивление в четыре раза меньше, чем любое из входящих в соединение. Итак, $R_{вх} = 2$ Ом.

Пример 2.1.6. Дана цепь (рис. 2.1.12): $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 8$ Ом. Определить $R_{вх}$.

Решение. Обозначим внешние выводы буквами *а* и *б*. Если подать питание со стороны входа, т. е. со стороны узлов *а* и *б*, то ток потечет только через R_3 и R_4, следовательно, $R_{вх} = R_3R_4/(R_3 + R_4) = 4$ Ом.

Вопрос 6. Почему через R_1 и R_2 ток не потечет?

2.1.3. Заключение

В результате усвоения материала темы необходимо знать, что такое источник напряжения (тока), что такое ЗТК, ЗНК, закон Ома, согласованная (несогласованная) полярность, выбор «логичных» направлений токов в цепях с единственным источником, признаки последовательного (параллельного) соединения, эквивалентное (входное) сопротивление, ФДТ, ФДН, коэффициент передачи по напряжению, по току.

2.2. Метод уравнений Кирхгофа

2.2.1. Исходные понятия

Число независимых уравнений по закону токов *Кирхгофа* (ЗТК) $N_{ЗТК} = N_у - 1$, где $N_у$ — число узлов схемы.

Число независимых уравнений по закону напряжений Кирхгофа (ЗНК) $N_{ЗНК} = N_В - N_у + 1 = N_я$, где $N_В$ — число ветвей схемы, $N_я$ — число ячеек (в «плоской» цепи). Чтобы составить $N_В$ уравнений с $N_В$ неизвестными, уравнения по законам Кирхгофа должны быть *дополнены уравнениями по закону Ома* для R-элементов.

2.2.2. Примеры типовых задач

Пример 2.2.1. Дана цепь (рис. 2.2.1): $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $u_1 = 16$ В, $i_4 = 2$ А. Необходимо определить неизвестные токи и напряжения элементов, а также мощности всех элементов цепи.

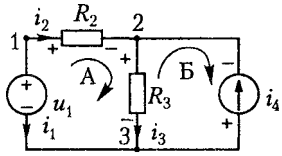


Рис. 2.2.1

Сначала в схеме *всегда необходимо* показать условно положительные направления токов ветвей и полярности напряжений. При действии нескольких источников заранее трудно предсказать истинные направления движения положительных зарядов (токов) и положительные полярности напряжений. Поэтому в схеме показывают предполагаемые направления (таким образом, фактически *выбор* во многом является *произвольным*). Напряжения R-элементов *всегда согласованы* с токами, т. е. внутри каждого элемента ток протекает от «+» к «–». *У источников* может быть *как согласованная* полярность напряжения (см., например, источник тока на рис. 2.2.1), *так и несогласованная* (см. источник напряжения на рис. 2.1.7).

Для формирования уравнений необходимо обозначить узлы и контуры.

Уравнения по ЗТК: $N_{ЗТК} = N_у - 1 = 3 - 1 = 2$. Для узлов 1, 2 соответственно имеем:

$$\begin{cases} i_1 + i_2 = 0; \\ -i_2 + i_3 - i_4 = 0. \end{cases}$$

Уравнения по ЗНК: $N_{ЗНК} = N_В - N_у + 1 = 4 - 3 + 1 = 2$. Для контуров А, Б имеем:

$$\begin{cases} u_2 + u_3 - u_1 = 0; \\ -u_3 - u_4 = 0. \end{cases}$$

Указанные уравнения нужно дополнить вольт-амперными характеристиками резистивных элементов (по закону Ома). При этом можно получить два вида уравнений:

$$\begin{cases} -i_2 + i_3 = i_4 \\ R_2 i_2 + R_3 i_3 = u_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} -G_2 u_2 + G_3 u_3 = i_4; \\ u_2 + u_3 = u_1. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Решение первой из систем (2.2.1)

$$\begin{cases} -i_2 + i_3 = 2; \\ 2i_2 + 3i_3 = 16 \end{cases}$$

дает $i_2 = 2$ А, $i_3 = 4$ А. После этого находим $u_2 = 4$ В, $u_3 = 12$ В, $i_1 = -i_2 = -2$ А. Знак «–» говорит о том, что предварительное направление тока i_1 соответствует направлению движения $q-$ и не соответствует $q+$. Кроме того, элементы 1 и 2 соединены *последовательно*, поэтому выбор различных направлений i_1 и i_2 также *неудобен*.

Далее находим $u_4 = -u_3 = -12$ В. Здесь истинная положительная полярность u_4 противоположна предполагаемой (элементы 3 и 4 соединены параллельно, поэтому выбор несогласованных между собой их напряжений является неудачным).

Вычисляем мощности p_k элементов схемы по формуле $p_k = u_k i_k$ при согласованной полярности и $p_k = -u_k i_k$ *при несогласованной*. Поскольку в схеме рис. 2.2.1 полярности всех элементов согласованы с направлениями токов элементов, то

$$\begin{aligned} p_1 &= u_1 i_1 = -16 \cdot 2 = -32 \text{ ет}; \\ p_2 &= u_2 i_2 = R_2 i_2^2 = G_2 u_2^2 = 8 \text{ ет}; \\ p_3 &= u_3 i_3 = 48 \text{ ет}; \\ p_4 &= u_4 i_4 = 24 \text{ ет}. \end{aligned}$$

Убеждаемся, что в цепи выполняется *баланс мощностей*:

$$\sum p_k = 0, \tag{2.2.2}$$

где $k = 1, 2, 3, 4$.

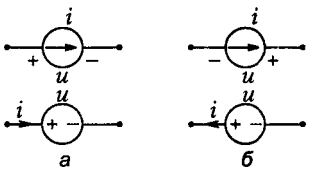


Рис. 2.2.2

Суммарная мощность должна равняться нулю, так как (2.2.2) является следствием закона сохранения энергии (при $p_k > 0$ k элемент потребляет энергию, при $p_k < 0$ — генерирует энергию в цепь). *Для резистивных* элементов *мощность всегда положительна* ($p_R = u_R i_R = R i_R^2$). Физически это говорит о необратимом преобразовании электромагнитной энергии в тепловую. *Мощность источника* вычисляется по формуле $p = ui$ (см. рис. 2.2.2, *а*), если ток и напряжение *согласованы*, т. е. в рассматриваемом элементе ток протекает от «+» к «–», и по формуле $p = -ui$ (см. рис. 2.2.2, *б*), если напряжение элемента и его ток *не согласованы*.

Пример 2.2.2. Дана цепь (рис. 2.2.3): $R_2 = 1/2$ Ом, $R_3 = 1/3$ Ом, $u_1 = 15$ В, $u_4 = 10$ В, $i_6 = 5$ А. Найти i_k, u_k, p_k.

Изображаем на схеме предполагаемые направления токов, полярности напряжений элементов и обозначаем номера узлов. В схеме 4 узла, следовательно число

уравнений по ЗТК равно 3. В качестве контуров выбираем ячейки (но такой выбор не является обязательным; главное, что независимых контуров два — по числу ячеек).

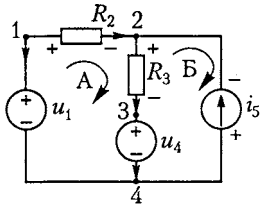


Рис. 2.2.3

Итак, по законам Кирхгофа необходимо записать 5 независимых уравнений. Однако еще в предыдущем примере первоначально решалась не вся система из четырех уравнений, а только система из двух уравнений; остальные уравнения использовались позже. Дело в том, что обычно реакцию источников (ток источника напряжения и напряжение источника тока) удобнее находить из уравнения Кирхгофа тогда, когда в уравнении предварительно вычислены все остальные составляющие. Поэтому установим правило формирования так называемой неполной системы уравнений Кирхгофа.

В *неполную систему не следует включать* уравнения по ЗТК для тех узлов, в которых есть ветви с источниками напряжения (ИН), и уравнения по ЗНК для тех контуров, в которых есть ветви с источниками тока (ИТ).

В нашем примере в неполную систему по этому правилу не должны войти уравнения для узлов 1, 3 и 4, а также для контура Б. При этом *число уравнений* получается *равным числу резистивных* элементов. Неполная система (с учетом подстановки закона Ома) после очевидных преобразований будет

$$\begin{cases} -i_2 + i_3 = i_5; \\ R_2 i_2 + R_3 i_3 = u_1 - u_4, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} -G_2 u_2 + G_3 u_3 = i_5; \\ u_2 + u_3 = u_1 - u_4, \end{cases}$$

где $G_2 = 2$ См, $G_3 = 3$ См.

Решение второй системы дает $u_2 = 2$ В, $u_3 = 3$ В. После этого, применяя закон Ома и неиспользованные уравнения Кирхгофа, получим оставшиеся величины. Результаты расчета удобно сводить в таблицу.

Ветвь	1	2	3	4	5
u_k, В	15	2	3	10	–13
i_k, А	–4	4	9	9	5
p_k, Вт	–60	8	27	90	–65

Пример 2.2.3. Дана цепь (рис. 2.2.4). Составить неполную систему уравнений Кирхгофа.

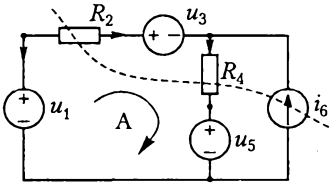


Рис. 2.2.4

В этой схеме, где два R-элемента (т. е. $N_R = 2$), достаточно использовать два уравнения Кирхгофа: одно по ЗНК для контура А, однако по ЗТК ни для одного узла уравнение по установленному выше правилу написать нельзя. Вспомним, что уравнения ЗТК

справедливы не только для узлов, но и *для сечений*. Проведем сечение (см. пунктир на рис. 2.2.3) через резистивные элементы и ИТ. Тогда искомая система будет:

$$\begin{cases} -i_2 + i_4 = i_6; \\ R_2 i_2 + R_4 i_4 = u_1 - u_3 - u_5. \end{cases}$$

2.2.3. Заключение

В результате изучения материала необходимо усвоить порядок расчета цепей, знать число независимых уравнений по ЗТК и по ЗНК, правило знаков в уравнениях, правило формирования систем уравнений для нахождения реакций, уметь выбирать независимые контуры и узлы, знать формулы мощности элемента при согласованной и несогласованной полярностях, формулу баланса мощностей, уметь трактовать полученные значения i_k, u_k, p_k.

2.3. Метод пропорциональных величин, метод наложения

2.3.1. Исходные понятия

Метод пропорциональных величин основан на свойстве однородности линейных цепей, т. е. на свойстве пропорциональности воздействия и реакции: если в цепи с *единственным* источником величину воздействия изменить в k раз, то и реакция изменится в k раз.

Метод наложения использует принцип аддитивности (суперпозиции): реакция в цепи при действии нескольких источников может быть найдена как *алгебраическая сумма* реакций, получающихся при действии каждого источника в отдельности.

2.3.2. Примеры типовых задач

Пример 2.3.1. Дана цепь (рис. 2.3.1); $u_0 = 32$ В; $R_k = 2$ Ом.

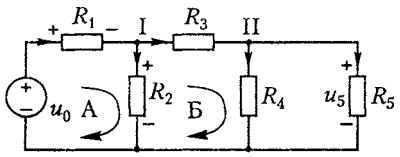


Рис. 2.3.1

Определить методом пропорциональных величин коэффициенты передачи напряжения $H_{U5\text{-}0} = u_5/u_0$, $H_{U2\text{-}0} = u_2/u_0$, входную проводимость $G_{вх}$ и проводимость передачи $G_{3\text{-}0} = i_3/u_0$, а также i_2, i_5, u_3.

Если известна функция передачи напряжения $H_{U5\text{-}0}$, то она не изменится и при другом уровне напряжения источника, т. е. $H_{U5\text{-}0} = u_5/u_0$. Поэтому удобно положить $u'_5 = 1$ тогда $i'_5 = G_5 u'_5 = G_5 = 1/2$; далее $u'_4 = u'_5 = 1$; $i'_4 = G_4 u'_4 = 1/2$. По ЗТК для второго узла $i'_3 = i'_4 + i'_5 = G_5 + G_4 = 1$. По закону Ома $u'_3 = R_3 i'_3 = R_3(G_4 + G_5) = 2$.

По ЗНК из контура Б: $u'_2 = u'_3 + u'_4 = R_3(G_4 + G_5) + 1 = 3$, далее $i'_2 = G_2 u'_2 = G_2[R_3(G_4 + G_5) + 1] = 3/2$.

По ЗТК для первого узла $i'_1 = i'_2 + i'_3 = G_2 R_3 G_4 + G_2 R_3 G_5 + G_2 + G_4 + G_5 = 2{,}5$; затем находим $u'_1 = R_1 i'_1 = R_1(G_2 + G_4 + G_5 + G_2 R_3 G_4 + G_2 R_3 G_5) = 5$.

В контуре А: $u'_0 = u'_1 + u'_2 = R_1(G_2 + G_4 + G_5 + G_2 R_3 G_4 + G_2 R_3 G_5) + R_3 G_4 + R_3 G_5 + 1 = 8$, следовательно, коэффициент пропорциональности $k = u_0/u'_0 = 32/8 = 4$. Тогда $i_2 = k i'_2 = 6$; $i_5 = k i'_5 = 2$; $u_3 = k u'_3 = 8$.

Далее получим

$$H_{U5\text{-}0} = 1/u_0' = 1/8;\ G_{вх} = 1/R_{вх} = i_1/u_0 = i_1'/u_0' = 5/16;$$
$$G_{3\text{-}0} = i_3'/u_0' = 1/8;\ H_{U2\text{-}0} = u_2'/u_0' = 3/8.$$

Естественно, зная заранее вычисленные входные и передаточные коэффициенты R-цепей $H_R = f_2(t)/f_1(t)$, где f_2 — искомая реакция, f_1 — воздействие, легко определить соответствующие реакции при задании любого воздействия.

Вопрос 1. Как записать выражение для $G_{5\text{-}0}$?

Пример 2.3.2. Дана цепь (рис. 2.3.2): $R_2 = 2$ Ом; $R_3 = 3$ Ом; $u_1 = 5$ В; $i_4 = 5$ А. Методом наложения определить токи R-элементов.

В исходной схеме вначале обозначаем условно положительные направления токов. Изобразим две схемы (*по числу источников*), в каждой из которых оставим по *единственному* источнику (рис. 2.3.3, *а* и *б*).

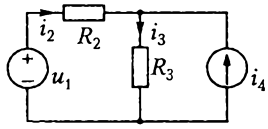


Рис. 2.3.2

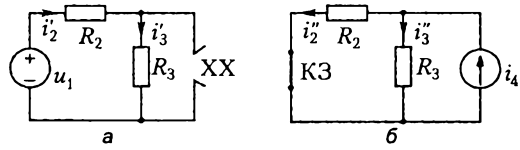


Рис. 2.3.3

Исключение ИТ из схемы рис. 2.3.3, *а* эквивалентно замене его разорванным участком цепи — холостым ходом (ХХ), поскольку $i_4 = 0$. Исключение ИН из схемы рис. 2.3.3, б (т. е. $u_1 = 0$) эквивалентно замене его короткозамкнутым участкам цепи (КЗ). Каждая из этих схем проще для расчета, чем заданная. Так, в схеме на рис. 2.3.3, *а* все элементы соединены последовательно, а на рис. 2.3.3, *б* — параллельно. При *единственном* источнике в каждой схеме можно проставить естественное (*логичное*) положительное направление тока элемента.

В схеме рис. 2.3.3, *а*

$$i_2' = i_3' = u_1/(R_1 + R_3) = 1 \text{ А},$$

в схеме рис. 2.3.3, *б*

$$i_2'' = i_4 R_3/(R_2 + R_3) = 3 \text{ А};\ i_3'' = i_4 - i_2'' = 2 \text{ А}.$$

Для нахождения токов исходной схемы нужно сравнить принятое в ней положительное направление искомого тока с направлениями его составляющих в схемах рис. 2.3.3. В результате

$$i_2 = i_2' - i_2'' = -2 \text{ А},\ i_3 = i_3' + i_3'' = 3 \text{ А}.$$

2.3.3. Заключение

Необходимо полностью освоить особенности метода пропорциональных величин как простейшего метода расчета цепей лестничной структуры с *единственным* ис-

точником: логичный выбор направлений (чтобы использовать лишь положительные величины); строго последовательный переход в расчете от элемента к элементу; расчет коэффициента пропорциональности, любой реакции и любого коэффициента H_R резистивной цепи. Необходимо знать, что такое H_R, почему H_R не зависит от значения воздействия и что такое свойство однородности (пропорциональности) линейных цепей.

Необходимо полное понимание метода наложения, его эквивалентных схем при расчете реакций от действия каждого источника в отдельности, необходимо уметь объяснять как замену исключаемого источника на КЗ (или на ХХ), так и причины изменения исходных направлений некоторых из реакций при расчете промежуточных схем с *единственным* источником, а также причины *алгебраического суммирования* составляющих реакции, знать достоинства метода (обычно это простота расчета) и недостаток (громоздкость в случае большого числа источников и схем сложной структуры).

2.4. Методы контурных токов и узловых напряжений

2.4.1. Исходные понятия

Расчет сложной электрической цепи можно произвести с помощью уравнений, составленных только по ЗНК, введя понятие *контурных токов*. При этом число исходных уравнений метода контурных токов (МКТ) такое же, как в ЗНК, т. е. $N_{МКТ} = N_{ЗНК} = N_в - N_у + 1$, причем в цепях плоской структуры $N_{МКТ} = N_я$.

Если ввести понятие *узловых напряжений*, то задачу расчета цепи любой сложности можно решить с помощью только уравнений ЗТК методом узловых напряжений (МУН).

2.4.2. Примеры типовых задач

Пример 2.4.1. Дана цепь (рис. 2.4.1): $u_{01} = 10$ В; $i_{02} = 8$ А; $i_{06} = 6$ А; $R_k = 1$ Ом. Определить токи резистивных ветвей, использовав как МКТ, так и МУН.

Проставим в схеме условно положительные направления токов R-элементов. Удобно формировать уравнения МКТ, если все источники являются источниками напряжения. Поэтому изобразим рабочую схему для использования МКТ, в которой *источники тока преобразованы в эквивалентные источники напряжения* (рис. 2.4.2), причем $u_{02} = R_2 i_{02} = 8$ В; $u_{06} = R_6 i_{06} = 6$ В.

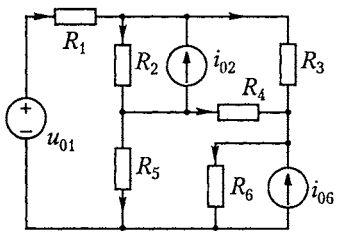


Рис. 2.4.1

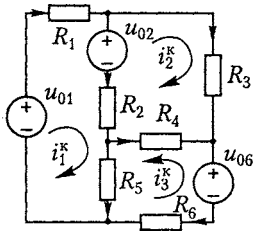


Рис. 2.4.2

В схеме 6 резистивных элементов, так что по законам Кирхгофа потребуется *минимум шесть* уравнений. Решение методом наложения тоже является трудоемким. В схеме 3 ячейки, следовательно, по ЗНК можно составить три уравнения. Выберем ячейки в качестве независимых контуров. Считаем, что *в каждом независимом контуре* протекает соответствующий *контурный ток* (выбор направления которого *произволен*).

Формальная система уравнений МКТ выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} R_{11}i_1^к + R_{12}i_2^к + R_{13}i_3^к = u_1^к; \\ R_{21}i_1^к + R_{22}i_2^к + R_{23}i_3^к = u_2^к; \\ R_{31}i_1^к + R_{32}i_2^к + R_{33}i_3^к = u_3^к. \end{cases} \quad (2.4.1)$$

В системе (2.4.1) неизвестными являются контурные токи $i_1^к$, $i_2^к$, $i_3^к$. Сопротивление с одинаковыми индексами называется *собственным* сопротивлением соответствующего контура и определяется как *сумма всех сопротивлений данного контура*. Так $R_{11} = R_1 + R_2 + R_5 = 3$ Ом, $R_{22} = R_2 + R_3 + R_4 = 3$ Ом, $R_{33} = R_4 + R_5 + R_6 = 3$ Ом.

Сопротивление с различными индексами называется *взаимным*. Оно обтекается двумя контурными токами. При этом если контурные токи на взаимном сопротивлении *противоположны по направлению*, то ему приписывается *знак* «–». Если *направления* контурных токов *одинаковы*, то взаимное сопротивление записывается со *знаком* «+». Если контурами выбраны ячейки и контурные токи направлены *одинаково*, то *все взаимные сопротивления* будут *отрицательными*. В нашем примере: $R_{12} = R_{21} = -R_2 = -1$; $R_{13} = R_{31} = R_5 = 1$; $R_{23} = R_{32} = R_4 = 1$.

В правой части каждого уравнения записываются *контурные напряжения*, которые представляют собой алгебраическую сумму напряжений источников напряжения контура (причем правило знаков для ИН *обратно* используемому в ЗНК). Запишем систему уравнений в нашем примере:

$$\begin{cases} (R_1 + R_2 + R_5)i_1^к - R_2 i_2^к + R_5 i_3^к = -(-u_{01} + u_{02}); \\ -R_2 i_1^к + (R_2 + R_3 + R_4)i_2^к + R_4 i_3^к = u_{02}; \\ R_5 i_1^к + R_4 i_2^к + (R_4 + R_5 + R_6)i_3^к = u_{06}. \end{cases}$$

В правой части в первом уравнении напряжения источников учтены со знаком «–» перед скобками, так как эти напряжения перенесены направо в уравнении ЗНК. Решая систему уравнений, находим контурные токи: $i_1^к = 1{,}5$ А; $i_2^к = 3$ А; $i_3^к = 0{,}5$ А. По известным контурным токам легко вычисляется ток любой ветви (как алгебраическая сумма контурных токов в этой ветви): $i_1 = i_1^к = 1{,}5$ А; $i_3 = i_2^к = 3$ А; $i_4 = -i_3^к - i_2^к = -3{,}5$ А; $i_5 = i_1^к + i_3^к = 2$ А. С *особым вниманием* нужно находить (обычно по ЗТК) токи резистивных ветвей, которые «участвовали» в преобразовании источников. По схеме рис. 2.4.1 находим: $i_2 = i_1 + i_{02} - i_3 = 6{,}5$ А; $i_6 = i_4 + i_{06} + i_3 = 5{,}5$ А.

Решение на основании МУН.

Для формирования уравнений МУН ($N_{МУП} = N_{ЗТК} = N_У - 1$) нужно *источники напряжения преобразовать к эквивалентным источникам тока*. Изобразим рабочую схему для использования МУН (рис. 2.4.3), в которой $i_{01} = u_{01}/R_1 = 10$ А.

Уравнения МУН — это *фактически уравнения ЗТК*, в которых токи R-ветвей выражены по закону Ома. Укажем условно положительные направления токов ветвей. Обозначим все 4 узла схемы. Следовательно, по ЗТК будет 3 независимых уравнения. Один узел (все равно какой) примем базисным. Его напряжение счи-

тают равным нулю. Напряжения остальных узлов, *условно положительных относительно базисного*, называют узловыми напряжениями.

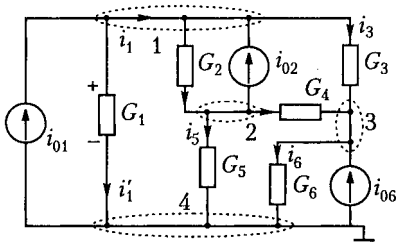


Рис. 2.4.3

Принимаем узел 4 базисным ($u_4^{\text{у}} = 0$). Тогда формальная система уравнений МУН:

$$\begin{cases} G_{11}u_1^{\text{у}} + G_{12}u_2^{\text{у}} + G_{13}u_3^{\text{у}} = i_1^{\text{у}}; \\ G_{21}u_1^{\text{у}} + G_{22}u_2^{\text{у}} + G_{23}u_3^{\text{у}} = i_2^{\text{у}}; \\ G_{31}u_1^{\text{у}} + G_{32}u_2^{\text{у}} + G_{33}u_3^{\text{у}} = i_3^{\text{у}}. \end{cases} \qquad (2.4.2)$$

В системе (2.4.2) искомыми являются узловые напряжения $u_1^{\text{у}}$, $u_2^{\text{у}}$, $u_3^{\text{у}}$. Проводимость, имеющая одинаковые индексы, называется *собственной проводимостью* узла: она равна сумме проводимостей R-ветвей, присоединенных к узлу. Так, $G_{11} = G_1 + G_2 + G_3 = 3$; $G_{22} = G_2 + G_5 + G_4 = 3$; $G_{33} = G_3 + G_4 + G_6 = 3$. Проводимости с разными индексами называются *взаимными*, они определяются проводимостями, которые «принадлежат» двум узлам и *всегда записываются со знаком* «−», т. е. $G_{12} = G_{21} = -G_2 = -1$; $G_{13} = G_{31} = -G_3 = -1$; $G_{23} = G_{32} = -G_4 = -1$. Справа в каждом уравнении записывается узловой ток, т. е. *алгебраическая сумма* токов *источников тока*, связанных с рассматриваемыми узлами (со знаком «+» учитываются *втекающие* токи). Запишем систему:

$$\begin{cases} (G_1 + G_2 + G_3)u_1^{\text{у}} - G_2u_2^{\text{у}} - G_3u_3^{\text{у}} = -(-i_{01} - i_{02}); \\ -G_2u_1^{\text{у}} + (G_2 + G_4 + G_5)u_2^{\text{у}} - G_4u_3^{\text{у}} = -i_{02}; \\ -G_3u_1^{\text{у}} - G_4u_2^{\text{у}} + (G_3 + G_4 + G_6)u_3^{\text{у}} = i_{06}. \end{cases}$$

Решение системы дает: $u_1^{\text{у}} = 8{,}5$ В; $u_2^{\text{у}} = 2$ В; $u_3^{\text{у}} = 5{,}5$ В. Если известны узловые напряжения, легко найти напряжения R-ветвей как разности напряжений (потенциалов) узлов, а затем и токи: $u_5 = u_2^{\text{у}} = 2$ В, $i_5 = G_5u_5 = 2$ А; $u_6 = u_3^{\text{у}} = 5{,}5$ В, $i_6 = G_6u_6 = 5{,}5$ А; $u_4 = u_2^{\text{у}} - u_3^{\text{у}} = 2$ В, $i_4 = G_4u_4 = 2$ А.

Напряжение $u_1^{\text{у}}$ в схеме рис. 2.4.3 приложено к элементу G_1, а в схеме рис. 2.4.1 $u_1^{\text{у}} = u_{01} - u_1$. Отсюда, $u_1 = u_{01} - u_1^{\text{у}} = 10 - 8{,}5 = 1{,}5$ В, тогда $i_1 = G_1u_1 = 1{,}5$ А. Этот же результат можно получить, если в схеме, приведенной на рис. 2.4.3, найти ток $i_1' = G_1u_1^{\text{у}} = 8{,}5$ А, после чего $i_1 = i_{01} - i_1' = 1{,}5$ А.

Во многих случаях уравнения МКТ и МУН могут быть значительно упрощены, как показано в следующих примерах.

Пример 2.4.2. Дана цепь (рис. 2.4.4): $u_{01} = 5$ В; $i_0 = 6$ А; $u_{04} = 10$ В; $R_k = 2$ Ом. Сформировать уравнения МКТ.

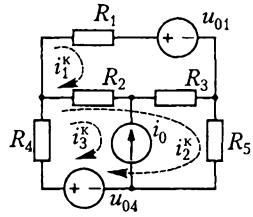


Рис. 2.4.4

В этой схеме ($N_{МКТ} = N_{ЗИК} = N_{ЯЧ} = 3$) источник i_0 не имеет параллельно подключенного резистивного элемента, поэтому *элементарным путем не может быть преобразован* в эквивалентный источник напряжения. Для решения подобных задач по МКТ рекомендуют ветвь с источником тока включать *только в один* из независимых контуров. На рис. 2.4.4 показан вариант выбора независимых контуров в этом случае. Для первого и второго контуров уравнения МКТ формируются традиционно, а для третьего контура записывают упрощенное (*вырожденное*) уравнение МКТ:

$$\begin{cases} (R_1 + R_2 + R_3) i_1^к - (R_2 + R_3) i_2^к - R_2 i_3^к = -u_{01}; \\ -(R_2 + R_3) i_1^к + (R_2 + R_3 + R_4 + R_5) i_2^к + (R_2 + R_4) i_3^к = u_{04}; \\ i_3^к = -i_0. \end{cases} \qquad (2.4.3)$$

Следует отметить, что при составлении уравнений МКТ нужно *быть внимательным при определении знака взаимного сопротивления.* Для решения системы (2.4.3) значение $i_3^к$ подставляем в первые два уравнения:

$$\begin{cases} (R_1 + R_2 + R_3) i_1^к - (R_2 + R_3) i_2^к = -u_{01} + R_2 i_3^к; \\ -(R_2 + R_3) i_1^к + (R_2 + R_3 + R_4 + R_5) i_2^к = u_{04} - (R_2 + R_4) i_3^к, \end{cases}$$

или численно

$$\begin{cases} 6 i_1^к - 4 i_2^к = -5 - 2 \cdot 6 = -17; \\ -4 i_1^к + 8 i_2^к = 10 + 4 \cdot 6 = 34. \end{cases}$$

Пример 2.4.3. Дана цепь (рис. 2.4.5): $u_0 = 5$ В; $i_{01} = 10$ А; $G_k = 0{,}5$ См. Сформировать уравнения МУН.

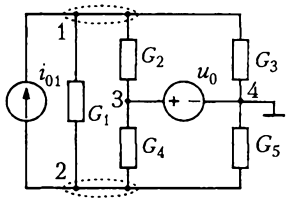


Рис. 2.4.5

В данной схеме ($N_{МУН} = N_{ЗТК} = N_У - 1 = 3$) источник напряжения u_0 не имеет последовательно включенного с ним резистивного элемента и поэтому *элементарным путем не может быть преобразован* в эквивалентный источник тока.

В этом случае *в качестве базисного узла* рекомендуется выбирать *один из двух узлов, к которым присоединен источник напряжения.* На рис. 2.4.5 при выборе $u_4^у = 0$ получим $u_3^у = u_0$ — упрощенное (*вырожденное*) уравнение МУН; система уравнений МУН имеет при этом вид

$$\begin{cases} (G_1 + G_2 + G_3) u_1^у - G_1 u_2^у - G_2 u_3^у = i_{01}; \\ -G_1 u_1^у + (G_1 + G_4 + G_5) u_2^у - G_4 u_3^у = -i_{01}; \\ u_3^у = u_0. \end{cases} \qquad (2.4.4)$$

Для решения (2.4.4) в первые два уравнения подставляем значения $u_3^{\text{у}}$, тогда

$$\begin{cases}(G_1 + G_2 + G_3)u_1^{\text{у}} - G_1 u_2^{\text{у}} = i_{01} + G_2 u_0; \\ -G_1 u_1^{\text{у}} + (G_1 + G_4 + G_5)u_2^{\text{у}} = -i_{01} + G_4 u_0, \end{cases}$$

или численно

$$\begin{cases}1{,}5u_1^{\text{у}} - 0{,}5u_2^{\text{у}} = 10 + 2{,}5 = 12{,}5; \\ -0{,}5u_1^{\text{у}} + 1{,}5u_2^{\text{у}} = -10 + 2{,}5 = 7{,}5. \end{cases}$$

Вопрос 1. Имеет ли преимущество МУН перед МКТ?

Вопрос 2. Всегда ли в МКТ следует выбирать в качестве независимых контуров ячейки?

Вопрос 3. Может ли любой узел схемы быть базисным в МУН?

2.4.3. Заключение

Важно освоить оба метода в силу их практической ценности, уметь выбрать предпочтительный метод с целью более быстрого решения задачи. При эквивалентном преобразовании источников необходимо следить за соответствием полярности ИН направлению тока ИТ. В уравнениях обратите внимание на обратное (в сравнении с ЗНК и ЗТК) правило знаков для переменных в правой части (для контурных напряжений в МКТ или узловых токов в МУН). Необходимо знать, что такое «вырожденные» уравнения в МКТ и в МУН и как их правильно составлять. При нахождении искомых реакций особое внимание следует обращать на те участки схем, которые подвергались преобразованиям: решение должно быть дано для *заданной* (*исходной*) *схемы*, а не для рабочей (эквивалентно преобразованной).

2.5. Метод эквивалентных источников

2.5.1. Исходные понятия

Идея метода заключается в следующем: если в цепи любой сложности требуется найти *единственную* реакцию некоторой ветви, то схема относительно этой ветви может быть заменена эквивалентной схемой с единственным эквивалентным источником напряжения (или тока) с последовательно (или параллельно) включенным эквивалентным сопротивлением. Соответственно метод распадается на два: *метод эквивалентного источника напряжения* (МЭИН), или решение по теореме Тевенена, и *метод эквивалентного источника тока* (МЭИТ), или решение по теореме Нортона.

2.5.2. Примеры типовых задач

Пример 2.5.1. Дана цепь (рис. 2.5.1, *а*): $R_1 = R_3 = 4$ Ом; $R_2 = 1$ Ом; $R_4 = 1$ Ом; $u_{01} = 16$ В; $i_{04} = 2$ А. Определить i_2 по МЭИН и по МЭИТ.

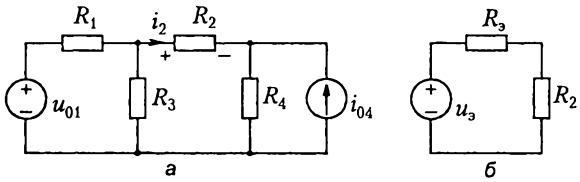


Рис. 2.5.1

Реакция по МЭИН определяется по эквивалентной схеме рис. 2.5.1, *б*, т. е. по выражению

$$i_2 = u_э/(R_э + R_2), \tag{1.5.1}$$

где $u_э$ — напряжение эквивалентного ИН и $R_э$ — *эквивалентное сопротивление*, которые необходимо определить. Напряжение $u_э$ отыскивается по схеме (рис. 2.5.2) как *напряжение холостого хода* того участка, на котором ищется реакция.

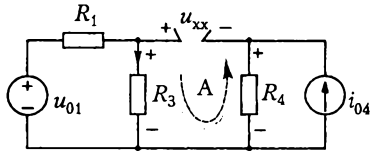


Рис. 2.5.2

Напряжение в точках разрыва может быть найдено по ЗНК, например, в контуре А $u_{XX} = u_3 - u_4$. Для этого нужно знать напряжения на остальных участках контура:

$$u_{XX} = u_{01} R_3 / (R_1 + R_3) - R_4 i_{04} = 6 \text{ В}.$$

Сопротивление $R_э$ определяется по схеме рис. 2.5.3, полученной из схемы рис. 2.5.1, *а*, с исключенными источниками, относительно узлов, к которым подключается ветвь с искомой реакцией:

$$R_э = R_4 + R_1 R_3 / (R_1 + R_3) = 3 \text{ Ом}.$$

Теперь по (2.5.1) находим $i_2 = 6/(3+1) = 1{,}5$ А.

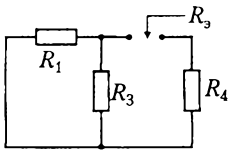
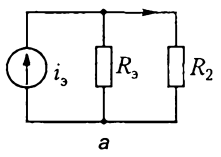


Рис. 2.5.3



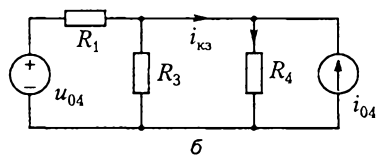


Рис. 2.5.4

Определим i_2 по МЭИТ. Расчетная схема изображена на рис. 2.5.4, *а*; ей соответствует формула

$$i_2 = i_э G_2 / (G_э + G_2), \qquad (2.5.2)$$

где $i_э$ — ток эквивалентного ИТ, а эквивалентная проводимость $G_э = 1/R_э$.

Ток $i_э$ определяется по схеме рис. 2.5.4, *б* как ток короткого замыкания того участка, где отыскивается реакция. Ток короткого замыкания может быть вычислен по ЗТК для одного из узлов, в который входит КЗ-ветвь. Например, $i_{КЗ} = i_4 - i_{04} = 2$ А (причем из рис. 2.5.1, *б* следует важная *проверочная формула*: $i_{КЗ} = u_{XX} / R_э = 6/3 = 2$ А). Попробуйте сами провести необходимые вычисления.

Проводимость находят по схеме, изображенной на рис. 2.5.3: $G_э = 1/R_э = 1/3$ См.

Далее по (2.5.2) находим $i_2 = 2 \times 1/(1/3+1) = 1{,}5$ А. Попробуйте сами определить u_3 по МЭИН, и по МЭИТ.

2.5.3. Заключение

В результате усвоения МЭИН и МЭИТ нужно знать расчетные схемы методов, понимать смысл величин u_{XX}, $i_{КЗ}$, $R_э$, уметь формировать вспомогательные схемы замещения для различных этапов решения задачи и находить соответствующие величины.

Из всех рассмотренных выше методов расчета резистивных цепей необходимо для каждой конкретной задачи уметь выбрать наиболее подходящий метод, который позволит получить ответ с наименьшими затратами времени.

2.6. Вольт-амперные характеристики индуктивного и емкостного элементов цепи

2.6.1. Исходные понятия

Индуктивный элемент (или *L*-элемент), который учитывает только запасание энергии *магнитного поля* при протекании тока, описывается вебер-амперной характеристикой:

$$\psi = Li_L,$$

где ψ — потокосцепление (суммарный магнитный поток) в веберах (Вб), L — индуктивность в генри (Гн), i_L — ток в амперах (А).

Емкостный элемент (или *C*-элемент), который учитывает только запасание энергии *электрического поля*, описывается кулон-вольтной характеристикой:

$$q = Cu_C,$$

где q — заряд в кулонах (Кл), C — емкость в фарадах (Ф), u_C — напряжение в вольтах (В).

Основные формулы, характеризующие процессы в индуктивном и емкостном элементах, приведены в таблице.

Характеристики	*L*-элемент	*C*-элемент
Исходная характеристика	$\psi = Li_L$	$q = Cu_C$
Вольт-амперная характеристика (ВАХ)	$u_L = d\psi/dt = L\dfrac{di_L}{dt}$ $i_L(t) = i_L(t_0-) + (1/L)\int_{t_0}^{t} u_L(t)\,dt$	$i_C = dq/dt = C\dfrac{du_C}{dt}$ $u_C(t) = u_C(t_0-) + (1/C)\int_{t_0}^{t} i_C(t)\,dt$
Мощность	$p_L = u_L i_L$	$p_C = u_C i_C$
	$p > 0$ — режим накопления энергии $p < 0$ — режим возврата запасенной энергии	
Энергия	$W_L = 0{,}5Li_L^2$	$W_C = 0{,}5Cu_C^2$
Закон *коммутации* (принцип *непрерывности*)	При $u(t)$ — конечном $\psi(t_0+) = \psi(t_0-)$ $i_L(t_0+) = i_L(t_0-)$	При $i(t)$ — конечном $q(t_0+) = q(t_0-)$ $u_C(t_0+) = u_C(t_0-)$

2.6.2. Примеры типовых задач

Пример 2.6.1. Потокосцепление индуктивного элемента $\psi(t)$ задано графически (рис. 2.6.1, *а*), $L = 2$ Гн.

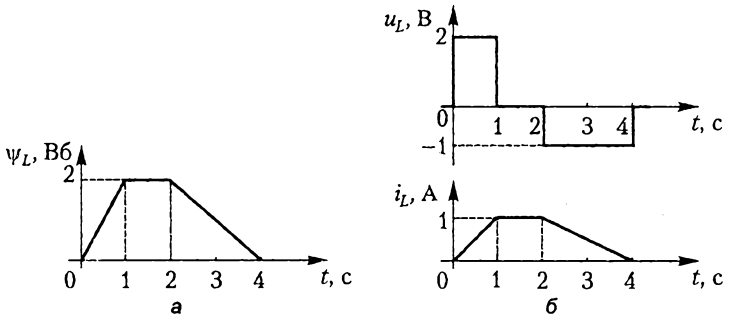


Рис. 2.6.1

Определить законы изменения напряжения и тока, построить диаграммы их мгновенных значений.

Напряжение L-элемента $u_L(t) = d\psi/dt$. Так как потокосцепление описано кусочно-линейной функцией, то напряжение на каждом отрезке времени будет постоянным (см. рис. 2.6.1, *б*), причем величина u_L определяется коэффициентами наклона $\psi(t)$, вычисляемыми как $\Delta\psi/\Delta t$.

Ток, определяемый по выражению $i_L = \psi/L$, будет той же формы, что и потокосцепление (см. рис. 2.6.1, *б*). Для наглядности графические построения следует делать в одном масштабе времени и графики располагать один под другим.

Пример 2.6.2. Дана цепь (рис. 2.6.2, *а*): $C = 2$ Ф; $u_C(0-) = 0$; график тока приведен на рис. 2.6.2, *б*. Определить закон изменения напряжения и построить его график (т. е. диаграмму мгновенных значений).

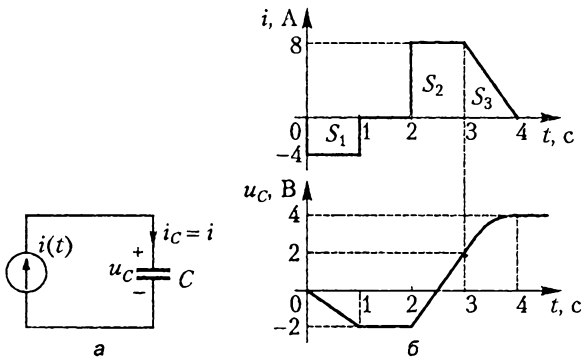


Рис. 2.6.2

Так как ток на разных отрезках времени описывается по-разному, лучше всего для каждого отрезка времени сделать отдельный расчет, а правильность решения контролировать по отсутствию скачков напряжения, поскольку $u_C(t_0+) = u_C(t_0-)$ для любого момента времени t_0.

На интервале $0 < t < 1$ ток $i_C(t) = -4$;

$$u_C(t) = u_C(0) + (1/C)\int_0^t i_C(t)\,dt = 0 + 0{,}5\int_0^t (-4)\,dt = -2t,$$

$$u(1-) = -2.$$

На интервале $1 < t < 2$ ток $i_C(t) = 0$;

$$u_C(t) = -2;\ u_C(2-) = -2.$$

На интервале $2 < t < 3$ ток $i_C(t) = 8$;

$$u_C(t) = u_C(2-) + (1/C)\int_2^t 8dt = -2 + 0{,}5 \cdot 8t\big|_2^t = -2 + 4t - 0{,}5 \cdot 8 \cdot 2 = 4t - 10;$$

$$u_C(3-) = 2.$$

Контроль: $u_C(2+) = -2 = u_C(2-)$.

На интервале $3 < t < 4$ ток $i_C(t) = at + b = -8t + 32$, причем $a = \Delta i/\Delta t = (0-8)/(4-3)$, а параметр b найден из условия $i_C(4) = 0$;

$$u_C(t) = u_C(3-) + (1/C)\int_3^t i_C(t)\,dt = 2 + 0{,}5\int_3^t (-8t + 32)\,dt =$$

$$= 2 + 0{,}5(-4t^2 + 32t)\big|_3^t = -2t^2 + 16t - 28;\ u_C(4-) = 4.$$

Контроль: $u_C(3+) = 2 = u_C(3-)$.

На интервале $4 < t$ ток $i_C(t) = 0$, следовательно,

$$u_C(t) = u_C(4-) = 4.$$

Контроль результатов можно осуществлять также *по площади* S, ограниченной графиком $i(t)$ на рис. 2.6.2, *б*. Очевидно $S_1 = -4$; $S_2 = 8$; $S_3 = 4$. Соответственно находим

$$u_C(1-) = 0{,}5S_1 = -2\ \text{В};\ u_C(3-) = 0{,}5(S_1 + S_2) = 2\ \text{В};$$

$$u_C(4-) = 0{,}5(S_1 + S_2 + S_3) = 4\,\text{В},$$

причем множитель 0,5 соответствует здесь коэффициенту $1/C$ перед интегралом.

Пример 2.6.3. Вывести формулу делителя напряжений для последовательного соединения элементов L_1, L_2, L_3.

Очевидно, уравнение ЗТК цепи имеет вид $i_1 = i_2 = i_3 = i$, а уравнение ЗНК $u = u_1 + u_2 + u_3$. Подставляя ВАХ L-элемента, получим

$$u = L_1 i' + L_2 i' + L_3 i' = (L_1 + L_2 + L_3)\,i' = L_{\text{экв}}\,i',$$

т. е. при последовательном соединении L-элементов эквивалентная индуктивность равна сумме индуктивностей. Находим далее напряжение, например, $u_3 = L_3 i' = L_3 u/L_{\text{экв}} = L_3 u/(L_1 + L_2 + L_3)$, что подобно ФДН, полученной при изучении R-элементов.

В общем случае справедлив следующий *вывод*: все *формулы* для соединений *L-элементов аналогичны формулам* для подобных соединений *R-элементов*, а *формулы для соединений C-элементов* дуальны, т. е. *аналогичны формулам* (для подобных соединений резистивных элементов), записанным с использованием *проводимостей G*.

2.6.3. Заключение

Необходимо знать основные формулы индуктивного и емкостного элементов (ВАХ, W, $L_{экв}$, $C_{экв}$, ФДН, ФДТ), уметь их применять и помнить, что графики $u_C(t)$ и $i_L(t)$ должны быть *непрерывными*. Следует свободно описывать аналитически сигналы кусочно-линейной формы, а также результаты их дифференцирования и интегрирования с *контролем* последних *по площади* графика подынтегральной функции.

2.7. Анализ переходных процессов в цепях первого порядка во временной области при постоянных воздействиях

2.7.1. Исходные понятия

Порядок цепи обычно определяется суммарным числом имеющихся в ней накопителей, т. е. *L*- и *C*-элементов. *Переходные процессы* в линейных цепях возникают при коммутации, т. е. при переключениях идеального ключа, изменениях скачком воздействий или их производных.

В цепях первого порядка переходные процессы описываются решением линейного дифференциального уравнения первого порядка, связывающего реакцию $f_2(t)$ с воздействием $f_1(t)$:

$$a_1 f_2'(t) + a_0 f_2(t) = b_1 f_1'(t) + b_0 f_1(t). \qquad (2.7.1)$$

Решение (2.7.1) обычно ищут в виде суммы двух составляющих

$$f_2(t) = f_{2\text{вын}}(t) + f_{2\text{св}}(t), \qquad (2.7.2)$$

где $f_{2\text{св}}(t)$ — свободная составляющая решения (2.7.1), т. е. общее решение однородного дифференциального уравнения

$$a_1 f_2'(t) + a_0 f_2(t) = 0, \qquad (2.7.3)$$

причем (2.7.3) описывает также *свободный режим*, т. е. режим в цепи без источников. В свободном режиме процесс протекает за счет начальных запасов энергии в накопительных элементах *L* или *C*; с течением времени эта энергия расходуется в *R*-элементах цепи, поэтому свободный процесс и, следовательно, $f_{2\text{св}}(t)$ затухает.

В цепях первого порядка *свободная составляющая* имеет вид

$$f_{2\text{-св}}(t) = A_1 \exp(p_1 t) = A_1 \exp(-t/\tau), \qquad (2.7.4)$$

где A_1 — постоянная интегрирования, определяемая по начальным условиям; p_1 — частота собственных колебаний, т. е. корень характеристического уравнения $a_1 p + a_0 = 0$, получаемого из однородного уравнения (2.7.3) заменой $d/dt = p$; $\tau = -1/p_1$ — постоянная времени цепи, измеряемая в секундах. Для *RC*-, *RL*-цепей соответственно

$$\tau = CR_э, \quad \tau = L/R_э, \qquad (2.7.5)$$

где $R_э$ — эквивалентное сопротивление цепи в *свободном режиме* относительно выводов накопительного элемента (*C* или *L*).

После затухания свободной составляющей (2.7.4) в цепи устанавливается *вынужденный режим*, который *при постоянных* воздействиях называется также *установившимся режимом.*

Вынужденная (установившаяся) *составляющая* решения $f_{2\text{вын}}(t)$ в (2.7.2) является частным решением неоднородного уравнения (2.7.1), она обусловлена воздействием и обычно имеет его математическую форму. Поэтому *при постоянных воздействиях в установившихся режимах* до и после коммутации *все реакции постоянны*, следовательно:

$$\begin{cases} u_{L\text{вын}}(t) = Li'_{L\text{вын}}(t)\big|_{i_{L\text{вын}}=\text{const}} = 0; \\ i_{C\text{вын}}(t) = Cu'_{C\text{вын}}(t)\big|_{u_{C\text{вын}}=\text{const}} = 0. \end{cases} \tag{2.7.6}$$

Из (2.7.6) следует, что L-элемент эквивалентен короткозамкнутому участку ($L \equiv$ КЗ), а C-элемент — разорванному, т. е. холостому ходу ($C \equiv$ ХХ).

Естественно, вынужденную составляющую при постоянных воздействиях можно определять и непосредственно из дифференциального уравнения (2.7.1)

$$a_1 0 + a_0 f_{2\text{вын}} = b_1 0 + b_0 f_1;$$

$$f_{2\text{вын}} = b_0 f_1 / a_0,$$

поскольку производная от постоянной равна нулю.

Запишем решение неоднородного уравнения (2.7.1)

$$f_2(t) = f_{2\text{вын}} + A_1 \exp(-t/\tau) \tag{2.7.7}$$

и определим постоянную интегрирования A_1 по начальным условиям (сразу после коммутации) при $t = 0+$:

$$f_2(0+) = f_{2\text{вын}} + A_1,$$

тогда $A_1 = f_2(0+) - f_{2\text{вын}}$; следовательно, окончательно решение (2.7.2) примет вид

$$f_2(t) = f_{2\text{вын}} + (f_2(0+) - f_{2\text{вын}}) \exp(-t/\tau). \tag{2.7.8}$$

Покажем, что анализ переходных процессов в цепях первого порядка *при постоянных воздействиях* можно провести без составления дифференциального уравнения, используя лишь резистивные схемы замещения цепи в различных режимах.

2.7.2. Типовые примеры

Пример 2.7.2. Рассмотрим анализ переходного процесса в цепи (рис. 2.7.1, *а*): $u_{01} = 2$ В; $i_{02} = 2$ А; $R_1 = R_2 = 1$ Ом; $R_3 = 2$ Ом; $C = 4$ Ф. Ключ размыкается при $t = 0$. Найти токи ветвей.

1. *Определяем независимое начальное условие* $u_C(0-)$ непосредственно перед коммутацией (в цепи с L-элементом находим $i_L(0-)$). Используем схему замещения (рис. 2.7.1, *б*), в которой выводы C-элемента разомкнуты согласно (2.7.6), так как

процесс в цепи до коммутации при $t = 0^-$ считается *установившимся* при постоянных воздействиях: $u_C(0-) = R_2 i_2, i_2 = u_{01}/(R_1 + R_2), u_C(0-) = R_2 u_{01}/(R_1 + R_2) = 1$ В.

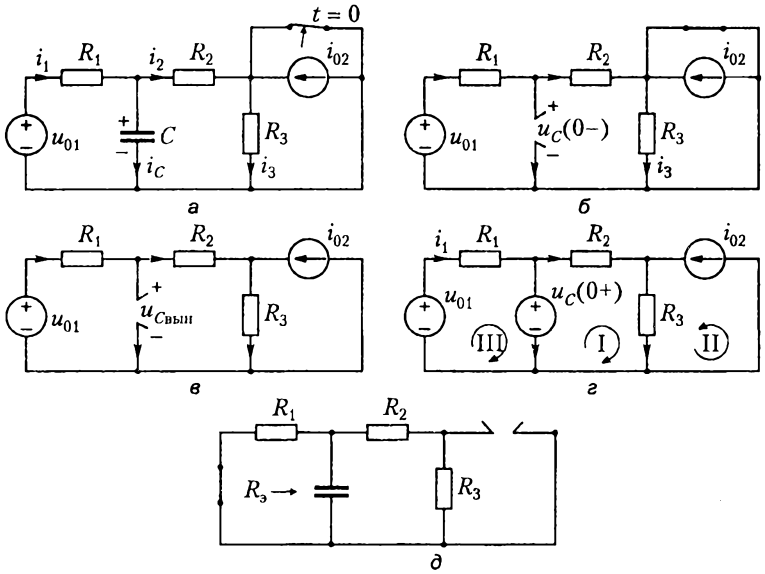


Рис. 2.7.1

Вопрос 1. Как заменить L-элемент в схеме замещения цепи первого порядка при постоянных воздействиях в установившемся режиме до коммутации?

Вопрос 2. Почему в расчете независимого начального условия $u_C(0-)$ не участвует источник тока i_{02}?

2. *Находим вынужденные составляющие реакций* в установившемся режиме после коммутации ($t \to \infty$). При постоянных воздействиях эти составляющие согласно (2.7.6) должны быть постоянны. Их легко рассчитать по схеме замещения (рис. 2.7.1, *в*), составленной по аналогии с п. 1, используя наиболее рациональные методы расчета R-цепей. Например, по методу наложения

$$i_{1\text{выш}} = i_{2\text{выш}} = u_{01}/(R_1 + R_2 + R_3) - i_{02} R_3/(R_1 + R_2 + R_3) = -0{,}5 \text{ А};$$

$$i_{3\text{выш}} = u_{01}/(R_1 + R_2 + R_3) + i_{02}(R_1 + R_2)/(R_1 + R_2 + R_3) = 1{,}5 \text{ А};$$

$$i_{C\text{выш}} = 0.$$

3. *Определяем зависимые начальные условия* — значения токов $i_1(0+)$, $i_2(0+)$, $i_3(0+)$, $i_C(0+)$ сразу же после коммутации, т. е. в момент $t = 0+$, используя схему замещения (рис. 2.7.1, *г*), полученную из исходной (рис. 2.7.1, *а*) заменой по теореме замещения емкости источником напряжения, значение которого $u_C(0+) = u_C(0-)$ определено *по закону коммутации.*

Рассчитывая цепь по методу контурных токов, запишем

$$(R_2 + R_3)i_1^{к} + R_3 i_2^{к} = u_C(0+);\ \ i_2^{к} = i_{02} = 2\ \text{А};\quad R_1 i_3^{к} = u_{01} - u_C(0+),$$

откуда:

$$i_1(0+) = i_3^{к} = (u_{01} - u_C(0+))/R_1 = 1\ \text{А};$$
$$i_2(0+) = i_1^{к} = (u_C(0+) - R_3 i_{02})/(R_2 + R_3) = -1\ \text{А};$$
$$i_3(0+) = i_1^{к} + i_2^{к} = 1\ \text{А},$$
$$i_C(0+) = i_3^{к} - i_1^{к} = 2\ \text{А}.$$

Вопрос 3. Как заменить L-элемент в схеме замещения цепи первого порядка при $t = 0+$?

Вопрос 4. Как записать закон коммутации для L-элемента?

4. *Определяем* согласно (2.7.5) *постоянную времени цепи* $\tau = CR_э$, причем $R_э$ находим по схеме свободного режима (рис. 2.7.1, *д*) относительно выводов накопителя C. Схема получена из исходной (рис. 2.7.1, *а*), исключением всех источников. Определяем:

$$R_э = R_1(R_2 + R_3)/(R_1 + R_2 + R_3) = 0{,}75\ \text{Ом};\ \ \tau = CR_э = 3\ \text{с}.$$

Вопрос 5. Напишите формулу постоянной времени для цепи первого порядка с L-элементом.

Вопрос 6. Что значит исключить из схемы источники напряжения и тока?

5. *Находим решение* для любой реакции цепи первого порядка при $t > 0$.

Согласно (2.7.7), (2.7.8) представляем решение как сумму вынужденной и свободной составляющих:

$$i_1(t) = i_{1вын} + i_{1св} = i_{1вын} + A_1 \exp(-t/\tau).$$

Постоянную интегрирования определяем по начальным условиям при $t = 0+$: $i_1(0+) = i_{1вын} + A_1$, откуда $A_1 = i_1(0+) - i_{1вын} = 1{,}5$, следовательно, $i_1(t) = -0{,}5 + 1{,}5\exp(-t/3)$.

Аналогично находим остальные реакции:

$$i_2(t) = -0{,}5 - 0{,}5\exp(-t/3);$$
$$i_3(t) = 1{,}5 - 0{,}5\exp(-t/3);\ \ i_C(t) = 2\exp(-t/3).$$

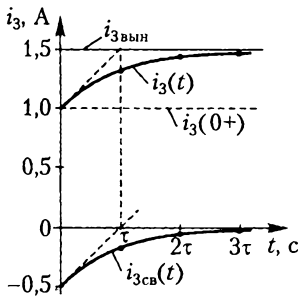


Рис. 2.7.2

Вопрос 7. Как проверить полученные результаты?

6. *Строим графики переходных процессов.* При качественном построении графика реакции (см. рис. 2.7.2) соединяем плавной кривой начальное значение функции $f_2(0+)$ с конечным значением $f_{2вын}$. Используем *характерные значения экспоненты* $\exp(-t/\tau)$, равные 1; 0,37; 0,14; 0,05 соответственно при t, равных 0, τ, 2τ, 3τ.

Для примера построим качественно график (т. е. временную диаграмму) тока $i_3(t)$. Характерные значения экспоненты выделены точками на рис. 2.7.2; пункти-

ром показана касательная к экспоненте при $t = 0$ (известно, что любая *подкасательная к экспоненте* равна τ).

Вопрос 8. Как по графику свободной составляющей реакции графически найти τ?

Вопрос 9. Почему *практическим временем затухания переходного процесса* обычно считают 3τ?

Теоретическая экспонента затухает до нуля при $t \to \infty$. На практике обычная точность построения графика не превышает 5 %, поэтому практическое время затухания переходного процесса считают равным 3τ, за это время экспонента затухает до 5 % от своего начального значения.

Пример 2.7.2. Используя методику предыдущего примера, рассчитаем переходный процесс для цепи первого порядка (рис. 2.7.3, *а*) с нулевым начальным условием: $i_{01} = 4$ А, $R_2 = R_3 = 1$ Ом; $R_4 = 2$ Ом; $L = 2$ Гн. Ключ размыкается при $t = 0$. Найти токи ветвей.

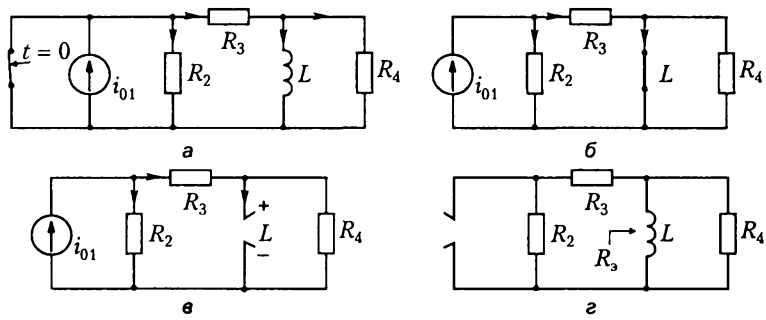


Рис. 2.7.3

1. *Ток через индуктивность* непосредственно перед коммутацией ($t = 0-$) по условию задачи равен нулю: $i_L(0-) = 0$ (*независимое начальное условие*).

2. *Находим вынужденные составляющие реакций* в установившемся режиме после коммутации ($t \to \infty$) по схеме замещения (рис. 2.7.3, *б*), составленной из исходной схемы (рис. 2.7.3, *а*), в которой выводы L-элемента закорочены согласно (2.7.6). По ФДТ:

$$i_{2\text{вын}} = i_{01} R_3 / (R_2 + R_3) = 2 \text{ А};$$

$$i_{3\text{вын}} = i_{L\text{вын}} = i_{01} R_2 / (R_2 + R_3) = 2 \text{ А};$$

$$i_{4\text{вын}} = 0.$$

3. *Определим зависимые начальные условия* сразу же после коммутации, т. е. при $t = 0+$ по схеме замещения (рис. 2.7.3, *в*), полученной из исходной схемы (рис. 2.7.3, *а*), причем выводы L-элемента разомкнуты, так как индуктивность заменена по теореме замещения источником тока с током $i_L(0+)$, равным по закону коммутации току до коммутации $i_L(0-)$, который по условию равен 0. По ФДТ:

$$i_2(0+) = i_{01}(R_3 + R_4)/(R_2 + R_3 + R_4) = 3 \text{ А};$$

$$i_3(0+) = i_4(0+) = i_{01} R_2 / (R_2 + R_3 + R_4) = 1 \text{ А}.$$

4. *Находим* согласно (2.7.5) *постоянную времени* цепи $\tau = L/R_э$, причем $R_э$ — определяем по схеме свободного режима (рис. 2.7.3, *г*):

$$R_э = (R_2 + R_3)R_4/(R_2 + R_3 + R_4) = 1 \text{ Ом}; \quad \tau = L/R_э = 2 \text{ с}.$$

5. *Находим решение для любой реакции цепи при* $t > 0$.

Согласно (2.7.7), (2.7.8) представляем решение как сумму вынужденной и свободной составляющих:

$$i_2(t) = i_{2вын} + i_{2св} = i_{2вын} + A_1 \exp(-t/\tau) = 2 + \exp(-0{,}5t).$$

Аналогично находим остальные реакции:

$$i_3(t) = 2 - \exp(-0{,}5t);$$

$$i_L(t) = 2 - 2\exp(-0{,}5t);$$

$$i_4(t) = \exp(-0{,}5t).$$

6. *Построим график переходного процесса,* к примеру, для тока $i_L(t)$ (рис. 2.7.4).

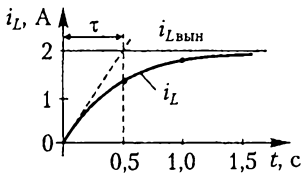


Рис. 2.7.4

2.7.3. Заключение

В результате усвоения материала темы необходимо знать, что такое свободная, вынужденная (установившаяся) составляющие решения, свободный и установившийся режимы, переходный процесс, коммутация, постоянная времени цепи, характерные значения экспоненты, практическое время затухания переходного процесса, подкасательная к экспоненте, законы коммутации, цепь в свободном режиме, эквивалентная схема замещения цепи при $t \to \infty$, 0–, 0+, независимые и зависимые начальные условия. Необходимо понимать, почему свободная составляющая затухает; когда и почему в эквивалентных схемах замещения накопитель заменяют КЗ, ХХ, источником.

2.8. Анализ переходных процессов в цепях высокого порядка во временной области при постоянных воздействиях

2.8.1. Исходные понятия

Анализ переходных процессов в цепях n-го порядка проще всего проводить по *уравнениям состояния*. Цепь n-го порядка описывают формализованной системой из n уравнений, каждое из которых является дифференциальным уравнением первого порядка, записанным в нормальной форме (форме Коши):

$$[f'_{\text{пС}}(t)] = [A][f_{\text{пС}}(t)] + [B][f_1(t)], \qquad (2.8.1)$$

где $[f_1(t)]$ — матрица источников (воздействий); $[f_{\text{пС}}(t)]$ — матрица переменных состояния; [A], [B] — матрицы коэффициентов.

В случае, если переменные состояния не совпадают с искомыми реакциями $[f_2(t)]$, используют алгебраические *уравнения связи* реакций с переменными состояния и воздействиями:

$$[f_2(t)] = [M][f_{\text{пС}}(t)] + [N][f_1(t)],$$

где $[M]$, $[N]$ — матрицы коэффициентов.

В качестве переменных состояния допускается использовать любые переменные цепи (или их комбинации), однако расчет значительно упрощается, если *в качестве переменных состояния* выбирают *непрерывные* функции u_{Ck} и i_{Ln}, т. е. напряжения емкостей и токи индуктивностей. Тогда система уравнений состояния (2.8.1) для цепи n-го порядка будет иметь вид:

$$\begin{cases} u'_{Ck} = f_k(\ldots u_{Ck}, \ldots i_{Ln}, \ldots u_{0k}, \ldots i_{0k}); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ i'_{Ln} = f_n(\ldots u_{Ck}, \ldots i_{Ln}, \ldots u_{0k}, \ldots i_{0k}). \end{cases} \qquad (2.8.2)$$

т. е. производные переменных состояния нужно выразить через сами переменные состояния и воздействия. Для получения (2.8.2) используют вольт-амперные характеристики накопительных элементов $u'_{Ck} = i_{Ck}/C_k$, $i'_{Ln} = u_{Ln}/L_n$, т. е. вместо (2.8.2) можно записать следующую систему:

$$\begin{cases} u'_{Ck} = i_{Ck}/C_k = f_k(\ldots u_{Ck}, \ldots i_{Ln}, \ldots u_{0k}, \ldots i_{0k}); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ i'_{Ln} = u_{Ln}/L_n = f_n(\ldots u_{Ck}, \ldots i_{Ln}, \ldots u_{0k}, \ldots i_{0k}). \end{cases}$$

Таким образом, *для составления уравнений состояния фактически достаточно выразить ток емкости i_{Ck} и напряжение индуктивности u_{Ln} через переменные состояния u_{Ck}, i_{Ln} и источники (воздействия) u_{0k}, i_{0n}.*

Простой способ формирования уравнений состояния рассмотрим ниже на примере анализа переходных процессов в цепи второго порядка.

2.8.2. Типовой пример

Пример 2.8.1. В цепи (рис. 2.8.1, *а*) $u_{01} = 10$ В; $u_{02} = 10$ В; $R = 0{,}2$ Ом; $R_0 = 0{,}8$ Ом; $C = 1$ Ф; $L = 0{,}25$ Гн. Ключ замыкается при $t = 0$. Необходимо найти токи ветвей.

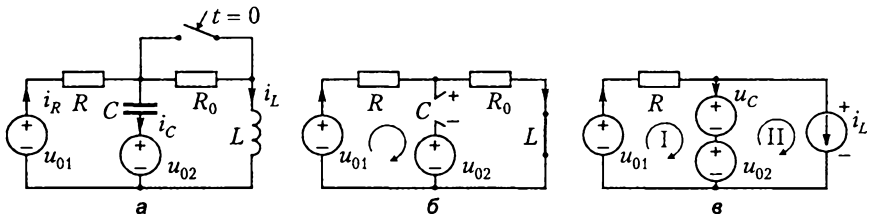


Рис. 2.8.1

1. Определяем *независимые начальные условия* $i_L(0-)$ и $u_C(0-)$ по эквивалентной схеме замещения (рис. 2.8.1, б), полученной из исходной (рис. 2.8.1, а), в которой L-элемент заменен на КЗ, а C-элемент на ХХ, поскольку перед коммутацией в цепи был установившийся режим при постоянных воздействиях. Так как $i_L(0-) = u_{01}/(R + R_0) = 10$ А, по ЗНК получим $u_C(0-) = u_{01} - u_{02} - i_L(0-)R = -2$ В.

2. Для $t > 0$ составляем *уравнения состояния*, используя *метод вспомогательных источников*. В исходной схеме (рис. 2.8.1, *а*) после коммутации заменяем C-элемент источником напряжения с напряжением u_C, а L-элемент источником тока с током i_L (рис. 2.8.1, *в*), т. е. рассматриваем R-цепь. Любыми методами расчета R-цепей выражаем i_C и u_L через переменные состояния u_C, i_L и воздействия u_{01}, u_{02}. Часто используют метод контурных токов с вырожденными уравнениями.

В данном случае, например, по методу контурных токов имеем: $i_L = i_2^{\text{к}}$; $Ri_1^{\text{к}} = u_{01} - u_{02} - u_C$, откуда

$$i_R = i_1^{\text{к}} = (u_{01} - u_{02} - u_C)/R = -u_C/R + u_{01}/R - u_{02}/R;$$

по закону токов Кирхгофа

$$i_C = i_R - i_L = -u_C/R - i_L + u_{01}/R - u_{02}/R;$$

по закону напряжений Кирхгофа

$$u_L = u_C + u_{02}.$$

Тогда уравнения состояния

$$\begin{cases} u'_C(t) = \dfrac{i_C(t)}{C} = -\dfrac{u_C(t)}{CR} - \dfrac{i_L(t)}{C} + \dfrac{u_{01}}{CR} - \dfrac{u_{02}}{CR}; \\ i'_L(t) = \dfrac{u_L(t)}{L} = \dfrac{u_C(t)}{L} + \dfrac{u_{02}}{L}. \end{cases} \qquad (2.8.3)$$

В матричной форме

$$\begin{bmatrix} u'_C \\ i'_L \end{bmatrix} = [A]\begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + [B]\begin{bmatrix} u_{01} \\ u_{02} \end{bmatrix},$$

где

$$[A] = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{CR} & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{CR} & -\dfrac{1}{CR} \\ 0 & \dfrac{1}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

3. Находим *частоты собственных колебаний* цепи. Для этого вначале записываем *характеристическое уравнение* (характеристический полином) цепи, используя известную в математике формулу:

$$\det[(A) - p(E)] = \det\left(\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - p\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} -5-p & -1 \\ 4 & -p \end{vmatrix} = p^2 + 5p + 4 = 0.$$

Корни характеристического полинома и есть частоты собственных колебаний цепи: $p_1 = -1$, $p_2 = -4$, т. е. корни вещественные отрицательные. Свободные составляющие решения имеют вид:

$$u_{C\text{-в}}(t) = A_1 \exp(p_1 t) + A_2 \exp(p_2 t);$$
$$i_{L\text{-в}}(t) = B_1 \exp(p_1 t) + B_2 \exp(p_2 t).$$

Следует отметить, что, если корни характеристического полинома:

а) *кратные* (равные), например $p_1 = p_2 = -4$, то

$$f_{\text{-в}}(t) = A_1 \exp(-4t) + A_2 t \exp(-4t);$$

б) *комплексные*, например $p_{1,2} = -5 + j6$, то

$$f_{\text{-в}}(t) = A_1 \exp(-5t)\cos(6t) + A_2 \exp(-5t)\sin(6t);$$

в) *мнимые*, например $p_{1,2} = \pm j3$, то

$$f_{\text{-в}}(t) = A_1 \cos(3t) + A_2 \sin(3t).$$

4. Определяем *вынужденные составляющие* переменных состояния либо по схеме замещения, как в цепях первого порядка в установившемся режиме после коммутации, либо из уравнений состояния (2.8.3), в которых $u'_{C\text{в}} = 0$, $i'_{L\text{в}} = 0$, так как в цепи установившийся режим при постоянных воздействиях, а это означает, что все реакции также постоянны.

Считая в (2.8.3) $u'_{Cв} = 0$ и $i'_{Lв} = 0$, получим систему

$$\begin{cases} 0 = -5u_{Cв} - i_{Lв}; \\ 0 = 4u_{Cв} + 40, \end{cases}$$

решение которой дает $u_{Cв} = -10$ В, $i_{Lв} = 50$ А.

5. Находим значения *производных переменных состояния* при $t = 0+$. Как известно, постоянные интегрирования A_1 и A_2 (или B_1 и B_2) определяются при $t = 0+$ по начальным условиям, которых должно быть два, так как отыскиваются две постоянные интегрирования. Одно начальное условие — это независимое начальное условие $u_C(0+) = u_C(0-) = -2$ В, или $i_L(0+) = i_L(0-) = 10$ А, второе — это $u'_C(0^+)$ или $i'_L(0+)$ определяются из уравнений состояния (2.8.3) для момента $t = 0+$:

$$u'_C(0+) = -\frac{u_C(0+)}{CR} - \frac{i_L(0+)}{C} + \frac{u_{01}}{CR} - \frac{u_{02}}{CR} = -\frac{-2}{1\cdot 0{,}2} - \frac{10}{1} + \frac{10}{1\cdot 0{,}2} - \frac{10}{1\cdot 0{,}2} = 0;$$

$$i'_L(0+) = \frac{u_C(0+)}{L} + \frac{u_{02}}{L} = \frac{-2}{0{,}25} + \frac{10}{0{,}25} = 32 \text{ А/с}.$$

6. *Находим переменные состояния* $u_C(t)$ и $i_L(t)$ при $t > 0$.

Если $u_C(t) = u_{Cв} + A_1 \exp(p_1 t) + A_2 \exp(p_2 t) = -10 + A_1 \exp(-t) + A_2 \exp(-4t)$, то $u'_C(t) = -A_1 \exp(-t) - 4A_2 \exp(-4t)$.

При $t = 0+$ получаем

$$\begin{cases} -2 = -10 + A_1 + A_2; \\ 0 = 0 - A_1 - 4A_2; \end{cases}$$

решая систему, находим $A_1 = 32/3$, $A_2 = -8/3$, т. е. окончательно

$$u_C(t) = -10 + (32/3)\exp(-t) - (8/3)\exp(-4t).$$

Аналогично определяем

$$i_L(t) = 50 - (128/3)\exp(-t) + (8/3)\exp(-4t).$$

7. *Расчет* по уравнениям связи *остальных реакций* (i_R, i_C и u_L) можно провести по схеме (рис. 2.8.1, *в*) любым методом анализа R-цепей, учитывая, что $u_C(t)$ и $i_L(t)$ теперь известны. К примеру, в заданной цепи

$$i_R = (u_{01} - u_{02} - u_C)/R = 50 - (160/3)\exp(-t) + (40/3)\exp(-4t);$$

$$i_C = i_R - i_L = -(32/3)\exp(-t) + (32/3)\exp(-4t);$$

$$u_L = u_C + u_{02} = (32/3)\exp(-t) - (8/3)\exp(-4t),$$

причем записанные слева уравнения являются *уравнениями связи. Для контроля* используют формулы

$$u_L(t) = Li'_L(t), \quad i_C(t) = Cu'_C(t).$$

8. Построим *график переходного процесса*, например для $u_L(t)$ (рис. 2.8.2). Практическое время переходного процесса обычно считают равным $t_{\text{п. пр}} \cong 3\tau_{\max}$. Поскольку $\tau_1 = -1/p_1 = 1$ с, $\tau_2 = -1/p_2 = 0{,}25$ с, то $t_{\text{п. пр}} \cong 3\tau_{\max} \cong 3$ с.

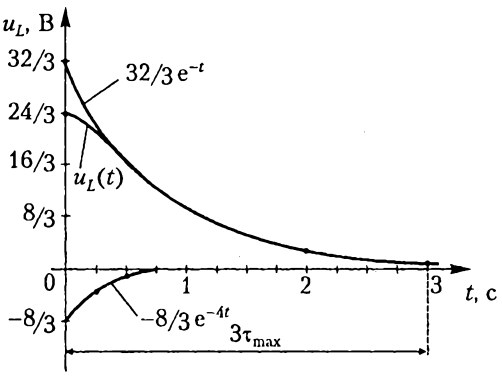


Рис. 2.8.2

В цепях более высокого порядка нужно знать также начальные значения старших производных. Начальное значение первой производной находят непосредственно из (2.8.1) при $t = 0+$:

$$[f'_-(0+)] = [A][f_-(0+)] + [B][f_1(0+)];$$

для определения начального значения второй производной вначале дифференцируют (2.8.1) по t, а затем вместо t опять подставляют $t = 0^+$:

$$[f''_-(0+)] = [A][f'_-(0+)] + [B][f'_1(0+)],$$

и т. д.

2.8.3. Численный расчет реакции по уравнениям состояния

Решение уравнений состояния на ЭВМ проводят одним из численных методов расчета, считая для простоты переменные состояния реакциями.

Запишем на основании (2.8.1) уравнения *явной формы алгоритма Эйлера* для n-го шага *численного расчета*:

$$\begin{cases} [\Delta f_{2n}] = \Delta t([A][f_{2(n-1)}] + [B][f_{1(n-1)}]); \\ [f_{2n}] = [f_{2(n-1)}] + [\Delta f_{2n}], \end{cases} \tag{2.8.4}$$

где Δt — значение *шага вычислений*.

Уравнения состояния (2.8.3) для исследуемой в примере 2.8.1 цепи

$$\begin{cases} u'_C = -5u_C - i_L; \\ i'_L = 4u_C + 40, \end{cases}$$

причем начальные условия $u_C(0-) = u_{C0} = -2$ В, $i_L(0-) = i_{L0} = 10$ А считаем *значениями нулевого шага.*

В соответствии с алгоритмом Эйлера (2.8.4) в данном случае имеем:

$$\begin{cases} u_{Cn} = u_{C(n-1)} + \Delta t u'_{Cn} = u_{C(n-1)} + \Delta t(-5u_{C(n-1)} - i_{L(n-1)}); \\ i_{Ln} = i_{L(n-1)} + \Delta t i'_{Ln} = i_{L(n-1)} + \Delta t(4u_{C(n-1)} + 40). \end{cases}$$

Выберем шаг численного расчета Δt так, чтобы минимальной постоянной времени соответствовало хотя бы 5 шагов расчета. В примере $\tau_1 = -1/p_1 = 1$ с, $\tau_2 = -1/p_2 = 0{,}25$ с,тогда $\Delta t = 1/5 \min\{\tau_1, \tau_2\} = 0{,}05$ с.

На первом шаге к моменту $t_1 = 0 + \Delta t = 0{,}05$ с получим:

$$u_{C1} = u_{C0} + \Delta t u'_{C1} = u_{C0} + 0{,}05(-5u_{C0} - i_{L0}) = -2 \text{ В};$$
$$i_{L1} = i_{L0} + \Delta t i'_{L1} = i_{L0} + 0{,}05(4u_{C0} + 40) = 11{,}6 \text{ А}.$$

На втором шаге к моменту $t_2 = t_1 + \Delta t = 2\Delta t = 0{,}1$ с

$$u_{C2} = u_{C1} + \Delta t u'_{C2} = u_{C1} + 0{,}05(-5u_{C1} - i_{L1}) = -2{,}08 \text{ В};$$
$$i_{L2} = i_{L1} + \Delta t i'_{L2} = i_{L1} + 0{,}05(4u_{C1} + 40) = 13{,}2 \text{ А}$$

и т. д.

2.8.4. Заключение

В результате усвоения материала темы необходимо знать, как составлять уравнения состояния, уметь решать их аналитически и численно, находить вынужденные составляющие реакций (по схемам замещения и по уравнениям состояния), частоты собственных колебаний цепи, практическое время затухания переходного процесса, начальные значения производных переменных состояния, правильно записывать свободную составляющую реакции (в зависимости от вида корней характеристического уравнения), уметь составлять уравнения связи, понимать, что знание уравнений состояния во многом формализует (и этим облегчает) расчет переходных процессов.

2.9. Применение обобщенных функций для анализа переходных процессов во временной области при воздействиях произвольной формы

2.9.1. Исходные положения

При анализе цепей во временной области часто используют *обобщенные функции*: единичную ступенчатую функцию $\delta_1(t-t_0)$, единичную импульсную функцию $\delta(t-t_0)$ и функцию единичного наклона $\delta_2(t-t_0)$.

Единичная ступенчатая функция $\delta_1(t-t_0)$ — это разрывная функция, равная 0 при $t<t_0$ и равная 1 при $t>t_0$, т. е.

$$\delta_1(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0;\\ 0{,}5 & t=t_0;\\ 1 & t>t_0.\end{cases}$$

Аналогично можно записать и *несмещенную* во времени относительно нуля единичную ступенчатую функцию (рис. 2.9.1, *а*):

$$\delta_1(t)=\begin{cases}0 & t<0;\\ 0{,}5 & t=0;\\ 1 & t>0.\end{cases}$$

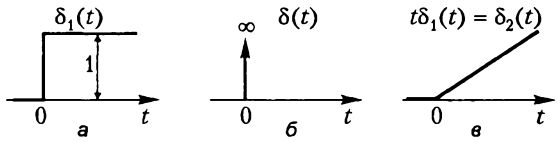


Рис. 2.9.1

Единичная импульсная функция $\delta(t-t_0)$, или *дельта-функция* (δ-функция), вводится как *производная* от единичной ступенчатой функции и представляет собой *бесконечно короткий* импульс *бесконечно большой* высоты с *площадью*, равной *единице*, т. е.

$$\delta(t-t_0)=\begin{cases}0 & t\neq t_0;\\ \infty & t=t_0.\end{cases}$$

Дельта-функция, несмещенная относительно начала координат:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0; \\ \infty & t = 0. \end{cases}$$

Обозначают единичную импульсную функцию $\delta(t - t_0)$ вертикальной *стрелкой*, расположенной при $t = t_0$, а несмещенную — стрелкой при $t = 0$ (см. рис. 2.9.1, *б*).

Примечания: 1) поскольку $\delta(t)$ является производной от $\delta_1(t)$, то

$$\delta_1(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t)dt;$$

2) функция $\delta_1(t)$ — *безразмерна*; размерность единичной импульсной функции $[\delta] = [\delta_1'] = [\delta_1]/[t] = 1/\text{с}$.

Функция единичного наклона $\delta_2(t)$ является *интегралом* от единичной ступенчатой функции и описывается следующим образом (см. рис. 2.9.1, *в*):

$$\delta_2(t) = t\delta_1(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta_1(t)\,dt = \begin{cases} 0 & t < 0; \\ t & t > 0. \end{cases}$$

Используя эти формулы, можно *воздействия произвольной формы* представить либо суммой бесконечно малых по высоте смещенных ступенчатых функций, либо суммой коротких смещенных прямоугольных импульсов (бесконечно малой длительности). Тогда, суммируя элементарные реакции на такие стандартные воздействия, можно найти всю реакцию.

Важными характеристиками электрической цепи являются переходная и импульсная характеристики.

Переходная характеристика цепи $h_1(t)$ численно равна реакции $f_2(t)$ цепи *без запасов энергии* на *единственное* воздействие *вида единичной ступенчатой функции*

$$f_1(t) = F_{10}\delta_1(t), \qquad (2.9.1)$$

причем в (2.9.1) коэффициент F_{10} равен 1 В или 1 А в зависимости от вида воздействия. Поскольку *реакция не может возникнуть раньше воздействия*, то

$$h_1(t) = h_1^*(t)\delta_1(t) = \begin{cases} h_1^*(t) & t > 0; \\ 0 & t < 0, \end{cases}$$

где $h_1^*(t)$ — непрерывная функция, определенная для любых t.

Способ отыскания переходной характеристики: к цепи при нулевых начальных условиях как бы подключают *источник единичного постоянного уровня* и рассчитывают искомую реакцию. Переходная характеристика будет численно равна этой реакции.

Поскольку при воздействии вида (2.9.1) реакция по принципу пропорциональности будет $f_2(t) = F_{10}h_1(t)$, то размерность переходной характеристики $[h] = [f_2]/[f_1]$.

Импульсная характеристика цепи $h(t)$ численно равна реакции $f_2(t)$ цепи *без запасов энергии* на *единственное* воздействие *вида единичной импульсной функции*

$$f_1(t) = F_{10}\delta(t),$$

где коэффициент F_{10}, равный 1 Вс или 1 Ас, необходим для выравнивания размерности.

Так как $\delta(t) = \delta_1'(t)$, то согласно свойству линейных цепей (принципу дифференцируемости) *импульсная характеристика является производной от переходной характеристики*:

$$h(t) = h_1'(t), \tag{2.9.2}$$

Раскроем формулу (2.9.2) подробно:

$$h(t) = h_1'(t) = d/dt[h_1^*(t)\delta_1(t)] = (dh_1^*/dt)\delta_1(t) + h_1^*(t)\delta(t),$$

где $h_1^*(t)\delta(t) = h_1^*(0)\delta(t)$ по *свойству выборки* δ-функции:

$$f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0).$$

Окончательно получим с учетом непрерывности $h_1^*(t)$:

$$h(t) = h_1'(t) = (dh_1^*/dt)\delta_1(t) + h_1(0+)\delta(t),$$

поскольку $h_1^*(0) = h_1^*(0^-) = h_1^*(0^+) = h_1(0^+)$.

Из определения импульсной характеристики следует размерность:

$$[h] = [f_2]/[F_{10}] = [f_2]/([f_1][t]) = [h_1]/[t].$$

Весовая характеристика второго порядка $h_2(t)$ численно равна реакции $f_2(t)$ цепи *без запасов энергии* на *единственное* воздействие вида *функции единичного наклона*:

$$f_1(t) = t\delta_1(t) = \delta_2(t).$$

Так как функция единичного наклона $\delta_2(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta_1(t)dt$, то и $h_2(t) = \int_{-\infty}^{t} h_1(t)dt$, а при $t > 0$ $h_2(t) = \int_{0}^{t} h_1(t)dt$.

Зная переходную или импульсную характеристику, можно найти реакцию цепи $f_2(t)$ на произвольное воздействие $f_1(t)$ по *интегралам наложения. Интеграл Дюамеля* позволяет для $t > 0$ найти реакцию, используя переходную характеристику,

$$f_2(t) = f_1(0+)h_1(t) + \int_0^t f_1'(\tau)h_1(t - \tau)d\tau, \tag{2.9.3}$$

интеграл свертки — используя импульсную характеристику:

$$f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau)h(t - \tau)d\tau, \tag{2.9.4}$$

причем предполагается, что $f_1(t) = 0$ при $t < 0$.

Примечания: 1) *трудности* взятия интеграла (2.9.4) возникают, если $h(t)$ содержит *слагаемое* с δ-функцией, т. е.

$$h(t) = (dh_1^*/dt)\delta_1(t) + h_1(0+)\delta(t); \qquad (2.9.5)$$

в этом случае рекомендуется использовать следующую расчетную форму интеграла (2.9.4):

$$f_2(t) = h_1(0+)f_1(t) + \int_0^t f_1(\tau)h_0(t-\tau)d\tau, \qquad (2.9.6)$$

где $h_0(t)$ — *составляющая импульсной характеристики, не содержащая* δ*-функцию*, т. е. первое слагаемое в (2.9.5); 2) под интегралом (2.9.3), (2.9.4) время t является параметром, а интегрирование производится по τ; 3) так как $t > 0$, то все функции $\delta_1(t)$ под интегралом (2.9.3), (2.9.4) могут быть опущены.

В случае если воздействие имеет кусочно-линейную форму, его можно описать суммой односторонних линейных функций $\delta_2(t - t_k)$ с некоторыми коэффициентами A_k. Определение этих коэффициентов формализуется и упрощается, если использовать метод двойного дифференцирования, поскольку вторая производная такого воздействия представляется суммой смещенных δ-функций:

$$f_1''(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k \delta(t - t_k);$$

следовательно, само воздействие

$$f_1(t) = \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t}(f''(t)dt)dt = \sum_{k=1}^{n} A_k \delta_2(t - t_k),$$

а реакция тогда

$$f_2(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k h_2(t - t_k).$$

2.9.2. Типовой пример

Схема цепи приведена на рис. 2.9.2, *а*: i_1 — воздействие; $u_2(t)$ — реакция; $L = 6$ Гн; $R_k = 2$ Ом. Найти: $h_1(t)$, $h(t)$, $h_2(t)$ для $u_2(t)$; $u_2(t)$ при $i_1 = 2e^{-2t}\delta_1(t)$; $u_2(t)$ при задании $i_1(t)$ графиком кусочно-линейной формы (рис. 2.9.2, *б*).

А. Находим переходную и импульсную характеристики цепи для реакции $u_2(t)$.

1. $t = 0-$. По определению *переходной характеристики* в цепи рис. 2.9.2, *а* как бы включается *источник* тока *единичного уровня* в момент $t = 0$, поэтому независимые начальные условия равны нулю, т. е. $i_L(0^-) = 0$.

2. $t \to \infty$. Находим *вынужденную* составляющую реакции $u_2(t)$ по эквивалентной схеме замещения рис. 2.9.2, *в*. Так как $i_1 = 1$ А при $t > 0$, то в цепи при $t \to \infty$ *установившийся* режим при постоянном воздействии, следовательно,

$$u_2 = i_1/(G_2 + G_3 + G_4) = 2/3 \text{ В}.$$

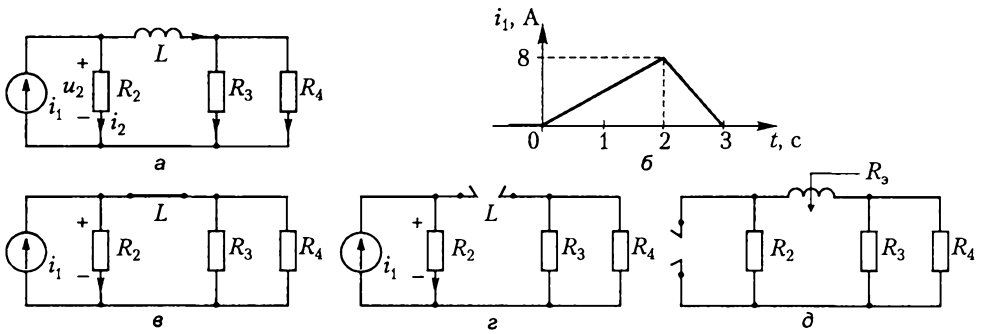


Рис. 2.9.2

3. $t = 0+$. Определяем *зависимое начальное условие* $u_2(0+)$ по эквивалентной схеме замещения рис. 2.9.2, *г*. Здесь выводы индуктивного элемента разомкнуты, так как $i_L(0-) = i_L(0+) = 0$ (по теореме замещения L-элемент при $t = 0$ заменяется *источником тока с нулевым током*, т. е. XX). Очевидно $u_2(0+) = R_2 i_1 = 2$ В.

4. Находим *постоянную времени* цепи τ, для чего рассматриваем схему цепи в свободном режиме (см. рис. 2.9.2, *д*), в которой по сравнению с исходной схемой (см. рис. 2.9.2, *а*) исключен источник тока i_1. Определяем *эквивалентное сопротивление* $R_э$ относительно выводов накопительного элемента L: $R_э = R_2 + R_3 R_4 / (R_3 + R_4) = 3$ Ом, а затем постоянную времени $\tau = L/R_э = 2$ с.

5. *Записываем реакцию* $u_2(t)$ в переходном режиме как сумму вынужденной и свободной составляющих: $u_2(t) = u_{2вын} + u_{2св} = u_{2вын} + A_1 e^{-t/\tau}$; постоянную интегрирования A_1 находим по начальным условиям при $t = 0+$, откуда $A_1 = u_2(0+) - u_{2вын} = 4/3$. Тогда $u_2(t) = 2/3 + 4/3 e^{-0,5t}$ для $t > 0$.

Переходная характеристика численно равна реакции цепи, следовательно, *для любого момента времени* можно записать

$$h_1(t) = h_1^{\bullet}(t)\delta_1(t) = (2/3 + 4/3 e^{-0,5t})\delta_1(t),$$

причем размерность $[h_1] = [u_2]/[i_1] = \text{В/А} = \text{Ом}$.

Импульсная характеристика есть производная от переходной характеристики, поэтому по (2.9.5)

$$h(t) = h_1'(t) = (dh_1^{\bullet}(t)/dt)\delta_1(t) + h_1(0+)\delta(t) = -2/3 e^{-0,5t}\delta_1(t) + 2\delta(t),$$

причем размерность $[h] = [h_1'] = \text{Ом/с}$. Графики $h_1(t)$ и $h(t)$ для реакции $u_2(t)$ приведены на рис. 2.9.3.

Поскольку при $t = 0$ переходная характеритика $h_1(t)$ имеет *разрыв*, равный 2, то *при* ее *дифференцировании появляется дельта-функция* с коэффициентом, равным 2, т. е. *площадь* этой дельта-функции равна 2. Соответственно *при интегрировании* $2\delta(t)$ получим в переходной характристике при $t = 0$ *скачок* (разрыв), значение которого равно 2.

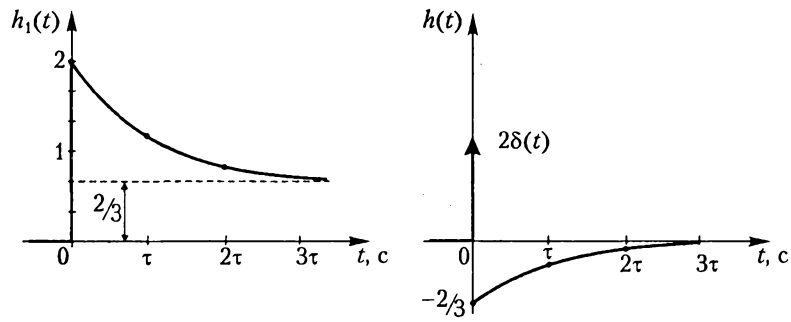


Рис. 2.9.3

Б. Определим при $t > 0$ реакцию $f_2(t) = u_2(t)$ при воздействии $f_1(t) = i_1 = 2e^{-2t}\delta_1(t)$ *по интегралам наложения.*

Записываем (2.9.3)

$$f_2(t) = f_1(0+)h_1(t) + \int_0^t f_1'(\tau)h_1(t-\tau)d\tau,$$

причем при $t > 0$ имеем $f_1(t) = i_1 = 2e^{-2t}$, $h_1(t) = 2/3 + 4/3e^{-0,5t}$, следовательно, $f_1'(\tau) = i_1'(\tau) = -4e^{-2\tau}$; $f_1(0+) = i_1(0+) = 2$; $h_1(t-\tau) = 2/3 + 4/3e^{-0,5(t-\tau)}$, тогда

$$f_2(t) = u_2(t) = 2(2/3 + 4/3e^{-0,5t}) +$$
$$+ \int_0^t (-4e^{-2\tau})(2/3 + 3/4\,e^{-0,5(t-\tau)})\,d\tau = (44/9)e^{-2t} - (8/9)e^{-0,5t}.$$

Используя импульсную характеристику $h(t) = -(2/3)e^{-0,5t}\delta_1(t) + 2\delta(\tau)$, записываем *расчетную формулу* (2.9.6) *интеграла свертки*

$$f_2(t) = u_2(t) = h_1(0^+)f_1(t) + \int_0^t f_1(\tau)h_0(t-\tau)d\tau,$$

причем для $t > 0$ имеем $h_0(t) = -(2/3)e^{-0,5t}$, $h_1(0^+) = 2$, $f_1(t) = i_1(t) = 2e^{-2t}$, следовательно,

$$u_2(t) = 4e^{-2t} + \int_0^t 2e^{-2\tau}(-(2/3)e^{-0,5(t-\tau)})\,d\tau = (44/9)e^{-2t} - (8/9)e^{-0,5t},$$

где $u_{2-c}(t) = -(8/9)e^{-0,5t}$ (так как *постоянная времени* цепи $\tau = 2$ с), $u_{2\text{вын}}(t) = (44/9)e^{-2t}$ (что соответствует *математической форме воздействия*).

В. Найдем реакцию $f_2(t) = u_2(t)$, если воздействие $f_1(t) = i_1(t)$ имеет *кусочно-линейную форму* (см. график на рис. 2.9.4, *б*).

Вначале для $t > 0$ находим весовую характеристику второго порядка $h_2(t) = \int_0^t h_1(t)\,dt =$ $= \int_0^t (2/3 + (4/3)e^{-0,5t})\,dt = (2/3)t - (8/3)e^{-0,5t} + 8/3$; тогда для любого момента времени $h_2(t) = ((2/3)t - (8/3)e^{-0,5t} + 8/3)\delta_1(t)$.

Затем запишем функцию воздействия $f_1(t) = i_1(t)$ аналитически, используя *метод двойного дифференцирования* (рис. 2.9.4).

Очевидно $f_1''(t) = i_1''(t) = 4\delta(t) - 12\delta(t-2) + 8\delta(t-3)$, тогда

$$f_1(t) = i_1(t) = \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t}(i_1''(t)\,dt)\,dt =$$

$$= 4\delta_2(t) - 12\delta_2(t-2) + 8\delta_2(t-3).$$

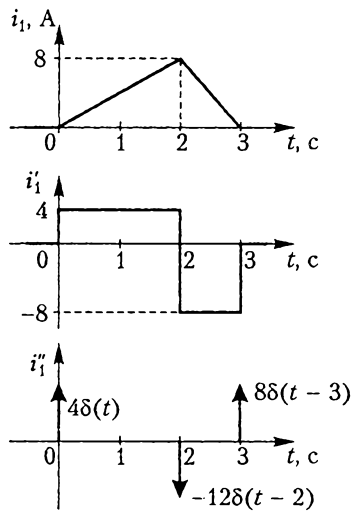


Рис. 2.9.4

Используя *принцип наложения*, найдем реакцию на такое воздействие как сумму реакций на каждое слагаемое воздействия в отдельности:

$$f_2(t) = u_2(t) = 4h_2(t) - 12h_2(t-2) + 8h_2(t-3) =$$

$$= (4/3)[8 + 2t - 8e^{-0,5t}]\delta_1(t) -$$

$$-4[8 + 2(t-2) - 8e^{-0,5(t-2)}]\delta_1(t-2) +$$

$$+ (8/3)[8 + 2(t-3) - 8e^{-0,5(t-3)}]\delta_1(t-3),$$

причем аргумент $(t - t_k)$ в квадратных скобках соответствует математической *записи запаздывающих* относительно друг друга функций, в то время как умножение функции на $\delta_1(t - t_k)$ соответствует тому, что *«произведение» равно нулю при* $t < t_k$.

2.9.3. Заключение

В результате усвоения материала темы необходимо знать определения и графики обобщенных функций $\delta_1(t)$, $\delta(t)$, $\delta_2(t)$, связь между ними и свойство «выборки» дельта-функции; знать определение, способ расчета характеристик цепи $h_1(t)$, $h(t)$, $h_2(t)$ и связь между ними; понимать смысл интегралов наложения и уметь ими пользоваться при расчете реакции на воздействие произвольной формы; знать метод двойного дифференцирования при расчете реакции на воздействие кусочно-линейной формы.

2.10. Начала анализа установившегося синусоидального режима методом комплексных амплитуд

2.10.1. Исходные понятия

При расчетах установившегося режима синусоидальных (т. е. *гармонических*) токов и напряжений удобно использовать «косинусную» форму записи:

$$\begin{cases} u(t) = U_m \cos(\omega t + \alpha_u); \\ i(t) = I_m \cos(\omega t + \alpha_i). \end{cases} \qquad (2.10.1)$$

Основные величины, характерные для гармонических сигналов, представлены в табл. 2.10.1.

Таблица 2.10.1

Величина	Наименование	Единицы измерения
U_m, I_m	Амплитуда, максимальное значение напряжения, тока	Вольт (В) Ампер (А)
U, I	Действующее значение напряжения, тока, причем $U_m = \sqrt{2}U$, $I_m = \sqrt{2}I$	Вольт (В) Ампер (А)
$\gamma(t) = \omega t + \alpha$	Фаза (угол), текущая фаза синусоиды	Градус (...°) Радиан (рад)
α_u, α_i	Начальная фаза напряжения, тока	Градус (...°) Радиан (рад)
$\omega = d\gamma/dt$	Угловая частота, т. е. скорость изменения фазы	(Секунда)$^{-1}$ ($с^{-1}$)
T	Период повторения сигнала	Секунда (с)
$f = 1/T$	Циклическая частота, т. е. число периодов в секунду ($\omega = 2\pi f = 2\pi/T$)	Герц (Гц)
$\varphi = \alpha_u - \alpha_i$	Разность фаз, т. е. сдвиг по фазе между напряжением и током одинаковой частоты	Градус (...°) Радиан (рад)

При синусоидальном воздействии вынужденная (установившаяся) составляющая является также *синусоидальной* с той же частотой ω. При расчетах нужно найти *только амплитуду и начальную фазу* реакции. Однако решение дифференциальных уравнений во временной области при гармонических сигналах является трудоемкой задачей. Поэтому для определения *вынужденной* составляющей реакции используется *метод комплексных амплитуд* (МКА). При этом параметр вре-

мени исключается из расчета. Вместо синусоид (2.10.1) вводятся комплексные амплитуды напряжения $\dot{U}_m = U_m e^{j\alpha_u}$ и тока $\dot{I}_m = I_m e^{j\alpha_i}$. В результате дифференциальные уравнения в t-области заменяются алгебраическими с использованием *комплексных амплитуд*, содержащих *искомую информацию* об амплитудах и начальных фазах синусоид.

Закон токов Кирхгофа (ЗТК) *в комплексной форме* имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{I}_{mk} = 0, \qquad (2.10.2)$$

где n — число ветвей узла (или сечения); $\dot{I}_{mk}$ — комплексная амплитуда тока k-й ветви.

Закон напряжений Кирхгофа (ЗНК)

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{U}_{mk} = 0, \qquad (2.10.3)$$

где n — число ветвей контура; $\dot{U}_{mk}$ — комплексная амплитуда напряжения k-й ветви.

Таким образом, в (2.10.2) и (2.10.3) вместо синусоид (2.10.1) суммируются векторы, которые при суммировании удобно представить *в алгебраической форме* записи.

Кроме того, для любого пассивного двухполюсника справедлив *закон Ома в комплексной* форме, причем комплексное сопротивление

$$Z = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{U_m e^{j\alpha_u}}{I_m e^{j\alpha_i}} = |Z| e^{j\varphi},$$

или, переходя *от показательной* формы записи *к алгебраической*,

$$Z = |Z| e^{j\varphi} = |Z| \cos\varphi + j|Z| \sin\varphi = r + jx,$$

где $|Z| = U_m / I_m = U/I$ — *модуль* комплексного сопротивления (в омах); $\varphi = \alpha_u - \alpha_i$ — *разность* начальных *фаз* напряжения и тока, которая является *фазой* (аргументом) комплексного сопротивления; $r = \mathrm{Re}(Z) = |Z| \cos\varphi \geq 0$ — *активная* составляющая сопротивления Z; $x = \mathrm{Im}(Z) = |Z| \sin\varphi$ — *реактивная* составляющая, которая может быть и отрицательной.

Комплексная проводимость двухполюсника

$$Y = 1/Z = \dot{I}_m / \dot{U}_m = |Y| e^{j\psi} = g + jb,$$

где $|Y| = I_m / U_m = I/U = 1/|Z|$ измеряется в сименсах (См); $g = |Y| \cos\psi \geq 0$ — активная составляющая комплексной проводимости; b — реактивная составляющая; ψ — фаза комплексной проводимости.

Комплексные сопротивления и проводимости для R-, L- и C-элементов приведены в табл. 2.10.2.

Таблица 2.10.2

Элемент	Сопротивление Z	Проводимость Y
R	R	$G = 1/R$
L	$Z_L = j\omega L = \omega L e^{j90^\circ}$	$Y_L = \frac{1}{j\omega L} = -j\frac{1}{\omega L} = \frac{1}{\omega L} e^{-j90^\circ}$
C	$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j90^\circ}$	$Y_C = j\omega C = \omega C e^{j90^\circ}$

Широко используются в МКА также *комплексные действующие значения* (сокращенно — комплексы) напряжений и токов:

$$\dot{U} = Ue^{j\alpha_u} = \dot{U}_m/\sqrt{2},\ \ \dot{I} = Ie^{j\alpha_i} = \dot{I}_m/\sqrt{2} = 0{,}707\dot{I}_m.$$

2.10.2. Примеры типовых задач

Пример 2.10.1. Напряжение $u(t) = 311\cos(314t - 60^\circ)$. Найти $U_m, \dot{U}_m, U, \omega, f, T, \alpha$ и построить график $u(t)$, т. е. временную диаграмму изменения напряжения.

Согласно (2.10.1) имеем $U_m = 311$ В; $U = U_m/\sqrt{2} = 220$ В; $\omega = 314$ с$^{-1}$; $f = \omega/(2\pi) = 314/6{,}28 = 50$ Гц; $T = 1/f = 1/50 = 0{,}02$ с; $\alpha_u = -60^\circ \div -\pi/3$ рад.

Строго говоря, приведенная запись $u(t)$ *некорректна*, так как ωt задано в радианах, а α_u записано в градусах. Однако такая запись широко используется, так как при построении графиков синусоид удобнее *угол* $\gamma = \omega t + \alpha$ *откладывать в градусах*.

Следует запомнить, что при косинусной форме записи синусоидальных функций начальная фаза $\alpha_u = -60^\circ < 0$ определяет (рис. 2.10.1, *а*) *смещение* максимума графика синусоиды *вправо* на 60° относительно начала координат (*при* $\alpha > 0$ *максимум смещается влево* на угол α).

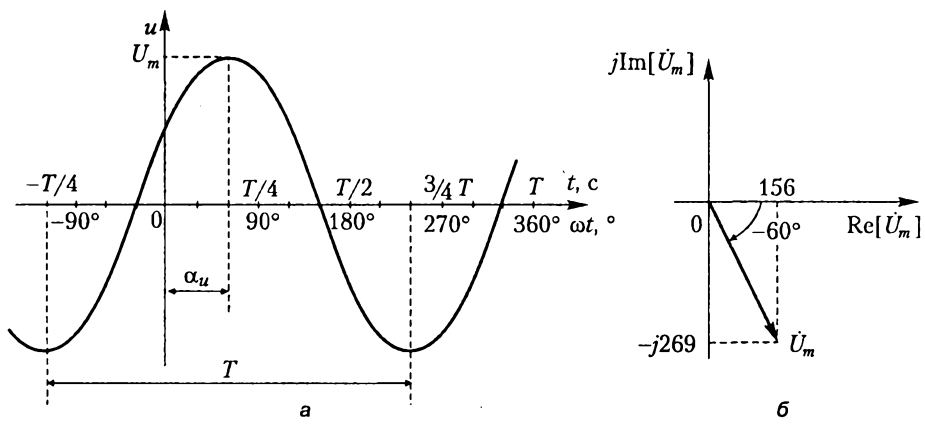


Рис. 2.10.1

При построении графиков синусоид рекомендуется для контроля (см. рис. 2.10.1, *а*) *размечать ось* абсцисс как в угловой мере ωt (т. е. в градусах), так и *в долях периода* (т. е. в секундах). При этом всегда $T \div 360°$, $T/2 \div 180°$, $T/4 \div 90°$, где «÷» — знак соответствия.

Комплексная амплитуда $\dot{U}_m$ может быть представлена вектором (рис. 2.10.1, *б*) на комплексной плоскости:

$$\dot{U}_m = 311e^{-j60°} = \mathrm{Re}[\dot{U}_m] + j\,\mathrm{Im}[\dot{U}_m] = 311(\cos 60° - j\sin 60°) = 156 - j269.$$

Если вместо комплексной амплитуды использовать комплексное действующее значение, то $\dot{U} = \dot{U}_m/\sqrt{2} = Ue^{j\alpha_u} = 220e^{-j60°}$.

Пример 2.10.2. В узле рис. 2.10.2, *а* значение синусоидальных токов

$$i_1(t) = 10\cos(\omega t + 60°),\ i_2(t) = 10\cos(\omega t - 60°),$$

$i_3(t) = 10\cos(\omega t + 135°)$. Найти i_4 и построить *векторную диаграмму* (ВД).

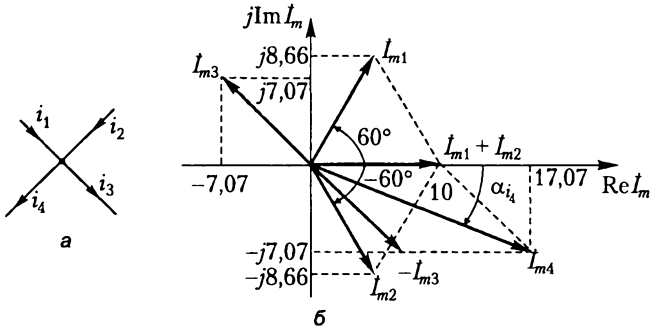


Рис. 2.10.2

ЗТК во временной области $i_4 = i_1 + i_2 - i_3$ соответствует в МКА аналогичная формула для комплексных амплитуд токов:

$$\dot{I}_{m4} = \dot{I}_{m1} + \dot{I}_{m2} - \dot{I}_{m3}. \qquad (2.10.4)$$

Находим комплексные амплитуды заданных токов, изображая их одновременно векторами на комплексной плоскости рис. 2.10.2, *б*:

$$\dot{I}_{m1} = 10e^{j60°} = 10\cos 60° + j10\sin 60° = 5 + j8{,}66;$$

$$\dot{I}_{m2} = 10e^{-j60°} = 10\cos(-60°) + j10\sin(-60°) = 5 - j8{,}66;$$

$$\dot{I}_{m3} = 10e^{j135°} = 10\cos 135° + j10\sin 135° = -7{,}07 + j7{,}07.$$

Рекомендация: переход от записи комплексного числа в алгебраической форме к записи в показательной форме (и обратно) очевиден, если представлять его *вектором на комплексной плоскости*, например $\dot{I}_m = I_m e^{j\alpha} = a + jb$; тогда модуль $|\dot{I}_m| = I_m = \sqrt{a^2 + b^2}$ — это длина вектора; $\alpha = \mathrm{arctg}(b/a)$ — фаза вектора; $a = I_m \cos\alpha = \mathrm{Re}\,\dot{I}_m$, $b = I_m \sin\alpha = \mathrm{Im}\,\dot{I}_m$ — проекции вектора на вещественную и мнимую оси.

В соответствии с изложенным находим

$$\dot{I}_{m4} = 5 + j8{,}66 + 5 - j8{,}66 + 7{,}07 - j7{,}07 =$$

$$= 17{,}07 - j7{,}07 = \sqrt{17{,}07^2 + 7{,}07^2}\, e^{j\operatorname{arctg}(-7{,}07/17{,}07)} = 18{,}5 e^{-j22{,}5°},$$

чему соответствует $i_4(t) = 18{,}5\cos(\omega t - 22{,}5°)$.

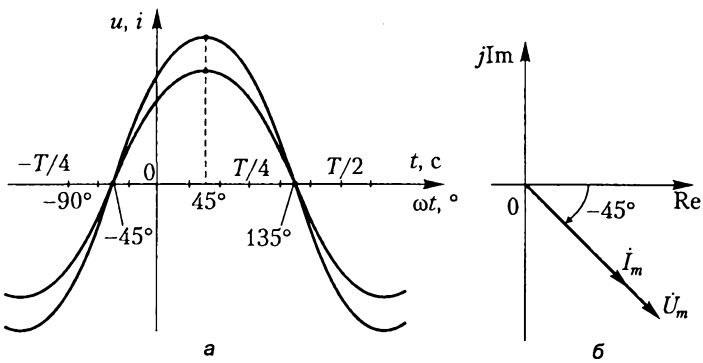
Еще раз заметим, что *построение вектора*, например, $\dot{I}_m = 10e^{j60°} = 5 + j8{,}66$ можно осуществить *двумя способами*. При использовании алгебраической записи по вещественной и мнимой осям комплексной плоскости откладываются соответствующие составляющие. При показательной форме записи (полярные координаты) из начала координат под углом 60° *от положительного направления вещественной оси* проводится луч (положительные углы $\alpha > 0$ откладываются *против* направления вращения часовой стрелки). На этом луче в выбранном масштабе откладывается модуль комплексного числа (рис. 2.10.2, *б*) $\dot{I}_{m4}$.

Аналогично строятся другие известные векторы. Для определения по ВД вектора $\dot{I}_{m4}$ выражение (2.10.4) лучше представить в виде $\dot{I}_{m4} = \dot{I}_{m1} + \dot{I}_{m2} + (-\dot{I}_{m3})$, т. е. удобнее изобразить на ВД вектор, противоположный вектору $\dot{I}_{m3}$. После этого по правилам сложения векторов можно построить результирующий вектор $\dot{I}_{m4}$.

Пример 2.10.3. К резистивному элементу $R = 2$ Ом приложено напряжение $u(t) = 10\cos(2t - 45°)$. Определить ток $i(t)$, построить графики напряжения и тока, а также ВД.

В случае резистивного элемента расчет можно производить как во временной области, так и в комплексной, так как начальные фазы синусоид напряжения и тока совпадают (колебания находятся в фазе). Для R-элемента справедливо выражение $R = u(t)/i(t)$, следовательно, $i(t) = u(t)/R = 5\cos(2t - 45°)$. График тока представлен на рис. 2.10.3, *а*, причем период $T = 2\pi/\omega \approx 3$ с.

В комплексной форме $\dot{I}_m = \dot{U}_m/R = 5e^{-j45°}$, чему соответствует $i(t) = 5\cos(2t - 45°)$. Комплексные амплитуды напряжения $\dot{U}_m = 10e^{-j45°}$ и тока $\dot{I}_m = 5e^{-j45°}$ показаны качественно на рис. 2.10.3, *б*.



2.10.3

Пример 2.10.4. Ток индуктивного элемента $i_L(t) = 8\cos(2t - 30°)$ приведен на рис. 2.10.4, *а*; $L = 2$ Гн. Найти $u_L(t)$, построить графики $i_L(t)$, $u_L(t)$ и ВД.

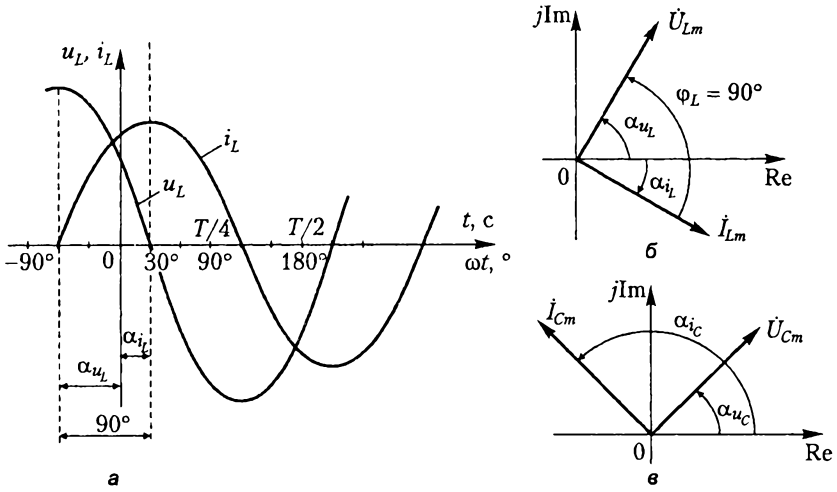


Рис. 2.10.4

Для *реактивных элементов* (L и C) расчет лучше вести в комплексной форме, используя МКА: $\dot{I}_{Lm} = 8e^{-j30°}$; $Z_L = j\omega L = \omega L e^{j90°} = j4$; $\dot{U}_{Lm} = Z_L \dot{I}_{Lm} = 32e^{j60°}$, следовательно, $u_L(t) = 32\cos(2t + 60°)$.

Следует запомнить, что *график* синусоиды *напряжения* L-элемента *опережает* на четверть периода, т. е. на 90°, *график* синусоиды *тока* (см. рис. 2.10.4, *а*). Векторы $\dot{U}_{Lm}$ и $\dot{I}_{Lm}$ на рис. 2.10.4, *б* также определяют на ВД сдвиг $\varphi_L = \alpha_{uL} - \alpha_{iL} = 60° - -(-30°) = 90°$.

Пример 2.10.5. Напряжение емкостного элемента $u_C(t) = 5\cos(3t + 45°)$; $C = 4$ Ф. Найти $i_C(t)$, построить графики u_C, i_C и ВД.

Используя МКА, получим $\dot{U}_{Cm} = 5e^{j45°}$; $Y_C = j\omega C = \omega C e^{j90°} = 12e^{j90°}$; $\dot{I}_{Cm} = Y_C \dot{U}_{Cm} = 60e^{j135°}$, следовательно, $i_C(t) = 60\cos(3t + 135°)$, т. е. $\varphi_C = \alpha_{uC} - \alpha_{iC} = -90°$.

Попробуйте самостоятельно построить графики u_C и i_C по аналогии с примером 2.10.4. Обратите внимание, что *у емкостного элемента ток опережает напряжение на четверть периода*, т. е. на 90°; следовательно, график тока «расположен левее» графика напряжения. Векторы $\dot{U}_{Cm}$ и $\dot{I}_{Cm}$ изображены на рис. 2.10.4, *в*.

Вопрос 1. Как перейти от записи синусоидального сигнала к соответствующей комплексной амплитуде (и обратно)?

Вопрос 2. Как перейти от показательной формы записи комплексной амплитуды к алгебраической (и обратно)?

Вопрос 3. В чем аналогия расчета R-цепей и МКА?

Вопрос 4. В чем аналогия графиков синусоид напряжения и тока R-, L-, C-элементов с ВД этих элементов?

Вопрос 5. Как построить график синусоидального сигнала? Где его максимумы? Как разметить ось абсцисс?

Вопрос 6. Что такое комплексное действующее значение?

2.10.3. Заключение

В результате усвоения материала темы необходимо знать основные положения МКА (переход от синусоидальной функции к комплексной амплитуде; ЗТК и ЗНК в комплексной форме; комплексные сопротивления R-, L-, C-элементов; фазовые соотношения между напряжением и током элементов; переход от алгебраической формы описания вектора к показательной *в любом квадранте*); уметь строить графики синусоидальных сигналов и ВД элементов цепи.

2.11. Расчет установившегося синусоидального режима методом комплексных амплитуд

2.11.1. Исходные понятия

Для расчета цепи по МКА рекомедуется изобразить комплексную схему замещения цепи. Внешне эта схема выглядит так же, как и в t-области. Отличие в том, что все токи и напряжения описываются их комплексными амплитудами (или комплексными действующими значениями), а C- и L-элементы цепи описываются их комплексными сопротивлениями или проводимостями. *До расчета* на схему наносят направления токов пассивных элементов и согласованные с токами полярности напряжений.

Помимо аналитических расчетов очень удобным бывает построение векторных диаграмм. Их можно строить *количественно* (*в масштабе*) по результатам расчетов, тогда они позволяют наглядно представлять соотношения токов и напряжений ветвей цепи. Однако очень *часто ВД строят качественно*, причем до начала аналитического расчета.

Использование МКА позволяет применять *все методы расчета*, освоенные при изучении *резистивных цепей*, например метод уравнений Кирхгофа, метод преобразования схем, метод контурных токов и т. д. Целью расчета является определение комплексной амплитуды искомой реакции, после чего легко восстанавливается запись реакции во временной области

2.11.2. Примеры типовых задач

Пример 2.11.1. Качественно построить ВД для схемы (рис. 2.11.1, *а*).

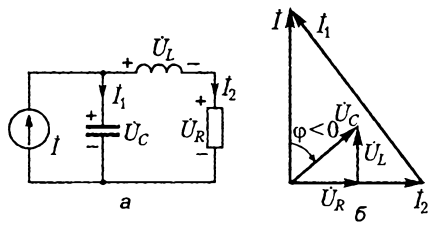


Рис. 2.11.1

На схему наносим направления токов и полярности напряжений R-, L-, C-элементов. *Начинать* построение ВД в данной схеме удобно с тока $\dot{I}_2$, общего для R-

и L-элементов (что *аналогично* началу расчета МПВ). В этом случае придется только складывать векторы. Вектор напряжения на R-элементе $\dot{U}_R$ сонаправлен с током $\dot{I}_2$, а вектор $\dot{U}_L$ опережает ток $\dot{I}_2$ на 90°. Можно все векторы строить из одной точки, но часто *удобнее* делать так, как показано на рис. 2.11.1, *б*. В этом случае начало вектора $\dot{U}_L$ строится от конца вектора $\dot{U}_R$, а суммарный вектор $\dot{U}_C = \dot{U}_R + \dot{U}_L$ строится из начала первого вектора в конец последнего. Вектор тока $\dot{I}_1$ опережает вектор $\dot{U}_C$ на 90°. Его тоже удобно строить из конца вектора $\dot{I}_2$. Тогда по ЗТК легко строится вектор $\dot{I}$ тока источника тока. Качественное построение предполагает *произвольные длины* векторов. Угол φ между током источника $\dot{I}$ и напряжением на входе цепи U_C в приведенном примере получился отрицательным (ток опережает напряжение). Однако, изменяя длины некоторых векторов, можно получить $\varphi \geq 0$. Если есть дополнительные сведения, например начальная фаза хоть одного вектора, можно построить оси координат.

Примечание: при качественном построении ВД широко используются мнемонические правила, например ULICU (в русской транскрипции – «УЛИЦУ»), которые позволяют легко запомнить, что на ВД L-элемента вектор $\dot{U}$ опережает $\dot{I}$ на 90°, а на ВД C-элемента $\dot{I}$ опережает $\dot{U}$ на 90°.

Пример 2.11.2. В цепи (рис. 2.11.2, *а*) $R_1 = R_2 = 2$ Ом, $C = 0{,}5$ Ф, $L = 2$ Гн, $u(t) = 10\sqrt{2}\cos(t + 90°)$. Качественно построить ВД, определить токи и напряжения ветвей.

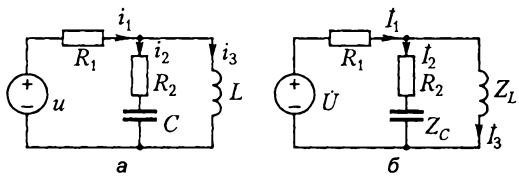


Рис. 2.11.2

В исходной схеме, как всегда, *показываем направления* токов ветвей. Полярности напряжения R-, L-, C-элементов не указываем, но считаем их согласованными с токами, т. е. в пассивных элементах ток протекает от «+» к «–». Можно изобразить комплексную схему замещения (рис. 2.11.2, *б*), которая с точностью до соответствия $i \div \dot{I}$, $u \div \dot{U}$, $C \div Z_C$, $L \div Z_L$ совпадает с исходной (рис. 2.11.2, *а*). Попробуйте самостоятельно построить ВД.

Рекомендация: здесь удобнее начинать с построения вектора $\dot{I}_2$.

Как известно, в зависимости от сложности цепи и поставленных целей инженер выбирает тот или иной метод расчета. В данной цепи всего один источник энергии и требуется найти все токи и напряжения. Выберем метод преобразования схем.

Рекомендация: чтобы избежать ошибок в МКА, не следует сразу записывать громоздкие выражения.

При подготовке к расчету *вначале* записываем комплексные амплитуды воздействий и комплексные сопротивления L-, C-элементов:

$$\dot{U}_m = U_m e^{j\alpha_u} = 10\sqrt{2}e^{j90^\circ};\ Z_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j2 = 2e^{-j90^\circ};\ Z_L = j\omega L = j2 = 2e^{j90^\circ}.$$

Далее находим комплексное сопротивление участка R_2C:

$$Z_2 = R_2 + Z_C = R_2 - j\frac{1}{\omega C} = 2 - j\frac{1}{1\cdot 0{,}5} = 2 - j2.$$

Так как участок R_2C параллелен L-элементу, удобно получить

$$Y_2 = \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{2-j2} = \frac{1}{2(1-j)} = \frac{1+j}{2\cdot 2} = \frac{1}{4} + j\frac{1}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{2}e^{j45^\circ},$$

а затем $Y_{23} = Y_2 + Y_L = Y_2 + \frac{1}{Z_L} = \frac{1}{4} + j\frac{1}{4} - j\frac{1}{2} = \frac{1}{4}(1-j)$.

Участок Y_{23} соединен последовательно с R_1, поэтому находим вначале

$$Z_{23} = \frac{1}{Y_{23}} = \frac{4}{1-j} = \frac{4(1+j)}{2} = 2 + j2 = 2\sqrt{2}e^{j45^\circ},$$

откуда входное сопротивление

$$Z_{вх} = R_1 + Z_{23} = 4 + j2 = \sqrt{20}e^{j\operatorname{arctg}0{,}5} = 2\sqrt{5}e^{j27^\circ}.$$

Ток через элемент R_1

$$\dot{I}_{1m} = \frac{\dot{U}_m}{Z_{вх}} = \frac{10\sqrt{2}e^{j90^\circ}}{2\sqrt{5}e^{j27^\circ}} = \frac{10\sqrt{2}\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\sqrt{5}}e^{j63^\circ} = \sqrt{10}e^{j63^\circ},$$

следовательно, $\dot{U}_{1m} = R_1\dot{I}_{1m} = 2\sqrt{10}e^{j63^\circ}$.

В t-области $i_1(t) = \sqrt{10}\cos(t+63^\circ)$, $u_1(t) = 2\sqrt{10}\cos(t+63^\circ)$.

Напряжение и ток L-элемента

$$\dot{U}_{Lm} = Z_{23}\dot{I}_{1m} = 2\sqrt{2}e^{j45^\circ}\sqrt{10}e^{j63^\circ} = 4\sqrt{5}e^{j108^\circ};$$

$$\dot{I}_{Lm} = \frac{\dot{U}_{Lm}}{Z_L} = \frac{4\sqrt{5}e^{j108^\circ}}{2e^{j90^\circ}} = 2\sqrt{5}e^{j18^\circ}.$$

В t-области $u_L(t) = 4\sqrt{5}\cos(t+108^\circ)$, $i_L(t) = 2\sqrt{5}\cos(t+18^\circ)$.

Далее находим

$$\dot{I}_{2m} = Y_2\dot{U}_{Lm} = \frac{1}{4}\sqrt{2}e^{j45^\circ}4\sqrt{5}e^{j108^\circ} = \sqrt{10}e^{j153^\circ}.$$

$$\dot{U}_{R2m} = R_2\dot{I}_{2m} = 2\sqrt{10}e^{j153^\circ};\ \dot{U}_{Cm} = Z_C\dot{I}_{2m} = 2e^{-j90^\circ}\sqrt{10}e^{j153^\circ} = 2\sqrt{10}e^{j63^\circ}.$$

В t-области

$i_2(t) = \sqrt{10}\cos(t+153^\circ)$, $u_{R2}(t) = 2\sqrt{10}\cos(t+153^\circ)$, $u_C(t) = 2\sqrt{10}\cos(t+63^\circ)$.

По результатам расчета можно построить *количественную* ВД (для этого необходимо векторы строить в соответствии с выбранными масштабами для токов и напряжений).

Пример 2.11.3. Для схемы (рис. 2.11.3) записать систему уравнений по методу контурных токов (МКТ). Принять $|Z_k| = 2$ Ом, $\dot{U}_{01} = 10\sqrt{2}e^{j45^\circ}$; $\dot{U}_{03} = 10$; $\dot{U}_{06} = -j10$.

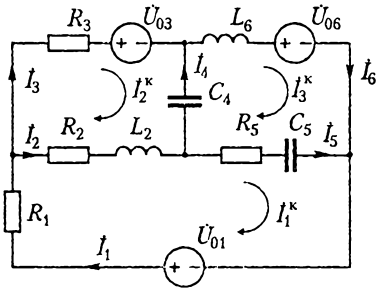


Рис. 2.11.3

Выбираем ячейки в качестве независимых контуров, тогда

$$Z_{11} = R_1 + R_2 + Z_{L2} + R_5 + Z_{C5} = 2 + 2 + j2 + 2 - j2 = 6;$$

$$Z_{22} = R_2 + R_3 + Z_{L2} + Z_{C4} = 2 + 2 + j2 - j2 = 4;$$

$$Z_{33} = R_5 + Z_{C5} + Z_{C4} + Z_{L6} = 2 - j2 - j2 + j2 = 2 - j2;$$

$$Z_{12} = Z_{21} = -(R_2 + Z_{L2}) = -2 - j2;$$

$$Z_{13} = Z_{31} = -(R_5 + Z_{C5}) = -(2 - j2) = -2 + j2;$$

$$Z_{23} = Z_{32} = -Z_{C4} = j2;$$

$$\dot{U}_1^к = \dot{U}_{01} = 10\sqrt{2}e^{j45^\circ} = 10 + j10;$$

$$\dot{U}_2^к = -\dot{U}_{03} = -10;\ \dot{U}_3^к = -\dot{U}_{06} = j10.$$

Искомая система уравнений МКТ

$$\begin{cases} 6\dot{I}_1^к - (2 + j2)\dot{I}_2^к - (2 - j2)\dot{I}_3^к = 10 + j10; \\ -(2 + j2)\dot{I}_1^к + 4\dot{I}_2^к + j2\dot{I}_3^к = -10; \\ -(2 - j2)\dot{I}_1^к + j2\dot{I}_2^к + (2 - j2)\dot{I}_3^к = j10. \end{cases}$$

Самостоятельно запишите формулы для расчета токов ветвей через контурные токи, которые могут быть вычислены из приведенной системы уравнений.

2.11.3. Расширение применения МКА

До сих пор МКА применялся к расчету установившегося (вынужденного) режима *при синусоидальных* (точнее — гармонических) токах и напряжениях источни-

ков. Однако МКА можно применять для расчета вынужденной составляющей решения при воздействиях вида *экспоненциальных колебаний*:

$$u(t) = U_m e^{\pm\sigma t}\cos(\omega t + \alpha_u);\ i(t) = I_m e^{\pm\sigma t}\cos(\omega t + \alpha_i), \qquad (2.11.1)$$

а также при экспоненциальных воздействиях:

$$u(t) = U_m e^{\pm\sigma t};\ i(t) = I_m e^{\pm\sigma t}, \qquad (2.11.2)$$

отраженных в приведенной таблице.

Вид сигнала	Комплексная амплитуда $\dot{U}_m$	Комплексная частота s
$u(t) = U_m e^{-\sigma t}\cos(\omega t + \alpha)$	$U_m e^{j\alpha}$	$-\sigma + j\omega$
$u(t) = U_m \cos(\omega t + \alpha)$	$U_m e^{j\alpha}$	$j\omega$
$u(t) = U_m e^{-\sigma t}$	U_m	$-\sigma$

Очевидно, что синусоидальные сигналы и сигналы вида (2.11.2) являются частными случаями (2.11.1). При этом также используют понятие комплексной амплитуды и вводят (см. таблицу) понятие комплексной обобщенной частоты s.

Во всех случаях *методика* расчета *остается одинаковой*: используют комплексные амплитуды токов и напряжений; сопротивления накопителей определяют по формулам $Z_L = sL$, $Z_C = 1/(Cs)$. Целью расчета по-прежнему остается вычисление комплексной амплитуды реакции.

Пример 2.11.4. В цепи рис. 2.11.4 $i(t) = 10e^{-3t}\sin 2t$, $G = 3$ См, $C = 2$ Ф. Определить $u(t)$ для вынужденной составляющей решения уравнений цепи.

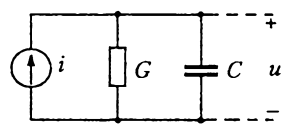


Рис. 2.11.4

Для получения комплексной амплитуды тока запишем его в «косинусной» форме $i(t) = 10e^{-3t}\cos(2t - 90°)$. Тогда $\dot{I}_m = 10e^{-j90°}$. Комплексная частота $s = -3 + j2$. Проводимость C-элемента $Y_C = 1/Z_C = sC = (-3 + j2)2 = -6 + j4$. Входная проводимость $Y = G + Y_C = -3 + j4 = 5e^{j127°}$. Итак,

$$\dot{U}_m = \frac{\dot{I}_m}{Y} = \frac{10e^{-j90°}}{5e^{j127°}} = 2e^{-j217°} = 2e^{j143°},$$

следовательно, $u(t) = 2e^{-3t}\cos(2t + 143°)$.

Внимание! МКА нельзя применять в случае совпадения частоты воздействия s с одной из собственных частот цепи. Так, в цепи на рис. 2.11.4 собственная частота, т. е. корень характеристического уравнения $s_1 = -1/\tau = -1/(RC) = -G/C = -3/2$. Поэтому при сигнале $i(t) = 10e^{-3t/2}$ МКА применять нельзя, так как в этом случае $Y = G + Cs = 3 - 3 = 0$. Во всех остальных случаях этот метод очень удобен. Для практики решите задачу (рис. 2.11.4), если $i(t) = 10e^{-3t}$.

Вопрос 1. Чем отличается качественное построение ВД от количественного построения ее по результатам расчета?

Вопрос 2. С какого вектора удобно начинать качественное построение ВД?

Вопрос 3. Как проверить ЗТК и ЗНК по векторной диаграмме?

Вопрос 4. Как применить метод эквивалентного источника напряжения для определения i_2 в схеме на рис. 2.11.2?

Вопрос 5. Как эквивалентно преобразовать источники напряжения в цепи рис. 2.11.3 к источникам тока?

Вопрос 6. Что такое комплексная частота? Чему она равна при воздействии $u\,(t) =$ $=$ const?

2.11.4. Заключение

В результате усвоения материала темы необходимо уметь качественно строить векторные диаграммы простых схем, уметь производить расчеты, используя МКА, выбирать рациональные методы решения и делать необходимые преобразования схем.

2.12. Мощность в установившемся синусоидальном режиме

2.12.1. Исходные понятия

Мгновенная мощность $p(t)$ есть скорость изменения энергии во времени и *при согласованной* полярности напряжения двухполюсника (ДП) с направлением тока ДП определяется по формуле $p(t) = u(t)i(t)$. Если полярность несогласована, то $p(t) = -u(t)i(t)$. При $p(t) > 0$ ДП *потребляет* энергию, а при $p(t) < 0$ *генерирует* энергию или *возвращает* энергию, запасенную в его L- и C-элементах.

Баланс мощности: сумма мгновенных мощностей всех элементов равна нулю: $\sum p_k(t) = 0$, где k — номер элемента.

В *установившемся синусоидальном* режиме при напряжении $u(t) = \sqrt{2}U\cos(\omega t + \alpha_u)$ и токе $i(t) = \sqrt{2}I\cos(\omega t + \alpha_i)$ мгновенная мощность ДП при согласованной полярности представляет собой *периодическую функцию* времени *удвоенной* частоты и определяется по формуле

$$p(t) = P + P_S\cos(2\omega t + 2\alpha_i + \varphi),$$

где $P = UI\cos\varphi$ — *активная* составляющая мощности, т. е. постоянная составляющая $p(t)$, ее *среднее значение за период*; $P_S = S = UI$ — *полная* мощность, т. е. амплитуда периодической составляющей $p(t)$; $\varphi = \alpha_u - \alpha_i$ — *сдвиг фаз напряжения и тока* ДП.

В силовой электротехнике используют также понятие *реактивной мощности* ДП $P_Q = UI\sin\varphi$, так что $P = P_S\cos\varphi$, $P_Q = P_S\sin\varphi$, $P^2 + P_Q^2 = P_S^2$.

В установившемся синусоидальном режиме расчет электрических цепей осуществляется методом комплексных амплитуд. Активная, реактивная и полная мощности ДП находятся как составляющие так называемой *комплексной* мощности:

$$\tilde{P}_S = \dot{U}\dot{I} = ZI^2 = \dot{Y}U^2 = P_S e^{j\varphi} = P_S\cos\varphi + jP_S\sin\varphi = P + jP_Q, \qquad (2.12.1)$$

где $\dot{U} = Ue^{j\alpha_u}$ — комплекс напряжения ДП; $\dot{I} = Ie^{-j\alpha_i}$ — *сопряженный* комплекс тока ДП; $Z = r + jx = |Z|e^{j\varphi}$ — комплексное сопротивление ДП; $\dot{Y} = g - jb = |Y|e^{j\varphi}$ — сопряженная комплексная проводимость ДП.

Также используют следующие формулы:

$$\begin{cases} P = UI\cos\varphi = |Z|I^2\cos\varphi = |Y|U^2\cos\varphi = rI^2 = gU^2; \\ P_Q = UI\sin\varphi = |Z|I^2\sin\varphi = |Y|U^2\sin\varphi = xI^2 = -bU^2; \\ P_S = UI = |Z|I^2 = |Y|U^2 = |\tilde{P}_S|. \end{cases}$$

При несогласованной полярности (например, у источников) формула (2.12.1) принимает вид

$$\tilde{P}_S = -\dot{U}\dot{I}.$$

В цепи всегда имеет место баланс активной, реактивной и комплексной мощностей:

$$\sum \tilde{P}_{Sk} = \sum P_k + j\sum P_{Qk} = 0,$$

где k — номер элемента цепи.

Для пассивных R-, L-, C-элементов основные формулы мощностей имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &P_R = U_R I_R \cos 0° = RI_R^2 = GU_R^2 > 0,\ P_{QR} = 0,\ P_{SR} = P_R;\\ &P_L = 0,\ P_{QL} = U_L I_L \sin 90° = |Z_L| I_L^2 = |Y_L| U_L^2 > 0,\ P_{SL} = P_{QL};\\ &P_C = 0,\ P_{QC} = U_C I_C \sin(-90°) = -|Z_C| I_C^2 = -|Y_C| U_C^2 < 0,\ P_{SC} = -P_{QC}. \end{aligned}\right\} \quad (2.12.2)$$

В пассивном ДП вседа выполняется баланс активной, реактивной и комплексной мощностей:

$$\left.\begin{aligned} &P_{Дп} = U_{Дп} I_{Дп} \cos\varphi_{Дп} = \sum P_{Rk} \geq 0;\\ &P_{QДп} = U_{Дп} I_{Дп} \sin\varphi_{Дп} = \sum P_{QLk} + \sum P_{QCk};\\ &\tilde{P}_{SДп} = \dot{U}_{Дп} \dot{I}_{Дп} = \sum \tilde{P}_{Sk}. \end{aligned}\right\} \quad (2.12.3)$$

Из (2.12.3) следует, что *активная* мощность (т. е. *действительно потребляемая* в ДП мощность) расходуется только в R-элементах ДП, а реактивная мощность — в L- и C-элементах, причем согласно (2.12.2) $P_{QCk} \leq 0$. Кроме того, из (2.12.2), (2.12.3) следует, что у любого пассивного ДП

$$\cos\varphi_{Дп} \geq 0,\ -90° \leq \varphi_{Дп} \leq +90°, \quad (2.12.4)$$

т. е. (2.12.4) определяет *ограничение сдвига фаз* между током и напряжением пассивного ДП.

2.12.2. Примеры типовых задач

Пример 2.12.1. Дана цепь (рис. 2.12.1, *а*): $\dot{I} = 2e^{-j45°}$; $Z_1 = Z_5 = j2$; $Z_2 = -j2$; $Z_3 = -j$; $Z_4 = 1$. Найти: $\tilde{P}_{Sk}$, $\tilde{P}_S$, P_Q, P, P_S, φ. Построить графики $u(t)$, $i(t)$, $p(t)$. Проверить баланс мощности.

Проставим вначале на схеме цепи направления токов в элементах и полярности напряжений (которые у пассивных элементов всегда согласованы). Очевидно, ток источника $\dot{I}$ делится на токи $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$, а затем $\dot{I}_2$ — на токи $\dot{I}_3$, $\dot{I}_5$.

Исходные расчетные формулы имеют вид:

$$\dot{U} = \dot{I}Z_{вх} = \dot{I}_1 Z_1 = \dot{I}_2 Z_{2345};\ \dot{U}_5 = \dot{I}_2 Z_{345} = \dot{I}_3 Z_{34} = \dot{I}_5 Z_5,$$

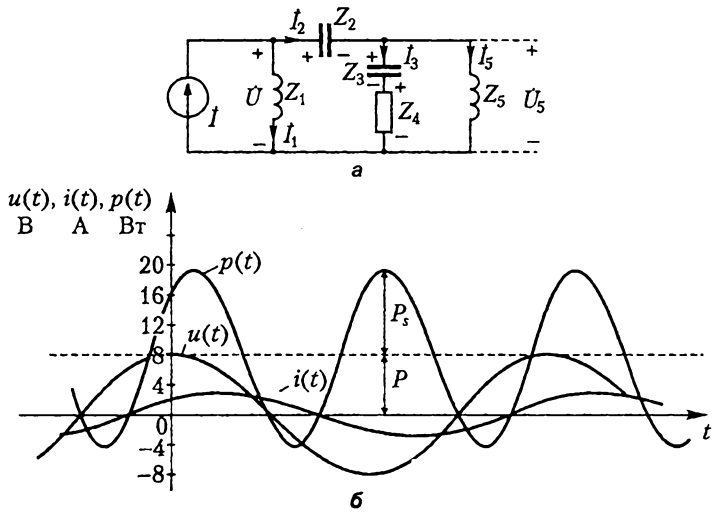


Рис. 2.12.1

поэтому определяем вначале

$$Z_{34} = Z_3 + Z_4 = 1 - j;\ Z_{345} = 1/(Y_{34} + Y_5) = 2;\ Z_{2345} = Z_2 + Z_{345} = 2 - j2;$$

$$Z_{вх} = 1/(Y_1 + Y_{2345}) = 2 + j2 = 2\sqrt{2}e^{j45^\circ} = |Z_{вх}|e^{j\varphi};\ \varphi = 45^\circ;\ \dot{U} = 4\sqrt{2}.$$

Находим токи:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}Z_{вх}/Z_1 = -j2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}e^{-j90^\circ};\ \dot{I}_2 = \dot{I}Z_{вх}/Z_{2345} = \sqrt{2} + j\sqrt{2} = 2e^{j45^\circ};$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_2 Z_{345}/Z_{34} = j2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}e^{j90^\circ};\ \dot{I}_5 = \dot{I}_2 Z_{345}/Z_5 = \sqrt{2} - j\sqrt{2} = 2e^{-j45^\circ},$$

при этом использованы соответствия

$$i(t) = 2\sqrt{2}\cos(\omega t - 45^\circ) \div \dot{I}_m = 2\sqrt{2}e^{-j45^\circ} \div \dot{I} = 2e^{-j45^\circ}.$$

Комплексные мощности элементов цепи:

$$\tilde{P}_{S1} = P_1 + jP_{Q1} = Z_1 I_1^2 = j2(2\sqrt{2})^2 = j16;\ P_{Q1} = 16 \text{ вар};\ P_{S1} = 16 \text{ ВА};$$

$$\tilde{P}_{S2} = P_2 + jP_{Q2} = Z_2 I_2^2 = -j2(2)^2 = -j8;\ P_{Q2} = -8 \text{ вар};\ P_{S2} = 8 \text{ ВА};$$

$$\tilde{P}_{S3} = P_3 + jP_{Q3} = Z_3 I_3^2 = -j(2\sqrt{2})^2 = -j8;\ P_{Q3} = -8 \text{ вар};\ P_{S3} = 8 \text{ ВА};$$

$$\tilde{P}_{S4} = P_4 + jP_{Q4} = Z_4 I_3^2 = 1(2\sqrt{2})^2 = 8;\ P_4 = 8 \text{ Вт};\ P_{S4} = 8 \text{ ВА};$$

$$\tilde{P}_{S5} = P_5 + jP_{Q5} = Z_5 I_5^2 = j2(2)^2 = j8;\ P_{Q5} = 8 \text{ вар};\ P_{S5} = 8 \text{ ВА}.$$

Комплексная мощность пассивной двухполюсной цепи, подключенной к источнику:

$$\tilde{P}_{S\text{Дп}} = P_{\text{Дп}} + jP_{Q\text{Дп}} = Z_{\text{вх}} I^2 = (2 + j2)(2)^2 = 8 + j8;$$

$$P_{\text{Дп}} = 8 \text{ Вт}; \quad P_{Q\text{Дп}} = 8 \text{ вар}; \quad P_{S\text{Дп}} = 8\sqrt{2} \text{ ВА}.$$

Комплексная мощность источника (с учетом его *несогласованной* полярности)

$$\tilde{P}_{S\text{и-т}} = -\dot{U}\,\dot{I} = -4\sqrt{2}(\sqrt{2} + j\sqrt{2}) = -8 - j8.$$

Баланс мощности:

$$\tilde{P}_{S\text{и-т}} + \tilde{P}_{S\text{Дп}} = -8 - j8 + 8 + j8 = 0; \quad P_{\text{Дп}} = P_4 = 8;$$

$$P_{Q\text{Дп}} = 8 = P_{Q1} + P_{Q2} + P_{Q3} + P_{Q5} = 16 - 8 - 8 + 8;$$

$$\tilde{P}_{S\text{Дп}} = \tilde{P}_{S1} + \tilde{P}_{S2} + \tilde{P}_{S3} + \tilde{P}_{S4} + \tilde{P}_{S5}.$$

Мгновенная мощность пассивной части цепи

$$p(t) = P + P_S \cos(2\omega t + 2\alpha_i + \varphi) = 8 + 8\sqrt{2} \cos(2\omega t - 45°).$$

Графики входного напряжения, тока и мгновенной мощности цепи приведены на рис. 2.12.1, *б*, причем график $p(t)$, естественно, соответствует произведению $u(t)$ на $i(t)$, т. е. $p = 0$, если $u = 0$ или $i = 0$; $p > 0$, если $u(t)$, $i(t)$ имеют одинаковый знак, и т. д. При $p(t) > 0$ пассивная двухполюсная цепь *потребляет* энергию от источника, при $p(t) < 0$ цепь *возвращает* энергию источнику. При этом *в среднем за период цепь потребляет энергию*, так как активная мощность (или *просто — мощность*) $P = 8$ Вт > 0 является средним значением (постоянной составляющей) графика $p(t)$.

Пример 2.12.2. Дана цепь (рис. 2.12.2): $\dot{U}_1 = j8$; $\dot{I}_4 = 2$; $\dot{U}_7 = 8 + j8$; $Z_2 = -j4$; $Z_3 = j2$; $Z_5 = 4$; $Z_6 = -j4$; $Z_8 = j6$. Найти $\tilde{P}_{S1}$, $\tilde{P}_{S4}$, $\tilde{P}_{S7}$ и ответить на вопрос, какие из источников являются потребителями.

Произвольно обозначим на схеме цепи направления токов и полярность напряжения $\dot{U}_4$ источника тока $\dot{I}_4$. Расчет, например, методом контурных токов дает следующие значения:

$$\dot{I}_1 = 1 + j3; \quad \dot{I}_2 = -1 + j3; \quad \dot{I}_3 = -1; \quad \dot{I}_5 = -2 + j3.$$

Напряжение источника тока $\dot{I}_4$:

$$\dot{U}_4 = \dot{U}_1 - Z_2\dot{I}_1 - Z_8\dot{I}_1 = 6 + j6.$$

Комплексные мощности источников (с учетом согласованной полярности только у источника тока $\dot{I}_4$):

$$\tilde{P}_{S1} = -\dot{U}_1\,\dot{I}_1 = -j8(1 - j3) = -24 - j8 = P_1 + jP_{Q1};$$

$$\tilde{P}_{S4} = -\dot{U}_4\,\dot{I}_4 = (6 + j6)2 = 12 + j12 = P_4 + jP_{Q4};$$

$$\tilde{P}_{S7} = -\dot{U}_7\,\dot{I}_3 = -(8 + j8)(-1) = 8 + j8 = P_7 + jP_{Q7}.$$

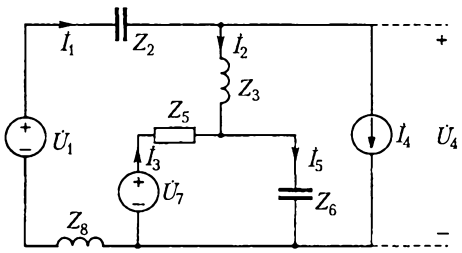


Рис. 2.12.2

Из баланса мощности находим мощность $\tilde{P}_S$ пассивной *RLC*-цепи:

$$\tilde{P}_S = -(\tilde{P}_{S1} + \tilde{P}_{S4} + \tilde{P}_{S7}) = 4 - j12 = P + jP_Q.$$

У пассивной *RLC*-цепи активная мощность $P = 4$ Вт; *реактивная* мощность цепи имеет *емкостный* характер, так как $P_Q = -12$ вар < 0. Источник $\dot{U}_1$ *генерирует* энергию, поскольку его активная мощность $P_1 = -24$ Вт < 0. Источники $\dot{I}_4$ и $\dot{U}_7$ являются *потребителями*, так как у каждого из них *активная мощность положительна* ($P_4 = 12$ Вт, $P_7 = 8$ Вт).

Вопрос 1. Какие еще из элементов рис. 2.12.2 являются потребителями?

Вопрос 2. Как, используя (2.12.2) и (2.12.3), проверить баланс активных мощностей в цепи рис. 2.12.2?

Вопрос 3. Как, используя (2.12.2) и (2.12.3), проверить баланс реактивных мощностей в цепи рис. 2.12.2?

Вопрос 4. Как, зная три значения мощностей пассивного двухполюсника (P, P_Q, P_S), определить угол фазового сдвига φ? Можно ли найти φ, зная только два значения из указанных трех?

2.12.3. Заключение

В результате изучения материала темы необходимо усвоить различие между мгновенной мощностью и другими характеристиками мощности в установившемся синусоидальном режиме — активной, реактивной и полной мощностями. Необходимо знать соотношения между активной, реактивной, полной и комплексной мощностями, уметь их вычислять и осуществлять контроль баланса мощностей, знать, что у пассивного ДП всегда $P_{Дп} \geq 0$, $|\varphi_{Дп}| \leq 90°$.

2.13. Резонанс в электрических цепях

2.13.1. Исходные понятия

Рассмотрим простые последовательную и параллельную *RLC*-цепи в установившемся синусоидальном режиме (рис. 2.13.1, *а*, *б*). Комплексное сопротивление цепи (рис. 2.13.1, *а*) $Z_a = R + j(\omega L - 1/\omega C) = R + jx_a = |Z_a| e^{j\varphi}$; комплексная проводимость цепи (рис. 2.13.1, *б*) $Y_б = G + j(\omega C - 1/\omega L) = G + jb_б = |Y_б| e^{j\psi}$.

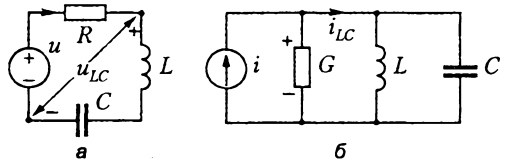


Рис. 2.13.1

В случае, когда мнимая часть x_a сопротивления Z_a или *мнимая часть* $b_б$ проводимости $Y_б$ *обращается в нуль*, в цепях наступает явление *резонанса* и каждая из цепей ведет себя как *чисто резистивная* $Z_a = R$, $Y_б = G$. Добиться состояния резонанса на частоте $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ можно *тремя способами*: изменением значения *L*- или *C*-элемента или же изменением частоты ω до значения ω_0.

Итак, условия резонанса имеют вид $x_a = 0$ (при этом $\varphi = 0$) или $b_б = 0$ (при этом $\psi = 0$). Для обеих схем *резонансная частота*

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}. \qquad (2.13.1)$$

Сопротивление реактивного элемента на частоте резонанса называется *характеристическим сопротивлением*

$$\rho = \omega_0 L = 1/(\omega_0 C) = \sqrt{L/C}. \qquad (2.13.2)$$

В схеме (рис. 2.13.1, *а*) происходит простейший *резонанс напряжений*, так как при этом $U_{L0} = U_{C0}$ и участок $LC \equiv$ КЗ (т. е. *эквивалентен короткозамкнутому участку*).

Отношение напряжения на реактивном элементе к входному напряжению при резонансе называется *добротностью контура*:

$$Q = \frac{U_{L0}}{U} = \frac{U_{C0}}{U} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{\rho}{R}. \qquad (2.13.3)$$

В схеме (рис. 2.13.1, *б*) происходит простейший *резонанс токов*, так как при этом $I_{L0} = I_{C0}$ и участок $LC \equiv$ ХХ (т. е. *эквивалентен разрыву цепи* — холостому ходу).

Отношение тока реактивного элемента к входному току при резонансе называется *добротностью* параллельной *RLC*-цепи:

$$Q = \frac{I_{L0}}{I} = \frac{I_{C0}}{I} = \frac{R}{\omega_0 L} = \omega_0 CR = \frac{R}{\rho}. \qquad (2.13.4)$$

Добротность контура может быть вычислена также по АЧХ, т. е. по амплитудно-частотной характеристике $|Y(j\omega)|$ (рис. 2.13.2, *а*) для схемы рис. 2.13.1, *а* и $|Z(j\omega)|$ (рис. 2.13.2, *б*) для схемы рис. 2.13.1, *б*.

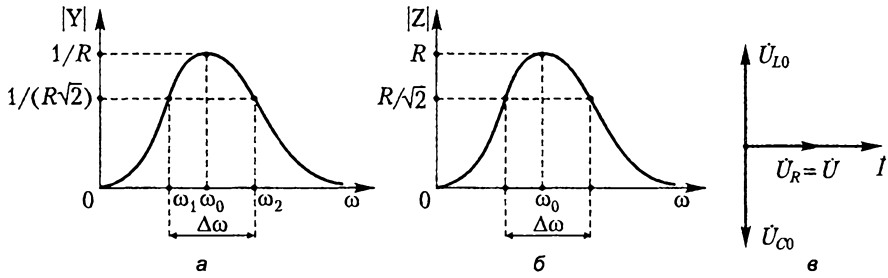


Рис. 2.13.2

Для определения добротности на уровне $1/\sqrt{2} = 0{,}707$ от максимума проводят линию, параллельную оси абсцисс. Пересечение ее с частотной характеристикой дает частотную зону $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, называемую *полосой пропускания* цепи. Добротность определяется по формуле $Q = \omega_0 / \Delta\omega$.

Итак, *признаками простейшего резонанса* являются наличие последовательного (или параллельного) соединения *L*- и *C*-элементов при равенстве модулей сопротивлений накопителей $\omega_0 L = 1/(\omega_0 C)$.

В случае разветвленной двухполюсной цепи *признаком резонанса* является резистивный характер цепи, т. е. реактивная составляющая сопротивления $x = 0$ или проводимости $b = 0$. Обычно резонанс в общем случае «распознают» по выполнению любого из следующих условий *в пассивном* ДП:

$$\operatorname{Im} Z_{вх} = 0,\ \operatorname{Im} Y_{вх} = 0,\ Z_{вх} = \operatorname{Re} Z_{вх},\ Y_{вх} = \operatorname{Re} Y_{вх},$$

$$\varphi = 0,\ \psi = 0,\ \alpha_u = \alpha_i,\ P_Q = 0,\ P_S = P,\ P_S = \operatorname{Re} \tilde{P}_S.$$

2.13.2. Примеры типовых задач

Пример 2.13.1. В последовательном контуре (рис. 2.13.1, *а*) $u(t) = 100\sqrt{2}\cos\omega t$, $R = 100$ Ом, $L = 0{,}04$ Гн, $C = 1$ мкФ. Определить ω_0, f_0, ρ, Q, I_0, U_{L0}, U_{C0}, построить векторную диаграмму (ВД) при резонансе.

Очевидно,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}04 \cdot 10^{-6}}} = \sqrt{\frac{10^8}{4}} = 0{,}5 \cdot 10^4 = 5 \cdot 10^3 \ \text{с}^{-1};$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0;\ f_0 = \omega_0/(2\pi) = 5\cdot 10^3/6{,}28 \approx 796 \text{ Гц};$$

$$\rho = \sqrt{L/C} = \sqrt{0{,}04/10^{-6}} = \sqrt{4\cdot 10^{-2}\cdot 10^{6}} = 200 \text{ Ом};$$

$$Q = \rho/R = 200/100 = 2;\ I_0 = U/R = 100/100 = 1;\ \text{А}.$$

$$U_{L0} = U_{C0} = UQ = 100\cdot 2 = 200 \text{ В}.$$

ВД цепи изображена на рис. 2.13.2, *в*. Напряжения L- и C-элементов компенсируются, так что их суммарное напряжение $U_{LC} = 0$, следовательно, участок $LC \equiv$ КЗ.

Пример 2.13.2. В цепи (рис. 2.13.1, *б*) $f_0 = 0{,}5$ Гц, $L = 2$ Гн, $R = 30$ Ом. Найти значение емкости, при котором цепь будет в состоянии резонанса, а также определить, во сколько раз ток емкости будет отличаться от входного тока при резонансе.

Резонансная частота $\omega_0 = 2\pi f_0 = 3{,}14 \text{ с}^{-1}$; $C = I/(L\omega_0^2) = 0{,}0507$ Ф; характеристическое сопротивление $\rho = \sqrt{L/C} = 6{,}28$ Ом. Добротность контура $Q = I_{C0}/I = R/\rho = 30/6{,}28 \approx 4{,}8$; следовательно $I_{C0} = I_{L0} = 4{,}8I$.

Пример 2.13.3. Для схемы (рис. 2.13.1, *а*) дана амплитудно-частотная характеристика $|Y(j\omega)|$ (рис. 2.13.3, *а*). Показать, какие изменения АЧХ произойдут, если емкость C уменьшить в 4 раза.

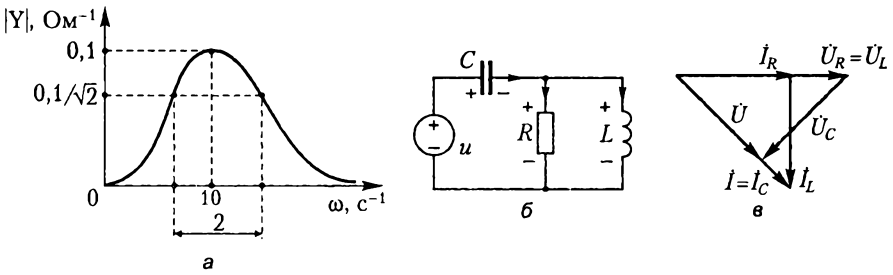


Рис. 2.13.3

Из сравнения рис. 2.13.2, *а* и 2.13.3, *а* следует, что $\omega_0 = 10 \text{ с}^{-1}$; $R = 1/|Y_{max}| = 10$ Ом; полоса пропускания контура $\Delta\omega = 2 \text{ с}^{-1}$. Тогда добротность контура

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = 5 = \frac{\rho}{R} = \frac{\sqrt{L/C}}{R}.$$

Если взять «новую» емкость $C_1 = 0{,}25C$, то

$$\omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{LC_1}} = \frac{1}{\sqrt{L\cdot 0{,}25C}} = 2\omega_0 = 20 \text{ с}^{-1};\ Q_1 = \frac{\rho_1}{R} = \frac{\sqrt{4L/C}}{R} = 2Q = 10.$$

При этом полоса пропускания сохранится, поскольку

$$\Delta\omega_1 = \frac{\omega_{01}}{Q_1} = \frac{2\omega_0}{2Q} = \Delta\omega = 2 \text{ с}^{-1}.$$

Попробуйте самостоятельно изобразить «новую» амплитудно-частотную характеристику.

Пример 2.13.4. В цепи (рис. 2.13.3, *б*) $u(t) = U_m \cos 10t$, $L = 1$ Гн, $C = 1$ Ф. Определить, при каком R в цепи будет состояние резонанса.

В последовательной или параллельной RLC-цепи изменение значения R не могло привести цепь в состояние резонанса. В разветвленной цепи признаком резонанса считается условие $\operatorname{Im} Z_{вх} = 0$. Поэтому находим

$$Z_{вх} = Z_C + \frac{RZ_L}{R+Z_L} = -j\frac{1}{\omega C} + \frac{jR\omega L}{R+j\omega L} = -j\frac{1}{10} + \frac{j10R}{R+j10} = -j\frac{1}{10} + \frac{j10R(R-j10)}{R^2+100};$$

$$\operatorname{Im}(Z_{вх}) = -\frac{1}{10} + \frac{10R^2}{R^2+100} = \frac{100R^2 - R^2 - 100}{10(R^2+100)} = 0,$$

следовательно, $99R^2 - 100 = 0$, откуда $R = \sqrt{100/99} \approx 1$ Ом.

Пример 2.13.5. В цепи (рис. 2.13.3, *б*) найти резонансную частоту ω_0 и качественно построить ВД при резонансе.

Используя решение из примера 2.13.4, имеем

$$Z_{вх}(j\omega) = -j\frac{1}{\omega C} + \frac{jR\omega L(R-j\omega L)}{R^2+\omega^2 L^2};$$

$$\operatorname{Im} Z_{вх}(j\omega_0) = 0 = -\frac{1}{\omega_0 C} + \frac{R^2 L\omega_0}{R^2+\omega_0^2 L^2},$$

откуда находим

$$-R^2 - \omega_0^2 L^2 + R^2 LC\omega_0^2 = 0;$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{R^2}{R^2LC - L^2}} = \sqrt{\frac{1}{LC - (L/R)^2}}.$$

Контроль: 1) при $R \to \infty$ получаем $\omega_0 \to 1/\sqrt{LC}$, что соответствует в схеме (рис. 2.13.3, *б*) переходу к простейшему резонансу напряжений; 2) при $R \to 0$ резонанс невозможен, что также следует и из рассмотрения цепи рис. 2.13.3, *б* (L-элемент будет закорочен).

При окончании качественного построения ВД (см. рис. 2.13.3, *в*) длину вектора $\dot{U}_C$ выбирают такой, чтобы входные напряжение и ток пассивной двухполюсной цепи оказались в фазе: $\alpha_u = \alpha_i$, $\varphi = 0$.

Вопрос 1. Как изменится добротность, если в схеме (рис. 2.13.1, *б*) увеличить активное сопротивление?

Вопрос 2. Какие изменения значений ω_0, ρ, Q произойдут в схемах на рис. 2.13.1, *а*, *б* при увеличении значения L?

Вопрос 3. Что такое простейший резонанс токов?

Вопрос 4. Изобразите векторную диаграмму схемы (рис. 2.13.1, *б*) для состояния резонанса при $Q = 3$.

2.13.3. Заключение

В результате изучения материала темы необходимо усвоить признаки резонанса, запомнить основные выражения для определения резонансной частоты и добротности в параллельной и последовательной *RLC*-цепях. Необходимо уметь качественно строить векторные диаграммы цепей и знать особенности построения ВД при резонансе. Следует понимать, почему при простейшем резонансе напряжений участок *LC* цепи эквивалентен КЗ, а при простейшем резонансе токов — ХХ.

2.14. Расчет переходных процессов при синусоидальных и экспоненциальных воздействиях

2.14.1. Исходные понятия

Полная реакция цепи $f_2(t) = f_{2\text{вын}}(t) + f_{2\text{св}}(t)$, где $f_{2\text{вын}}(t)$ — вынужденная составляющая; $f_{2\text{св}}(t)$ — свободная составляющая.

Для цепей первого порядка расчет $f_2(t)$ удобно производить методом схем замещения. Можно предложить следующий порядок расчета.

1. Условное обозначение пункта «$t < 0$, $t = 0-$». Цель — *определение независимых начальных условий* $u_C(0-)$ или $i_L(0-)$. Средством для достижения цели является МКА. По комплексной схеме замещения (для установившегося синусоидального режима, в цепи до коммутации) вычисляется $\dot{U}_{Cm}$ или $\dot{I}_{Lm}$. Предположим, нашли $\dot{U}_{Cm} = U_{Cm}e^{j\alpha_u} = U_{Cm}\cos\alpha_u + jU_{Cm}\sin\alpha_u$, т. е. во временной области $u_C = U_{Cm}\cos(\omega t + \alpha_u)$. При $t = 0-$ получим $u_C(0-) = U_{Cm}\cos\alpha_u = \mathrm{Re}[\dot{U}_{Cm}]$. Таким образом, достаточно определить вещественную часть комплексной амплитуды напряжения емкости или тока индуктивности.

2. Условное обозначение пункта «$t \to \infty$» или «$t > 3\tau$». Цель — *определение вынужденной составляющей* реакции $f_{2\text{вын}}(t)$. Средство — МКА. По комплексной схеме замещения для установившегося синусоидального режима после коммутации вычисляется комплексная амплитуда искомой реакции, а затем записывается $f_{2\text{вын}}(t)$.

3. Условное обозначение пункта «$t = 0+$». Цель — *определение зависимых начальных условий*, $f_2(0+)$. Нам известны $u_C(0+) = u_C(0-)$ или $i_L(0+) = i_L(0-)$. Составляем схему замещения цепи для $t = 0+$. Поскольку это *схема из временной области*, то в ней *нет комплексных величин*. Все воздействия берут при $t = 0+$, вместо емкостного элемента удобно изобразить *источник напряжения* со значением $u_C(0+)$. Если $u_C(0+) = 0$, вместо C-элемента нужно изобразить *короткозамкнутый участок*. Вместо L-элемента удобно изобразить *источник тока* со значением $i_L(0+)$. Если $i_L(0+) = 0$, вместо L-элемента нужно изобразить разрыв — *холостой ход*. В результате имеем схему с R-элементами и источниками. По этой схеме можно определить начальное значение любой реакции $f_2(0+)$.

4. Условное обозначение «τ – ?». Цель — *определение постоянной времени* $\tau = R_Э C$ или $\tau = L/R_Э$. Этот пункт ничем не отличается от такого же пункта при расчете переходных процессов в цепях первого порядка при постоянных воздействиях.

5. Цель этого пункта — *определение постоянной интегрирования и запись решения.* Так как $f_2(t) = F_{2m}\cos(\omega t + \alpha) + Ae^{-t/\tau}$, то при $t = 0+$ имеем $f_2(0+) = F_{2m}\cos\alpha + A$, откуда $A = f_2(0+) - F_{2m}\cos\alpha$. Может оказаться, что $A = 0$, т. е. сразу наступает установившийся (вынужденный) режим.

Итак, МКА *применяется только для расчета установившихся* (вынужденных) режимов в п. 1, 2. При расчетах в п. 3, 4 не должно быть никаких комплексных чисел.

При *обобщенных воздействиях* вида $f_1(t) = F_{m1}e^{-\sigma t}\cos(\omega t + \alpha)$ для определения вынужденной составляющей решения также используется МКА, причем $\dot{F}_{m1} = F_{m1}e^{j\alpha}$, $Z_C = 1/(Cs)$, $Z_L = Ls$, где $s = -\sigma + j\omega$ — *обобщенная частота* воздействия.

2.14.2. Примеры типовых задач

Пример 2.14.1. В цепи (рис. 2.14.1, *а*) $i(t) = 4\cos 8t$, $R_1 = R_2 = 2$ Ом, $L = 0{,}25$ Гн. Определить $i_1(t)$ после коммутации.

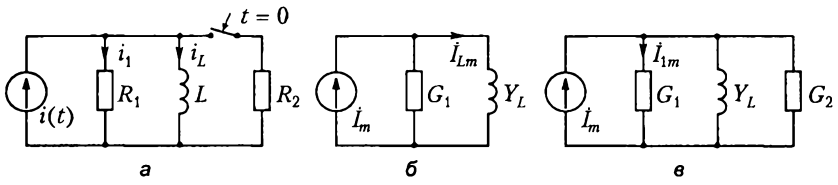


Рис. 2.14.1

1. $t < 0$, $t = 0-$. Отыскиваем $i_L(0-)$. Комплексная схема замещения изображена на рис. 2.14.1, *б*. Находим $\dot{I}_m = 4$; $G_1 = 1/R_1 = 0{,}5$; $Y_L = -j/(\omega L) = -j/(8\cdot 0{,}25) = -j0{,}5 = 0{,}5e^{-j90°}$. Далее $Y = G_1 + Y_L = 0{,}5 - j0{,}5 = 0{,}5\sqrt{2}e^{-j45°}$;

$$\dot{I}_{Lm} = \dot{I}_m\frac{Y_L}{Y} = \frac{4\cdot 0{,}5e^{-j90°}}{0{,}5\sqrt{2}e^{-j45°}} = 2\sqrt{2}e^{-j45°};$$

$$i_L(0-) = \mathrm{Re}\,\dot{I}_{Lm} = 2\sqrt{2}\cos 45° = 2 \text{ А}.$$

2. $t > 3\tau$. Отыскиваем $i_{1\text{вын}}(t)$, используя для расчета установившегося синусоидального режима комплексную схему замещения (см. рис. 2.14.1, *в*). Определяем $Y_{\text{вх}} = G_1 + G_2 + Y_L = 1 - j0{,}5 = \sqrt{1{,}25}e^{-j\operatorname{arctg}0{,}5} = \sqrt{1{,}25}e^{-j27°}$;

$$\dot{I}_{1m} = \dot{I}_m\frac{G_1}{Y_{\text{вх}}} = \frac{4\cdot 0{,}5}{\sqrt{1{,}25}e^{-j27°}} \cong 1{,}79e^{j27°}.$$

$$i_{1\text{вын}}(t) = 1{,}79\cos(8t + 27°).$$

3. $t = 0+$. Нам известно, что $i_L(0+) = i_L(0-) = i_L(0-) = 2$ А. Отыскиваем $i_1(0+)$ по схеме замещения (рис. 2.14.2, *а*), где $i_1(0+) = 4$. Получаем

$$i_1(0+) = \frac{[i(0+) - i_L(0+)]G_1}{G_1 + G_2} = \frac{(4-2)0{,}5}{0{,}5 + 0{,}5} = 1 \text{ А}.$$

4. τ -- ? Находим $R_Э = 1/(G_1 + G_2) = 1$ Ом, далее $\tau = L/R_Э = 0{,}25$ с.

5. Отыскиваем постоянную интегрирования

$$A = i_1(0+) - i_{1\text{вын}}(0+) = 1 - 1{,}79\cos 27° = -0{,}59 \text{ А},$$

следовательно, решение $i_1(t) = 1{,}79\cos(8t + 27°) - 0{,}59e^{-4t}$.

Пример 2.14.2. В цепи, изображенной на рис. 2.14.2, *б* $R = 1$ Ом, $C = 2$ Ф, $u(t) = 10e^{-0{,}5t}\cos(0{,}5t + 30°)\delta_1(t)$. Определить $u_C(t)$.

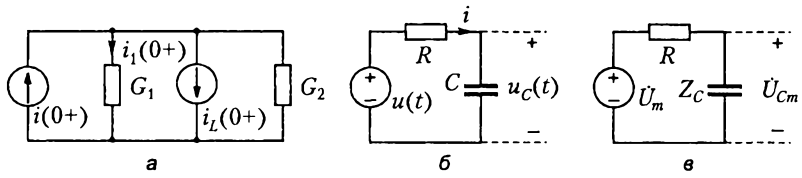


Рис. 2.14.2

Так как $u(t) \equiv 0$ при $t < 0$, то $u_C(0-) = 0$.

Расчет вынужденной составляющей осуществляем по комплексной схеме замещения (рис. 2.14.2, *в*). Имеем $\dot{U}_m = 10e^{j30°}$; $s = -0{,}5 + j0{,}5$; $Z_C = 1/(sC) = 1/(-1 + j) = (-1 - j)/2 = -0{,}5 - j0{,}5$.

Далее находим

$$\dot{U}_{Cm} = \dot{U}_m \frac{Z_C}{R + Z_C} = \frac{10e^{j30°}(-0{,}5 - j0{,}5)}{0{,}5 - j0{,}5} = \frac{10e^{j30°}0{,}5\sqrt{2}e^{-j135°}}{0{,}5\sqrt{2}e^{-j45°}} = 10e^{-j60°},$$

$$u_{C\text{вын}}(t) = 10e^{-0{,}5t}\cos(0{,}5t - 60°)\delta_1(t).$$

Постоянная времени $\tau = RC = 2$ с.

Постоянная интегрирования

$$A = u_C(0+) - u_{C\text{вын}}(0+) = 0 - 10\cos(-60°) = -5.$$

Ответ: $u_C(t) = [10e^{-0{,}5t}\cos(0{,}5t - 60°) - 5e^{-0{,}5t}]\delta_1(t)$.

Вопрос 1. Можно ли при $t < 0$ в комплексной схеме замещения вместо C-элемента использовать разрыв, а вместо L-элемента — короткозамкнутый участок цепи?

Вопрос 2. По какой схеме нужно отыскивать $i(0+)$ в примере 2.14.2?

Вопрос 3. На каких этапах расчета используется МКА?

Вопрос 4. Как произвести расчет тока $i(t)$ по схеме (рис. 2.14.2, *б*), если $u(t) = 10e^{-2t}\delta_1(t)$?

2.14.3. Заключение

В результате изучения материала темы необходимо усвоить порядок расчета переходных процессов при синусоидальных воздействиях, цель и методы расчета на каждом этапе. Необходимо уметь формировать соответствующие схемы замещения и знать их отличия от схем замещения при постоянных входных сигналах.

2.15. Расчет трехфазных цепей

2.15.1. Исходные понятия

Трехфазной называют цепь, состоящую из трех подобных частей, называемых *фазами*, токи и напряжения которых обычно обладают определенной симметрией в отношении амплитуд и начальных фаз синусоидальных сигналов.

Симметричным трехфазным генератором напряжения называют систему из трех сдвинутых по фазе на 120° источников синусоидального напряжения (одинаковой амплитуды и частоты). Если не выполняются эти условия, источник считается несимметричным. Трехфазный источник, соединенный *звездой*, представлен на рис. 2.15.1, *а*. Если напряжение фазы *A* опережает напряжение фазы *B*, *B* опережает *C*, а *C* опережает *A*, то *порядок следования фаз* в трехфазной системе называют *прямым* (*ABC*), если наоборот – *обратным* (*ACB*).

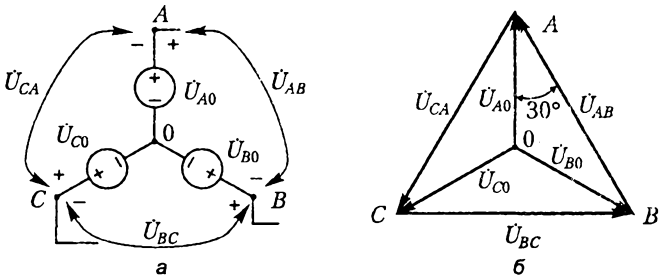


Рис. 2.15.1

Общая точка «*O*» источника называется *нейтральной точкой*. Напряжения фаз симметричного трехфазного генератора (рис. 2.15.1, *а*) называют *фазными напряжениями* $\dot{U}_{AO}$, $\dot{U}_{BO}$, $\dot{U}_{CO}$. Для трехфазных цепей характерна *«двухиндексовая»* система обозначения напряжения. Трехфазный источник соединен линейными проводами с нагрузкой. Напряжения между линейными проводами называются *линейными напряжениями* $\dot{U}_{AC}$, $\dot{U}_{BC}$, $\dot{U}_{CA}$ (см. рис. 2.15.1, *а*).

При прямой последовательности фаз запишем фазные напряжения симметричного трехфазного источника:

$$\begin{cases} u_{AO}(t) = U_m \cos(\omega t + 90°); \\ u_{BO}(t) = U_m \cos(\omega t - 30°); \\ u_{CO}(t) = U_m \cos(\omega t - 150°), \end{cases} \qquad (2.15.1)$$

причем в (2.15.1) начальная фаза напряжения u_{AO} для примера принята равной 90°.

Соответствующие (2.15.1) комплексы фазных напряжений: $\dot{U}_{AO} = U_\phi e^{j90^\circ}$, $\dot{U}_{BO} = U_\phi e^{-j30^\circ}$, $\dot{U}_{CO} = U_\phi e^{-j150^\circ}$, где U_ϕ — действующее значение напряжения фазы источника. Очевидно,

$$\dot{U}_{AO} + \dot{U}_{BO} + \dot{U}_{CO} = 0. \qquad (2.15.2)$$

Соотношения между линейными и фазными напряжениями легко определить из векторной диаграммы (см. рис. 2.15.1, *б*), построенной в соответствии с (2.15.1) и *топографией* цепи симметричного источника.

Из ВД видно, что $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U_л$; $U_{AO} = U_{BO} = U_{CO} = U_\phi$, где $U_л$ и U_ϕ — линейные и фазные напряжения, причем

$$U_л = \sqrt{3} U_\phi.$$

По ЗНК $\dot{U}_{AB} = \dot{U}_{AO} - \dot{U}_{BO}$; $\dot{U}_{BC} = \dot{U}_{BO} - \dot{U}_{CO}$; $\dot{U}_{CA} = \dot{U}_{CO} - \dot{U}_{AO}$, чему также соответствует *топография* ВД.

Из ВД также следует, что

$$\dot{U}_{AB} = U_л e^{j120^\circ},\ \dot{U}_{BC} = U_л,\ \dot{U}_{CA} = U_л e^{-j120^\circ}.$$

На рис. 2.15.2, *а* показана трехфазная цепь, источник питания которой и нагрузка *соединены звездой*. Нейтральные точки источника O и нагрузки O_1 соединены *нулевым проводом* (нейтралью), имеющим сопротивление Z_O. Токи *в линейных проводах* $\dot{I}_A$, $\dot{I}_B$, $\dot{I}_C$ называют *линейными* ($I_л$) и условно направляют *к нагрузке*; токи сопротивлений фаз нагрузки Z_a, Z_b, Z_c называют *фазными* (I_ϕ), причем в схеме (рис. 2.15.2, *а*), очевидно, $I_л = I_\phi$.

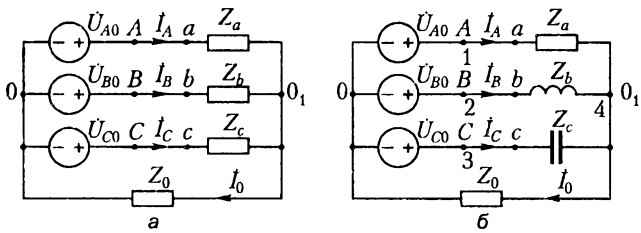


Рис. 2.15.2

Ток нулевого провода I_0 условно направляют от нагрузки *к источнику*: $\dot{I}_0 = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C$. Трехфазная нагрузка, соединенная звездой, называется *симметричной*, если $Z_a = Z_b = Z_c = Z_\phi = |Z_\phi| \exp(j\varphi_\phi)$.

Если сопротивление нулевого провода Z_O равно нулю, то напряжение $\dot{U}_{O_1O} = 0$ и в цепи (рис. 2.15.2, *а*) обеспечивается *независимый режим работы фаз*, так как $\dot{I}_A = \dot{U}_{AO}/Z_a$, $\dot{I}_B = \dot{U}_{BO}/Z_b$, $\dot{I}_C = \dot{U}_{CO}/Z_c$, т. е. одна фаза не влияет на другую.

2.15.2. Примеры типовых задач

Рассмотрим варианты расчета трехфазных цепей при *прямой последовательности* фаз источника.

Пример 2.15.1. В цепи (рис. 2.15.2, *б*) симметричный источник с напряжением фазы $U_ф = 10$ В подключен к несимметричной нагрузке, соединенной звездой с нулевым проводом. Модули фазных сопротивлений нагрузки и нулевого провода $|Z_k| = 1$ Ом. Найти фазные токи и напряжения. Построить векторную диаграмму.

1. Запишем мгновенные значения фазных напряжений симметричного источника, полагая, что начальная фаза $\alpha_{uAO} = 90°$. Тогда на основании (2.15.1) имеем

$$u_{AO}(t) = 10\sqrt{2}\cos(\omega t + 90°);$$

$$u_{BO}(t) = 10\sqrt{2}\cos(\omega t - 30°);$$

$$u_{CO}(t) = 10\sqrt{2}\cos(\omega t - 150°).$$

Комплексы, соответствующие этим напряжениям,

$$\dot{U}_{AO} = 10e^{j90°};\ \dot{U}_{BO} = 10e^{-j30°};\ \dot{U}_{CO} = 10e^{-j150°}.$$

2. На рис. 2.15.2, *б* представлена схема с двумя узлами O и O_1. Для расчета такой цепи целесообразно использовать метод узловых напряжений (МУН). В качестве базисного узла возьмем нейтральную точку генератора.

Для упрощения расчета учитываем в схеме устранимые узлы 1, 2, 3, тогда $\dot{U}_1^y = \dot{U}_{AO}; \dot{U}_2^y = \dot{U}_{BO}; \dot{U}_3^y = \dot{U}_{CO}$.

3. Составим уравнение МУН для узла 4. Учитывая, что $\dot{U}_4^y = \dot{U}_{O_1O}$, имеем $\dot{U}_{O_1O}(Y_a + Y_b + Y_c + Y_0) - Y_a\dot{U}_{AO} - Y_b\dot{U}_{BO} - Y_c\dot{U}_{CO} = 0$, откуда

$$\dot{U}_{O_1O} = \frac{Y_a\dot{U}_{AO} + Y_b\dot{U}_{BO} + Y_c\dot{U}_{CO}}{Y_a + Y_b + Y_c + Y_0}, \qquad (2.15.3)$$

причем $Y_a = 1/Z_a = 1$; $Y_b = 1/Z_b = -j$; $Y_c = 1/Z_c = j$; $Y_0 = 1/Z_0 = 1$. На основании (2.15.3) находим

$$\dot{U}_{O_1O} = (j10 - j10e^{-j30°} + j10e^{-j150°})/(1 - j + j + 1) = -3{,}55j.$$

4. *Ток фазы A*, равный *линейному току*,

$$\dot{I}_A = \dot{U}_{aO_1}/Z_a = (\dot{U}_{AO} - \dot{U}_{O_1O})Y_a = 13{,}55j;\ I_A = 13{,}55\ \text{А};$$

$$i_A(t) = 13{,}55\sqrt{2}\cos(\omega t + 90°).$$

Аналогично находим

$$\dot{I}_B = \dot{U}_{bO_1}/Z_b = (\dot{U}_{BO} - \dot{U}_{O_1O})Y_b = -1{,}45 - j8{,}55;\ I_B = 8{,}67\ \text{А};$$

$$\dot{I}_C = \dot{U}_{cO_1}/Z_c = (\dot{U}_{CO} - \dot{U}_{O_1O})Y_c = 1{,}45 - j8{,}55;\ I_C = 8{,}67\ \text{А}.$$

5. Ток нулевого провода

$$\dot{I}_0 = \dot{U}_{O_1O}/Z_0 = -3{,}55j;\ I_0 = 3{,}55\ \text{А}.$$

Проверка: $\dot{I}_0 = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = -3{,}55j$. Проконтролируем также линейные напряжения

$$\dot{U}_{AB} = Z_a\dot{I}_A - Z_b\dot{I}_B = 10\sqrt{3}e^{j120^\circ} = U_л e^{j120^\circ} = \sqrt{3}U_ф e^{j120^\circ};$$

$$u_{AB}(t) = 10\sqrt{6}\cos(\omega t + 120^\circ);$$

$$\dot{U}_{BC} = Z_b\dot{I}_B - Z_c\dot{I}_C = 10\sqrt{3} = U_л e^{0^\circ};$$

$$\dot{U}_{CA} = Z_c\dot{I}_C - Z_a\dot{I}_A = 10\sqrt{3}e^{-j120^\circ} = U_л e^{-j120^\circ} = \sqrt{3}U_ф e^{-j120^\circ}.$$

На рис. 2.15.3, *а* приведена векторная диаграмма для рассмотренного режима цепи.

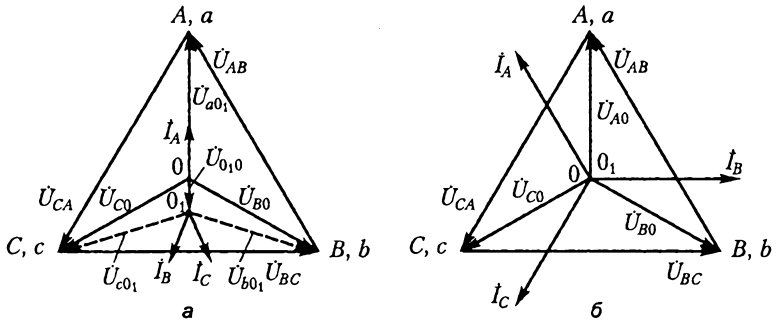


Рис. 2.15.3

Пример 2.15.2. Найти токи I_A, I_B, I_C, I_0 в примере 2.15.1, если фазные сопротивления нагрузки одинаковы $Z_ф = 2e^{-j30^\circ}$; и построить векторную диаграмму.

Если фазные сопротивления нагрузки, соединенной звездой, равны $Z_a = Z_b = Z_c = Z_ф = |Z_ф|e^{j\varphi_ф} = 2e^{-j30^\circ}$, то комплексные проводимости фаз нагрузки $Y_a = Y_b = Y_c = Y_ф = 1/Z_ф = 0{,}5e^{j30^\circ}$. Напряжение между двумя узлами O и O_1 схемы рис. 2.15.2, *б* в соответствии с (2.15.3)

$$\dot{U}_{O_1O} = \frac{Y_ф(\dot{U}_{AO} + \dot{U}_{BO} + \dot{U}_{CO})}{3Y_ф + Y_0} = 0,$$

так как согласно свойству (2.15.2) симметричного трехфазного источника $\dot{U}_{AO} + \dot{U}_{BO} + \dot{U}_{CO} = 0$. Таким образом, напряжение каждой фазы нагрузки равно соответствующему фазному напряжению генератора:

$$\dot{U}_{aO_1} = \dot{U}_{AO};\ \dot{U}_{bO_1} = \dot{U}_{BO};\ \dot{U}_{cO_1} = \dot{U}_{CO}.$$

Токи симметричной трехфазной цепи

$$\dot{I}_A = \dot{U}_{AO}/Z_a = 5e^{j120^\circ},\ I_A = 5\ \text{А};$$

$$\dot{I}_B = \dot{U}_{BO}/Z_b = 5,\ I_B = 5\ \text{А};$$

$$\dot{I}_C = \dot{U}_{CO}/Z_c = 5e^{-j120^\circ},\ I_C = 5\ \text{А};$$

$$\dot{I}_0 = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = Y_0\dot{U}_{O_1O} = 0,$$

т. е. *в симметричной трехфазной системе нулевой провод не нужен.*

В симметричной трехфазной цепи достаточно определить, таким образом, ток только одной фазы, токи других фаз будут иметь такую же амплитуду, а начальные фазы их будут отличаться на 120°.

На рис. 2.15.3, *б* приведена векторная диаграмма цепи.

Пример 2.15.3. В схеме (рис. 2.15.4, *а*) сопротивление фаз нагрузки $|Z_\phi| = 1$ Ом. Линейное напряжение симметричного источника $U_л = 10$ В. Найти линейные токи I_A, I_B, I_C.

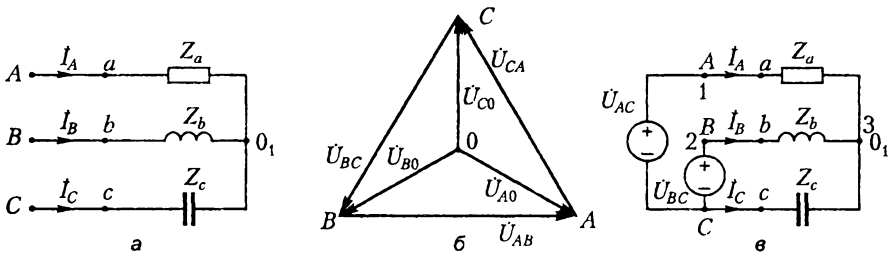


Рис. 2.15.4

Вначале *произвольно* построим векторную диаграмму линейных и фазных напряжений симметричного источника (рис. 2.15.4, *б*), совместив вектор линейного напряжения $\dot{U}_{AB}$, например (для определенности), с вещественной осью комплексной плоскости. Запишем комплексы действующих значений линейных напряжений:

$$\dot{U}_{AB} = U_л;\ \dot{U}_{BC} = U_л e^{-j120^\circ};\ \dot{U}_{CA} = U_л e^{j120^\circ}.$$

Используя *теорему замещения, вводим* в схему (рис. 2.15.4, *в*) *два источника* напряжения $\dot{U}_{AC} = -\dot{U}_{CA}$ и $\dot{U}_{BC}$ между соответствующими линейными проводами.

Рассчитаем схему МУН, считая узел «*c*» базисным; тогда

$$\dot{U}_1^{\text{у}} = \dot{U}_{AC};\ U_2^{\text{у}} = \dot{U}_{BC};$$

$$\dot{U}_3^{\text{у}}(Y_a + Y_b + Y_c) - Y_a\dot{U}_{AC} - Y_b\dot{U}_{BC} = 0.$$

Находим

$$\dot{U}_3^{\text{у}} = \frac{Y_a\dot{U}_{AC} + Y_b\dot{U}_{BC}}{Y_a + Y_b + Y_c} = 1{,}45 + j5,$$

причем $Y_a = 1/Z_a = 1$; $Y_b = 1/Z_b = -j$; $Y_c = 1/Z_c = j$.

Токи цепи

$$\dot{I}_A = \dot{U}_{aO_1}/Z_a = (\dot{U}_{AC} - \dot{U}_3^{\text{у}})/Z_a = 8{,}5 - j5,\ I_A \cong 9{,}9\ \text{А};$$

$$\dot{I}_B = \dot{U}_{bO_1}/Z_b = (\dot{U}_{BC} - \dot{U}_3^y)/Z_b = -13{,}5 + j6{,}45,\ I_B \cong 15\ \text{А};$$

$$\dot{I}_C = \dot{U}_{cO_1}/Z_c = -\dot{U}_3^y)/Z_c = 5 - j1{,}45,\ I_C \cong 5{,}2\ \text{А}.$$

Проверка: $\dot{I}_0 = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$.

Пример 2.15.4. В схеме (рис. 2.15.5, *а*) линейное напряжение источника $U_л = 10$ В. Сопротивления фаз нагрузки, *соединенной треугольником*, $Z_{ab} = 2e^{j30°} = Z_{bc} = Z_{ca}$. Найти фазные и линейные токи цепи. Построить векторную диаграмму.

1. Вначале построим в виде равностороннего треугольника векторную диаграмму линейных напряжений симметричного источника (рис. 2.15.5, *б*). Выберем вещественную ось комплексной плоскости совпадающей с направлением одного из векторов, к примеру $\dot{U}_{BC}$, т. е. $\alpha_{uBC} = 0°$. Тогда $\dot{U}_{BC} = U_л = 10$; $\dot{U}_{AB} = U_л e^{j120°} = 10e^{j120°}$; $\dot{U}_{CA} = U_л e^{-j120°} = 10e^{-j120°}$.

2. Как видно из рис. 2.15.5, *а*, к каждой фазе нагрузки подключено соответствующее линейное напряжение трехфазного источника $\dot{U}_{ab} = \dot{U}_{AB}$; $\dot{U}_{bc} = \dot{U}_{BC}$; $\dot{U}_{ca} = \dot{U}_{CA}$. Таким образом, *при соединении нагрузки треугольником* в цепи имеет место *независимый режим работы фаз.*

3. Токи в фазах нагрузки

$$\dot{I}_{ab} = \dot{U}_{AB}/Z_{ab} = 5e^{j90°};\ \dot{I}_{bc} = \dot{U}_{BC}/Z_{bc} = 5e^{-j30°};\ \dot{I}_{ca} = \dot{U}_{CA}/Z_{ca} = 5e^{-j150°}.$$

Таким образом, в симметричном режиме при соединении нагрузки треугольником амплитуды фазных токов равны ($I_ф = 5$), а начальные фазы отличаются на 120°.

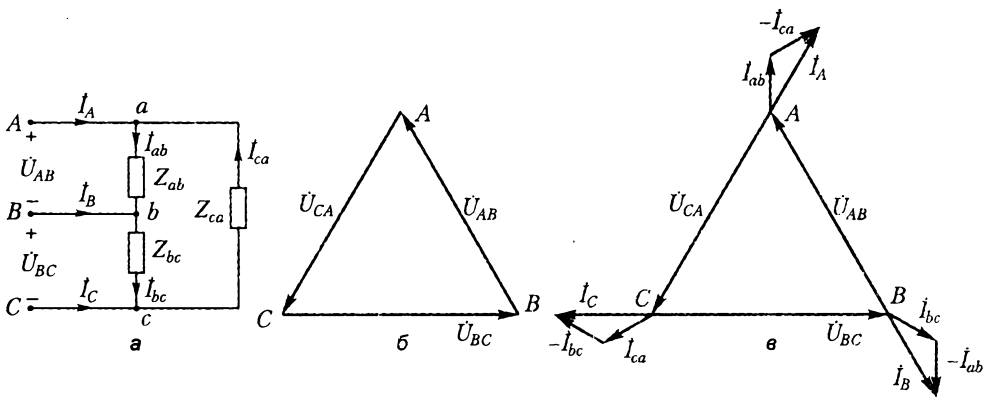


Рис. 2.15.5

4. Линейные токи рассчитываются по ЗТК:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca} = 5\sqrt{3}e^{j60°},\ I_A = 5\sqrt{3}\ \text{А};$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab} = 5\sqrt{3}e^{-j60°},\ I_B = 5\sqrt{3}\ \text{А};$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc} = 5\sqrt{3}e^{-j180^\circ},\ I_C = 5\sqrt{3}\ \text{А},$$

т. е. в симметричном режиме $I_л = \sqrt{3}I_ф$.

Векторная диаграмма симметричного режима показана на рис. 2.15.5, *б*.

2.15.3. Заключение

В результате усвоения материала темы необходимо знать, что представляет собой симметричный трехфазный источник, его свойства, соотношения фазных и линейных напряжений. Необходимо знать, что такое трехфазная цепь, понимать роль нулевого провода в обеспечении независимого режима работы фаз; уметь строить векторные диаграммы и производить расчет трехфазных цепей.

2.16. Операторный метод расчета переходных процессов

2.16.1. Исходные понятия

Операторный метод является *наиболее общим аналитическим* методом расчета переходных процессов в линейных электрических цепях при воздействиях *произвольного* вида.

Как известно, достоинством рассмотренного ранее анализа переходных процессов во временной области является простота и физичность эквивалентных схем замещения цепи для различных режимов, а недостатком — множество пунктов расчета и его резкое усложнение, если воздействия непостоянны или же если при решении появляются дельта-функции.

От этих недостатков свободен *операторный метод*, т. е. анализ переходных процессов с использованием *преобразования Лапласа*. Расчет, во-первых, состоит фактически только из двух пунктов ($t < 0$, $t > 0$), а анализ *операторных схем замещения* (ОСЗ) при $t > 0$ сводится практически к использованию известных приемов расчета R-цепей и решению алгебраических уравнений, т. е. *полностью формализуется*.

Решение любой задачи операторным методом состоит из двух этапов.

1. *Определение* всех *независимых начальных условий* $u_C(0-)$, $i_L(0-)$. Здесь используются освоенные ранее методы анализа *установившихся режимов* перед коммутацией, т. е. при $t < 0$.

2. *Составление ОСЗ* цепи при $t > 0$, расчет по ней изображения по Лапласу реакции и переход к оригиналу.

На ОСЗ все воздействия заменяют их изображениями $f_1(t) \div F_1(s)$, элементы цепи — операторными сопротивлениями $Z_R = R$; $Z_L = sL$; $Z_C = 1/(sC)$, а независимые начальные условия $i_L(0-)$, $u_C(0-)$ учитывают (см. рис. 2.16.1, *а*) *источниками тока* $I_{L0}(s) = i_L(0-)/s$, подключенными *параллельно* индуктивным сопротивлениям Z_L, и *источниками напряжения* $U_{C0}(s) = u_C(0-)/s$, подключенными *последовательно* емкостным сопротивлениям Z_C. ОСЗ элементов (рис. 2.16.1, *а*) могут быть эквивалентно заменены, как показано на рис. 2.16.1, *б*. *Направление* тока $I_{L0}(s)$ и *полярность* напряжения $U_{C0}(s)$ должны *соответствовать* направлению тока $i_L(0-)$ и полярности напряжения $u_C(0-)$.

Необходимо *знать таблицу* перехода от оригинала сигнала к изображению $f(t) = f^*(t)\delta_1(t) \div F(s)$, учитывая, что по Лапласу обычно преобразуют сигналы, рассматриваемые при $t > 0-$, в связи с чем сомножитель $\delta_1(t)$ в их записи часто опускают: 1) $\delta(t) \div 1$; 2) $\delta_1(t) \div 1/s$; 3) $t \div 1/s^2$; 4) $e^{-\beta t} \div 1/(s+\beta)$; 5) $te^{-\beta t} \div 1/(s+\beta)^2$; 6) $\cos \omega t \div s/(s^2+\omega^2)$; 7) $\sin \omega t \div \omega/(s^2+\omega^2)$.

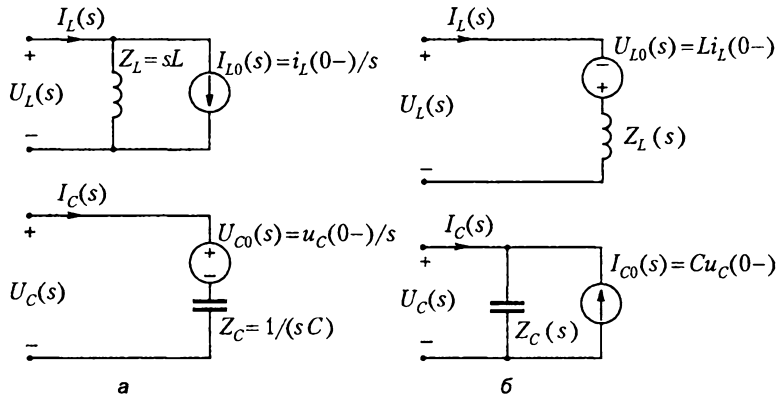


Рис. 2.16.1

Наиболее простой способ *отыскания оригинала* реакции $f_2(t)$ по ее изображению $F_2(s)$ заключается в использовании *теоремы разложения*, т. е. в представлении изображения в виде суммы простых «табличных» изображений («простых дробей»), оригиналы которых известны. Так как в *общем* случае изображение представляет собой *дробно-рациональную* функцию от s вида $F_2(s) = B(s)/D(s)$, то, определив *полюсы* s_k изображения (т. е. корни знаменателя $D(s) = 0$), можно перейти к оригиналу по следующей теореме разложения:

$$F_2(s) = B(s)/D(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \ldots + d_1 s + d_0} =$$

$$= B(s) \Big/ \prod_{k=1}^{n}(s - s_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{s - s_k} + A_0 \div f_2(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k e^{+s_k t}\delta_1(t) + A_0\delta(t), \quad (2.16.1)$$

причем коэффициенты (вычеты в полюсах) разложения определяют по *очевидным* формулам:

$$A_k = (s - s_k)F_2(s)\big|_{s=s_k}; \; A_0 = F_2(\infty). \quad (2.16.2)$$

Следует отметить, что в (2.16.1) $d_n = 1$, т. е. знаменатель $D(s)$ записан в *приведенной* форме. Кроме того, на основании (2.16.2) $A_0 = 0$, если $m < n$, т. е. степень числителя $F_2(s)$ меньше степени знаменателя, что *обычно имеет место* на практике.

Для *кратных полюсов* s_k (например, $s_{1,2} = -2$) теорема разложения имеет вид

$$F_2(s) = \frac{B(s)}{(s+2)^2(\ldots)} = A_0 + \frac{A_1}{(s+2)^2} + \frac{A_2}{(s+2)} + \ldots \div$$

$$\div f_2(t) = A_0\delta(t) + [A_1 te^{-2t} + A_2 e^{-2t} + \ldots]\delta_1(t), \quad (2.16.3)$$

причем очевидно, что

$$A_1 = (s+2)^2 F_2(s)\big|_{s=-2}, \quad (2.16.4)$$

в то время как формула для расчета A_2 имеет более сложный вид:

$$A_2 = \frac{d}{ds}[(s+2)^2 F_2(s)]\big|_{s=-2}, \qquad (2.16.5)$$

поэтому вместо (2.16.5) для определения A_2 часто используют *метод неопределенных коэффициентов.*

В случае *комплексных полюсов*, например, $s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega$, формулы (2.16.1), (2.16.2) остаются справедливыми. Коэффициенты $A_{1,2}$ будут комплексно-сопряженными

$$A_{1,2} = a \pm jb = |A_1| e^{\pm j\beta};$$

при этом полезно знать следующие эквивалентные формулы перехода к оригиналу:

$$f_2(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + \ldots = 2|A_1| e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \beta) + \ldots, \qquad (2.16.6)$$

поскольку от первого варианта записи (2.16.6) несложно перейти к последнему, использовав преобразование

$$f_2(t) = |A_1| e^{-\alpha t}[e^{j(\omega t+\beta)} + e^{-j(\omega t+\beta)}] + \ldots.$$

Для контроля правильности перехода к оригиналу широко используется *теорема о начальном значении*:

$$f_2(0+) = sF_2(s) \quad \text{при} \quad s \to \infty.$$

2.16.2. Примеры типовых задач

Пример 2.16.1. Дана цепь (рис. 2.16.2, *а*) при $i_1 = 1{,}5$ А; $R_2 = 4$ Ом; $R_3 = 4$ Ом; $u_4 = 2$ В; $L = 1$ Гн; $C = 1$ Ф. Найти: $i_L(t)$, $u_C(t)$ при $t > 0$.

1. Независимые начальные условия $i_L(0-)$, $u_C(0-)$ находим по схеме замещения (рис. 2.16.2, *б*) при $t < 0$. Очевидно, $i_L(0-) = 0$, $u_C(0-) = u_4 = 2$ В.

2. Операторная схема замещения для $t > 0$ приведена на рис. 2.16.3, где $I_1(s) = 1{,}5/s$; $Z_2(s) = 4$; $Z_3(s) = 4$; $U_4(s) = 2/s$; $Z_L(s) = s$; $Z_C(s) = 1/s$; $U_{C0}(s) = u_C(0-)/s = 2/s$; $I_{L0}(s) = i_L(0-)/s = 0$, что эквивалентно XX.

Следует *обратить внимание* (см. рис. 2.16.1, *а*), что в ОСЗ изображение тока L-элемента $I_L(s)$ определяется суммой токов, протекающих через элементы $I_{L0}(s)$ и Z_L, а напряжение C-элемента $U_C(s)$ – суммой напряжений элементов Z_C и $U_{C0}(s)$.

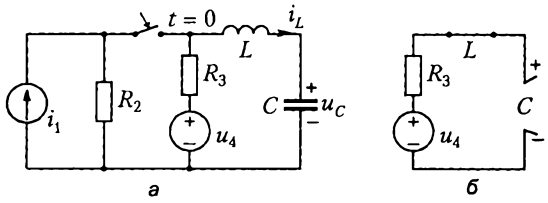


Рис. 2.16.2

Применяя к ОСЗ (рис. 2.16.3) методы, аналогичные расчету R-цепей, например, МУН с базисным узлом 4, записываем

$$U_1^{\text{у}}(s) = U_4(s) = 2/s;\ U_2^{\text{у}}(s) = U_{C0}(s) = 2/s;$$

$$\left(Y_2 + Y_3 + \frac{1}{Z_L + Z_C}\right)U_3^{\text{у}}(s) - Y_3 U_1^{\text{у}}(s) - \frac{1}{Z_L + Z_C}U_2^{\text{у}}(s) = I_1(s).$$

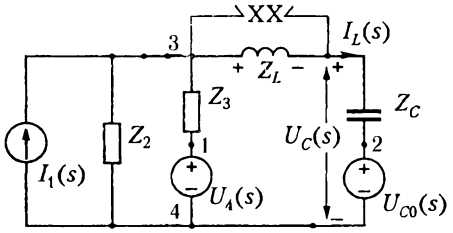


Рис. 2.16.3

Решив систему, можно найти узловое напряжение $U_3^{\text{у}}(s)$ и затем определить изображение по Лапласу тока L-элемента:

$$I_L(s) = \frac{U_3^{\text{у}}(s) - U_2^{\text{у}}(s)}{Z_L + Z_C} = \frac{2}{s^2 + 2s + 1}.$$

Напряжение $U_C(s)$ емкостного элемента:

$$U_C(s) = U_{C0}(s) + Z_C(s)I_L(s) = \frac{2s^2 + 4s + 4}{(s^2 + 2s + 1)s}.$$

Переходим от изображений $I_L(s)$, $U_C(s)$ к оригиналам $i_L(t)$, $u_C(t)$.

Полюсы $I_L(s)$, т. е. корни уравнения $s^2 + 2s + 1 = (s+1)^2 = 0$, являются кратными: $s_{1,2} = -1$. При этом

$$I_L(s) = \frac{2}{(s+1)^2} \div i_L(t) = 2te^{-t},$$

так как изображение соответствует одной из табличных формул.

Полюсы $U_C(s)$ равны $s_{1,2} = -1$, $s_3 = 0$. Поэтому разложение $U_C(s)$ на простые дроби согласно (2.16.1), (2.16.3) имеет вид

$$U_C(s) = \frac{2s^2 + 4s + 4}{(s^2 + 2s + 1)s} = \frac{A_1}{(s+1)^2} + \frac{A_2}{(s+1)} + \frac{A_3}{s}. \qquad (2.16.7)$$

Коэффициенты A_1 и A_3 проще всего найти, использовав (2.16.2), (2.16.4):

$$A_1 = (s+1)^2 U_C(s)\big|_{s=-1} = \left.\frac{2s^2 + 4s + 4}{s}\right|_{s=-1} = -2;$$

$$A_3 = sU_C(s)|_{s=0} = \left.\frac{2s^2 + 4s + 4}{s^2 + 2s + 1}\right|_{s=0} = 4.$$

Для расчета A_2 на базе *метода неопределенных коэффициентов* приводим правую часть (2.16.7) к общему знаменателю и приравниваем коэффициенты при s^2 в числителях правой и левой частей (2.16.7): $2 = A_2 + A_3$, откуда $A_2 = 2 - A_3 = 2 - -4 = -2$. В соответствии с (2.16.1), (2.16.3) записываем искомый оригинал (2.16.7): $u_C(t) = -2te^{-t} - 2e^{-t} + 4$ при $t > 0$.

Проверка: $i_L(t) = i_C(t) = cu'_C(t) = (4 - 2te^{-t} - 2e^{-t})' = 2te^{-t}$.

Осуществим также *контроль* по теореме о *начальном значении* и на основании *законов коммутации*:

$$i_L(0^+) = \lim_{s\to\infty}[sI_L(s)] = 0 = i_L(0^-);$$
$$u_C(0^+) = \lim_{s\to\infty}[sU_C(s)] = 2 = u_C(0^-).$$

Пример 2.16.2. Решить задачу примера 2.16.1 при $C_6 = 1/2$ Ф.

1. Независимые начальные условия останутся такими же, как в примере 2.16.1: $i_L(0-) = 0$; $u_C(0-) = 2$ В.

2. ОСЗ останется такой же, как в примере 2.16.1; изменится только величина $Z_C(s) = 2/s$.

Изображение реакции будет

$$I_L(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 2}; \; U_C(s) = \frac{2s^2 + 4s + 8}{(s^2 + 2s + 2)s}.$$

Для перехода от изображений к оригиналам находим корни уравнения $(s_2 + 2s + +2)s = 0$; откуда $s_1 = -1 + j$; $s_2 = -1 - j$; $s_3 = 0$. Таким образом, на основании теоремы разложения (2.16.1) можно записать

$$I_L(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 2} = \frac{2}{(s + 1 - j)(s + 1 + j)} = \frac{A_1}{s + 1 - j} + \frac{A_2}{s + 1 + j}.$$

Далее используем (2.16.2):

$$A_1 = \left[(s + 1 - j)\frac{2}{s^2 + 2s + 2}\right]_{s=s_1=-1+j} = -j = e^{-j90^\circ}; \; A_2 = \dot{A}_1 = j = e^{j90^\circ}.$$

С учетом (2.16.6) находим $i_L(t) = 2e^{-t}\cos(t - 90^\circ) = 2e^{-t}\sin t$.

Аналогично имеем:

$$U_C(s) = \frac{2s^2 + 4s + 8}{(s^2 + 2s + 2)s} = \frac{2s^2 + 4s + 8}{(s + 1 - j)(s + 1 + j)s} = \frac{A_1}{s + 1 - j} + \frac{A_2}{s + 1 + j} + \frac{A_3}{s},$$

причем

$$A_3 = \left[s\frac{2s^2 + 4s + 8}{(s^2 + 2s + 2)s}\right]_{s=s_3=0} = 4;$$

$$A_1 = \left[(s+1-j)\frac{2s^2+4s+8}{(s^2+2s+2)s}\right]_{s=s_1=-1+j} = -1+j = \sqrt{2}e^{j135°};\ A_2 = \dot{A}_1.$$

Таким образом, $u_C(t) = 4 + 2\sqrt{2}e^{-t}\cos(t+135°)$.

Проверка: $i_C(t) = C\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[4 + 2\sqrt{2}e^{-t}\cos(t+135°)] = 2e^{-t}\sin t.$

Вопрос 1. Каковы изображения сигналов, описываемых функциями $f_1(t) = 5t$ и $f_2(t) = 5t\delta_1(t)$? Какая из записей корректнее?

Вопрос 2. В каких случаях при переходе от изображения в оригинале появляется дельта-функция?

Вопрос 3. Как проще всего найти изображение $F(s)$ воздействия $f(t) = 10\cos(\omega t + 45°)\delta_1(t)$?

Вопрос 4. Как вычислить вычеты, если полюсы изображения нулевые, вещественные, комплексные, мнимые?

Вопрос 5. Дуальны ли ОСЗ L- и C-элементов?

2.16.3. Заключение

В результате изучения материала темы необходимо усвоить порядок расчета переходных процессов операторным методом, правильно составлять операторные схемы замещения и указывать на них изображения заданных реакций, освоить методику нахождения оригиналов по их изображениям, уметь записывать в общем виде искомую реакцию по виду полюсов ее изображения.

2.17. Передаточная функция и частотные характеристики цепей

2.17.1. Исходные понятия

Анализ цепи проще всего проводить по ее передаточной функции и известному входному воздействию. *Передаточной функцией* цепи называют *отношение* изображения *реакции* к изображению *единственного* в цепи *воздействия* при *нулевых* независимых *начальных* условиях:

$$H(s) = \frac{F_2(s)}{F_1(s)}, \qquad (2.17.1)$$

где $F_2(s)$, $F_1(s)$ — *изображения* реакции и воздействия.

Часто в качестве второго определения передаточной функции (ПФ) используют следующее: ПФ цепи — это *изображение* по Лапласу *импульсной характеристики* цепи:

$$H(s) \div h(t).$$

Переходная характеристика $h_1(t) \div H_1(s)$, как известно, является реакцией $f_2(t) \div F_2(s)$ на единичное ступенчатое воздействие $f_1(t) = \delta_1(t) \div F_1(s) = 1/s$. Поэтому на основании (2.17.1) $F_2(s) = F_1(s)\,H(s)$ получим *изображение переходной характеристики*:

$$H_1(s) = \frac{1}{s} H(s).$$

Частотная характеристика цепи (*комплексная частотная* характеристика) $H(j\omega)$ связана с ПФ формулой

$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega},$$

причем комплексная функция $H(j\omega)$ по аналогии с комплексным числом может быть представлена в показательной или алгебраической форме:

$$H(j\omega) = A(\omega)e^{j\Phi(\omega)} = B(\omega) + jM(\omega), \qquad (2.17.2)$$

где $A(\omega) = |H(j\omega)| = \sqrt{B^2(\omega) + M^2(\omega)}$ — *амплитудно-частотная характеристика* (АЧХ) цепи; $\Phi(\omega) = \arg H(j\omega) = \operatorname{arctg}[M(\omega)/B(\omega)]$ — *фазочастотная характеристика* (ФЧХ) цепи; $B(\omega) = A(\omega)\cos\Phi(\omega)$ — *вещественная частотная характеристика* (ВЧХ); $M(\omega) = A(\omega)\sin\Phi(\omega)$ — *мнимая частотная характеристика* (МЧХ).

График $H(j\omega)$ на комплексной плоскости называют *амплитудно-фазовой характеристикой* (АФХ). На основании (2.17.2) АФХ может быть построена по АЧХ

и ФЧХ или по ВЧХ и МЧХ. Она представляет собой кривую, *прочерченную* на комплексной плоскости *концом вектора* $H(j\omega)$ *при изменении частоты* ω от 0 до ∞.

Кроме указанной *связи* ПФ *с импульсной, переходной и частотными* характеристиками (ЧХ) цепи необходимо также знать, что *знаменатель любой* ПФ — это *характеристический полином* цепи, а корни знаменателя ПФ, т. е. полюсы ПФ, — это собственные частоты цепи (т. е. частоты собственных колебаний).

При изучении материала данной темы также широко используется *теорема запаздывания*

$$f(t-t_3)\delta_1(t-t_3) \div F(s)e^{-st_3},$$

где t_3 — *время запаздывания* сигнала.

2.17.2. Типовые примеры

Пример 2.17.1. В цепи (рис. 2.17.1, *а*) $R_1 = 2$ Ом; $R_2 = 2$ Ом. $L = 2$ Гн. Воздействие — входной ток; реакция — входное напряжение. Необходимо найти передаточную функцию цепи и реакцию на импульс (рис. 2.17.1, *б*).

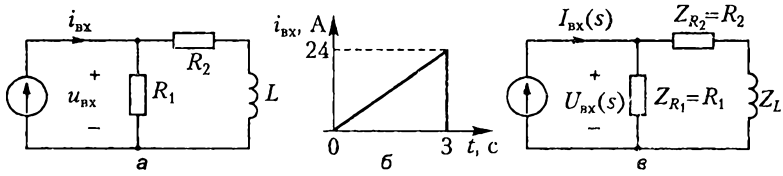


Рис. 2.17.1

1. Определяем ПФ цепи. Согласно (2.17.1) такую ПФ $H(s) = U_{вх}(s)/I_{вх}(s)$, являющуюся входным сопротивлением, можно найти по операторной схеме замещения цепи (рис. 2.17.1, *в*):

$$Z_{вх}(s) = \frac{R_1(R_2 + sL)}{R_2 + R_2 + sL} = \frac{2(2+2s)}{4+2s} = \frac{2(s+1)}{s+2}. \qquad (2.17.3)$$

2. *Контролируем* ПФ по эквивалентным схемам цепи *на характерных частотах* $s = 0$ и $s = \infty$. На рис. 2.17.2 изображены схемы цепи для проверки полученной ПФ.

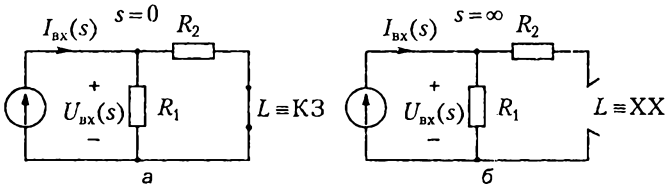


Рис. 2.17.2

Согласно (2.17.3) при $s = 0$ имеем $Z_{вх}(0) = 1$ Ом. По схеме (рис. 2.17.2, *а*) *при нулевой частоте* (т. е. *при постоянном токе*) получаем аналогичное значение, поскольку на постоянном токе L-элемент *эквивалентен короткозамкнутому участку цепи*, т. е. $Z_{вх}(0) = R_{вх} = R_1 R_2/(R_1 + R_2) = 1$ Ом.

При $s = \infty$ по выражению (2.17.3) $Z_{вх}(\infty) = 2$ Ом, и по схеме (рис. 2.17.2, *б*), учитывая, что $Z_L = \infty$, т. е. L-элемент *эквивалентен* разорванному участку цепи — *холостому ходу*, входное сопротивление $R_{вх} = R_1 = 2$ Ом.

Можно также *проконтролировать полюс* ПФ $s_1 = -2$, т. е. корень знаменателя ПФ, который определяет *корень характеристического уравнения* цепи. Очевидно, рассчитанное относительно накопителя эквивалентное сопротивление цепи (рис. 2.17.1, *а*) *в свободном режиме* (когда источник тока ИТ ≡ ХХ) будет $R_э = R_1 + R_2 = 4$ Ом. Тогда постоянная времени $\tau = L/R_э = 2/4 = 0{,}5$ с, следовательно, в цепи первого порядка $s_1 = -1/\tau = -2$ с$^{-1}$, что и было получено.

3. Находим реакцию на импульс. Из определения ПФ (2.17.1) следует, что изображение реакции $F_2(s) = F_1(s)/H(s)$, т. е. для нашего случая можем записать, что $U_{вх}(s) = Z_{вх}(s) I_{вх}(s)$.

Воздействие имеет вид треугольного импульса (рис. 2.17.1, *б*), который (аналогично рис. 2.9.4) можно описать следующей суммой составляющих:

$$i_{вх}(t) = 8t\delta_1(t) - 8(t-3)\delta_1(t-3) - 24\delta_1(t-3).$$

Используя формулы изображений для единичной ступенчатой функции и линейной функции, а также *теорему запаздывания*, находим изображение

$$I_{вх}(s) = \frac{8}{s^2}(1 - e^{-3s}) - \frac{24}{s}e^{-3s}.$$

Этот же результат можно получить *методом двойного дифференцирования* входного сигнала (рис. 2.17.3, *а*), который имеет кусочно-линейную форму. На рис. 2.17.3, *б* изображен график его первой производной $i'_{вх}(t)$, содержащий постоянную $8 = 24/3$ в интервале $0 < t < 3$ и *дельта-функцию* при $t = 3$, *высота* которой *бесконечна, а площадь* равна «−24» (действительно, производная от линейной функции равна отношению приращения функции $\Delta i_{вх} = 24 - 0$ к приращению аргумента $\Delta t = 3 - 0$, а *производная в точке разрыва* функции *дает дельта-функцию с коэффициентом, равным величине разрыва*, т. е. $0 - 24 = -24$). Вторая производная (рис. 2.17.3, *в*) от двух разрывов (скачков) $i'_{вх}(t)$ величиной 8 и −8, содержит две дельта-функции. На рис. 2.17.3, *в* не показана составляющая $-24\delta'(t-3)$, поэтому вместо $i''_{вх}(t)$ введено обозначение $\tilde{i}''_{вх}(t)$. Как известно, *изображение единичной импульсной функции* $\delta(t) \div \Delta(s) = 1$, следовательно, *по теореме запаздывания* $-24\delta(t-3) \div -24e^{-3s}$. Для получения $i_{вх}$ необходимо *проинтегрировать* дельта-функцию, изображенную на рис. 2.17.3, *б*, один раз, а изображенную на рис. 2.17.3, *в* — два раза. *Интегрированию* в t-области *соответствует деление* на s в s-области. В результате получим указанное ранее $I_{вх}(s)$.

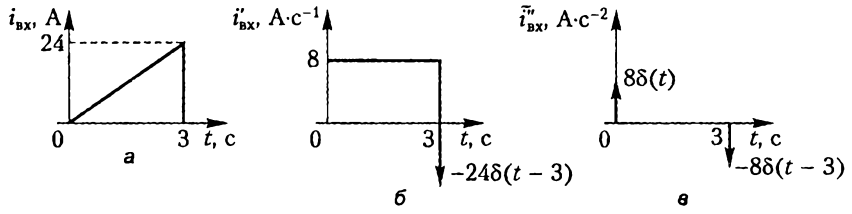


Рис. 2.17.3

Изображение реакции будет иметь следующий вид:

$$U_{вх}(s) = H(s)I_{вх}(s) = \frac{2(s+1)}{(s+2)}\left[\frac{8}{s^2}(1-e^{-3s}) - \frac{24}{s}e^{-3s}\right]. \qquad (2.17.4)$$

Окончательно реакцию получаем, *раскладывая только дробно-рациональные* части изображения (2.17.4) на простые дроби и применяя теорему разложения:

$$U_{вх}(s) = \left(\frac{8}{s^2} + \frac{4}{s} - \frac{4}{s+2}\right)(1-e^{-3s}) - \left(\frac{24}{s} + \frac{24}{s+2}\right)e^{-3s} \div u_{вх}(t) =$$

$$= (8t + 4 - 4e^{-2t})\delta_1(t) - [8(t-3) + 4 - 4e^{-2(t-3)}]\delta_1(t-3) - [24 + 24e^{-2(t-3)}]\delta_1(t-3),$$

причем здесь *обязательна* запись единичных ступенчатых функций $\delta_1(t-t_3)$, указывающих *начало и запаздывание* каждой из составляющих.

Пример 2.17.2. В цепи (рис. 2.17.4) $R_1 = 2$ Ом; $R_2 = R_3 = 1$ Ом; $C = 2$ Ф. Воздействие — входное напряжение; реакция — напряжение u_{R3}. Необходимо найти ПФ, импульсную характеристику $h(t)$, переходную характеристику $h_1(t)$, а также частотные характеристики цепи $H(j\omega)$, АЧХ, ФЧХ и АФХ.

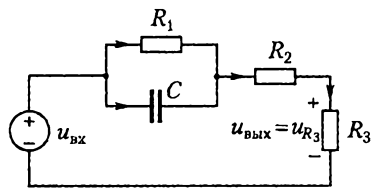


Рис. 2.17.4

1. Определяем ПФ $H(s) = U_{R3}(s)/U_{вх}(s)$. Вычислим ПФ, используя «самый надежный на практике» метод — *метод пропорциональных величин*, учитывая, что в операторной схеме $Z_C = 1/(Cs)$. Пусть $I'_{R3}(s) = 1$, тогда $U'_{R3}(s) = R_3 I'_{R3}(s) = 1$, и так как $I'_{R3}(s) = I'_{R2}(s) = 1$, то $U'_{R2}(s) = R_2 I'_{R2}(s) = 1$. Напряжение участка цепи R_1C равно

$$U'_{R1C} = Z_{R1C} I'_{R1C}(s) = \frac{R_1 Z_C}{R_1 + Z_C} I'_{R3}(s) = \frac{2}{4s+1} \cdot 1 = \frac{2}{4s+1}.$$

Изображение входного напряжения:

$$U'_{вх} = U'_{R1C} + U'_{R2} + U'_{R3} = \frac{2}{4s+1} + 1 + 1 = \frac{8s+4}{4s+1}.$$

ПФ цепи:

$$H(s) = \frac{U'_{R3}(s)}{U'_{вх}(s)} = \frac{4s+1}{8s+4} = \frac{1(s+1/4)}{2(s+1/2)}. \qquad (2.17.5)$$

2. *Проверим* ПФ *на характерных частотах.* На рис. 2.17.5 изображены схемы цепи при $s = 0$ и $s = \infty$ (с учетом, что $C \equiv$ ХХ при $s = 0$, а при $s = \infty$ имеем $C \equiv$ КЗ).

Согласно (2.17.5) при $s = 0$ находим $H(0) = 1/4$, и по схеме замещения (рис. 2.17.5, *а*) для $s = 0$, положив входное напряжение $U_{вх}(s) = 1$, выходной ток $I = U_{вх}/(R_1 + R_2 + R_3) = 1/4$ и $H(0) = R_3 I = 1/4$. В случае $s = 0$ по выражению (2.17.5) $H(\infty) = 1/2$, что совпадает со значением ПФ по схеме цепи (рис. 2.17.5, *б*) $H(\infty) = R_3 I = 1/2$.

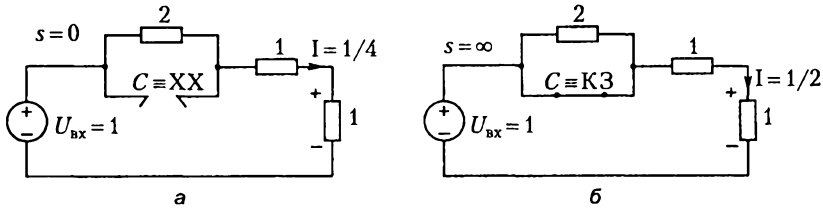


Рис. 2.17.5

Следует отметить, что ПФ легко можно было *проконтролировать*, используя формулу делителя напряжений. Обозначая Z_{R1CR2} сопротивление участка цепи R_1CR_2, запишем

$$H(s) = \frac{U_{R3}(s)}{U_{вх}(s)} = \frac{R_3}{R_3 + Z_{R1CR2}} = \frac{R_3}{R_3 + R_2 + R_1 Z_C/(R_1 + Z_C)} = \frac{4s+1}{8s+4} = \frac{s+1/4}{2(s+1/2)}.$$

3. Находим импульсную и переходную характеристики цепи.

Импульсная характеристика — это оригинал ПФ:

$$H(s) = \frac{s+1/4}{2(s+1/2)} = \frac{1}{2} - \frac{1/8}{s+1/2} \div h(t) = \frac{1}{2}\delta(t) - \frac{1}{8}e^{-t/2}\delta_1(t).$$

Переходная характеристика

$$H_1(s) = \frac{H(s)}{s} = \frac{s+1/4}{2s(s+1/2)} = \frac{1/4}{s} + \frac{1/4}{s+1/2} \div h_1(t) = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-t/2}\right)\delta_1(t).$$

Проконтролируем полученные результаты, используя известное соотношение:

$$h(t) = h_1'(t) = ((1/4 + 1/4\,e^{-t/2})\,\delta_1(t))' = (1/4 + 1/4\,e^{-t/2})'\,\delta_1(t) + (1/4 + 1/4\,e^{-t/2})\,\delta_1'(t) =$$
$$= -1/8\,e^{-t/2}\delta_1(t) + (1/4 + 1/4\,e^{0})\,\delta(t) = 1/2\,\delta(t) - 1/8\,e^{-t/2}\delta_1(t),$$

причем здесь учтено *свойство «выборки»* $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$.

4. Определяем частотные характеристики цепи:

$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = \frac{1(j\omega + 1/4)}{2(j\omega + 1/2)}.$$

Амплитудно-частотная характеристика

$$A(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{A_{числитель}}{A_{знаменатель}} = \frac{1\sqrt{\omega^2 + (1/4)^2}}{2\sqrt{\omega^2 + (1/2)^2}}.$$

Фазочастотная характеристика

$$\Phi(\omega) = \arg H(j\omega) = \Phi_{\text{числитель}} - \Phi_{\text{знаменатель}} = \operatorname{arctg}(\omega/0{,}25) - \operatorname{arctg}(\omega/0{,}5).$$

На рис. 2.17.6, *а*, *б* построены графики АЧХ и ФЧХ цепи, причем указаны характерные частоты $\omega_1 = 1/4$ и $\omega_2 = 1/2$, которыми обычно являются модули корней числителя и знаменателя ПФ (т. е. нулей и полюсов ПФ) и которые (помимо частоты $\omega \to 0$ и $\omega \to \infty$) определяют во многом вид частотных характеристик.

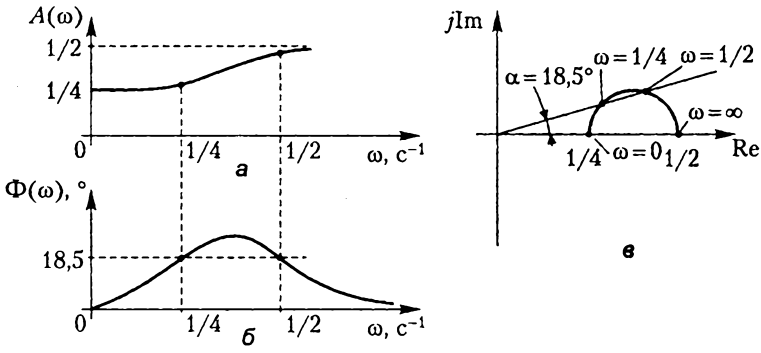


Рис. 2.17.6

График АФХ (рис. 2.17.6, *в*) построен на комплексной плоскости на основании (2.17.2) по АЧХ и ФЧХ при изменении частоты от 0 до ∞.

Вопрос 1. В чем особенность операторной схемы замещения цепи, составленной для расчета ПФ?

Вопрос 2. Как наиболее просто по АЧХ и ФЧХ вычислить ВЧХ и МЧХ?

Вопрос 3. Какая из частотных характеристик содержит наиболее полную информацию?

Вопрос 4. Почему обобщенную функцию $\delta_1(t - t_3)$ следует использовать при описании импульсных сигналов?

Вопрос 5. К чему приводит в оригинале равенство степеней числителя и знаменателя ПФ?

Вопрос 6. Как проконтролировать найденную ПФ?

Вопрос 7. Как найти изображение сигнала кусочно-линейной формы?

Вопрос 8. Почему значения модулей нулей и полюсов ПФ целесообразно использовать при практических расчетах АЧХ и ФЧХ?

2.17.3. Заключение

В результате усвоения материала темы необходимо знать определения ПФ цепи, уметь находить ПФ и проверять полученный результат на характерных частотах и соответствующих им схемах, правильно записывать выражения для ЧХ цепи, определять по ПФ импульсную и переходную характеристики и корни характеристического уравнения цепи, находить изображения импульсных сигналов и правильно использовать теорему запаздывания.

2.18. Анализ установившегося периодического несинусоидального режима в цепи

2.18.1. Исходные понятия

Периодический несинусоидальный сигнал $f(t)$, удовлетворяющий условиям Дирихле и заданный во временном интервале $-\infty < t < \infty$, можно описать *сходящимся гармоническим* рядом Фурье (РФ)

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t + \Phi_k), \qquad (2.18.1)$$

где *нулевая гармоника* (постоянная составляющая)

$$\frac{A_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt \qquad (2.18.2)$$

определяет *среднее* за период T значение сигнала; A_k, $\omega_k = k\omega_1$, α_k — амплитуда, частота, начальная фаза k-й гармоники ряда (2.18.1), т. е. ее частота *кратна* частоте первой (*основной*) гармоники $\omega_1 = 2\pi/T$, период которой $T_1 = T$ равен периоду сигнала $f(t)$.

Если периодическое воздействие $f_1(t)$ вида (2.18.1) считать приложенным к цепи при $t \to -\infty$, то к моменту t в цепи будет *установившийся* (вынужденный) *периодический режим*, поскольку свободная составляющая переходного процесса затухнет. При этом искомая установившаяся периодическая реакция $f_2(t)$ будет иметь также форму (2.18.1) с тем же периодом T.

Расчет электрических цепей в установившемся периодическом режиме основан *на принципе наложения*, т. е k-я гармоника искомого выходного сигнала $f_2(t)$ вычисляется как элементарная реакция от k-й гармоники воздействия $f_1(t)$. При этом для каждой гармоники в цепи имеет место *установившийся синусоидальный режим*, который рассчитывается *методом комплексных амплитуд*. Естественно, в зависимости от частотных свойств цепи амплитуды некоторых гармоник РФ реакции могут получиться и нулевыми, но *спектральный состав реакции определяется спектром воздействия.*

Исходя из этого на практике анализ установившегося периодического режима с использованием РФ состоит из нескольких этапов.

1. Периодическое воздействие $f_1(t)$ представляют обычно *отрезком* РФ, т. е. ограничиваются несколькими первыми гармониками, так как РФ *быстро сходится.*

2. Для анализа элементарной реакции на каждую из гармоник воздействия составляют комплексную схему замещения цепи и методом комплексных амплитуд находят соответствующую гармонику РФ реакции.

3. РФ реакции $f_2(t)$ записывают как сумму всех найденных составляющих этой реакции.

Если $u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k \sqrt{2} \cos(k\omega_1 t + \alpha_{uk})$ — РФ напряжения произвольного пассивного двухполюсника, а $i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k \sqrt{2} \cos(k\omega_1 t + \alpha_{ik})$ — ток ДП, то активная мощность ДП вычисляется по формуле

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} P_k = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos\varphi_k,$$

где $\varphi_k = \alpha_{uk} - \alpha_{ik}$.

При этом формулы для расчета действующих значений периодических напряжения и тока имеют вид

$$U = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2} = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \ldots} = \sqrt{U_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} U_{mk}^2};$$

$$I = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} I_k^2} = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \ldots} = \sqrt{I_0^2 + \frac{1}{2}(I_{m1}^2 + I_{m2}^2 + \ldots)},$$

где $U_{mk} = U_k\sqrt{2}$; $I_{mk} = I_k\sqrt{2}$ — амплитудные значения напряжения и тока k-й гармоники РФ.

Амплитудный и фазовый спектры периодического сигнала называют *дискретными или линейчатыми*, так как их принято изображать на графиках отрезками прямых *линий*, которые отражают множество амплитуд A_k и начальных фаз Φ_k, построенных для *дискретных* значений частоты $\omega_k = k\omega_1$. При этом *следует отметить*, что спектральную составляющую (2.18.2), соответствующую нулевой гармонике, $A_0 = 2f_{ср}$ показывают как *удвоенное* среднее значение периодического сигнала (2.18.1).

2.18.2. Типовой пример

Дана цепь (рис. 2.18.1, *а*) при $R_1 = 1$ Ом; $L_2 = 1/3$ Гн; $L_3 = 1$ Гн; $C_4 = 1$ Ф;

$$u(t) = U_0 + U_1\sqrt{2}\cos(\omega_1 t + \alpha_{u1}) + U_2\sqrt{2}\cos(2\omega_1 t + \alpha_{u2}) =$$

$$= 2 + 4\sqrt{2}\cos(t + 45°) + 2\sqrt{2}\cos(2t + 90°).$$

Найти входной ток $i(t)$, мощность цепи P, действующее значение U, I и построить спектр $u(t)$.

Проставим на схеме цепи направления токов и полярности напряжений (полярности напряжений R-, L-, C-элементов должны быть *согласованы* с направлением токов этих элементов).

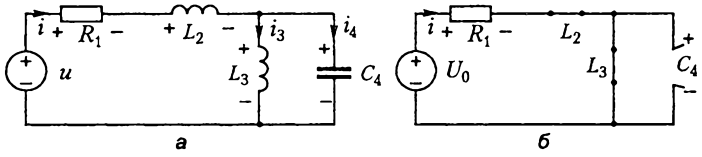


Рис. 2.18.1

В комплексной схеме замещения цепи должны быть указаны комплексные амплитуды U_{mk} и комплексные сопротивления накопителей $Z_L = j\omega L$, $Z_C = 1/(j\omega C)$ для заданных частот гармоник $\omega_k = k\omega_1$ при $k = 0, 1, 2, \ldots$ и $\omega_1 = 1\ \text{с}^{-1}$.

1. Для *нулевой гармоники* $\omega = 0$ имеем:

$$U_0 = 2;\ Z_1 = R_1 = 1;\ Z_2 = j\omega L_2 = 0;\ Z_3 = j\omega L_3 = 0;\ Z_4 = \frac{1}{j\omega C_4} = \infty.$$

Эквивалентная схема, соответствующая *нулевой частоте* (т. е. режиму постоянных токов и напряжений), приведена на рис. 2.18.1, *б*.

Входное сопротивление

$$Z_{вх} = Z_1 + Z_2 + Z_{34} = 1 + 0 + 0 = 1.$$

Входной ток

$$I_0 = \frac{U_0}{Z_{вх}} = \frac{U_0}{R_1} = \frac{2}{1} = 2.$$

2. Для первой гармоники $\omega = \omega_1 = 1\ \text{с}^{-1}$ имеем следующие исходные данные: $\dot{U}_{m1} = U_{m1}e^{j\alpha_{u1}} = 4\sqrt{2}e^{j45^\circ}$; $Z_1 = R_1 = 1$; $Z_2 = j\omega_1 L_2 = j/3$; $Z_3 = j\omega_1 L_3 = j$; $Z_4 = 1/(j\omega_1 C_4) = -j$.

Входное сопротивление цепи

$$Z_{вх} = Z_1 + Z_2 + Z_{34} = Z_1 + Z_2 + \frac{Z_3 Z_4}{Z_3 + Z_4} = 1 + j\frac{1}{3} + \frac{j(-j)}{j - j} = \infty,$$

так как из-за *простейшего резонанса токов* участок L_3C_4 эквивалентен XX.

Входной ток

$$\dot{I}_{m1} = \frac{\dot{U}_{m1}}{Z_{вх}} = \frac{4\sqrt{2}e^{j45^\circ}}{\infty} = 0 \div i_1(t) = 0.$$

3. Для второй гармоники сигналов $\omega = \omega_2 = 2\omega_1 = 2\ \text{с}^{-1}$ аналогично имеем $\dot{U}_{m2} = U_{m2}e^{j\alpha_{u2}} = 2\sqrt{2}e^{j90^\circ}$; $Z_1 = R_1 = 1$; $Z_2 = j\omega_2 L_2 = j2/3$; $Z_3 = j\omega_2 L_3 = j2$; $Z_4 = 1/(j\omega_2 C_4) = -j0{,}5$.

Входное сопротивление цепи

$$Z_{вх} = Z_1 + Z_2 + Z_{34} = Z_1 + Z_{234} = 1 + j\frac{2}{3} + \frac{j2(-j0{,}5)}{j2 - j0{,}5} = 1,$$

т. е. в цепи наблюдается *резонанс напряжений.*

Входной ток

$$\dot{I}_{m2} = \frac{\dot{U}_{m2}}{Z_{вх}} = \frac{2\sqrt{2}e^{j90°}}{1} = 2\sqrt{2}e^{j90°} \div i_2(t) = 2\sqrt{2}\cos(2t + 90°).$$

Входной ток в виде отрезка РФ

$$i(t) = I_0 + I_1\sqrt{2}\cos(\omega_1 t + \alpha_{i1}) + I_2\sqrt{2}\cos(2\omega_1 t + \alpha_{i2}) = 2 + 0 + 2\sqrt{2}\cos(2t + 90°).$$

Таким образом, входной ток не содержит основной гармоники частоты $\omega = \omega_1 = 1\ с^{-1}$.

Активная мощность, потребляемая пассивным ДП:

$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos(a_{u1} - \alpha_{i1}) + U_2 I_2 \cos(a_{u2} - \alpha_{i2}) =$$
$$= 2 \cdot 2 + 0 + 2 \cdot 2\cos(90°–90°) = 8Вт.$$

Действующее значение периодического входного напряжения $u(t)$

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2} = \sqrt{2^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{24} = 4{,}9\ В.$$

Действующее значение периодической реакции — тока $i(t)$

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2} = \sqrt{2^2 + 0^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \cong 2{,}8\ А.$$

Контроль мощности: $P = P_R = RI_R^2 = RI^2 = 1(2\sqrt{2})^2 = 8$ Вт.

Графики дискретных амплитудного $A_k = U_{mk}$ и фазового $\Phi_k = \alpha_{uk}$ спектров воздействия $u(t)$ приведены на рис. 2.18.2.

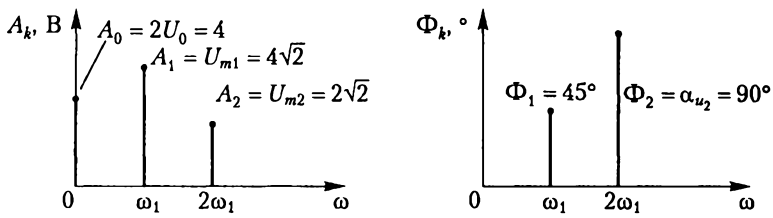


Рис. 2.18.2

Часто используют иной — более *формализованный вариант расчета.* Вначале находят передаточную функцию цепи. В примере

$$H(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{1}{Z_{вх}(s)} = \frac{1}{R_1 + sL_2 + \dfrac{sL_3}{sC_4(sL_3 + 1/(sC_4))}} =$$

$$= \frac{1}{1 + s/3 + \dfrac{1}{s + 1/s}} = \frac{3(s^2 + 1)}{s^3 + 3s^2 + 4s + 3}.$$

Затем определяют частотную характеристику

$$H(j\omega) = \frac{\dot{I}_m}{\dot{U}_m} = H(s)\big|_{s=j\omega} = \frac{3(1-\omega^2)}{-j\omega^3 - 3\omega^2 + j4\omega + 3} \qquad (2.18.3)$$

и ее значения на частотах $\omega_k = k\omega_1$ гармоник воздействия: $H(j0) = 1$; $H(j1) = 0$; $H(j2) = 1$.

После этого на основании (2.18.3) по формуле $\dot{I}_{mk} = H(jk\omega_1)\dot{U}_{mk}$ находим комплексные амплитуды гармоник реакции:

$$I_0 = H(j0)U_0 = 1 \cdot 2 = 2;$$

$$\dot{I}_{m1} = H(j1)\dot{U}_{m1} = 0 \cdot 4\sqrt{2}e^{j45^\circ} = 0;$$

$$\dot{I}_{m2} = H(j2)\dot{U}_{m2} = 1 \cdot 2\sqrt{2}e^{j90^\circ} = 2\sqrt{2}e^{j90^\circ},$$

что и было получено ранее.

Вопрос 1. Как выглядят амплитудный и фазовый спектры реакции $i(t)$ в примере?

Вопрос 2. Чем принципиально отличается первая гармоника РФ от нулевой и от второй?

Вопрос 3. Как качественно оценить нулевую гармонику по графику периодического сигнала?

Вопрос 4. Почему метод наложения и метод комплексных амплитуд используются при расчете РФ реакции?

Вопрос 5. Как, зная ПФ цепи, найти амплитуды гармоник реакции?

2.18.3. Заключение

В результате изучения материала темы необходимо усвоить методику расчета РФ реакции, если известны РФ воздействия и ПФ цепи, уметь правильно вычислять активную мощность и действующие значения переменных цепи в установившемся периодическом режиме, знать, что такое нулевая гармоника, основная гармоника и гармоника № k ряда Фурье, уметь строить дискретный спектр периодического сигнала.

2.19. Анализ прохождения периодического сигнала через дифференцирующую *RC*-цепь

2.19.1. Исходные положения

Для анализа цепей при периодическом несинусоидальном воздействии $f(t)$, удовлетворяющем условиям Дирихле, используют разложение в *сходящийся* гармонический ряд Фурье.

Синусно-косинусная форма ряда имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t), \qquad (2.19.1)$$

где $a_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos k\omega_1 t dt$; $b_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin k\omega_1 t dt$, причем t_0 — произвольный момент времени, а *нулевая гармоника* РФ (постоянная составляющая)

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt = f_{\text{ср}}$$

определяется *средним значением* сигнала $f(t)$ за период T; ω_1 — частота первой (*основной*) гармоники сигнала, причем $\omega_1 = 2\pi/T_1 = 2\pi/T$, т. е. период основной гармоники $T_1 = T$ равен периоду сигнала, а частота k-й гармоники $\omega_k = k\omega_1$, т. е. $T_k = T/k$.

На практике удобно использовать не только разложение (2.19.1), но и косинусную форму РФ

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t + \Phi_k), \qquad (2.19.2)$$

где $A_0/2 = a_0/2 = f_{\text{ср}}$; $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ — амплитуда, а $\Phi_k = \text{arctg}(-b_k/a_k)$ — начальная фаза k-й гармоники; следовательно, комплексная амплитуда k-й гармоники

$$\dot{A}_k = A_k e^{j\Phi_k} = a_k - jb_k. \qquad (2.19.3)$$

Важно знать очевидные свойства РФ симметричных сигналов.

1. РФ *четных* сигналов, обладающих свойством $f(t) = f(-t)$, не содержит синусоид в (2.19.1), т. е. $b_k = 0$, а следовательно, начальные фазы Φ_k гармоник в (2.19.2) равны либо 0°, либо 180° (поскольку a_k могут быть положительными или отрицательными).

2. РФ *нечетных* сигналов, обладающих свойством $f(t) = -f(-t)$, не содержит косинусоид в (2.19.1), т. е. $a_k = 0$, а следовательно, начальные фазы Φ_k гармоник в (2.19.2) равны $\pm 90°$.

3. РФ сигналов, *симметричных относительно оси t* при сдвиге на половину периода, т. е.

$$f(t) = -f(t \pm T/2),$$

не содержит гармоник *четных номеров* ($k = 0, 2, 4, \ldots$), поскольку эти гармоники не обладают указанным свойством.

Множество комплексных амплитуд $\{A_k\}$ называют *дискретным спектром* периодического сигнала $f(t)$, а соответственно множество амплитуд $\{A_k\}$ и начальных фаз $\{\Phi_k\}$ называют *дискретным амплитудным* и *дискретным фазовым спектрами.*

Для нахождения коэффициентов РФ (2.19.3) периодического сигнала $f(t)$ проще всего использовать изображение по Лапласу $F_1(s)$ условного *первого импульса* $f_1(t)$:

$$f_1(t) = \begin{cases} f(t), & 0 < t < T; \\ 0, & t < 0, \ t > T, \end{cases}$$

т. е. $f_1(t)$ — это описание периодического сигнала $f(t)$ внутри интервала $0 < t < T$.

Коэффициенты РФ определяют по формуле

$$\dot{A}_k = \frac{2}{T} F_1(s)\big|_{s=jk\omega_1}, \qquad (2.19.4)$$

где $\omega_1 = 2\pi/T$ — частота первой гармоники.

2.19.2. Типовой пример

На вход дифференцирующей *RC*-цепи (рис. 2.19.1, *а*) при $R_1 = 1$ Ом, $C_1 = 1$ Ф поступает периодический сигнал треугольной формы (рис. 2.19.1, *б*).

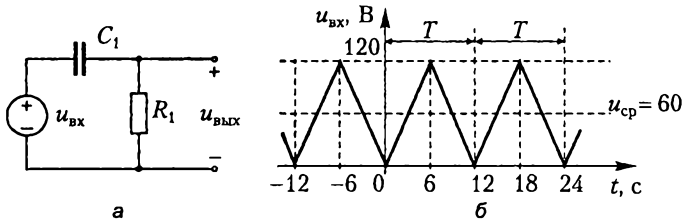


Рис. 2.19.1

Необходимо:

1) предсказать РФ; найти РФ для $u_{вх}(t)$, построить спектры и график суммы РФ, сравнив его с $u_{вх}(t)$;

2) найти передаточную функцию цепи $H(s)$ и частотные характеристики; сравнив ЧХ и спектр воздействия, предсказать $u_{вых}(t)$;

3) найти РФ для $u_{вых}(t)$ и сравнить график $u_{вых}(t)$ с производной $u'_{вх}(t)$.

1. Определяем РФ входного сигнала.

Периодическое воздействие является *четным* сигналом, следовательно, РФ *не содержит синусоид* (т. е. $b_k = 0$), а в (2.19.2) начальные фазы гармоник Φ_k равны либо 0°, либо 180°. По графику входного сигнала вычисляем *среднее значение* $u_{вх}(t)$ как отношение площади сигнала S_Δ за период к величине этого периода:

$$u_{ср} = A_0/2 = S_\Delta/T = 120 \cdot 6/12 = 60 \text{ В}.$$

Поскольку входной сигнал без среднего значения (без постоянной составляющей $u_{ср}$), т. е. сигнал $[u_{вх}(t) - u_{ср}]$, становится симметричным относительно оси t при сдвиге на половину периода (см. график сигнала относительно $u_{ср}$ на рис. 2.19.1, *б*), то РФ *не содержит гармоник четных номеров* ($k = 2, 4, 6, \ldots$).

Для определения коэффициентов РФ находим *изображение* по Лапласу $F_1(s)$ *первого импульса* $u_1(t)$ периодического сигнала, используя метод двойного дифференцирования, который описан в 2.17. На рис. 2.19.2, *а* представлен импульс $u_1(t)$, график его первой производной изображен на рис. 2.19.2, *б*. График второй производной $u_1''(t)$, показанный на рис. 2.19.2, *в*, содержит 3 дельта-функции. Как известно, изображение единичной импульсной функции $\delta(t) \div \Delta(s) = 1$. Для получения $u_1(t)$ необходимо проинтегрировать два раза дельта-функции, изображенные на рис. 2.19.2, *в*. *Интегрированию* в t-области *соответствует деление* на s в s-области. В результате *с учетом теоремы запаздывания* получим изображение первого импульса:

$$F_1(s) = \frac{20}{s^2}(1 - 2e^{-6s} + e^{-12s}). \qquad (2.19.5)$$

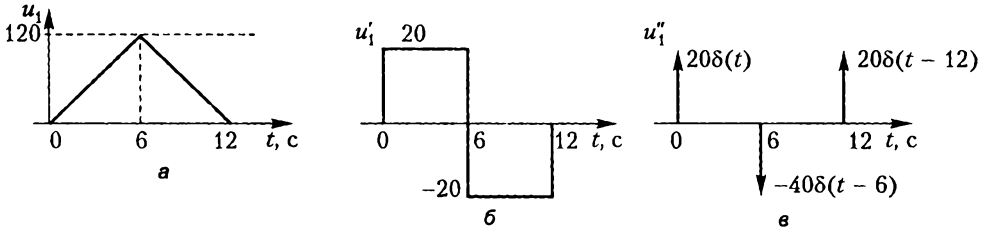


Рис. 2.19.2

Комплексные амплитуды РФ в соответствии с (2.19.4) и (2.19.5) представим в следующем виде (при периоде $T = 12$ с):

$$\dot{A}_{kвх} = \frac{2}{T}F_1(s)\Big|_{s=jk\frac{2\pi}{T}} = \frac{2}{12}\frac{20}{-k^2\pi^2/36}(1 - 2e^{-jk\pi} + e^{-j2k\pi}) = \frac{480}{k^2\pi^2}e^{-jk\pi}\sin^2\frac{k\pi}{2},$$

причем амплитудный дискретный спектр $A_{kвх} = |\dot{A}_{kвх}| = \frac{480}{k^2\pi^2}\sin^2\frac{k\pi}{2}$, а фазовый спектр $\Phi_{kвх} = \text{фаза } \dot{A}_{kвх} = -k\pi$.

Значения A_k и Φ_k приведены в табл. 2.19.1, а на рис. 2.19.3, *а*, *б* построены дискретные амплитудный и фазовый спектры входного сигнала, причем следует иметь в виду, что $A_0 = 2u_{ср} = 2 \cdot 60 = 120$ В, а частота первой гармоники $\omega_1 = \pi/6 \approx \approx 0{,}5$ с$^{-1}$.

Таблица 2.19.1

k	ω_k	$A_{k\text{вх}}$	$\Phi_{k\text{вх}}$	k	ω_k	$A_{k\text{вх}}$	$\Phi_{k\text{вх}}$
0	0	120	–	3	$3\pi/6$	5,4	$-180°$
1	$\pi/6$	48,7	$-180°$	4	$4\pi/6$	0	–
2	$2\pi/6$	0	–	5	$5\pi/6$	2,0	$-180°$

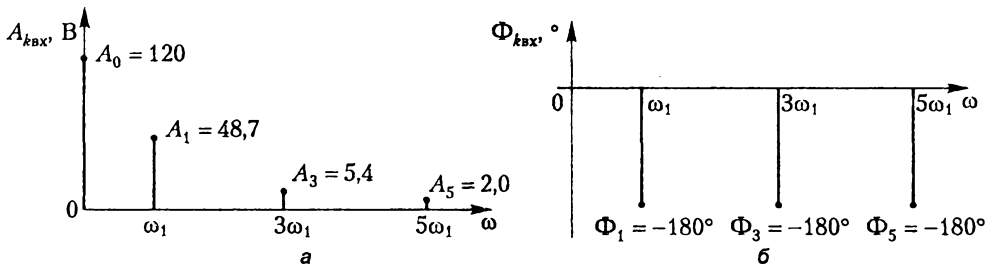


Рис. 2.19.3

Таким образом, ограничившись несколькими первыми гармониками РФ, входной периодический сигнал *приближенно* можно представить в виде

$$u_{\text{вх}}(t) \approx \tilde{u}_{\text{вх}}(t) = 60 + 48{,}7\cos\left(\frac{\pi}{6}t - 180°\right) + \\ + 5{,}4\cos\left(\frac{3\pi}{6}t - 180°\right) + 2{,}0\cos\left(\frac{5\pi}{6}t - 180°\right). \qquad (2.19.6)$$

При построении графика суммы ряда Фурье ограничимся только тремя первыми членами ряда (2.19.6), поскольку амплитуды гармоник быстро убывают (пропорционально k^2). К среднему значению сигнала, равному 60 В, т. е. к нулевой гармонике («0»), добавим первую гармонику («1»), имеющую амплитуду $A_1 = 48{,}7$ В и начальную фазу $\Phi_1 = -180°$ (рис. 2.19.4). Период первой гармоники $T_1 = T = 12$ с, поэтому фазовому сдвигу $\Phi_1 = -180°$ соответствует смещение максимума первой гармоники (относительно момента $t = 0$) на время $T_1/2 = 6$ с. Третья гармоника имеет амплитуду $A_3 = 5{,}4$ В и начальную фазу $\Phi_3 = -180°$. При построении графика третьей гармоники («3») на рис. 2.19.4 учтем, что ее период $T_3 = T_1/3 = 4$ с, поэтому фазе Φ_3 соответствует смещение максимума гармоники на $T_3/2 = 2$ с. Из сравнения графика суммы ряда Фурье $\tilde{u}_{\text{вх}}(t)$ и входного сигнала $u_{\text{вх}}(t)$ видим, что в «изломах» графика $u_{\text{вх}}(t)$ *сходимость* РФ *ухудшается*.

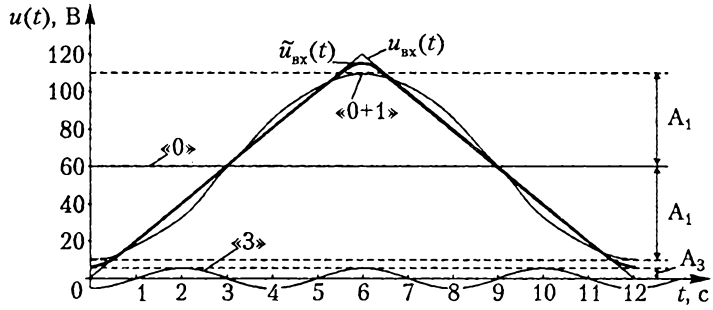


Рис. 2.19.4

2. Находим ПФ и ЧХ цепи.

Вычислим ПФ, используя формулу делителя напряжений для схемы рис. 2.19.1, *а*:

$$H(s)=\frac{U_{\text{вых}}(s)}{U_{\text{вх}}(s)}=\frac{R_1}{R_1+Z_C}=\frac{1}{1+1/s}=\frac{s}{s+1}. \qquad (2.19.7)$$

Комплексная частотная характеристика цепи

$$H(j\omega)=H(s)\big|_{s=j\omega}=\frac{j\omega}{j\omega+1}.$$

Амплитудно-частотная характеристика

$$A(\omega)=|H(j\omega)|=\frac{A_{\text{числитель}}}{A_{\text{знаменатель}}}=\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+1^2}}.$$

Фазочастотная характеристика

$$\Phi(\omega)=\Phi_{\text{числитель}}-\Phi_{\text{знаменатель}}=90°-\operatorname{arctg}\omega/1.$$

На рис. 2.19.5, *а*, *б* жирными линиями показаны графики АЧХ и ФЧХ, а штрихпунктиром изображены касательные к АЧХ при $\omega\to 0$ и при $\omega\to\infty$, которые отражают *идеализацию* АЧХ соответственно в интервалах нижних и верхних частот. В данном случае при $\omega<1$ в НЧ-интервале идеализированная АЧХ $A(\omega)\approx\omega$, что соответствует передаточной функции $H(s)\approx s$, т. е. $u_{\text{вых}}(t)\approx u'_{\text{вх}}(t)$. Таким образом, НЧ-интервал является частотной *полосой дифференцирования* (ПД), откуда и вытекает название дифференцирующей *RC*-цепи. При $\omega>1$ в ВЧ-интервале идеализированная АЧХ $A(\omega)\approx 1$, что соответствует *полосе пропускания* (ПП).

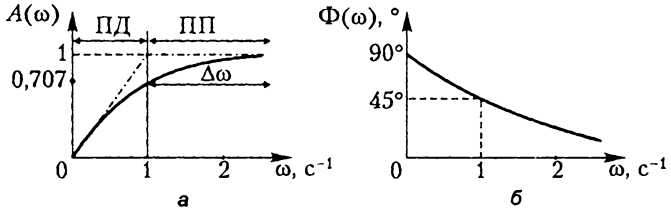


Рис. 2.19.5

Ширина полосы пропускания дифференцирующей *RC*-цепи, определяемая по уровню $0{,}707A_{max}$, также равна $\Delta\omega = [1, \infty]$. Поэтому на выход проходят практически без искажения гармоники РФ $u_{вх}(t)$ с частотами $\omega_k \geq 1\ с^{-1}$. Нулевая гармоника входного сигнала на выход не проходит (так как *C*-элемент эквивалентен ХХ при $\omega = 0$). Первая гармоника ($\omega_1 \approx 0{,}5\ с^{-1}$) и нулевая, имеющие согласно (2.19.6) наибольшие амплитуды, лежат в полосе дифференцирования, следовательно, *можно предположить*, что выходной сигнал будет похож на производную от входного, т. е. $u_{вых}(t) \approx u'_{вх}(t)$.

3. Находим РФ выходного сигнала.

Амплитуды и начальные фазы гармоник выходного напряжения найдем из следующих соотношений:

$$A_{k\,вых} = A_{k\,вх} A(k\omega_1);$$

$$\Phi_{k\,вых} = \Phi_{k\,вх} + \Phi(k\omega_1).$$

Для этого необходимо вычислить значения АЧХ и ФЧХ функции передачи цепи для требуемых частот $k\omega_1$. Результаты всех вычислений сведены в табл. 2.19.2.

Таблица 2.19.2

k	$k\omega_1$, $с^{-1}$	$A_{kвх}$, В	$\Phi_{kвх}$, °	$A(k\omega_1)$, В	$\Phi(k\omega_1)$, °	$A_{kвых}$, В	$\Phi_{kвых}$, °
0	0	120	–	0	–	0	–
1	$\pi/6$	48,7	−180	0,46	62	22,4	−118
3	$3\pi/6$	5,4	−180	0,84	32	4,5	−148
5	$5\pi/6$	2,0	−180	0,93	21	1,9	−159

Таким образом, выходной сигнал можно записать в виде *отрезка* ряда Фурье:

$$u_{вых}(t) \cong \tilde{u}_{вых}(t) = 22{,}4\cos\left(\frac{\pi}{6}t - 118°\right) + 4{,}5\cos\left(\frac{3\pi}{6}t - 148°\right) + 1{,}9\cos\left(\frac{5\pi}{6}t - 159°\right).$$

На рис. 2.19.6 построены графики производной $u'_{вх}(t)$ и суммы РФ $\tilde{u}_{вых}(t)$, позволяющие сделать вывод, что действительно наблюдается определенный эффект дифференцирования заданного входного сигнала: $u_{вых}(t) \cong u'_{вх}(t)$.

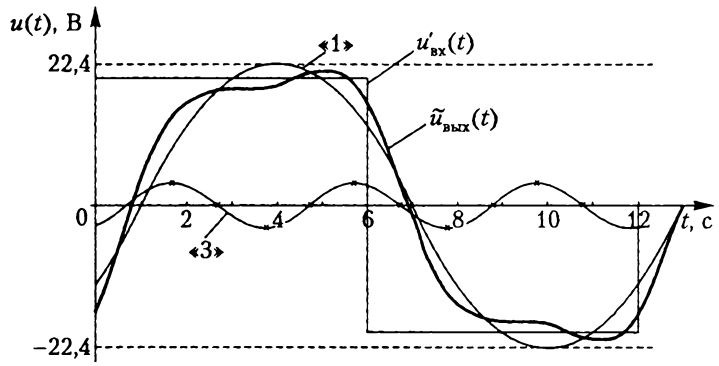


Рис. 2.19.6

Вопрос 1. Как определяется постоянная составляющая сигнала? Как она «выглядит» на графике спектра?

Вопрос 2. В чем, по вашему мнению, принципиальное отличие друг от друга гармоник РФ при построении графика их суммы?

Вопрос 3. Какие способы отыскания коэффициентов РФ вы знаете?

Вопрос 4. Как влияет четность (нечетность) периодического сигнала на вид его РФ?

Вопрос 5. Как, зная РФ воздействия и ЧХ цепи, найти РФ реакции?

Вопрос 6. Каковы, по вашему мнению, фильтрующие свойства дифференцирующей *RC*-цепи?

Вопрос 7. Улучшится (или ухудшится) эффект дифференцирования в примере, если период входного сигнала увеличить (уменьшить) в несколько раз?

2.19.3. Заключение

В результате усвоения материала темы необходимо знать свойства РФ симметричных несинусоидальных периодических сигналов, уметь оценивать нулевую гармонику и определять коэффициенты РФ, строить дискретный спектр периодического сигнала и график суммы его нескольких первых гармоник, знать ЧХ дифференцирующей *RC*-цепи и уметь находить РФ реакции, используя РФ входного сигнала и ЧХ цепи.

2.20. Спектральный анализ прохождения одиночного импульса через интегрирующую *RC*-цепь

2.20.1. Исходные понятия

Апериодический сигнал (например, одиночный импульс) $f(t)$ имеет *непрерывный спектр* $F(j\omega)$, который определяется с помощью преобразования Фурье:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt. \qquad (2.20.1)$$

Для существования спектра (изображения по Фурье) необходимо, чтобы подынтегральная функция в (2.20.1) была *абсолютно интегрируемой*, т. е. площадь $S_{|f|}$ модуля оригинала $f(t)$ была конечной. Если сигнал $f(t) = 0$ при $t < 0$, то *спектр* сигнала проще всего *вычислить по преобразованию Лапласа* заменой $s = j\omega$:

$$F(j\omega) = F(s)\big|_{s=j\omega}. \qquad (2.20.2)$$

По спектру можно многое сказать о сигнале (и наоборот). Кроме того, сравнивая спектр сигнала с полосой пропускания цепи, можно *предсказать* изменение формы *сигнала на выходе*.

Спектр — это комплексная функция частоты, и, следовательно, его можно представить в алгебраической или показательной форме:

$$F(j\omega) = B(\omega) + jM(\omega) = A(\omega)e^{j\Phi(\omega)},$$

где $B(\omega)$ — *вещественный спектр* сигнала, который является *четной* функцией частоты, т. е. $B(\omega) = B(-\omega)$; $M(\omega)$ — *мнимый спектр* сигнала, являющийся *нечетной* функцией частоты, т. е. $M(\omega) = -M(-\omega)$; $A(\omega)$ — *амплитудный спектр*, являющийся *четной* функцией частоты, причем

$$A(\omega) = |F(j\omega)| = \sqrt{B^2(\omega) + M^2(\omega)};$$

$\Phi(\omega)$ — *фазовый спектр* — *нечетная* функция, которая может быть вычислена по $B(\omega)$ и $M(\omega)$ по формуле

$$\Phi(\omega) = \operatorname{arctg}[M(\omega)/B(\omega)].$$

Следует отметить, что *нечетные* сигналы $f(t)$ *не имеют вещественного* спектра, а *четные — мнимого*.

Важно знать *трактовку спектральных характеристик*: спектр $F(j\omega)$ сигнала $f(t)$ — это представление сигнала *совокупностью элементарных гармоник* (*сину-*

соид), причем амплитудный спектр определяет относительное распределение *бесконечно малых* амплитуд этих гармоник, а фазовый спектр определяет их начальные фазы.

Начальное значение спектра (значение спектра на нулевой частоте) равно *площади* сигнала. Действительно:

$$F(j0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt\big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = S_f, \qquad (2.20.3)$$

причем из (2.20.3) следует, что *размерность* спектра $[F(j\omega)] = [f]\cdot[t] = [S_f]$ равна размерности *площади* сигнала.

Спектр сигнала в основном сосредоточен в определенном диапазоне частот, для характеристики которого используют понятие *ширины спектра* $\Delta\omega$. На практике применяют нестрогие, но простые критерии ширины спектра:

– по значению *первого лепестка*, т. е. первого узла (нуля) амплитудного спектра сигнала;

— *амплитудный критерий* ширины спектра, т. е. диапазон частот $\Delta\omega$ в районе максимума $A(\omega)$, *вне которого* $A(\omega) < nA_{max}$, причем $n = 0{,}05$ или $0{,}1$.

Ширина спектра сигнала связана с его длительностью: чем *короче сигнал*, тем *шире* его *спектр*. Для импульсов подобной формы произведение длительности импульса $t_и$ на ширину его спектра есть величина постоянная: $\Delta\omega t_и = \text{const}$. *Спектр бесконечной ширины* имеет *дельта-функция — самый короткий* сигнал.

Зная спектр входного воздействия $F_{вх}(j\omega)$ и частотные характеристики $H(j\omega)$ цепи, находят *спектр реакции* по формуле

$$F_{вых}(j\omega) = F_{вх}(j\omega)H(j\omega). \qquad (2.20.4)$$

На основании (2.20.4) определяют амплитудный и фазовый спектры реакции:

$$\begin{cases} A_{вых}(\omega) = A_{вх}(\omega)A(\omega); \\ \Phi_{вых}(\omega) = \Phi_{вх}(\omega) + \Phi(\omega), \end{cases} \qquad (2.20.5)$$

где $A(\omega)$ — АЧХ, $\Phi(\omega)$ — ФЧХ цепи.

На основании (2.20.4) и (2.20.5) можно дать *оценку реакции* по характерным значениям АЧХ цепи. Поскольку спектр сигнала при $\omega = 0$ равен согласно (2.20.3) площади сигнала, то при начальном значении АЧХ $A(0) = 0$ суммарная площадь реакции $A_{вых}(0) = A_{вх}(0)A(0)$ будет нулевой. Если $A(0) = k$, то *площадь реакции* изменится в k раз. На частоте $\omega = \infty$ по теореме о начальном значении

$$f_{вых}(0+) = \lim_{\omega\to\infty} j\omega F_{вх}(j\omega)H(j\omega) = f_{вх}(0+)H(j\omega)\big|_{\omega\to\infty},$$

поэтому если значение АЧХ на $\omega \to \infty$ равно нулю, т. е. $A(\infty) = 0$, то скачок воздействия $f_{вх}(0+)$ на выход не пройдет и реакция будет непрерывной. В случае, когда $A(\infty) = k$, *скачок реакции* $f_{вых}(0+)$ в k раз *отличается от скачка воздействия*.

На практике всегда важно уметь *предсказать изменение формы сигнала* при его прохождении через цепь. Вычислив ширину спектра $\Delta\omega$ и полосу пропускания цепи $\Delta\omega_{пр}$, можно определить, *в какой зоне частотной характеристики* (неискажения, интегрирования, дифференцирования и т. п.) *располагается спектр воздействия* и оценить ожидаемое изменение формы реакции. *Время запаздывания* $t_з$ проходящих сигналов оценивают по наклону ФЧХ $\Phi(\omega)$ при $\omega \to 0$ или как

$$t_з = \frac{|\Delta\Phi|}{\Delta\omega}, \qquad (2.20.6)$$

где $\Delta\Phi$ — приращение фазы, измеренное в радианах; $\Delta\omega$ — приращение частоты (рад/с) в зоне низких частот.

2.20.2. Типовой пример

На вход интегрирующей *RC*-цепи (рис. 2.20.1, *а*) при $R = 1$ Ом, $C = 1$ Ф поступает сигнал — импульс треугольной формы (рис. 2.20.1, *б*).

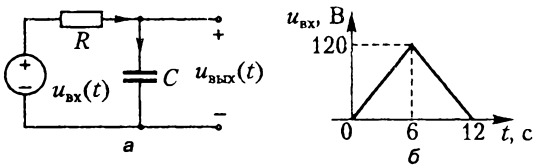


Рис. 2.20.1

Необходимо:

1) найти спектр для $u_{вх}(t)$, построить графики амплитудного и фазового спектров, оценить ширину спектра $\Delta\omega$;

2) найти передаточную функцию цепи $H(s)$ и частотные характеристики; оценить время запаздывания $t_з$, вносимое цепью; сравнив ЧХ и спектр воздействия, предсказать $u_{вых}(t)$;

3) найти $u_{вых}(t)$ аналитически и сделать выводы.

1. Определяем спектр входного сигнала.

Для этого воспользуемся выражением (2.19.5), полученным в разд. 2.19. Тогда на основании (2.20.2) спектр $u_{вх}(t)$ будет

$$U_{вх}(j\omega) = U_{вх}(s)\big|_{s=j\omega} = \frac{20}{-\omega^2}(1 - 2e^{-j6\omega} + e^{-j12\omega}) =$$

$$= \frac{20}{-\omega^2} e^{-j6\omega}(e^{j6\omega} - 2 + e^{-j6\omega}) = \frac{80}{\omega^2} e^{-j6\omega} \sin^2 3\omega, \qquad (2.20.7)$$

причем из (2.20.7) амплитудный спектр $A_{вх}|\omega| = |U_{вх}(j\omega)| = \frac{80}{\omega^2}\sin^2 3\omega$, а фазовый спектр $\Phi_{вх}(\omega) = \arg U_{вх}(j\omega) = -6\omega$.

Вычислим значения амплитудного и фазового спектров в характерных точках.

При $\omega = 0$ спектр $A(\omega)$ равен согласно (2.20.3) *площади* сигнала

$$S_{вх} = 720 = A(0) = \lim_{\omega \to 0} \frac{80}{\omega^2} \sin^2 3\omega = 80 \cdot 9 = 720 \text{ В} \cdot \text{с}.$$

В узлах, где $\sin^2 3\omega = 0$, т. е. при $\omega_k = k\pi/3$, где $k = 1, 2, 3...$, имеем $A(\omega) = 0$.

В точках, где $\sin^2 3\omega = 1$, т. е. при $\omega_k = k\pi/6$, где $k = 1, 3, 5, ...$, значения $A(\omega) = 80/\omega^2$; они приведены в таблице. На рис. 2.20.2, *а*, *б* построены графики амплитудного и фазового спектров.

ω	$A_{вх}(\omega)$	$\Phi_{вх}(\omega)$, °
0	720	0
$\pi/6$	288	−180
$\pi/3$	0	−360
$3\pi/6$	32	−180
$2\pi/3$	0	−360
∞	0	0

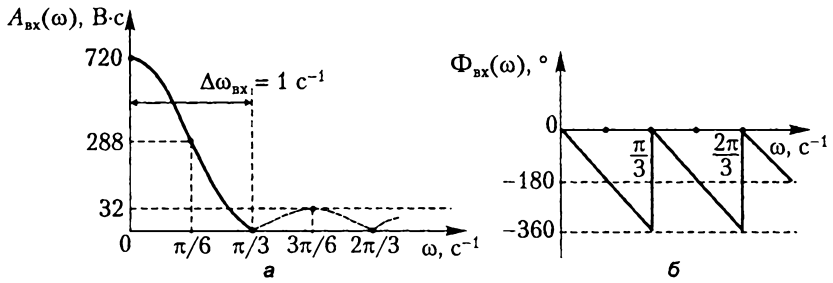


Рис. 2.20.2

По графику амплитудного спектра находим *ширину спектра*, используя *десятипроцентный амплитудный критерий*:

$$\Delta\omega_{вх} \approx 2\pi/6 = 4\pi/t_и \cong 1 \text{ рад/с},$$

т. е. значение $\Delta\omega_{вх}$ приблизительно совпадает с шириной спектра, определяемой по *критерию «первого лепестка»*.

2. Находим ПФ и ЧХ цепи.

Вычислим ПФ, используя формулу делителя напряжений для схемы на рис. 2.20.1, *а*:

$$H(s) = \frac{U_{вых}(s)}{U_{вх}(s)} = \frac{Z_C}{R + Z_C} = \frac{1/s}{1 + 1/s} = \frac{1}{s + 1}.$$

Комплексная частотная характеристика цепи

$$H(j\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega + 1}.$$

Амплитудно-частотная характеристика

$$A(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{A_{\text{числитель}}}{A_{\text{знаменатель}}} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 1^2}}.$$

Фазочастотная характеристика

$$\Phi(\omega) = \arg H(j\omega) = \Phi_{\text{числитель}} - \Phi_{\text{знаменатель}} = 0° - \operatorname{arctg}(\omega/1).$$

На рис. 2.20.3 жирными линиями показаны АЧХ и ФЧХ, а штрих-пунктиром изображены «асимптоты» к АЧХ (1 и $1/\omega$) при $\omega \to 0$ и при $\omega \to \infty$, которые отражают идеализацию АЧХ соответственно в интервалах нижних и верхних частот.

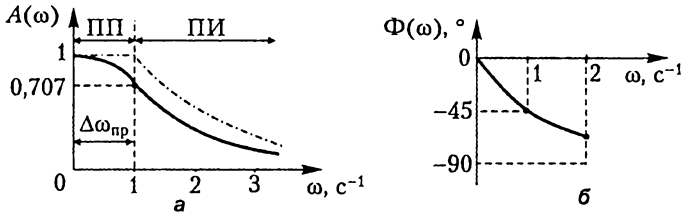


Рис. 2.20.3

При $\omega < 1$ в НЧ-интервале идеализированная АЧХ $A(\omega) \approx 1$, что соответствует ПФ $H(s) \cong 1$, т. е. в идеале $u_{\text{вых}}(t) \cong u_{\text{вх}}(t)$. Таким образом, НЧ-интервал является *полосой пропускания*.

При $\omega > 1$ в ВЧ-интервале идеализированная АЧХ $A(\omega) \approx 1/\omega$, что соответствует ПФ $H(s) \cong 1/s$, т. е. $u_{\text{вых}}(t) \cong \int_0^t u_{\text{вх}}(t)dt$. Следовательно, ВЧ-интервал является *полосой интегрирования* (ПИ), откуда и вытекает название *интегрирующей RC-цепи*.

Ширина полосы пропускания цепи, определяемая по уровню $0{,}707A_{\max}$, равна $\Delta\omega_{\text{пр}} = 1\ \text{с}^{-1}$ и *совпадает с шириной спектра* входного сигнала, поэтому он практически *без искажения* проходит на выход. На основании (2.20.6) оцениваем по ФЧХ в зоне малых ω время запаздывания сигнала:

$$t_{\text{з}} = \frac{|\Delta\Phi|}{\Delta\omega} \cong \frac{\pi/6}{0{,}5} \approx 1\ \text{с}.$$

Поскольку АЧХ(0) = 1, то *площадь выходного* сигнала *равна площади входного*, т. е. $S_{\text{вых}} \approx S_{\text{вх}}$. Так как АЧХ(∞) = 0, то *выходной сигнал* должен быть *непрерывным*.

Таким образом, *главный вывод*:

$$u_{\text{вых}}(t) \approx u_{\text{вх}}(t - t_{\text{з}}) = u_{\text{вх}}(t - 1). \qquad (2.20.8)$$

3. Используя операторный метод, точно рассчитаем $u_{вых}(t)$ и *оценим корректность* сделанного предварительного вывода (2.20.8).

Согласно (2.19.5), (2.20.7) изображение входного импульса

$$U_{вх}(s) = \frac{20}{s^2}(1 - 2e^{-6s} + e^{-12s}), \qquad (2.20.9)$$

следовательно, изображение выходного сигнала

$$U_{вых}(s) = H(s)U_{вх}(s) =$$

$$= \frac{20}{s^2(s+1)}(1 - 2e^{-6s} + e^{-12s}) = \left(\frac{20}{s^2} - \frac{20}{s} + \frac{20}{s+1}\right)(1 - 2e^{-6s} + e^{-12s}).$$

Оригинал реакции цепи

$$u_{вых}(t) = [20t - 20 + 20e^{-t}]\delta_1(t) - 2[20(t-6) - 20 + 20e^{-(t-6)}]\delta_1(t-6) +$$
$$+ [20(t-12) - 20 + 20e^{-(t-12)}]\delta_1(t-12),$$

как видим, состоит из трех смещенных во времени частей подобной формы. В каждой части *первые два слагаемых — вынужденная*, а последнее слагаемое — свободная составляющая от действия соответствующих частей входного сигнала (2.20.9).

На рис. 2.20.4 пунктиром показана сумма вынужденных составляющих: 1, равная $20t - 20$ при $0 < t < 6$; 2, равная $20t - 20 - 2[20(t-6) - 20] = -20t + 260$ при $6 < t < 12$; 3, равная 0 при $12 < t$. Добавление свободных составляющих (1а, равной $20e^{-t}\delta_1(t)$; 2а, равной $-40e^{-(t-6)}\delta_1(t-6)$; 3а, равной $20e^{-(t-12)}\delta_1(t-12)$ дает график $u_{вых}(t)$. На рис. 2.20.4 показан также график $u_{вх}(t)$. Из сравнения графиков воздействия и реакции следует, что *вывод* (20.2.8) вполне *корректен*.

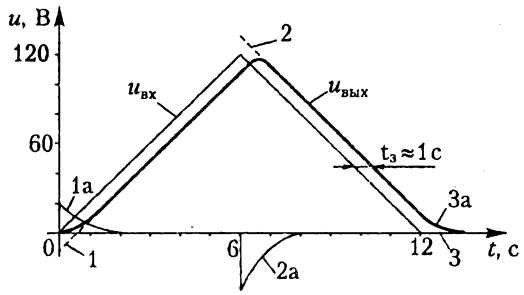


Рис. 2.20.4

Вопрос 1. В чем отличие спектральных характеристик периодических сигналов от спектра одиночных (апериодических) сигналов?

Вопрос 2. Какова трактовка спектральных характеристик?

Вопрос 3. Какие способы оценки ширины спектра вы знаете?

Вопрос 4. Как, зная спектр воздействия и ЧХ цепи, оценить спектр реакции?

Вопрос 5. Спектр какого сигнала имеет бесконечную ширину?

Вопрос 6. Каким образом по значениям АЧХ при $\omega = 0$ и $\omega = \infty$ можно оценить выходной сигнал?

Вопрос 7. Как по ФЧХ можно оценить запаздывание сигналов, проходящих через цепь?

2.20.3. Заключение

Изучив материал темы, необходимо усвоить способы отыскания спектральных характеристик. Нужно уметь определять характерные значения спектра и ширину спектра одиночного сигнала, знать ЧХ интегрирующей *RC*-цепи и уметь оценивать реакцию на ее выходе как путем сравнения ЧХ цепи со спектром воздействия, так и по характерным значениям АЧХ при $\omega = 0$ и $\omega = \infty$.

2.21. Определение сигнала по его спектру

2.21.1. Исходные понятия

По спектру $F(j\omega)$, используя обратное преобразование Фурье, *всегда* можно найти *сигнал* $f(t)$:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega. \qquad (2.21.1)$$

Выражение (2.21.1) упрощается, если $f(t)=0$ при $t<0$:

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}B(\omega)\cos\omega t\,d\omega=-\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}M(\omega)\sin\omega t\,d\omega, \qquad (2.21.2)$$

где $B(\omega)$ — вещественный спектр сигнала; $M(\omega)$ — мнимый спектр сигнала.

На практике выражения (2.21.2) приводят к следующему виду:

$$\begin{cases} f(t)=\dfrac{2}{\pi}\mathrm{Re}\mathscr{L}[B(\omega)]\big|_{s=jt}, \\ f(t)=\dfrac{2}{\pi}\mathrm{Im}\mathscr{L}[M(\omega)]\big|_{s=jt}, \end{cases} \qquad (2.21.3)$$

что позволяет *определить сигнал* $f(t)$ *по его вещественному или мнимому спектру* (здесь $\mathscr{L}[...]$ — символ обозначения преобразования Лапласа).

Для использования (2.21.3) обычно производят кусочно-линейную аппроксимацию графиков $B(\omega)$ или $M(\omega)$, после чего методом двойного дифференцирования находят их изображения по Лапласу.

Метод является *приближенным*, поскольку используется аппроксимация, а так как при этом обычно отбрасывается высокочастотная область спектра, то на основании теоремы о начальном значении

$$f(0+)=\lim_{\omega\to\infty}j\omega F(j\omega)$$

максимальная погрешность будет иметь место в начале реакции $f(t)$.

Приближенный *расчет сигнала по* его *амплитудному и фазовому спектрам* основан на формулах связи спектра одиночного импульса со спектром периодического сигнала той же формы:

$$\dot{A}_k=\frac{2}{T}A(\omega)\big|_{\omega=k\omega_1=k2\pi/T},\quad \Phi_k=\Phi(\omega)\big|_{\omega=k\omega_1=k2\pi/T}. \qquad (2.21.4)$$

Выражение (2.21.4) связывает спектр $F(j\omega)=A(\omega)e^{j\Phi(\omega)}$ неизвестного одиночного импульса $f(t)$ с дискретным спектром $\dot{A}_k=A_k e^{j\Phi k}$ сигнала $f_{\text{п}}(t)$, составленного

из периодической последовательности импульсов $f(t)$. Отсюда вытекает следующая методика определения сигнала по его амплитудному и фазовому спектрам.

1. Строят *графики* амплитудного $A(\omega)$ и фазового $\Phi(\omega)$ *спектров искомого одиночного импульса* $f(t)$.

2. *Произвольно выбирают* достаточно большой *период* T *сигнала* $f_{\text{п}}(t)$, составленного из периодически повторяющихся импульсов $f(t)$, и *определяют* по формулам (2.21.4) на частотах $k\omega_1 = k2\pi/T$ *амплитуды и фазы* A_k и Φ_k *гармоник* ряда Фурье сигнала $f_{\text{п}}(t)$.

3. *Записывают ряд Фурье*, ограничиваясь несколькими наиболее значительными по амплитуде гармониками:

$$f_{\text{п}}(t) \cong A_0/2 + \sum_{k=1}^{2...7} A_k \cos(k\omega_1 + \Phi_k). \qquad (2.21.5)$$

4. Строят *график* $f_{\text{п}}(t)$ *в пределах одного периода*, т. е в интервале $0 < t < T$. Этот импульс и будет искомой реакций $f(t)$, причем если на границах периода $f_{\text{п}}(t)$ затухает, то значение периода T выбрано правильно, а если не затухает, необходимо увеличить T и повторить расчет.

2.21.2. Типовой пример

Для примера из 2.20.2 необходимо найти сигнал $u_{\text{вых}}(t)$ спектральным методом по его амплитудному и фазовому спектрам.

1. Определяем спектральные характеристики выходного сигнала. Рассчитываем значения $A_{\text{вых}}(\omega) = A_{\text{вх}}(\omega)A(\omega)$, $\Phi_{\text{вых}}(\omega) = \Phi_{\text{вх}}(\omega) + \Phi(\omega)$, где $A(\omega)$ – АЧХ, $\Phi(\omega)$ – ФЧХ цепи, найденные в 2.20.2.

Значения амплитудных и фазовых спектров воздействия и реакции, а также АЧХ и ФЧХ цепи сводим в табл. 2.21.1, причем так как полоса пропускания цепи $\Delta\omega_{\text{пр}} = [0,1]$, то интервал рассматриваемых частот также целесообразно ограничить значениями $0 \le \omega \le 1$.

Таблица 2.21.1

ω	$A_{\text{вх}}(\omega)$	$\Phi_{\text{вх}}(\omega)$, °	$A(\omega)$	$\Phi(\omega)$, °	$A_{\text{вых}}(\omega)$	$\Phi_{\text{вых}}(\omega)$, °
0	720	0	1	0	720	0
$\pi/12 \cong 0{,}25$	576	–90	≈1	–15	576	–105
$2\pi/12 \cong 0{,}5$	288	–180	≈0,9	–30	260	–210
$3\pi/12 \cong 0{,}75$	64	–270	≈0,8	–37	50	–307
$4\pi/12 \cong 1{,}0$	0	–360	≈0,7	–45	0	–45

2. Строим графики амплитудного $A_{\text{вых}}(\omega)$ и фазового $\Phi_{\text{вых}}(\omega)$ спектров искомой реакции $u_{\text{вых}}(t)$. Графики приведены на рис. 2.21.1 с указанием характерных численных значений.

3. Произвольно выберем достаточно большой период $T = 24$ с сигнала $u_{\text{п}}(t)$, составленного из периодично повторяющихся импульсов $u_{\text{вых}}(t)$, и определяем по (2.21.4) коэффициенты ряда Фурье периодического сигнала:

$$\begin{cases} A_k = \dfrac{2}{T} A_{\text{вых}}(\omega)\big|_{\omega = k\omega_1 = k\,2\pi/T} = \dfrac{2}{24} A_{\text{вых}}(\omega)\big|_{\omega = k\pi/12}; \\ \Phi_k = \Phi_{\text{вых}}(\omega)\big|_{\omega = k\pi/12}. \end{cases}$$

В табл. 2.21.2 приведены значения амплитуд и фаз дискретного спектра периодического сигнала $u_{\text{п}}(t)$.

Таблица 2.21.2

k	ω_k	A_k	Φ_k, °
0	0	≈60	–
1	$\pi/12 \approx 0{,}25$	≈50	–105
2	$2\pi/12 \approx 0{,}5$	≈20	–210
3	$3\pi/12 \approx 0{,}75$	≈4	–307
4	$4\pi/12 \approx 1$	0	–

4. Записываем в соответствии с (2.21.5) ряд Фурье (РФ), ограничиваясь несколькими наиболее значительными по амплитуде гармониками:

$$u_{\text{п}}(t) \cong 30 + 50\cos\left(\frac{\pi}{12}t - 105°\right) + 20\cos\left(\frac{2\pi}{12}t - 210°\right).$$

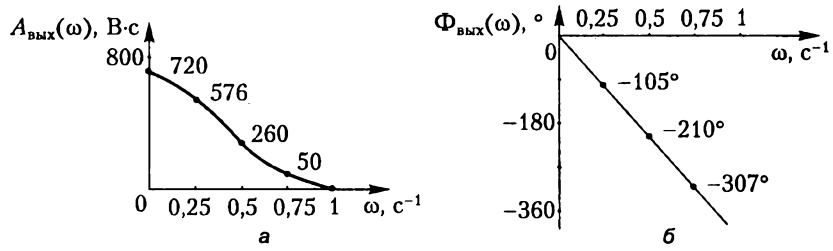


Рис. 2.21.1

На рис. 2.21.2 построен график суммы РФ в пределах одного периода $0 < t < T = 24$ и входной импульс $u_{\text{вх}}(t)$. Тонкими линиями показаны также нулевая гармоника (0), вторая гармоника (2) и сумма нулевой и первой гармоник (0 + 1) сигнала $u_{\text{п}}(t)$.

Так как $u_{\text{п}}(t)$ затухает в пределах периода T, то период выбран правильно и расчет на этом можно закончить. Приближенно полученный график $u_{\text{вых}}(t) = u_{\text{п}}(t)$ при $0 < t < T$ достаточно хорошо согласуется с точным решением, рассмотренным в 2.20.2 на рис. 2.20.4.

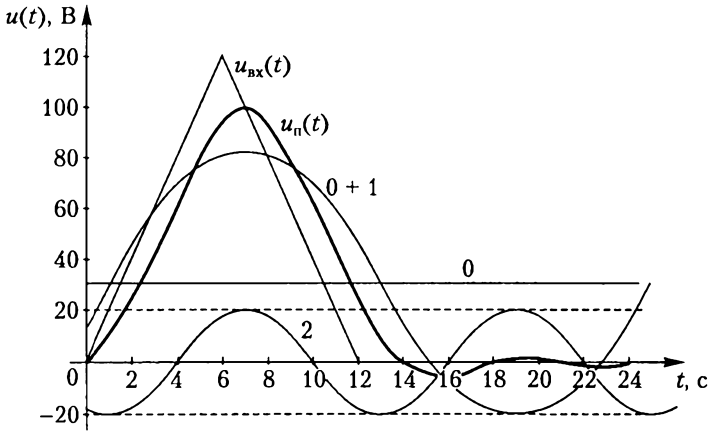


Рис. 2.21.2

Вопрос 1. Почему методы расчета сигнала по спектру являются приближенными?

Вопрос 2. Какие трудности возникают при определении сигнала по его вещественному или мнимому спектру?

Вопрос 3. Как влияют частотные характеристики цепи на спектральные характеристики выходного сигнала?

Вопрос 4. Почему при определении сигнала по амплитудному и фазовому спектрам можно ограничиться несколькими гармониками РФ периодического сигнала?

2.21.3. Заключение

В результате усвоения материала темы необходимо знать формулы, связывающие реакцию с ее спектральными характеристиками, уметь находить временной сигнал по вещественному или мнимому, или по амплитудному и фазовому спектрам.

2.22. Анализ индуктивно связанных цепей

2.22.1. Исходные положения

Условное обозначение четырехполюсного *идуктивно связанного элемента* (ИСЭ), состоящего из двух индуктивных ветвей (*катушек индуктивности*), которые пронизывает общий магнитный поток, приведено на рис. 2.22.1. Переменные токи i_1, i_2 создают в индуктивностях L_1 и L_2 магнитные *потоки самоиндукции* $\Phi_{11}(t)$, $\Phi_{22}(t)$, которые на основании закона электромагнитной индукции наводят на зажимах (выводах) индуктивностей *напряжения самоиндукции* $u_{11} = L_1 i_1'$, $u_{22} = L_2 i_2'$.

Если часть общего потока каждой катушки индуктивности пересекает витки другой катушки, то на их зажимах наводятся, кроме того, *напряжения взаимной индукции*, обусловленные соответственно *потоками взаимной индукции* $\Phi_{12}(t)$ и $\Phi_{21}(t)$:

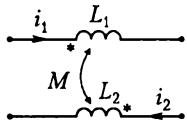


Рис. 2.22.1

$$u_{12}(t) = Mi_2'(t);\ u_{21}(t) = Mi_1'(t),$$

причем коэффициент пропорциональности M измеряется в генри (Гн) и называется *взаимной индуктивностью*.

Взаимную индуктивность M считают *алгебраической* величиной, т. е. $M = \pm|M|$. Знак *плюс* соответствует *согласному* включению ИСЭ, когда $M = |M| > 0$, в противном случае включение ИСЭ называют *встречным* и $M = -|M| < 0$. При *согласном* включении ИСЭ *потоки* взаимной индукции катушек L_1 и L_2 (рис. 2.22.1) *суммируются*, если $i_1 > 0$, $i_2 > 0$, а при встречном включении ИСЭ — вычитаются.

Для определения характера включения ИСЭ пользуются маркировкой *однополярных* зажимов ИСЭ «звездочками» (см. рис. 2.22.1). Если выбранные *направления токов* ИСЭ ориентированы *одинаково* относительно однополярных зажимов, включение следует считать *согласным*, в противном случае — встречным. На рис. 2.22.1 включение ИСЭ — согласное, следовательно,

$$\begin{cases} u_1 = u_{11} + u_{12} = L_1 i_1' + |M| i_2'; \\ u_2 = u_{22} + u_{21} = L_2 i_2' + |M| i_1'. \end{cases} \qquad (2.22.1)$$

В уравнениях ЗНК вида (2.22.1) знаки напряжений самоидукции и взаимной индукции (например, u_{11} и u_{12}) совпадают, но при встречном включении $u_{12} = -|M| i_2'$.

В установившемся синусоидальном режиме уравнения МКА для ИСЭ имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_{L_1} \dot{I}_1 + Z_M \dot{I}_2; \\ \dot{U}_2 = Z_{L_2} \dot{I}_2 + Z_M \dot{I}_1, \end{cases}$$

где $Z_M = \pm j|Z_M| = \pm j\omega|M|$ — комплексное *сопротивление взаимной индуктивности*; знак «*плюс*» соответствует *согласному* включению ИСЭ, минус — встречному.

Вид включения ИСЭ зависит *от решающего задачу*, так как направления токов в общем случае могут быть выбраны произвольно.

Для характеристики степени связи катушек индуктивности в ИСЭ используют понятие *коэффициента связи* $k_{\mu} = k_{-в} = |M|/\sqrt{L_1 L_2} \le 1$; причем если $k_{св} = 1$, то магнитная связь называется совершенной.

Расчет индуктивно связанных цепей (ИСЦ) осуществляют, как правило, *по уравнениям Кирхгофа*, так как применение других методов расчета имеет ряд особенностей. Однако если индуктивно связанные катушки имеют *общий узел*, бывает целесообразно преобразовать ИСЦ *в эквивалентную цепь, не содержащую индуктивных связей*, после чего для анализа цепи можно применять все стандартные методы расчета.

На рис. 2.22.2 приведены две схемы индуктивно связанных катушек, имеющих общий узел, в котором сходятся либо одноименные выводы катушек, либо разноименные, и соответствующие им эквивалентные схемы цепи без индуктивной связи (направление токов, т. е. *характер включения* ИСЭ, может быть при этом *произвольным*).

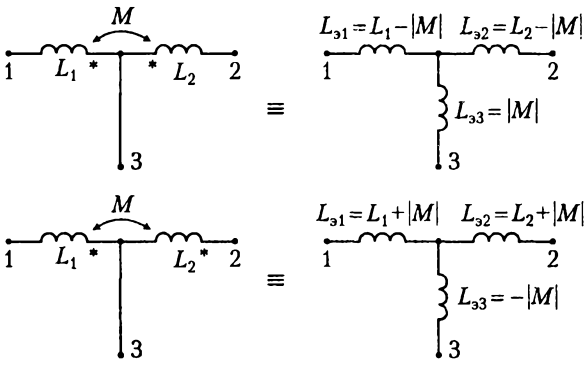


Рис. 2.22.2

2.22.2. Типовые примеры

Пример 2.22.1. В цепи на рис. 2.22.3, *а* установившийся синусоидальный режим: $|Z_{L_1}| = |Z_{L_2}| = 5$ Ом; $R = |Z_C| = |Z_M| = 2$ Ом; $u_1 = 10\cos(\omega t + 45°)$. Требуется:

1) для определения токов i_1, i_2, i_3 составить схему независимых уравнений по законам Кирхгофа в t-области;

2) записать в комплексной форме уравнения Кирхгофа для расчета токов цепи $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$, $\dot{I}_3$ и напряжения $\dot{U}_{16}$;

3) преобразовать *индуктивно связанную цепь* (рис. 2.22.3, *а*) в эквивалентную цепь без индуктивной связи (в так называемую «*развязанную цепь*»);

4) составить для такой «развязанной» цепи уравнения Кирхгофа в комплексной форме и сравнить их с уравнениями п. 2.

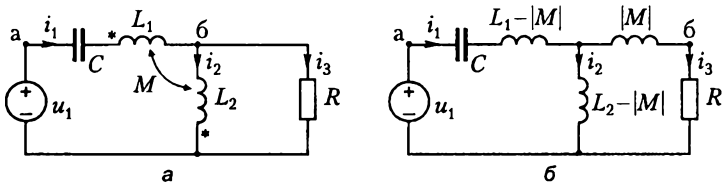


Рис. 2.22.3

1. Определяем характер включения ИСЭ. *Произвольно* выбранные направления токов i_1, i_2 ИСЭ неодинаково ориентированы относительно однополярных выводов ИСЭ, отмеченных на рис. 2.22.3, *а* «звездочками», следовательно, включение ИСЭ — *встречное*, $M = -|M| < 0$.

Число независимых уравнений, составленных по законам Кирхгофа: $n_{\text{ЗНК}} = n_{\text{в}} - n_{\text{у}} + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$; $n_{\text{ЗТК}} = n_{\text{у}} - 1 = 2 - 1 = 1$.

2. Составляем уравнения по законам Кирхгофа в t-области с учетом того, что включение – встречное и суммарные напряжения на катушках индуктивности L_1, L_2

$$u_{L_1} = u_{11} + u_{12} = L_1 i_1' - |M| i_2', \; u_{L_2} = u_{22} + u_{21} = L_2 i_2' - |M| i_1'.$$

Имеем

$$-i_1 + i_2 + i_3 = 0; \; u_C + u_{L_1} + u_{L_2} = u_1; \; u_R - u_{L_2} = 0,$$

или в развернутом виде

$$\begin{cases} -i_1 + i_2 + i_3 = 0; \\ \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_{-\infty}^{t} i_1 dt + (L_1 i_1' - |M| i_2') + (L_2 i_2' - |M| i_1') = u_1; \\ R i_3 - (L_2 i_2' - |M| i_1') = 0, \end{cases} \tag{2.22.2}$$

при этом

$$u_{-6} = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_1 dt + (L_1 i_1' - |M| i_2') = u_1 - R i_3.$$

3. Запишем уравнения Кирхгофа аналогично (2.22.2) в комплексной форме, причем комплексное сопротивление взаимной индуктивности $Z_M = -j|Z_M| = -j\omega|M|$:

$$\begin{cases} -\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0; \\ Z_C \dot{I}_1 + (Z_{L_1} \dot{I}_1 + Z_M \dot{I}_2) + (Z_{L_2} \dot{I}_2 + Z_M \dot{I}_1) = \dot{U}_1; \\ -(Z_{L_2} \dot{I}_2 + Z_M \dot{I}_1) + R\dot{I}_3 = 0. \end{cases} \tag{2.22.3}$$

Преобразуем систему (2.22.3):

$$\begin{cases} -\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0; \\ (Z_C + Z_{L_1} + Z_M)\dot{I}_1 + (Z_{L_2} + Z_M)\dot{I}_2 = \dot{U}_1; \\ -Z_M \dot{I}_1 - Z_{L_2} \dot{I}_2 + R\dot{I}_3 = 0, \end{cases} \tag{2.22.4}$$

или в численном виде

$$\begin{cases} -\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0; \\ (j5 - j2 - j2)\dot{I}_1 + (j5 - j2)\dot{I}_1 = 5 + j5; \\ j2\dot{I}_1 - j5\dot{I}_2 + 2\dot{I}_3 = 0. \end{cases}$$

Можно также записать, что

$$\dot{U}_{хх} = Z_C\dot{I}_1 + (Z_{L_1}\dot{I}_1 + Z_M\dot{I}_2) = (Z_C + Z_{L_1})\dot{I}_1 + Z_M\dot{I}_2 = \dot{U} - R\dot{I}_3.$$

4. Преобразуем ИСЦ (рис. 2.22.3, *а*) в эквивалентную цепь без индуктивной связи. Так как в общем узле ИСЭ схемы на рис. 2.22.3, *а сходятся однополярные* зажимы, то, воспользовавшись первой схемой преобразования (рис. 2.22.2), получим цепь без индуктивной связи (рис. 2.22.3, *б*), эквивалентную исходной.

5. Составим уравнения Кирхгофа в комплексной форме для «развязанной» схемы (рис. 2.22.3, *б*):

$$\begin{cases} -\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0; \\ (Z_C + Z_{L_1} - j|Z_M|)\dot{I}_1 + (Z_{L_2} + j|Z_M|)\dot{I}_2 = \dot{U}_1; \\ (j|Z_M| + R)\dot{I}_3 - (Z_{L_2} - j|Z_M|)\dot{I}_2 = 0, \end{cases}$$

или с учетом $Z_M = -j|Z_M|$

$$\begin{cases} -\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0; \\ (Z_C + Z_{L_1} + Z_M)\dot{I}_1 + (Z_{L_2} + Z_M)\dot{I}_2 = \dot{U}_1; \\ -(Z_{L_2} + Z_M)\dot{I}_2 + (-Z_M + R)\dot{I}_3 = 0. \end{cases} \qquad (2.22.5)$$

Системы (2.22.4) и (2.22.5) эквивалентны, если учесть, что в третьем уравнении (2.22.5) $Z_M(\dot{I}_2 + \dot{I}_3) = Z_M\dot{I}_1$.

Пример 2.22.2. В цепи на рис. 2.22.4, *а* установившийся синусоидальный режим: $I_1 = 4\sqrt{2}$ А; $|Z_{L_1}| = |Z_{L_2}| = 2$ Ом; $P = 8$ Вт; $k_{св} = 0{,}5$. Найти R и составить эквивалентную цепь без индуктивной связи.

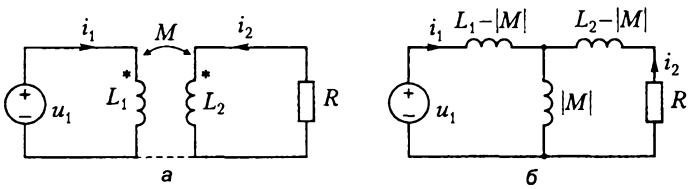


Рис. 2.22.4

В простейшем случае изображенный на рис. 2.22.4, *а трансформатор* представляет собой две индуктивно связанные катушки, называемые *обмотками* трансформатора. В примере рассматривается идеализированный трансформатор в линейном режиме.

Так как $k_{св} = |M|/\sqrt{L_1 L_2} = |Z_M|/\sqrt{|Z_{L_1}||Z_{L_2}|} = 0{,}5$, то $|Z_M| = 1$ Ом.

Как следует из рис. 2.22.4, *а*, *при выбранных* i_1, i_2 включение ИСЭ *согласное*, т. е. $Z_M = j\omega|M| = j|Z_M| = j$.

Запишем уравнения трансформатора в комплексной форме:

$$\begin{cases} Z_{11}\dot{I}_1 + Z_M\dot{I}_2 = \dot{U}_1; \\ Z_M\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 = 0, \end{cases} \tag{2.22.6}$$

где $Z_{11} = Z_{L_1}$ — полное комплексное сопротивление первичной обмотки; $Z_{22} = Z_{L_2} + R$ — сопротивление вторичной обмотки трансформатора.

Найдем входное сопротивление трансформатора $Z_{вх} = \dot{U}_1/\dot{I}_1$, причем $\dot{I}_1$ определяем, решая уравнения (2.22.6):

$$\dot{I}_1 = \frac{\Delta\dot{I}_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} \dot{U}_1 & Z_M \\ 0 & Z_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_M \\ Z_M & Z_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\dot{U}_1 Z_{22}}{Z_{11}Z_{22} - Z_M^2},$$

откуда важная для практики *формула* расчета *входного сопротивления трансформатора* имеет вид

$$Z_{вх} = Z_{11} - \frac{Z_M^2}{Z_{22}}.$$

Подставляя численные значения, получим

$$Z_{вх} = j2 + 1/(R + j2) = j2 + (R - j2)/(R^2 + 4).$$

Так как активная мощность цепи $P = rI_1^2$, находим вещественную часть входного сопротивления цепи $r = \mathrm{Re}\, Z_{вх} = R/(R^2 + 4)$, откуда $P = rI_1^2 = r(4\sqrt{2})^2 = 8$, следовательно, $R = 2$ Ом.

Преобразуем схему трансформатора (рис. 2.22.4, *а*) *к эквивалентной схеме без индуктивной связи*. Для этого «введем» в схему *общий узел* для ИСЭ (на рис. 2.22.4, *а* он показан пунктиром), в котором сходятся однополярные выводы. Очевидно, ток такого «введенного пунктиром» КЗ-элемента равен нулю. Эквивалентная цепь без индуктивной связи приведена на рис. 2.22.4, *б*.

Пример 2.22.3. В цепи на рис. 2.22.5, *а* $u_0 = 6$ В; $R_1 = R_2 = 3$ Ом; $L_1 = L_2 = 2$ Гн; $|M| = 1$ Гн; ключ замыкается при $t = 0$. Необходимо найти i_1, i_2.

Расчет переходных процессов в цепях с индуктивной связью осуществляется, как правило, операторным методом.

1. Определяем независимые начальные условия при $t = 0-$:

$$i_1(0-) = u_0/R_1 = 2 \text{ А}, \quad i_2(0-) = 0.$$

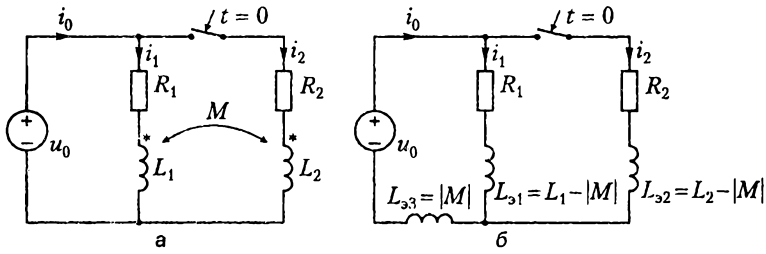


Рис. 2.22.5

2. Составляем по законам Кирхгофа систему независимых дифференциальных уравнений цепи при $t > 0$. Включение в цепи — *согласное*, $M > 0$. Имеем

$$\begin{cases} R_1 i_1 + L_1 i_1' + |M| i_2' = u_0; \\ R_2 i_2 + L_2 i_2' + |M| i_1' = u_0. \end{cases} \qquad (2.22.7)$$

Преобразуем систему (2.22.7) по Лапласу, используя теорему о дифференцировании оригинала:

$$\begin{cases} R_1 I_1 + [sL_1 I_1 - L_1 i_1(0+)] + [s|M| I_2 - |M| i_2(0+)] = u_0 / s; \\ R_2 I_2 + [sL_2 I_2 - L_2 i_2(0+)] + [s|M| I_1 - |M| i_1(0+)] = u_0 / s, \end{cases}$$

при этом $Z_M(s) = sM = s|M|$ — *операторное сопротивление взаимной индуктивности*. В численном виде имеем:

$$\begin{cases} (2s+3) I_1 + sI_2 = (4s+6)/s; \\ sI_1 + (2s+3) I_2 = (2s+6)/s. \end{cases} \qquad (2.22.8)$$

Решая полученную систему алгебраических уравнений (2.22.8), находим изображения реакций, а затем их оригиналы при $t > 0$:

$$I_1(s) = \frac{2(s^2 + 3s + 3)}{s(s^2 + 4s + 3)}; \quad i_1(t) = 2 - 1 \cdot e^{-t} + 1 \cdot e^{-3t};$$

$$I_2(s) = \frac{2(2s+3)}{s(s^2 + 4s + 3)}; \quad i_2(t) = 2 - 1 \cdot e^{-t} - 1 \cdot e^{-3t}.$$

Если ИСЭ имеют *общий узел*, расчет переходных процессов обычно удобнее вести *по операторной схеме замещения*. Найдем токи i_1 и i_2 в примере 2.22.5 этим способом.

1. Преобразуем ИСЦ (рис. 2.22.5, *а*) в эквивалентную схему (рис. 2.22.5, *б*) без индуктивной связи (*для любых значений t*).

2. При $t = 0-$ найдем независимые начальные условия, учитывая, что все эквивалентные L-элементы можно заменить КЗ-элементами:

$$i_0(0-) = i_1(0-) = u_0 / R_1 = 2 \text{ А}; \quad i_2(0-) = 0.$$

3. Составляем операторную схему замещения (рис. 2.22.6) для $t > 0$, учитывая, что $i_k(0-) = i_k(0+)$.

По ОСЗ *любым методом расчета* можно определить изображение реакции, а затем ее оригинал. Применим МКТ, считая $i_1 = I_1^к; I_2 = I_2^к$ (см. рис. 2.22.6):

$$\begin{cases} [R_1 + s(L_1 - |M|) + s|M|]I_1^к + s|M|I_2^к = \dfrac{u_0}{s} + i_1(0+)(L_2 - |M|) + i_0(0+)|M|; \\ s|M|I_1^к + [R_2 + s(L_2 - |M|]I_2^к = \dfrac{u_0}{s} + i_0(0+)|M|, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} (2s+3)I_1^к + sI_2^к = (4s+6)/s; \\ sI_1^к + (2s+3)I_2^к = (2s+6)/s. \end{cases} \qquad (2.22.9)$$

Из сравнения систем (2.22.8), (2.22.9) следует, что операторные уравнения цепи (рис. 2.22.5, *а*) и уравнения ОСЗ (рис. 2.22.6) эквивалентны.

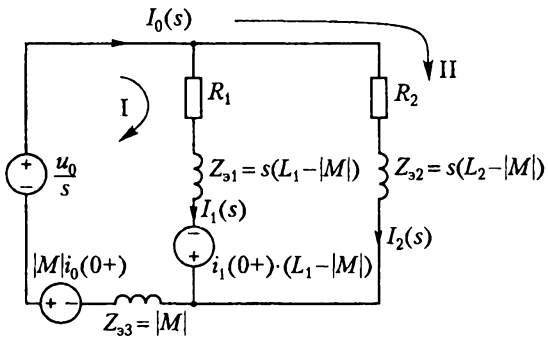


Рис. 2.22.6

2.22.3. Заключение

В результате усвоения материала темы необходимо знать физическую трактовку «работы» ИСЭ, уметь различать характер включения ИСЭ при расчете ИСЦ, уметь записывать уравнения цепи по законам Кирхгофа в t-области и по МКА, знать, когда и как можно заменить ИСЭ эквивалентной схемой без индуктивной связи, уметь находить входное сопротивление и потребляемую мощность трансформатора, уметь рассчитывать переходные процессы в ИСЦ по операторным уравнениям цепи и по ОСЗ.

2.23. Пассивные и активные четырехполюсники

2.23.1. Общие положения

Четырехполюсником называется часть цепи, имеющая две пары выводов (четыре полюса), с помощью которых он присоединяется к другой цепи. Условное обозначение ЧП с указанием условно положительных направлений токов и полярностей напряжений показано на рис. 2.23.1, *а*.

Выводы ЧП, 1,1′ и 2,2′ условно называют соответственно *входными и выходными* выводами (полюсами, узлами), а переменные $I_1 = I_1(s), U_1 = U_1(s)$ и $I_2 = I_2(s)$, $U_2 = U_2(s)$ — входными и выходными переменными.

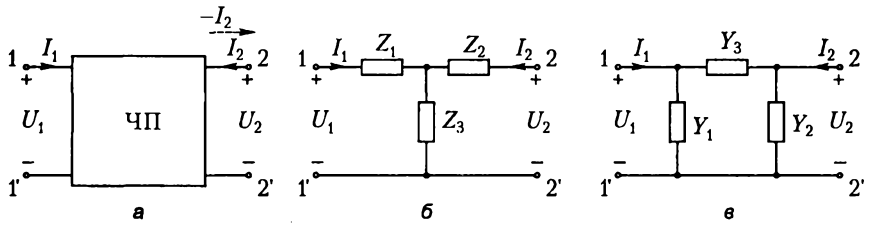


Рис. 2.23.1

В теории ЧП интересуются *лишь* токами и напряжениями *внешних выводов* и связью их друг с другом. Такая связь отражается шестью видами уравнений ЧП в виде форм *y*, *z*, *a*, *b*, *h*, *g*:

$$\begin{cases} I_1 = y_{11}U_1 + y_{12}U_2; \\ I_2 = y_{21}U_1 + y_{22}U_2, \end{cases} \quad \begin{cases} U_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2; \\ U_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2, \end{cases} \quad \begin{cases} U_1 = a_{11}U_2 + a_{12}(-I_2); \\ I_1 = a_{21}U_2 + a_{22}(-I_2), \end{cases} \tag{2.23.1}$$

причем в уравнениях *a*-формы (формы прямой передачи сигналов) токи ЧП направлены слева направо, как показано на рис. 2.23.1, *а* штрихами.

Остальные формы уравнений ЧП имеют вид

$$\begin{cases} U_2 = b_{11}U_1 + b_{12}(-I_1); \\ I_2 = b_{21}U_1 + b_{22}(-I_1), \end{cases} \quad \begin{cases} U_1 = h_{11}I_1 + h_{12}U_2; \\ I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}U_2, \end{cases} \quad \begin{cases} I_1 = g_{11}U_1 + g_{12}I_2; \\ U_2 = g_{21}U_1 + g_{22}I_2. \end{cases}$$

Коэффициенты уравнений являются *параметрами ЧП* и представляют собой различные варианты функций цепи или им обратные функции в *режимах холостого хода или короткого замыкания* на входе или выходе ЧП, например, согласно (2.23.1) $y_{11} = I_1/U_1$ при $U_2 = 0$; $a_{11} = U_1/U_2$ при $I_2 = 0$.

Пассивные ЧП составлены из пассивных элементов (*RLCM*) и не содержат управляемых (активных) элементов. Для них справедлива теорема пассивности (обратимости — взаимности), т. е. справедливо *условие обратимости*:

$$y_{12} = y_{21};\ \ z_{12} = z_{21};\ \ \Delta a = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1, \tag{2.23.2}$$

которое для активных ЧП не выполняется.

ЧП является *симметричным*, если смена мест его входных и выходных выводов не приводит к изменению режима работы остальной цепи. Для симметричных ЧП выполняются *условия симметрии*:

$$\begin{cases} y_{11} = y_{22}; \\ y_{12} = y_{21}, \end{cases} \quad \begin{cases} z_{11} = z_{22}; \\ z_{12} = z_{21}, \end{cases} \quad \begin{cases} a_{11} = a_{22}; \\ \Delta_a = 1. \end{cases} \tag{2.23.3}$$

Пассивным ЧП, у которых согласно (2.23.2) только 3 независимых параметра, могут быть поставлены в соответствие Т- или П-образные *эквивалентные схемы* (рис. 2.23.1, *б*, *в*), состоящие *из трех элементов*.

2.23.2. Примеры типовых задач

Пример 2.23.1. У пассивного ЧП в виде Т-образной схемы (рис. 2.23.1, *б*) задана *z*-матрица параметров *в установившемся синусоидальном режиме*:

$$[z] = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-j & 1 \\ 1 & 1+j \end{bmatrix}.$$

Требуется найти комплексные сопротивления Z_1, Z_2, Z_3 и составить эквивалентную П-образную схему (рис. 2.23.1, *в*).

Уравнения ЧП в *z*-форме имеют вид

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = z_{11}\dot{I}_1 + z_{12}\dot{I}_2; \\ \dot{U}_2 = z_{21}\dot{I}_1 + z_{22}\dot{I}_2. \end{cases} \tag{2.23.4}$$

По схеме (рис. 2.23.1, *б*) найдем *z*-параметры ЧП в режимах ХХ входных или выходных выводов:

$$z_{11} = \left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2=0} = \frac{(Z_1 + Z_3)\dot{I}_1}{\dot{I}_1} = Z_1 + Z_3 = 1 - j$$

— это входное сопротивление ЧП относительно выводов 11′ при разомкнутом выходе;

$$z_{21} = \left.\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2=0} = \frac{Z_3\dot{I}_1}{\dot{I}_1} = Z_3 = 1$$

— передаточное сопротивление от тока $\dot{I}_1$ к напряжению $\dot{U}_2$ при разомкнутом выходе;

$$z_{12} = \left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{I}_1=0} = \frac{Z_3\dot{I}_2}{\dot{I}_2} = Z_3 = 1$$

— передаточное сопротивление при разомкнутом входе;

$$z_{22} = \left.\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{I}_1=0} = \frac{(Z_2+Z_3)\dot{I}_2}{\dot{I}_2} = Z_2 + Z_3 = 1 + j$$

— это входное сопротивление относительно выводов 22′ при разомкнутом входе.

Очевидно, $Z_3 = 1$ — соответствует *R*-элементу; $Z_2 = j$ — соответствует *L*-элементу; $Z_1 = -j$ — соответствует *C*-элементу.

Таким образом,

$$[z] = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-j & 1 \\ 1 & 1+j \end{bmatrix},$$

т. е. данный ЧП несимметричен и условия симметрии (2.23.3) не выполняются.

Покажем, что *П-образная* схема (рис. 2.23.1, *в*) может быть *эквивалентна* заданной *Т-образной* схеме ЧП (рис. 2.23.1, *б*). Как известно, два ЧП эквивалентны по отношению к внешним выводам, если соответствующие параметры у них одинаковы.

Вначале рассчитаем *y*-параметры Т-образной схемы (рис. 2.23.1, *б*). Уравнения ЧП в *y*-форме:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = y_{11}\dot{U}_1 + y_{12}\dot{U}_2; \\ \dot{I}_2 = y_{21}\dot{U}_1 + y_{22}\dot{U}_2. \end{cases} \tag{2.23.5}$$

Для получения *y*-параметров в (2.23.5) решаем систему (2.23.4) относительно токов:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1 z_{22} - \dot{U}_2 z_{12}}{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}}; \quad \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2 z_{11} - \dot{U}_1 z_{21}}{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}}. \tag{2.23.6}$$

Из сравнения (2.23.6) и (2.23.5) находим *y*-параметры ЧП и их численные значения:

$$\begin{aligned} &y_{11} = z_{22}/\Delta_Z = 1 + j; \; y_{12} = -z_{12}/\Delta_Z = -1; \\ &y_{21} = -z_{21}/\Delta_Z = -1 = y_{12}; \; y_{22} = z_{11}/\Delta_Z = 1 - j, \end{aligned} \tag{2.23.7}$$

причем в формулах эквивалентного пересчета параметров (2.23.7) имеем $\Delta_Z = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21} = (1-j)(1+j) - 1 = 1$.

Считаем, что параметры (2.23.7) являются *y*-параметрами эквивалентной П-образной схемы ЧП (рис. 2.23.1, *в*). Найдем их по схемам рис. 2.23.2.

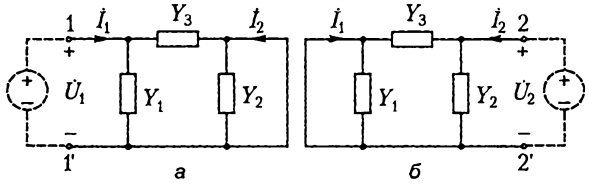


Рис. 2.23.2

$$y_{11} = \left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1}\right|_{\dot{U}_2=0} = \frac{\dot{U}_1(Y_1+Y_3)}{\dot{U}_1} = Y_1 + Y_3$$

— это входная проводимость ЧП со стороны выводов 11′ при закороченном выходе (рис. 2.23.2, *а*);

$$y_{21} = \left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1}\right|_{\dot{U}_2=0} = \frac{-Y_3\dot{U}_1}{\dot{U}_1} = -Y_3$$

— передаточная проводимость при закороченном выходе (рис. 2.23.2, *а*);

$$y_{22} = \left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{U}_1=0} = \frac{\dot{U}_2(Y_3+Y_3)}{\dot{U}_2} = Y_2 + Y_3$$

— входная проводимость ЧП со стороны выводов 22′ при закороченном входе (рис. 2.23.2, *б*);

$$y_{12} = \left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{U}_1=0} = \frac{-\dot{U}_2Y_3}{\dot{U}_2} = -Y_3$$

— передаточная проводимость при закороченном входе (рис. 2.23.2, *б*).

Таким образом, матрица y-параметров

$$[y] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1+Y_3 & -Y_3 \\ -Y_3 & Y_2+Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+j & -1 \\ -1 & 1-j \end{bmatrix},$$

откуда находим $Y_3 = 1$ (т. е. R-элемент); $Y_1 = j$ (т. е. C-элемент); $Y_2 = -j$ (т. е. L-элемент).

Пример 2.23.2. Задан активный ЧП, операторная схема которого приведена на рис. 2.23.3, *а* при $C = 0{,}5$ Ф, $R_1 = 1$, $I_{ЗИ} = 2I_1$, причем «*ромбиком*» обозначен так называемый *зависимый источник* (ЗИ), ток которого *зависит* в данном случае от тока I_1 (подробно типы ЗИ рассмотрены в 2.24).

Требуется найти: 1) z-параметры; 2) a-параметры по z-параметрам; 3) передаточную функцию $H(s) = U_2(s)/U_1(s)$ по z-параметрам при $Z_н = 1$, а затем импульсную характеристику $h(t)$.

1. *Активные* ЧП *необратимы*, имеют четыре независимых параметра $z_{11}, z_{12}, z_{21}, z_{22}$, определять которые проще всего (как и у пассивных ЧП) из рассмотрения режимов ХХ входных или выходных выводов аналогично примеру 2.23.1, т. е.

$$\left.\begin{aligned} z_{11} &= \left.\frac{U_1}{I_1}\right|_{I_2=0} = \frac{R_1 I_1}{I_1} = R_1 = 1; \\ z_{21} &= \left.\frac{U_2}{I_1}\right|_{I_2=0} = \frac{I_1 R_1 - I_{3C} Z_C}{I_1} = \frac{s-4}{s}; \\ z_{22} &= \left.\frac{U_2}{I_2}\right|_{I_1=0} = \frac{I_2 (R_1 + Z_C)}{I_2} = \frac{s+2}{s}; \\ z_{12} &= \left.\frac{U_1}{I_2}\right|_{I_1=0} = \frac{I_2 R_1}{I_2} = R_1 = 1, \end{aligned}\right\} \qquad (2.23.8)$$

причем в (2.23.8) $z_{12} \neq z_{21}$, а операторное сопротивление $Z_C = 1/(sC) = 2/s$.

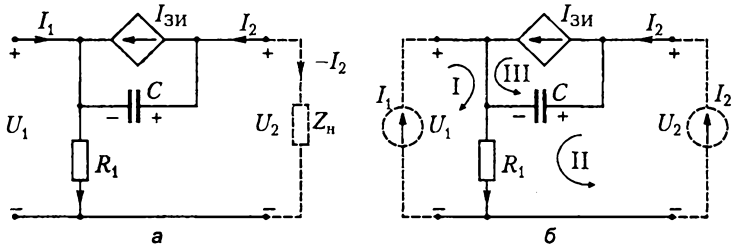


Рис. 2.23.3

Следует отметить, что у сложных по структуре ЧП рассчитать параметры всех форм уравнений по схеме ЧП в режимах холостого хода (или короткого замыкания) входных или выходных выводов — достаточно трудоемкая задача. Поэтому для определения параметров ЧП часто используют так называемый *метод двух вспомогательных источников*, вводимых в схему на основании теоремы замещения.

В примере вводим в схему два источника тока I_1 и I_2 (см. рис. 2.23.3, *б*), а затем используем метод контурных токов. Выбираем контуры так, чтобы токи ЧП были контурными, и присваиваем им первые номера:

$$I_1^{\text{к}} = I_1(s); \quad I_2^{\text{к}} = I_2(s); \quad I_3^{\text{к}} = I_{3C}(s) = 2I_1^{\text{к}},$$

т. е. в данном примере имеем 3 «вырожденных» (упрощенных) уравнения МКТ.

В соответствии с уравнениями z-формы (2.23.1) находим напряжения на входе и выходе ЧП:

$$\begin{cases} U_1 = R_1 I_1^{\text{к}} + R_1 I_2^{\text{к}}; \\ U_2 = (R_1 + Z_C) I_2^{\text{к}} + R_1 I_1^{\text{к}} - Z_C I_3^{\text{к}}, \end{cases}$$

или

$$\left.\begin{cases} U_1 = R_1 I_1^{\text{к}} + R_1 I_2^{\text{к}}; \\ U_2 = (R_1 + Z_C) I_2^{\text{к}} + (R_1 - 2Z_C) I_1^{\text{к}}. \end{cases}\right. \qquad (2.23.9)$$

Из сравнения систем (2.23.1) и (2.23.9) находим $z_{11} = R_1$; $z_{12} = R_1$; $z_{21} = R_1 - 2Z_C$; $z_{22} = R_1 + Z_C$, что, естественно, соответствует (2.23.8).

Вывод: при расчете схем с ЗИ можно использовать *все известные методы* анализа; к уравнениям используемого метода необходимо *добавить* уравнения для ЗИ.

2. Определим матрицу $[a]$ по найденным z-параметрам активного ЧП. Поскольку все формы уравнений ЧП выражают *одну и ту же связь* между переменными U_1, U_2, I_1 и I_2, то *уравнения одной формы можно выразить через уравнения другой*, т. е. параметры одной формы можно найти по параметрам любой иной формы.

Уравнения ЧП через a-параметры (2.23.1) устанавливают связь между входными напряжением и током (U_1, I_1) и выходными напряжением и током (U_2, $-I_2$):

$$\begin{cases} U_1 = a_{11}U_2 + a_{12}(-I_2); \\ I_1 = a_{21}U_2 + a_{22}(-I_2). \end{cases} \tag{2.23.10}$$

Поэтому, решая уравнения z-формы (2.23.1) относительно переменных U_1 и I_1, получим

$$\begin{cases} U_1 = \dfrac{1}{z_{21}}U_2 - \dfrac{z_{22}}{z_{21}}I_2 = \dfrac{1}{z_{21}}U_2 + \dfrac{z_{22}}{z_{21}}(-I_2); \\ I_1 = z_{11}\left[\dfrac{1}{z_{21}}U_2 + \dfrac{z_{22}}{z_{21}}(-I_2)\right] + z_{12}I_2 = \dfrac{z_{11}}{z_{21}}U_2 + \left(\dfrac{z_{11}z_{22}}{z_{21}} - z_{12}\right)(-I_2). \end{cases} \tag{2.23.11}$$

Сравнивая системы уравнений (2.23.11) и (2.23.10), находим параметры матрицы $[a]$ заданного активного ЧП:

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{z_{11}}{z_{21}} & \dfrac{\Delta_Z}{z_{21}} \\ \dfrac{1}{z_{21}} & \dfrac{z_{22}}{z_{21}} \end{bmatrix},$$

где $\Delta_Z = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}$.

3. Найдем передаточную функцию $H(s) = U_2(s)/U_1(s)$ по z-параметрам ЧП. О передаточной функции ЧП говорят, когда к его выходу подключена нагрузка с сопротивлением $Z_{\text{н}}(s)$. Найти передаточную функцию можно по любой форме уравнений ЧП, если *к двум уравнениям ЧП добавить уравнение нагрузки* (см. рис. 2.23.3, *а*):

$$U_2 = Z_{\text{н}}(-I_2). \tag{2.23.12}$$

Очевидно, (2.23.12) имеет вид $U_2 = 0$ при $Z_{\text{н}} = 0$ (КЗ выходных выводов ЧП) или $I_2 = 0$ при $Z_{\text{н}} = \infty$ (ХХ выходных выводов ЧП).

Используя уравнения ЧП в z-форме (2.23.1) и уравнение нагрузки (2.23.12), записываем систему:

$$U_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2;\ U_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2;\ U_2 = Z_{\text{н}}(-I_2).$$

Чтобы исключить из этой *системы* «лишние» переменные I_1 и I_2, преобразуем ее к виду

$$\begin{cases} z_{11}I_1 + z_{12}I_2 + 0 = U_1; \\ z_{21}I_1 + z_{22}I_2 - U_2 = 0; \\ 0 + Z_н I_2 + U_2 = 0, \end{cases}$$

откуда находим

$$U_2 = \frac{\begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} & U_1 \\ z_{21} & z_{22} & 0 \\ 0 & Z_н & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} & 0 \\ z_{21} & z_{22} & -1 \\ 0 & Z_н & 1 \end{vmatrix}} = \frac{U_1 z_{21} Z_н}{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21} + Z_н z_{11}}.$$

Таким образом, ПФ цепи

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{z_{21}Z_н}{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21} + Z_н z_{11}}.$$

Подставляя (2.23.8), получим при $Z_н = 1$:

$$H(s) = \frac{s-4}{s+6} = 1 - \frac{10}{s+6} \div h(t) = \delta(t) - 10e^{-6t}\delta_1(t),$$

т. е. передаточная функция $H(s)$ и импульсная характеристика $h(t)$ найдены.

2.23.3. Заключение

В результате усвоения материала темы необходимо знать основные формы уравнений ЧП, уравнение нагрузки, условия обратимости и симметрии, уметь находить параметры ЧП и его ПФ, уметь пересчитывать параметры из одной формы в другую.

2.24. Цепи с зависимыми источниками и операционными усилителями

2.24.1. Исходные понятия

Для пассивных цепей, составленных из *RLCM*-элементов и независимых источников, справедлив принцип взаимности (обратимости) $y_{12} = y_{21}$. На практике, однако, преобладают цепи, где этот принцип несправедлив. Такие цепи называют *активными* (*необратимыми*) цепями, а схемы их замещения обязательно содержат хотя бы один необратимый элемент, называемый *зависимым источником.*

На эквивалентной схеме цепи в отличие от независимых источников ЗИ изображают в виде «*ромбика*» (см. рис. 2.24.1). Различают четыре типа ЗИ: источник напряжения, управляемый напряжением (ИНУН), – рис. 2.24.1, *а*; источник напряжения, управляемый током (ИНУТ), – рис. 2.24.1, *б*; источник тока, управляемый током (ИТУТ), – рис. 2.24.1, *в*; источник тока, управляемый напряжением (ИТУН), – рис. 2.24.1, *г*.

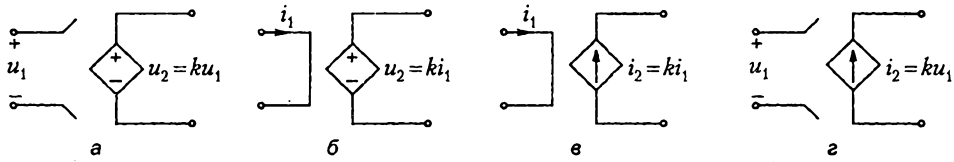


Рис. 2.24.1

Для расчета цепей, содержащих ЗИ, *используют все методы расчета*, но к уравнениям выбранного метода *добавляют* уравнения ЗИ.

2.24.2. Пример типовой задачи

Пример 2.24.1. Схема цепи с ЗИ приведена на рис. 2.24.2: $u_1(t)$ – воздействие; $u_6(t)$ – реакция; $R_k = 1$ Ом; $C = 1$ Ф; $i_5 = 0{,}5i_3$. Найти $H(s) = U_6(s)/U_1(s); h(t); h_1(t)$.

Рассчитаем цепь по методу контурных токов.

1. Число независимых уравнений МКТ

$$n_{\text{МКТ}} = n_{\text{ЗНК}} = n_{\text{в}} - n_{\text{у}} + 1 = 5 - 3 + 1 = 3.$$

2. Выбираем независимые контуры с контурными токами

$$I_1^{\text{к}} = -I_3;\ I_2^{\text{к}} = I_6;\ I_3^{\text{к}} = I_5.$$

3. Составляем операторные уравнения МКТ:

$$\begin{cases}(R_2+R_3)I_1^{\kappa}+R_2I_2^{\kappa}+R_2I_3^{\kappa}=\dot{U}_1;\\ R_2I_1^{\kappa}+\left(R_2+R_6+\dfrac{1}{sC}\right)I_2^{\kappa}+\left(R_2+\dfrac{1}{sC}\right)I_3^{\kappa}=U_1;\\ I_3^{\kappa}=I_5=0{,}5I_3=-0{,}5I_1^{\kappa}.\end{cases}$$

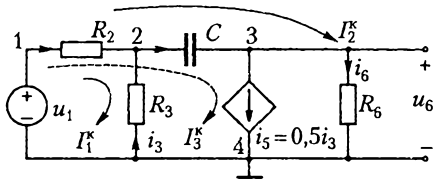


Рис. 2.24.2

Третье уравнение — это «вырожденное» (т. е. упрощенное) уравнение МКТ, *дополненное* уравнением для ЗИ.

4. Решаем полученную систему:

$$\begin{cases}2I_1^{\kappa}+I_2^{\kappa}-0{,}5I_1^{\kappa}=U_1;\\ I_1^{\kappa}+\left(2+\dfrac{1}{s}\right)I_2^{\kappa}+\left(1+\dfrac{1}{s}\right)(-0{,}5I_1^{\kappa})=U_1.\end{cases}$$

Находим

$$I_1^{\kappa}=\frac{U_1(s+1)}{2{,}5s+2};\quad I_2^{\kappa}=\frac{U_1(s+0{,}5)}{2{,}5s+2},$$

откуда ПФ цепи

$$H(s)=\frac{U_6(s)}{U_1(s)}=\frac{R_6I_2^{\kappa}}{U_1(s)}=\frac{0{,}4(s+0{,}5)}{s+0{,}8}.$$

Изображение по Лапласу импульсной характеристики $h(t)$ цепи для реакции $u_6(t)$ — это полученная ПФ:

$$h(t)\div H(s)=\frac{0{,}4(s+0{,}5)}{s+0{,}8}=0{,}4-\frac{0{,}12}{s+0{,}8}\div h(t)=0{,}4\delta(t)-0{,}12e^{-0{,}8t}\delta_1(t).$$

Переходная характеристика цепи

$$h_1(t)\div H_1(s)=\frac{H(s)}{s}=\frac{0{,}4(s+0{,}5)}{s(s+0{,}8)}=\frac{A_1}{s}+\frac{A_2}{s+0{,}8},$$

где $A_1=sH_1(s)|_{s=0}=0{,}25$; $A_2=(s+0{,}8)H_1(s)|_{s=-0{,}8}=0{,}15$.

Таким образом,

$$h_1(t)=(0{,}25+0{,}15e^{-0{,}8t})\delta_1(t).$$

Аналогично, применяя к решению этой задачи МУН, составляем обычным способом уравнения МУН и *добавляем* к нему уравнение для ЗИ.

Принимаем (см. рис. 2.24.2) $U_4^{\text{у}} = U_6^{\text{у}} = 0$; $U_1^{\text{у}} = U_1$ — «вырожденное» уравнение МУН. В результате имеем систему

$$\begin{cases} (G_2 + G_3 + sC)U_2^{\text{у}} - sCU_3^{\text{у}} - G_2U_1 = 0; \\ -sCU_2^{\text{у}} + (sC + G_6)U_3^{\text{у}} = -I_5; \\ I_5 = 0{,}5I_3 = 0{,}5(U_6^{\text{у}} - U_2^{\text{у}})G_3, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (s+2)U_2^{\text{у}} - sU_3^{\text{у}} = U_1; \\ -sU_2^{\text{у}} + (s+1)U_3^{\text{у}} + I_5 = 0; \\ I_5 = -0{,}5U_2^{\text{у}}, \end{cases}$$

откуда находим

$$U_2^{\text{у}} = \frac{U_1(s+1)}{2{,}5s+2};\ U_3^{\text{у}} = \frac{U_1(s+0{,}5)}{2{,}5s+2},$$

следовательно, ПФ цепи

$$H(s) = \frac{U_6(s)}{U_1(s)} = \frac{U_3^{\text{у}}}{U_1} = \frac{0{,}4(s+0{,}5)}{s+0{,}8}.$$

2.24.3. Формализованные МКТ и МУН

Активные цепи могут *содержать* четырехполюсники, которые заданы одной из форм уравнений ЧП или схемой с ЗИ. При анализе таких цепей можно применять так называемые *формализованные* методы контурных токов и узловых напряжений. Рассмотрим на примере использование этих методов и особенности их применения.

Пример 2.24.2. Дана цепь (рис. 2.24.3, *а*) с ЧП, матрица z-параметров которого имеет вид

$$[z] = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Воздействие — $u_{\text{вх}}(t)$; реакция — $u_{\text{вых}}(t) = u_{R3}$; $R_k = 1$ Ом. Найти $H(s) = U_{\text{вых}}(s)/U_{\text{вх}}(s)$; $h(t)$.

При использовании формализованного МКТ рекомендуется следующий порядок расчета.

1. Используя уравнения z-формы

$$U_1^{\text{ЧП}} = z_{11}I_1^{\text{ЧП}} + z_{12}I_2^{\text{ЧП}};\ U_2^{\text{ЧП}} = z_{21}I_1^{\text{ЧП}} + z_{22}I_2^{\text{ЧП}},$$

необратимый ЧП заменяют его эквивалентной схемой (рис. 2.24.3, *б*) с двумя зависимыми источниками напряжения типа ИНУТ.

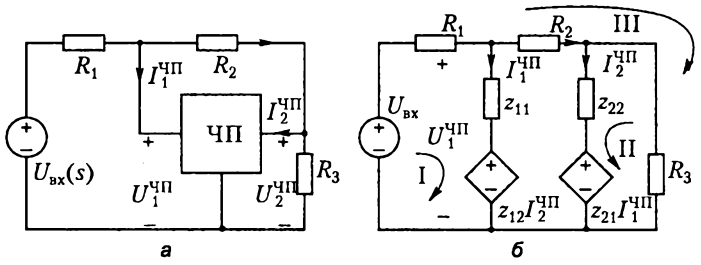


Рис. 2.24.3

Примечание: необратимый ЧП имеет четыре независимых параметра, поэтому эквивалентная схема такого ЧП должна *содержать четыре элемента*, из которых хотя бы один — ЗИ.

Если z-параметры необратимого ЧП не заданы, их необходимо определить по известным параметрам иной формы уравнений ЧП либо по известной схеме необратимого ЧП.

2. Составляют по МКТ систему уравнений, оставляя *в левых частях* уравнений напряжения ЗИ:

$$[Z_{\text{МжТ}}][I^{\text{к}}]+[U^{\text{ЗИ}}]=[U^{\text{к}}],$$

где $[I^{\text{к}}]$, $[U^{\text{ЗИ}}]$, $[U^{\text{к}}]$ — матрицы контурных токов, напряжений ЗИ и контурных напряжений независимых источников, причем при расчете $[U^{\text{ЗИ}}]$ используют *обычное правило знаков* ЗНК (т. е. напряжение источника, полярность которого согласована с обходом контура, учитывают со знаком «+»), в то время как при расчете $[U^{\text{к}}]$ используют *«обратное» правило знаков*. *Рекомендуется* независимые контуры выбирать так, чтобы *токи* необратимого ЧП были *контурными*, и присваивать им *первые номера*.

Выполним рекомендации по выбору независимых контуров и нумерации контурных токов в схеме на рис. 2.24.3, *б*: $I_1^{\text{к}}=I_1^{\text{ЧП}}; I_2^{\text{к}}=I_2^{\text{ЧП}}; I_3^{\text{к}}=I_2$. Далее запишем систему уравнений МКТ

$$\begin{cases}(R_1+z_{11})I_1^{\text{к}}+0\cdot I_2^{\text{к}}+R_1I_3^{\text{к}}+z_{12}I_2^{\text{ЧП}}=U_{\text{вх}};\\ 0\cdot I_1^{\text{к}}+(R_3+z_{22})I_2^{\text{к}}-R_3I_3^{\text{к}}+z_{21}I_1^{\text{ЧП}}=0;\\ R_1I_1^{\text{к}}-R_3I_2^{\text{к}}+(R_1+R_2+R_3)I_3^{\text{к}}=U_{\text{вх}},\end{cases}$$

или после подстановки данных

$$\begin{cases}(2s+1)I_1^{\text{к}}+sI_2^{\text{к}}+I_3^{\text{к}}=U_{\text{вх}};\\ sI_1^{\text{к}}+(s+1)I_2^{\text{к}}-I_3^{\text{к}}=0;\\ I_1^{\text{к}}-I_2^{\text{к}}+3I_3^{\text{к}}=U_{\text{вх}},\end{cases}$$

откуда

$$I_2^{\text{к}}=0;\ \ I_3^{\text{к}}=\frac{sU_{\text{вх}}(s+1)}{3s^2+4s+1}.$$

Передаточная функция цепи

$$H(s)=\frac{U_{\text{вых}}(s)}{U_{\text{вх}}(s)}=\frac{R_3(I_3^{\text{к}}-I_2^{\text{к}})}{U_{\text{вх}}(s)}=\frac{s(s+1)}{3\left(s^2+\frac{4}{3}s+\frac{1}{3}\right)}=\frac{s}{3\left(s+\frac{1}{3}\right)},$$

следовательно, импульсная характеристика цепи

$$h(t)\div H(s)=\frac{1}{3}+\frac{-1/9}{s+1/3}\div h(t)=\frac{1}{3}\delta(t)-\frac{1}{9}e^{-t/3}\delta_1(t).$$

При анализе цепи с необратимым ЧП *формализованным МУН* последовательность расчета будет дуальна рассмотренной в МКТ.

1. Определяем y-параметры по известным z-параметрам.

Запишем уравнения ЧП через z- и y-параметры:

$$\begin{cases}U_1=z_{11}I_1+z_{12}I_2;\\ U_2=z_{21}I_1+z_{22}I_2,\end{cases}\quad\begin{cases}I_1=y_{11}U_1+y_{12}U_2;\\ I_2=y_{21}U_1+y_{22}U_2.\end{cases}$$

Решим уравнения z-формы относительно переменых I_1 и I_2:

$$\Delta=\begin{vmatrix}z_{11}&z_{12}\\ z_{21}&z_{22}\end{vmatrix}=z_{11}z_{22}-z_{12}z_{21}=2s^2-s^2=s^2;$$

$$\Delta I_1=\begin{vmatrix}U_1&z_{12}\\ U_2&z_{22}\end{vmatrix}=z_{22}U_1-z_{12}U_2;$$

$$I_1=\frac{\Delta I_1}{\Delta}=\frac{z_{22}}{\Delta}U_1-\frac{z_{12}}{\Delta}U_2. \qquad (2.24.1)$$

$$\Delta I_2=\begin{vmatrix}z_{11}&U_1\\ z_{21}&U_2\end{vmatrix}=z_{11}U_2-z_{21}U_1;$$

$$I_2=\frac{\Delta I_2}{\Delta}=\frac{z_{11}}{\Delta}U_2-\frac{z_{21}}{\Delta}U_1. \qquad (2.24.2)$$

Из сравнения (2.24.1) и (2.24.2) с уравнениями y-формы находим

$$y_{11}=\frac{z_{22}}{\Delta}=\frac{1}{s};\quad y_{12}=-\frac{z_{12}}{\Delta}=-\frac{1}{s};$$

$$y_{21}=-\frac{z_{21}}{\Delta}=-\frac{1}{s};\quad y_{22}=\frac{z_{11}}{\Delta}=\frac{2}{s}.$$

Итак, матрица y-параметров

$$[y]=\begin{bmatrix}y_{11}&y_{12}\\ y_{21}&y_{22}\end{bmatrix}=\frac{1}{s}\begin{bmatrix}1&-1\\ -1&2\end{bmatrix}.$$

2. Используя уравнения y-формы необратимого ЧП, заменяют его *эквивалентной схемой* (рис. 2.24.4) с *двумя зависимыми источниками* тока типа ИТУН.

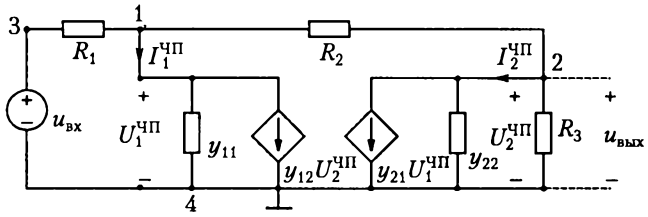


Рис. 2.24.4

3. Записывают уравнения МУН, *оставляя токи ЗИ в левой части* уравнений, т. е. $[y_{МУН}][U^{у}]+[I^{ЗИ}]=[I^{у}]$, причем при расчете $[I^{ЗИ}]$ используют *обычное правило знаков* ЗТК (т. е. ток источника, *вытекающий* из узла, учитывается со знаком «+»), в то время как при расчете $[I^{у}]$ используется «*обратное*» правило знаков. При этом целесообразно базисный узел по возможности выбрать так, чтобы *напряжения* необратимого ЧП *были узловыми*, и присвоить им первые номера.

Выполняя эти рекомендации по нумерации узлов в схеме на рис. 2.24.4, считаем узел 4 базисным. Уравнения МУН

$$\begin{cases}(G_1+G_2+y_{11})U_1^{у}-G_2U_2^{у}-G_1U_3^{у}+y_{12}U_2^{ЧП}=0,\\ -G_2U_1^{у}+(G_2+G_3+y_{22})U_2^{у}+y_{21}U_1^{ЧП}=0,\end{cases}$$

причем

$$U_1^{у}=U_1^{ЧП};\ U_2^{у}=U_2^{ЧП};\ U_3^{у}=U_{вх};\ U_4^{у}=U_6^{у}=0. \qquad (2.24.3)$$

Решая составленную систему

$$\begin{cases}\left(2+\dfrac{1}{s}\right)U_1^{у}-U_2^{у}-U_3^{у}-\dfrac{1}{s}U_2^{ЧП}=0;\\ -U_1^{у}+\left(2+\dfrac{2}{s}\right)U_2^{у}-0\cdot U_3^{у}-\dfrac{1}{s}U_1^{ЧП}=0,\end{cases}$$

получим с учетом (2.24.3):

$$U_2^{у}=\frac{sU_{вх}(s+1)}{3s^2+4s+1}=U_{вых}(s),$$

откуда

$$H(s)=\frac{U_{вых}(s)}{U_{вх}(s)}=\frac{s(s+1)}{3\left(s^2+\dfrac{4}{3}s+\dfrac{1}{3}\right)}=\frac{s}{3\left(s+\dfrac{1}{3}\right)}.$$

Следует отметить, что формализованные МКТ и МУН можно успешно использовать *при расчете индуктивно связаных цепей.* Действительно, рассмотренный в примере 2.24.2 ЧП является обратимым (так как $z_{12} = z_{21}$) и его уравнения соответствуют, например, уравнениям *трансформатора*:

$$\begin{cases} U_{L1} = 2sI_{L1} + sI_{L2}; \\ U_{L2} = sI_{L1} + sI_{L2}, \end{cases}$$

где $U_{L1} \equiv U_1^{\text{ЧП}}$, $U_{L2} \equiv U_2^{\text{ЧП}}$, $I_{L1} \equiv I_1^{\text{ЧП}}$, $I_{L2} \equiv I_2^{\text{ЧП}}$. Однако при расчете других типов пассивных ЧП удобнее использовать Т- или П-образные эквивалентные схемы без ЗИ.

2.24.4. Цепи с операционными усилителями

Операционный усилитель (ОУ) — это ИНУН (см. рис. 2.24.5, *а*) с очень большим коэффициентом усиления, так что

$$U_{\text{вых}}^{\text{ОУ}} = k_{\text{ОУ}} U_{\text{вх}}^{\text{ОУ}}\big|_{k_{\text{ОУ}} \to \infty} = k_{\text{ОУ}} (U_2^{\text{ОУ}} - U_1^{\text{ОУ}})\big|_{k_{\text{ОУ}} \to \infty}. \qquad (2.24.4)$$

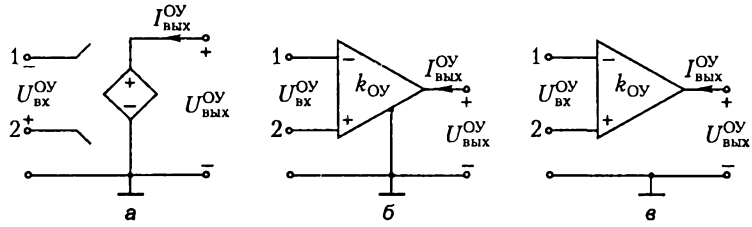


Рис. 2.24.5

На рис. 2.24.5, *б*, *в* приведены используемые *условные обозначения* ОУ, причем обозначение (рис. 2.24.5, *в*) используется чаще (хотя путь выходного тока $I_{\text{вых}}^{\text{ОУ}}$ на нем неясен).

Очевидны 3 *свойства идеального* ОУ:

1) $I_{\text{вх}}^{\text{ОУ}} = 0$, т. е. входные токи отсутствуют; 2) $k_{\text{ОУ}} = \infty$, т. е. коэффициент усиления бесконечен; 3) $U_{\text{вх}}^{\text{ОУ}} = 0$, т. е. $U_2^{\text{ОУ}} = U_1^{\text{ОУ}}$.

Действительно, на основании (2.24.4), так как коэффициент усиления *идеального* ОУ бесконечен, а *выходное напряжение конечно*, то $U_{\text{вх}}^{\text{ОУ}}(s) = U_2^{\text{ОУ}} - U_1^{\text{ОУ}} = U_{\text{вых}}^{\text{ОУ}} / k_{\text{ОУ}} = 0$, т. е. выводы 1 и 2 (см. рис. 2.24.5) *эквипотенциальны* и входное напряжение идеального ОУ можно считать равным нулю.

У реального ОУ коэффициент усиления $k_{\text{ОУ}} \neq \infty$, хотя и очень велик (достигает сотен тысяч).

Для расчета цепей с ОУ *используют*, как правило, *МУН.*

Пример 2.24.3. Дана цепь (рис. 2.24.6, *а*) с идеальным ОУ; $C_1 = C_2 = 1$ Ф; $R_1 = 0{,}5$ Ом; $R_2 = 1$ Ом. Найти $H(s) = U_{\text{вых}}(s)/U_1(s)$, $h_1(t)$, $h(t)$.

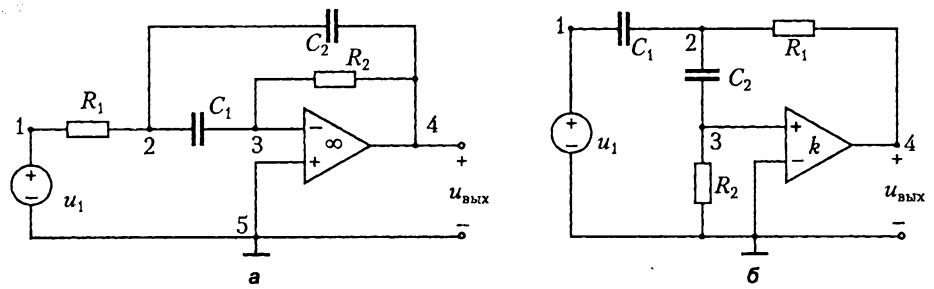


Рис. 2.24.6

1. Составляем обычные уравнения МУН *для всех* независимых *узлов* цепи, *кроме выходного узла* ОУ (узла 4 — см. рис. 2.24.6, *а*), так как выходной ток ОУ $I_{\text{вых}}^{\text{ОУ}}(s)$ неизвестен (см. рис. 2.24.5). Считая $U_1^{\text{у}} = U_1; U_6^{\text{у}} = U_5^{\text{у}} = 0; U_{\text{вых}} = U_4^{\text{у}}$, можно записать

$$\begin{cases} (G_1 + sC_1 + sC_2)U_2^{\text{у}} - sC_1U_3^{\text{у}} - sC_2U_4^{\text{у}} - G_1U_1^{\text{у}} = 0; \\ -sC_1U_2^{\text{у}} + (sC_1 + G_2)U_3^{\text{у}} - G_2U_4^{\text{у}} = 0. \end{cases} \qquad (2.24.5)$$

В системе (2.24.5) два уравнения МУН с тремя неизвестными $U_2^{\text{у}}, U_3^{\text{у}}, U_4^{\text{у}}$.

2. В качестве *дополнительного уравнения* МУН используется *третье свойство идеального* ОУ — *эквипотенциальность* его входных выводов при $k_{\text{ОУ}} = \infty$, т. е. в данном примере $U_5^{\text{у}} = U_3^{\text{у}} = 0$; следовательно, система (2.24.5) примет вид

$$\begin{cases} (G_1 + sC_1 + sC_2)U_2^{\text{у}} - sC_2U_4^{\text{у}} = G_1U_1; \\ -sC_1U_2^{\text{у}} - G_2U_4^{\text{у}} = 0; \\ U_3^{\text{у}} = 0, \end{cases}$$

или, подставляя численные значения,

$$\begin{cases} (2s+2)U_2^{\text{у}} - sU_4^{\text{у}} = 2U_1; \\ -sU_2^{\text{у}} - U_4^{\text{у}} = 0, \end{cases}$$

откуда

$$U_2^{\text{у}} = \frac{2U_1}{s^2 + 2s + 2}; \quad U_4^{\text{у}} = \frac{-2sU_1}{s^2 + 2s + 2} = U_{\text{вых}}.$$

В результате ПФ цепи

$$H(s) = \frac{U_{\text{вых}}(s)}{U_1(s)} = \frac{U_4^{\text{у}}}{U_1} = -\frac{2s}{s^2 + 2s + 2},$$

следовательно,

$$h(t) \div H(s) = \frac{-2s}{s^2 + 2s + 2} = \frac{A_1}{s + 1 - j} + \frac{A_2}{s + 1 + j},$$

где $A_1 = \sqrt{2}e^{-j135°}$; $A_2 = \sqrt{2}e^{+j135°}$.

Таким образом, импульсная характеристика (ИХ) цепи

$$h(t) = 2\sqrt{2}e^{-t}\cos(t - 135°).$$

Далее находим переходную характеристику:

$$h_1(t) \div H_1(s) = \frac{H(s)}{s} = \frac{-2}{s^2 + 2s + 2};$$

$$h_1(t) = 2e^{-t}\cos(t + 90°) = -2e^{-t}\sin t.$$

Пример 2.24.4. Задана схема цепи (рис. 2.24.6, *б*) с ОУ, коэффициент усиления которого $k = 3$; $C_1 = C_2 = 1$ Ф; $R_k = 0{,}5$ Ом. Найти $H(s) = U_{вых}(s)/U_1(s)$; $h(t)$ для реакции $u_{вых}(t)$.

1. С учетом $U_1^y = U_1$ составляем уравнения МУН для независимых узлов 2 и 3. *Для выходного узла* ОУ (узла 4) *уравнение не составляется.* Получим

$$\begin{cases} (sC_1 + sC_2 + G_1)U_2^y - sC_2U_3^y - G_1U_4^y - sC_1U_1 = 0; \\ -sC_2U_2^y + (sC_2 + G_2)U_3^y = 0; \\ U_4^y = kU_3^y, \end{cases} \qquad (2.24.6)$$

причем третье *дополнительное уравнение* в системе (2.24.6) составлено на основании исходного уравнения (2.24.4) *реального* ОУ.

Далее записываем

$$\begin{cases} (2s + 2)U_2^y - sU_3^y - 2U_4^y = sU_1; \\ -sU_2^y + (s + 2)U_3^y = 0; \\ U_4^y = 3U_3^y, \end{cases}$$

откуда

$$U_4^y = \frac{3s^2U_1}{s^2 + 4}; \quad H(s) = \frac{U_{вых}}{U_1(s)} = \frac{U_4^y}{U_1} = \frac{3s^2}{s^2 + 4}.$$

Находим импульсную характеристику цепи для реакции $u_{вых}(t)$:

$$h(t) \div H(s) = \frac{3s^2}{s^2 + 4} = 3 + \frac{j3}{s - j2} + \frac{-j3}{s + j2};$$

$$h(t) = 3\delta(t) + 6\cos(2t + 90°)\delta_1(t).$$

Определяем переходную характеристику:

$$H_1(s) = \frac{H(s)}{s} = \frac{3s}{s^2 + 4} \div h_1(t) = 3\cos 2t\,\delta_1(t).$$

2.24.5. Заключение

В результате усвоения материала темы необходимо уметь применять МКТ и МУН для расчета цепей с ЗИ, правильно использовать формализованные МКТ и МУН для расчета цепей с необратимыми ЧП, уметь заменять ИСЭ эквивалентной схемой с ЗИ и рассчитывать такие схемы формализованными МКТ и МУН, знать свойства идеальных и реальных ОУ и применять их при расчете МУН цепей с ОУ.

2.25. Расчет нелинейных резистивных цепей

2.25.1. Исходные понятия

До сих пор рассматривались линейные *RLCM*-цепи, которые описывались *линейными* алгебраическими или дифференциальными уравнениями. *Параметры* элементов цепей *не зависели* от изменений токов и напряжений в цепи. Однако линейные цепи — это идеализация, так как при значительных изменениях токов и напряжений в цепи параметры элементов R, L, C, M изменяются, т. е. их характеристики становятся *нелинейными*:

$$u_R = u_R(i_R),\ \ \psi_L = \psi_L(i_L),\ \ q_C = q_C(u_C).$$

Обозначения нелинейных R-, L-, C-элементов с указанием полярности напряжений, согласованной с направлением тока, приведены на рис. 2.25.1.

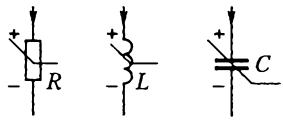


Рис. 2.25.1

Цепь, содержащая хотя бы один нелинейный элемент (НЭ), называется *нелинейной цепью* (НЦ).

Для нелинейных цепей остаются *справедливы* уравнения соединений, т. е. *законы Кирхгофа*

$$\sum_{k=1}^{n} i_k = 0,\ \ \sum_{k=1}^{n} u_k = 0,$$

принципы непрерывности потокосцепления L-элемента и заряда C-элемента

$$\psi_L(t-) = \psi_L(t+),\ \ q_C(t-) = q_C(t+).$$

Несправедливы все свойства линейности — пропорциональности, наложения, дифференцируемости (интегрируемости).

Общих точных аналитических методов расчета НЦ *не существует*. Для каждого класса НЦ, как правило, имеются свои специфические приближенные методы расчета.

Рассмотрим анализ резистивной НЦ *с одним* нелинейным элементом как наиболее часто встречающейся на практике, используя графический и аналитические методы расчета.

2.25.2. Типовой пример

Задана резистивная НЦ с одним НЭ (рис. 2.25.2, *а*), причем $R_1 = R_2 = 1$ Ом, $R_3 = 0{,}5$ Ом, $u_0 = 10$ В, $i_0 = 2$ А. Вольт-амперная характеристика (ВАХ) НЭ задана в точках $\{u_{НЭ}, i_{НЭ}\}$: (0, 0); (2, 1); (3, 2); (5, 3) и представлена в виде графика на рис. 2.25.2, *б*. Необходимо найти $u_{НЭ}$, $i_{НЭ}$, используя графический и аналитические приближенные методы.

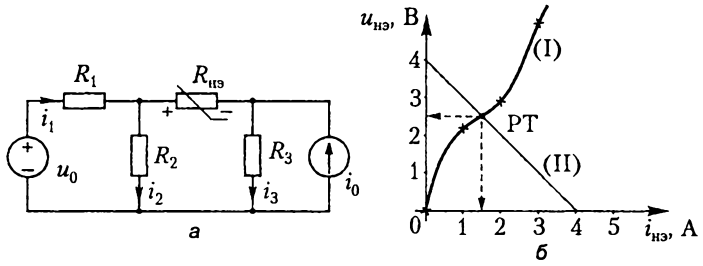


Рис. 2.25.2

Графический метод расчета нелинейных цепей

В резистивных цепях *с одним* НЭ часто применяют один из *методов эквивалентных источников*. Так, по теореме Тевенена об эквивалентном источнике напряжения цепь на рис. 2.25.2, *а* можно представить в виде рис. 2.25.3, *а*, причем левая часть схемы относительно узлов 1—2 линейна. Тогда по ЗНК напряжение НЭ будет равно

$$u_{\text{НЭ}}(i_{\text{НЭ}}) = u_{\text{ХХ НЭ}} - R_{\text{Э}} i_{\text{НЭ}}. \qquad (2.25.1)$$

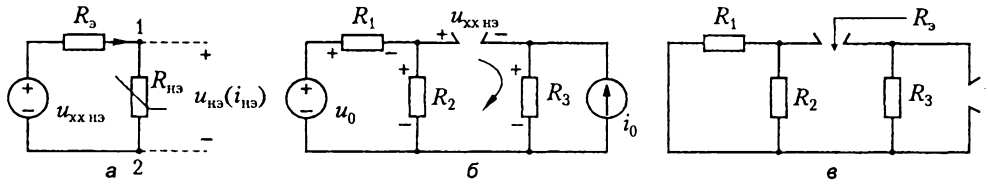


Рис. 2.25.3

Определим $u_{\text{ХХ НЭ}}$ и $R_{\text{Э}}$. По ЗНК для эквивалентной схемы (рис. 2.25.3, *б*)

$$u_{\text{ХХ НЭ}} = u_{R2} - u_{R3} = R_2 \frac{u_0}{R_1 + R_2} - i_0 R_3 = 4 \text{ В}.$$

Далее по схеме на рис. 2.25.3, *в* находим

$$R_{\text{Э}} = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 1.$$

Тогда уравнение (2.25.1) примет вид

$$u_{\text{НЭ}}(i_{\text{НЭ}}) = 4 - 1 \cdot i_{\text{НЭ}}, \qquad (2.25.2)$$

причем на рис. 2.25.2, *б* нелинейная ВАХ левой части (2.25.2) обозначена (I), а ВАХ правой линейной части — (II).

Точка пересечения двух характеристик и есть *рабочая точка* (РТ) нелинейного элемента. В этой точке с графика снято $i_{\text{НЭ}} \cong 1{,}5$ А, $u_{\text{НЭ}} \cong 2{,}5$ В.

Анализ нелинейных резистивных цепей методом кусочно-линейных схем (моделей)

Последовательность расчета:

1. Заменяют отдельные участки ВАХ НЭ отрезками прямых линий (см., например, рис. 2.25.4, *а*), т. е. аппроксимируют ВАХ НЭ. Число нелинейных участков ВАХ НЭ зависит от ее формы, требуемой точности и области изменения напряжения и тока НЭ.

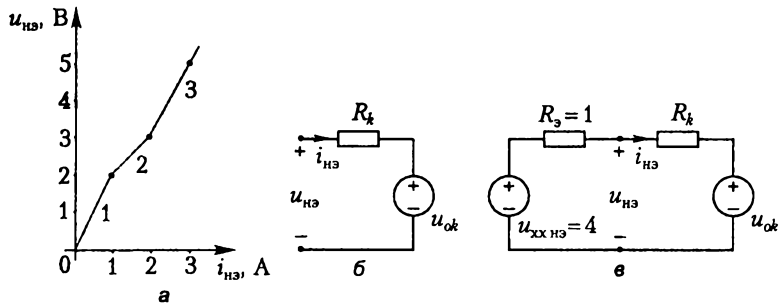


Рис. 2.25.4

2. На каждом линейном участке резистивный НЭ описывают уравнением прямой

$$u_{нэ} = R_k i_{нэ} + u_{0k}, \qquad (2.25.3)$$

где k — номер интервала (участка) аппроксимации ВАХ.

Уравнению (2.25.3) в интервале k соответствует эквивалентная линейная схема (рис. 2.25.4, *б*) из последовательного соединения R_k и источника постоянного напряжения u_{0k}. При переходе на другой участок аппроксимации ВАХ НЭ параметры R_k, u_{0k} схемы на рис. 2.25.4, *б* изменяются, но ее структура остается прежней.

3. Составляют эквивалентную линейную схему всей цепи (см. рис. 2.25.4, *в*), анализ которой можно провести *любым методом расчета линейных* цепей. Выводят в общем виде формулу для расчета искомой реакции: $i_{нэ} = (u_{хх нэ} - u_{0k})/(R_э + R_k)$.

4. *Перебором* R_k и u_{0k} для всех интервалов аппроксимации ВАХ НЭ находят по выведенной формуле значение реакции и проверяют ее на соответствие рассматриваемому интервалу аппроксимации.

В примере ВАХ нелинейного R-элемента задана в точках $\{u_{нэ}, i_{нэ}\}$: (0, 0); (2, 1); (3, 2); (5, 3), показанных на рис. 2.25.4, *а*.

1. В качестве узлов кусочно-линейной аппроксимации (см. рис. 2.25.4, *а*) выбираем узловые точки, заданные в условии задачи.

2. Описываем НЭ на каждом линейном участке 1, 2, 3 уравнением прямой (2.25.3) $u_{нэ} = R_k i_{нэ} + u_{0k}$.

Участок 1 ($0 < i < 1$, $0 < u < 2$)

$$u_{нэ} = R_1 i_{нэ} + u_{01} = \frac{2-0}{1-0} i_{нэ} + 0 = 2i_{нэ},$$

следовательно, $R_1 = 2$; $u_{01} = 0$.

Участок 2 ($1 < i < 2$, $2 < u < 3$)

$$u_{\text{НЭ}} = R_2 i_{\text{НЭ}} + u_{02} = \frac{3-2}{2-1} i_{\text{НЭ}} + 1 = i_{\text{НЭ}} + 1,$$

следовательно, $R_1 = 1$; $u_{02} = 1$.

Участок 3 ($2 < i < 3$, $3 < u < 5$)

$$u_{\text{НЭ}} = R_3 i_{\text{НЭ}} + u_{03} = 3 + \frac{5-3}{3-2}(i_{\text{НЭ}} - 2) = 3 + 2(i_{\text{НЭ}} - 2) = 2i_{\text{НЭ}} - 1,$$

следовательно, $R_3 = 2$; $u_{03} = -1$.

3. Составляем «кусочно-линейную» схему цепи (рис. 2.25.4, *в*) и выводим формулу связи реакции с воздействием:

$$i_{\text{НЭ}} = \frac{u_{\text{ХХ НЭ}} - u_{0k}}{R_{\text{Э}} + R_k} = \frac{4 - u_{0k}}{1 + R_k}.$$

4. Перебором R_k, u_{0k} всех участков аппроксимации находим рабочую точку.

Участок 1. Значение тока $i_{\text{НЭ}} = (4-0)/(1+2) = 4/3 > 1$ не соответствует диапазону изменения тока на участке 1, где $0 < i < 1$.

Участок 2. Значение $i_{\text{НЭ}} = (4-1)/(1+1) = 1{,}5$ соответствует диапазону изменения тока на этом участке 2, где $1 < u < 2$.

Участок 3. Значение тока $i_{\text{НЭ}} = (4+1)/(1+2) = 5/3 < 2$ не соответствует диапазону изменения тока на этом участке 3, где $2 < u < 3$.

Далее для схемы (рис. 2.25.4, *в*) находим по ЗНК напряжение на нелинейном R-элементе $u_{\text{НЭ}} = u_{\text{ХХ НЭ}} - R_{\text{Э}} i_{\text{НЭ}} = 4 - 1 \cdot 1{,}5 = 2{,}5$ В.

Таким образом, *рабочая точка*, находящаяся на участке 2, имеет $i_{\text{НЭ}} = 1{,}5$ А; $u_{\text{НЭ}} = 2{,}5$ В, что соответствует и результатам расчета графическим методом.

Описанная процедура перебора участков значительно осложняется в случае большого числа нелинейных элементов и участков аппроксимации нелинейных ВАХ.

Аналитический расчет нелинейных R-цепей при аппроксимации ВАХ НЭ полиномами

Последовательность расчета рассмотрим на примере схемы (рис. 2.25.3, *а*), где $u_{\text{ХХ НЭ}} = 4$ В, $R_{\text{Э}} = 1$ Ом; ВАХ НЭ задана четырьмя точками $\{u_{\text{НЭ}}, i_{\text{НЭ}}\}$: (0, 0); (2, 1); (3, 2); (5, 3).

1. *Аппроксимируем* ВАХ НЭ *степенным многочленом*

$$u(t) = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + a_3 i^3 + \ldots + a_n i^n, \qquad (2.25.4)$$

причем число слагаемых *полинома* (2.25.4) определяется требованием необходимости *прохождения* его *через заданное число точек* ВАХ НЭ.

В примере потребуем, чтобы полином (2.25.4) проходил через заданные четыре точки (u_k, i_k). Тогда получим систему линейных уравнений для определения коэффициентов a_k в (2.25.4):

$$\begin{cases} u_1 = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_1^2 + a_3 i_1^3, \\ u_2 = a_0 + a_1 i_2 + a_2 i_2^2 + a_3 i_2^3, \\ u_3 = a_0 + a_1 i_3 + a_2 i_3^2 + a_3 i_3^3, \\ u_4 = a_0 + a_1 i_4 + a_2 i_4^2 + a_3 i_4^3. \end{cases} \qquad (2.25.5)$$

Однако вместо решения (2.25.5) проще использовать *формулу Лагранжа*, которая определяет уравнение полинома (2.25.4), проходящего через n точек:

$$u = \sum u_k \frac{A(i)}{A_k(i_k)}, \qquad (2.25.6)$$

где $A(i) = (i - i_1)\ldots(i - i_{k-1})(i - i_{k+1})\ldots(i - i_n)$.

В примере находим степенной многочлен (2.25.4) на основании (2.25.6):

$$u = 0 + 2 \cdot \frac{(i-0)(i-2)(i-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} + 3 \cdot \frac{(i-0)(i-1)(i-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} +$$

$$+5 \cdot \frac{(i-0)(i-1)(i-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} = \frac{2i^3 - 9i^2 + 19i}{6},$$

следовательно,

$$u_{\text{НЭ}} = \frac{2}{6} i_{\text{НЭ}}^3 - \frac{9}{6} i_{\text{НЭ}}^2 + \frac{19}{6} i_{\text{НЭ}}. \qquad (2.25.7)$$

2. Составляем *систему* независимых *уравнений Кирхгофа*, т. е. для схемы, изображенной на рис. 2.25.3, *а*, записываем уравнения $u_{\text{ХХ НЭ}} = R_{\text{Э}} i_{\text{НЭ}} + u_{\text{НЭ}}(i_{\text{НЭ}})$; $i_{\text{НЭ}} = i$, или

$$4 = 1 \cdot i + u_{\text{НЭ}}(i). \qquad (2.25.8)$$

3. *Подставляем* в уравнения цепи (2.25.8) *аппроксимированную* ВАХ НЭ (2.25.7), исключаем промежуточные переменные и получаем *нелинейное функциональное уравнение* (НФУ) относительно реакции:

$$\Phi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n = 0, \qquad (2.25.9)$$

где x — искомая реакция.

В примере находим

$$4 = 1 \cdot i + \left(\frac{2}{6} i^3 - \frac{9}{6} i^2 + \frac{19}{6} i \right);$$

тогда НФУ (2.25.9) $\Phi(i) = 0$ можно записать в виде

$$\Phi(i) = 2i^3 - 9t^2 + 25i - 24 = 0. \qquad (2.25.10)$$

4. *Решаем* каким-либо *итерационным методом*, т. е. методом последовательных приближений, НФУ (2.25.9).

В примере для решения НФУ используем *самый быстрый* по сходимости *метод Ньютона—Рафсона*. Расчетная формула метода

$$x_{k+1} = x_k - \Phi(x_k)/\Phi'(x_k). \qquad (2.25.11)$$

Имеем уравнение (2.25.10), откуда находим $\Phi'(i) = 6i^2 - 18i + 25$.

Считаем, что *нулевое приближение* $i_0 = 0$, тогда на первом шаге расчета на основании (2.25.11) находим первое приближение:

$$i_1 = i_0 - \Phi(i_0)/\Phi'(i_0) = 0 - (-24)/25 = 0{,}96.$$

Следующий шаг *итерационного расчета*:

$$i_2 = i_1 - \frac{\Phi(i_1)}{\Phi'(i_0)} = 0{,}96 - \frac{2\cdot 0{,}96^3 - 9\cdot 0{,}96^2 + 25\cdot 0{,}96 - 24}{6\cdot 0{,}96^2 - 18\cdot 0{,}96 + 25} = 0{,}96 + 0{,}45 = 1{,}41.$$

Третье приближение:

$$i_3 = i_2 - \frac{\Phi(i_0)}{\Phi'(i_0)} = 1{,}41 - \frac{2\cdot 1{,}41^3 - 9\cdot 1{,}41^2 + 25\cdot 1{,}41 - 24}{6\cdot 1{,}41^2 - 18\cdot 1{,}41 + 25} = 1{,}49.$$

Полученное значение тока НЭ $i_{\text{НЭ}} = i = 1{,}49$ практически соответствует данным графического расчета в рассматриваемом примере.

2.25.3. Заключение

В результате изучения материала темы необходимо усвоить основные положения расчета R-НЦ графическим методом и методом кусочно-линейных моделей, знать формулу Лагранжа и принцип итерационного решения НФУ методом Ньютона—Рафсона, уметь применять теорему об эквивалентных источниках для упрощения расчета НЦ с одним НЭ.

3. Контрольные вопросы по теории электрических цепей

Введение

Цель данного раздела — помочь студентам вуза при подготовке к экзамену. Раздел содержит набор типовых экзаменационных проверочных вопросов (базисных, требующих практически *мгновенного ответа*) по курсу теории цепей.

В первой части набора вопросов по каждой теме (до знака «***») приведены наиболее распространенные, простейшие проверочные вопросы — так называемые *«азы» теории цепей.* Незнание ответа на любой из этих вопросов практически сразу приводит к неудаче на экзамене.

3.1. Основные понятия и законы теории цепей

1. Что такое согласованная полярность? Какая полярность у источников и какая — у пассивных элементов?
2. Что такое КЗ и ХХ?
3. Как записать ВАХ *R*-, *L*-, *C*-элементов?
4. Каковы свойства последовательного и параллельного соединений ДП?
5. Поясните запись уравнений ЗТК и ЗНК.
6. Что такое ИН и ИТ?

***

7. Что такое ток, напряжение, мощность ДП?
8. Что такое баланс мощностей в цепи?
9. Сколько независимых уравнений можно составить по ЗТК и ЗНК?
10. Что такое контур, ячейка, узел, устранимый узел?
11. Сформулируйте следствия, вытекающие из основных формулировок ЗТК и ЗНК.
12. Что такое дуальные элементы и цепи?

3.2. Анализ резистивных цепей

1. К зажимам источника (напряжения или тока) подключен *R*-элемент. Можно ли считать, что они соединены последовательно? Параллельно? Найдите напряжение и ток каждого элемента.
2. Запишите ФДТ и ФДН.
3. Последовательно (параллельно) соединены элементы R_1 и R_2 (R и ХХ, R и КЗ). Найдите входное сопротивление.
4. Как рассчитывают цепь МН?
5. Что такое МПВ?

6. Как выполняется эквивалентное преобразование «ИН – ИТ»?
7. Как записывают уравнения МКТ в цепи с ИН (с ИТ)?
8. Как записывают уравнения МУН в цепи с ИТ (с ИН)?

* * *

9. ИН $U_1 = 10$ и резистор $R_2 = 2$ соединены параллельно. Найдите мощности p_1 и p_2, если ток в цепи направлен по часовой стрелке (против часовой стрелки).
10. Поясните ФДТ и ФДН, записанные с использованием сопротивлений (проводимостей) цепи.
11. Чем отличается входное сопротивление от эквивалентного?
12. Что такое теорема замещения?
13. Как записывают уравнения МУН, если в цепи содержится один элементарно непреобразуемый ИН (несколько ИН, имеющих общий узел)?
14. Что такое эквивалентное преобразование участка цепи?
15. Как выглядит эквивалентная схема МЭИН (МЭИТ)? Как определяют эквивалентное сопротивление $R_Э$? Что такое выходное (внутреннее) сопротивление схемы?

3.3. Анализ переходных процессов в линейных цепях во временной области при постоянных воздействиях

1. Что такое воздействие и реакция, вход и выход цепи, входной и выходной сигналы?
2. Что такое принципы пропорциональности, дифференцируемости, наложения?
3. Чему эквивалентен замкнутый (разомкнутый) идеальный ключ?
4. Что такое свободный режим в цепи и свободная составляющая решения?
5. Почему у корней ХП цепи $\mathrm{Re}\, p_k < 0$?
6. Как определить $R_Э$ в цепях 1-го порядка в свободном режиме?
7. Что такое принципы непрерывности, законы коммутации, независимые начальные условия?
8. Назовите характерные значения экспоненты $\exp(-t/\tau)$ в моменты $t = 0$, τ, 2τ, 3τ, ∞.
9. Постройте график $u(t) = 2 + 3\exp(-10t)$ для $t > 0$.
10. Что такое уравнения состояния? Как они выглядят?
11. Цепь 6-го порядка имеет корни ХП: $p_1 = -5$; $p_2 = -6$; $p_{3,4} = -3 \pm j4$; $p_{5,6} = -2$. Запишите свободную составляющую $f_{2св}(t)$ в общем виде.

12. Что такое апериодический режим в последовательной *RLC*-цепи? Колебательный? Критический? Незатухающий колебательный?
13. Как выглядит эквивалентная схема для расчета установившегося режима ($t \to \infty$) при постоянных воздействиях?
14. Когда в эквивалентной схеме для момента $t = 0+$ заменяют *L*-элемент на ХХ, а *C*-элемент — на КЗ?

* * *

15. Что такое переходный процесс в цепи?
16. Как выглядит схема свободного режима?
17. Почему частное решение неоднородного дифференциального уравнения называют вынужденной составляющей $f_{2\text{выч}}$?
18. Что такое установившийся режим в цепи?
19. Почему расчет установившегося режима условно обозначают «$t \to \infty$»?
20. Как определить порядок цепи?
21. Как составляют эквивалентную схему цепи для момента $t = 0+$?
22. Как найти постоянную интегрирования в цепи 1-го порядка?
23. Какова практическая длительность переходного процесса в цепи?
24. Как составить уравнения состояния? Сформулируйте основные этапы процедуры.
25. Составьте уравнения состояния последовательной *RLC*-цепи с ИН.
26. Найдите корни ХП параллельной *LC*-цепи в свободном режиме; запишите $f_{\text{св}}(t)$. Почему здесь $\operatorname{Re} p_k = 0$?
27. Как по уравнениям состояния найти начальные значения производных переменных состояния для момента $t = 0+$?
28. Как по уравнениям состояния найти корни ХП?
29. Как по уравнениям состояния найти установившиеся значения переменных состояния при постоянных воздействиях?

3.4. Применение обобщенных функций для анализа переходных процессов при воздействиях произвольной формы

1. Что такое единичная ступенчатая функция $\delta_1(t)$?
2. Что такое единичная импульсная функция (дельта-функция) $\delta(t)$?
3. Как связаны $\delta(t)$ и $\delta_1(t)$?
4. Чему равно произведение $f(t)\delta_1(t-6)$ для любых t?

5. Что «хотят сказать», когда функцию $f(t)$ умножают на $\delta_1(t)$?
6. Почему формула $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$ называется свойством выборки дельта-функции?
7. Что такое ПХ $h_1(t)$ и как ее найти?
8. Что такое ИХ $h(t)$ и как ее найти?
9. ПХ $h_1(t) = (5 - 2\exp(-4t))\delta_1(t)$. Найдите ИХ и постройте графики $h_1(t)$, $h(t)$ для любых t.
10. Почему запись $h_1(t) = 5 - 2\exp(-4t)$ является некорректной?
11. Что такое особый случай коммутации? Приведите простейший пример.

* * *

12. Чем различаются графики функций $f_1(t) = 10t\delta_1(t-2)$ и $f_2(t) = 10(t-2)\delta_1(t-2)$?
13. Почему формула $f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$ называется фильтрующим свойством дельта-функции?
14. Что такое функция единичного наклона $\delta_2(t)$ и как она связана с $\delta_1(t)$ и $\delta(t)$?
15. Почему при расчете ПХ независимые начальные условия равны нулю? Как это коррелирует с видом воздействия?
16. Чему равны $f_{вх}(t)$ и $f_{вых}(t)$ при расчете ПХ и ИХ?
17. Почему ИХ содержит слагаемое $h_1(0+)\delta(t)$? Когда оно равно нулю?
18. Как найти характеристику $h_2(t)$?
19. Как найти реакцию при воздействии произвольной формы?
20. Как описать входной сигнал кусочно-линейной формы (рекомендуется использовать метод двукратного дифференцирования)?
21. Как записывается реакция в случае воздействия кусочно-линейной формы?
22. Как определить в записи $h_2(t)$ свободную и вынужденную составляющие решения?

3.5. Анализ линейных цепей при синусоидальных и экспоненциальных воздействиях

1. Что такое мгновенное, амплитудное и действующее значения сигналов синусоидальной формы, а также их частота и период?
2. Чему равны действующее и амплитудное значения напряжения в промышленной сети? Чему в такой сети равна частота?
3. Как выглядят графики функций $u = 10\cos\omega t$, $u = 10\cos(\omega t - 135°)$, $u = 10\cos(\omega t + 135°)$?
4. Что такое комплексная амплитуда $\dot{U}_m$ и как по ней найти $U_m, U, u(t)$?
5. Как найти $i(t)$, если $\dot{I} = -5 + j5$; $\omega = 30$?

6. Как записать комплексные сопротивления R-, L-, C-элементов?
7. Запишите комплексные сопротивления элементов, если $|Z_R| = |Z_L| = |Z_C| = 10$.
8. Что определяет мнемоническое правило *ULICU*? Как строят ВД простых цепей?
9. Что такое ПРН в последовательной RLC-цепи? Почему при этом участок $LC \equiv$ КЗ?
10. Что такое ПРТ в параллельной RLC-цепи? Почему при этом участок $LC \equiv$ ХХ?
11. Запишите формулы P, P_Q, P_S, $\tilde{P}_S$ и дайте им пояснения.
12. Почему у пассивного ДП $P \geq 0$; $|\varphi| \leq 90°$; $r = \mathrm{Re}\, Z \geq 0$?
13. Что такое резонанс в ДП произвольной структуры?
14. Что такое обобщенная частотная характеристика $H(j\omega)$?
15. Как получить экспериментально АЧХ?
16. Как получить экспериментально ФЧХ?
17. Как проконтролировать АЧХ при $\omega \to 0$ и $\omega \to \infty$ по схеме?
18. Какие виды нормировки вы знаете и что она дает?
19. Как выглядят АЧХ идеальных ФНЧ, ФВЧ, ППФ, ПЗФ?
20. Приведите примеры схем ФНЧ, ППФ, ПЗФ и ФВЧ и дайте трактовку их АЧХ на характерных частотах.
21. Как обычно определяют ПП фильтра?

* * *

22. Почему запись $u = 220\cos(314t - 135°)$ некорректна?
23. Как разметить ось абсцисс графика $u = 220\sqrt{2}\cos(314t - 150°)$ в секундах, градусах, радианах?
24. Что такое комплексное действующее значение $\dot{U}$? Как по $\dot{U}$ найти U_m, $\dot{U}_m$, U, $u(t)$?
25. Что такое МКА?
26. Что такое закон Ома в комплексной форме? В модулях?
27. Постройте ВД последовательной RLC-цепи.
28. Постройте ВД параллельной RLC-цепи.
29. Что определяет угол φ? Когда пассивный ДП имеет индуктивный характер? Емкостный? Когда в двухполюснике наблюдается резонанс? Поясните на примере $Z_{вх}$ и ВД RLC-цепи.
30. Как записывается баланс мощностей в пассивном ДП?
31. Перечислите признаки резонанса в пассивном ДП.
32. Перечислите возможные способы настройки последовательной RLC-цепи в резонанс.
33. Что такое АФХ цепи?

34. Чему равна ЧХ цепи, если реакцией является ток входного ИН?
35. Какие виды ЧХ вы знаете?
36. Как выглядит АЧХ последовательной *RLC*-цепи? Как проконтролировать ее при $\omega \to 0$, $\omega \to \infty$, $\omega = 1/\sqrt{LC}$?
37. Почему при расчете переходных процессов в цепи при синусоидальных воздействиях нельзя при вычислении независимых НУ заменять *L*-элемент на КЗ, а *C*-элемент — на ХХ (при $t < 0$)?
38. Почему можно записывать $i_L(0-) = \mathrm{Re}\,\dot{I}_{mL}$, $u_C(0-) = \mathrm{Re}\dot{U}_{mC}$?
39. Как разметить ось времени при качественном построении графика $u = 10\cos(3t - 90°) + 5\exp(-0{,}5\,t)$?
40. Почему солдатам не разрешается ходить в ногу по мосту? Поясните это на примере подключения *LC*-цепи к ИН резонансной частоты.
41. Почему идеальный фильтр реализовать невозможно?
42. Почему граничную частоту ПП фильтра называют частотой среза?
43. Как связана ПП с добротностью *RLC*-контура?
44. Как выглядит условие передачи максимума мощности к нагрузке?

3.6. Применение преобразования Лапласа для анализа переходных процессов в цепях

1. Какие формулы из таблицы преобразования Лапласа вы знаете?
2. Как найти сигнал $f(t)$, если его изображение $F(s) = 10/[(s+2)(s+4)]$?
3. Как найти сигнал $f(t)$, если его изображение $F(s) = 10e^{-6s}/[s(s+2)]$?
4. Оригинал $f(t)$ — это прямоугольный импульс высотой 10, действующий в интервале от 0 до $t = 2$. Как найти $F(s)$?
5. Как выглядит ОСЗ *L*-элемента?
6. Как выглядит ОСЗ *C*-элемента?
7. Что такое ПФ цепи? Как, зная ПФ, найти $h(t)$, $h_1(t)$, $H(j\omega)$?
8. $H(s) = 10(s+1)/(s+2)$. Найдите характеристики $h(t)$, $h_1(t)$ и постройте их графики.
9. Как найти изображение сигнала кусочно-линейной формы методом двойного дифференцирования?

* * *

10. $F(s) = 10/(s+2)$. Какая форма записи оригинала является корректной: $f(t) = 10\exp(-2t)$ или $f(t) = 10\exp(-2t)\delta_1(t)$? Почему?
11. Как записываются следующие теоремы преобразования Лапласа: дифференцирования, интегрирования, запаздывания, о начальном значении оригинала?

12. В каких задачах оригинал может содержать дельта-функцию?
13. Оригинал $f(t)$ — это импульс в форме положительной полуволны (полупериода) синусоиды амплитудой 10, действующей в интервале от 0 до $t = \pi/2$. Как найти $F(s)$?
14. $F(s) = 10/[s^2(s+2)]$. Как найти $f(t)$?
15. $F(s) = 10/[s(s+2)^2]$. Как найти $f(t)$?
16. Обоснуйте дуальность ОСЗ L- и C-элементов.
17. Какую информацию содержит знаменатель ПФ цепи?
18. Изображение реакции в цепи 6-го порядка $F(s) = 60/[(s+5)(s+6)(s+2)^2 \times (s^2+6s+25)]$. Как связана форма сигнала $f(t)$ с полюсами его изображения?

3.7. Анализ установившихся периодических режимов в цепи

1. Что такое РФ и какие сигналы он описывает?
2. Как найти постоянную составляющую (нулевую гармонику) РФ? Что она характеризует?
3. Как найти частоту и период 1-й (основной) гармоники периодического сигнала? Чем принципиально отличается 1-я гармоника РФ от 3-й?
4. Почему спектр периодического сигнала называется линейчатым и дискретным?
5. Как выглядит формула действующего значения периодического сигнала?
6. Как найти РФ на выходе цепи в УПР?

* * *

7. Каковы особенности РФ симметричных сигналов?
8. Как найти коэффициенты РФ периодического сигнала?
9. Что такое спектр периодического сигнала и как он выглядит? Каков интервал между гармониками спектра?
10. Как выглядит формула активной мощности пассивного ДП в УПР?
11. Является ли постоянный сигнал периодическим? Чему равны его мгновенное, среднее, амплитудное и действующее значения? Как выглядит его спектр?
12. Является ли синусоидальный сигнал периодическим? Чему равны его мгновенное, среднее, амплитудное и действующее значения? Как выглядит его спектр?

3.8. Спектральный метод анализа цепей

1. Как найти спектр $F(j\omega)$ апериодического сигнала $f(t)$?
2. Чему равно значение спектра на нулевой частоте $F(j0)$?

3. Какие виды спектральных характеристик вы знаете?
4. Что такое ширина спектра? Какие ее критерии вы знаете?
5. Поясните, как связана ширина спектра с длительностью и крутизной сигнала.
6. Как выглядит спектр дельта-функции и чему равна его ширина?
7. Как найти спектр сигнала на выходе цепи?
8. Спектром какого сигнала являются ЧХ цепи?
9. Что определяют значения АЧХ цепи при $\omega = 0$ и $\omega \to \infty$?
10. Что такое идеальная неискажающая цепь? Каковы ее временные и частотные характеристики?
11. Что такое идеальная дифференцирующая (интегрирующая) цепь? Каковы ее временные и частотные характеристики?
12. Как выглядят схемы дифференцирующей и интегрирующей *RC*-цепей?
13. Какие выводы можно сделать о реакции из сравнения спектра входного сигнала с ЧХ цепи?
14. Что такое амплитудно-модулированный сигнал, видеоимпульс, радиоимпульс, несущая? Какова связь между спектрами видеоимпульса и радиоимпульса?

* * *

15. Какие сигналы имеют спектр?
16. Как связано одностороннее преобразование Фурье с преобразованием Лапласа?
17. Что такое спектр $F(j\omega)$?
18. Как связан спектр одиночного импульса со спектром периодической последовательности импульсов?
19. Чем различаются спектры кусочно-постоянных, кусочно-линейных и кусочно-параболических сигналов?
20. Как отыскать сигнал, если его изображение $F(s) = 10/(s+2)^{3/4}$?
21. Почему невозможно реализовать идеальный ФНЧ? Что такое условие физической реализуемости (осуществимости)?
22. Чему равна ширина спектра прямоугольного и треугольного импульсов, исходя из критерия первого лепестка? В чем некорректность этой оценки?
23. В чем сходство и различие между спектральными и частотными характеристиками?
24. Какова четность спектральных (частотных) характеристик?
25. К какому типу фильтров относится дифференцирующая (интегрирующая) *RC*-цепь?
26. Спектры каких сигналов не существуют?

27. Поясните идею радиопередачи на основе связи спектров видео- и радиоимпульсов.
28. Каким сигналам приписывается нулевая частота? А чему условно приписывается бесконечная частота?

3.9. Цепи с взаимной индукцией

1. Запишите формулу напряжения на индуктивно связанной катушке в t-области (в установившемся синусоидальном режиме).
2. Что такое взаимная индуктивность?
3. Что такое согласное (встречное) включение индуктивно связаных катушек?
4. Как определить вид включения идуктивно связанных катушек?
5. Каковы свойства идеального трансформатора?
6. Охарактеризуйте элементы схемы трансформатора.
7. Что такое входное и вносимое сопротивления трансформатора?
8. Что такое однополярные выводы индуктивно связанных катушек?

* * *

9. Что такое совершенная магнитная связь, индуктивность рассеивания, коэффициент связи?
10. Что такое эквивалентное исключение индуктивной связи?
11. Почему эквивалентное исключение индуктивной связи не зависит от вида включения индуктивно связанных катушек?
12. Что такое коэффициент трансформации?
13. Почему реальный трансформатор «не работает» на нулевой частоте?
14. Как приблизить реальный трансформатор к идеальному?
15. Как на практике найти взаимную индуктивность?
16. Каковы особенности ВД индуктивно связанных цепей?

3.10. Трехфазные цепи

1. Что такое ТФЦ? Симметричный источник? Симметричная нагрузка?
2. Как выглядит ВД симметричного трехфазного источника?
3. Что такое линейные и фазные напряжения, линейные и фазные токи?
4. Как связаны линейные и фазные напряжения ТФЦ при соединении звездой?
5. Зачем нужен узловой провод в ТФЦ?

* * *

6. Что такое прямая (обратная) последовательность фаз симметричных трехфазных источников?

7. Как связаны линейные и фазные токи (напряжения) при соединении ТФЦ треугольником?
8. Почему ВД ТФЦ называют потенциальными? Топографическими?
9. Как принято направлять токи в ТФЦ?
10. Как производится расчет ТФЦ?

3.11. Четырехполюсники и активные цепи

1. Как записываются z-, y- и a-формы уравнений ЧП?
2. Как найти параметры ЧП методом ХХ – КЗ?
3. Как выглядят условия обратимости и симметрии пассивного ЧП?
4. Что такое каскадное соединение ЧП?
5. Что такое согласованная нагрузка и характеристическое сопротивление симметричного ЧП?
6. Что такое вторичные параметры симметричного ЧП?
7. Какие типы ЗИ вы знаете?
8. Как выглядит схема замещения необратимого ЧП, содержащая два ЗИ?
9. Что такое ОУ? Каковы его свойства?

* * *

10. Как записываются уравнения для нагрузки ЧП?
11. Как вывести ПФ ЧП?
12. Как пересчитать параметры ЧП (для иной формы уравнений)?
13. Что такое эквивалентные Т- и П-схемы ЧП? Когда они используются?
14. Как найти характеристическое сопротивление симметричного ЧП?
15. Что такое активный элемент цепи?
16. Каковы особенности расчета цепей с ЗИ?
17. Каковы особенности расчета цепей с ОУ?
18. Как выглядит формула, реализуемая решающей схемой на ОУ?

3.12. Основы теории фильтров

1. Каково основное свойство $Z_{LC}(s)$?
2. Что такое нули и полюсы дробно-рациональной функции?
3. Чему равно сопротивление $Z_{LC}(s)$ на нулевой и бесконечной частотах?
4. Что такое классический симметричный фильтр?
5. Каковы условия работы классического симметричного фильтра в ПП?
6. Что такое классический фильтр типа «k»?

7. Как спроектировать ФВЧ по ФНЧ-прототипу?
8. Что такое фильтр Баттерворта? Каковы его нормированные сопротивление нагрузки и частота среза?
9. Приведите примеры полиномов Баттерворта.
10. Как выглядят АЧХ фильтров Баттерворта и Чебышева?
11. Что такое фильтр Чебышева?
12. Как проектируют фильтры Баттерворта?

* * *

13. Какими свойствами обладают минимые ЧХ реактивных ДП?
14. Почему у классического симметричного фильтра в ПП $z_C = \mathrm{Re} z_C$, а сопротивления ХХ и КЗ имеют различный характер реактивности?
15. Как выглядит АЧХ классического симметричного фильтра в ПП?
16. Как выглядят схемы классических симметричных фильтров типа k?
17. Каковы недостатки классических фильтров?
18. Как спроектировать ППФ (ПЗФ) по ФНЧ-прототипу?
19. Как учитывается сопротивление нагрузки при проектировании фильтров методом преобразования частоты?
20. Что такое полиномиальные фильтры?
21. Чем отличается фильтр Баттерворта от фильтров иных типов?
22. Чем отличается фильтр Чебышева от фильтров иных типов?
23. Что такое полиномы Чебышева? В чем их достоинства?
24. Как проектируют фильтры Чебышева?

3.13. Начала синтеза цепей

1. Каково основное свойство входного сопротивления (проводимости) LC-ДП?
2. Каковы условия реализуемости $Z_{\text{вх}}(s)$ LC-двухполюсником?
3. Как выглядят составляющие при реализации $Z_{\text{вх}}(s)$ схемой?
4. Какова формула соответствия входных сопротивлений LC- и RC-двухполюсников?
5. Каково условие реализуемости $Z_{\text{вх}}(s)$ RC-двухполюсником?
6. Какова формула простейшей решающей схемы на ОУ?
7. Как реализовать ПФ с отрицательными нулями и полюсами, использовав решающие схемы на ОУ?

* * *

8. Почему степень числителя $Z_{LC}(s)$ на единицу отличается от степени знаменателя?
9. Как выглядят составляющие при реализации $Y_{LC}(s)$ схемой?

10. Какие варианты схемной реализации $Z_{LC}(s)$ вы знаете?
11. Что такое частично выделенные полюсы при реализации $Z_{LC}(s)$?
12. Как выглядит формула соответствия входных проводимостей LC- и RC-двухполюсников аналогичной структуры?
13. Как реализуются уравнения состояния схемами на ОУ?
14. Как реализовать произвольную ПФ схемами по ОУ?

3.14. Цепи с распределенными параметрами

1. Чем различаются цепи с сосредоточенными и с распределенными параметрами?
2. Какими ЧП являются ДЛ?
3. Как трактуется решение уравнений ДЛ с использованием падающей и отраженной волн?
4. Что такое волновое сопротивление и коэффициент распространения ДЛ?
5. Что такое согласованный режим работы ДЛ?
6. Что такое линия без потерь?
7. Что такое фазовая скорость волны в ДЛ?
8. Что такое длина волны в ДЛ?
9. Каковы свойства отрезка ДЛ в четверть длины волны?

* * *

10. Приведите примеры цепей с распределенными параметрами.
11. Что такое телеграфное уравнение ДЛ?
12. Как трактуется решение уравнений ДЛ, записанное в гиперболической форме?
13. Что такое линия без искажения? Без отражения?
14. Что такое коэффициент отражения?
15. Искажает ли ДЛ в согласованном режиме?
16. Чему равен коэффициент отражения ДЛ при ХХ (или КЗ) нагрузки?
17. Что такое многократное отражение в ДЛ?
18. Что такое стоячие волны в ДЛ?

3.15. Дискретные цепи и сигналы

1. Чем дискретный сигнал отличается от непрерывного?
2. Сформулируйте теорему дискретизации (теорему Котельникова).
3. Как выглядит спектр дискретного сигнала в сравнении со спектром непрерывного сигнала?
4. Почему фильтр Котельникова — это идеальный ФНЧ?

5. Каковы элементы схем линейных ДЦ?
6. Как осуществляется численный расчет ДЦ?
7. Что такое ПХ дискретной цепи?
8. Что такое ИХ дискретной цепи и как она связана с ПХ?
9. Как записывается z-преобразование решетчатых функций $\delta_0(nT)$, $a^n\delta_1(nT)$, $na^n\delta_1(nT)$?
10. Как записывается теорема запаздывания z-преобразования и как ее можно использовать для отыскания оригинала?
11. Как записывается теорема разложения z-преобразования?
12. Что такое ПФ ДЦ и как она связана с ИХ, ПХ и РУ ДЦ?
13. Что такое предначальные условия при расчете ДЦ?
14. Как составить схему ДЦ по ее РУ?

* * *

15. Каковы достоинства дискретных сигналов?
16. В чем состоит идеализация записи дискретных сигналов?
17. В чем заключаются некорректные моменты теоремы Котельникова?
18. Что такое дискретная последовательность (решетчатая функция)?
19. Почему уравнения ДЦ часто называют разностными уравнениями?
20. Как выглядит формула прямого z-преобразования?
21. Как выглядят свободная и вынужденная составляющие решения РУ дискретной цепи?
22. Что такое ряд Лорана применительно к формуле прямого z-преобразования?
23. Как спроектировать ДЦ методом полного соответствия ПХ дискретной и аналоговой цепей?
24. Что такое численное решение уравнений состояния на основе билинейного преобразования?
25. Что такое численное решение уравнений состояния на основе алгоритма Эйлера?
26. Как найти ПФ ДЦ, зная ПФ исходной непрерывной цепи?
27. Какие способы определения интервала дискретизации вы знаете?

3.16. Нелинейные цепи

1. Что такое НЭ? НЦ? Как обозначают НЭ?
2. Каковы общие свойства НЦ?

3. В чем достоинства и недостатки графического метода расчета нелинейных R-цепей?
4. В чем сущность формулы Лагранжа при расчете R-НЦ?
5. Что такое итерационные методы решения НФУ?
6. Что такое кусочно-линейная модель R-НЭ?
7. В чем состоит идеализация диодных характеристик?
8. Что такое РТ?

* * *

9. Что такое статические и дифференциальные параметры НЭ?
10. Каковы признаки классификации НЭ и НЦ?
11. Когда можно использовать МЭИ при расчете НЦ?
12. Что такое метод трех точек при расчете R-НЦ?
13. Охарактеризуйте метод Ньютона–Рафсона при решении НФУ.
14. Что такое кусочно-линейные диодные модели?
15. В чем особенность уравнений состояния при расчете НЦ?
16. Как рассчитывать переходные процессы в НЦ методом кусочно-линейной аппроксимации?
17. В чем сущность метода гармонического баланса?

3.17. Начала синтеза пассивных четырехполюсников

1. Почему параметр z_{22} LC-ЧП удовлетворяет основному свойству $Z_{LC}(s)$?
2. Почему знаменатели $z_{12}(s)$ и $z_{22}(s)$ одинаковы?
3. Что такое частные полюсы $z_{22}(s)$ и $y_{22}(s)$?
4. Чем определяются нули ПФ ЧП?
5. Что такое частичное выделение полюса $z(s)$?
6. Что такое условие Фиалкова?
7. Как определить параметры LC-ЧП по заданной ПФ $H_U^{XX}(s) = -y_{12}/y_{22}$?
8. Как формулируется условие реализуемости LC-ЧП?
9. Как реализуются частные полюсы $y_{22}(s)$ и $z_{22}(s)$?
10. Почему при реализации $y_{22}(s)$ на полюсы $y_{12}(s)$ «не обращают внимания»?
11. Как реализуются нули y_{12}, совпадающие с нулями остатка от реализации y_{22}?
12. Почему при совпадении нуля остатка с нулем ПФ этот остаток необходимо обратить?
13. Почему нули и полюсы ПФ RC-ЧП должны быть отрицательными?

14. Почему параметр y_{22} RC-ЧП должен удовлетворять основному свойству $Y_{RC}(s)$?
15. Как определить параметры RC-ЧП по заданной ПФ $H_I^{\text{КЗ}}(s) = z_{12}/z_{22}$?

* * *

16. Как выглядят ПФ пассивного ЧП при нормированной нагрузке?
17. Как маркируют элементы ЧП лестничной структуры?
18. Почему полюсы продольных сопротивлений $Z_{1k}(s)$ и поперечных проводимостей $Y_{0k}(s)$ – это нули ПФ ЧП?
19. Почему частично реализованный полюс не является нулем ПФ ЧП лестничной структуры?
20. Чем должна заканчиваться реализация ЧП лестничной структуры?
21. Как определить параметры LC-ЧП по заданной ПФ $H_U(s) = -y_{12}/(1 + y_{22})$?
22. Как реализуются нули y_{12}, не совпадающие с нулями остатка от реализации y_{22}?
23. Поясните, как при частичной реализации полюсов $Y(s) = (s^2 + \omega_i^2)/s$ можно получить нуль остатка на любой частоте?
24. Почему при синтезе лестничного ЧП остатки от реализации y_{22} (или z_{22}) обращают?
25. Какими должны быть нули ПФ LC-ЧП лестничной структуры?
26. Какими должны быть нули ПФ RC-ЧП лестничной структуры?
27. Как определить параметры RC-ЧП по заданной ПФ $H_I(s) = z_{12}/(1 + z_{22})$?
28. Как используется условие Фиалкова при реализации лестничных ЧП?

3.18. Связанные контуры с большой добротностью

1. Как выглядят схемы связанных контуров с индуктивной, емкостной и трансформаторной связью?
2. Какие виды резонанса в связанных контурах вы знаете?
3. Как наиболее просто реализовать полный резонанс в связанных контурах?
4. Каково условие передачи максимума мощности в нагрузку в связанных контурах?
5. Как выглядят ЧХ связанных контуров?
6. Охарактеризуйте фильтрующие свойства связанных контуров.
7. Что такое обобщенная расстройка в связанных контурах?

* * *

8. Что такое частный резонанс в связанных контурах и как он реализуется?

9. Что такое индивидуальный резонанс в связанных контурах и как он реализуется?
10. Что такое сложный резонанс в связанных контурах и как он реализуется?
11. Что такое оптимальный резонанс в связанных контурах и как он реализуется?
12. Какой вид ЧХ связанных контуров считается наилучшим?
13. Что такое обобщенный коэффициент связи в связанных контурах?
14. Как проектируют связанные контуры?

3.19. Основы машинно-ориентированных методов расчета цепей

1. Что такое матрица соединений? Структурная матрица? Матрица инциденций?
2. Каковы основные свойства структурной матрицы?
3. Как по независимой структурной матрице восстановить полную?
4. Как выглядят упорядоченные матричные уравнения цепи?
5. Что такое главное сечение? Как составить матрицу главных сечений?
6. Что такое главный контур? Как составить матрицу главных контуров?
7. Как записать фундаментальную матрицу цепи?
8. Как записать в матричной форме уравнения закона Ома?

***

9. Что нужно знать о цепи для составления структурной матрицы?
10. Как записываются уравнения ЗНК с использованием структурной матрицы?
11. Что такое ориентированный граф цепи?
12. Как нумеруются ветви графа цепи? Что такое дерево графа? Хорда?
13. Почему уравнения для главных сечений независимы?
14. Почему независимы уравнения для главных контуров?
15. Как связаны матрицы главных сечений и главных контуров?
16. Почему в уравнениях ЗТК вытекающие из узла токи учитываются с «плюсом»?

3.20. Основы теории чувствительности цепей к изменению параметров

1. Сформулируйте теорему компенсации.
2. Как найти изменение реакций на основе теоремы компенсации?

3. Что такое присоединенная цепь?
4. Что такое функция абсолютной чувствительности?
5. Как составить ПЦ для определения ФАЧ?
6. Как, зная ФАЧ, приближенно оценить изменение реакции?
7. Как составить ПЦ, дифференцируя уравнения цепи?
8. Как формулируется теорема Теледжена?
9. Как составить ПЦ для расчета ФАЧ на основании теоремы Теледжена?
10. В чем особенности расчета ФАЧ по ПЦ, составленным по теореме компенсации и по теореме Теледжена?
11. Как составляется ПЦ по теореме Теледжена, если реакцией является выходное напряжение?
12. Как составляется ПЦ по теореме Теледжена, если реакцией является выходной ток?

* * *

13. Как формулируется дуальная теорема компенсации?
14. Почему дополнительный источник в теореме компенсации называют компенсационным?
15. Что произойдет, если компенсационный источник включить в исходную цепь, изменив его полярность?
16. Эквивалентны ли ПЦ, составленные по основной и дуальной теоремам компенсации?
17. Как выглядит дуальная ПЦ для определения ФАЧ?
18. Как связаны ФАЧ к изменению сопротивления и проводимости заданного элемента цепи?
19. Какие примеры применения теоремы Теледжена вы можете привести?
20. Что такое уравнение чувствительности?
21. В чем различия ПЦ, используемых для расчета ФАЧ?
22. Как найти изменение реакций, если одно из сопротивлений цепи изменится в k раз?
23. Как найти изменение реакций, если все сопротивления цепи изменятся в k раз?
24. Как выглядят формулы для расчета ФАЧ на основе теоремы Теледжена?

3.21. Релейные автоколебательные цепи

1. Что такое релейные элементы и как выглядят их характеристики?
2. Как записываются условия переключения (срабатывания) идеального реле?

3. Как записываются условия переключения (срабатывания) РЭ с гистерезисной характеристикой?
4. Как записывается изображение периодического воздействия?
5. По каким параметрам ПФ определяют свободную составляющую решения?
6. Как найти изображение установившейся периодической реакции в релейной автоколебательной цепи?

* * *

7. Где ранее использовался метод выделения свободной составляющей?
8. Как должны выглядеть свободная и вынужденная составляющие решения в t-области? В s-области?
9. Когда в разложении $H_1(s)$ по полюсам сумма вычетов (сумма коэффициентов A_k) равна нулю?
10. Как выглядит изображение периодической реакции в релейной автоколебательной цепи?
11. Почему в изображении установившейся периодической реакции составляющие с сомножителем $\exp(-sT/2)$ обычно можно опустить?
12. Что такое порог срабатывания РЭ?

3.22. Магнитные цепи при постоянных магнитных потоках

1. Что такое МЦ?
2. Почему МЦ является нелинейной?
3. Как выглядят характеристики ферромагнитных материалов, составляющих МЦ?
4. Как определяют направление МП по правилу правого винта?
5. Что такое закон полного тока?
6. Как связаны магнитная индукция и напряженность магнитного поля?
7. Какие допущения используются при расчете МЦ при постоянных магнитных потоках?
8. В чем особенность расчета неразветвленной МЦ?

* * *

9. Приведите примеры однородных, неразветвленных, разветвленных, неоднородных МЦ.
10. Как выглядят характеристики воздушных зазоров МЦ?
11. Что такое магнитомягкие и магнитотвердые материалы?
12. В чем причины гистерезиса в ферромагнитных материалах?

13. Чем различаются индуктивность катушки с ферромагнитным сердечником и индуктивность катушки с «воздушным сердечником»?
14. В чем аналогия расчета МЦ и R-НЦ?
15. В чем особенность расчета разветвленных МЦ?
16. В чем особенность расчета МЦ с постоянным магнитом?
17. Что такое МП на участке НЦ?

4. Олимпиадные задачи по теории электрических цепей

Введение

Этот раздел посвящен рассмотрению разнообразных вариантов олимпиадных задач по темам курса теории цепей, которые чаще всего использовались как на внутривузовских и открытых олимпиадах СПбГЭТУ «ЛЭТИ», так и на межвузовских (региональных, городских) олимпиадах в течение последних 10 лет.

Некоторые из задач сопровождаются ответами и краткими методическими указаниями по выбору возможной идеи решения.

Большинство олимпиадных задач было предложено доцентом кафедры ТОЭ СПбГЭТУ «ЛЭТИ» Н. И. Дмоховской. Ежегодные олимпиады по ТОЭ позволяют выявить научный и творческий потенциал студентов уже на младших курсах.

4.1. Анализ резистивных цепей

В приведенных задачах (кроме варианта 14) воздействия предполагаются постоянными.

1. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 2$; 214 — R_2; 321 — ИН $u_3 = 2$; 423 — R_4; 534 — R_5; 643 — ИТ i_6. При токах $i_1 = 1{,}5$ и $i_6 = 1$ мощность $P_5 = 4{,}5$; при токах $i_1 = 1{,}25$ и $i_6 = 0$ мощность $P_1 = -5$. Найти R_2, R_4, R_5. *Ответ:* $R_2 = 2$; $R_4 = 4$; $R_5 = 2$.
2. Цепь: 115 — ИН u_1; 212 — $К_2$; 325 — $R_3 = R$; 423 — $R_4 = R$; 535 — $R_5 = R$; 643 — $К_6$; 745 — ИН u_7. При замкнутом ключе $К_2$ и разомкнутом $К_6$ мощность $P = P_3 + + P_4 + + P_5 = 60$; при разомкнутом ключе $К_2$ и замкнутом $К_6$ мощность $P = 15$. Найти P при замкнутых ключах $К_2$, $К_6$. *Ответ:* $P = 60$.
3. Цепь: 112 — $R_1 = 6$; 223 — $R_2 = 6$; 324 — R_3; 445 — ИН $u_4 = 4$; 515 — $R_5 = 2$; 653 — — $R_6 = 2$; 713 — ИТ i_7. В сопротивлении R_3 выделяется максимальная мощность $P_{3\,max}$. Найти R_3, P_{3max}. *Ответ:* $R_3 = 4$; $P_{3max} = 1$.
4. Цепь: 113 — ИН u_1; 212 — $R_2 = R$; 323 — $R_3 = R$; 432 — ИТ i_4; 523 — $R_5 = R$; мощности элементов $P_1 + P_4 = -1800$ и $P_3 = 900$. Найти мощность P_2 в исходной цепи и в цепи, в которой источники напряжения u_1 и тока i_4 переставлены местами, при условии, что мощность источника напряжения u_1 не изменилась. *Ответ:* $P_2 = 0$ — в исходной цепи; $P_2 = 3600$ — в преобразованной цепи.
5. Цепь: 114 — ИН u_1; 212 — R_2; 324 — ИТ i_3; 413 — R_4; 534 — ИН u_5; 614 — ИТ i_6; напряжения источников $u_1 = 2u_5$; мощности $P_1 = -96$; $P_2 = 8$; $P_3 = 16$; $P_4 = 18$; $P_5 = 18$. Найти мощности всех элементов цепи, если источники u_1 и u_5 поменять местами. *Ответ:* $P_1 = -36$; $P_2 = 8$; $P_3 = 4$; $P_4 = 18$; $P_5 = -12$; $P_6 = 18$.
6. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 18$; 212 — R_2; 313 — R_3; 423 — ИН u_4; 524 — R_5; 634 — R_6; мощности элементов $P_2 = 0$, $P_3 = 48$, $P_4 = -36$; $P_5 = 54$; $P_6 = 6$. Найти R_2, R_3, R_5, R_6. *Ответ:* R_2 — любое; $R_3 = 3$; $R_5 = 6$; $R_6 = 6$.
7. Цепь: 131 — ИТ i_1; 213 — $R_2 = 10$; 313 — $К_3$; 412 — ИТ i_4; 523 — двухполюсник с источниками и резистивными элементами. При замкнутом ключе $К_3$ мощ-

ность $P_4 = -40$; при разомкнутом ключе K_3 мощности $P_1 = -240$, $P_4 = 40$. Найти токи источников i_1, i_4. *Ответ:* $i_1 = 6$; $i_4 = 2$.

8. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 3$; 213 — R_2; 312 — $R_3 = 1$; 423 — R_4; 532 — ИТ $i_5 = 2$; мощности $P_3 = 1$, $P_2 + P_4 = 17$. Найти R_2, R_4. *Ответ:* $R_2 = 2$; $R_4 = 1$.

9. Цепь: 118 — ИН $u_1 = 24$; 212 — K_2; 313 — K_3; 434 — $R_4 = 2$; 548 — $R_5 = 3$; 645 — $R_6 = 2$; 725 — K_7; 826 — R_8; 968 — R_9; 1067 — R_{10}; 1178 — R_{11}. При замкнутом ключе K_2 и разомкнутых ключах K_3 и K_7 мощности $P_1 = -144$, $P_{11} = 16$. Найти мощность P_{11} при разомкнутом K_2 и замкнутых K_3, K_7. *Ответ:* $P_{11} = 16/9$.

10. Цепь: 113 — ИН u_1; 212 — R_2; 323 — ИТ i_3; 413 — R_4; мощности $P_1 = -48$; $P_2 = 8$; $P_4 = 32$. Найти мощность каждого элемента при увеличении тока i_3 в два раза. *Ответ:* $P_1 = -64$; $P_2 = 32$; $P_3 = 0$; $P_4 = 32$.

11. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 6$; 214 — $R_2 = R$; 312 — $R_3 = 2R$; 413 — $R_4 = 2R$; 523 — $R_5 = R$; 624 — $R_6 = 2R$; 734 — $R_7 = 0{,}4R$; напряжение $u_6 = 2{,}5$. Найти мощность, потребляемую цепью. *Ответ:* $P = 42$.

12. Цепь: 112 — ИН u_1; 234 — ИТ i_2; 356 — R_3; шестиполюсная R-цепь с источниками подключена к узлам 1, 2, 3, 4, 5, 6. При $u_1 = 36$, $i_2 = 16$ ток $i_3 = 7{,}5$; при $u_1 = 72$, $i_2 = 16$ ток $i_3 = 12$; при $u_1 = 36$, $i_2 = 32$ ток $i_3 = 11$. Найти i_3 при $u_1 = 36$, $i_2 = 0$. *Ответ:* $i_3 = 4$.

13. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 12$; 213 — R_2; 312 — $R_3 = 4$; 423 — $R_4 = 2$; 524 — R_5; 643 — ИТ $i_6 = 8$; напряжение $u_2 = u_{13} = 8$. Найти R_2, R_5. *Ответ:* $R_2 = 2$; R_5 — любое.

14. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 20\exp(-2t)$; 212 — $R_2 = 2$; 345 — $R_3 = 4$; 465 — ИН $u_4 = 0$; четырехполюсная R-цепь подключена к узлам 2, 3, 4, 6. Энергии $W_1(\infty) = -20$, $W_3(\infty) = 1$. Найти $W_2(\infty)$ в исходной цепи при $u_1 = 0, u_4 = 40\exp(-4t)$. *Ответ:* $W_2(\infty) = 8$; во втором случае $W_2(\infty) = 1$.

15. Цепь: 116 — ИН u_1; 241-ИТ i_2; 346 — $R_3 = 6$; 414 — $R_4 = 3$; 512 — $R_5 = 2$; 645 — $R_6 = 2$; 725 — $R_7 = 4$; 823 — ключ K_8; 935 — R_9; 1056 — $R_{10} = 4$. При разомкнутом ключе $i_7 = 4$, при замкнутом ключе $i_7 = 2$. Найти R_9. *Ответ:* $R_9 = 2$.

16. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 20$; 212 — R_2; 345 — R_3; четырехполюсная R-цепь с источниками подключена к узлам 2, 3, 4, 5. При $R_2 = 6$ токи $i_2 = 2{,}5$ и $i_3 = 5$; при $R_2 = 2$ ток $i_3 = 6$. Найти i_3 при $R_2 = 2$ и $u_1 = 0$. *Ответ:* $i_3 = 4$.

17. Цепь: 121-ИТ i_1; 212 — $R_2 = 15$; 334 — R_3; четырехполюсная R-цепь подключена к узлам 1, 2, 3, 4. Если $R_3 = 10$, то $u_3 = 40$, $i_2 = 8$; если $R_3 = 20$, то $u_3 = 60$, $i_2 = 8{,}5$. Найти u_3, i_2 при $R_3 = 40$. *Ответ:* $u_3 = 80$; $i_2 = 9$.

18. Цепь: 112 — R_1; 212 — двухполюсник, содержащий R-элементы и источники; ток $i_1 = 5$. При уменьшении всех сопротивлений в цепи в два раза $i_1 = 7$. Найти i_1 при увеличении всех сопротивлений в два раза. *Ответ:* $i_1 = 4$.

19. Цепь: 114 — ИН u_1; 212 — R_2; 324 — R_3; 423 — $R_4 = R_2$; 534 — ИН u_5. При $u_1 = 4u_5$ ток $i_3 = 5$. Найти i_3 при увеличении напряжения ИН u_5 в два раза. *Ответ.* $i_3 = 6$.

20. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 10$; 212 — R_2; 342 — ИТ i_3; 423 — R_4; 534 — ИН $u_5 = 2$; 613 — ИТ i_6. При $i_6 = 2$ и $i_3 = 4$ ток $i_2 = i_{12} = 1$; при $i_6 = -2$ и $i_3 = -4$ ток $i_2 = i_{12} = 3$. Найти R_2 и R_4. *Ответ:* $R_2 = 3$; $R_4 = 1$.

21. Цепь: 115 — ИН u_1; 212 — $R_2 = 1$; 323 — K_3; 435 — $R_4 = 2$; 534 — R_5; 654 — ИТ i_6. При разомкнутом ключе K_3 напряжение $u_{13} = 3$, при замкнутом K_3 напряжение $u_4 = 4$ и мощность $P_{R_5} = 2$. Найти u_1, i_6, R_5. *Ответ:* $u_1 = 5$; $i_6 = 1$; $R_5 = 2$.

22. Цепь: 151 — ИТ $i_1 = 3$; 212 — $R_2 = 1$; 325 — R_3; 423 — R_4; 534 — ИН $u_5 = 6$; 614 — $R_6 = 2$; 745 — R_7. При $R_4 = 0$ напряжение $u_7 = 0$, при $R_4 = 3$ напряжение $u_7 = u_{45} = 1$. Найти R_3, R_7. *Ответ:* $R_3 = 2$; $R_7 = 1$.

23. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 90$; 212 — R_2; 324 — R_3; 423 — $R_4 = 3$; 543 — ИТ $i_5 = 5$; 615 — ИН $u_6 = 45$; 753 — K_7. При разомкнутом ключе K_7 напряжение $u_3 = u_{24} = 40$. При замкнутом K_7 напряжение $u_3 = u_{24} = 36$. Найти R_2, R_3. *Ответ.* $R_2 = 6$; $R_3 = 3$.

24. Цепь: 114 — R_1; 215 — R_2; 313 — R_3; 443 — ИТ i_4; 525 — ИН u_5; 664 — ИТ $i_6 = i_4$; 726 — R_7; 824 — R_8; 936 — K_9; при разомкнутом K_9 $u_{21} = 12$, $u_{31} = 6$. Найти u_{21} при замкнутом ключе K_9. *Ответ:* $u_{21} = 12$.

25. Цепь: 116 — ИН u_1; 212 — R_2; 323 — R_3; 436 — R_4; 534 — R_5; 646 — R_6; 763 — ИТ i_7; 825 — R_8; 965 — ИН u_9; напряжение $u_1 = 5u_9$; сопротивления $R_3 = R_4 = R_5 = R_6$; мощности $P_2 = 144$, $P_3 = 0$, $P_5 = 6$, $P_8 = 72$. Найти P_1, P_7, P_9. *Ответ.* $P_1 = -180$; $P_7 = -36$; $P_9 = -36$.

26. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 3$; 212 — R_2; 342 — ИТ $i_3 = 4$; 424 — K_4; 513 — R_5; 632 — $R_6 = 3$; 734 — ИН $u_7 = 6$. При замкнутом ключе K_4 ток $i_{13} = i_5 = -1$. При разомкнутом ключе K_4 ток $i_{13} = i_5 = 4$. Найти R_2, R_5. *Ответ:* $R_2 = 1$; $R_5 = 2$.

27. Цепь: 131 — ИТ i_1; 213 — $R_2 = 2$; 312 — $R_3 = 2$; 423 — R_4; 523 — ИН u_5. При увеличении u_5 в два раза напряжение u_{13} увеличивается на 4, мощность P_1 изменяется на -40 ($\Delta P_1 = -40$). Найти P_1. *Ответ:* $P_1 = -180$.

28. Цепь: 115 — ИН u_1; 212 — $R_2 = 2R$; 325 — $R_3 = 2R$; 423 — K_4; 534 — $R_5 = R$; 645 — $R_6 = R$; 754-ИТ i_7. При разомкнутом ключе K_4 мощности $P_1 = -18$, $P_7 = -18$. Найти мощности на каждом элементе при замкнутом ключе K_4. *Ответ:* $P_1 = -18$; $P_2 = P_3 = 9$; $P_5 = 0$; $P_6 = 18$; $P_7 = -18$.

29. Цепь: 114 — ИН u_1; 213 — R_2; 312 — R_3; 423 — R_4; 524 — R_5; 634 — ИН u_6; напряжение $u_1 = 2u_6$. При $R_2 = 0{,}5R$ мощность, потребляемая R-элементами, $P = 80$. При $R_2 = R$ мощность $P = 60$. Найти мощность P при $R_2 = 2R$. *Ответ.* $P = 50$.

30. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 36$; 213 — R_2; 334 — R_3; 435 — R_4; 554 — R_5; 652 — R_6; 724 — ИН $u_7 = 54$; токи $i_{13} = 3$, $i_{25} = 8$. При перемене полярности напряжения u_7 токи $i_{13} = 9$, $i_{25} = -12$. Найти входное сопротивление цепи относительно выводов 1...4 R_{14} при напряжении $u_7 = 0$, входное сопротивление цепи относительно выводов 2...4 R_{24} при напряжении $u_1 = 0$. *Ответ:* $R_{14} = 6$; $R_{24} = 5{,}4$.

31. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 12$; 212 — $R_2 = 6$; 312-ИТ $i_3 > 1$; 423 — $R_4 = 3$; 523 — ИН $u_5 = 6$; потребляемая мощность $P = 60$. Найти мощности элементов. *Ответ:* $P_1 = -60$; $P_2 = 6$; $P_3 = 24$; $P_4 = 12$; $P_5 = 18$.

32. Цепь «а»: 113 — ИН $u_1 = 60$; 212 — $R_2 = 2$; 323 — $R_3 = 2$; 414 — $R_4 = 6$; 543 — $R_5 = 3$; 624 — R_6; ток $i_6 = i_{24} = 2$. Цепь «б»: 131 — ИТ i_1; 212 — $R_2 = 2$; 323 — $R_3 = 2$; 414 — $R_4 = 6$; 543 — $R_5 = 3$; 624 — R_6; ток $i_6 = i_{24} = 2$. Найти ток i_1 в цепи «б», при котором все токи в цепи «а» равны токам цепи «б». *Ответ:* $i_1 = 22$.

33. Цепь: 113 — ИН u_1; 212 — R_2; 345 — $R_3 = 3$; четырехполюсная R-цепь без источников подключена к узлам 2, 3, 4, 5. При $R_2 = 7{,}5$ мощность $P_{R_3} = 3$, при $R_2 = 5$ мощность $P_{R_3} = 16/3$. Найти P_{R_3} при $R_2 = 2{,}5$. *Ответ:* $P_{R_3} = 12$.

34. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 6$; 241 — R_2; 312 — R_3; 432 — ИН $u_4 = 4$; 534 — $R_5 = 1$; $P_2 + P_3 = 24$; $P_5 = 16$. Найти сопротивления R_2 и R_3. *Ответ:* $R_2 = 2$; $R_3 = 1$.

35. Цепь: 121 — ИН u_1; 214 — R_2; 323 — $R_3 = 3$; 443 — ИТ $i_4 > 0$; 524 — ИН u_5; 624 — $R_6 = 6$; напряжение $u_1 = u_5$; мощности $P_3 = 12$, $P_4 = -24$. Найти мощности P_1, P_5. *Ответ:* $P_1 = 0$; $P_5 = 6$.

36. Цепь: 141 — ИТ i_1; 212 — R_2; 324 — R_3; 423 — ИН u_4; 513 — R_5; 634 — R_6; токи $i_2 = i_{12} = 0$; $i_6 = i_{34} = 0$; $i_3 = i_{24} = 5$; мощность $P_4 = -100$. При увеличении напряжения u_4 в 1,5 раза и изменении его полярности ток $i_5 = i_{13} = 0$; мощность $P_4 = -300$. Найти: R_2, R_3, R_5, R_6, i_1. *Ответ:* $R_2 = 6$; $R_3 = R_5 = 4$; $R_6 = 1$; $i_1 = 5$.

37. Цепь: 113 — ИН u_1; 212 — R_2; 323 — R_3; 423 — R_4; 523 — R_5; напряжение $u_2 = u_3$; токи $i_2 = 3$, $i_{45} = i_4 + i_5 = 2{,}5$, $i_5 = 1{,}5$. Найти токи всех ветвей при увеличении R_5 в 3 раза. *Ответ:* $i_2 = 2{,}4$; $i_3 = i_5 = 0{,}6$; $i_4 = 1{,}2$.

38. Цепь: 112 — ИН u_1; 225 — R_2; 313 — R_3; 434 — R_4; 514 — R_5; 645 — R_6; 735 — R_7; 853 — ИТ $i_8 = 5$; мощность $P_8 = -80$. При перемене полярности напряжения u_1 мощность $P_8 = -10$. Найти R_{35} — сопротивление цепи относительно выводов 3...5 при напряжении $u_1 = 0$. *Ответ:* $R_{35} = 1{,}8$.

39. Цепь: 114 — R_1; 212 — R_2; 321-ИТ i_3; 424 — K_4; 523 — R_5; 623-ИТ i_6; 734 — R_7; ток $i_3 = 2i_6$; сопротивления $R_1 = R_7$; $R_2 = R_5$; при замкнутом ключе K_4 ток $i_1 = i_{14} = 3$. Найти ток i_1 при разомкнутом K_4. *Ответ:* $i_1 = 0{,}75$.

40. Цепь: 114 — ИН $u_1 > 0$; 212 — $R_2 = 1$; 324 — $R_3 = 2$; 423 — $R_4 = 2$; 543 — ИТ $i_5 > 0$; мощность $P_1 = -5$; ток $i_3 = i_{24} = 2$. Найти напряжение u_1, ток i_5. *Ответ:* $u_1 = 5$; $i_5 = 1$.

41. Цепь: 114 — ИН u_1; 212 — $R_2 = 1$; 323 — K_3; 434 — ИН u_4; 534 — R-цепь с источниками. При разомкнутом ключе K_3 мощность $P_4 = -10$. При замкнутом клю-

че K_3 мощности $P_1 = -24$, $P_4 = 10$. Найти напряжения u_1, u_4. *Ответ*: $u_1 = 12$; $u_4 = 10$.

42. Цепь: 113 — ИН u_1; 213 — R_2; 312 — R_3; 423 — R_4; 523 — ИН u_5. При сопротивлении $R_2 = 10$ мощность $P_R = P_2 + P_3 + P_4 = 80$. При сопротивлении $R_2 = 5$ мощность $P_R = 120$. Найти мощность P_R при $R_2 = 8$. *Ответ:* $P_R = 90$.

43. Цепь: 114 — ИН u_1; 212 — $R_2 = 1$; 324 — R_3; 423 — R_4; 543 — ИН u_5; сопротивление $R_3 = R_4$; мощности $P_2 = 36$, $P_3 = 2$, $P_4 = 50$. Найти R_4, u_1, u_5. *Ответ:* $u_1 = 8$; $u_5 = 8$; $R_4 = 2$.

44. Цепь: 113 — ИН u_1; 212 — $R_2 = 4$; 324 — $R_3 = 3$; 443 — K_4; 523 — R-цепь с источниками. При замкнутом ключе K_4 токи $i_{12} = i_2 = 2{,}5$, $i_{24} = i_3 = 3$. При разомкнутом ключе K_4 напряжение $u_{23} = 12$. Найти ток i_2 при изменении полярности напряжения u_1. *Ответ:* $i_2 = 5/8$.

Указания. При решении следующих вариантов задач рекомендуется использовать: 1) законы Кирхгофа; 2) вначале расчет напряжения ИН, а затем МН; 3) то обстоятельство, что i_3 зависит только от u_4; 4), 5) баланс мощностей; 6) законы Кирхгофа; 7) баланс мощностей; 8) ЗТК и баланс мощностей; 9) свойства линейности; 10) баланс мощностей и свойства линейности; 11) эквивалентное преобразование соединений звездой и треугольником; 12) свойство неизменности коэффициента передачи; 13) уравнения МКТ; 14) теорему взаимности и свойство линейности; 15) теорему об эквивалентном источнике; 16) формулы для передаточных проводимостей; 17), 18) теорему об эквивалентном источнике и свойство линейности; 19) свойства линейности (наложения и пропорциональности); 20) уравнения МКТ; 21) законы Кирхгофа; 22) МКТ; 23) МУН; 24) ЗНК; 25) баланс мощностей; 26) МКТ; 27) МН; 28) то обстоятельство, что при замкнутом ключе структура цепи симметрична относительно источников; 29) баланс мощностей; 32) уравнения МКТ, заменив ветвь с R_6 на источник тока; 37) ЗТК и ФДТ; 38) МН и свойство неизменности передаточных коэффициентов цепи; 39) метод преобразования источников; 40) законы Кирхгофа и формулу мощности ИН; 41) баланс мощностей; 42) формулу мощности R-элементов; 43) формулу мощности R-элементов и ЗНК; 44) ЗНК и теорему об эквивалентном источнике.

4.2. Анализ переходных процессов во временной области при постоянных и произвольных воздействиях

Предполагается, что в момент $t = 0$ в цепи происходит коммутация в результате замыкания (размыкания) ключа К или скачкообразного изменения воздействия. В вариантах 1...6, 8, 12, 14, 16, 18, 20...28, 30...33, 38, 40...44, 46, 48...51, 55...63, 68, 69, 71, 72, 75, 76, 78, 79, 81 воздействия постоянны. Найти указанные реакции при $t > 0$.

1. Цепь: 151 — ИТ i_1; 251 — K_2, размыкается; 315 — R_3; 412 — R_4; 525 — R_5; 623 — R_6; 713 — R_7; 834 — $R_8 = 3$; 945 — L_9; $u_L(0+) = 9{,}6$. При $t > 0$ $i_L = 2{,}4 - 2{,}4\exp(-8t)$. Найти i_L при $R_8 = 5$. *Ответ:* $i_L = 1{,}6 - 1{,}6\exp(-12t)$.

2. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 45$; 212 — K_2, замыкается; 323 — $R_3 = 3$; 434 — R_4; 545 — L_5; 635 — R_6. При $t > 0$ ток $i_k = 3 + 2\exp(-10t)$. Найти R_4, L_5, R_6 и определить, току какой ветви соответствует i_k. *Ответ:* $R_4 = 3$; $L_5 = 0{,}5$; $R_6 = 6$; $i_k = i_6$.

3. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 6$; 212 — R_2; 312 — K_3, замыкается; 423 — $R_4 = R_2$; 534 — R_5; 654 — L; 764 — C. При $t < 0$ $i_4 = 1{,}5$; при $t > 0$ $i_4 = 3 - 0{,}75\exp(-2t)$. Определить, какой из элементов (L или C) подключен параллельно R_5, и найти параметры цепи. *Ответ:* $R_2 = R_5 = 2$; $L = 0{,}5$.

4. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 10$; 212 — $L_2 = 2$; 324 — K_3, замыкается; 423 — $R_4 = 2$; 513 — $C_5 = 8$; 634 — $C_6 = 2$. Найти i_k. *Ответ:* $i_2 = 5t$, $i_4 = 5\exp(-0{,}05t)$, $i_5 = 4\exp(-0{,}05t)$, $i_6 = -\exp(-0{,}05t)$.

5. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 100$; 212 — $R_2 = 10$; 325 — $R_3 = 20$; 423 — K_4, замыкается; 534 — $R_5 = 10$; 614 — $C_6 = 0{,}05$; 745 — $C_7 = 0{,}05$; 845 — $R_8 = 10$. Найти i_6. *Ответ:* $i_6 = -2\exp(-1{,}6t)$.

6. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 300$; 212 — $C_2 = 1$; 323 — $C_3 = 2$; 435 — $C_4 = 1$; 534 — $R_5 = 3$; 624 — K_6, размыкается; 745 — K_7, замыкается. Найти u_{12}. *Ответ:* $u_{12} = 250 - 100\exp(-0{,}2t)$.

7. Цепь: 112 — $C_1 = 2$; 223 — $C_2 = 2$; 334 — $R_3 = 0{,}5$; 414 — K_4, замыкается; $u_{21}(0-) = -2$; $u_{32}(0-) = 1$. Найти i_{13}, u_{32}. *Ответ:* $i_{13} = -2\exp(-2t)$; $u_{32} = 1{,}5 - 0{,}5\exp(-2t)$.

8. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 10$; 212 — $C_2 = 2$; 324 — $L_3 = 2$; 423 — $R_4 = 2$; 534 — $L_5 = 2$; 613 — K_6, размыкается. Найти u_k. *Ответ:* $u_2 = 5t$; $u_3 = 10\exp(-0{,}5t)$; $u_4 = 20\exp(-0{,}5t)$; $u_5 = -10\exp(-0{,}5t)$.

9. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 7\exp(-5t)\delta_1(t)$; 212 — $L_2 = 1$; 324 — $L_3 = 3$; 423 — $R_4 = 7$; 513 — $L_5 = 2$; 634 — $L_6 = 2$. Найти i_4. *Ответ:* $i_4 = (\exp(-4t) - \exp(-5t))\delta_1(t)$.

10. Цепь: 112 — ИН $u_1 = 8\delta_1(t) - 16\delta_1(t-1) + 8\delta_1(t-2)$; 213 — R_2; 332 — $R_3 = R_2$; 432 — L_4; ток $i_3(1-) = 0{,}5$; $i_3(1+) = -3{,}5$. Найти R_2, L_4. *Ответ:* $R_2 = 2$; $L_4 = 1/\ln 4$.

11. Цепь: 121 — ИТ $i_1 = I_1\delta_1(t)$; 212 — R_2; 313 — R_3; 432 — R_4; 513 — C_5; 632 — L_6. Найти соотношение между параметрами, при котором u_{12} повторяет форму i_1. *Ответ:* R_2 = любое; $R_3 = R_4 = \sqrt{L/C}$.

12. Цепь: 141 — ИТ i_1; 214 — C_2; 314 — R_3; 412 — R_4; 512 — K_5, замыкается; 623 — R_6; 734 — ИН u_7. При каком соотношении между R_3, R_4, R_6, а также i_1 и u_7 в цепи отсутствует переходный процесс? *Ответ:* $R_3 = u_7/i_1$; R_4 и R_6 — любые.

13. Цепь: 112 — $C_1 = 1$; 223 — $C_2 = 2$; 334 — $R_3 = 1{,}5$; 441 — K_4, замыкается; $u_{12}(0-) > 0$; $u_{32}(0-) > 0$; $u_{12}(0-) > u_{32}(0-)$; $W_1(0-) = 2$. За время переходного процесса выделится энергия $W_3 = 1/3$. Найти u_2. *Ответ:* $u_2 = 4/3 - 1/3\exp(-t)$.

14. Цепь: 112 — ИН $u_1 = 6$; 213 — $R_2 = 1/3$; 332 — $C_3 = 1$; 434 — K_4, замыкается; 542 — $C_5 = 2$. Найти u_3. *Ответ:* $u_3 = 6 - 4\exp(-t)$.

15. Цепь: 112 — ИН $u_1 = U_1 \exp(-\alpha t)\delta_1(t)$; 213 — R_2; 332 — C_3; $u_C(0-) = 0$; $i_2(0+) = 5$. При $t > 0$ напряжение $u_C = 20[\exp(-2t) - \exp(-4t)]$. Найти C_3, R_2, u_1. *Ответ:* 1) $C_3 = 1/8$; $R_2 = 2$; $u_1 = 10\exp(-2t)$; 2) $C_3 = 1/8$; $R_2 = 4$; $u_1 = 20\exp(-4t)$.

16. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 2$; 212 — K_2, замыкается; 323 — L_3; 434 — R_4; 534 — C_5; энергия $W_3(\infty) = 8$. Корни характеристического уравнения цепи $p_{1,2} = -2$. Найти L_3, R_4, C_5. *Ответ:* $L_3 = 1/4$; $R_4 = 1/4$; $C_5 = 1$.

17. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = \delta(t)$; 214 — R_2; 312 — R_3; 424 — R_4; 523 — C_5; 634 — R_6; $R_k = 2$; $u_5(0-) = 0$; $u_5(0+) = 2$. Найти C_5. *Ответ:* $C_5 = 0{,}1$.

18. Цепь: 115 — ИН u_1; 212 — K_2, замыкается; 323 — R_3; 434 — L_4; 545 — C_5; 636 — L_6; 765 — C_7; 837 — L_8; 975 — C_9. Доказать, что энергия, выделяемая во время переходного процесса, не зависит от значения R_3.

19. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = I_1\delta_1(t)$; 214 — R_2; 312 — R_3; 423 — R_4; 534 — L_5; 624 — R_6; 724 — C_7; $i_5(0-) = 0$; $u_7(0-) = 0$. Даны функции напряжений элементов $f_1 = 14 - 28\exp(-3t) + 14\exp(-6t)$; $f_2 = 14 - 16\exp(-3t) + 2\exp(-6t)$; $f_3 = 25 - 8\exp(-3t) + \exp(-6t)$; $f_4 = 12\exp(-3t) - 12\exp(-6t)$; $f_5 = 11 + 8\exp(-3t) - \exp(-6t)$. Определить, напряжению какого элемента соответствует каждая из функций. *Ответ:* $f_1 = u_4$; $f_2 = u_7$; $f_3 = u_2$; $f_4 = u_5$; $f_5 = u_3$.

20. Цепь: 117 — ИН u_1; 212 — R_2; 327 — L_3; 423 — R_4; 534 — C_5; 624 — C_6; 745 — R_7; 857 — C_8; 946 — L_9; 1067 — R_{10}; $L_9 > L_3$; $C_6 = C_8$. Даны уравнения состояния цепи: $x_1' = -x_1 - 0{,}5x_2 - 0{,}5x_3 + 0{,}5x_4 + 0{,}5x_5 + 0{,}5u_1$; $x_2' = -0{,}5x_1 - 0{,}5x_2 + 0{,}5x_3 + 0{,}5x_4 + 0{,}5u_1$; $x_3' = 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 2u_1$; $x_4' = -x_1 + x_2 - x_3 - 5x_4 + u_1$; $x_5' = 0{,}5x_1 - 0{,}5x_5$. Определить, каким переменным состояния соответствуют x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. *Ответ:* $x_1 = u_6$; $x_2 = u_8$; $x_3 = i_3$; $x_4 = i_9$; $x_5 = u_5$.

21. Цепь: 151 — ИТ i_1; 212 — C_2; 312 — R_3; 423 — L_4; 523 — R_5; 635 — R_6; 714 — $R_7 = 2$; 845 — R_8; 945 — K_9, размыкается; $R_3 = R_5 = 2R_6$; $i_2(0+) = 3$; $u_4(0+) = u_6(0+) = 12$. Найти i_1, R_3, R_8. *Ответ:* $i_1 = 12$; $R_3 = R_8 = 4$.

22. Цепь: 115 — ИН u_1; 212 — K_2, замыкается; 323 — $L_3 = 0{,}5$; 435 — $R_4 = 2$; 534 — ИН $u_5 = u_1$; 624 — $R_6 = 0{,}4$; 745 — $C_7 = 1$; $i_7(0+) = 4$. Найти i_4. *Ответ:* $i_4 = 0{,}8 + 0{,}4\exp(-t) - 1{,}2\exp(-2t)$.

23. Цепь: 115 — ИН u_1; 212 — K_2, замыкается; 323 — R_3; 435 — R_4; 535 — L_5; 624 — R_6; 745 — C_7; $u_{34} = -4 + 4\exp(-4t) + 2\exp(-2t)$; $i_{23} = 2 - \exp(-2t)$; $i_{12}(0+) = 5$. Найти R_3, R_4, R_6, L_5, C_7, u_1. *Ответ:* $R_3 = R_4 = 2$; $R_6 = 1$; $L_5 = 1/2$; $C_7 = 1/4$; $u_1 = 4$.

24. Цепь: 112 — R_1; 214 — R_2; 314 — C_3; 424 — L_4; 541 — ИТ $i_5 = 6$; 613 — R_6; 734 — K_7, замыкается; $R_2 = 2R_1$; после коммутации $i_1 + i_2 + i_3 = 4{,}5 + 4\exp(-3t) - 4{,}5\exp(-4t)$. Найти i_1. *Ответ:* $i_1 = 3 + 4\exp(-3t) - 3\exp(-4t)$.

25. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 18$; 212 — R_2; 323 — $L_3 = 0{,}5$; 435 — R_4; 545 — C_5; 634 — K_6, замыкается; $u_{35} = 4 - 16/3\exp(-3t) + 4/3\exp(-6t)$. Найти R_2, R_4, C_5. *Ответ:* $R_2 = 3{,}5$; $R_4 = 1$; $C_5 = 0{,}5$.

26. Цепь 141 — ИТ $i_1 = 10$; 212 — $L_2 = 1$; 324 — C_3; 424 — ИТ i_4; 513 — R_5; 634 — R_6; 734 — K_7, размыкается; $i_2(t) = 5 + 10\exp(-5t)$. Найти C_3, R_5, R_6. *Ответ:* $C_3 = 1/25$; $R_5 = 8$; $R_6 = 2$.

27. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 10$; 214 — R_2; 314 — C_3; 412 — R_4; 524 — L_5; 634 — R_6; 713 — K_7, размыкается. После коммутации $u_2(t) = 10 + 2\exp(-2t) - 7\exp(-12t)$. Найти переходную характеристику для u_2 при отключенном R_6. *Ответ:* $h_1(t) = 1 + 0{,}4\exp(-2t) - 1{,}4\exp(-12t)$.

28. Цепь: 112 — $R_1 = 1$; 223 — L_2; 334 — R_3; 434 — C_4; 514 — ИН $u_5 = 6$; 612 — K_6, замыкается; энергия $W_L(0-) = 12$; $W_C(0-) = 2{,}25$; $W_L(\infty) = 48$. Найти собственные частоты цепи. *Ответ:* $P_1 = -0{,}5$; $P_2 = -1{,}5$.

29. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = I_1\delta_1(t)$; 213 — C_2; 313 — L_3; 412 — R_4; 523 — R_5; $u_5 = 3t\exp(-2t)\delta_1(t)$. Найти u_5 при уменьшении сопротивления R_4 и R_5 в 1,25 раза. *Ответ:* $u_5 = (\exp(-t) - \exp(-4t))\delta_1(t)$.

30. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 100$; 212 — R_2; 323 — K_3; 435 — R_4; 534 — L; 645 — C. Напряжение $u_C = 40 - 40\exp(-6t) - 240t\exp(-6t)$, если при $t = 0$ ключ замыкается. Найти u_C, если при $t = 0$ ключ размыкается. *Ответ:* $u_C = 45\exp(-2t) - 5\exp(-18t)$.

31. Цепь: 115 — ИН u_1; 212 — L_2; 323 — R_3; 424 — C_4; 534 — R_5; 634 — K_6, замыкается; ток $i_2 = 20 - 40/3\exp(-2t) + 10/3\exp(-8t)$. Найти i_3.
Ответ: $i_3 = 20 - 50/3\exp(-2t) + 50/3\exp(-8t)$.

32. Цепь: 151 — ИТ i_1; 214 — ИН u_2; 312 — K_3, замыкается; 423 — R_4; 535 — L_5; 634 — C_6; 745 — $R_7 = R_4$; ток $i_5 = 15 - (15\sin 100t + 15\cos 100t)\exp(-100t)$. Найти i_4. *Ответ:* $i_4 = 15 - (15\sin 100t - 15\cos 100t)\exp(-100t)$.

33. Цепь: 116 — ИН u_1; 212 — K_2; 323 — $R_3 = R$; 434 — $R_4 = R$; 535 — $R_5 = R$; 646 — C_6; 756 — L_7; $RC = L/R = \tau$. Найти u_3, u_C, если при $t = 0$ ключ замыкается. Найти также в общем виде i_L, если при $t = 0$ ключ размыкается. *Ответ:* $u_3 = 0{,}5u_1$; $u_C = 0{,}5u_1(1 - \exp(-t/\tau))$; $i_L = (A_1 + A_2 t)\exp(-t/\tau)$.

34. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 6\delta_1(t)$; 212 — R_2; 323 — R_3; 423 — L_4; 534 — $R_5 = R_3$; 634 — C_6. При $t > 0$ ток $i_2 = 2$; $u_4 = 4\exp(-2t)$. Найти R_2, R_3, L_4, C_6. *Ответ:* $R_2 = 1$; $R_3 = 2$; $L_4 = 1$; $C_6 = 1/4$.

35. Цепь: 112 — ИН u_1; 234 — L_2; четырехполюсная R-цепь без источников подключена к узлам 1, 2, 3, 4. При $u_1 = 12\exp(-2t)\delta_1(t)$ ток $i_1 = (6\exp(-2t) - 6\exp(-4t))\delta_1(t)$. Найти i_L при $u_1 = 12\exp(-3t)\delta_1(t)$.
Ответ: $i_L = 12(\exp(-3t) - \exp(-4t))\delta_1(t)$.

36. Цепь: 112 — ИН u_1; 234 — C_2; четырехполюсная цепь без источников подключена к узлам 1, 2, 3, 4. При $u_1 = (10\exp(-t) + 6)\delta_1(t)$ напряжение $u_C = (14/3 + 12\exp(-t) - 56/3\exp(-3t) + 2\exp(-6t))\delta_1(t)$. Найти u_C при $u_1 = \delta_1(t)$. *Ответ:* $u_C = (7/9 - 8/9\exp(-3t) + 1/9\exp(-6t))\delta_1(t)$.

37. Цепь: 115 — ИН $u_1 = U_1\delta_1(t)$; 212 — L_2; 325 — R_3; 432 — R_4; 535 — R_5; 634 — R_6; 724 — R_7; 845 — R_8; 945 — $C_9 = 1/6$; $u_9 = 14 - 18\exp(-2t) + 4\exp(-9t)$. Найти i_{12},

если L и C поменять местами при условии $R_3 = R_8$, $R_4 = R_6$. *Ответ:* $i_{12} = (6\exp(-2t) - 6\exp(-9t))\delta_1(t)$.

38. Цепь: 117 – ИН u_1; 212 – K_2; 323 – R_3; 434 – L_4; 545 – $R_5 = R_3$; 657 – $L_6 = L_4$; 746 – K_7; 867 – C_8. Доказать, что при замыкании K_2 (K_7 замкнут) или при замыкании K_7 (K_2 замкнут) ток i_8 один и тот же, если $u_8(0-) = 0$.

39. Цепь: 115 – ИН $u_1 = \delta_1(t)$; 212 – R_2; 323 – C_3; 434 – $L_4 = 1$; 545 – L_5; 645 – C_6; узлы 3, 5 – однополярные выводы ИСЭ. При $t > 0$ $i_2 = 4t\exp(-2t)$. Найти R_2, C_3, $|M|$, L_5, C_6. *Ответ:* $R_2 = 1$; $C_3 = 1$; $|M| = 3/4$; $L_5 = |M|$, C_6 – любое значение.

40. Цепь: 116 – ИН $u_1 = 30$; 212 – $R_2 = 5$; 323 – $L_3 = 1$; 434 – $L_4 = 1$; 546 – $R_5 = 10$; 656 – $R_6 = 10$; 735 – K_7, размыкается; узлы 2, 4 – однополярные выводы ИСЭ; $|M| = 0{,}5$. Найти u_4. *Ответ:* $u_4 = -15/8\exp(-15t)\delta_1(t) + 9/8\,\delta(t)$.

41. Цепь: 115 – ИН u_1; 212 – K_2, замыкается; 323 – L_3; 434 – C_4; 545 – R_5; 645 – R_6; $u_C(0-) = 0$; $i_L(0-) - 0$. При $t > 0$ $i_6 = 4\exp(-2t) - 4\exp(-3t)$. Найти i_6 (при $t > 0$) при увеличении C в 1,5 раза. *Ответ:* $i_6 = 4/3\exp(-t) - 4/3\exp(-4t)$.

42. Цепь: 115 – ИН $u_1 = 4$; 212 – K_2, замыкается при $t = 0$; 323 – R_3; 435 – K_4, замыкается по окончании переходного процесса; 534 – $R_5 = 4R_3$; 645 – L_6; 745 – C_7. При $t > 0$ $u_C = 16t\exp(-2t)$. Найти u_C после замыкания K_4. *Ответ:* $u_C = -16/3(\exp(-t)) + 16/3(\exp(-4t))$.

43. Цепь: 114 – ИН u_1; 212 – R_2; 324 – C_3; 423 – L_4; 534 – $R_5 = 3$; 634 – K_6, замыкается. При $t > 0$ $i_4 = 8 + \exp(-2t)(4{,}5\sin 4t - 6\cos 4t)$. Найти R_2, C_3, L_4. *Ответ:* $R_2 = 1$; $C_3 = 0{,}25$; $L_4 = 0{,}2$.

44. Цепь 1: 115 – ИН u_1; 212 – $R_2 = 2$; 312 – K_3, замыкается; 423 – R_4; 535 – C_5; 634 – R_6; 745 – $L_7 = 1$. При $t > 0$ $i_7 = 4 - 3\exp(-2t) + 2\exp(-3t)$.

    Цепь 2: 115 – ИН u_1; 212 – R_2; 325 – C_3; 423 – R_4; 534 – $R_5 = 2$; 634 – K_6, замыкается; 745 – $L_7 = 1$. Найти i_7 в цепи 2. *Ответ:* $i_7 = 4 + 3\exp(-2t) - 4\exp(-3t)$.

45. Цепь: 115 – ИН $u_1 = 12\delta_1(t)$; 212 – $R_2 = 2$; 323 – R_3; 423 – L_4; 534 – R_5; 645 – C_6; 735 – R_7. Какие решения из указанных невозможны (ответы обосновать): 1) $i_2 = 4 + \exp(-t)(2\cos 2t + \sin 2t)$; 2) $i_7 = 2 - 8\exp(-2t) - 4t\exp(-t)$; 3) $i_2(0+) = i_2(\infty)$; 4) $i_4 = 6 + 2\exp(-3t) - 8\exp(-4t)$; 5) $u_{23} = 4t\exp(-2t)$. *Ответ:* варианты 1, 2, 4, 5.

46. Цепь: 141 – ИТ i_1; 214 – G_2; 312 – L_3; 424 – C_4; 523 – K_5, размыкается; 634 – $G_6 = 1/3$. При $t > 0$ $u_{24} = 10 + \exp(-t)(3\sin 2t - 4\cos 2t)$. Найти G_2, L_3, C_4. *Ответ:* $G_2 = 0{,}5$; $L_3 = 1$; $C_4 = 0{,}2$.

47. Цепь: 141 – ИТ $i_1 = 6\delta_1(t)$; 214 – $R_2 = 12$; 312 – R_3; 424 – C_4; 513 – R_5; 634 – L_6; 734 – R_7. Какие решения из указанных невозможны (ответы обосновать): 1) $u_{24} = 75 + 15\exp(-6t) - 90\exp(-8t)$; 2) $R_3 < R_2$; $i_2 = 1{,}5 + 4{,}5\exp(-5t) - 4{,}5\exp(-8t)$; $i_3 = -4{,}5\exp(-5t) + 6\exp(-8t)$; 3) $i_7 = \exp(-2t)(\cos 4t + 2\sin 4t) + \exp(-2t)$; 4) $i_2(0+) = i_2(\infty)$; 5) $u_6 = 12\exp(-3t)\sin 4t$. *Ответ:* 1, 2, 3, 5.

48. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 12$; 212 — $R_2 = 2$; 325 — $C_3 = 0{,}5$; 423 — L_4; 534 — R_5; 645 — R_6; 754 — ИТ $i_7 = I\delta_1(t)$, $I = \text{const}$. При $t > 0$ $u_C = 10 - 6\exp(-2t) + 4\exp(-3t)$. Найти u_C, если $u_1 = 12\delta_1(t)$, а $i_7 = I = \text{const}$. *Ответ:* $u_C = 10 - 12\exp(-2t) + 4\exp(-3t)$.

49. Цепь: 131 — ИТ i_1; 213 — K_2, размыкается; 313 — R_3; 413 — C_4; 512 — R_5; 623 — C_6; 723 — $R_7 = R_5$. При $t > 0$ $u_{13} = 12 - 8\exp(-t) - 4\exp(-4t)$. Найти u_{12}. *Ответ:* $u_{12} = 6 - 6\exp(-4t)$.

50. Цепь: 151 — ИТ i_1; 215 — R_2; 312 — R_3; 412 — C_4; 523 — КЗ; 635 — R_6; 734 — K_7, размыкается; 845 — $R_8 = 4$; $u_2(0-) = 12$; $u_6(0-) = 6$; $u_6(0+) = 8$; $i_{23}(\infty) = 2{,}25$. При $t > 0$ $i_4 = -\exp(-0{,}5t)$. Найти u_2. *Ответ:* $u_2 = 0{,}5\exp(-0{,}5) + 13{,}5$.

51. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 12$; 214 — R_2; 312 — $R_3 = 2$; 424 — R_4; 513 — $R_5 = R_2$; 634 — L_6. При $t > 0$ $i_6 = 5 - \exp(-24t)$. Найти R_2, R_4, L_6. Выяснить, где находится «забытый» в схеме ключ и как он переключается при $t = 0$. *Ответ:* при $t = 0$ размыкается ключ, подключенный параллельно R_3; $R_2 = R_4 = R_5 = 4/3$; $L_6 = 2/21$; при $t = 0$ размыкается ключ, подключенный параллельно R_4; $R_2 = R_5 = 2$; $R_4 = 3$; $L_6 = 1/7$.

52. Цепь: 114 — ИН $u_1 = f(t)\delta_1(t)$; 212 — $R_2 = 2$; 324 — $R_3 = 2$; 423 — $R_4 = 1$; 534 — L_5. При $t > 0$ $u_5 = -6\exp(-3t) + 10\exp(-4t)$; $i_2(\infty) = 1{,}5$. Найти $f(t)$. *Ответ:* $f(t) = 4 + 4\exp(-3t)$.

53. Цепь: 1: 115 — ИН $u_1 = U\delta_1(t)$; 212 — $R_2 = 2$; 325 — $R_3 = 2$; 423 — R_4; 534 — $L_5 = 1$; 614 — $R_6 = 6$; 745 — $R_7 = 3$. При $t > 0$ $i_4 = 1 - \exp(-6t)$.
Цепь 2: 115 — ИН $u_1 = U\delta_1(t)$; 212 — $R_2 = 2$; 325 — $R_3 = 2$; 423 — R_4; 523 — $L_5 = 1$; 614 — $R_6 = 6$; 745 — $R_7 = 3$; 834 — КЗ. Найти i_{34} в цепи 2. *Ответ:* $i_{34} = 2 - \exp(-1{,}5t)$.

54. Цепь 1: 114 — ИН $u_1 = U\delta_1(t)$; 212 — R_2; 324 — $R_3 = 3R_2$; 423 — $R_4 = 1{,}5R_2$; 534 — C_5; ток $i_2 = (3 + 3\exp(-4t))\delta_1(t)$.
Цепь 2: 114 — ИН $u_1 = U\delta_1(t)$; 212 — R_2; 324 — $R_3 = 1{,}5R_2$; 423 — $R_4 = 3R_2$; 534 — C_5. Найти i_2 в цепи 2. *Ответ:* $i_2 = (4{,}8 + 1{,}2\exp(-2{,}5t))\delta_1(t)$.

55. Цепь: 114 — ИН u_1; 212 — $R_2 = 1$; 312 — $C_3 = 1$; 423 — K_4, размыкается; 534 — R_5; 634 — $L_6 = 2$; 743-ИТ i_7. При $t > 0$ $i_6 = 2\exp(-2t) + 4$. Найти u_{23}. *Ответ:* $u_{23} = 2 - 2\exp(-t) + 8\exp(-2t)$.

56. Цепь: 116 — ИН u_1; 212 — K_2, замыкается; 323 — R_3; 436 — L_4; 524 — R_5; 646 — C_6; 725 — R_7; 856 — L_8. При $t > 0$ $u_4 = 8\exp(-2t)$; $i_5 = 8\exp(-3t)$; $i_{7-8} = -4\exp(-t)$; при $t \to \infty$ мощность $P_1 = -64$. Найти R_3, L_4, R_5, C_6, R_7, L_8. *Ответ:* $R_3 = 2$; $L_4 = 1$; $R_5 = 1$; $C_6 = 1/3$; $R_7 = 2$; $L_8 = 2$.

57. Цепь: 151 — ИТ i_1; 212 — $R_2 = 1$; 325 — $L_3 = 1$; 415 — K_4, замыкается; 513 — R_5; 634 — $C_6 = 1$; 745 — ИН u_7. При $t > 0$ $u_6 = 4\exp(-0{,}5t) - 1$. Найти i_4. *Ответ:* $i_4 = 4 - 4\exp(-t) + 2\exp(-0{,}5t)$.

58. Цепь: 118 — ИН u_1; 212 — R_2; 323 — $R_3 = R_2$; 438 — L_4; 524 — K_5, размыкается; 645 — R_6; 756 — R_7; 868 — $L_8 = L_4$; 957 — $R_9 = R_7 = 2R_2/3$; 1078 — ИН $u_{10} = 2u_1$; $i_6(0+) = -2$. При $t > 0$ $i_2 = 2 + \exp(-6t)$. Найти i_9. *Ответ:* $i_9 = -6 + \exp(-4t)$.

59. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 2$; 213 — R_2; 312 — L_3; 423 — C_4; 523 — K_5, размыкается. При $t > 0$ $u_4 = 6 - 8\exp(-t) + 2\exp(-2t)$. Найти R_2, L_3, C_4. *Ответ:* $R_2 = 3$; $L_3 = 1$; $C_4 = 0{,}5$.

60. Цепь: 116 — ИН $u_1 = 6$; 212 — K_2, замыкается; 323 — $R_3 = 2$; 436 — $C_4 = 0{,}5$; 536 — R_5; 624 — R_6; 745 — $L_7 = 2$; 856 — $R_8 = 1$; 965 — ИТ $i_9 = 24$; $i_3(0+) = -1$; $u_8(0+) = 20$. Найти u_4, i_7. *Ответ:* $u_4 = 3 + 5\exp(-2t)$; $i_7 = i_{51} = -9 + 5\exp(-t)$.

61. Цепь: 118 — ИН u_1; 212 — R_2; 326 — R_3; 432 — R_4; 547 — R_5; 654 — R_6; 768 — L_7; 878 — L_8; 958 — ИН $u_9 = 2u_1$; 1034 — K_{10}, размыкается; $R_2 = R_3 = 1{,}5R_5$; $R_5 = R_6$; $L_7 = L_8$; $i_4(0-) = 2$. При $t > 0$ $i_2 = 2 + \exp(-6t)$. Найти i_6. *Ответ:* $i_6 = 6 - \exp(-4t)$.

62. Цепь: 141 — ИТ i_1; 212 — R_2; 324 — R_3; 424 — C_4; 513 — R_5; 634 — L_6; 714 — K_7, замыкается; $u_6(0+) = -16$. При $t > 0$ $i_7 = 8 + 4\exp(-4t) - 4\exp(-8t)$. Найти R_2, R_3, R_5, C_4, L_6. *Ответ:* $R_2 = R_3 = 2$; $R_5 = 4$; $C_4 = 1/4$; $L_6 = 1/2$.

63. Цепь 141 — ИТ i_1; 212 — R_2; 324 — R_3; 414 — C_4; 513 — R_5; 634 — L_6; 724 — K_7; $i_6(0-) = 4$. При $t > 0$ уравнения состояния: $dx_1/dt = -2x_1 + x_2$; $dx_2/dt = -4x_1 - 2x_2 + 24$; при этом $x_1 - i_6$ или u_4; $x_2 - u_4$ или i_6. Обосновать, замыканием или размыканием ключа K_7 при $t = 0$ вызван переходный процесс. *Ответ:* переходный процесс вызван замыканием ключа K_7.

64. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 18\delta_1(t)$; 212 — R_2; 313 — R_3; 424 — R_4; 534 — R_5; 623 — C_6; $R_2 = R_5$; $R_3 = R_4$. При $t > 0$ $i_2 = 2 + \exp(-2t)$. Найти R_2, R_3, C_6. *Ответ:* $R_2 = 3$; $R_3 = 6$; $C_6 = 1/8$.

65. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 36$; 212 — R_2; 323 — R_3; 424 — R_4; 534 — L_5; 642 — ИТ $i_6 = 6\delta_1(t)$. При $t > 0$ $i_5 = 3 - 1{,}5\exp(-4t)$. Найти i_5 при $u_1 = 36$ и $i_6 = 12\delta_1(t)$. *Ответ:* $i_5 = 4{,}5 - 3\exp(-4t)$.

66. Цепь: 114 — ИН $u_1 = f(t)\delta_1(t)$; 212 — $R_2 = 3{,}5$; 323 — L_3; 434 — $R_4 = 1$; 534 — $C_5 = 0{,}5$. При $t > 0$ $u_5 = 4\exp(-3t) - 6\exp(-4t) + 2\exp(-6t)$. Найти $f(t)$. *Ответ:* $f(t) = 18\exp(-4t)$.

67. Цепь: 112 — R_1; 224 — R_2; 323 — R_3; 434 — R_4; 513 — L_5; 641 — ИТ $i_6 = 12\delta_1(t)$. При $t > 0$ $i_5 = (10 - 10\exp(-15t))\delta_1(t)$. Найти i_1 при замене L_5 на C_5 при условии $\sqrt{L/C} = R_{13}$ — сопротивлению цепи относительно индуктивности при исключенном ИТ i_6. *Ответ:* $i_1 = (12 - 10\exp(-15t))\delta_1(t)$.

68. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 18$; 212 — R_2; 335 — R_3; 434 — R_4; 545 — $C_5 = 0{,}1$; 623 — $R_6 = 3$; 723 — K_7, замыкается. При $t > 0$ $u_5 = 12 - 3\exp(-2t)$. Найти переходную характеристику для i_2 при разомкнутом ключе. *Ответ:* $h_1(t) = 1/12 + 1/24(\exp(-10t/6))$.

69. Цепь: 116 — ИН u_1; 212 — R_2; 334 — R_3; 435 — R_4; 536 — R_5; 646 — L_6; 756 — C_7; 823 — $R_8 = 6$; 923 — K_9, замыкается; $R_3 = R_4$; $R_5 = 2R_3$. При $t = 0+$ $u_6(0+) = 6$; $i_3(0+) = i_4(0+) = 2$. Найти $i_2(0-), i_3(0-), u_7(0-), u_1, R_2, R_3, R_4, R_5$. *Ответ:* $R_2 = 4$; $R_3 = R_4 = 3$; $R_5 = 6$; $i_2(0-) = 3$; $i_3(0-) = 2$; $u_7(0-) = 6$; $u_1 = 36$.

70. Цепь: 114 — ИН $u_1 = U\delta_1(t)$; 212 — R_2; 323 — R_3; 424 — R_4; 513 — R_5; 634 — $C_6 = 0{,}5$. При $t > 0$ $u_6 = 4 - 4\exp(-t)$. Найти i_6, если C заменить на $L = 1$. *Ответ:* $i_6 = 2 - 2\exp(-2t)$.

71. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 1$; 212 — K_2, замыкается; 323 — C_3; 435 — R_4; 543 — L_5; 645 — ИН $u_6 = 3$. При $t > 0$ $i_5 = 2 + 0{,}5\exp(-2t) - 0{,}5\exp(-6t)$. Найти R_4, C_3, L_5. *Ответ:* $R_4 = 1{,}5$; $C_3 = 1/12$; $L_5 = 1$.

72. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 2$; 213 — R_2; 312 — L_3; 423 — C_4; 523 — K_5, размыкается. При $t > 0$ $u_4 = 6 - 8\exp(-t) + 2\exp(-2t)$. Найти R_2, L_3, C_4. *Ответ:* $R_2 = 3$; $L_3 = 1$; $C_4 = 0{,}5$.

73. Цепь: 115 — ИН $u_1 = U\delta_1(t)$; 212 — R_2; 323 — L_3; 435 — R_4; 535 — C_5; 634 — R_6; 745 — L_7; $u_5(\infty) = 4$; $u_7(0+) = 16$; энергия $W_{LC}(\infty) = 19$. Для $t > 0$ даны уравнения состояния $dx_2/dt = -2x_2 + x_3$; $dx_3/dt = x_1 - x_2 - x_3$; x_1, x_2, x_3 — переменные состояния. Найти параметры цепи. *Ответ:* $R_2 = 2$; $R_4 = 1$; $R_6 = 2$; $C_5 = 1$; $L_3 = 0{,}5$; $L_7 = 1$.

74. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = I\delta_1(t)$; 212 — R_2; 324 — R_3; 423 — L_4; 534 — C_5; 614 — K_6, разомкнут; $R_2 = 7R_3$. При $t > 0$ $u_5 = 24 - \exp(-t) + 12\exp(-3t)$. Ключ K_6 замыкается при $t = 5$. Найти u_5. *Ответ:* $u_5 = 96\exp(-2t^*) - 72\exp(-1{,}5t^*)$, где $t^* = t - 5$.

75. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 18$; 212 — R_2; 323 — $R_3 = 4{,}5$; 434 — L_4; 545 — R_5; 645 — C_6; 723 — K_7, замыкается. Найти i_2, если для i_2 при замкнутом ключе $h_1 = 2/9 + 2/9\exp(-3t) - 4/9\exp(-6t)$. *Ответ:* $i_2 = 4 + 2\exp(-3t) - 4\exp(-6t)$.

76. Цепь: 117 — ИН $u_1 = 24$; 223 — R_2; 334 — R_3; 447 — L_4; 535 — R_5; 657 — C_6; 767 — R_7; 812 — K_8; 936 — K_9. K_9 — разомкнут, K_8 замыкается при $t = 0$; $u_4(0+) = 16$; $i_5(0+) = 4$; $i_3(\infty) = 4$. По окончании переходного процесса в момент t_1 замыкается K_9 и $u_4(t_1+) = -6{,}4$. Найти R_2, R_3, R_5, R_7. *Ответ:* $R_2 = 2$; $R_3 = R_5 = 4$; $R_7 = 2$.

77. Цепь: 113 — ИН $u_1 = U_1\exp(-\alpha t)\delta_1(t)$; 212 — R_2; 323 — C_3; $u_3(0+) = 0$; $i_2(0+) = 5$. При $t > 0$ $u_3 = 20\exp(-2t) - 20\exp(-4t)$. Найти R_2, C_3, U_1. *Ответ:* $R_2 = 5$; $C_3 = 1/8$; $U_1 = 20$.

78. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 100$; 212 — R_2; 325 — R_3; 434 — R_4; 545 — R_5; 614 — C_6; 745 — C_7; 823 — K_8, замыкается; $R_2 = R_4 = R_5 = 10$; $R_3 = 20$; $C_6 = C_7 = 0{,}05$. Найти i_6. *Ответ:* $i_6 = -2\exp(-1{,}6t)$.

79. Цепь: 115 — ИН u_1; 223 — $L_2 = 0{,}5$; 324 — $R_3 = 0{,}4$ 434 — ИН u_4; 535 — $R_5 = 2$; 645 — $C_6 = 1$; 712 — K_7, замыкается; $i_6(0+) = 4$. Найти i_5. *Ответ:* $i_5 = 2/3 - -2/3\exp(-t) - 4/3\exp(-2t)$.

80. Цепь: 114 — $C_1 = 3$; 223 — $R_2 = 0{,}5$; 334 — $C_3 = 6$; 412 — K_4, замыкается; $u_3(0-) = u_{34}(0-) > u_1(0-) = u_{14}(0-)$; $u_1(\infty) = 4$. При $t > 0$ в R_2 выделяется полная энергия $W = 9$. Найти $u_1(0-) = u_{14}(0-)$; $u_3(0-) = u_{34}(0-)$. *Ответ:* $u_1(0-) = u_{14}(0-) = 2$; $u_3(0-) = u_{34}(0-) = 5$ или $u_1(0-) = 6$; $u_3(0-) = 3$.

81. Цепь: 116 — ИН u_1; 223 — R_2; 336 — R_3; 434 — R_4; 546 — $R_5 = 3$; 635 — R_6; 745 — R_7; 856 — R_8; 946 — $C_9 = 1/6$; 1012 — K_{10}, замыкается. При $t > 0$ $u_9 = 6 - 6\exp(-6t)$. Найти u_9 при $R_5 = 6$. *Ответ:* $u_9 = 7{,}2 - 7{,}2\exp(-5t)$.

Указания. При решении следующих вариантов задач рекомендуется: 1), 2), 19), 21) исследовать режимы работы цепи; 3) использовать значения $i_4(0+)$, $i_4(\infty)$; 4) найти τ; 5), 45), 47), 67), 70) исследовать схемы при $t = 0+$, $t \to \infty$; 6) учесть $u_{C_2}(0+)$ при расчете $u_{C_2\text{вын}}$ по эквивалентной схеме; 7) использовать ВАХ C-элемента при расчете u_{32}; 8), 9) определить порядок цепи; 10) учесть, что $i_3(1+) = 2i_3(0+)$; 11) учесть, что характер цепи должен быть резистивным; 12) проанализировать схемы при $t = 0-, t \to \infty$; 13) использовать формулы энергии для C- и R-элементов; 14) учесть, что в цепи особый случай коммутации; 16), 41), 43), 46), 59), 66), 71), 72) составить ХП цепи; 17) найти ПХ для u_C; 20) учесть, что уравнения состояния справедливы для любых t; 22) учесть, что $u'_C(0+) = i_C(0+)/C$; 23) вначале проанализировать схему свободного режима; 24) учесть, что $i'_L(0+) = u_L(0+)/L$; 44) учесть идентичность решений; 48) преобразовать ИТ i_7 к эквивалентному ИН; 49) вначале найти u_6; 50), 55), 60) исследовать схему при $t = 0-$, $t = 0+$, $t \to \infty$; 51) использовать перебор вариантов; 52) использовать ВАХ L-элемента и анализ схем при $t = 0+, t \to \infty$; 53), 61), 81) использовать МЭИ; 56) учесть, что процессы на участках R_3L_4, R_5C_6, R_7L_8 независимы; 57) использовать ВАХ C-элемента и анализ схем при $t = 0+$, $t \to \infty$; 58) обратить внимание на аналогию двух цепей, образующихся при $t > 0$; 65) обратить внимание на значение $i_5(0+)$; 69) исследовать схемы при $t = 0-$, $t = 0+$; 73) идентифицировать переменные состояния и рассмотреть уравнения состояния при $t \to \infty$ и $t = 0+$; 74) составить ХП при $t < 5$ и $t > 5$; 75) найти $i'_2(0+)$ по уравнениям состояния; 78) использовать решение для $u_C(t)$.

4.3. Анализ установившихся синусоидальных режимов

1. Цепь: 114 — ИН $U_1 = 50$; 212 — R; 323 — L; 434 — Z; 534 — К. При замкнутом ключе $\tilde{P}_S = 50 + j350$, при разомкнутом — $\tilde{P}_S = 1250$. Найти R, Z_L, Z. *Ответ:* $R = 1$; $Z_L = j7$; $Z = 1 - j7$.

2. Цепь: 111′ — ИН $U_1 = 10$; 212 — L_1; 322′ — R_1; 412′ — C_1; 523 — L_2; 633′ — R_2; 72′3′ — C_2; 834 — L_3; 944′ — R_3; 103′4′ — C_3; 1145 — L_4; 1255′ — R_4; 134′5′ — C_4; 1456 — L_5; 1561′ — R_5; 165′6 — C_5; $|Z_k| = 10$. Найти U_{16}. *Ответ:* $U_{16} = 10$.

3. Цепь: 113 — ИН $U_1 = 5$; 212 — C_2; 323 — R_3; 424 — R_4; 543 — L_5. В цепи резонанс; $U_2 = 5$; $P_3 = P_4 = 10$. Найти $|Z_2|$, R_3, R_4, $|Z_5|$. *Ответ:* $|Z_2| = 1{,}25$; $R_3 = 5$; $R_4 = 1$; $|Z_5| = 2$.

4. Цепь: 114 — ИН $U_1 = 100\sqrt{2}$; 212 — C_2; 323 — R_3; 434 — C_4; 524 — L_5; $U_2 = U_5 = 100$; $P_Q = -1000$; $|Z_5| = 10$. Найти $|Z_2|$, $|Z_3|$, $|Z_4|$. *Ответ:* $|Z_2| = 10$; $R_3 = |Z_4| = 5$.

5. Цепь: 131 — ИТ $I_1 = 4$; 213 — R_2; 312 — L_3; 423 — R_4; 523 — C_5; $U_2 = 4$; $P_2 = P_4 = 8$; $|Z_3| = 2$. Найти R_2, R_4 $|Z_5|$. *Ответ:* $R_2 = 2$; $R_4 = |Z_5| = 4$.

6. Цепь: 113 — ИН u_1; 212 — R_2; 312 — L_3; 423 — R_4; 523 — C_5; $U_2 = U_4 = 12$; $I_5 = 4$; $P_{Q_3} = 36$; $P = 84$. Найти R_2, $|Z_3|$, R_4, $|Z_5|$. *Ответ:* $R_2 = |Z_5| = 3$; $R_4 = |Z_3| = 4$.

7. Цепь: 115 — ИН $U_1 = 4{,}5\sqrt{2}$; 212 — R_2; 323 — L_3; 435 — C_4; 534 — R_5; 645 — C_6; $P_2 = 32$; $P_5 = 4$; $P_{Q_3} = 64$; $P_{Q_4} = -25$; $P_{Q_6} = -3$. Найти R_2, $|Z_3|$, $|Z_4|$, R_5, $|Z_6|$. *Ответ:* $R_2 = |Z_4| = 0{,}5$; $|Z_3| = 1$; $R_5 = 2$; $|Z_6| = 1{,}5$.

8. Цепь: 114 — ИН $U_1 = 15$; 212 — R_2; 323 — L_3; 434 — C_4; $U_2 = 9$ на частотах f_1 и $4f_1$. Найти U_3, U_4 на частоте f_1. *Ответ:* $U_3 = 4$; $U_4 = 16$.

9. Цепь: 121 — ИН u_1; 223 — L_2; 331 — C_3; 434 — L_4; 541 — R_5. Определить, при какой частоте ω ток i_5 не зависит от R_5. Найти $\dot{I}_5$ при этом. *Ответ:* $\omega = 1/\sqrt{L_2 C_3}$; $\dot{I}_5 = \dot{U}_1/(j\omega L_2)$.

10. Цепь: 112 — ИТ $I_1 = 10$; 212 — R_2; 323 — Z_C; 431 — Z; 531 — К. При замкнутом ключе $\tilde{P}_S = 300 - j300$, при разомкнутом ключе $\tilde{P}_S = 200$. Найти R_2, $|Z_C|$, Z. *Ответ:* $R_2 = |Z_C| = 6$; $Z = 3 + j6$.

11. Цепь 113 — ИН $u = 8\cos(10t + 45°)$; 212 — R; 323 — L; 423 — C; $i_L = 4\cos(10t - 45°)$. При увеличении L в два раза i_R опережает u на 45°. Найти R, L, C. *Ответ:* $R = 4$; $L = 0{,}2$; $C = 1/20$.

12. Цепь: 112 — ИТ $i_1 = 4\sin(\omega t - 60°)$; 221 — $R_2 = 5$; 323 — C_3; 431 — L_4; 521 — C_5. Определить, какие из приведенных ниже выражений неправильные: 1) $u_2 = 20\sin(\omega t + 60°)$; 2) $u_2 = 10\sin\omega t$; 3) $u_2 = 0$; 4) $u_2 = 20\sin\omega t$; 5) $P_2 = 50$; 6) $u_2 = 10\sin(\omega t - 15°)$; 7) $u_2 = 20\sin(\omega t - 60°)$; 8) $i_5 = 40\sin(\omega t - 70°)$. Выбор обосновать. *Ответ:* 1, 4, 5, 6, 8.

13. Цепь: 121 — ИН $u = 10\sqrt{2}\cos(\omega t)$; 223 — $R = 2$; 334 — Z; 441 — C. Определить, какие из приведенных ниже выражений правильные: 1) $i = 5\sqrt{2}\cos(\omega t)$; 2) $u_C = 100\sqrt{10}\cos(\omega t - 63{,}5°)$; 3) $i = 0$; 4) $u_C = 10\sqrt{2}\cos(\omega t + 170°)$; 5) $P_R = 60$; 6) $p_R(t) = 25\sin^2(\omega t)$. Выбор обосновать. *Ответ:* 1, 2, 3.

14. Цепь: 131 — ИТ $\dot{I}_{m_1} = 5 - j15$; 213 — R_2; 313 — L_3; 412 — R_4; 523 — C_5; $|Z_5| = 2R_4$; $\dot{I}_{m_4} = 10$; $P_{Q_5} = -100$. Найти R_2, $|Z_3|$, R_4. *Ответ:* $R_2 = 2$; $|Z_3| = 2$; $R_4 = 1$.

15. Цепь: 112 — ИТ $I_1 = 3\sqrt{2}$; 212 — R_2; 323 — C_3; 431 — R_4; 531 — L_5. В цепи резонанс; $R_4 = |Z_5|$; $P_{Q_5} = 8$; $U_3 = 2\sqrt{2}$. Найти R_2, R_4, Z_3. *Ответ:* $R_2 = R_4 = 2$; $Z_3 = -j$.

16. Цепь: 121 — ИН u_1; 223 — L_2; 331 — L_3; 431 — K_4; L_2 и L_3 — индуктивно связаны, причем коэффициент связи $k = 0{,}5$. При разомкнутом ключе $U_3/U_5 = 0{,}5$. Определить, во сколько раз изменяется ток I_2 при замкнутом ключе, если включение ИСЭ согласное (встречное). *Ответ:* I_2 возрастает при согласном включении в 4 раза, при встречном — в 4/3 раза.

17. Цепь: 112 — ИТ i_1; 212 — L_2; 323 — C_3; 434 — R_4; 534 — C_5; 654 — ИН u_6; 751 — L_7. При какой частоте ω ток I_R не зависит от R? *Ответ:* $\omega^2 = (C_3 + C_5)/[C_3C_5(L_7 + L_2)]$.

18. Цепь: 121 — ИН $u_1 = 8\sqrt{2}\cos(10t + 45°)$; 223 — R_2; 334 — $R_3 = 4$; 441 — $C_4 = 0{,}05$; 531 — $L_5 = 0{,}2$; i_5 отстает от u_1 на 71,5°. Найти R_2 с учетом того, что $\cos 26{,}5° = 2/\sqrt{5}$; $\sin 26{,}5° = 1/\sqrt{5}$. *Ответ:* $R_2 = 1$.

19. Цепь: 112 — ИТ $I_1 = 2\sqrt{5}$; 223 — R_2; 331 — C_3; 424 — R_4; 541 — L_5; 621 — R_6; $I_2 = \sqrt{2}$; $I_4 = \sqrt{10}$; $I_6 = 2$; $\tilde{P}_S = 40 + j20$. Найти параметры цепи. *Ответ:* $R_2 = |Z_3| = 5$; $R_4 = 1$; $|Z_5| = 3$; $R_6 = 5$.

20. Цепь: 121 — ИН $u_1 = 20\sqrt{2}\cos(\omega t + 45°)$; 223 — R_2; 334 — L_3; 441 — C_4; $|Z_C| = 4$; 541 — R_5; $u_L = 10\sqrt{2}\cos(\omega t + 135°)$; $P_{QL} = 50$. Найти R_2, R_5, $|Z_L|$. *Ответ:* $R_2 = |Z_L| = 2$; $R_5 = 4$.

21. Цепь: 112 — ИТ i_1; 221 — L_2; $|Z_2| = 2$; 323 — C_3; 431 — R_4; 531 — L_5; $R_4 = |Z_5|$; $\dot{I}_1 = \dot{I}_5$; $I_4 = 5$. Найти R_4, $|Z_3|$. *Ответ:* $R_4 = |Z_3| = 2$.

22. Цепь: 121 — ИН u_1; 223 — L_2; 334 — R_3; 434 — C_4; 541 — $R_5 = R_3$; 641 — $C_6 = C_4$; $u_6 = 4\cos(\omega t - 90°)$; $U_{24} = 2$; $\alpha_{u_{24}} = \alpha_{i_2}$; $P_{QL} = 4$; $P = 8$. Найти u_1, $|Z_L|$, $|Z_C|$. *Ответ:* $u_1 = 2\sqrt{10}\cos(\omega t - 71{,}5°)$; $|Z_L| = 1$; $|Z_C| = 2$.

23. Цепь: 112 — ИТ $i_1 = 10\cos(10t - 45°)$; 221 — R_2; 321 — L_3; 423 — R_4; 531 — C_5; $i_5 = 5\sqrt{2}\cos(10t)$; $R_4 = |Z_5|$; $P_{QL} = 25$. Найти R_2, R_4, $|Z_3|$, $|Z_5|$. *Ответ:* $R_2 = 2$; $R_4 = 1$; $|Z_3| = 2$; $|Z_5| = 1$.

24. Цепь: 112 — ИН $u_1 = 125\sqrt{2}\cos(\omega t + 37°)$; 223 — C_2; 334 — $R_3 = 1$; 441 — L_4; 531 — C_5; $P = 100$; $\alpha_{i_4} - \alpha_{i_5} = -172°$; один из токов $i = 20\cos(\omega t + 135°)$. Найти $|Z_2|$, $|Z_5|$, $|Z_4|$. *Ответ:* $|Z_2| = 12{,}5$; $|Z_5| = 5$; $|Z_4| = 7$.

25. Цепь: 121 — ИН u_1; 223 — C_2; 331 — R_3; 434 — C_4; 541 — L_5. При $u_1 = 6\sqrt{2}\cos(2t - 45°)$ ток $i_2 = 2\sqrt{2}\cos(2t + 45°)$. При $u_1 = 6\sqrt{2}\cos(4t - 45°)$ $\tilde{P}_S = 24$. Найти R_3, L_5, C_2, C_4. *Ответ:* $R_3 = 3$; $L_5 = 1$; $C_2 = 1/6$; $C_4 = 1/4$.

26. Цепь: 112 — ИТ i; 212 — R; 312 — L; 412 — C; $p(t) = 20 + 20\cos(2\omega t + 60°)$; $p_L(t) = 200\sin(2\omega t + 60°)$; $I_{mC} = 20$. Найти R, $|Z_L|$, $|Z_C|$, I_m, α_i. *Ответ:* $R = 10$; $|Z_L| = |Z_C| = 1$; $I_m = 2$; $\alpha_i = 30°$.

27. Цепь: 112 — ИТ $I_1 = 5$; 212 — C_2; 323 — L_3; 423 — R_4; 531 — L_5; 631 — C_6; 734 — К$_7$; 841 — L_8; $|Z_{L_8}| = |Z_{L_5}| = 2$. При разомкнутом ключе $\tilde{P}_S = -j125$, а при замкнутом ключе $\tilde{P}_S = 250$. Найти $Z_{C_2}, Z_{L_3}, Z_{C_6}, R_4$. *Ответ:* $Z_{C_2} = -j5$; $Z_{L_3} = j4$; $Z_{C_6} = -j2$; $R_4 = 4$.

28. Цепь: 121 — ИН $U_1 = 8$; 223 — $R_2 = 4$; 323 — C_3; $|Z_3| = 2$; 431 — L_4; 531 — R_5; 631 — C_6; $P_{R_2} = 4$; $P_Q = -8$. Найти R_5. *Ответ:* $R_5 = 2{,}4$.

29. Цепь: 121 — ИН u_1; 223 — R_2; 334 — L_3; 441 — R_4; 545 — R_5; 651 — L_6; $\alpha_{u_1} - \alpha_{i_5} = 90°$ при заданной частоте ω. Подобрать R_4. *Ответ:* $R_4 = (\omega^2 L_3 L_6 - R_2 R_5)/(R_2 + R_5)$.

30. Цепь А: 112 — ИН $u_1 = 20\cos(\omega t - 40°)$; 213 — L_2; 334 — C_3; 424 — R_4; $u_3 = 100\cos(\omega t - 130°)$.
Цепь Б: 121 — ИТ $i_1 = 10\cos(\omega t - 30°)$; 212 — L_2; 312 — C_3; 412 — R_4. R, L, C, ω в обеих цепях одинаковы. Найти i_3 в цепи Б. *Ответ:* $i_3 = 2\cos(\omega t + 60°)$.

31. Цепь: 112 — ИН $U_1 = 12$; 213 — R_2; 323 — R_3; 434 — L_4; 542 — C_5; 642 — L_6; $|Z_5| = 2$; $\tilde{P}_S = 24$. При увеличении C_5 в два раза $\tilde{P}_S = 72$. Найти R_2, R_3, Z_4, Z_6. *Ответ:* $R_2 = 2$; $R_3 = 4$; $Z_4 = Z_6 = j2$.

32. Цепь: 112 — ИН u_1; 213 — L_2; 323 — R_3; 434 — C_4; 542 — ИН $\dot{U}_5 = \dot{U}_1 e^{j90°}$; $|Z_2| = |Z_4|$, $P_3 = 20$. Найти P_3 при увеличении R_3 в два раза. *Ответ:* $P_3 = 40$.

33. Цепь: 121 — ИТ $I_1 = 3$; 212 — R_2; 313 — R_3; 434 — C_4; 524 — L_5; 623 — L_6. При $\omega = \omega_1$ $|Z_4| = 4$; $\tilde{P}_S = 12$. При $\omega = 0{,}5\omega_1$ $\tilde{P}_S = 18$. Найти R_2, R_3, Z_5, Z_6 при $\omega = \omega_1$. *Ответ:* $R_2 = 2$; $R_3 = 4$; $Z_6 = j12$; $Z_5 = j4$.

34. Цепь: 112 — ИН u_1; 213 — R_2; 323 — C_3; 434 — C_4; 524 — Z_5; $u_3 = 10\sqrt{2}\cos(\omega t - 135°)$; Z_5 — пассивный двухполюсник. Определить, какие из приведенных далее выражений неправильны: 1) $u_5 = 10\sqrt{2}\cos(\omega t + 43°)$; 2) $u_5 = 5\sqrt{2}\cos(\omega t + 46°)$; 3) $P_\Sigma = 0$; 4) $u_2 = u_1$; 5) $u_2 = 10\sqrt{2}\cos(\omega t + 45°)$; 6) $I_2 = I_3 = I_4$. Ответ обосновать. *Ответ:* 2, 5.

35. Цепь: 112 — ИН $U_1 = 20\sqrt{2}$; 213 — L_2; 334 — R_3; 424 — C_4; 524 — R_5; $I_4 = 5$; $P = 200$. В цепи резонанс. Найти Z_2, R_3, Z_4. *Ответ:* $Z_2 = j2$; $R_3 = 2$; $Z_4 = -j4$.

36. Цепь: 121 — ИТ i_1; 212 — L_2; 313 — R_3; 423 — L_4; 523 — C_5. При $i_1 = 12\sqrt{2}\cos(\omega t + 45°)$ напряжение $u_1 = 4\sqrt{2}\cos(\omega t + 135°)$. При $i_1 = 6\sqrt{2}\cos(4t - 45°)$ мощность $\tilde{P}_S = 24$. Найти R_3, L_2, L_4, C_5. *Ответ:* $R_3 = 1/3$; $L_2 = 1/6$; $L_4 = 1/4$; $C_5 = 1$.

37. Цепь: 112 — ИН u_1; 213 — C_2; 323 — R_3; 434 — R_4; 524 — L_5; $U_1 = U_2 = 5$; $P_3 = P_4 = 10$. В цепи резонанс. Найти R_3, R_4, Z_2, Z_5. *Ответ:* $R_3 = 5$; $R_4 = 1$; $Z_2 = -j1{,}25$; $Z_5 = j2$.

38. Цепь: 112 — ИН $U_1 = 10$; 213 — C_2; 334 — R_3; 424 — L_4; 524 — C_5; $P_{Q_2} = P_{Q_5} = -16$; $U_3 = 6$; $|Z_2| = 4$. Найти R_3, Z_4, Z_5. *Ответ:* $R_3 = 3$; $Z_4 = j16/3$; $Z_5 = -j16$.

39. Цепь: 121 — ИТ $I_1 = 4$; 212 — C_2; 312 — R_3; 413 — $R_4 = 1$; 523 — L_5; $U_5 = 2\sqrt{2}$; $P = 16$. В цепи резонанс. Найти R_3, Z_2, Z_5. *Ответ:* $R_3 = 2$, $Z_2 = -j_2$; $Z_5 = j$.

40. Цепь: 112 — ИН u_1; 213 — $R_2 = 1$; 314 — $C_3 = 1/2$; 423 — $R_4 = 1/2$; 524 — L_5; 634 — КЗ; $U_2 = 2$; $\omega = 2$; $I_{КЗ} = 2\sqrt{2}$. Найти U_1. *Ответ:* $U_1 = \sqrt{5}$.

41. Цепь: 112 — ИН $\dot{U}_1 = 30$; 213 — R_2; 334 — L_3; 424 — R_4; 545 — R_5; 625 — C_6; $\tilde{P}_S = 240 + j120$; $|Z_3| = 2$. Найти P_{Q_3} и P_{Q_6} при уменьшении $|Z_3|$ в четыре раза. *Ответ:* $P_{Q_3} = 50$; $P_{Q_6} = -50$.

42. Цепь: 141 — ИТ $I_1 = 2$; 212 — R_2; 323 — К$_3$; 414 — Z_{L_4}; 524 — Z_{L_5}; 624 — Z_{C_6}; 734 — Z_{C_7}. Комплексная полная мощность цепи $\tilde{P}_S = j40$ при разомкнутом ключе и $\tilde{P}_S = 40$ при замкнутом ключе. Найти Z_{L_4}, R_2, Z_{C_7}. *Ответ:* $R_2 = 5$; $Z_{L_4} = j10$; $Z_{C_7} = -j5$.

43. Цепь: 151 — ИТ $\dot{I}_1$; 212 — R_2; 323 — Z_{L_3}; 413 — R_4; 534 — R_5; 645 — Z_{C_6}; 735 — R_7. В цепи резонанс. Действующее значение напряжения $U_{13} = 10\sqrt{5}$, а $U_{35} = 10\sqrt{10}$. Мощности: $P_{R_2} + P_{R_4} = 200$; $P_{R_5} + P_{R_7} = 300$. Определить I_1. *Ответ:* $I_1 = 10$.

44. Цепь: 115 — ИН $U_1 = 90$; 212 — R_2; 323 — R_3; 434 — Z_{C_4}; 534 — Z_{L_5}; 645 — Z_{L_6}; 745 — Z_{C_7}; 825 — R_8. Входное сопротивление $Z_{вх}(j1) = Z_{вх}(j4) = 9$; $Z_{вх}(j2) = 5$. При $\omega = 4$ мощность $P_{R_8} = 600$. Определить R_2, R_3, R_8. *Ответ:* $R_2 = R_3 = 3$; $R_8 = 6$.

45. Цепь: 114 — ИН $\dot{U}_1$; 212 — Z_2; 312 — К$_3$; 423 — Z_4; 534 — Z_5; 634 — Z_6. Начальная фаза напряжения источника $\alpha_{u_1} = 0$. Комплексная мощность цепи при замкнутом ключе $\tilde{P}_S = 100 - j75$, а $\dot{I}_6 = 3 - j4$. При разомкнутом ключе $\tilde{P}_S = 125$. Определить $\dot{I}_6$ при разомкнутом ключе. *Ответ:* $\dot{I}_6 = -j5$.

46. Цепь: 113 — ИН $U_1 = 8$; 212 — $R_2 = 4$; 312 — C_3, $|Z_{C_3}| = 2$; 423 — L_4; 523 — R_5; 623 — C_6. Реактивная мощность цепи $P_Q = -8$, $P_{R_2} = 4$. Найти R_5. *Ответ:* $R_5 = 2{,}4$.

47. Цепь: 131 — ИТ $i_1(t) = 10\sqrt{2}\cos(\omega t + 45°)$; 212 — R_2; 323 — C_3; 413 — Z_4 — комплексное сопротивление *RLC*-двухполюсника. Обосновать, какой из следующих режимов невозможен: 1) $u_1(t) = 20\sqrt{2}\cos(\omega t - 55°)$; 2) $i_2(t) = 10\cos\omega t$; $i_4(t) = 10\sin\omega t$; 3) $i_2(t) = i_4(t)$; 4) $u_1(t) = 20\cos(\omega t + 90°)$; $P_2 = 125$; 5) в цепи резонанс, $i_2(t) = 5\cos(\omega t + 30°)$. *Ответ:* 1, 2, 4, 5.

48. Цепь: 131 — ИТ $I_1 = 4$; 213 — C_2; 313 — R_3; 412 — $R_4 = 1$; 523 — L_5. В цепи резонанс. $U_{L_5} = 2\sqrt{2}$. Активная мощность цепи $P = 16$. Найти R_3, $|Z_L|$, $|Z_C|$. *Ответ:* $R_3 = 2$; $|Z_L| = 1$, $|Z_C| = 2$.

49. Цепь: 114 — ИН $u_1(t)$; 212 — L_2; 323 — C_3; 423 — R_4; 534 — R_5; 634 — C_6. $U_{13} = 2$, $U_{34} = 2\sqrt{2}$; $P_{QL} = 4$. Активная мощности цепи $P = 8$, $R_4 = R_5$, $C_3 = C_6$. Ток источ-

ника и напряжение u_{13} совпадают по фазе. Найти R_4, $|Z_{C_3}|$, $|Z_{L_2}|$. *Ответ:* $R_4 = 2; |Z_{C_3}| = 2; |Z_{L_2}| = 1$.

50. Цепь: 115 – ИН $\dot{U}_1$; 212 – $Z_{L_2} = j4$; 323 – Z_{C_3}; 434 – $Z_{L_4} = j$; 534 – Z_{C_5}; 645 – $R_6 = 2$. Действующие значения $I_1 = 6$, $U_1 = U_{13} = 12$. Найти Z_{C_3} и Z_{C_5}. *Ответ:* 1) $Z_{C_3} = -j2; Z_{C_5} = -j2/3$; 2) $Z_{C_3} = -j6; Z_{C_5} = -j2$.

51. Цепь: 115 – ИН $\dot{U}_1$; 212 – R_2; 323 – Z_{C_3}; 413 – Z_{C_4}; 535 – R_5; 634 – R_6; 745 – Z_{L_7}. В установившемся синусоидальном режиме $|Z_{35}|/|Z_{13}| = 0{,}8\sqrt{2}$, а $\alpha_{u_{13}} - \alpha_{i_1} = -53°$, $\alpha_{u_{35}} - \alpha_{i_1} = -45°$. Доказать, что в цепи резонанс. *Замечание:* $|Z_{13}|$ – модуль комплексного сопротивления двухполюсника между узлами 1 и 3, а $|Z_{35}|$ – между узлами 3 и 5; α_{i_1} – начальная фаза тока источника.

52. Цепь: 141 – ИТ $\dot{I}_1$; 212 – Z_{L_2}; 324 – Z_{C_3}; 414 – R_4; 513 – Z_{L_5}; 634 – Z_{C_6}. Действующие значения: тока источника $I_1 = 2$, напряжения на зажимах источника $U_1 = 10$, тока $I_{L_2} = 10$; $P_R = 20$; $|Z_{L_2}| = |Z_{C_6}| = 3$. Найти R, Z_{C_3}, Z_{L_5}. *Ответ:* $R = 5$; 1) $Z_{C_3} = -j2$, $Z_{L_5} = j2$; 2) $Z_{C_3} = -j4$; $Z_{L_5} = j4$.

53. Цепь: 114 – ИН $\dot{U}_1$; 212 – R_2; 313 – R_3; 424 – R_4; 524 – Z_{C_5}; 634 – R_6; 734 – Z_{L_7}. Отношение действующих значений токов $I_{R_3}/I_{R_2} = \sqrt{2{,}5}$, а $\alpha_{u_1} - \alpha_{i_2} = -45°$, $\alpha_{u_1} - \alpha_{i_3} = 26{,}5°$. Доказать, что в цепи резонанс.

54. Цепь: 115 – ИН $\dot{U}_1$; 212 – R_2; 323 – R_3; 424 – R_4; 535 – Z_L; 645 – Z_C. Действующее значение напряжения источника $U_1 = 32$; $R_2 = R_4$; $P_{R_2} = 72$; $P_{R_3} = 80$; $P_{R_4} = 40$. В цепи резонанс. Найти R_2, R_3, Z_L, Z_C. *Ответ:* $R_2 = 2$; $R_3 = 2{,}5$; $Z_L = j2{,}5$; $Z_C = -j4$.

55. Цепь: 141 – ИТ $\dot{I}_1$; 212 – Z_C; 313 – Z_L; 424 – R_4; 534 – $R_5 = 7$. Доказать, что при $I_{R_4} = I_{R_5}$ в цепи нет резонанса.

56. Цепь: 114 – ИН $\dot{U}_1$; 212 – Z_{C_2}; 323 – Z_{L_3}; 424 – R_4; 534 – R_5; $U_1 = 3$, $U_{R_5} = 2$, $I_{C_2} = \sqrt{5}$, $P_{R_5} = 2$, $P_{Q_3} = 2$, $\alpha_{u_1} = \alpha_{u_5}$. Найти Z_{C_2}, R_4, Z_{L_3}, R_5, $\tilde{P}_{S_1}$. *Ответ:* $R_4 = R_5 = 2$; $Z_{L_3} = j2$; $Z_{C_2} = -j$; $\tilde{P}_{S_1} = -6 + j3$.

57. Цепь: 115 – ИН $\dot{U}_1$; 212 – R_2; 323 – Z_{L_3}; 434 – Z_{C_4}; 534 – K_5. При $\omega = 10$ ток источника имеет одно и то же значение при замкнутом и разомкнутом ключе. Найти такую частоту ω, при которой ток источника будет иметь максимальное значение при разомкнутом ключе. *Ответ:* $\omega = 10\sqrt{2}$.

58. Цепь: 131 – ИТ $\dot{I}_1$; 213 – Z_{C_2}; 312 – R_3; 423 – Z_{L_4}; $\dot{U}_{C2} = 16 + j12$; $\dot{I}_1 = 0{,}8 + j1{,}6$; $R_3 = 8$. Найти U_{R_3} и U_{L_4}. *Ответ:* $U_{R_3} = 16$; $U_{L_4} = 12$.

59. Цепь: 115 – ИН $\dot{U}_1$; 212 – R_2; 323 – Z_{L_3}; 434 – R_4; 535 – Z_{L_5}; 645 – Z_{C_6}. Действующие значения: $I_{R_2} = I_{R_4} = \sqrt{10}$, $I_{L_5} = 2$. Мощность источника $\tilde{P}_{S_1} = -60 - j20$, а ветви с емкостью $\tilde{P}_{S_4} + \tilde{P}_{S_6} = 30 - j10$. Найти R_2, Z_{L_3}, R_4, Z_{C_6}, Z_{L_5}. *Ответ:* $R_2 = R_4 = 3$; $Z_{L_3} = j$; $Z_{C_6} = -j$; $Z_{L_5} = j5$.

60. Цепь: 161 – ИТ $\dot{I}_1$; 212 – Z_{C_2}; 323 – R_3; 434 – Z_{L_4}; 546 – Z_{C_5}; 615 – R_6; 756 – Z_{L_7}. Действующее значение тока $I_{R_3} = 3$. $P_{R_3} = P_{R_6} = 72$; $P_{QC_5} = -54$; $|Z_{L_7}| = |Z_{C_5}|$; $|\dot{U}_{C_2} + \dot{U}_{R_3}| = |\dot{U}_{R_3} + \dot{U}_{L_4}| = 120\sqrt{2}$. Найти R_3, R_6, Z_{L_4}, Z_{L_7}, Z_{C_2}, Z_{C_5}. *Ответ:* $Z_{L_4} = j56$; $Z_{L_7} = j6$; $Z_{C_2} = -j56$; $Z_{C_5} = -j6$; $R_3 = 8$; 1) $R_6 = 8$; 2) $R_6 = 4{,}5$.

61. Цепь: 114 – ИН $\dot{U}_1$; 212 – R_2; 323 – R_3; 434 – Z_{C_4}; 524 – $Z_{L_5} = j4$; $I_1 = 2$, $P_{R_2} = P_{R_3} = 16$, $\varphi = 0$. Найти R_2, R_3, Z_{C_4}. *Ответ:* $R_2 = 4$; $R_3 = 2$; $Z_{C_4} = -j2$.

62. Найти комплексные сопротивления двухполюсников Z_1 и Z_2, если при их последовательном соединении $Z_{вх} = 2 + j10$, а при параллельном соединении $Z_{вх} = 25 + j10$. *Ответ:* $Z_1 = 1 \pm j7$; $Z_2 = 1 \mp j7$.

63. Цепь: 131-ИТ $i_1(t)$; 212 – C_2; 323 – R_3; 423 – L_4; 513 – L_5. В установившемся синусоидальном режиме $i_{L_4}(t) = i_1(t)$; $R_3 = \omega L_4$; $\omega L_5 = 2$. Определить R_3 и $|Z_{C_2}|$. *Ответ:* $R_3 = |Z_{C_2}| = 2$.

64. Цепь: 116 – ИН $\dot{U}_1$; 212 – Z_{L_2}; 323 – R_3; 445 – R_4; 556 – Z_{C_5}; 646 – Z_{L_6}; 734 – Z_{C_7}; $U_{L_2} = 12$, $U_{L_6} = 4\sqrt{2}$, $R_4 = |Z_{L_6}| = |Z_{C_5}| = 2$, $P_{R_3} = 16$, $P_Q = 8$. Найти Z_{L_2}, Z_{C_7}, R_3, U_1. *Ответ:* $Z_{L_2} = j6$; $Z_{C_7} = -j6$; $R_3 = 4$; $U_1 = 4\sqrt{10}$.

65. Цепь: 131 – ИТ $\dot{I}_1$; 212 – Z_{L_2}; 323 – Z_3; 413 – Z_{C_4}. Действующие значения тока источника $I_1 = 5$ и напряжения на его зажимах $U_1 = 5$; $|Z_{C_4}| = |Z_{L_2}| = 1$; $P = 25$. Найти $Z_3 = r_3 + jx_3$. *Ответ:* $Z_3 = 0{,}5 - j0{,}5$.

66. Цепь: 113 – ИН $u_1(t)$; 212 – L_2; 323 – C_3; 423 – R_4. В установившемся синусоидальном режиме $i_R(t) = 2\sqrt{2}\cos(\omega t + 45°)$, $|Z_C|/|Z_L| = 2$. Найти $i_R(t)$, если L- и C-элементы поменять местами. *Ответ:* $i_R(t) = \sqrt{2}\cos(\omega t - 135°)$.

67. Цепь: 131 – ИТ $\dot{I}_1$; 213 – Z_{L_2}; 313 – Z_{C_3}; 412 – R_4; 523 – Z_{L_5}; $I_{C_3} = 4$, $R_4 = |Z_{L_5}|$, $\tilde{P}_S = 16$. Найти Z_{L_2} и Z_{C_3}. *Ответ:* $Z_{L_2} = j4$, $Z_{C_3} = -j2$.

68. Цепь: 131 – ИТ $\dot{I}_1$; 213 – Z_{C_2}; 313 – R_3; 412 – R_4; 523 – Z_{L_5}; $I_1 = 4$, $U_{L_5} = 2\sqrt{2}$, $R_4 = 1$, $P = 16$. Найти R_3, Z_{C_2}, Z_{L_5}. *Ответ:* $R_3 = 2$, $Z_{C_2} = -j2$, $Z_{L_5} = j$.

69. Цепь: 114 – ИН $\dot{U}_1$; 212 – Z_{C_2}; 324 – R_3; 423 – R_4; 534 – Z_{L_5}; $U_1 = U_{C_2} = 5$, $P_{R_3} = P_{R_4} = 10$. Найти Z_{C_2}, Z_{L_5}, R_3, R_4. *Ответ:* $Z_{C_2} = -j1{,}25$; $Z_{L_5} = j2$; $R_3 = 5$; $R_4 = 1$.

70. Цепь: 115 – ИН $\dot{U}_1$; 212 – Z_{C_2}; 323 – Z_{L_3}; 435 – R_4; 524 – R_5; 645 – Z_{C_6}; $U_{C_6} = 2$, $I_{L_3} = 2$, $U_{25} = 2\sqrt{2}$, $P = 8$, $P_Q = -16$, $P_{R_4} = 4$. Найти Z_{C_2}, Z_{C_6}, Z_{L_3}, R_4, R_5, U_1. *Ответ:* $Z_{C_2} = -j2$; $Z_{C_6} = -j1$; $Z_{L_3} = j1$; $R_4 = R_5 = 1$, $U_1 = 2\sqrt{10}$.

71. Цепь: 114 – ИН $\dot{U}_1 = 10$; 212 – Z_{L_2}; 334 – Z_{C_3}; 425 – Z_{L_4}; 525 – K_5; 656 – Z_{L_6}; 764 – Z_{C_7}; 823 – R_8. При замкнутом ключе комплексная мощность цепи $\tilde{P}_S = j25$, при разомкнутом ключе $\tilde{P}_S = 50$; $|Z_{L_4}| = |Z_{L_6}| = 10$. Найти Z_{L_2}, R_8, Z_{C_3}, Z_{C_7}. *Ответ:* $Z_{L_2} = j4$; $R_8 = 1$; $Z_{C_3} = -j3$; $Z_{C_7} = -j10$.

72. Цепь: 131 — ИТ $I_1 = 5$; 213 — L_2; 313 — R_3; 412 — L_4; 523 — C_5; $I_3 = 3$; $P_{Q_2} = 96$; $P_{Q_4} = 64$; $|Z_2| = 6$. Найти R_3, Z_4, Z_5. *Ответ:* $R_3 = 8$; $Z_4 = j$; $Z_5 = -j4$.

73. Цепь: 115 — ИН u_1; 212 — C_2; 323 — L_3; 435 — R_4; 524 — R_5; 645 — C_6; $I_3 = 2$; $U_6 = 2$; $P_4 = 4$; $\tilde{P}_{S_1} = -8 + j16$; $U_{25} = 2\sqrt{2}$. Найти R_4, R_5, Z_2, Z_3, Z_6, U. *Ответ:* $R_4 = R_5 = 1$; $Z_2 = -j2$; $Z_3 = j$; $Z_6 = -j$; $U = 2\sqrt{10}$.

74. Цепь: 114 — ИН u_1; 212 — C_2; 323 — R_3; 434 — L_4; 524 — R_5; $U_1 = U_2 = 5$; $P_3 = P_5 = 10$. В цепи резонанс. Найти Z_2, Z_4, R_3, R_5. *Ответ:* $Z_2 = -j1{,}25$; $Z_4 = j2$; $R_3 = 1$; $R_5 = 5$.

75. Цепь: 131 — ИТ $I_1 = 4$; 213 — L_2; $|Z_2| = 2{,}5$; 313 — R_3; 412 — R_4; 523 — C_5; $P_4 = 20$; $P_{Q_5} = -40$. В цепи резонанс. Найти R_3, R_4, Z_5. *Ответ:* $R_3 = 5$; $R_4 = 1$; $Z_5 = -j2$.

76. Цепь: 131 — ИТ $I_1 = 2$; 212 — R_2; 312 — C_3; 423 — L_4; 523 — C_5; 624 — K_6; 743 — C_7, $|Z_7| = 2{,}5$; 813 — L_8. При разомкнутом ключе $\tilde{P}_S = j25$, а при замкнутом ключе $\tilde{P}_S = 50$. Найти R_2, $|Z_3|$, $|Z_8|$. *Ответ:* $R_2 = 5$; $|Z_3| = 5$; $|Z_8| = 6{,}25$.

77. Цепь: 131 — ИТ $I_1 = 10$; 212 — L_2; 323 — C_3; 413 — R_4. При $\omega = \omega_1$ $\tilde{P}_S = 0$. При $\omega = 2\omega_1 I_4 = 3\sqrt{10}$; $P_{Q_2} = 200$. Найти при $\omega = 2\omega_1$ R_4, $|Z_2|$, $|Z_3|$, $\tilde{P}_S$. *Ответ:* $R_4 = 5$; $|Z_2| = 20$; $|Z_3| = 5$; $\tilde{P}_S = 450 + j150$.

78. Цепь: 115 — ИН $U_1 = 4$; 212 — L_2; 323 — C_3; 435 — ИН $U_4 = 4$; 524 — L_5; $|Z_5| = 1$; 645 — R_6; 713 — K_7; $P_{S_1} = 16$; $P_{S_4} = 32$. В цепи резонанс. Замыкание ключа не меняет режима работы цепи. Найти $|Z_2|$, $|Z_3|$, R_6. *Ответ:* $|Z_2| = 1$; $|Z_3| = 0{,}5$; $R_6 = 1$.

79. Цепь: 131 — ИТ $I_1 = 4$; 213 — C_2; 313 — R_3; 412 — $R_4 = 1$; 523 — L_5; $U_5 = 2\sqrt{2}$; $P = 16$. В цепи резонанс. Найти R_3, Z_2, Z_5. *Ответ:* $R_3 = 2$; $Z_2 = -j2$; $Z_5 = j$.

80. Цепь: 131 — ИТ $I_1 = 6$; 213 — R_2; 312 — L_3; 423 — R_4; $I_2 = I_3$; $P_2 = 50$; $P_4 = 40$. Найти R_2, R_4, Z_3. *Ответ:* $R_2 = 5$; $R_4 = 4$; $Z_3 = j3$.

Указания. При решении следующих вариантов задач рекомендуется: 1), 10) использовать формулу $\tilde{P}_S = YU^2 = ZI^2$; 2) найти $Z_{вх}$, преобразовав схему с учетом $|Z_{L_4}| = |Z_{C_K}|$; 3), 35), 37), 39) учесть, что в цепи резонанс, и использовать ВД; 4) обратить внимание на треугольник напряжений на ВД; 5) найти и сопоставить P и P_S; 6) определив I_3, используя ВД и формулу для расчета P, составить уравнения для отыскания I_2 и I_4; 7) используя расчет $\tilde{P}_S$, найти $\dot{I}_2$; 8) использовать ВД с учетом свойств резонансного контура и равенства $I_1(f_1) = I_1(4f_1)$; 9), 32) использовать эквивалентное преобразование ИН — ИТ; 11) найти α_{u_L} и построить ВД; 12), 13), 34) при выборе ответов учитывать оценку φ, I, $|Z_{вх}|$, P_{max}, ВД, особенности ПРН и ПРТ; 14) определив $|Z_5|$ и R_4, найти Y_{23}; 15), 20) учесть значение P_Q при резонансе; 16) учесть, что при $U_3 = 0{,}5U_1$ имеем $L_2 = L_3 = L$, $|M| = 0{,}5L$; 17) эквивалентно преобразовать схему к параллельному соединению ИТ, R_4, LC-ДП и найти частоту резонанса токов в ДП; 18) определить α_{u_5}, найти $\dot{U}_5$, а затем R_2; 19) опреде-

лив P_S, $U_{вх}$, P_6, найти $\tilde{P}_S$ остальной цепи и $\dot{I}_{24} = \dot{I}_2 + \dot{I}_4$; 21), 23), 30) учесть, что в цепи резонанс; 22) учесть, что $u_4 = u_6$, а на участке $L_2R_3C_4$ резонанс; 24) использовать оценку I_{m_4} и φ; 25), 36) оценить $Z_{вх}$ при $\omega = 2$, а также φ при $\omega = 4$; 26) оценить P и P_S; 27) оценив $\tilde{P}_S$ при разомкнутом и замкнутом ключе, составить соответствующие эквивалентные схемы; 28) определив $I_{вх}$, использовать баланс мощностей; 29) записав в общем виде выражение $\dot{I}_5 = Y_{5-1}\dot{U}_1$, по знаменателю Y_{5-1} составить уравнение для определения R_4; 31) учесть, что в цепи резонанс до изменения C_4 и после него; 33) учесть, что на частотах ω_1 и и $0{,}5\omega_1$ в цепи резонанс; 38) найти входной ток и использовать ВД; 40) считая $\dot{U}_2 = 2$, выразить $I_{КЗ} = I_{КЗ}(L)$.

4.4. Расчет переходных процессов при синусоидальных воздействиях

Предполагается, что в момент $t = 0$ в цепи происходит коммутация в результате замыкания (размыкания) ключа К или скачкообразного изменения воздействия. Найти указанные в условии задач величины при $t > 0$. Величины $f_в$ и $f_{св}$, используемые в некоторых задачах, — вынужденная и свободная составляющие реакции.

1. Цепь: 114 — ИН $u_1 = U_{m1}\cos(2t + \alpha_{u_1})$; 212 — R_2; 323 — L; 434 — C; 534 — $К_5$. В установившемся режиме при замкнутом ключе $i_2 = 2\cos 2t$, при разомкнутом ключе $i_2 = 2\cos(2t + 37°)$. Найти частоты собственных колебаний цепи. *Ответ:* $p_1 = -2$; $p_2 = -4$.
2. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = I_{m1}\cos(\omega t + \alpha_{i_1})$; 212 — L_2; 323 — R_3; 434 — C_4; 534 — L_5; 624 — $К_6$, замыкается; 714 — R_7; $R_7 = \omega L_2 = 1/(\omega C_4) = \omega L_5$; $u_{L_2}(0+) = 5\sqrt{2}$; $i_7(0+) = 2{,}5\sqrt{2}$; $u_{2-в}(t) = 0$. Найти i_1. *Ответ:* $i_1 = 5\cos(\omega t - 45°)$.
3. Цепь: 121-ИТ $i_1 = 4\cos(2t - 90°)$; 212 — $К_2$, размыкается; 312 — R_3; 412 — L; 512 — C. При $t > 0$ ток $i_{LC} = i_L + i_C = 8t\exp(-2t)$. В установившемся режиме $U_{12} = 2\sqrt{2}$. Найти R_3, L, C и i_4 при $t > 0$. *Ответ:* $R_3 = 1$; $L = 1$; $C = 1/4$; $i_4 = 2\exp(-2t) + 4t\exp(-2t) - 2\cos 2t$.
4. Цепь: 114 — ИН $u_1 = U_{m1}\cos(2t + \alpha_{u_1})$; 212 — R_2; 323 — $К_3$, размыкается; 424 — L; 534 — C_5; 634 — R_6; до коммутации u_1 и i_2 совпадали по фазе. При $t > 0$ ток $i_2 = 3\sqrt{5}\cos(2t + 10{,}5°) - 3{,}6\exp(-4t)$; $u_C = 8\exp(-2t)$; [$\cos(10{,}5°) = 11/(5\sqrt{5})$; $\sin(10{,}5°) = 2/(5\sqrt{5})$]. Найти L, R_2, R_6, C, U_{m1}, α_{u1}. *Ответ:* $L = 1$; $R_2 = 4$; $R_6 = 2$; $C = 0{,}25$; $U_{m1} = 30$; $\alpha_{u1} = 37°$.
5. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 20\sin t\,\delta_1(t)$; 212 — R; 323 — L; 434 — C; $i_{св} = -8\exp(-2t) + 6\exp(-3t)$. Найти $i_в$. *Ответ:* $i_в = 2\sqrt{2}\cos(t - 45°)$.
6. Цепь: 121 — ИТ $i_1 = (8\cos 2t - 8\sin 2t)\delta_1(t)$; 212 — R_2; 313 — R_3; 432 — C. Начальная фаза напряжения на емкости $\alpha_{u_C} = 0$. При $t = 0+$ $i_2(0+) = 6$, $u_{C-в}(0+) = -8$. Найти R_2, R_3, C. *Ответ:* $R_2 = 1$; $R_3 = 3$; $C = 1/8$.

7. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 10\cos 2t\,\delta_1(t)$; 212 — R_2; 323 — L; 434 — R_4; 524 — R_5; 615 — R_6; 754 — $C = 1/16$; 854 — R_8; $Z_{вх}(j\omega) = 4 = \text{const}$, $i_6 = 3\cos 2t - \sin 2t + 2\exp(-4t)$, $u_L(0+) = 20$. Найти R_6, R_8, i_5. *Ответ:* $R_6 = R_8 = 8$; $i_5 = 3\cos 2t - \sin 2t + 2\exp(-4t)$.

8. Цепь: 114 — ИН $u_1 = (30\cos 2t - 30\sin 2t)\delta_1(t)$; 212 — R_2; 324 — R_3; 423 — R_4; 534 — C. При $t > 0$ ток $i_4 = -4\sin 2t + 4\exp(-2t)$. Найти i_4 при замене C на L, считая, что длительность переходного процесса не меняется. *Ответ:* $i_4 = 4\cos 2t - 4\exp(-2t)$.

9. Цепь: 114 — ИН $u_1 = U_{m1}\cos(\omega t + \alpha_{u1})\delta_1(t)$; 212 — R_2; 323 — L_3; 434 — R_4; 534 — C_5. При $U_{m1} = 45$ и $\alpha_{u1} = 0$ ток $i_2 = 10\cos(6t - 37°) + 2\exp(-3t) - 10\exp(-6t)$. Найти i_2 при $U_{m1} = 45\sqrt{2}$ и $\alpha_{u1} = -45°$. *Ответ:* $i_2 = 10\sqrt{2}\cos(6t - 82°) - 2\exp(-3t)$.

10. Цепь: 114 — ИН $u_1 = U_{m1}\cos(\omega t + 45°)$; 212 — R_2; 323 — L; 434 — R_4; 534 — K_5, замыкается; 624 — C_2; при $t > 0$ ток $i_{Lв} = 12\sqrt{2}\cos(\omega t - 45°)$, $i_{2-в} = -8\exp(-t) + 8\exp(-4t)$. Найти i_L. *Ответ:* $i_L = 12\sqrt{2}\cos(2t - 45°) - 6{,}4\exp(-t) + 1{,}6\exp(-4t)$.

11. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = I_{m1}\cos(\omega t + \alpha_{i1})$; 214 — C; 313 — R_3; 412 — K_4, размыкается; 523 — $R_5 = 2R_3$; 624 — $L = 1$; 734 — КЗ. При $t > 0$ $u_{12} = 12\cos 2t - 4\exp(-2t) + 16\exp(-4t)$, $u_C(0+) = 8$. Найти i_{34}. *Ответ:* $i_{34} = 6\cos 2t - 2\exp(-2t) - 4\exp(4t)$.

12. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 8\cos(2t + 53°)\delta_1(t)$; 214 — R_2; 312 — R_3; 423 — L; 534 — C; 654 — R_6; 725 — K_7, замыкается; $R_2 = R_3 = R_6$. При $t = 0+$ (ключ K_7 замкнут) $u_4(0+) = 3{,}2$. Спустя время t_1, достаточное для окончания переходного процесса, ключ K_7 размыкается и $u_4(t_1+) = 3{,}2 = u_4(t_1-)$. Найти R_2, L, C. *Ответ:* $R_2 = 2$; $L = 1$; $C = 1/4$.

13. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 10\cos(2t + \alpha_{i1})$; 212 — R_2; 324 — R_3; 413 — R_4; 534 — L; 624 — K_6, замыкается; $u_{14}(0-) = 24$, $i_2(0+) = 4$, $u_5(0+) = -4$, $R_3 = 2R_2$, $R_4 = R_2$, $\tau = 1/4$. Найти R_2, α_{i1}, L. *Ответ:* $R_2 = 2$, $\alpha_{i1} = 0$, $L = 2$.

14. Цепь: 121 — ИТ $i_1 = 4\cos(\omega t - 90°)$; 212 — C; 312 — L; 413 — R_4; 523 — $R_5 = R_4$; 613 — K_6, размыкается; до коммутации токи $I_C = 2$, $I_L = 4$. Найти $i_2(0+)$. *Ответ:* $i_2(0+) = 3$.

15. Цепь: 117 — ИН $u_1 = 50\cos\omega t$; 212 — L_2; 323 — R_3; 413 — $R_4 = 2$; 535 — L_5; 656 — C; 767 — R_7; 834 — $R_8 = 2$; 947 — $R_9 = 4$; 1047 — K_{10}, размыкается; при $t = 0+$ даны $i_1 = 16{,}5$, $u_{L_2} = 1$, $u_{L_5} = 13$, $i_7 = 11$. Найти токи во всех ветвях и напряжения на L_2, L_5, C при $t = 0-$. *Ответ:* $i_1 = 22$; $i_3 = 8$; $i_4 = 14$; $i_8 = 11$; $u_{L_2} = 12$; $u_{L_5} = 2$; $u_C = -2$.

16. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 6\cos 4t\,\delta_1(t)$; 212 — $L_2 = 0{,}2$; 313 — $L_3 = 0{,}3$; 424 — $R_4 = 2$; 534 — $R_5 = 4$; L_2 и L_3 индуктивно связаны, однополярные выводы — узлы 2 и 3, $i_{4-в} = 0$. Найти u_{14}. *Ответ:* $u_{14} = (8\cos 4t - 4\sin 4t)\delta_1(t) + \delta(t)$.

17. Цепь: 115 — ИН $u_1 = U_{m1}\cos(\omega t)\delta_1(t)$; 212 — $R_2 = 10$; 323 — C_3; 434 — L_4; 545 — R_5; 635 — $L_6 = 2$; L_4 и L_6 индуктивно связаны, однополярные выводы — узлы 4 и 5. При $t > 0$ $u_{34} = -8\sin\omega t - 4\exp(-t) + 24\exp(-4t)$. В установившемся режиме $P = 20$. Найти U_{m1}, ω, C_3, $|M|$, L_4, R_5. *Ответ:* $U_{m1} = 20$; $\omega = 2$; $C_3 = 0{,}125$; $|M| = 2$; $L_4 > 2$; R_5 — любое.

18. Цепь: 112 — ИН $u_1 = 20\cos\omega t\,\delta_1(t)$; 212 — L_2; 332 — R_3; 414 — R_4; 542 — C_5; 634 — R_6. При $t > 0$ $i_2 = I_m\cos(\omega t - 26{,}5°) - 4\exp(-20t)$, $i_4(0+) = 20$. Определить токи во всех ветвях при условии, что токи не зависят от R_6. *Ответ:* $i_4 = 4\cos 10t - 8\sin 10t + 16\exp(-20t)$, $i_2 = i_3 2\sqrt{5}\cos(10t - 26{,}5°) - 4\exp(-20t)$, учитывая, что $\cos(26{,}5°) = 2/\sqrt{5}$; $\sin(26{,}5°) = 1/\sqrt{5}$.

19. Цепь: 151 — ИТ $i_1 = 53\cos 2t\,\delta_1(t)$; 212 — K_2; 323 — $R_3 = 1$; 434 — C; 545 — R_5; 635 — $R_6 = 6$; 715 — пассивный RL-двухполюсник без источников и без запасов энергии. При разомкнутом ключе K_2 напряжение $u_{15} = 74{,}5\cos 2t - 10{,}6\sin 2t + 5\exp(-t)$. Найти и обосновать заведомо неправильные ответы для u_{15} при замкнутом K_2 и действии того же тока i_1:

    1) $u_{15} = 52{,}4\cos 2t + 10{,}6\sin 2t - 10\exp(-10/9t) + 10{,}6\exp(-t)$;
    2) $u_{15} = 35\cos 2t - 35\sin 2t + 10\exp(-t) - 5\exp(-2t)$;
    3) $u_{15} = 23{,}5\cos 2t + 10\sin 2t + 6\exp(-t) + \exp(-4t)$;
    4) $u_{15} = 62{,}4\cos 2t + 30\sin 2t + \exp(-3{,}1t)(5\cos 2t + 10\sin 2t)$;
    5) $u_{15} = 40\cos 2t + 20\sin 2t + 10\exp(-t) + \exp(-t)\cos 2t$;
    6) $u_{15} = 106/3\cos 2t$. *Ответ:* 2, 3, 4, 5.

20. Цепь: 151 — ИТ $i_1 = 25\cos 4t\,\delta_1(t)$; 215 — R_2; 312 — R_3; 423 — R_4; 535 — L_5; 635 — C_6; 724 — R_7; 845 — L_8. Какие из приведенных при $t > 0$ пар токов i_3 и i_4 заведомо не могут быть верными:

    1) $i_3 = 10\cos 4t + 8\exp(-1{,}2t) + 3\exp(-2t) - 10\exp(-2{,}5t)$;
       $i_4 = 10\cos(4t + 60°) - 4{,}5\exp(-1{,}2t) + 2\exp(-2t) + 5{,}75\exp(-2{,}5t)$;
       $[\cos 60° = 0{,}5]$;
    2) $i_3 = 5\cos(4t - 53°) + 0{,}25\exp(-1{,}05t) + \exp(-2{,}48t)(3\cos 3{,}56t - -5{,}15\sin 3{,}56t)$;
       $[\cos 53° = 0{,}6]$;
       $i_4 = -0{,}5\exp(-1{,}05t) + \exp(-2{,}48t)(6{,}75\cos 3{,}56t - 5{,}5\sin 3{,}56t)$;
    3) $i_3 = 20\sqrt{2}\cos(4t + 45°) + 4\exp(-2t) + \exp(-3{,}1t)(-10\cos 5t + 5\sin 5t)$;
       $i_4 = 15\cos(4t + 90°) + 10\exp(-2t) + 4\exp(-3{,}1t)\cos 5t$;
    4) $i_3 = 10\sqrt{2}\cos(4t + 45°) + 4\exp(-2t) + 14t\exp(-t)$;
       $i_4 = 10\cos(4t + 90°) + 10t\exp(-2t) + 14\exp(-t)$;

5) $i_3 = 5\cos(4t+53°) + 0{,}25\exp(-t) + \exp(-2{,}5t)(3\cos 3{,}5t - 5\sin 3{,}5t)$;
$i_4 = -0{,}5\exp(-t) + \exp(-2{,}5t)(6{,}75\cos 3{,}5t - 5{,}5\sin 3{,}5t)$;

6) $i_3 = 10\cos 4t - 0{,}09\exp(-2{,}12t) + \exp(-0{,}385t)(3{,}69\cos 3{,}61t - 3{,}32\sin 3{,}61t)$;
$i_4 = 5\sqrt{10}\cos(4t+71{,}5°) + 2{,}14\exp(-2{,}12t) + \exp(-0{,}385t)(6{,}46\cos 3{,}61t +$
$+8{,}5\sin 3{,}61t)$; $[\cos(71{,}5°) = 1/\sqrt{10}]$.

Выбор обосновать. *Ответ:* 1, 3, 4, 5.

21. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 10\cos(4t+\alpha_{i_1})$; 212 — R_2; 324 — R_3; 424 — K_4, замыкается; 513 — L_5; 634 — R_6; $R_6 = R_2$; $R_3 = 2R_2$; $u_{14}(0-) = 24$; $i_2(0+) = i_{12}(0+) = 4$; $\tau = 1/4$. Найти R_2, L_5, α_{i_1}. *Ответ:* $R_2 = 2$; $L_5 = 1$; $\alpha_{i_1} = 0$.

22. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = I_{m1}\cos(\omega t + \alpha_{i_1})$; 214 — R_2; 312 — L_3; 423 — R_4; 534 — C_5; 634 — L_6; 724 — K_7, замыкается; $\omega L_3 = 1/\omega C_5 = \omega L_6 = 2$; $u_3(0+) = u_{12}(0+) = 5\sqrt{2}$; $i_2(0+) = i_{14}(0+) = 2{,}5\sqrt{2}$; $u_{3cu}(t) = 0$. Найти α_{i_1}, α_{i_3}, I_{m1}. *Ответ:* $\alpha_{i_1} = -45°$; $\alpha_{i_3} = -90°$; $I_{m1} = 5$.

23. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 4\cos 4t$; 212 — K_2, замыкается; 323 — R_3; 434 — L_4; 545 — C_5; при $t>0$ $u_{35} = 4\exp(-4t) - 16t\exp(-4t)$; в установившемся режиме $I_3 = \sqrt{2}$. Найти R_3, L_4, C_5 и u_5 при $t>0$. *Ответ:* $R_3 = 2$; $L_4 = 1/4$; $C_5 = 1/4$; $u_5 = 2\sin 4t - 8t\exp(-4t)$.

24. Цепь: 121 — ИТ $i_1 = i\delta_1(t)$; 212 — C_2; 312 — L_3; 412 — R_4; при $t>0$ $u_{12} = 12\cos 2t + 4\exp(-t) - 16\exp(-4t)$; в установившемся режиме $I_3 = 3\sqrt{2}$. Найти L_3, C_2, R_4, I. *Ответ:* $L_3 = 1$; $C_2 = 1/4$; $R_4 = 4/5$; $i = 15\cos 2t$.

25. Цепь: 116 — ИН u_1; 212 — R_2; 323 — L_3; 423 — C_4; 534 — K_5, замыкается; 646 — ИН u_6; 736 — R_7; 835 — C_8; 956 — R_9; $R_9 = 2$; $L_3 = 1$; $C_4 = C_8 = 1/4$; частота напряжений источников $\omega = 2$; при $t>0$ $u_{35в} = 12\cos(2t+135°)$. Найти $i_8 = i_{35}$ при $t>0$. *Ответ:* $i_8 = 6\cos(2t-135°) - 3\sqrt{2}\exp(-2t)$.

26. Цепь: 141 — ИТ $i_1 = 12\sqrt{2}\cos(t+45°)$; 214 — R_2; 312 — C; 424 — K_4, замыкается; 523 — R_5; 634 — L; $R_2 = 2R_5$; $i_6 = i_{34}$; в установившемся режиме при $t<0$ $P_{R_2} = 32$; $\alpha_{u_6} = 135°$; после замыкания ключа K_4 в R_5 выделяется энергия $W_{R_5} = 64$. Найти R_5, L, C. *Ответ:* $R_5 = 1$; $L = 2$; $C = 1/2$.

27. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 10\sqrt{2}\cos(2t-45°)$; 213 — R_2; 313 — L_3; 412 — K_4, размыкается; 523 — C_5; 623 — R_6; $R_2 = R_6 = 2$; в установившемся режиме при $t<0$ $i_6 = 5$; после размыкания ключа K_4 в R_6 выделяется энергия $W_{R_6} = 12{,}5$. Найти C_5, L_3 и $i_2 = i_{13}$ при $t>0$. *Ответ:* $C_5 = 1/4$; $L_3 = 1$; $i_2 = 10\cos 2t + 5\exp(-2t)$.

28. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 50\cos(\omega t + \alpha_{u_1})$; 212 — R_2; 323 — R_3; 423 — K_4, размыкается; 534 — R_5; 634 — C_6; $R_5 = R_2$; $R_3 = 2R_2$; $i_6(0+) = i_{34}(0+) = -5$; $i_2(0-) = i_{12}(0-) = 15$; $u_2(0+) = 10$; $\tau = 1/4$. Найти R_2, C_6, α_{u1}. *Ответ:* $R_2 = 2$; $C_6 = 1/6$; $\alpha_{u1} = 0$.

29. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 10\sqrt{2}\cos(2t - 45°)$; 212 — R_2; 323 — C_3; 435 — K_4, замыкается; 534 — L_5; 645 — R_6; $R_2 = R_6 = 0{,}5$; в установившемся режиме при $t < 0$ $U_6 = 5$; после замыкания ключа в R_6 выделяется энергия $W_{R_6} = 12{,}5$. Найти L_5, C_3 и $i_2 = i_{12}$, при $t > 0$. *Ответ:* $L_5 = 1/4$; $C_3 = 1$; $i_2 = 20\cos 2t + 10\exp(-2t)$.

30. Цепь: 114 — ИН $U_1 = \text{const}$; 212 — K_2, размыкается; 342 — ИТ $i_3 = 4\sqrt{2}\cos(2t + 45°)$; 423 — R_4; 534 — R_5; 634 — L_6; $R_4 = R_5$; при $t > 0$ $u_{24} = 8\sqrt{5}\cos(2t + 63{,}5°)$; $\tau = 1/2$. Найти U_1. *Ответ:* $U_1 = 8$.

31. Цепь: 116 — ИН $u_1 = 40\cos 2t$; 212 — K_2, замыкается; 323 — R_3; 434 — R_4; 534 — L_5; 645 — R_6; 756 — C_7; 846 — R_8; 946 — L_9; $R_3 = R_4 = R_6 = R_8$; $i_3(0+) = i_{23}(0+) = 8$; $u_{46-в}(0+) = u_{56-в}(0+) = -2$; в установившемся режиме $P_{R_3} = 2P_{R_4}$ и начальная фаза тока i_{45} равна 26,5°. Найти R_3, L_5, C_7, L_9. *Ответ:* $R_3 = 2$; $L_5 = 1$; $C_7 = 1/2$; $L_9 = 1$.

32. Цепь: 113 — ИН $u_1 = 30\cos 5t\,\delta_1(t)$; 212 — R_2; 323 — C; 423 — R_4; $i_{12в}(0+) = i_{2в}(0+) = 4$; $i_C(0+) = i_{23}(0+) = 10$; $i_{4-в}(0+) = -3$. Найти R_2, R_4, C. *Ответ:* $R_2 = 3$; $R_4 = 6$; $C = 1/30$.

33. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = (30\cos 2t + 10\sin 2t)\delta_1(t)$; 213 — R_2; 312 — R_3; 423 — L; $u_{23}(0^+) = 60$; $i_{L-в}(0+) = -10$; в установившемся режиме начальная фаза тока $i_2 = i_{13}$ равна нулю. Найти R_2, R_3, L. *Ответ:* $R_2 = 2$; $R_3 = 2$; $L = 1$.

Указания. При решении следующих вариантов задач рекомендуется: 1) учесть, что из неизменности амплитуды тока следует неизменность модуля сопротивления; 2) учесть, что $i_{L_2}(0-) = 0$, $i_7(0-) = 2{,}5\sqrt{2} = \operatorname{Re}\dot{I}_{m7}$; 3), 10), 22), 26), 27), 29) учесть, что в цепи резонанс; 4) учесть, что при $t < 0$ в цепи ПРТ, а при $t > 0$ имеем две цепи первого порядка; 5) использовать ХП цепи и учесть, что $i_в(0+) + i_{св}(0+) = 0$; 6) записать $u_C(t)$ и выразить $i_C(0+) = Cu'_C(0+)$; 7) учесть, что данная задача эквивалентна задаче включения цепи к ИН $u(t) = 40\cos 2t\,\delta_1(t)$ (можно рассматривать две цепи первого порядка); 8) многократным эквивалентным преобразованиям ИН — ИТ перейти к последовательному R_3L-контуру с ИН $\dot{U}_m = U_m \exp(j45°)$; 9) использовать принцип пропорциональности и соотношение $u_L(0+) = Li'_2(0+) = U_{m1}\cos\alpha_{u1}$; 11) учесть, что при $t > 0$ имеем две цепи первого порядка; 13) учесть, что $i_2(0+) = i_2(0-)$; 14) использовать ВД и ЗТК для мгновенных значений при $t = 0-$ и $t = 0+$; 15) использовать уравнения Кирхгофа; 16) расчет вести в установившемся режиме, поскольку $i_{-в} = 0$; 17) использовать расчет установившегося режима; 18) учесть, что токи не изменятся при $R_6 = 0$ и $R_6 = \infty$; 19) проводить проверку по амплитуде, фазе, НУ и числу корней ХП; 20) проводить проверку по НУ, числу корей ХП, фазам и соотношению амплитуд токов в вынужденном режиме; 21) учесть непрерывность тока i_2; 23) учесть, что в цепи резонанс, и использовать ХП цепи; 24) использовать ХП цепи; 25) при расчете $u_8(0+)$, $i_8(0+)$ учесть ПРТ в L_3C_4-контуре; 30) учесть, что $u_{24-в}(t) = 0$ при $t > 0$; 31) обратить внимание на значение $i_{6-в}(0+)$.

4.5. Анализ установившихся периодических режимов в цепях

При решении всех рассматриваемых в данном разделе задач необходимо иметь в виду, что в цепи имеет место установившийся периодический режим.

1. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 64 + 60\sqrt{2}\cos(t - 37°)$; 212 — $R_2 = 8$; 324 — $C_3 = 1/5$; 423 — $L_4 = 12$; 534 — $L_5 = 8$; узлы 2, 3 — однополярные выводы ИСЭ; $I_2 = 10$. Найти $|M|$. *Ответ:* $|M| = 5$.
2. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = I_0 + I_1\sqrt{2}\cos t$; 213 — $R_2 = 1$; 312 — $C_3 = 1$; 423 — $R_4 = 1$; 523 — $L_5 = 1$; $U_{13} = 2\sqrt{2}$; $U_{23} = 2$. Найти I_0, I_1. *Ответ:* $I_0 = 2$; $I_1 = 2\sqrt{5}$.
3. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 100 + 100\sqrt{2}\cos\omega t$; 212 — R_2; 323 — R_3; 435 — L_4; 524 — R_5; 645 — C_6; $i_2 = 5 + 5\sqrt{2}\sin\omega t$; $U_{25} = 60\sqrt{2}$; $I_5 = 3$. Найти R_2, R_3, R_5, $|Z_4|$, $|Z_6|$. *Ответ:* $R_2 = 8$; $R_3 = R_5 = 12$; $|Z_4| = 9$; $|Z_6| = 16$.
4. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 50 + 144\sqrt{2}\cos t + 20\sqrt{2}\cos 3t$; 212 — $R_2 = 10$; 323 — $L_3 = 15$; 424 — L_4; 535 — C_5; 645 — $L_6 = 35$. При $\omega_1 = 1$ в цепи резонанс токов, при $\omega_3 = 3$ в ветви L_3C_5 резонанс напряжений. Найти U_{34}, P. *Ответ:* $U_{34} = 150$; $P = 290$.
5. Цепь: 131 — ИТ $i_1 = 10 + 20\cos(t - 45°)$; 212 — $R_2 = 50$; 323 — $C_3 = 0{,}04$; 424 — L_4; 534 — $R_5 = 25$; 614 — КЗ; при $\omega_1 = 1$ в цепи резонанс. Найти U_2, $I_6 = I_{14}$. *Ответ:* $U_2 = 250$; $I_6 = I_{14} = 15$.
6. Цепь: 114 — ИН $u_1 = U_0 + 300\cos 30t + U_{mII}\cos 60t$; 212 — R_2; 323 — L_3; 423 — C_4; 534 — L_5; $P = 750$; $I_2 = 5$; $i_3 = 5\cos(30t - 90°)$ — первая гармоника тока i_3; $i_{4II} = 4\sqrt{2}\cos 60t$ — вторая гармоника тока i_4. Найти R_2, L_3, L_5, U_0. *Ответ:* $R_2 = 30$; $L_3 = 2$; $L_5 = 2/3$; $U_0 = 120$.
7. Цепь: 115 — ИН $u_1 = 9 + 10\sqrt{2}\cos t + 20\sqrt{2}\cos 3t$; 212 — L_2; 324 — L_3; 434 — C_4; 512 — C_5; 613 — C_6; 745 — $R_7 = 3$; 823 — КЗ; $I_8 = I_{K3} = 2{,}5$; $I_2 = 5$; $I_7 = 3$; $C_5 = C_6 > C_4$. Найти L_2, C_4, C_5. *Ответ:* $L_2 = 2{,}5$; $C_4 = 0{,}025$; $C_5 = 0{,}2$.
8. Цепь: 114 — ИН $u_1 = 80 + 60\sqrt{2}\cos t + 60\sqrt{2}\cos 2t$; 212 — $L_2 = 3$; 312 — C_3; 423 — C_4; 534 — $R_5 = 4$; $u_5 = 60\sqrt{2}\cos(t - 90°)$. Найти C_3, C_4, U_4, I_2. *Ответ:* $C_3 = 1/12$, $C_4 = 1/4$; $U_4 = 100$; $I_2 = 10\sqrt{5}$.
9. Цепь: 114 — ИН $u_1 = U_{m1}\cos 2t$; 212 — L_2; 324 — R_3; 423 — ключ K_4; 534 — R_5; 624 — C_6; 742 — ИТ $i_7 = 2\sqrt{2}\cos 4t$; $R_3 = 2R_5$. При разомкнутом ключе $u_3 = u_{24} = U_m\cos(2t + \alpha_u) + 12\sqrt{2}\cos 4t$; при замкнутом ключе $U_{24} = 12$; $I_6 = 8\sqrt{3}$. Найти L_2, R_5, C_6. *Ответ:* $L_2 = 1/8$; $R_5 = 3$; $C_6 = 1/2$.
10. Цепь: 112 — R_1; 223 — L_2; 323 — ИТ $i_3 = I_{m3}\cos 2t$; 415 — $C_4 = 0{,}05$; 554 — ИН $u_5 = 100\cos t$; 614 — $L_6 = 10$; 767 — L_7; узлы 1, 6 — однополярные выводы ИСЭ; $|M| = 4$; $U_6 = U_{14} = 100$. Найти I_{m3}, U_{67}. *Ответ:* $I_{m3} = 5$; $U_{67} = 40$.

Указания. При решении задач рекомендуется использовать формулы вычисления действующего значения переменных в установившемся периодическом режиме, условия резонанса (в вариантах 3–9), метод наложения (в вариантах 9, 10).

4.6. Расчет трехфазных цепей

В приведенных задачах порядок следования фаз – прямой, источник – симметричен.

1. Соединение треугольником: линейное напряжение $U_л = 20$; $Z_{ab} = Z_{bc} = R$; $I_{ab} = I_{bc} = I_{ca} = 1$; $I_C = 2$. Найти I_A, I_B, Z_{ca}, P. *Ответ:* $I_A = 1$; $I_B = \sqrt{3}$; $Z_{ca} = 20\exp(j60°)$; $P = 50$.
2. Соединение треугольником: $Z_{ab} = 5\exp(j37°)$; $Z_{bc} = 5\exp(-j37°)$; $Z_{ca} = 5$; $P = 52$. Найти P при обрыве линейного провода *Bb*. *Ответ:* $P = 32{,}5$.
3. Соединение треугольником: $U_л = 10$; $Z_{ca} = Z^*_{ab}$; $P_{ab} = P_{bc} = 10$; $P_Q = 0$. При обрыве линейного провода *Aa* мощность $P = 60$. Найти Z_{ab}, Z_{bc}. *Ответ:* $Z_{ab} = 1 \pm j3$; $Z_{bc} = 10$.
4. Соединение звездой без нулевого провода: $Z_a = Z_b = Z_c$; $P = 48$; $P_Q = 36$. Найти P и P_Q: 1) при КЗ фазы «*a*», 2) при обрыве фазы «*a*». *Ответ:* 1) $P = 96$; $P_Q = 72$; 2) $P = 24$; $P_Q = 18$.
5. Соединение звездой с нулевым проводом: $Z_a = 4\exp(j60°)$; $Z_b = 4\exp(-j60°)$; $Z_c = R$; $I_Л = I_C$; $P = 128$. Найти P, если фаза «*c*» и нулевой провод оборваны. *Ответ:* $P = 192$.
6. Соединение звездой с нулевым проводом: $1ak - R_1$; $2k0_1 - R_2 = R_1$; $3bm - C_3$; $4m0_1 - R_4$; $5cn - L_5$; $6n0_1 - R_6 = R_4$; $U_л = 380$; $I_Л = I_B = I_C = I_0$. Найти U_{km}, U_{mn}. *Ответ:* $U_{km} = 220$; $U_{mn} = 380$.
7. Соединение звездой без нулевого провода: $U_л = 20\sqrt{3}$; $Z_a = Z_b = Z_c$; в цепи два ваттметра, причем их показания соответственно $P_1 = \mathrm{Re}(\dot{U}_{ЛC}\,\dot{I}_Л) = 0$, $P_2 = \mathrm{Re}(\dot{U}_{BC}\,\dot{I}_B) = 0$. Найти P_1 и P_2: 1) при обрыве фазы «*b*», 2) при КЗ фазы «*a*». *Ответ:* $P_1 = 7$; $P_2 = 0$; 2) $P_1 = 450$; $P_2 = -150$.
8. Соединение звездой без нулевого провода: $1a0_1 - C_1$; $2b0_1 - L_2$; $3c0_1 - R_3$; $4a0_2 - L_4$; $5b0_2 - C_5$; $6c0_2 - R_6$; $70_10_2 - XX$; $U_л = 200$; $U_7 = U_{XX} = 600$; $R_3 = R_6 = R$; $|Z_{L_2}| = |Z_{C_1}| = 100$; $|Z_{L_4}| = |Z_{C_5}| = 50$. Найти R и $I_7 = I_{КЗ}$ при 0_10_2 – КЗ. *Ответ:* $R = 100$; $I_{КЗ} = 3$.
9. Соединение звездой без нулевого провода: $U_л = 4\sqrt{3}$, $Z_a = 2$, $P_a = 18$. Ток $i_Л$ и напряжение u_{AO_1} совпадают по фазе, $\tilde{P}_{Sb} = 3 + j3\sqrt{3}$. Найти Z_b, Z_c. *Ответ:* $Z_b = 1 + j\sqrt{3}$, $Z_C = 1 - j\sqrt{3}$.

10. Соединение треугольником: $1ab - Z_{ab} = 2R; 2bc - Z_{bc} = 3R; 3ck$ — ИН $\dot{U}_3 = \dot{U}_{CA}$; $4ak - Z_{ak} = R; P = 60$. Найти $P_{ab}, P_{bc}, P_{ak}, \tilde{P}_{S\dot{U}_3}$ при обрыве линейного провода Aa. *Ответ:* $P_{ab} = 16; P_{bc} = 24; P_{ak} = 8; \tilde{P}_{S\dot{U}_3} = -12 + j12\sqrt{3}$.

Указания. Решение некоторых вариантов задач (например, 1, 6, 9) упрощается при использовании векторных диаграмм; в конце решения варианта 8 целесообразно применить теорему об эквивалентных источниках.

4.7. Анализ цепей с зависимыми источниками

1. Цепь: $112 - R_1 = 2$; $223 - R_2$; $324 - R_3$; $435 - L_4$; 515 — ИН $u_5 = 6\delta_1(t)$; 654 — ИНУТ $u_6 = 6i_{12}(t)$; $i_{12} = (9 - 12\exp(-t))\delta_1(t)$. Найти R_2, R_3, L_4. *Ответ:* $R_2 = 1$; $R_3 = 2$; $L_4 = 1$.
2. Цепь: $112 - R_1 = 2$; $223 - R_2$; $324 - R_3 = 2$; $434 - L_4$; 514 — ИН $u_5 = 8\delta_1(t)$; 642 — ИТУТ $i_6 = ki_L = ki_{34}$. При $k = 0$ ток $i_L = (2 - 2\exp(-2t))\delta_1(t)$; при $k \neq 0$ ток $i_L = (-2 + 2\exp(2t))\delta_1(t)$. Найти R_2, L_4, k. *Ответ:* $R_2 = 1$; $L_4 = 1$; $k = 4$.
3. Цепь: $112 - R_1$; $223 - R_2$; $324 - L_3$; 443 — ИНУТ $\dot{U}_4 = k\dot{I}_2 = k\dot{I}_{23}$; $551 - C_5$; 653 — ИН $U_6 = 12$. В цепи установившийся синусоидальный режим; $\tilde{P}_{S_6} = 36 + j12; |P_{QC_5}| = 20; U_{52} = 4\sqrt{5}; \tilde{P}_{S_4} = j4$. Найти R_1, R_2, Z_{L_3}, k, Z_{C_5}. *Ответ:* $R_1 = R_2 = 2$; $Z_{L_3} = j2$; $k = 1$; $Z_{C_5} = -j2$.
4. Цепь: $112 - R_1 = 2$; $213 - R_2 = 4$; $334 - L_3$, $|Z_{L_4}| = 4$; 442 — ИНУН $\dot{U}_4 = 2\dot{U}_k$; 541 — ИТ $\dot{I}_5 = 15$. Установившийся синусоидальный режим; $\dot{U}_5 = \dot{U}_{14} = 12 - j4$. Какое из напряжений $\dot{U}_k$? *Ответ:* $\dot{U}_k = \dot{U}_{L_3} = \dot{U}_{34}$.
5. Цепь: $112 - R_1 = 4$; $213 - R_2$; $332 - R_3$; 432 — ИТУТ $i_4 = ki_2 = ki_{13}$; 521 — ИТ $i_5 = 1$; $P_1 = 36$; $P_2 = 8$; $P_3 = 64$; $P_5 = -12$. Найти R_2, R_3, k. *Ответ:* $R_2 = 2$; $R_3 = 4$; $k = 3$.
6. Цепь: $112 - R_1$; $223 - R_2 = 4$; $324 - R_3$; 443 — ИНУТ $u_4 = ki_2 = ki_{23}$; 513 — ИН $u_5 = 16$. При $k = 0$ ток $i_2 = 1{,}6$; при $k = 2$ ток $i_2 = 2$. Найти значение k, при котором $i_1 = 0$. *Ответ:* $k = 6$.
7. Цепь: $112 - R_1$; $223 - R_2$; $324 - R_3$; 434 — ИНУТ $u_4 = 2i_k$; 514 — ИН $u_5 = 12$; $i_1 = i_{12} = 1{,}4; i_2 = i_{32} = -0{,}2; \Sigma P_R = 16{,}32$. Определить, какой из токов i_k. *Ответ:* $i_k = i_{24} = i_3$.
8. Цепь: $112 - R_1$; $213 - R_2$; $323 - R_3$; 421 — ИН u_4; 531 — ИНУТ $u_5 = ki_3 = ki_{23}$. При $k = 1$ ток $i_3 = 4$; при $k = 2$ ток $i_3 = 3$. Найти i_3 при $k = 3$. *Ответ:* $i_3 = 2{,}4$.
9. Цепь: $112 - R_1$; $213 - R_2$; $334 - R_3 = 1$; $434 - C_4 = 1$; 534 — ИТУТ $i_5 = 7i_2 = 7i_{13}$; 641 — ИТ $i_6 = A\delta_1(t)$; $724 - C_7$; $u_{34} = (-12 + 36\exp(0{,}5t) - 24\exp(t))\delta_1(t)$. Найти i_1. *Ответ:* $i_1 = (9\exp(0{,}5t) - 8\exp(t))\delta_1(t)$.

10. Цепь: 112 – R_1; 223 – R_2; 312 – L_3; 423 – C_4; 523 – ИТУТ $i_5 = ki_n$; 613 – ИН $i_6 = 30\delta_1(t)$.

    При $k = 0$ напряжение $u_C = u_{23} = (30 - 15\exp(-t) - 15\exp(-4t))\delta_1(t)$. При $k = 4$ напряжение $u_C = (30 + 35\exp(t) - 65\exp(4t))\delta_1(t)$. Выяснить, какой из токов i_n. *Ответ:* $i_n = i_1$.

Указания. При решении следующих вариантов задач рекомендуется: 1) вначале рассмотреть режим $t = 0+$, а затем – расчет вынужденной составляющей; 2) вначале для случае $k = 0$ рассмотреть режим $t = 0+$ и вынужденный режим; 3) задавшись α_{u6}, использовать формулы МКА для комплексной мощности, законов Кирхгофа и Ома; 4) использовать формулы МКА для законов Кирхгофа и Ома; 5) использовать формулы для мощностей и законы Кирхгофа; 6) использовать идеи метода наложения; 7) использовать формулы баланса мощностей; 8) использовать метод наложения; 9) вначале рассмотреть режим $t = 0+$, а затем – расчет вынужденной составляющей; 10) рекомендуется рассмотреть режим $t = 0+$.

5. Задачи по теории электромагнитного поля

Введение

Цель этого раздела познакомить студентов с задачами, встречающимися при изучении теории электромагнитного поля дисциплин «Теоретическая электротехника» и «Теоретические основы электротехники».

Содержание раздела соответствует программе курса по теории электромагнитного поля и ориентировано на учебник [1].

Задача, путь решения которой описан в подразделе 5.6, снабжена указателем «р» в конце номера задачи. Указатель «м» используется, если изложены только методические рекомендации по решению задачи.

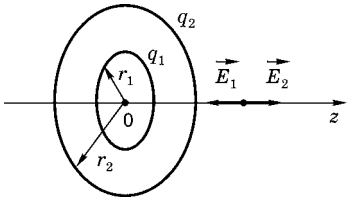


Рис. 5.5

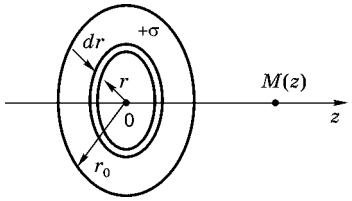


Рис. 5.6

5.1.8 (м). Два тонких параллельных коаксиальных кольца, одинакового радиуса a находятся на расстоянии b друг от друга. Работа, которую необходимо затратить при переносе точечного заряда q в центр каждого из колец равна соответственно W_1 и W_2.

Показать, что заряды колец равны

$$q_{1,2} = \frac{4\pi\varepsilon_0 a}{qb^2}(a^2+b^2)^{1/2}[(a^2+b^2)^{1/2}W_{1,2} - aW_{2,1}].$$

5.1.9 (м). Заряд распределен равномерно с поверхностной плотностью σ по тонкому диску радиуса r_0 (рис. 5.6). Окружающая среда — воздух.

Найти потенциал и напряженность поля на оси z. Численное решение выполнить в точке $z = 10$ см, приняв $r_0 = 10$ см, $\sigma = 10^{-6}$ Кл/м.

5.1.10 (м). Двойной электрический слой имеет форму тонкого диска радиуса r_0. Толщина диска $h \ll r_0$. Заряды распределены равномерно, так что $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma = \text{const}$.

Найти потенциал и напряженность поля на оси z.

5.1.11 (р). Заряд q распределен с постоянной объемной плотностью $\rho = \text{const}$ по объему шара радиуса r_0 (рис. 5.7). Диэлектрическая проницаемость везде равна ε_0.

Найти напряженность и потенциал поля внутри и вне шара. Численное решение выполнить в точках $r = 0$; r_0 и $2r_0$, положив $r_0 = 8$ см, $\rho = 10^{-6}$ Кл/м^3.

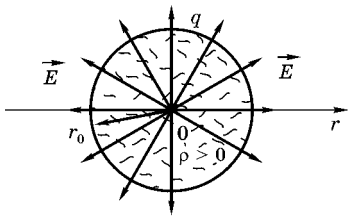


Рис. 5.7

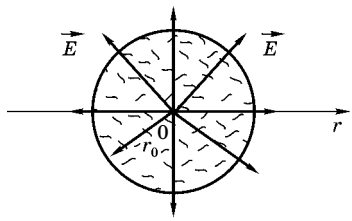


Рис. 5.8

5.1.12 (м). Решить задачу 5.1.11 (р) при условии, что тот же заряд q сообщен металлическому шару.

5.1.13 (р). При искровом разряде в воздухе образовался цилиндрический столбик ионизированного газа. Сечение представлено на рис. 5.8. Объемное распределение положительных ионов в первом приближении подчиняется соотношению

$$\rho(r) = \rho_0\left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right],$$

где ρ_0 — плотность заряда на оси цилиндра; r_0 — его радиус.

Найти распределение напряженности поля внутри и вне канала разряда при условии, что его длина значительно больше радиуса. Численное решение выполнить при условии: $\rho_0 = 10^{-2}$ Кл/м^3, $r_0 = 2$ мм.

5.1.14 (р). Заряд распределен с постоянной объемной плотностью $\rho = 10^{-6}$ Кл/м^3 в области, ограниченной двумя цилиндрическими поверхностями, радиусы которых r_1 и r_2 ($r_1 > r_2$). Оси цилиндров параллельны; расстояние между ними $a = 2$ см (рис. 5.9). Диэлектрическая проницаемость среды везде ε_0.

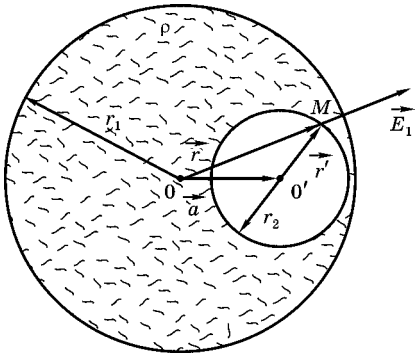


Рис. 5.9

Показать, что поле внутри цилиндра меньшего радиуса однородно и равно

$$\vec{E} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\rho\vec{a},$$

где вектор $\vec{a}$ направлен от оси большего к оси меньшего цилиндра.

5.1.15 (р). Между двумя бесконечными параллельными металлическими пластинами находятся заряженная плоскость и двойной электрический слой. Координаты соответствующих плоскостей указаны на рис. 5.10. Поверхностная плотность зарядов поверхности σ, мощность двойного слоя τ. Потенциал правой пластины равен U_0, левая пластина заземлена. Диэлектрическая проницаемость среды везде равна ε_0.

Найти распределение потенциала $U(x)$.

5.1.16 (р). В области, ограниченной двумя бесконечными параллельными пластинами, распределен заряд с постоянной объемной плотностью $\rho = \text{const}$ (рис. 5.11).

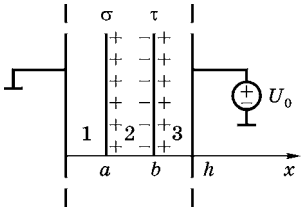


Рис. 5.10

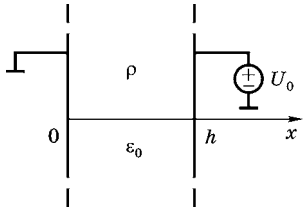


Рис. 5.11

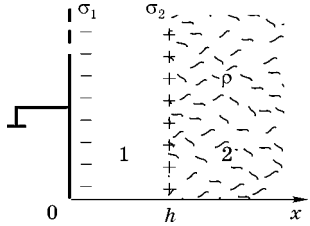


Рис. 5.12

Расстояние между пластинами h. Диэлектрическая проницаемость равна ε_0. Потенциал правой пластины U_0, левая пластина заземлена.

Найти распределение потенциала $U(x)$ и напряженности поля $\vec{E}(x)$.

5.1.17 (м). В условии задачи 5.1.16 (р) правая пластина заземлена, объемная плотность заряда $\rho(x) = a(x - h/3)$, диэлектрическая проницаемость равна ε.

Найти распределение потенциала, напряженности поля, поверхностные плотности свободного заряда на пластинах и связанного заряда в диэлектрике.

5.1.18 (м). В условии задачи 5.1.17 (м) распределение заряда $\rho(x) = \rho_0[1 - (x/h)^2]$, где ρ_0 — постоянная. Расстояние между пластинами $2h$, начало координат в центре системы.

Найти распределение потенциала $U(x)$.

5.1.19 (р). В полубесконечной области (рис. 5.12) находится нейтральная система зарядов следующего строения: 1) при $x = 0$ — заряженная металлическая плоскость:

$\sigma_1 = -\sigma$; 2) при $x = h$ — заряженная поверхность: $\sigma_2 = 0{,}8\sigma$; 3) при $x > h$ — объемный заряд: $\rho = \dfrac{0{,}2\sigma}{h} e^{-(x/h-1)}$. Среда — однородный диэлектрик $\varepsilon = \text{const}$.

Найти распределение потенциала $U(x)$ и напряженности поля $\vec{E}(x)$.

5.1.20 (м). Решить задачу 5.1.19 (р), используя третье уравнение Максвелла в интегральной форме.

5.1.21 (м). Плоский конденсатор заполнен тремя слоями диэлектрика. Толщина слоев h_1, h_2 и h_3; диэлектрические проницаемости ε_1, ε_2 и ε_3. Наименьшую электрическую прочность имеет третий слой, допустимое значение напряженности поля в котором $E_{3д}$.

Найти наибольшее (допустимое) значение напряжения $U_д$ конденсатора. Численное решение выполнить, положив $h_1 = 4$ мм, $h_2 = 1$ мм, $h_3 = 0,5$ мм, $\varepsilon_1 = 7\varepsilon_0$, $\varepsilon_2 = 3{,}5\varepsilon_0$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_0$, $E_{3д} = 30$ кВ/см.

5.1.22 (м). Коаксиальный цилиндрический кабель имеет двухслойную изоляцию из диэлектриков с проницаемостями ε_1 и ε_2 (рис. 5.13). Радиус сечения внутреннего металлического электрода (жилы) r_1, внутренний радиус внешнего электрода (оболочки) r_3, радиус границы раздела слоев r_2. Допустимые значения напряженности поля в диэлектриках $E_{1д}$ и $E_{2д}$.

Найти: 1) отношение r_2/r_1, при котором в каждом из слоев максимальные значения напряженности равны допустимым значениям; 2) наибольшее (допустимое) напряжение $U_д$ кабеля.

5.1.23 (м). Коаксиальный кабель находится под напряжением U_0. Изоляция кабеля — однородный диэлектрик; радиус жилы r_1, внутренний радиус оболочки r_2.

Полагая $r_2 = \text{const}$, найти r_1, при котором максимальная напряженность поля имеет наименьшее значение.

5.1.24 (р). К двум коаксиальным цилиндрическим электродам радиусов r_1 и r_2 приложено напряжение U_0. Межэлектродный промежуток заполнен диэлектриками с проницаемостями ε_1 сверху и ε_2 снизу (рис. 5.14).

Найти: 1) векторы поля $\vec{E}$ и $\vec{D}$ в обеих средах; 2) поверхностную плотность свободных и связанных зарядов на поверхности внутреннего электрода. Численное решение выполнить при условиях $r_1 = 1$ см, $r_2 = 2{,}7$ см, $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_0$, $\varepsilon_2 = 4\varepsilon_0$, $U_0 = 1000$ В.

5.1.25 (р). Область поля ограничена четырьмя бесконечно длинными (в направлении оси z) металлическими пластинами. Одна пара параллельных пластин заземлена, потенциал другой пары U_0 (рис. 5.15). Диэлектрическое заполнение однородно.

Найти распределение потенциала $U(x, y)$.

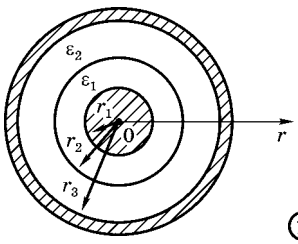


Рис. 5.13

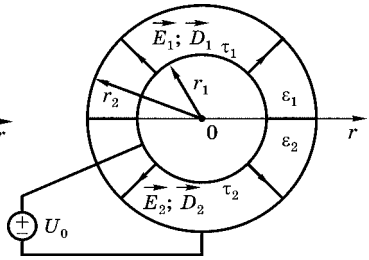


Рис. 5.14

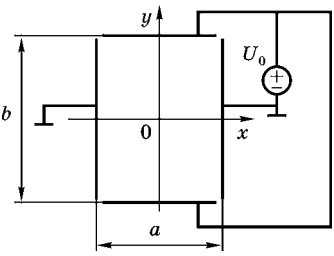


Рис. 5.15

5.1.26 (м). Решить задачу 5.1.25 (р) при условии, что верхняя пластина удалена в бесконечность.

5.1.27 (р). В области, ограниченной двумя параллельными металлическими пластинами (рис. 5.16), экспериментально установлено распределение потенциала $U(x) = a(b^2/4 - x^2)$. Здесь a и b — некоторые постоянные. Расстояние между пластинами h; диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = \text{const}$.

Найти распределение зарядов.

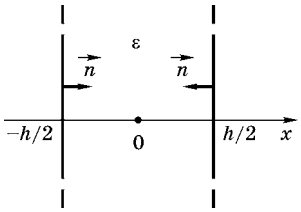


Рис. 5.16

5.1.28 (р). Распределение потенциала в сферической системе координат задано функцией

$$U(r) = \frac{b}{4\pi\varepsilon r} e^{-ar},$$

где a и b — постоянные.

Найти распределение зарядов.

5.1.29 (м). Зондовые исследования длинной цилиндрической полости, вдоль оси которой натянута тонкая металлическая нить, показали, что потенциал в ней изменяется по закону $U(r) = a(b\ln r - r^2)$, где a и b — постоянные, r — ось цилиндрической системы координат (рис. 5.17). Диаметр полости d, стенки металлические.

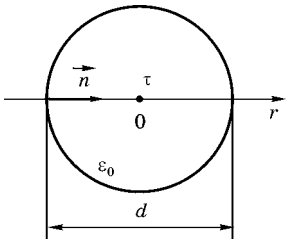


Рис. 5.17

Найти: 1) объемную плотность заряда в полости; 2) линейную плотность заряда на нити; 3) поверхностную плотность заряда на стенках полости, положив $a = 282$ В/м^2, $b = 6{,}4$ м^2, $d = 2{,}5$ см.

5.1.30 (м). Металлический шар радиуса a покрыт диэлектрическим слоем радиуса b. Диэлектрическая проницаемость слоя ε_1, вне слоя — ε_2.

Найти емкость шара.

5.1.31 (р). Металлический эллипсоид вращения находится в однородном диэлектрике с проницаемостью ε. Большая полуось a, малая — b.

Найти емкость эллипсоида.

5.1.32 (м). Коаксиальный кабель имеет двухслойную изоляцию из диэлектриков с проницаемостями ε_1 и ε_2 (см. рис. 5.13). Радиус сечения внутреннего электрода (жилы) r_1, внутренний радиус внешнего электрода (оболочки) r_3, радиус границы раздела диэлектрических слоев r_2.

Найти погонную емкость кабеля, положив $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_0$, $\varepsilon_2 = 4\varepsilon_0$, $r_1 = 2$ мм, $r_2 = 3$ мм, $r_3 = 4$ мм.

5.1.33 (м). Область между двумя цилиндрическими электродами радиусов r_1 и r_2 кусочно однородна (см. рис. 5.14). Проницаемости диэлектриков ε_1 и ε_2.

Найти погонную емкость конструкции, положив $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_0$, $\varepsilon_2 = 4\varepsilon_0$, $r_1 = 2$ мм, $r_2 = 4$ мм.

5.1.34 (м). Расстояние между осями проводов воздушной двухпроводной линии h, радиусы сечения проводов $r_0 \ll h$ (рис. 5.18).

Найти погонную емкость линии.

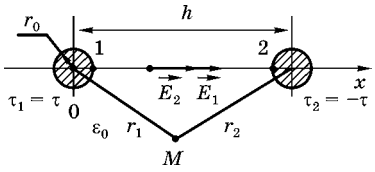


Рис. 5.18

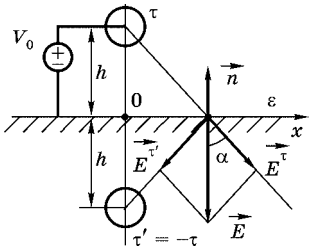


Рис. 5.19

5.1.35 (м). Длинный тонкий провод, радиус сечения которого r_0, находится в однородном диэлектрике с проницаемостью ε на расстоянии h от проводящей плоскости, причем $r_0 \ll h$ (рис. 5.19).

Найти: 1) погонную емкость конструкции «провод–плоскость»; 2) распределение поверхностного заряда на плоскости при напряжении U_0.

5.1.36 (м). Длинный тонкий провод, радиус сечения которого r_0, расположен внутри двугранного угла, образованного проводящими плоскостями (рис. 5.20). Расстояния a и b значительно превышают r_0. Заполнение — однородный диэлектрик с проницаемостью ε.

Найти погонную емкость конструкции.

5.1.37 (м). Двухпроводная линия находится над поверхностью земли (рис. 5.21). Расстояние между осями проводов h, высота подвеса H, радиусы проводов $r_0 \ll h$; $r_0 \ll H$.

Найти погонную емкость линии «с учетом влияния земли».

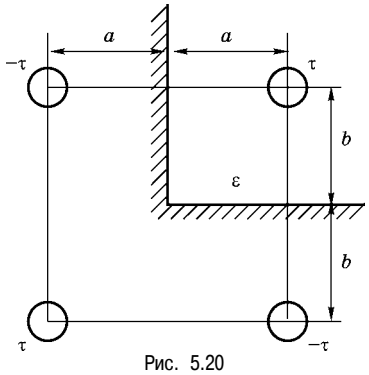


Рис. 5.20

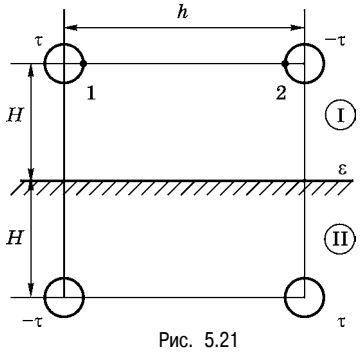


Рис. 5.21

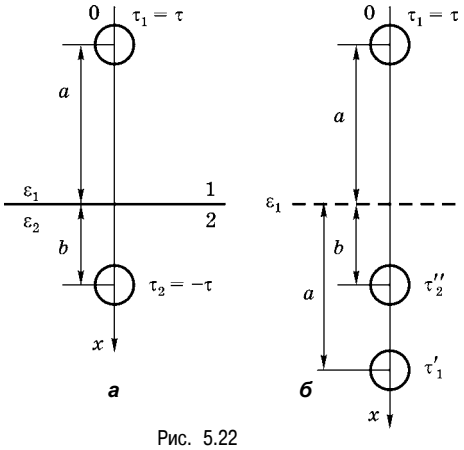


Рис. 5.22

5.1.38 (м). Провода двухпроводной линии находятся в диэлектриках, разделенных плоской границей (рис. 5.22*а*). Радиус сечения проводов r_0 значительно меньше расстояний a и b. Проницаемости диэлектриков ε_1 и ε_2.

Найти погонную емкость линии.

5.1.39 (р). Плоский конденсатор заполнен неоднородным диэлектриком, проницаемость которого изменяется по линейному закону от значения ε_1 на одной пластине до значения ε_2 на другой. Расстояние между пластинами h, их площадь S.

Найти емкость конденсатора.

5.1.40 (р). Длинный тонкий проводник радиуса r_0 расположен внутри метал-

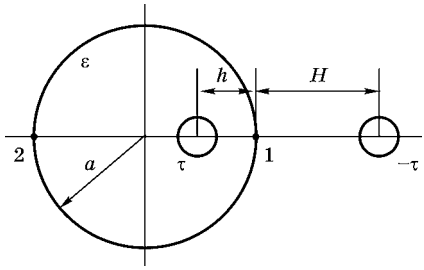


Рис. 5.23

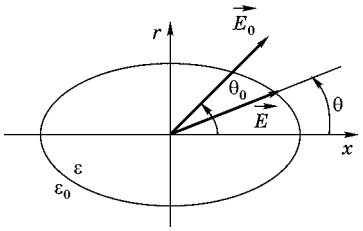


Рис. 5.24

лического цилиндра радиуса a так, что их оси не совпадают (рис. 5.23). Радиус сечения провода значительно меньше радиуса цилиндра a и расстояния до его стенки h.

Найти погонную емкость конструкции.

5.1.41 (м). В однородное электрическое поле $\vec{E}_0$ внесен эллипсоид вращения с полуосями x_0 и r_0 (рис. 5.24). Угол между осью x и направлением $\vec{E}_0$ равен θ_0. Диэлектрические проницаемости материала эллипсоида ε, а окружающей среды — ε_0. Коэффициенты деполяризации вдоль полуосей N_x и N_r.

Найти электрическое поле внутри эллипсоида и его энергию во внешнем поле.

5.1.42 (р). В изоляции коаксиального кабеля (проницаемость ε_1) находится малое включение (проницаемость ε_2), имеющее форму шара радиуса r_0. Напряжение кабеля U_0 (рис. 5.25).

Найти силу $\vec{f}$, действующую на шар. Численное решение выполнить для случая $r_1 = 1$ см, $r_2 = 5$ см, $r_0 = 0{,}1$ см, $\varepsilon_1 = 2{,}25\varepsilon_0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_0$, $U_0 = 3000$ В.

5.1.43 (р). Жесткий диполь с моментом $\vec{p}_1$ помещен в центр сферической системы координат (рис. 5.26*а*). Второй диполь с моментом $\vec{p}_2$ находится в меридиональной плоскости.

Найти энергию и силу взаимодействия диполей.

5.1.44 (м). Найти силу, действующую на диполь с моментом $\vec{p}$, в поле точечного заряда $q > 0$.

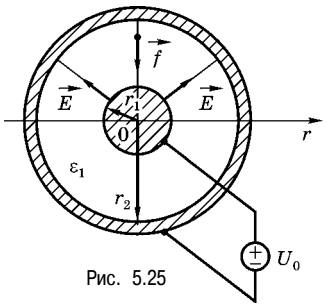


Рис. 5.25

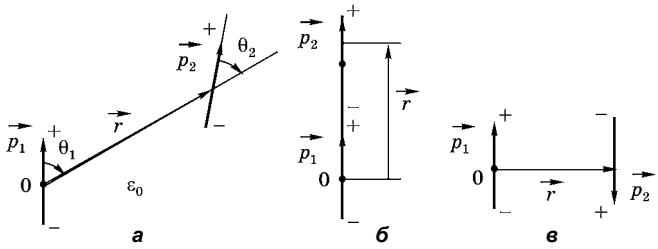


Рис. 5.26

5.2. Поле постоянного тока

5.2.1 (м). Плоский конденсатор с двухслойной изоляцией подключен к источнику постоянного напряжения U_0. Толщина слоев h_1, h_2; диэлектрическая проницаемость ε_1, ε_2; удельная проводимость γ_1, γ_2.

Найти: 1) напряженность электрического поля в каждом слое; 2) свободный и связанный заряды на границе слоев.

5.2.2 (м). Плоский конденсатор заполнен несовершенным диэлектриком с проницаемостью ε и удельной проводимостью $\gamma = \gamma_1 - ax$, где a — константа; x — координатная ось, перпендикулярная пластинам. Расстояние между пластинами h, напряжение конденсатора U_0.

Найти напряженность электрического поля и распределение свободных и связанных объемных зарядов.

5.2.3 (м). Между электродами сферического конденсатора находится несовершенный диэлектрик, удельная проводимость которого $\gamma = a/r$, где a — константа; r — координата, отсчитываемая от центра конденсатора. Радиусы внутреннего и внешнего электродов r_1 и r_2 соответственно. Ток в изоляции (ток утечки) равен I.

Найти: 1) распределение потенциала в изоляции, считая, что внешний электрод заземлен; 2) сопротивление утечки.

5.2.4 (м). В коаксиальном кабеле с двухслойной изоляцией радиусы сечения внутренней жилы, границы раздела слоев и оболочки соответственно равны: $r_1 = 1$ см, $r_2 = 1{,}5$ см, $r_3 = 2$ см. Удельная проводимость первого слоя изоляции $\gamma_1 = 10^{-8}$ См/м, второго слоя — $\gamma_2 = 10^{-9}$ См/м. Напряжение кабеля $U_0 = 1000$ В.

Найти: 1) сопротивление изоляции и ток утечки на единицу длины кабеля; 2) удельную проводимость γ однослойной изоляции с тем же значением сопротивления.

5.2.5 (м). Двухпроводная линия проходит сквозь плоский слой несовершенного диэлектрика толщиной a. Расстояние между осями проводов h, радиусы сечения $r_0 \ll h$.

Найти ток утечки через слой диэлектрика, если его удельная проводимость γ, а напряжение линии U_0.

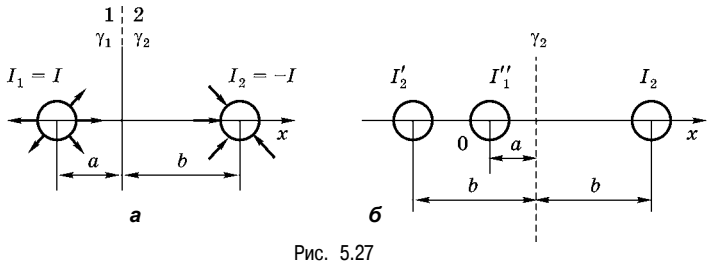


Рис. 5.27

5.2.6 (м). Провода двухпроводной линии находятся в средах с различными удельными проводимостями γ_1 и γ_2 на расстояниях a и b от плоской границы раздела сред (рис. 5.27*а*). Радиусы сечения проводов $r_0 \ll a$; $r_0 \ll b$.

Найти сопротивление утечки на единицу длины линии.

5.2.7 (м). При пробое изолятора высоковольтной линии передачи через заземлитель, имеющий форму полусферы радиуса $r_0 = 1{,}5$ м, проходит ток короткого замыкания $I = 200$ А. Удельная проводимость заземлителя значительно больше удельной проводимости грунта $\gamma = 10^{-2}$ См/м.

Найти: 1) сопротивление заземления; 2) шаговое напряжение вблизи заземлителя, приняв длину шага $h = 0{,}8$м.

5.2.8 (м). В качестве заземлителя для электрической установки используется металлический шар радиуса $r_0 = 5$ см. Расстояние от центра шара до поверхности равно h. Удельная проводимость грунта $\gamma = 10^{-2}$ См/м.

Найти сопротивление заземления в трех случаях: $h = 0$, $h = 30$ см, $h \gg r_0$.

5.2.9 (р). Сферический электрод расположен в земле на расстоянии h от ее поверхности (рис. 5.28*а*). Ток электрода I. Удельные проводимости земли и воздуха соответственно равны $\gamma_1 = \gamma$ и $\gamma_2 = 0$.

Построить расчетные модели для определения поля в двух средах и найти распределение заряда на поверхности земли.

5.2.10 (м). К плоской проводящей шайбе подводится напряжение U_0 при помощи двух радиально расположенных электродов (рис. 5.29). Внутренний и внешний радиусы шайбы r_1 и r_2; толщина h. Удельная проводимость материала шайбы γ существенно меньше проводимости материала электродов.

Найти ток i_0, протекающий по шайбе. Численное решение выполнить, положив $r_1 = 20$ мм, $r_2 = 60$ мм, $h = 1$ мм, $\gamma_1 = 6 \cdot 10^3$ См/м, $\gamma_2 = 4 \cdot 10^3$ См/м, $U_0 = 1$ В.

5.2.11 (м). Сфера радиуса r_0 выполнена из тонкого металлического листа толщины h. Дисковые электроды радиуса a находятся на полюсах сферы (рис. 5.30). Удельная проводимость металла γ.

Найти сопротивление сферы. Численное решение выполнить, положив $r_0 = 5$ см, $h = 0{,}1$ см, $a = 0{,}2$ см, $\gamma = 10^{-6}$ См/м.

5.2.12 (р). На длинный брусок прямоугольного сечения, изготовленный из несовершенного диэлектрика, нанесены плоский и П-образный электроды (рис. 5.31). Ширина бруска a, высота b. Удельная проводимость материала γ.

Найти: 1) распределение потенциала $U(x, y)$ в сечении бруска; 2) проводимость конструкции на единицу длины.

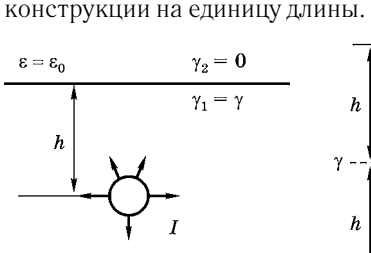


Рис. 5.28

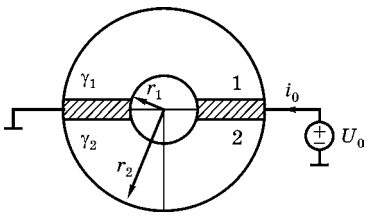


Рис. 5.29

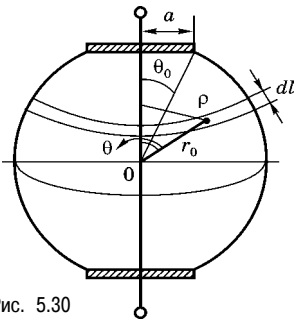


Рис. 5.30

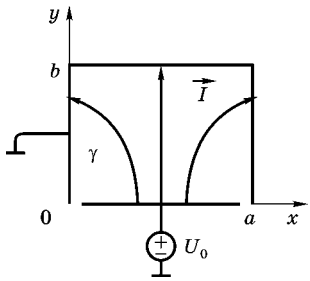


Рис. 5.31

5.3. Постоянное магнитное поле

5.3.1 (м). По отрезку прямолинейного проводника течет ток i. Длина отрезка l (рис. 5.32).

Найти напряженность магнитного поля.

5.3.2 (м). По тонкому кольцу радиуса r_0 протекает ток i (рис. 5.33).

Найти напряженность поля $\vec{H}$ на оси z.

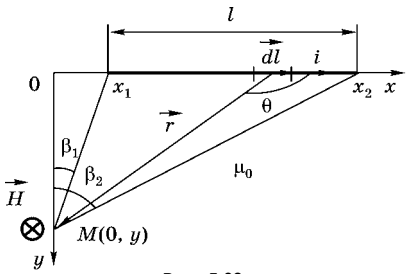


Рис. 5.32

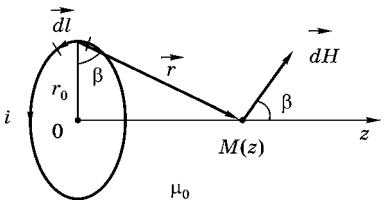


Рис. 5.33

5.3.3 (м). Катушка (соленоид) с током i имеет длину l и радиус r_0. Число витков (намотка плотная) — n (рис. 5.34).

Найти напряженность поля $\vec{H}$ на оси катушки и записать приближенную формулу для поля внутри длинного (эталонного) соленоида.

5.3.4 (р). По длинной металлической ленте, ширина которой h значительно превышает толщину a, протекает постоянный ток i (рис. 5.35). Магнитная проницаемость всюду равна μ_0.

Найти магнитную индукцию $\vec{B}$ на осях x и y.

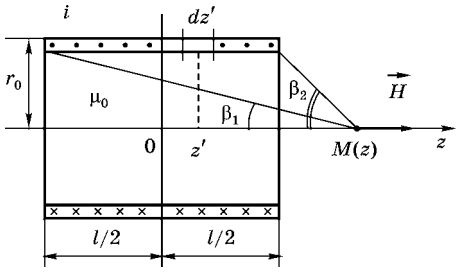


Рис. 5.34

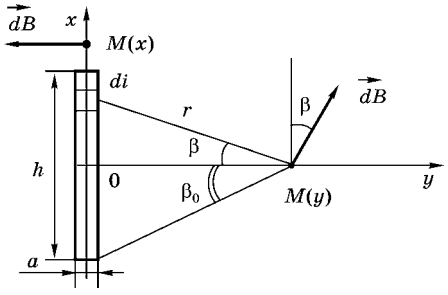


Рис. 5.35

5.3.5 (р). Сферическая оболочка радиуса r_0, несущая равномерно распределенный заряд $q > 0$, вращается вокруг оси z (рис. 5.36). Частота вращения $n(1/\text{с})$; магнитная проницаемость всюду μ_0.

Найти напряженность магнитного поля на оси вращения внутри и вне оболочки. Численное решение для внутреннего поля выполнить, положив $r_0 = 10$ см, $q = 3 \cdot 10^{-7}$ Кл, $n = 100\ \text{с}^{-1}$.

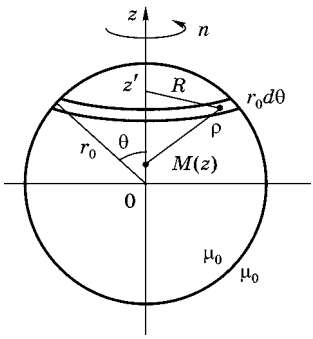


Рис. 5.36

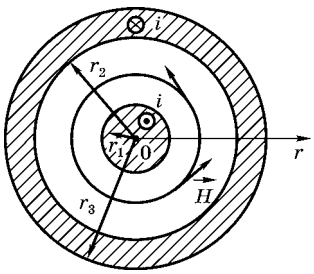


Рис. 5.37

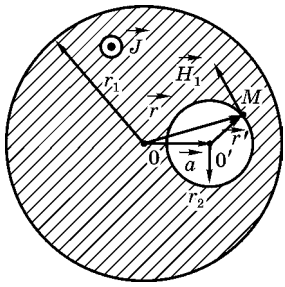


Рис. 5.38

5.3.6 (м). На шар радиуса r_0 нанесена плотная обмотка, так что плоскости всех витков параллельны. Число витков обмотки n, ток i. Магнитная проницаемость всюду равна μ_0.

Найти напряженность поля $\vec{H}$ в центре шара.

5.3.7 (м). Сферическая оболочка радиуса r_0, несущая равномерно распределенный заряд q, вращается вокруг оси z, проходящей через ее центр (рис. 5.36). Частота вращения n (1/с). Магнитная проницаемость всюду μ_0.

Считая известным общее выражение для скалярного магнитного потенциала $U_m = (Ar + B/r^2)\cos\theta$ в сферической системе координат, найти напряженность магнитного поля внутри и вне оболочки.

5.3.8 (м). На рис. 5.37 изображено поперечное сечение коаксиального кабеля: r_1 — радиус жилы, r_2, r_3 — внутренний и внешний радиусы оболочки. Ток кабеля i. Магнитные проницаемости жилы, изоляции и оболочки соответственно равны μ_1, μ_2 и μ_3.

Найти распределение напряженности поля $\vec{H}$ и магнитной индукции $\vec{B}$.

5.3.9 (р). Ток распределен с постоянной плотностью $\vec{J}$ в области, ограниченной двумя цилиндрическими поверхностями, радиусы которых r_1 и r_2 ($r_1 > r_2$). Оси цилиндров параллельны; расстояние между ними a (рис. 5.38). Магнитная проницаемость среды везде μ_0.

Показать, что поле внутри цилиндра меньшего радиуса однородно и равно

$$\vec{H} = \frac{1}{2}[\vec{J}\,\vec{a}],$$

где вектор $\vec{a}$ направлен от оси большего к оси меньшего цилиндра.

5.3.10 (р). Ток i стекает в землю из металлического полусферического заземлителя (рис. 5.39*а*).

Найти напряженность магнитного поля в земле.

5.3.11 (р). Длинный диэлектрический цилиндр радиуса r_0, несущий объемный заряд постоянной плотности $\rho = \text{const}$, вращается вокруг своей оси с частотой n.

Найти напряженность магнитного поля.

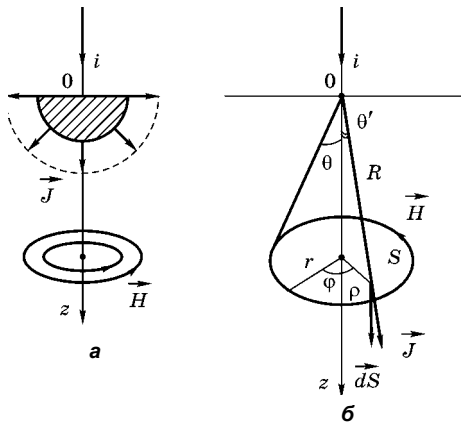


Рис. 5.39

5.3.12 (м). Распределение тока в шнуре газового разряда в цилиндрической системе координат записывается в виде

$$J = J_z = \frac{J_0}{r/a + 1},$$

где r — координата, отсчитываемая от оси шнура; J_0, a — постоянные.

Найти напряженность магнитного поля внутри шнура.

5.3.13 (р). Заряд $q > 0$ распределен равномерно с поверхностной плотностью σ по тонкому диску радиуса r_0 (см. условие задачи 5.1.9 (м)). Диск вращается вокруг оси z с частотой n (1/с). Магнитная проницаемость всюду μ_0.

Найти: 1) напряженность магнитного поля $\vec{H}$ на оси вращения z; 2) приближенную формулу для расчета $\vec{H}$ на больших расстояниях $z \gg r_0$.

5.3.14 (м). Найти магнитный момент вращающегося диска (см. задачу 5.3.13 (р)) и напряженность магнитного поля $\vec{H}$ на больших расстояниях $r \gg r_0$ (рис. 5.40).

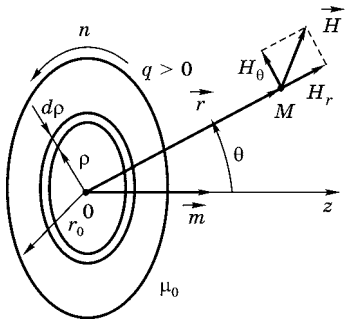


Рис. 5.40

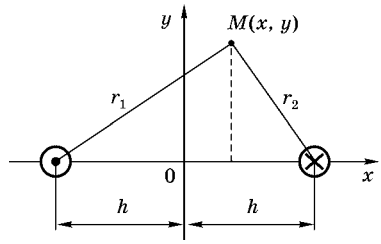


Рис. 5.41

5.3.15 (м). Шар радиуса r_0, несущий заряд $q > 0$, вращается (см. рис. 5.36) вокруг своего диаметра с частотой n (1/с). Магнитная проницаемость всюду μ_0.

Найти магнитный момент шара в двух случаях: 1) заряд равномерно распределен по его объему с плотностью $\rho = 3q/(4\pi r_0^3)$; 2) заряд сосредоточен на поверхности с постоянной плотностью $\sigma = q/(4\pi r_0^2)$.

5.3.16 (р). Расстояние между осями проводов двухпроводной линии $2h$, радиус провода r_0. Поперечное сечение линии приведено на рис. 5.41. Ток в прямом и обратном проводе равен i. Магнитная проницаемость всюду μ_0.

Найти магнитную индукцию $\vec{B}$ при условии тонких (линейных) проводов: $r_0 \ll h$.

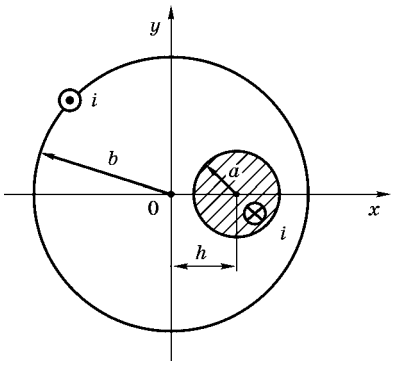


Рис. 5.42

5.3.17 (р). Внутренняя жила радиуса a цилиндрического кабеля смещена на расстояние h. Радиус тонкостенной оболочки b (рис. 5.42). Прямой и обратный ток кабеля i; магнитная проницаемость везде μ_0.

Найти напряженность магнитного поля на оси x и построить график $H_y(x)$, приняв $a = 0{,}2$ см, $b = 1{,}2$ см, $h = 0{,}5$ см, $i = 2$ А.

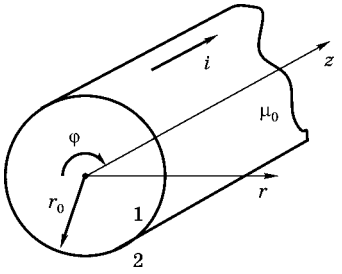


Рис. 5.43

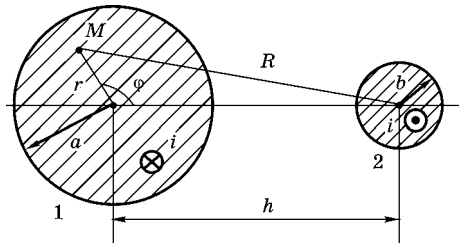


Рис. 5.44

5.3.18 (р). Постоянный ток i протекает по бесконечно длинному цилиндрическому проводу радиуса r_0 (рис. 5.43). Магнитная проницаемость провода и окружающей среды равна μ_0.

Найти 1) векторный потенциал магнитного поля; 2) вектор магнитной индукции.

5.3.19 (р). Расстояние между осями проводов двухпроводной линии h; радиусы сечения a и b соизмеримы с h (рис. 5.44). Ток в прямом и обратном проводе i. Магнитная проницаемость проводов и окружающей среды равна μ_0.

Найти: 1) энергию магнитного поля на единицу длины линии; 2) погонную индуктивность линии. Численное решение выполнить, положив $a = 2$ см, $b = 1$ см, $h = 3{,}1$ см.

5.3.20 (м). Двухпроводная линия с тонкими проводами (см. рис. 5.41) расположена в однородном магнетике с проницаемостью μ.

Найти внешнюю индуктивность участка линии длиной l.

5.3.21 (м). Найти индуктивность участка коаксиального кабеля длиной l.

5.3.22 (м). Найти внутреннюю индуктивность на единицу длины полого длинного цилиндрического провода (трубы). Внутренний радиус r_1, наружный — r_2. Магнитная проницаемость материала провода μ.

5.3.23 (р). На круглый сердечник с сечением прямоугольной формы плотно намотаны две обмотки с количеством витков n_1 и n_2. Внутренний радиус сердечника r_1, внешний — r_2, толщина h (рис. 5.45). Магнитная проницаемость материала сердечника μ.

Найти: 1) собственную индуктивность первой обмотки; 2) взаимную индуктивность обмоток.

5.3.24 (м). Сердечник тороидальной катушки с плотной обмоткой имеет малый воздушный зазор d. Длина средней (осевой) линии катушки l_0, а линии в сердечнике $l_c = l_0 - d$, причем $d \ll l_c$. Число витков обмотки n, ток i. Магнитная проницаемость материала сердечника μ.

Найти: 1) магнитную индукцию на средней линии и сравнить с индукцией при отсутствии зазора; 2) индуктивность катушки с зазором.

5.3.25 (р). Длинный прямой провод с током i_1 расположен на оси симметрии круглой катушки с сердечником прямоугольного сечения (рис. 5.46).

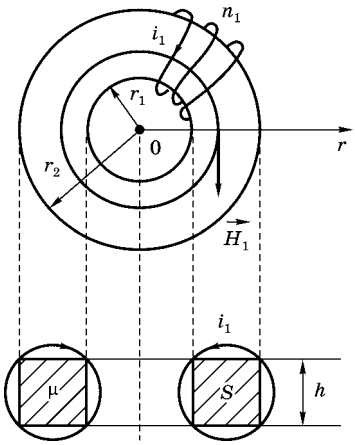


Рис. 5.45

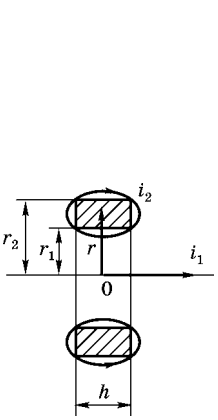


Рис. 5.46

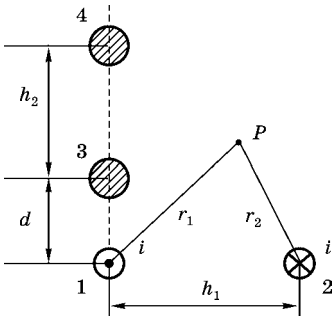


Рис. 5.47

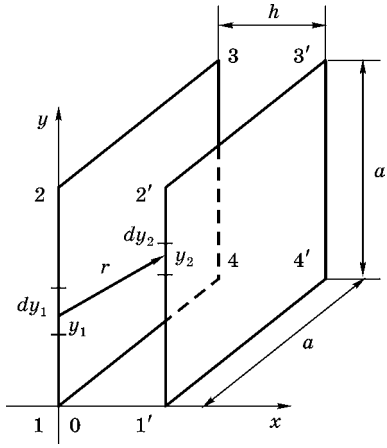


Рис. 5.48

Внутренний радиус сердечника r_1, внешний — r_2, толщина h. Число витков катушки n, ток i_2. Магнитная проницаемость материала сердечника μ.

Найти: 1) взаимную магнитную энергию поля в системе; 2) взаимную индуктивность.

5.3.26 (м). Двухпроводные линии расположены в перпендикулярных плоскостях, как показано на рис. 5.47. Магнитная проницаемость везде μ_0.

Найти взаимную индуктивность участка линий длиной l.

5.3.27 (р). Две одинаковых квадратных рамки из тонкого провода расположены в параллельных плоскостях на расстоянии h (рис. 5.48). Длина стороны рамки a; магнитная проницаемость везде μ_0.

Найти взаимную индуктивность. Численное решение выполнить, положив $a = h = 5$ см.

5.3.28 (р). Прямоугольная рамка, содержащая n витков тонкого провода, расположена параллельно бесконечно длинному проводу так, как показано на рис. 5.49; длина рамки в направлении провода b; магнитная проницаемость везде μ_0.

Найти взаимную индуктивность провода и рамки.

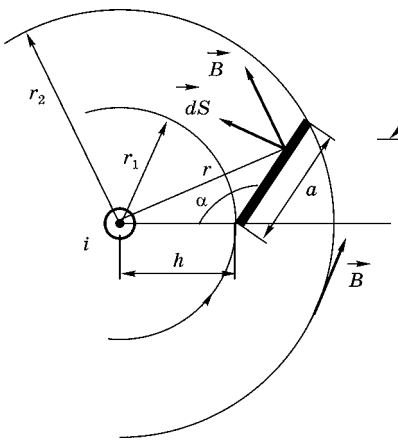
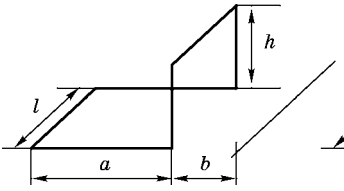
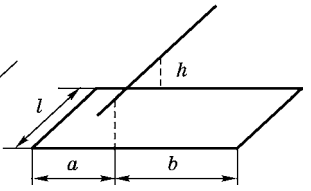


Рис. 5.49



а



б

Рис. 5.50

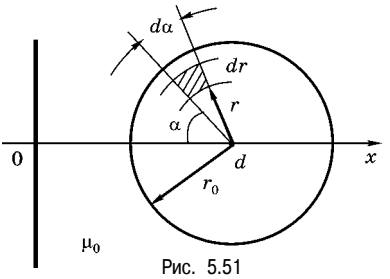


Рис. 5.51

5.3.29 (м). Две рамки из тонкого провода и бесконечно длинный линейный провод расположены так, как показано на рис. 5.50.

Найти взаимную индуктивность провода и рамок.

5.3.30 (р). Круглый виток из тонкого провода и линейный провод расположены в одной плоскости (рис. 5.51). Радиус витка r_0, расстояние от его центра до провода d. Окружающая среда — воздух.

Найти взаимную индуктивность.

5.3.31 (м). Тонкий прямолинейный проводник расположен в воздухе над плоской поверхностью магнетика с проницаемостью μ (рис. 5.52). Радиус проводника r_0 много меньше расстояния h от его оси до поверхности.

Найти напряженность поля и индукцию в точках оси x.

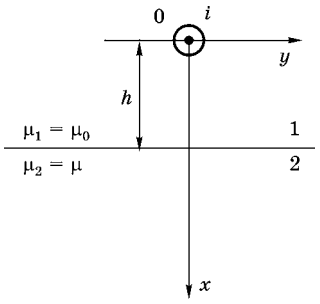


Рис. 5.52

5.3.32 (р). Провод с током i находится над плоской границей раздела двух магнетиков (рис. 5.52).

Найти модуль и направление силы, действующей на единицу длины провода. Численное решение выполнить при $i = 100$ А, $h = 2$ см для двух случаев: а) $\mu_2/\mu_1 = 100$; б) $\mu_1/\mu_2 = 100$.

5.3.33 (м). Вблизи плоской границы раздела двух магнетиков с проницаемостями μ_1 и μ_2 на одинаковых расстояниях h находятся два тонких прямолинейных провода (рис. 5.53). Токи проводов i_1 и i_2.

Найти силу, действующую на второй провод.

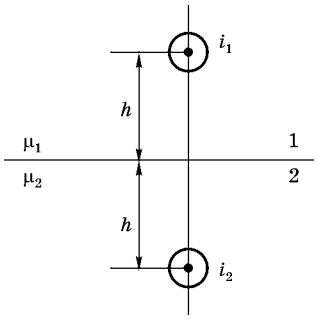


Рис. 5.53

5.3.34 (м). Индуктивность витка из тонкого провода равна L.

Найти, как изменится его индуктивность, если виток находится на поверхности магнетика с проницаемостью μ.

5.3.35 (р). Тонкий провод с током i изогнут под прямым углом (рис. 5.54).

Найти силу, действующую на отрезок провода с координатами $y_1 = a$, $y_2 = b$ при условии, что длина части провода на оси x значительно превышает b. Численное решение выполнить, положив $i = 10^4$ А, $a = 0{,}1$ м, $b = 1{,}1$ м.

5.3.36 (р). Между проводами линии с током i находится подвижная проводящая перемычка со скользящими контактами (рис. 5.55). Радиус проводов r_0.

Найти: 1) силу, действующую на перемычку; 2) скорость движения перемычки $v(t)$, если $v(0) = 0$, масса перемычки m, ток i поддерживается постоянным.

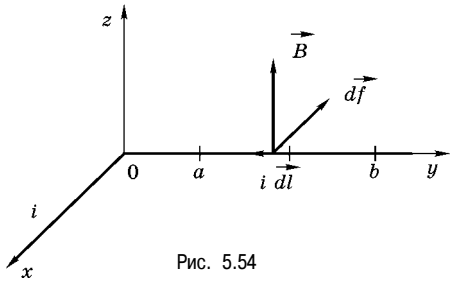


Рис. 5.54

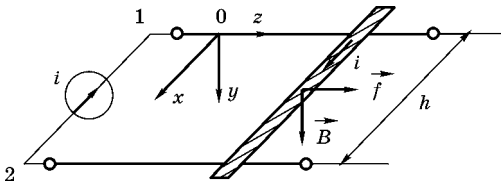


Рис. 5.55

5.3.37 (м). Показать, что в условиях задачи 5.3.36 (р) продольная сила f_z не зависит от формы перемычки.

5.3.38 (р). Круглый виток с током i расположен в плоскости xy, как показано на рис. 5.56. Радиус витка r_0. Вектор $\vec{B}$ направлен по оси z и изменяется вдоль оси x по линейному закону $B_z = B_0(x/a - 1)$, где $a = \text{const}$.

Найти силу, действующую на виток.

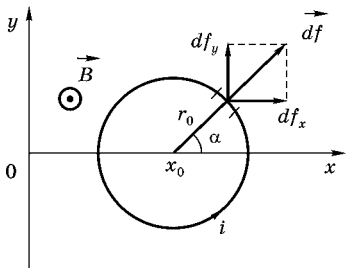


Рис. 5.56

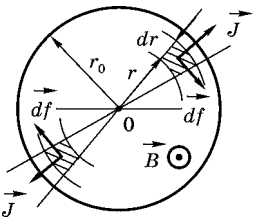


Рис. 5.57

5.3.39 (р). Ток i подводится к центру тонкого диска и равномерно снимается с его периметра так, что векторные линии тока радиальны. Радиус диска r_0, толщина h (рис. 5.57). Диск находится в однородном поле $\vec{B}$, перпендикулярном его плоскости.

Найти момент сил, приложенный к диску.

5.3.40 (м). Линейный провод и круглый виток расположены в одной плоскости (см. рис. 5.51). Ток провода i_1, витка — i_2.

Найти силу, действующую на виток.

5.3.41 (м). Расстояние между осями проводов двухпроводной линии h, радиус провода r_0. Ток линии i. Магнитная проницаемость всюду μ_0.

Найти силу, действующую на участок провода длиной l, при условии $r_0 \ll h$.

5.3.42 (р). В коаксиальном кабеле (см. рис. 5.37) радиус жилы r_1, внутренний радиус оболочки r_2. Толщиной оболочки можно пренебречь ($r_3 \approx r_2$), считая ток i в ней поверхностным. Магнитная проницаемость жилы и изоляции μ_0.

Найти механические усилия, действующие в оболочке кабеля на участке длиной l. Численное решение выполнить, приняв $i = 10$ кА, $r_2 = 3$ см, $l = 1$ м.

5.3.43 (м). Решить задачу 5.3.42 (р), используя закон Ампера.

5.3.44 (р). По трубчатому проводнику с наружным радиусом r_0 протекает ток i. Толщину стенки h можно считать пренебрежимо малой ($h \ll r_0$), а ток — поверхностным.

Найти давление на стенку проводника. Численное решение выполнить, положив $i = 15$ А, $r_0 = 2,5$ см.

5.3.45 (р). Приближенная формула для расчета индуктивности кольца из тонкого провода (материал немагнитный) $L = \mu_0 r[\ln(8r/a) - 1{,}75]$, где r — радиус средней линии кольца; a — радиус провода. По кольцу протекает замкнутый ток i.

Найти механические усилия, действующие в кольце. Численное решение выполнить, положив $i = 10$ А, $r = 10$ см, $a = 0,2$ см.

5.3.46 (р). Круглый ферромагнитный цилиндр (стержневой магнит) имеет однородную остаточную намагниченность $\vec{M} = \text{const}$ вдоль своей оси. Радиус цилиндра r_0, длина l (рис. 5.58). Окружающая среда — воздух.

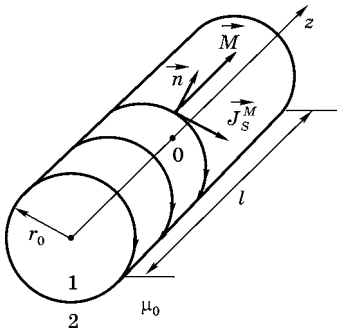


Рис. 5.58

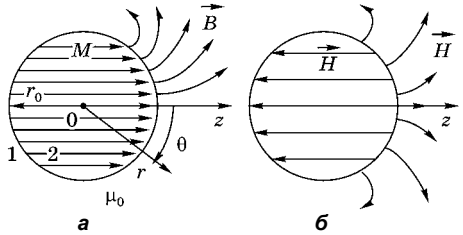


Рис. 5.59

Найти магнитную индукцию и напряженность поля на оси цилиндра.

5.3.47 (м). Решить задачу 5.3.46 (р), используя представления магнитостатики о связанных магнитных зарядах.

5.3.48 (м). Шар радиуса r_0 (шаровой магнит) имеет однородную остаточную намагниченность $\vec{M} = \text{const}$. Окружающая среда — воздух (рис. 5.59*а*).

Найти магнитное поле внутри и вне шара.

5.3.49 (р). Тонкая пленка толщиной a имеет поперечную намагниченность, зависящую только от одной координаты: $M = M_x = M_0 \cos ky$ (рис. 5.60). Окружающая среда — воздух.

Найти магнитное поле в данной краевой задаче, используя скалярный потенциал поля.

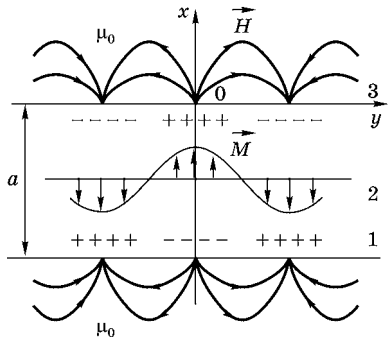


Рис. 5.60

5.4. Стационарное и квазистационарное электромагнитное поле

5.4.1 (р). Постоянный ток i протекает по бесконечно длинному цилиндрическому проводу радиуса r_0. Сечение провода и система координат показаны на рис. 5.61$а$. Удельная проводимость материала равна γ.

Найти внутри провода: 1) напряженность и потенциал электрического поля; 2) напряженность магнитного поля; 3) вектор Пойнтинга и его дивергенцию; 4) электромагнитную мощность, поступающую в провод на участке длиной l. Численное решение выполнить, положив $i = 100$ А, $r_0 = 4$ мм, $\gamma = 5{,}6 \cdot 10^7$ 1/Ом·м, $l = 10$ м.

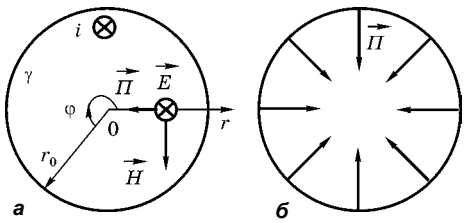
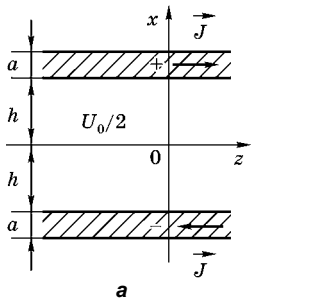


Рис. 5.61

5.4.2 (р). Постоянный ток протекает в прямом и обратном направлениях по двум проводящим пластинам (рис. 5.62$а$). Толщина пластин a, расстояние между ними $2h$, протяженность в направлениях y и z бесконечна. Напряжение между пластинами в сечении $z = 0$ равно U_0, плотность тока $\vec{J} = \text{const}$, удельная проводимость материала γ.

Найти между пластинами: 1) напряженность электрического поля; 2) напряженность магнитного поля; 3) вектор Пойнтинга; 4) отношение продольной и поперечной составляющих $\vec{E}$ в точке $|x| = h$, $z = 0$, положив $U_0 = 100$ В, $J = 4 \cdot 10^6$ А/м^2, $\gamma = 5{,}6 \cdot 10^7$ 1/Ом·м, $h = 1$ см.

5.4.3 (м). Коаксиальный кабель с однослойной изоляцией находится под постоянным напряжением U_0 (рис. 5.63). Ток кабеля i.



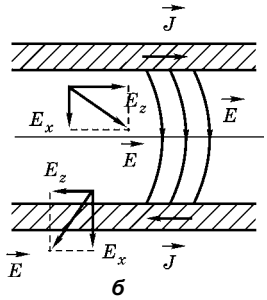


Рис. 5.62

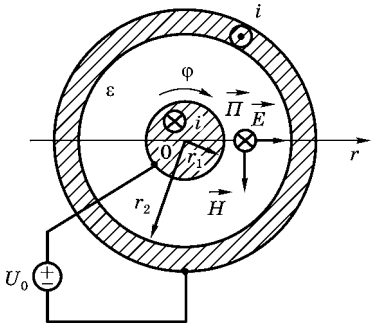


Рис. 5.63

Пренебрегая сопротивлением жилы и оболочки, найти: 1) вектор Пойнтинга $\vec{\Pi}$ в изоляции; 2) поток $\vec{\Pi}$ через сечение изоляции — кольцо с внутренним радиусом r_1 и внешним r_2.

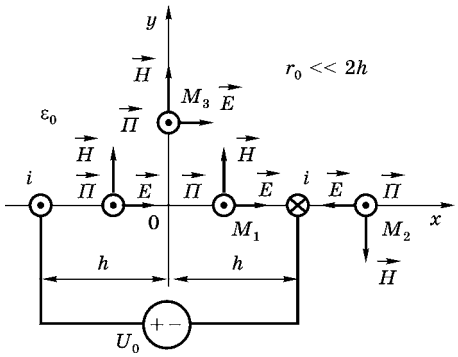


Рис. 5.64

5.4.4 (м). Двухпроводная линия находится под напряжением $U_0 = \text{const}$ (рис. 5.64). Ток линии i.

Пренебрегая сопротивлением проводов, найти вектор Пойнтинга в точках M_1, M_2 и M_3.

5.4.5 (м). Плоский конденсатор образован круглыми пластинами радиуса r_0, расположенными на расстоянии h. Заполнение — идеальный однородный диэлектрик: проницаемость ε, удельная проводимость $\gamma = 0$. Напряжение конденсатора при зарядке через резистор изменяется по закону $u(t) = U_0(1 - e^{-t/\tau})$.

Пренебрегая краевым эффектом ($r_0 \gg h$), найти в конденсаторе: 1) напряженность электрического поля; 2) плотность тока смещения; 3) напряженность магнитного поля; 4) вектор Пойнтинга; 5) поток $P_s(t)$ вектора $\vec{\Pi}$ через боковую поверхность конденсатора; 6) энергию W, поступившую в конденсатор к моменту окончания зарядки.

5.4.6 (р). По цилиндрической катушке с однослойной обмоткой протекает гармонический ток $i(t) = I_m \cos\omega t$ (рис. 5.65*а*). Число витков на единицу длины n. Радиус катушки r_0, длина h, причем $h \gg r_0$ (эталонный соленоид). Магнитная проницаемость сердечника μ_0 (воздух).

Найти: 1) электромагнитное поле в катушке; 2) вектор Пойнтинга; 3) напряжение между концами 1 и 2 тонкого проводника в двух случаях (рис. 5.65*б*): а) проводник находится на линии поля $\vec{E}$ радиуса a; б) проводник лежит на диаметре линии.

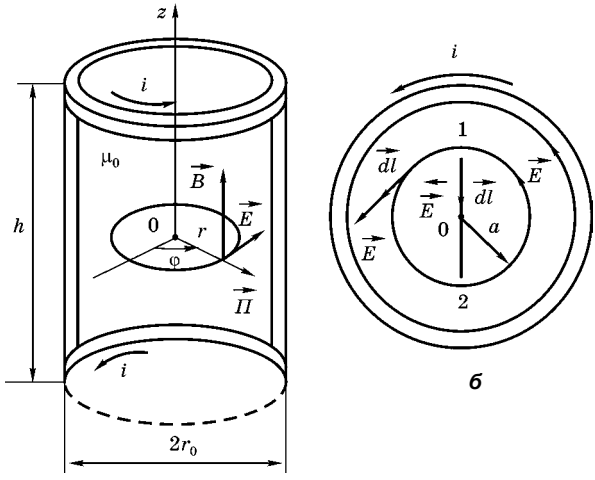


Рис. 5.65

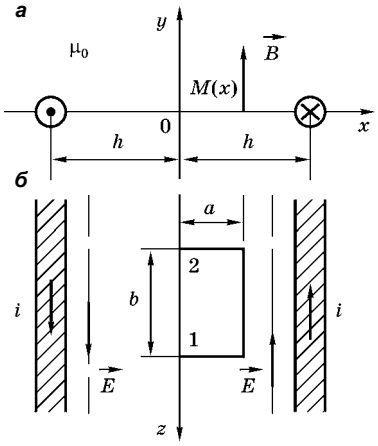


Рис. 5.66

5.4.7 (м). Однородная остаточная намагниченность $\vec{M} = \text{const}$ в цилиндрическом стержне (см. рис. 5.58) изменяется во времени по закону $M_z(t) = M_0 e^{-t/\tau}$.

Найти вихревое электрическое поле внутри и вне стержня в средней его части при условии $l \gg r_0$. Проводимостью материала можно пренебречь (феррит).

5.4.8 (р). Расстояние между осями проводов двухпроводной линии $2h$, радиус провода $r_0 \ll 2h$ (рис. 5.66*а*). Ток линии $i(t) = I_m \cos\omega t$. Окружающая среда — воздух.

Найти: 1) вихревое электрическое поле на оси x, используя два подхода: а) второе уравнение Максвелла, б) векторный потенциал линии; 2) амплитуду напряжения между концами 1 и 2 незамкнутого контура из тонкого проводника (рис. 5.66*б*). Численное решение выполнить, положив $I_m = 10$ А, $f = 10$ кГц, $h = 5$ см, $a = 4{,}5$ см, $b = 3$ м.

5.4.9 (м). В устройстве для ускорения заряженных частиц в вихревом поле $\vec{E}$ электромагнит создает аксиально симметричное гармоническое поле $\vec{B}$ (рис. 5.67*а*). В плоскости $z = 0$ имеем $B_z(r, t) = B_m(r)\cos\omega t$, причем при $r < r_0$ амплитуда магнитной индукции является постоянной $B_m(r) = B_0$, а при $r > r_0$ убывает по закону $B_m(r) = B_0(r_0/r)^n$, где $n \geq 2$ (рис. 5.67*б*).

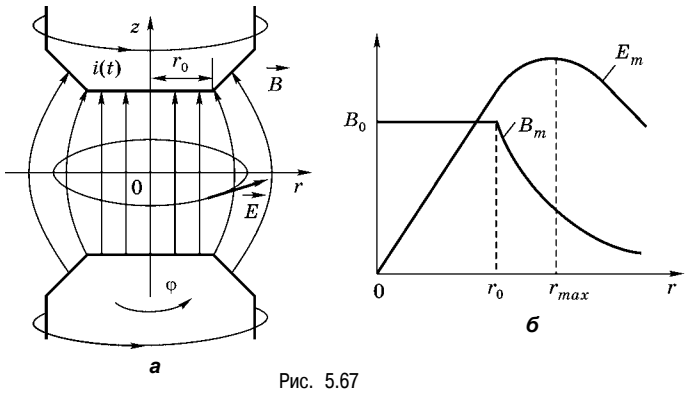


Рис. 5.67

Найти: 1) вихревое электрическое поле; 2) радиус $r_{\max}$ линии поля $\vec{E}$, где амплитуда максимальна; 3) энергию, получаемую зарядом q за один оборот по этой орбите. Численное решение выполнить, положив $B_0 = 0{,}1$ Тл, $r_0 = 25$ см, $n = 2{,}5$, $f = \omega/2\pi = 500$ Гц, $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, $\omega t = (2\pi N + \pi/4)$, где N — целое число.

5.4.10 (м). В аксиально симметричном гармоническом магнитном поле составляющие индукции $B_r = B_\varphi = 0$; $B_z(t) = B_m(r)\cos\omega t$. Амплитуда $B_m(r)$ представляется кусочно постоянной функцией: $B_m = B_{m1}$ при $r < a$; $B_m = B_{m2}$ при $a < r < b$, причем $B_{m2} < B_{m1}$; $B_m = 0$ при $r > b$.

Найти: 1) выражения для амплитуды $E_m(r)$ вихревого электрического поля; 2) положение минимума $E_m(r)$ в области $a < r < b$; 3) построить зависимость $E_m(r)$, приняв (в условных единицах) $B_{m1} = 1$, $B_{m2} = 0{,}2B_{m1} = 0{,}2$, $\omega = 1$, $a = 1$, $b = 4a = 4$.

5.4.11 (р). Однородное гармоническое магнитное поле $\vec{B} = \vec{B}_m \cos\omega t$ направлено по оси z. Контур из тонкого провода вращается вокруг оси y (рис. 5.68). Площадь контура S, угловая скорость вращения ω_0.

Найти: 1) электродвижущую силу (ЭДС), индуцируемую в контуре; 2) условие, при котором частота ЭДС равна 2ω, и ее амплитуду в этом случае.

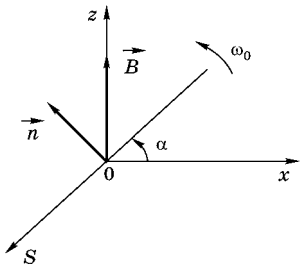


Рис. 5.68

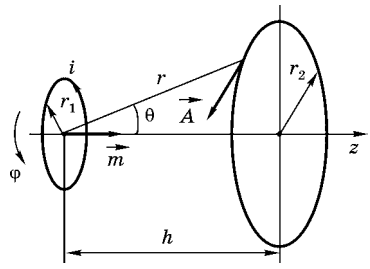


Рис. 5.69

5.4.12 (р). Две плоские круглые катушки с числом витков n_1 и n_2 находятся в параллельных плоскостях (рис. 5.69). Радиусы катушек r_1 и r_2, расстояние между ними h. Ток первой катушки i. Магнитная проницаемость везде μ_0.

При условии $h \gg r_1$ найти напряжение на разомкнутых выводах второй катушки в трех случаях: 1) ток катушки — гармонический $i(t) = I_m \cos\omega t$; 2) при $i = \text{const}$ первая катушка совершает малые гармонические колебания так, что расстояние $h_0(t) = h + a\sin\omega t$, причем $(h - a) \gg r_1$; 3) радиус второй катушки $r_2 \ll h$.

5.4.13 (м). В контуре радиуса r_1 протекает постоянный ток i. На расстоянии h находится контур радиуса r_2, вращающийся вокруг вертикального диаметра (см. рис. 5.69). Угловая скорость вращения ω.

Найти амплитуду ЭДС, наведенной в контуре, при условии, что h значительно превышает r_1 и r_2.

5.4.14 (р). Контур из тонкого провода пронизывается магнитным потоком, локализованным в центральной части (рис. 5.70). Сопротивление участка контура abc равно R_1, а участка ca — R_2. К точкам a и c подключен вольтметр с сопротивлением R_3.

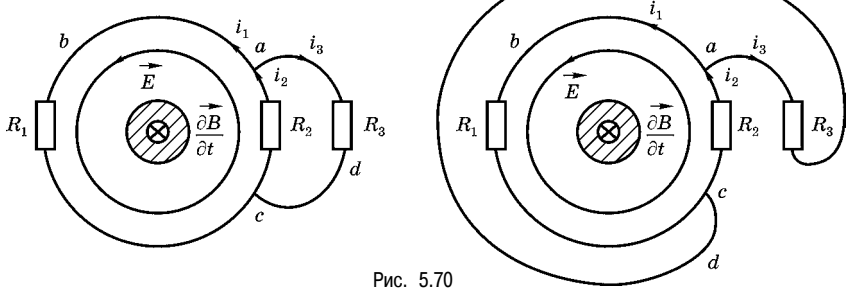


Рис. 5.70

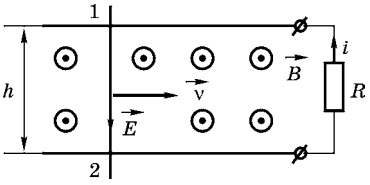


Рис. 5.71

Найти напряжение u_3 на вольтметре при двух вариантах расположения подводящих проводов. Индуктивностью элементов схемы пренебречь.

5.4.15 (м). В постоянном однородном магнитном поле $\vec{B}$ по двум параллельным проводам со скоростью $v = \text{const}$ движется перемычка (рис. 5.71).

Найти ток i в резисторе R, пренебрегая сопротивлением проводов.

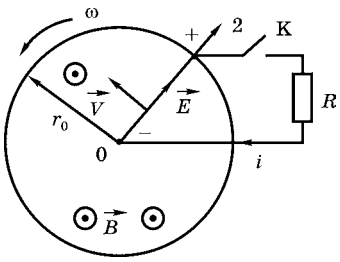


Рис. 5.72

5.4.16 (м). В постоянном магнитном поле $\vec{B}$ с угловой скоростью ω вращается проводящий диск униполярного генератора. Радиус диска r_0, вектор $\vec{B}$ перпендикулярен его поверхности (рис. 5.72).

Найти: 1) напряжение (ЭДС) между осью и краем диска при разомкнутом ключе; 2) ток при подключенном резисторе, пренебрегая сопротивлением проводящих участков схемы и магнитным полем, создаваемым током. Численное решение выполнить, приняв $B = 0{,}3$ Тл, $\omega = 80\pi$, $r_0 = 0{,}5$ м, $R = 10$ Ом.

5.4.17 (р). Плоский конденсатор с воздушным заполнением замкнут на резистор R. Расстояние между электродами h, площадь — S (рис. 5.73*а*). В момент времени $t = 0$ в конденсатор вносится пластина сегнетоэлектрика с остаточной поляризацией $\vec{P}_0$.

Требуется: 1) получить дифференциальное уравнение для поверхностной плотности свободного заряда $\sigma(t)$ на первом электроде; 2) найти решение уравнения при начальном условии $\sigma(0) = 0$; 3) получить выражения для $E(t)$, $u_C(t)$, $i(t)$.

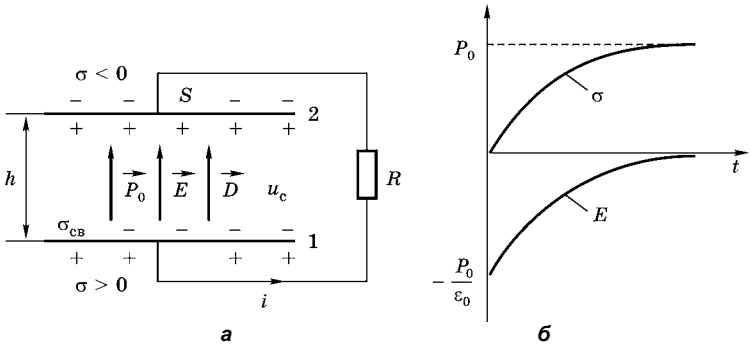


Рис. 5.73

5.4.18 (м). Решить задачу 5.4.17 (р) при условии, что толщина пластины $h_1 < h$. Между пластиной и вторым электродом имеется воздушный слой толщиной $h_2 = h - h_1$.

5.4.19 (р). Плоский конденсатор с двухслойным несовершенным диэлектриком включается на постоянное напряжение U_0. Толщина слоев, диэлектрические проницаемости и удельные проводимости соответственно равны h_1, ε_1, γ_1 и h_2, ε_2, γ_2.

Требуется: 1) найти значения напряженностей поля $E_1(0)$ и $E_2(0)$ в начале переходного процесса; 2) получить дифференциальные уравнения для напряженностей поля в ка-

ждом из слоев и их решения $E_1(t)$ и $E_2(t)$; 3) найти поверхностную плотность заряда $\sigma(\infty)$ на границе слоев в установившемся режиме; 4) рассчитать длительность переходного процесса при $h_1 = h_2$, $\varepsilon_1 = 5\varepsilon_0$, $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_0$, $\gamma_1 = 2 \cdot 10^{-13}$ См/м, $\gamma_2 = 5 \cdot 10^{-13}$ См/м.

5.4.20 (м). Плоский конденсатор, заполненный несовершенным диэлектриком, включается на постоянное напряжение U_0. Диэлектрическая проницаемость линейно изменяется от значения ε_1 на одной пластине до значения ε_2 на другой: $\varepsilon = \varepsilon_1 - ax$, где $a = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/h$; h — расстояние между пластинами; x — координатная ось, перпендикулярная пластинам. Удельная проводимость диэлектрика $\gamma = \text{const}$.

Найти свободные и связанные заряды в объеме диэлектрика в начале процесса и в установившемся режиме.

5.4.21 (р). Плоский конденсатор образован круглыми пластинами радиуса r_0, расположенными на расстоянии h (рис. 5.74*а*). Заполнение — однородный несовершенный диэлектрик с проницаемостью ε и удельной проводимостью γ. Напряжение конденсатора изменяется по гармоническому закону $u(t) = U_m \cos\omega t$.

Найти: 1) электромагнитное поле в конденсаторе; 2) вектор Пойнтинга; 3) мощность тепловых потерь (активную мощность); 4) комплексную проводимость конденсатора.

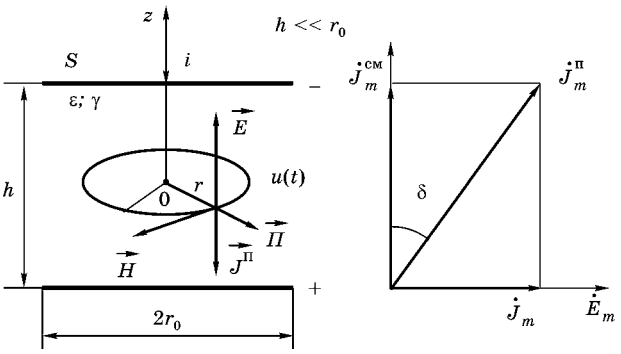


Рис. 5.74

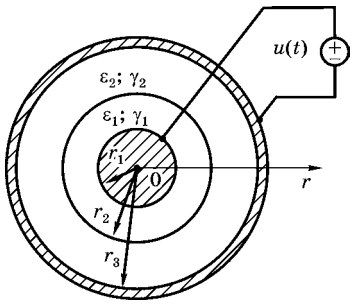


Рис. 5.75

5.4.22 (м). Напряжение плоского конденсатора с двухслойным несовершенным диэлектриком (см. задачу 5.4.19 (р)) изменяется по гармоническому закону $u(t) = U_m \cos\omega t$.

Найти комплексные амплитуды напряженности поля $\dot{E}_{m1}$ и $\dot{E}_{m2}$ в слоях.

5.4.23 (м). Записать выражения для комплексных амплитуд поля $\dot{E}_{m1}$ и $\dot{E}_{m2}$, полученные в задаче 5.4.22 (м), используя понятие комплексной диэлектрической проницаемости.

5.4.24 (р). Коаксиальный кабель имеет двухслойную изоляцию из несовершенных диэлектриков (рис. 5.75). Напряжение кабеля $u(t) = U_m \cos\omega t$.

Найти комплексные амплитуды напряженностей $\dot{E}_{m1}$ и $\dot{E}_{m2}$ в каждом слое. Численное решение выполнить в точках максимума напряженностей, приняв $U_m = 10^3$ В, $f = 50$ Гц, $r_1 = 2$ мм, $r_2 = 3$ мм, $r_3 = 5$ мм, $\varepsilon_1 = 10\varepsilon_0$, $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_0$, $\gamma_1 = 10^{-9}$ См/м, $\gamma_2 = 0$.

5.4.25 (р). Шар радиуса r_0 находится в однородном электрическом поле $E_1(t) = E_{m1} \cos\omega t$. Известны диэлектрическая проницаемость ε_2 и тангенс угла потерь $\operatorname{tg}\delta$ материала шара. Окружающая среда — воздух ($\varepsilon_1 = \varepsilon_0$).

Найти мощность тепловых потерь в шаре, считая процесс квазистационарным (длина волны $\lambda = 6\pi 10^8/\omega \gg r_0$; поверхностным эффектом можно пренебречь).

5.4.26 (р). Шар радиуса r_0 находится в однородном магнитном поле $H_1(t) = H_{m1}\cos\omega t$ (рис. 5.76). Магнитная проницаемость материала шара μ_2, удельная проводимость γ. Окружающая среда — воздух ($\mu_1 = \mu_0$).

Найти мощность тепловых потерь в шаре, считая процесс квазистационарным (длина волны в воздухе $\lambda = 6\pi 10^8/\omega \gg r_0$; поверхностным эффектом можно пренебречь).

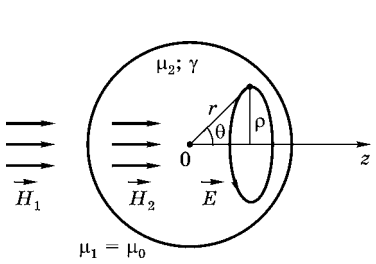


Рис. 5.76

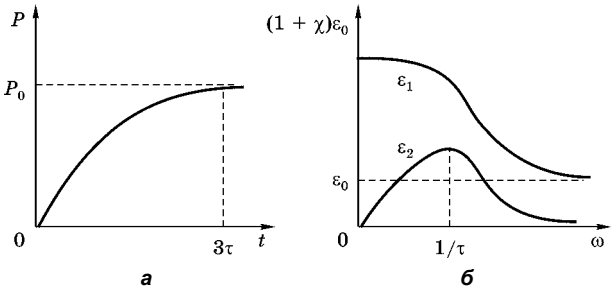


Рис. 5.77

5.4.27 (р). При включении поля $E(t) = E_0\delta_1(t)$ в полярных диэлектриках макроскопический электрический момент образуется с запаздыванием, так что поляризация $P(t) = P_0(1 - e^{-t/\tau})$, где $P_0 = \varepsilon_0\chi E_0$ — установившееся значение; χ — статическая электрическая восприимчивость в постоянном поле; τ — постоянная времени (рис. 5.77*а*).

Найти: 1) операторные восприимчивость $\chi(s)$ и диэлектрическую проницаемость $\varepsilon(s)$; 2) комплексную диэлектрическую проницаемость $\dot{\varepsilon}(j\omega) = \varepsilon_1(\omega) - j\varepsilon_2(\omega)$; 3) вещественную и мнимую части тока смещения.

5.4.28 (р). Плоский конденсатор заполнен диэлектриком с запаздывающей (релаксационной) поляризацией: диэлектрическая проницаемость (статическая) ε, постоянная времени τ. Удельной проводимостью можно пренебречь ($\gamma = 0$). Расстояние между пластинами h, напряжение конденсатора $u(t) = U_m\cos\omega t$.

Найти: 1) напряженность поля и электрическое смещение; 2) поверхностную плотность свободного и связанного зарядов на пластинах; 3) плотность тока смещения; 4) плотность мощности тепловых потерь в диэлектрике. Численное решение выполнить на частоте $\omega = 1/\tau$, приняв $U_m = 200$ В, $h = 1$ см, $\varepsilon = 7\varepsilon_0$, $\tau = 10$ мс.

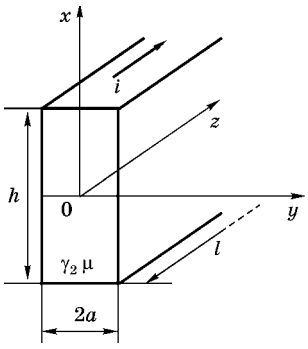


Рис. 5.78

5.4.29 (р). Гармонический ток $i(t) = I_m\cos\omega t$ протекает вдоль длинной тонкой металлической ленты, ширина которой значительно превышает толщину: $h \gg 2a$ (рис. 5.78). Амплитуда плотности тока на боковых поверхностях при $y = \pm a$ равна J_{m0}. Удельная проводимость материала γ, магнитная проницаемость μ.

Требуется: 1) записать уравнение для плотности тока проводимости в частотной области; 2) найти распределение $\dot{J}_m$ в средней части ленты; 3) определить комплексное сопротивление Z участка ленты длиной l; 4) преобразовать формулу Z для случая резкого поверхностного

эффекта; 5) сравнить $\mathrm{Re}Z$ с сопротивлением ленты при постоянном токе, приняв $f = 10^4$ кГц, $\gamma = 5{,}7 \cdot 10^7$ См/м (медь), $\mu = \mu_0$, $a = 8$ мм.

5.4.30 (м). В условиях задачи 5.4.29 (р) найти: 1) напряженность магнитного поля и вектор Пойнтинга на боковых поверхностях ленты при $y = \pm a$; 2) комплексную мощность, поступающую в ленту на участке длиной l, и комплексное сопротивление участка.

5.4.31 (м). Тонкая металлическая лента, ширина которой h значительно превышает толщину $2a$ (см. рис. 5.78), находится в однородном гармоническом магнитном поле. Вектор напряженности поля параллелен плоскости ленты и направлен по продольной оси z. Амплитуда напряженности поля на боковых поверхностях при $y = \pm a$ равна H_{m0}, так что внешнее поле $H_z(t) = H_{m0}\cos\omega t$. Удельная проводимость материала γ, магнитная проницаемость μ.

Найти: 1) распределение магнитного поля в сечении ленты; 2) среднее значение комплексной магнитной проницаемости. Численное решение выполнить, приняв $a = 0{,}2$ мм, $\gamma = 4 \cdot 10^6$ См/м, $\mu = 400\mu_0$.

5.4.32 (м). В условиях задачи 5.4.31 (м) (лента в гармоническом магнитном поле) найти: 1) вихревое электрическое поле в ленте; 2) мощность тепловых потерь на вихревые токи в расчете на площадку S на боковой поверхности.

5.4.33 (р). По проводу круглого сечения радиуса r_0 протекает гармонический ток частотой f. Удельная проводимость материала γ, магнитная проницаемость μ.

Найти: 1) комплексное сопротивление отрезка провода длиной l; 2) коэффициенты изменения активной составляющей сопротивления и внутренней индуктивности. Численное решение выполнить, приняв $r_0 = 10$ мм, $f = 10^6$ Гц, $\gamma = 5{,}7 \cdot 10^7$ См/м (медь), $\mu = \mu_0$.

5.4.34 (р). В однородное гармоническое магнитное поле $\vec{H}_1(t) = \vec{H}_0 \cos\omega t$ помещен весьма длинный металлический прямоугольный экран так, что вектор $\vec{H}$ параллелен его стенкам (рис. 5.79). Ширина экрана $2a$ значительно меньше его длины. Толщина стенок b. Удельная проводимость материала γ, магнитная проницаемость μ.

Найти коэффициент экранирования — отношение комплексных амплитуд напряженности магнитного поля под экраном и вне экрана.

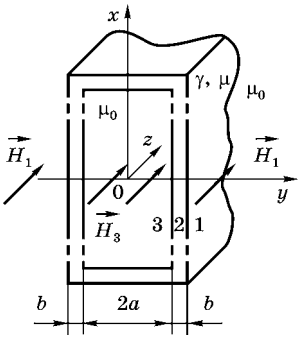


Рис. 5.79

5.4.35 (р). Круглый виток радиуса a расположен в воздухе на высоте h над плоской поверхностью металлического проводника (рис. 5.80). Ток витка — гармонический $i(t) = I_m\cos\omega t$.

Требуется: 1) построить модель для расчета поля вихревых токов, индуцированных в проводнике, при условии резкого поверхностного эффекта; 2) указать метод определения силы, действующей на виток; 3) получить формулу для расчета силы. Численное решение выполнить, приняв $a = 10$ см, $h = 1$ см, $I_m = 100\sqrt{2}$ А.

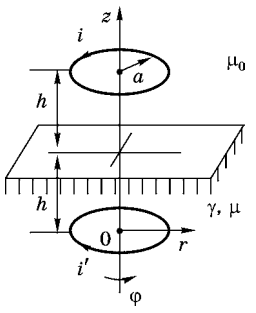


Рис. 5.80

5.4.36 (м). Найти силу, действующую на виток (см. задачу 5.4.35 (р)), при условиях: 1) вихревые токи практически отсутствуют (плита из феррита); 2) магнитная проницаемость $\mu \gg \mu_0$.

5.5. Волновое электромагнитное поле

5.5.1 (р). Однородная плоская электромагнитная волна распространяется в воздухе в направлении, образующем угол θ с нормалью к плоской поверхности S (рис. 5.81). За время t через S переносится электромагнитная энергия W.

Найти амплитуду E_m напряженности электрического поля волны.

5.5.2 (м). Плотность потока электромагнитной энергии (среднее значение вектора Пойнтинга) в луче лазера $\Pi_{ср} = 10^5$ Дж/с·м^2.

Найти амплитуды напряженностей поля E_m и H_m.

5.5.3 (р). В поле плоской линейно поляризованной волны находится прямоугольная рамка (антенна) со сторонами a и b (рис. 5.82). Длина волны λ. Окружающая среда — воздух. Найти: 1) амплитуду U_m напряжения на разомкнутых выводах рамки; 2) отношение b/λ, при котором $U_m = 0$.

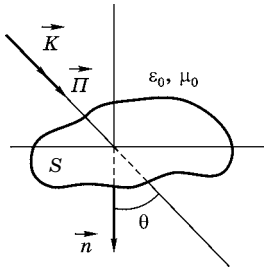


Рис. 5.81

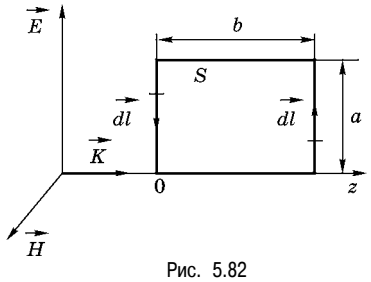


Рис. 5.82

5.5.4 (м). Плоская волна распространяется в поглощающей среде вдоль оси z. Комплексное волновое число $\dot{k} = \beta - j\alpha = 4 - j$, частота $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 10^8$ 1/с. Магнитная проницаемость $\mu = \mu_0$.

Найти: 1) диэлектрическую проницаемость среды ε и тангенс угла потерь $\operatorname{tg}\delta$; 2) комплексное волновое сопротивление Z и разность фаз $\varphi = \alpha_E - \alpha_H$; 3) фазовую скорость v и длину волны λ; 4) среднее значение вектора Пойнтинга $\Pi_{ср}$ в плоскости волнового фронта $z = 0$, где амплитуда $E_m(0) = 100$ В/м; 5) амплитуду напряженности поля E_m и $\Pi_{ср}$ при $z = 1$ м; 6) ε, Z, v, λ в случае $k = 4$ (отсутствие потерь).

5.5.5 (р). Электромагнитные параметры среды: диэлектрическая проницаемость ε, магнитная проницаемость μ, удельная проводимость γ.

Найти длину волны в среде, при которой амплитуды плотностей токов проводимости и смещения равны. Эффектом запаздывающей (релаксационной) поляризации пренебречь.

5.5.6 (м). Найти глубину проникновения волны длиной $\lambda_0 = 8$ мм (в воздухе) в электрофарфор ($\varepsilon = 5\varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $\operatorname{tg}\delta = 0{,}06$) и пьезокерамику ($\varepsilon = 500\varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $\operatorname{tg}\delta = 0{,}08$).

5.5.7 (м). На частоте $f = 100$ мГц (длина волны в воздухе $\lambda_0 = 3$ м) электромагнитные параметры пресной и морской воды соответственно равны: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 81\varepsilon_0$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$, $\gamma_1 = 10^{-2}$ См/м, $\gamma_2 = 4{,}4$ См/м.

Найти следующие характеристики волнового процесса в двух средах: 1) тангенс угла потерь $\mathrm{tg}\delta$, вещественное волновое число β и коэффициент затухания α; 2) фазовую скорость v и длину волны λ; 3) комплексную диэлектрическую проницаемость $\dot{\varepsilon}$ и модуль $|\dot{\varepsilon}|$; 3) модуль волнового сопротивления $|Z|$ и разность фаз $\varphi = \alpha_E - \alpha_H$; 4) глубину проникновения Δ.

5.5.8 (м). Электромагнитные параметры металла (медь): магнитная проницаемость $\mu = \mu_0$, удельная проводимость $\gamma = 5{,}6 \cdot 10^7$ См/м.

Найти на двух частотах $f = 50$Гц и $f = 10$ кГц характеристики квазиволнового процесса: 1) мнимую α и вещественную β части комплексного волнового числа; 2) комплексную проницаемость металла $\dot{\varepsilon}$; 3) модуль волнового сопротивления $|Z|$ и разность фаз $\varphi = \alpha_E - \alpha_H$; 4) глубину проникновения Δ; 5) фазовую скорость v и длину волны λ.

5.5.9 (м). Плоская волна падает под углом $\theta_1 = \theta$ из воздуха ($\varepsilon_1 = \varepsilon_0$, $\mu_1 = \mu_0$) на плоскую поверхность идеального диэлектрика ($\gamma = 0$) с электромагнитными параметрами ε_2 и μ_2.

Найти угол преломления θ_2, фазовую скорость v_2 и длину волны λ_2 в диэлектрике при частоте f. Численное решение провести при $\theta = 30°$, $\varepsilon_2 = 2{,}25\varepsilon_0$, $\mu_2 = \mu_0$, $f = 1$ мГц.

5.5.10 (м). Волна падает по нормали ($\theta_1 = 0$) из воздуха ($\varepsilon_1 = \varepsilon_0$, $\mu_1 = \mu_0$, $\gamma_1 = 0$) на плоскую поверхность среды с параметрами ε_2, γ_2 и μ_2. Частота процесса $f = 100$ мГц.

Найти коэффициенты отражения r_E и прозрачности g_E по напряженности и по мощности (r и g) в двух случаях: 1) $\varepsilon_2 = 81\varepsilon_0$, $\mu_2 = \mu_0$, $\gamma_2 = 10^{-2}$ См/м (пресная вода); 2) $\varepsilon_2 = 81\varepsilon_0$, $\mu_2 = \mu_0$, $\gamma_2 = 4{,}4$ См/м (морская вода).

5.5.11 (м). Волна, частота которой $f = 100$ мГц, падает по нормали ($\theta_1 = 0$) из воздуха ($\varepsilon_1 = \varepsilon_0$, $\mu_1 = \mu_0$, $\gamma_1 = 0$) на поверхность сухой почвы с параметрами $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_0$, $\mu_2 = \mu_0$, $\gamma_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ См/м. Амплитуда напряженности электрического поля волны $E_0 = 0{,}2$ В/м.

Найти амплитуды напряженностей электрического E_m^r и магнитного H_m^r поля отраженной волны.

5.5.12 (р). На поверхность идеального проводника ($\gamma = \infty$) под углом θ падает волна, поляризованная перпендикулярно плоскости падения $E_y = E_0\cos(\omega t - k_x x - k_z z)$, где $k_x = k\sin\theta$, $k_z = k\cos\theta$ — проекции волнового вектора $\vec{k} = k\vec{n} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}\,\vec{n}$ (рис. 5.83).

Требуется: 1) записать выражение для отраженной волны; 2) найти суммарное волновое электромагнитное поле; 3) определить расстояние между узлами поля и фазовую скорость направленной волны.

5.5.13 (р). На поверхность раздела двух идеальных диэлектриков с параметрами ε_1, μ_0 и ε_2, μ_0 падает волна, поляризованная в плоскости, перпендикулярной плоскости падения (рис. 5.84). Первая среда — оптически более плотная: $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$.

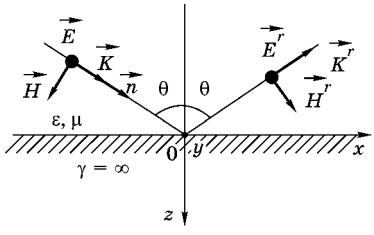


Рис. 5.83

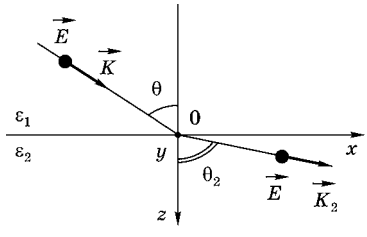


Рис. 5.84

Найти: 1) электрическое поле во второй среде, если угол падения больше критического угла; 2) уравнение поверхности равных амплитуд и глубину проникновения; 3) уравнение фронта волны и фазовую скорость поверхностной волны. Расчет провести при условиях: $\theta = 60°$, $\varepsilon_1 = \sqrt{3}\varepsilon_0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_0$, $f = 100$ мГц.

5.5.14 (р). Продолжить решение задачи 5.5.13 (р) и найти в случае полного отражения: 1) магнитное поле во второй среде; 2) составляющие вектора Пойнтинга Π_x и Π_z; 3) ширину полосы на поверхности раздела сред, где поток электромагнитной энергии входит во вторую среду ($\Pi_z > 0$) и возвращается обратно ($\Pi_z < 0$).

5.5.15 (р). Плоский слой, толщина которого h, а электромагнитные параметры ε_2, μ_2, разделяет две среды с параметрами ε_1, μ_1 и ε_3, μ_3 (рис. 5.85). Удельная проводимость везде равна нулю.

Найти коэффициент отражения при нормальном падении волны методом наложения, рассматривая отраженную волну как результат интерференции волн, многократно отраженных границами слоя.

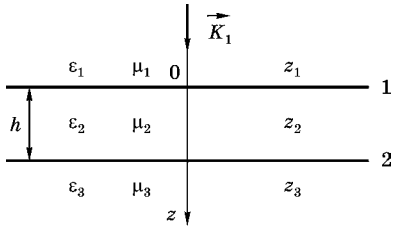


Рис. 5.85

5.5.16 (м). Толщина слоя h равна целому числу полуволн $\lambda_2/2$ («полуволновый» слой).

Показать, что присутствие такого слоя на границе не оказывает влияния на процесс отражения, так что коэффициент отражения по напряженности $R_E = (Z_3 - Z_1)/(Z_3 + Z_1)$.

5.5.17 (м). Слой толщиной h находится в однородной среде: $Z_3 = Z_1$ (см. рис. 5.85).

Требуется: 1) записать выражение для коэффициента отражения по мощности; 2) найти условие, при котором отражение отсутствует; 3) получить выражение для максимального коэффициента отражения. Расчет провести при $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \varepsilon_0$, $\mu_1 = \mu_3 = \mu_0$, $\mu_2 = \mu_0$ в двух вариантах: а) $\varepsilon_2 = 9\varepsilon_0$, б) $\varepsilon_2 = 100\varepsilon_0$.

5.5.18 (м). В условиях задачи 5.5.15 (р) диэлектрическая проницаемость возрастает в направлении распространения волны: $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3$.

Требуется: 1) записать выражение для коэффициента отражения по мощности; 2) найти толщину слоя, при котором отражение минимально; 3) вывести соотношение между параметрами сред, при котором отражение отсутствует.

5.5.19 (м). Волна, распространяясь в воздухе ($\varepsilon_1 = \varepsilon_0$), падает по нормали на поверхность диэлектрика ($\varepsilon_3 = 9\varepsilon_0$). Длина волны $\lambda_1 = 9$ мм.

Найти диэлектрическую проницаемость ε_2 и толщину h согласующего слоя.

5.5.20 (р). На металлический шар радиуса r_0, находящийся в воздухе, падает плоская линейно поляризованная волна $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kz)$ (рис. 5.86). Длина волны значительно превышает размеры шара ($\lambda \gg r_0$).

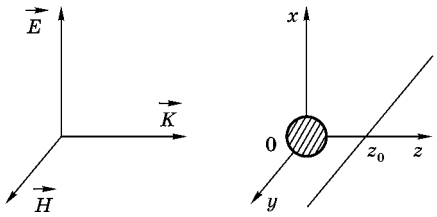


Рис. 5.86

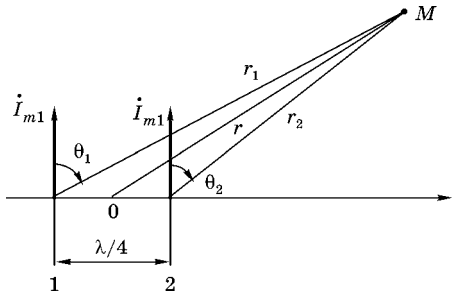


Рис. 5.87

Найти амплитуду полного (дифрагированного) поля: 1) на прямой $z = z_0$, параллельной оси y; 2) на оси y; 3) на оси $z > 0$ («за шаром»); 4) на оси $z < 0$ («перед шаром»).

5.5.21 (м). Элемент гармонического тока расположен в воздухе. Амплитуда тока $I_m = 3$ А, сопротивление излучения $R = 0{,}1$ Ом.

Найти амплитуды напряженностей волнового поля в дальней зоне в точке с координатами $r = 10$ м, $\theta = \pi/2$ (экваториальная плоскость).

5.5.22 (р). Два элемента гармонического тока расположены в одной плоскости параллельно друг другу на расстоянии четверти длины волны (рис. 5.87). Частоты и амплитуды токов одинаковы: $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, $I_{m1} = I_{m2} = I_m$. Ток первого элемента опережает ток второго по фазе на $\pi/2$.

Найти амплитуду электрического поля в дальней зоне в плоскости расположения элементов.

5.6. Методические указания, рекомендации и решения задач

5.6.1. Задачи 5.1.1–5.1.44 к теме «Электростатическое поле»

5.1.1 (р). Напряженность поля бесконечно малого элемента каждой нити в точке наблюдения M находится согласно закону Кулона:

$$d\vec{E}_1 = \frac{\tau_1 dx}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}\cdot\frac{\vec{r}_1}{r_1};\ \ d\vec{E}_2 = \frac{\tau_2 dx}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}\cdot\frac{\vec{r}_2}{r_2}.$$

Поскольку равномерно заряженные нити образуют систему, симметричную относительно оси y, искомое поле определяется составляющими

$$dE_{1y} = \frac{\tau_1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{ydx}{(x^2+y^2)^{3/2}};\ \ dE_{2y} = \frac{\tau_2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{(h-y)dx}{[x^2+(h-y)^2]^{3/2}}.$$

В соответствии с принципом суперпозиции (наложения) напряженность поля при одинаковых знаках зарядов

$$E = E_y = 2\int_0^{l/2}\frac{\tau_1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{ydx}{(x^2+y^2)^{3/2}} - 2\int_0^{l/2}\frac{\tau_2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{(h-y)dx}{[x^2+(h-y)^2]^{3/2}} =$$

$$= \frac{l}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\tau_1}{y\sqrt{(l/2)^2+y^2}} - \frac{\tau_2}{(h-y)\sqrt{(l/2)^2+(h-y)^2}}\right] = 7200\ \text{В/м}.$$

5.1.2 (р). Очевидно, что нейтральная линия может располагаться только в плоскости нитей. Справа от второй нити при $x > h$ в точке M напряженности поля

$$E_{1x} = \frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0 x};\ \ E_{2x} = \frac{\tau_2}{2\pi\varepsilon_0(x-h)}.$$

В точке равновесия $\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0$, т. е. $E_{1x} + E_{2x} = 0$; отсюда следует, что координата нейтральной линии $x_0 = h/(1+\tau_2/\tau_1)$. Полагая $\tau_1 = 10^{-7}$ Кл/м, $\tau_2 = -0{,}5\cdot 10^{-7}$ Кл/м, $h = 10$ см, получим $x_0 = 20$ см.

5.1.3 (р). Потенциал поля элементарного заряда τdx в точке наблюдения M (кулоновский потенциал)

$$dU = \frac{\tau dx}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

а искомый потенциал поля нити

$$U = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-l}^{l}\frac{dx}{[(x_1-x)^2+y_1^2]^{1/2}} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{x_1+l+\sqrt{(x_1+l)^2+y_1^2}}{x_1-l+\sqrt{(x_1-l)^2+y_1^2}}.$$

Покажем, что линии равного потенциала в плоскости xy представляют собой эллипсы. Введем в рассмотрение расстояния от концов нити до точки M

$$r_1 = \sqrt{(x_1-l)^2+y_1^2};\ r_2 = \sqrt{(x_1+l)^2+y_1^2}.$$

При этом $x_1 = (r_2^2 - r_1^2)/4l$ и выражение для потенциала принимает вид

$$U = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_1 + r_2 + 2l}{r_1 + r_2 - 2l}.$$

Уравнение эквипотенциали $r_1 + r_2 = \text{const}$ есть уравнение эллипса, фокусы которого расположены на концах нити. Так как поле имеет осевую симметрию, то эквипотенциальными поверхностями являются конфокальные эллипсоиды. Направление $\vec{E} = -\text{grad}U$ в точке M делит угол $(\widehat{r_1 r_2})$ пополам (свойство нормали к эллипсу).

5.1.4 (р). Потенциал поля в точке M находится как потенциал линейного заряда

$$U = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \int_l \frac{dl}{R},$$

где l — длина кольца. Вследствие симметрии системы поле не зависит от азимутального угла φ и в цилиндрической системе координат

$$U = \frac{\tau r_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(z^2 + r^2 + r_0^2 - 2r_0 r\cos\varphi)^{1/2}}.$$

Произведя подстановки $\varphi = \pi - 2\beta$, $\cos\varphi = -\cos 2\beta = 2\sin^2\beta - 1$, $d\varphi = -2d\beta$, получим

$$U = \frac{\tau r_0}{\pi\varepsilon_0} \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{(z^2 + r^2 + r_0^2 + 2r_0 r - 4r_0 r\sin^2\beta)^{1/2}} = \frac{\tau r_0}{\pi\varepsilon_0} \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{[z^2 + (r + r_0)^2 - 4r_0 r\sin^2\beta]^{1/2}} =$$

$$= \frac{\tau r_0}{\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{[z^2 + (r + r_0)^2]^{1/2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{(1 - k^2\sin^2\beta)^{1/2}} = \frac{\tau r_0}{\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{[z^2 + (r + r_0)^2]^{1/2}} K(k).$$

Здесь $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода модуля

$$k = 2\left[\frac{r_0 r}{z^2 + (r + r_0)^2}\right]^{1/2}.$$

5.1.5 (м). Для точек на оси z координата $r = 0$ и модуль $k = 0$. При этом табличное значение интеграла $K(0) = \pi/2$, а потенциал

$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (z^2 + r_0^2)^{1/2}}.$$

Этот же результат можно легко получить, исходя из общего интегрального представления для потенциала линейного заряда.

5.1.6 (м). Так как $\vec{E} = -\text{grad}U$, в точках оси z

$$E_z = \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0 (z^2 + r_0^2)^{3/2}}, \quad E_r = 0, \quad E_\varphi = 0.$$

В центре кольца $E_z = 0$.

5.1.7 (м). Нейтральные точки расположены на оси z, причем одна из них находится в центре колец $z = 0$. Далее нужно использовать условие $E_{1z} + E_{2z} = 0$ и формулу для напряженности поля (см. задачу 5.1.6 (м)):

$$-\frac{qz}{4\pi\varepsilon_0(z^2+r_0^2)^{3/2}}+\frac{kqz}{4\pi\varepsilon_0(z^2+4r_0^2)^{3/2}}=0.$$

Отсюда следует, что координаты нейтральных точек $z_0=\pm r_0\sqrt{\dfrac{4-k^{2/3}}{k^{2/3}-1}}$.

При $k=\sqrt{8}$ имеем $z_0=\pm r_0\sqrt{2}$, а при $k=\sqrt{27}$ получим $z_0=\pm r_0/\sqrt{2}$.

5.1.8 (м). Работа по переносу заряда q равна энергии заряда во внешнем поле. Поэтому $W_1=qU_1$, где U_1 — потенциал в центре первого кольца. Для определения U_1 нужно использовать формулу, полученную в задаче 5.1.5 (м), в сочетании с принципом наложения (поля зарядов q_1 и q_2).

5.1.9 (м). Диск можно рассматривать как систему заряженных колец. Элементарное кольцо радиуса r и толщиной dr несет заряд $dq=\sigma\cdot 2\pi r dr$. Потенциал поля в точке наблюдения M (см. задачу 5.1.5 (м))

$$dU=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0(z^2+r^2)^{1/2}}.$$

Суммируя (интегрируя) элементарные потенциалы, получим

$$U=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[(z^2+r_0^2)^{1/2}-z].$$

Напряженность поля $E_z=-\dfrac{\partial U}{\partial z}=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\dfrac{z}{(z^2+r_0^2)^{1/2}}\right]=2\cdot10^5$ В/м.

Если точка наблюдения находится около диска ($z\ll r_0$), то $E_z=\sigma/2\varepsilon_0$.

5.1.10 (м). Решение задачи обсуждается в [1, с. 509–510].

5.1.11 (р). При сферически симметричном распределении заряда векторные линии $\vec{E}$ — радиальные прямые. Для решения задачи можно применить третье уравнение Максвелла [1, с. 471–474]:

$$\oint\limits_S \vec{D}d\vec{S}=\int\limits_V \rho dV.$$

В области расположения заряда ($r<r_0$) получим

$$D_1 4\pi r^2=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3;\quad E_1=\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}.$$

Вне заряда ($r>r_0$)

$$D_2 4\pi r^2=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi r_0^3=q;\quad E_2=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\rho r_0^3}{3\varepsilon_0 r^2}.$$

Приняв точку отсчета потенциала в бесконечности ($r\to\infty$), найдем выражения для потенциалов:

$$U_2=\int\limits_r^\infty E_2 dr=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r};\quad U_1=\int\limits_r^{r_0} E_1 dr+\int\limits_{r_0}^\infty E_2 dr=\frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3r_0^2-r^2).$$

Качественные зависимости $E(r)$ и $U(r)$ представлены на рис. 5.88.

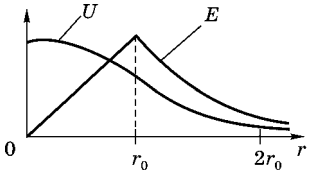


Рис. 5.88

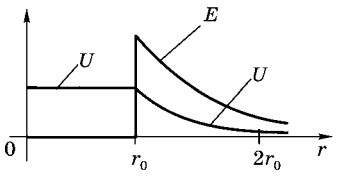


Рис. 5.89

В центре заряда $E = 0$, $U = 362$ В; на поверхности $E = 3000$ В/м, $U = 240$ В; при $r = 16$ см, $E = 750$ В/м, $U = 120$ В.

5.1.12 (м). Заряд q сосредоточен в тонком поверхностном слое. Поэтому внутри шара $E_1 = 0$, а во внешней области по-прежнему $E_2 = q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$. Потенциал поля вне шара $U_2 = q/(4\pi\varepsilon_0 r)$; потенциал шара постоянен и равен потенциалу на поверхности $U_1 = U_2(r_0)$, как показано на рис. 5.89.

5.1.13 (р). Распределение заряда обладает цилиндрической симметрией; векторные линии $\vec{E}$ — радиальные прямые. Для решения задачи можно применить третье уравнение Максвелла [1, с. 471–474]. Выберем в качестве поверхности S цилиндр, длина которого l и радиус r. Тогда в области $r < r_0$, где находится заряд, получим

$$D_1 \cdot 2\pi rl = \int_0^r \rho_0 \left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right] \cdot 2\pi r l dr;$$

$$E_1 = \frac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right].$$

Вне заряда при $r > r_0$

$$D_2 \cdot 2\pi rl = \int_0^{r_0} \rho_0 \left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right] \cdot 2\pi r l dr;$$

$$E_2 = \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0} \cdot \frac{r_0^2}{r}.$$

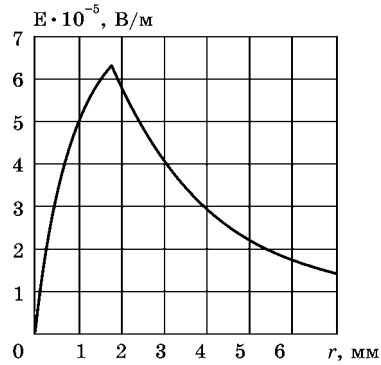


Рис. 5.90

График $E(r)$ представлен на рис. 5.90. Напряженность максимальна в области объемного заряда при $r = \sqrt{\frac{2}{3}} r_0 = 0{,}82 r_0 = 1{,}64$ мм.

5.1.14 (р). Последовательно рассмотрим две модели. В первой заряд с плотностью ρ заполняет весь объем цилиндра радиуса r_1. Тогда напряженность поля в точке наблюдения M легко находится с использованием третьего уравнения Максвелла: $\vec{E}_1 = \rho\vec{r}/2\varepsilon_0$. Во второй модели заряд с плотностью $(-\rho)$ заполняет объем цилиндра радиуса r_2. Напряженность поля в точке M будет $\vec{E}_2 = -\rho\vec{r}'/2\varepsilon_0$.

Наложение двух моделей и соответствующих решений приводит к искомому выражению

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{\rho\vec{a}}{2\varepsilon_0}.$$

Вектор $\vec{E}$ по направлению совпадает с $\vec{a}$. Модуль $E = \dfrac{\rho a}{2\varepsilon_0} = 1{,}1 \cdot 10^3$ В/м. При совпадении осей (концентрические цилиндры) $E = 0$.

5.1.15 (р). В каждой из трех областей потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta U_k = 0$. Так как задача одномерна, $U_k = U_k(x)$ и уравнение принимает вид $\partial^2 U_k / \partial x^2 = 0$ при $k = 1, 2, 3$. Соответствующие решения — линейные функции:

$$U_1 = A_1 x + B_1; \quad U_2 = A_2 x + B_2; \quad U_3 = A_3 x + B_3.$$

Для определения шести постоянных интегрирования используем краевые (граничные) условия:

1) $U_1(0) = B_1 = 0$;

2) $U_1(a) = U_2(a)$ или $A_1 a = A_2 a + B_2$;

3) $\left(\dfrac{\partial U_2}{\partial x} - \dfrac{\partial U_1}{\partial x}\right)\Big|_{x=a} = -\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ или $A_2 - A_1 = -\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$;

4) $U_3(b) - U_2(b) = \dfrac{\tau}{\varepsilon_0}$ или $A_3 b + B_3 - A_2 b - B_2 = \dfrac{\tau}{\varepsilon_0}$;

5) $\left(\dfrac{\partial U_3}{\partial x} - \dfrac{\partial U_2}{\partial x}\right)\Big|_{x=b} = 0$ или $A_3 - A_2 = 0$;

6) $U_3(h) = U_0$ или $A_3 h + B_3 = U_0$.

Отметим, что третье условие характеризует скачок нормальной составляющей $\vec{E}$ на заряженной поверхности [1, с. 496], пятое — отсутствие такого скачка, а четвертое — скачок потенциала при переходе через двойной слой [1, с. 507–508]. Решив систему уравнений, найдем постоянные. Окончательный результат:

$$U_1 = \left[U_0 + (h-a)\frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\tau}{\varepsilon_0}\right]\frac{x}{h};$$

$$U_2 = \left[U_0 - a\frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\tau}{\varepsilon_0}\right]\frac{x}{h} + a\frac{\sigma}{\varepsilon_0};$$

$$U_3 = \left[U_0 - a\frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\tau}{\varepsilon_0}\right]\frac{x}{h} + a\frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\tau}{\varepsilon_0}.$$

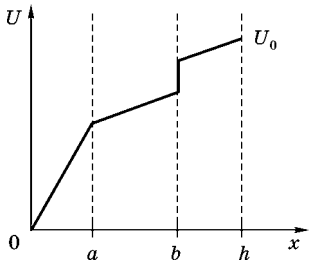


Рис. 5.91

График функции $U(x)$ представлен на рис. 5.91.

5.1.16 (р). Задача сводится к решению уравнения Пуассона $\Delta U = -\rho/\varepsilon_0$ при заданных краевых условиях. Поскольку задача одномерная ($\partial U/\partial y = 0$, $\partial U/\partial z = 0$), дифференциальное уравнение становится обыкновенным: $d^2U/dx^2 = -\rho/\varepsilon_0$. Его решение после двукратного интегрирования

$$U(x) = -\frac{\rho x^2}{2\varepsilon_0} + C_1 x + C_2,$$

где C_1 и C_2 — постоянные, определяемые из краевых условий. Так как $U(0) = 0$, то $C_2 = 0$; константа C_1 находится из условия $U(h) = -\rho h^2/2\varepsilon_0 + C_1 h$. Таким образом, искомый потенциал

$$U(x) = -\frac{\rho x^2}{2\varepsilon_0} + \left(\frac{U_0}{h} + \frac{\rho h}{2\varepsilon_0}\right)x.$$

Если заземлена и правая пластина ($U_0 = 0$), то

$$U(x) = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} + (x^2 - hx) = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left[\left(x - \frac{h}{2}\right)^2 - \frac{h^2}{4}\right].$$

Напряженность поля в этом случае

$$E_x(x) = -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\left(x - \frac{h}{2}\right).$$

Распределение потенциала (парабола) и напряженности поля (прямая) при $\rho < 0$ показаны на рис. 5.92.

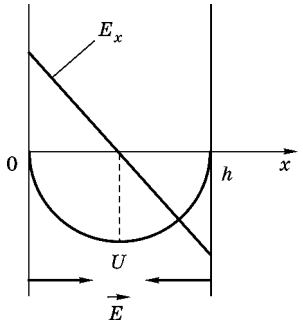


Рис. 5.92

Линии $\vec{E}$ направлены от пластин к плоскости симметрии $x = h/2$, где $\vec{E} = 0$. Очевидно, что пластины заряжены положительно.

5.1.17 (м). Решая уравнение Пуассона, получим

$$U(x) = -\frac{ax^3}{6\varepsilon} + \frac{ahx^2}{6\varepsilon} + C_1 x + C_2.$$

Из краевых условий $U(0) = 0$ и $U(h) = 0$ следует, что обе константы равны нулю, и поэтому

$$U(x) = -\frac{ax^3}{6\varepsilon} + \frac{ahx^2}{6\varepsilon};$$

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}U = -\frac{\partial U}{\partial x}\vec{e}_x = \frac{ax}{2\varepsilon}\left(x - \frac{2h}{3}\right)\vec{e}_x.$$

Плотность свободного заряда на пластинах находится из граничного условия $\sigma = D_n = \varepsilon E_n$. Поскольку при $x = 0$ напряженность поля $\vec{E} = 0$, заряженной оказывается только правая пластина, причем $\sigma = -ah^2/6$. Плотность связанного заряда на поверхности диэлектрика $\sigma_{св} = -P_n = P_x = (\varepsilon - \varepsilon_0)E_x|_{x=h} = ah^2(\varepsilon - \varepsilon_0)/6\varepsilon_0$, что соответствует [1, с. 492–493].

5.1.18 (м). Задача сводится к решению уравнения Пуассона при краевых условиях $U(\pm h) = 0$:

$$U(x) = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left[x^2 - \frac{x^4}{6h^2} - \frac{5h^2}{6}\right].$$

5.1.19 (р). Выделяем две подобласти. В первой при $0 < x < h$ поле описывается уравнением Лапласа $\Delta U_1 = 0$; во второй при $x > h$ — уравнением Пуассона $\Delta U_2 = -\rho/\varepsilon$. Общие решения этих уравнений в случае одномерной задачи

$$U_1 = C_1 x + C_2;\ \ U_2 = -\frac{0{,}2\sigma h}{\varepsilon} e^{-(x/h-1)} + C_3 x + C_4.$$

Краевые (граничные) условия для определения четырех постоянных интегрирования: 1) $x = 0$: $U_1 = 0$; 2) $x = h$: $U_1 = U_2$(а), $\dfrac{\partial U_2}{\partial x} - \dfrac{\partial U_1}{\partial x} = -\dfrac{\sigma_2}{\varepsilon}$(б); 3) при $x \to \infty$ (удаление от заряженной области) напряженность $\vec{E} \to 0$ и, следовательно, $U_2 \to \mathrm{const}$.

Применив условия 1) и 3), получим $U_1 = C_1 x$; $U_2 = -\dfrac{0{,}2\sigma h}{\varepsilon} e^{-(x/h-1)} + C_4$.

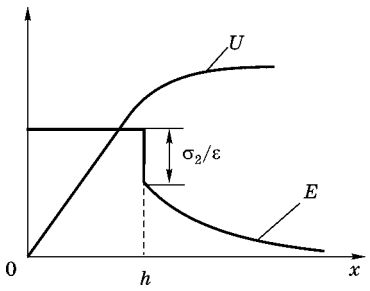


Рис. 5.93

Далее из 2 (б) следует

$$\frac{0{,}2\sigma}{\varepsilon}-C_1=-\frac{0{,}8\sigma}{\varepsilon},\ \ C_1=\frac{\sigma}{\varepsilon}.$$

Условие 2 (а) дает: $\sigma h/\varepsilon=-0{,}2\sigma h/\varepsilon+C_4$, $C_4=1{,}2\sigma h/\varepsilon$.

Окончательные результаты:

$$U_1(x)=\frac{\sigma}{\varepsilon}x;\ \ U_2=-\frac{0{,}2\sigma h}{\varepsilon}e^{-(x/h-1)}+\frac{1{,}2\sigma h}{\varepsilon};$$

$$E_1(x)=-\frac{\sigma}{\varepsilon};\ \ E_{2x}=-\frac{0{,}2\sigma}{\varepsilon}e^{-(x/h-1)}.$$

Качественные графики $U(x)$ и модуля $E(x)$ представлены на рис. 5.93.

5.1.20 (м). В качестве поверхности интегрирования выбирается цилиндр с основаниями, перпендикулярными оси x.

5.1.21 (м). Вектор электрического смещения имеет только нормальную составляющую на границах слоев. В этом случае, как следует из граничных условий, $D_1=D_2=D_3$. Далее, используя уравнение связи $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$, получим

$$U_д=E_1h_1+E_2h_2+E_3h_3=\left(\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}h_1+\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}h_2+h_3\right)E_{3д}=4{,}05\ \text{кВ}.$$

5.1.22 (м). В соответствии с третьим уравнением Максвелла электрическое смещение в изоляции ($r_1\le r\le r_3$) $D=\tau/2\pi r$, где τ — погонный заряд (заряд на единицу длины) жилы. Напряженность поля в первом слое максимальна при $r=r_1$, во втором — при $r=r_2$. Отсюда следует:

$$\varepsilon_1E_{1д}r_1=\varepsilon_2E_{2д}r_2;\ \ r_2/r_1=\varepsilon_1E_{1д}/\varepsilon_2E_{2д}.$$

В этих условиях $\tau_д=2\pi\varepsilon_1r_1E_{1д}$, а $U_д=\int\limits_{r_1}^{r_3}Edr=\dfrac{\tau_д}{2\pi}\left[\dfrac{1}{\varepsilon_1}\ln\dfrac{r_2}{r_1}+\dfrac{1}{\varepsilon_2}\ln\dfrac{r_3}{r_2}\right]$.

5.1.23 (м). Напряженность поля $E=\dfrac{U_0}{r\ln\dfrac{r_2}{r_1}}$ максимальна на поверхности жилы при $r=r_1$. Условие экстремума (минимума) $E_{\max}=E(r_1)$: $r_2/r_1=e$; $r_1=r_2e^{-1}=0{,}37r_2$. При $r_1=kr_2$, где $0<k<1$, максимальная напряженность поля отличается от оптимального (наименьшего) значения в $n=e^{-1}/[k\ln(1/k)]$ раз. Когда $k=0{,}1$ («тонкая» жила), $n=1{,}6$; при $k=0{,}5$ получим $n=1{,}07$.

5.1.24 (р). Линии поля радиальны. Векторы $\vec{E}$ и $\vec{D}$ на границе раздела сред имеют только касательную составляющую. Согласно граничным условиям $E_1=E_2$; $D_1/D_2=\varepsilon_1/\varepsilon_2$.

Пользуясь постулатом Максвелла, запишем поток вектора смещения через поверхность полуцилиндра радиуса r и длины l в первом диэлектрике: $D_1\cdot\pi rl=\tau_1l$, где τ_1 — погонный заряд на половине электрода. Таким образом, смещение $D_1=\tau_1/(\pi r)$, а напряженность поля $E_1=\tau_1/(\pi\varepsilon_1r)$. Для нахождения τ_1 воспользуемся соотношением:

$$U_0=\int\limits_{r_1}^{r_2}E_1dr=\frac{\tau_1}{\pi\varepsilon_1}\ln\frac{r_2}{r_1};\ \ \tau_1=\frac{\pi\varepsilon_1U_0}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}}.$$

Таким образом, в первой среде

$$E_1 = \frac{U_0}{r \ln \frac{r_2}{r_1}}, \quad D_1 = \varepsilon_1 E_1.$$

Во второй среде $\tau_2 = \tau_1 \varepsilon_2 / \varepsilon_1$, $E_2 = E_1$, $D_2 = \varepsilon_2 E_2$.

Плотность свободного заряда на внутреннем электроде находится из граничного условия $\sigma = D_n = \varepsilon E_n$ [1, с. 492–493], которое в первой среде принимает вид

$$\sigma_1 = D_1\big|_{r=r_1} = \varepsilon_1 E_1\big|_{r=r_1} = \frac{\varepsilon_1 U_0}{r_1 \ln r_2 / r_1}.$$

Плотность связанного заряда на границе диэлектрик — электрод

$$\sigma_{1\text{св}} = (\varepsilon_0 - \varepsilon_1) E_1\big|_{r=r_1} = \frac{(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) U_0}{r_1 \ln r_2 / r_1}.$$

Во второй среде соответствующие величины

$$\sigma_2 = \sigma_1 \varepsilon_2 / \varepsilon_1; \quad \sigma_{2\text{св}} = \sigma_1 (\varepsilon_0 - \varepsilon_2) / (\varepsilon_0 - \varepsilon_1).$$

Результаты расчета: $E = 25 \cdot 10^3$ В/м; $D_1 = 43 \cdot 10^{-8}$ Кл/м^2; $D_2 = 86 \cdot 10^{-8}$ Кл/м^2; $\sigma_{1\text{св}} = -21{,}5 \cdot 10^{-8}$ Кл/м^2; $\sigma_{2\text{св}} = -64{,}5 \cdot 10^{-8}$ Кл/м^2.

5.1.25 (р). В рассматриваемой задаче поле является плоскопараллельным. Его потенциал — функция двух координат x и y. Он удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

Общее решение уравнения можно найти методом разделения переменных [1, с. 517–519]:

$$U(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos mx + B_m \sin mx)(C_m \operatorname{ch} my + D_m \operatorname{sh} my).$$

Очевидно, что искомое поле должно быть симметричным относительно осей x и y. Поэтому в решении должны отсутствовать нечетные функции. Введя новое обозначение для постоянных, получим

$$U(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} F_m \cos mx \cdot \operatorname{ch} my.$$

Для определения F_m используются краевые условия:

$$x = \pm a/2 : U = 0;$$
$$y = \pm b/2 : U = U_0.$$

Из первого условия следует $\cos m \frac{\pi}{2} = 0, m \frac{a}{2} = k \frac{\pi}{2}, m = \frac{\pi}{a} k,$ где $k = 1, 3, 5, \ldots$ Обозначив для таких k коэффициенты $F_m = A_k$, перепишем решение в следующем виде:

$$U(x, y) = \sum_{k=1,3,5,\ldots}^{\infty} A_k \cos \frac{k\pi}{a} x \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi}{a} y.$$

Коэффициенты A_k находятся из второго краевого условия. При этом можно ограничиться конечным числом слагаемых. Например, учитывая четыре члена ряда, запишем

$$U(x,y) \approx \sum_{k=1,3}^{7} A_k \cos\frac{k\pi}{a}x \cdot \operatorname{ch}\frac{k\pi}{a}y.$$

Подставив сюда $y = b/2$ и придавая x последовательно значения $a/2$, $a/4$, $a/8$, 0, получим четыре уравнения для определения четырех A_k.

5.1.26 (м). Расчет поля «полубесконечной полосы» связан с разложением краевого условия на нижней пластине $U = U_0$ на промежутке $|x| < a/2$ в ряд Фурье [1, с. 519–520].

5.1.27 (р). В однородном диэлектрике поле описывается уравнением Пуассона $\Delta U = -\rho/\varepsilon$. Следовательно, распределение объемных зарядов $\rho = -\varepsilon\Delta U = -\varepsilon\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2\varepsilon a.$

Плотность объемных зарядов оказывается постоянной.

Плотность свободных поверхностных зарядов на пластинах находится из граничного условия $\sigma = D_n = \varepsilon E_n$, где предполагается, что нормаль $\vec{n}$ направлена из металла (пластины) в диэлектрик. Поэтому на левой пластине $E_n = E_x|_{x=-h/2}$, а на правой $E_n = E_x|_{x=h/2}$. Определив напряженность поля $E_x = -\partial U/\partial x = 2ax$, находим плотность заряда $\sigma = -\varepsilon ah$, которая оказывается одинаковой по величине и знаку ($\sigma < 0$, если $a > 0$).

Поверхностная плотность связанных зарядов в диэлектрике у пластины $\sigma_{св} = -P_n = (\varepsilon_0 - \varepsilon)E_n$, откуда следует $\sigma_{св} = (\varepsilon - \varepsilon_0)ah > 0$.

Объемная плотность связанных зарядов

$$\rho_{св} = -\operatorname{div}\vec{E} = (\varepsilon_0 - \varepsilon)\frac{dE_x}{dx} = 2a(\varepsilon_0 - \varepsilon).$$

5.1.28 (р). Задача подобна предыдущей и является типичной обратной задачей электростатики [1, с. 495–497].

Поскольку поле $U(r)$ является центрально-симметричным, при определении объемной плотности заряда ограничиваемся первым слагаемым оператора Лапласа в сферических координатах:

$$\rho = -\varepsilon\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) = -\frac{a^2 b}{4\pi r}e^{-ar}.$$

Заданная функция $U(r)$ имеет особую точку в начале координат: при $r \to 0$ потенциал $U \to \infty$. Такой особенностью обладает поле точечного заряда.

Чтобы определить заряд q в особой точке, построим сферу произвольного радиуса r. Поток вектора смещения $\vec{D}$ через поверхность этой сферы равен заряду, находящемуся внутри:

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = q + \int_V \rho dV,$$

где V — объем, ограниченный сферой.

Вектор смещения

$$\vec{D} = -\varepsilon\operatorname{grad}U = \frac{b(ar+1)}{4\pi r^2}e^{-ar}\cdot\vec{e}_r.$$

Поток вектора смещения

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = D_r S = D_r\, 4\pi r^2 = b(ar+1)e^{-ar}.$$

Объемный заряд внутри сферы

$$\int_V \rho dV = 4\pi \int_0^r \rho r^2 dr = b(ar+1)e^{-ar} - b.$$

Искомый точечный заряд

$$q = \oint_S \vec{D}d\vec{S} - \int_V \rho dV = b.$$

5.1.29 (м). Решение обратной задачи электростатики проводится следующим образом.

Объемная плотность заряда находится из уравнения Пуассона. Лапласиан в данном случае следует записать в цилиндрической системе координат. Поскольку потенциал не зависит от φ и z,

$$\rho = -\varepsilon_0 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right).$$

Для определения линейной плотности заряда на нити, т. е. в особой точке $r = 0$, нужно воспользоваться третьим уравнением Максвелла в интегральной форме (см. решение задачи 5.1.27 (р)). Окружив нить цилиндрической поверхностью радиуса r и длиной l, можем записать

$$D_r \cdot 2\pi rl = -\varepsilon_0 \frac{\partial U}{\partial r}\cdot 2\pi rl = \tau l + \int_V \rho dV,$$

где V — объем цилиндра. Совершая предельный переход, получим

$$\tau = -2\pi\varepsilon_0 \lim\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right).$$

Поверхностная плотность заряда находится из граничных условий: $\sigma = D_n = -D_r$ при $r = d/2$.

Окончательные результаты: $\rho = 4\varepsilon_0 a = 10^{-8}$ Кл/м^3; $\tau = -2\pi\varepsilon_0 ab = -10^{-7}$ Кл/м; $\sigma = \varepsilon_0 a(2b/d - d) = 1{,}28 \cdot 10^{-6}$ Кл/м^2. Система зарядов нейтральна.

5.1.30 (м). Пусть заряд шара q. В силу сферической симметрии линии поля радиальны: смещение $D_r = q/(4\pi r^2)$ при всех $r > a$. Напряженности поля различны и равны D_r/ε_1 при $r < b$ и D_r/ε_2 при $r > b$. Потенциал шара относительно бесконечности («уединенный» шар)

$$U = \int_a^b E_{1r}dr + \int_b^\infty E_{2r}dr.$$

По определению емкость

$$C = \frac{q}{U} = \frac{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_2 ab}{\varepsilon_1 a + \varepsilon_2(b-a)}.$$

Емкость шара в однородном диэлектрике ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$) $C = 4\pi\varepsilon a$.

5.1.31 (р). Пусть заряд эллипсоида q. Для определения его потенциала воспользуемся результатами решения задачи 5.1.13 (р). Эквипотенциалями заряженной нити являются эллипсоиды вращения, причем потенциал поля при замене $\tau = q/2l$

$$U = \frac{q}{8\pi\varepsilon l}\ln\frac{r_1 + r_2 + 2l}{r_1 + r_2 - 2l}.$$

Используя известные геометрические равенства $r_1 + r_2 = 2a$ и $l = \sqrt{a^2 - b^2}$, можно переписать формулу потенциала и затем получить выражение для емкости эллипсоида

$$C = \frac{q}{U} = \frac{8\pi\varepsilon\sqrt{a^2 - b^2}}{\ln\dfrac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}}}.$$

5.1.32 (м). Пусть заряд на единицу длины жилы кабеля (погонный заряд) τ. Диэлектрическое заполнение кабеля кусочно однородно. Поле обладает осевой симметрией, его векторные линии радиальны. Третье уравнение Максвелла в интегральной форме позволяет найти смещение $D = \tau/(2\pi r)$, причем $r_1 \le r \le r_3$.

Напряженность поля в первом слое $E_1 = D/\varepsilon_1$, а во втором слое $E_2 = D/\varepsilon_2$. Вычислив разность потенциалов $(U_1 - U_2)$ между электродами кабеля в известном поле $\vec{E}$, приходим к искомому результату:

$$C = \frac{\tau}{U_1 - U_2} = \frac{2\pi}{\dfrac{1}{\varepsilon_1}\ln\dfrac{r_2}{r_1} + \dfrac{1}{\varepsilon_2}\ln\dfrac{r_3}{r_2}} = 202\ \text{пФ/м}.$$

5.1.33 (м). Рекомендуется использовать указания к решению задачи 5.1.24 (р). Напряженность поля $E_1 = \tau/(\pi\varepsilon_1 r)$, разность потенциалов между электродами

$$U_1 - U_2 = \frac{\tau_1}{\pi\varepsilon_1}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Так как в силу граничных условий $E_1 = E_2$; $D_1/\varepsilon_1 = D_2/\varepsilon_2$ и $\tau_2 = \tau_1\varepsilon_2/\varepsilon_1$, искомая емкость

$$C = \frac{(\tau_1 + \tau_2)}{U_1 - U_2} = \frac{\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}} = 240\ \text{пФ/м}.$$

5.1.34 (м). Пусть линейные плотности зарядов проводов $\tau_1 = \tau$ и $\tau_2 = -\tau$. По определению, погонная емкость $C = \tau/(U_1 - U_2)$. Для определения разности потенциалов между проводами линии рекомендуется использовать формулу для потенциала поля разноименно заряженных нитей [1, с. 505]:

$$U = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Определив U_1 в точке 1 и U_2 в точке 2, с учетом неравенства $r_0 \ll h$ получим

$$C = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{h}{r_0}}.$$

Второй подход заключается в определении напряженности поля между проводами $[r_0 \ll x \ll (h - r_0)]$: $E = E_1 + E_2 = \tau/(2\pi\varepsilon_0 x) + \tau/[2\pi\varepsilon_0(h - x)]$. Разность потенциалов

$$U_1 - U_2 = \int_{r_0}^{h-r_0} E dx.$$

5.1.35 (м). В соответствии с методом зеркальных изображений расчетная модель задачи есть система двух разноименно заряженных нитей τ и $\tau' = -\tau$, расположенных в однородном диэлектрике с проницаемостью ε [1, с. 510–512]. Для определения погонной емкости следует найти потенциал провода $U_{\text{пр}}$ и плоскости $U_{\text{пл}}$ по формулам двухпроводной линии. С учетом неравенства $r_0 \ll h$ емкость

$$C = \frac{\tau}{U_{\text{пр}} - U_{\text{пл}}} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\dfrac{2h}{r_0}}.$$

Поверхностная плотность заряда находится из граничного условия $\sigma = D_n = \varepsilon E_n = -2\varepsilon E^{\tau}\cos\alpha$, где $\vec{E}$ — напряженность поля в точках плоскости; E^{τ} — напряженность поля одной нити. Принимая во внимание, что $\tau = CU_0$, получим

$$\sigma(x) = -\frac{2\varepsilon h U_0}{(h^2 + x^2)\ln\dfrac{2h}{r_0}}.$$

5.1.36 (м). Расчетная модель, обеспечивающая эквипотенциальность проводящих плоскостей, содержит четыре заряда. Их можно попарно объединить в две двухпроводные линии. Применив формулу для расчета потенциала поля линии (см. решение задачи 5.1.34 (м)) и принципы наложения, находим потенциалы провода и плоскостей. Окончательное выражение для емкости

$$C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\dfrac{2ab}{r_0\sqrt{a^2 + b^2}}}.$$

При $b \gg a$ получаем формулу для конструкции «провод–плоскость».

5.1.37 (м). Расчетная модель состоит из двух двухпроводных линий I и II, расположенных в однородном диэлектрике. Погонная емкость линии $C = \tau/(U_1 - U_2)$. Потенциал в точке 1 находится в соответствии с принципом наложения: $U_1 = U_{\text{I}} + U_{\text{II}}$. Очевидно, что в точке 2 потенциал $U_2 = -U_1$. С учетом условия «тонких проводов» емкость

$$C = \frac{\pi\varepsilon}{\ln\dfrac{2Hh}{r_0\sqrt{h^2 + (2H)^2}}}.$$

При увеличении H емкость уменьшается; в пределе при $H \gg h$ получаем формулу «свободной» линии (см. решение задачи 5.1.34 (м)).

5.1.38 (м). Задача расчета поля в кусочно однородной среде сводится к задаче расчета в однородной среде с помощью метода зеркальных изображений [1, с. 512–514].

Модель для расчета поля в первом полупространстве содержит три заряда, расположенных в однородном диэлектрике ε_1 (см. рис. 5.22*б*): реальный заряд $\tau_1 = \tau$,

заряд-изображение $\tau'_1 = \tau_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ и заряд-изображение $\tau''_2 = 2\varepsilon_1\tau_2/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$. В точках оси x при $r_0 < x \le a$ напряженность поля

$$E_1 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1 x} - \frac{\tau'_1}{2\pi\varepsilon_1(2a-x)} - \frac{\tau''_2}{2\pi\varepsilon_1(a+b-x)} =$$
$$= \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1}\left(\frac{1}{x} - \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\cdot\frac{1}{2a-x} + \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\cdot\frac{1}{a+b-x}\right).$$

Для определения поля E_2 во втором полупространстве ($x \ge a$) нужно построить другую расчетную модель. Затем находится разность потенциалов между проводами линии

$$U_1 - U_2 = \int_{r_0}^{a} E_1 dx + \int_{a}^{a+b-r_0} E_2 dx$$

и емкость $C = \tau/(U_1 - U_2)$. При $a = b$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$, $\varepsilon_2 = 3\varepsilon_0$ получим

$$C = 3\pi\varepsilon_0/[2\ln(2a/r_0)].$$

5.1.39 (р). Пренебрегая краевым эффектом, полагаем, что пластины конденсатора заряжены равномерно ($\sigma = \text{const}$). Из граничного условия $D = \sigma$ следует, что поле вектора смещения однородно. Напряженность поля изменяется по закону

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\varepsilon_1 + \dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{h}x},$$

где x — ось, перпендикулярная пластинам.

Разность потенциалов

$$U_1 - U_2 = \int_0^h E dx = \frac{\sigma h}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}\ln\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.$$

Емкость конденсатора

$$C = \frac{\sigma S}{U_1 - U_2} = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)S}{h\ln(\varepsilon_2/\varepsilon_1)}.$$

При однородном заполнении ($\varepsilon_2 = \varepsilon_1 = \varepsilon$) $C = \varepsilon S/h$.

5.1.40 (р). Пусть имеем погонный заряд τ на проводе. На поверхности цилиндра находится неравномерно распределенный заряд $(-\tau)$. Заменим этот заряд его изображением вне цилиндра, находящимся на расстоянии H от поверхности (см. рис. 5.23). При этом все пространство заполнено диэлектриком.

В расчетной модели расстояние H находится так, чтобы поле зарядов τ и $(-\tau)$ имело эквипотенциаль, совпадающую с поверхностью цилиндра.

Воспользуемся выражением для потенциала поля двухпроводной линии (см. решение задачи 5.1.34 (м)). В точке 1 потенциал $U_1 = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\dfrac{H}{h}$. В точке 2 потенциал $U_2 = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\dfrac{2a+H}{2a-h}$. Из равенства $U_1 = U_2$ следует $H = ah/(a - h)$.

Теперь в построенной модели находим потенциал проводника $U_{\text{пр}}$ (соответствующие расстояния $r_2 = H + h - r_0$, $r_1 = r_0$) и потенциал цилиндра $U_{\text{ц}}$ (с учетом $r_2 = H$, $r_1 = h$). Погонная емкость конструкции при условии $r_0 \ll h$; $r_0 \ll H$:

$$C = \frac{\tau}{U_{\text{пр}} - U_{\text{ц}}} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\dfrac{h(H-h)}{r_0 H}} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\dfrac{h(2a-h)}{r_0 a}}.$$

5.1.41 (м). Поскольку коэффициенты деполяризации эллипсоида известны, внутреннее поле может быть найдено простым способом, без решения краевой задачи [1, с. 528–529]. При этом используются соотношения

$$E_x = E_{0x} + E_{px} = E_{0x} - \frac{N_x}{\varepsilon_0} P_x = E_{0x} - \frac{N_x}{\varepsilon_0}(\varepsilon - \varepsilon_0)E_x,$$
$$E_r = E_{0r} + E_{pr} = E_{0r} - \frac{N_r}{\varepsilon_0} P_r = E_{0r} - \frac{N_r}{\varepsilon_0}(\varepsilon - \varepsilon_0)E_r,$$

где $\vec{E}_p$ — напряженность поля деполяризации; $\vec{P}$ — вектор поляризации диэлектрика. Разрешив эти соотношения относительно составляющих $\vec{E}$, получим

$$E_x = \frac{E_0 \cos\theta_0}{1 + N_x(\varepsilon/\varepsilon_0 - 1)}; \quad E_r = \frac{E_0 \sin\theta_0}{1 + N_r(\varepsilon/\varepsilon_0 - 1)}.$$

Коэффициенты N_x и N_r зависят от соотношения полуосей эллипсоида, причем $N_x + 2N_r = 1$. Для вытянутого эллипсоида $N_x < N_r$, $E_x > E_r$ и, следовательно, направления приложенного поля $\vec{E}_0$ и внутреннего поля $\vec{E}$ в общем случае не совпадают ($\theta < \theta_0$).

Энергия эллипсоида может быть найдена как энергия индуцированного диполя во внешнем поле:

$$W = -\frac{1}{2}\vec{p}\vec{E}_0 = -\frac{1}{2} pE_0 \cos(\theta_0 - \theta),$$

где $\vec{p} = \vec{P}V$ — эквивалентный дипольный момент. Минимум энергии соответствует ориентации длинной оси эллипсоида вдоль линий поля.

5.1.42 (р). Будем считать поле $\vec{E}$ в области расположения шара однородным. В этом случае он эквивалентен диполю, как в отношении его влияния на внешнее поле, так и в отношении действующих на него сил. Момент этого индуцированного диполя [1, с. 526]

$$\vec{p} = 4\pi\varepsilon_1 r_0^3 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\vec{E} = k\vec{E}.$$

При $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ ($k > 0$) направления $\vec{p}$ и $\vec{E}$ совпадают; если $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ ($k_1 < 0$) — направления противоположны.

Энергия диполя

$$W = -\frac{1}{2}\vec{p}\vec{E} = -\frac{1}{2}kE^2,$$

где напряженность поля в изоляции кабеля $E = U_0/(r \ln r_2/r_1)$. Сила, действующая на шар, имеет радиальное направление

$$f_r = -\frac{\partial W}{\partial r} = -\frac{kU_0^2}{r^3 \ln^2(r_2/r_1)}.$$

При $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ имеем $f_r < 0$, т. е. сила направлена в область сильного поля (к жиле кабеля) вне зависимости от полярности U_0. При $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ сила направлена в направлении уменьшения модуля E. Численный результат: в точке $r = 2$ см получим $f_r = = 4{,}5 \cdot 10^{-8}$ Н.

5.1.43 (р). Энергия взаимодействия, т. е. энергия диполя $\vec{p}_2$ в поле диполя $\vec{p}_1$, будет $W = -\vec{p}_2\vec{E}_1 = -p_{2r}E_{1r} - p_{2\theta}E_{1\theta}$. Поле первого диполя [1, с. 504]

$$E_{1r} = \frac{2p_1\cos\theta_1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}, \quad E_{1\theta} = \frac{p_1\sin\theta_1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

Поскольку составляющие момента $\vec{p}_2$ равны $p_{2r} = p_2\cos\theta_2$, $p_{2\theta} = -p_2\sin\theta_2$, выражение для энергии

$$W = \frac{p_1p_2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\sin\theta_1\sin\theta_2 - 2\cos\theta_1\cos\theta_2}{r^3}.$$

Сила взаимодействия

$$f_r = -\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{3p_1p_2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\sin\theta_1\sin\theta_2 - 2\cos\theta_1\cos\theta_2}{r^4}.$$

Если диполи расположены на одной (полярной) оси (см. рис. 5.26*б*), то $\theta_1 = \theta_2 = 0$; энергия $W = -2p_1p_2/(4\pi\varepsilon_0 r^3)$; сила $f_r = -6p_1p_2/(4\pi\varepsilon_0 r^4)$.

Если диполи антипараллельны (см. рис. 5.26*в*), то $\theta_1 = \pi/2$, $\theta_2 = -\pi/2$; энергия $W = -p_1p_2/(4\pi\varepsilon_0 r^3)$; сила $f_r = -3p_1p_2/(4\pi\varepsilon_0 r^4)$.

В обоих случаях диполи притягиваются.

5.1.44 (м). Поместив заряд q в центр сферической системы координат, запишем $E_r = q/(4\pi\varepsilon r^2)$; $p_r = p\cos\theta$. Отсюда следует

$$f_r = \frac{\partial}{\partial r}(p_rE_r) = -\frac{2qp\cos\theta}{4\pi\varepsilon r^3}.$$

При $\theta = 0$ получим $f_r < 0$, т. е. диполь притягивается; при $\theta = \pi$ имеем $f_r > 0$, т. е. диполь отталкивается.

5.6.2. Задачи 5.2.1–5.2.12 к теме «Поле постоянного тока»

5.2.1 (м). Решение задачи обсуждается в [1, с. 541].

5.2.2 (м). Решение задачи обсуждается в [1, с. 542]. Дополнительно запишем плотность свободного заряда

$$\rho = \frac{\varepsilon a^2U_0}{(\gamma_1 - ax)^2\ln[\gamma_1/(\gamma_1 - ah)]}$$

и плотность связанного заряда

$$\sigma_{\text{св}} = (\varepsilon_0/\varepsilon - 1).$$

5.2.3 (м). В силу сферической симметрии векторные линии поля тока радиальны. Плотность тока $J = I/(4\pi r^2)$, и по закону Ома $E = J/\gamma = I/(4\pi ar)$.

Потенциал в заданном поле $\vec{E}$

$$U(r) = \int_r^{r_2} E\,dr = \frac{I}{4\pi a}\ln\frac{r_2}{r}.$$

Сопротивление утечки

$$R=\frac{U_1-U_2}{I}=\frac{1}{4\pi a}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

5.2.4 (м). Следует воспользоваться решением задачи 5.1.32 (м), где найдена емкость C на единицу длины такого кабеля. На основании математической аналогии поля постоянного тока и электростатического поля сопротивление изоляции

$$R=\frac{1}{C}\Big|_{\varepsilon\to\gamma}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\gamma_1}\ln\frac{r_2}{r_1}+\frac{1}{\gamma_2}\ln\frac{r_3}{r_2}\right)=5{,}22\cdot10^7\ \text{Ом/м}.$$

Ток утечки по закону Ома $I=U_0/R=5{,}75\cdot10^{-8}$ А. Положив в выражении для сопротивления $\gamma_1=\gamma_2=\gamma$ (однослойная изоляция), получим

$$\gamma=\left(\frac{1}{\gamma_1}\ln\frac{r_2}{r_1}+\frac{1}{\gamma_2}\ln\frac{r_3}{r_2}\right)^{-1}\ln\frac{r_3}{r_1}=2{,}11\cdot10^{-9}\ \text{См/м}.$$

5.2.5 (м). Для решения нужно использовать выражение для погонной емкости двухпроводной линии (см. решение задачи 5.1.34 (м)) и принцип математической аналогии полей. Ток утечки

$$I=GU_0=Ca\big|_{\varepsilon\to\gamma}U_0=\frac{\pi\gamma a}{\ln(h/r_0)}U_0.$$

5.2.6 (м). Определение поля в кусочно однородной среде проводится методом зеркальных изображений в поле тока [1, с. 551–552]. Расчетные модели аналогичны моделям электростатики (см. указания к решению задачи 5.1.38 (м)) при замене аналогичных величин $\varepsilon\to\gamma$, $\tau\to I$, где I — ток утечки на единицу длины провода.

Модель для расчета поля $\vec{E}_1$ в первом полупространстве содержит три тока, расположенных в однородной среде γ_1: реальный ток $I_1=I$, ток-изображение $I_1'=I(\gamma_1-\gamma_2)/(\gamma_1+\gamma_2)$ и ток-изображение $I_2''=2\gamma_1I_2/(\gamma_1+\gamma_2)$. В точках оси x (при $r_0\le x\le a$) напряженности поля от токов I_1 и I_2'' складываются; знак третьей составляющей от тока I_1' зависит от соотношения проводимостей.

Для определения поля $\vec{E}_2$ во втором полупространстве ($x\ge a$) строится другая расчетная модель (см. рис. 5.27*б*). Она включает токи I_2, $I_2'=I_2(\gamma_2-\gamma_1)/(\gamma_1+\gamma_2)$ и $I_1''=2\gamma_2I_1/(\gamma_1+\gamma_2)$, расположенные в среде с проводимостью γ_2. В точках оси x при $x\ge a$ напряженность поля

$$E_2=\frac{I}{2\pi\gamma_2}\left(\frac{1}{a+b-x}-\frac{\gamma_2-\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}\cdot\frac{1}{b-a+x}+\frac{2\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2}\cdot\frac{1}{x}\right).$$

По известному полю $\vec{E}$ находится напряжение между проводами

$$U=\int_{r_0}^{a}E_1dr+\int_{a}^{a+b-r_0}E_2dr$$

и сопротивление утечки $R=U/I$. При $a=b$ получим

$$R=\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2\pi\gamma_1\gamma_2}\ln\frac{2a}{r_0}.$$

5.2.7 (м). По условию задачи эквипотенциальные поверхности в грунте имеют форму полусфер [1, с. 545]. Векторные линии поля радиальны, причем

$$J_r = \frac{I}{2\pi r^2};\ \ E_r = \frac{I}{2\pi\gamma r^2},$$

где r — расстояние от центра заземлителя.

Потенциал заземлителя относительно бесконечно удаленной точки

$$U = \int_{r_0}^{\infty} E_r dr,$$

а сопротивление заземлителя $R = U/I = 1/(2\pi\gamma r_0) = 10{,}6$ Ом.

Шаговое напряжение

$$U_h = \frac{I}{2\pi\gamma}\cdot\frac{h}{r_0(r_0+h)} = IR\frac{h}{r_0+h} = 738\,\text{В}.$$

5.2.8 (м). В первом и третьем случаях векторные линии поля радиальны. Во втором случае для расчета электрического поля необходимо применить метод зеркальных изображений ([1, с. 551]; см. также решение задачи 5.2.6 (м)). Сопротивления заземления:

$$R_1 = \frac{1}{2\pi\gamma r_0} = 318\,\text{Ом};$$

$$R_2 = \frac{1}{4\pi\gamma}\left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{2h - r_0}\right) = 172\,\text{Ом};$$

$$R_3 = \frac{1}{4\pi\gamma r_0} = \frac{R_1}{2} = 159\,\text{Ом}.$$

5.2.9 (р). Модель для расчета поля в земле строится обычным образом: в однородной среде с удельной проводимостью γ расположены реальный ток и ток-изображение $I' = I(\gamma_1 - \gamma_2)/(\gamma_1 + \gamma_2) = I$ (см. рис. 5.28*б*). При этом выполняется граничное условие $J_{2n} - J_{1n} = 0$, так как при $\vec{J}_2 = 0$ из него следует $J_{1n} = 0$. Ток течет вдоль границы раздела.

Ток-изображение $I'' = 2I\gamma_2/(\gamma_1 + \gamma_2)$ по условию задачи ($\gamma_2 = 0$) оказывается равным нулю, а напряженность поля $E_2 = J_2/\gamma_2$ неопределенной. Поэтому для расчета поля в воздухе нужно строить другую модель.

Будем считать, что это поле совпадает с полем точечного заряда-изображения q, расположенного в однородной диэлектрической среде с проницаемостью ε_0 (см. рис. 5.28*в*). Значение q должно быть определено из граничного условия — равенства касательных составляющих напряженности поля $E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0$. Отсюда следует

$$(E_I + E_{I'})\cos\alpha = E_q\cos\alpha;\ \ \frac{2I}{4\pi\gamma r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Таким образом, заряд-изображение $q = 2\varepsilon_0 I/\gamma$.

Поверхностная плотность заряда $\sigma = D_{2n} - D_{1n}$. Так как в земле у поверхности имеется только касательная составляющая, то $D_{1n} = 0$. Следовательно,

$$\sigma = D_{2n} = \varepsilon_0\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sin\alpha = \frac{qh}{4\pi r^3} = \frac{\varepsilon_0 hI}{2\pi\gamma(h^2+\rho^2)^{3/2}}.$$

В точке над электродом ($\rho = 0$) плотность заряда максимальна: $\sigma_m = \varepsilon_0 I/(2\pi\gamma h^2)$.

5.2.10 (м). Задача сводится к определению проводимости шайбы. Метод решения изложен в [1, с. 547]. Проводимость $G = G_1 + G_2 = \dfrac{(\gamma_1 + \gamma_2)h}{\pi} \cdot \ln\dfrac{r_2}{r_1} = 7$ См. Здесь G_1 и G_2 — проводимости первой и второй полушайб. Ток $i_0 = GU_0 = 7$ А.

5.2.11 (м). Две близко расположенные параллели вырезают из сферы тонкостенное кольцо, длина которого в направлении тока $dl = r_0 d\theta$, а площадь поперечного сечения $S = 2\pi\rho h = 2\pi h r_0 \sin\theta$. Сопротивление кольца, поле в котором можно считать однородным,

$$dR = \frac{dl}{\gamma S} = \frac{d\theta}{2\pi\gamma h \sin\theta}.$$

Сопротивление сферы находится путем суммирования сопротивлений последовательно соединенных колец:

$$R = 2\int_{\theta_0}^{\pi/2} dR = -\frac{1}{2\pi\gamma h}\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\theta_0}{2}\right) = \frac{1}{2\pi\gamma h}\ln\left(\operatorname{ctg}\frac{\theta_0}{2}\right),$$

где $\theta_0 = \arcsin(a/r_0)$.

При условии малых электродов ($a \ll r_0$) получим

$$R = \frac{1}{\pi\gamma h}\ln\frac{2r_0}{a} = 1{,}25 \cdot 10^{-3}\ \text{Ом}.$$

5.2.12 (р). Электрическое поле является плоскопараллельным, причем общее решение уравнения Лапласа имеет вид [1, с. 517–519]

$$U(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos mx + B_m \sin mx)(C_m \operatorname{ch} my + D_m \operatorname{sh} my).$$

Обратимся теперь к краевым условиям, которые позволяют выбрать из общего решения необходимые функции и постоянные:

$$U(0, y) = 0, \quad U(a, y) = 0, \quad U(x, b) = 0, \quad U(x, 0) = U_0.$$

Чтобы удовлетворять первому и третьему условию, решение должно иметь вид

$$U(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin mx \cdot \operatorname{sh} m(b - y).$$

Второе условие будет выполнено, если $\sin ma = 0$, $ma = k\pi$, $m = k\pi/a$, $k = 1, 2, \ldots$ В результате получим

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin\frac{k\pi}{a}x \cdot \operatorname{sh}\frac{k\pi}{a}(b - y).$$

Четвертое условие приводит к соотношению

$$U(x, 0) = U_0 = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin\frac{k\pi}{a}x \cdot \operatorname{sh}\frac{k\pi}{a}b = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{k\pi}{a}x,$$

где постоянная $A_k = B_k \operatorname{sh}\dfrac{k\pi b}{a}$.

Соотношение представляет собой разложение функции $U_0 = \text{const}$ на участке $0 < x < a$ в ряд Фурье. Коэффициенты ряда определяются выражением

$$A_k = \frac{2}{a}\int_0^a U_0 \sin\frac{k\pi}{a}x\,dx = \frac{2U_0}{k\pi}(1-\cos k\pi),$$

и, следовательно, отличны от нуля только при нечетном k, когда $A_k = 4U_0/k\pi$.

Таким образом, распределение потенциала в поперечном сечении бруска

$$U(x,y) = \frac{4U_0}{\pi}\sum_{k=1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{\sin\frac{k\pi}{a}x}{k\,\mathrm{sh}\frac{k\pi}{a}b}\cdot\mathrm{sh}\frac{k\pi}{a}(b-y).$$

Задача расчета проводимости при заданном напряжении электродов U_0 сводится к определению тока. Плотность тока в диэлектрике $\vec{J} = \gamma\vec{E} = -\gamma\,\mathrm{grad}U$. На поверхности пластины при $y = 0$

$$J_y(x,0) = -\gamma\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{4\gamma U_0}{a}\sum_{k=1,3,5\ldots}^{\infty}\sin\frac{k\pi}{a}x\cdot\mathrm{cth}\frac{k\pi}{a}b.$$

Ток, втекающий в брусок с электрода единичной длины,

$$i = \int_0^a J_y(x,0)dx.$$

Выполнив интегрирование, получим выражение для проводимости

$$G = \frac{i}{U_0} = \frac{8\gamma}{\pi}\sum_{k=1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{1}{k}\mathrm{cth}\frac{k\pi}{a}b.$$

5.6.3. Задачи 5.3.1–5.3.49 к теме «Постоянное магнитное поле»

5.3.1 (м). По закону Био–Савара напряженность поля элемента тока в точке наблюдения $M(0, y)$ равна $d\vec{H} = i[d\vec{l}\vec{r}]/(4\pi r^3)$. В выбранной системе координат (см. рис. 5.32) модуль напряженности $dH = \frac{iy}{4\pi}\cdot\frac{dx}{(x^2+y^2)^{3/2}}$. В соответствии с принципом наложения

$$H = \int_{x_1}^{x_2} dH = \frac{i}{4\pi y}\left(\frac{x_2}{(x_2^2+y^2)^{1/2}} - \frac{x_1}{(x_1^2+y^2)^{1/2}}\right) = \frac{i}{4\pi y}(\sin\beta_2 - \sin\beta_1).$$

Напряженность поля бесконечно длинного проводника ($\beta_2 = -\beta_1 = \pi/2$) будет $H = i/(2\pi y)$.

5.3.2 (м). Напряженность поля элемента тока в точке наблюдения $M(z)$ равна $dH = idl/(4\pi r^2)$. По принципу наложения

$$\vec{H} = \oint_l d\vec{H}.$$

Вследствие цилиндрической симметрии только одна составляющая $\vec{H}$ отлична от нуля:

$$H = H_z = \oint_l dH\cos\beta = \frac{ir_0^2}{2r^3} = \frac{ir_0^2}{2(r_0^2+z^2)^{3/2}}.$$

В центре кольца $H = i/(2r_0)$.

5.3.3 (м). Рассматриваем катушку как систему колец. По кольцу малой толщины dz' протекает ток $di = nidz'/l$. Поле этого элементарного кольца в точке наблюдения $M(z)$

$$dH_z = \frac{nir_0^2}{2l}\frac{dz'}{(r_0^2+(z-z')^2)^{3/2}}.$$

Искомое поле

$$H_z = \int_{-l/2}^{l/2} dH_z = \frac{ni}{2l}\left(\frac{z+l/2}{((z+l/2)^2+r_0^2)^{1/2}} - \frac{z-l/2}{((z-l/2)^2+r_0^2)^{1/2}}\right) = \frac{ni}{2l}(\cos\beta_1 - \cos\beta_2).$$

Если точка наблюдения $M(z)$ находится внутри катушки и $r_0 \ll l$ (эталонный соленоид), то $\beta_1 \to 0$, $\beta_2 \to \pi$ и $H_z = ni/l = n'i$, где n' — число витков на единицу длины соленоида.

5.3.4 (м). Поскольку $h \gg a$, ленту можно разбить на тонкие нити с токами $di = idx/h$, текущими вдоль оси z. Магнитная индукция в точке $M(y)$ находится по формуле для бесконечно длинного проводника (см. указания к решению задачи 5.31 (м)):

$$dB = \mu_0 dH = \frac{\mu_0 i}{2\pi h}dx.$$

Вследствие симметрии относительно оси y составляющая $B_y = 0$. Единственная составляющая B_x находится по принципу наложения

$$B = B_x = \int_{-h/2}^{h/2} dB\cos\beta = \frac{\mu_0 y}{\pi h}\int_0^{h/2}\frac{dx}{x^2+y^2} = \frac{\mu_0 i}{\pi h}\operatorname{arctg}\frac{h}{2y} = \frac{\mu_0 i}{\pi h}\beta_0.$$

В области около ленты ($\beta_0 \to \pi/2$) имеем $B_x = \mu_0 i/(2h)$ — практически однородное поле.

На оси x вне ленты ($|x| > h/2$) расчет проводится аналогично. Здесь есть только одна составляющая

$$B_x = -\frac{i}{2\pi h}\ln\frac{x+h/2}{x-h/2}.$$

5.3.5 (р). Вращающуюся сферу можно рассматривать как систему замкнутых кольцевых токов. Искомое поле определяется в результате суммирования элементарных полей этих токов.

Заряд на кольце, радиус которого R и ширина $r_0 d\theta$, будет $dq = 2\pi\sigma r_0 R d\theta$, где $\sigma = q/(4\pi r_0^2)$ — поверхностная плотность заряда. Соответствующий кольцевой ток $di = ndq$.

Магнитное поле тока в точке наблюдения $M(z)$ определяется известным соотношением (см. задачу 5.3.2 (м)):

$$dH = dH_z = \frac{R^2 di}{2(R^2+(z-z')^2)^{3/2}} = \frac{qn}{4r_0}\cdot\frac{R^3}{\rho^3}d\theta,$$

где z' — координата центра кольца.

При интегрировании этой функции целесообразно в качестве переменной избрать ρ. После преобразований получим

$$dH = -\frac{qn}{16r_0z^3}\left[\rho^2 - 2(r_0^2 + z^2) + \frac{(r_0^2 - z^2)^2}{\rho^2}\right]d\rho.$$

Поле внутри оболочки находим, интегрируя dH в пределах от $\rho_1 = r_0 - z$ до $\rho_2 = r_0 + z$:

$$H_z = \frac{qn}{3r_0} = 10^{-3}\ \text{А/м}.$$

Поле одинаково во всех точках оси при $|z| \le r_0$. При определении поля вне оболочки ($z > a$) пределы интегрирования $\rho_1 = r_0 - z$, $\rho_2 = r_0 + z$. Напряженность поля на оси

$$H_z = \frac{qnr_0^3}{3z^3}.$$

Зависимость $1/z^3$ характерна для поля диполя.

5.3.6 (м). Нужно использовать указания к задаче 5.3.5 (р). Ток элементарного кольца $di = nid\theta/\pi$, а $\rho = r_0$, так как точка наблюдения M находится в центре шара. Ответ: $H_z = ni/(4r_0)$.

5.3.7 (м). Задача обсуждается в [1, с. 561–562]. Поле внутри оболочки оказывается однородным $H_z = qn/(3\varepsilon_0)$; оно совпадает с частным решением для оси вращения, полученным в задаче 5.3.5 (р).

5.3.8. (р). Задача относится к числу симметричных задач. Магнитные векторные линии в жиле, изоляции и оболочке кабеля — концентрические окружности. Для расчета целесообразно использовать закон полного тока в интегральной форме [1, с. 462–463].

Если в качестве контура интегрирования избрать векторную линию радиуса r, получим

$$H = \frac{i_S}{2\pi r},$$

где i_S — ток, охватываемый контуром.

Ток определяется выражениями:

- в жиле ($r < r_1$) ток $i_S = J_1\pi r^2 = ir^2/r_1^2$;
- в изоляции ($r_1 < r < r_2$) ток $i_S = i$;
- в оболочке ($r_2 < r < r_3$) ток $i_S = i - J_2\pi(r^2 - r_2^2) = i - i(r^2 - r_2^2)/(r_3^2 - r_2^2)$,

где J_1 и J_2 — плотности токов в жиле и оболочке кабеля.

Поле в жиле и изоляции определяется только током жилы. Ток оболочки, имеющий такую же величину, но противоположное направление, влияет только на поле в оболочке. Вне кабеля ($r > r_3$) ток $i_S = 0$ и, следовательно, $\vec{H} = 0$. Этот результат можно трактовать, как результат наложения («вычитания») полей двух токов.

Напряженность поля в жиле $H_1 = J_1r/2 = ir/(2\pi r_1^2)$; в изоляции $H_2 = i/(2\pi r)$. В оболочке напряженность убывает от $i/(2\pi r_2)$ до нуля при $r = r_3$.

Зависимость $H(r)$ является непрерывной функцией, что следует из условия непрерывности касательной составляющей напряженности поля на границе раздела сред. Поскольку $\vec{B} = \mu\vec{H}$, для зависимости $B(r)$ характерны разрывы, связанные с различными значениями магнитных проницаемостей.

5.3.9 (р). Последовательно рассмотрим две модели. В первой ток с плотностью $\vec{J}$ заполняет весь объем цилиндра радиуса r_1. Тогда модуль напряженности поля в точке наблюдения M легко находится с помощью закона полного тока (см. указания к решению задачи 5.3.8 (м)): $H_1 = Jr/2$. Перейдем к векторной форме записи $\vec{H}_1 = [\vec{J}\vec{r}]/2$ (см. рис. 5.38). Во второй модели ток обратного направления, имеющий ту же плотность, заполняет объем цилиндра радиуса r_2. Напряженность поля в точке M будет $\vec{H}_2 = -[\vec{J}\vec{r}']/2$. Наложение двух моделей и их решений приводит к искомому выражению

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 = \frac{1}{2}[\vec{J}(\vec{r} - \vec{r}')] = \frac{1}{2}[\vec{J}\vec{a}].$$

Вектор $\vec{H}$ перпендикулярен $\vec{a}$; модуль $H = Ja/2$. При совпадении осей (концентрические цилиндры) $H = 0$.

5.3.10 (р). В задаче ось z является осью симметрии в распределении тока и поля. Векторные линии $\vec{H}$ совпадают с окружностями, плоскость которых перпендикулярна оси z (см. рис. 5.39*а*). Применяя закон полного тока в интегральной форме, легко найти напряженность поля в некоторой плоскости $z = \text{const}$ на расстоянии r от оси (рис. 5.39*б*):

$$H = \frac{i_S}{2\pi r},$$

где i_S — ток, протекающий через площадь S круга радиуса r. Этот ток по определению

$$i_S = \int_S \vec{J} d\vec{S} = \int_S J \cos\theta' dS,$$

где $\vec{J}$ — вектор плотности тока на элементе площади dS. Подынтегральные функции:

$$J = i/(2\pi R^2);\ \cos\theta' = z/R;$$
$$R = (z^2 + \rho^2)^{1/2};\ dS = \rho d\rho d\varphi.$$

Выполнив интегрирование, получим

$$H = \frac{i}{2\pi r}\left[1 - \frac{z}{(r^2 + z^2)^{1/2}}\right] = \frac{i}{2\pi r}\cdot(1 - \cos\theta).$$

На оси z имеем $H = 0$; на поверхности земли $H = i/(2\pi r)$. Ток, равномерно растекающийся из сферы, не имеет магнитного поля. Это следует из принципа суперпозиции; достаточно мысленно рассечь сферу диаметральной плоскостью.

Проведем решение этой же задачи, используя первое уравнение Максвелла в дифференциальной форме $\text{rot}\vec{H} = \vec{J}$. В сферической системе координат R, θ, φ плотность тока имеет только радиальную составляющую $J = J_R = i/(2\pi R^2)$, а магнитное поле не зависит от координаты φ. Проектируя обе части уравнения на ось R, получим

$$\text{rot}_R\vec{H} = J_R;\ \frac{1}{R\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(H_\varphi \sin\theta) - \frac{\partial H_\theta}{\partial\varphi}\right) = \frac{i}{2\pi R^2}.$$

Интегрирование приводит к выражениям:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(H_\varphi \sin\theta) = \frac{i\sin\theta}{2\pi R};\ H_\varphi \sin\theta = -\frac{i\cos\theta}{2\pi R} + C.$$

Из условий на оси симметрии z (при $\theta = 0$) следует $C = 1/(2\pi R)$. Таким образом, магнитное поле в земле

$$H_\varphi = \frac{i}{2\pi R \sin\theta}(1-\cos\theta) = \frac{i}{2\pi r}(1-\cos\theta).$$

5.3.11 (р). Рассматривая весьма длинный вращающийся цилиндр как систему кольцевых токов, можно считать, что в средней его части напряженность поля имеет только осевую составляющую. Вне цилиндра напряженность поля близка к нулю, как в известном случае длинного (эталонного) соленоида.

Для определения внутреннего поля применим закон полного тока в дифференциальной форме $\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{J}$. В цилиндрической системе координат r, φ, z, ось z которой совпадает с осью цилиндра, $H = H_z$ и не зависит от φ и z. Вектор плотности тока имеет только одну составляющую $J = J_\varphi = \rho v = \rho 2\pi r n$, где v — скорость заряда в точке с координатой r.

Проектируя обе части уравнения на ось φ, получим

$$\mathrm{rot}_\varphi \vec{H} = J_\varphi;\ \ \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = 2\pi\rho n r;$$

отсюда следует, что

$$H_z = -\pi\rho n r^2 + C.$$

Постоянная интегрирования определяется из граничного условия: при $r = r_0$ имеем $H_z = 0$. Окончательно получаем

$$H_z = \pi\rho n(r_0^2 - r^2).$$

5.3.12 (м). Симметрия задачи ($J = J_z$, $H = H_\varphi$) позволяет использовать для расчета уравнения закона полного тока в интегральной или дифференциальной формах.

Уравнение $\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{J}$ в условиях задачи имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi) = \frac{J_0}{1+r/a}.$$

Постоянная интегрирования определяется из условия $H_\varphi = 0$ при $r = 0$. Напряженность поля

$$H = aJ_0\left[1 - \frac{a}{r}\ln\left(\frac{r}{a}+1\right)\right].$$

5.3.13 (р). Вращающийся диск можно рассматривать как систему элементарных кольцевых токов. Заряд на кольце, радиус которого r и толщина dr, будет $dq = 2\pi\sigma r dr$, где поверхностная плотность заряда $\sigma = q/\pi r_0^2$. Соответствующий кольцевой ток $di = ndq$.

Поле этого тока в точке наблюдения M

$$dH = dH_z = \frac{r^2 di}{2(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{qn}{r_0^2}\cdot\frac{r^3 dr}{(r^2+z^2)^{3/2}},$$

причем $\partial H_z > 0$ в предположении, что диск вращается против часовой стрелки.

Суммируя элементарные поля, получим

$$H_z = \frac{qn}{r_0^2}\int_0^{r_0}\frac{r^3 dr}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{qn}{r_0^2}\frac{r^2+2z^2}{(r^2+z^2)^{1/2}}\Bigg|_0^{r_0} = \frac{qn}{r_0^2}\left(\frac{r_0^2+2z^2}{(r_0^2+z^2)^{1/2}} - 2z\right),$$

т. е. на поверхности диска в точке $z = 0$ имеем $H = qn/r_0$.

Преобразуем формулу при условии больших расстояний $z \gg r_0$, т. е. $r_0/z \ll 1$. Введя обозначение $(r_0/z)^2 = x$, запишем

$$\left(\frac{r_0^2+2z^2}{(r_0^2+z^2)^{1/2}}-2z\right)=\frac{r_0^2+2z^2-2z^2(1+x)^{1/2}}{z(1+x)^{1/2}}\approx$$
$$\approx\frac{z^2[x+2-2(1+x/2-x^2/8+\ldots)]}{z[1+x/2-x^2/8+\ldots]}\approx\frac{zx^2}{4}=\frac{r_0^4}{4z^3}.$$

Здесь использовано приближение (бином Ньютона) $(1+x)^{1/2}=\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\ldots\right)$.

Искомая формула: $H_z = qnr_0^2/(4z^3)$.

5.3.14 (м). Используем представление о магнитном моменте плоского контура с током [1, с. 558]. Вектор момента элементарного кольцевого тока направлен по оси z, а его модуль $dm = \mu_0 di\pi\rho^2$, где $di = 2qn\rho d\rho/r_0^2$. Магнитный момент диска $m = \mu_0\pi qnr_0^2/2$.

Рассматривая диск как магнитный диполь с моментом $\vec{m}$, записываем выражения для составляющих поля

$$H_r=\frac{2m\cos\theta}{4\pi\mu_0 r^3};\quad H_\theta=\frac{m\sin\theta}{4\pi\mu_0 r^3}.$$

На оси z при $\theta = 0$ имеем $H_\theta = 0$; $H_r = H_z = qnr_0^2/(4z^3)$. Этот же результат получен другим методом в задаче 5.3.13 (р).

5.3.15 (м). Выбираем сферическую систему координат r, θ, φ, полярная ось z которой совпадает с осью вращения. В первом случае запишем: элемент объема $dV = r^2 dr\sin\theta d\theta d\varphi$; объем элементарного кольца, радиус которого $r\sin\theta$, будет $dV' = 2\pi r^2 dr\sin\theta d\theta$; заряд кольца $dq = \rho dV'$; ток $di = ndq$; элементарный магнитный момент $dm = \mu_0\pi r^2\sin^2\theta di$. Вектор $d\vec{m}$ направлен по оси z. Магнитный момент шара $m = 2\mu_0\pi qnr_0^2/5$.

В случае поверхностного распределения заряда шар рассматривается как система элементарных поверхностных кольцевых токов $di = ndq$, где $dq = 2\pi\sigma r_0^2\sin\theta d\theta$. Магнитный момент шара $m = 2\mu_0\pi qnr_0^2/3$ больше, чем в случае объемного распределения заряда.

5.3.16 (р). Воспользуемся выражением для векторного потенциала двухпроводной линии [1, с. 556]. В точке наблюдения $M(x, y)$

$$A_x = 0;\quad A_y = 0;\quad A_z=\frac{\mu_0 i}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

При выбранных направлениях токов и системе координат $A_z > 0$ в левой полуплоскости ($x < 0$); при $x > 0$ имеем $A_z < 0$. Расстояния до осей проводов

$$r_1=\sqrt{y^2+(h+x)^2},\ r_2=\sqrt{y^2+(h-x)^2}.$$

Вектор магнитной индукции $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$ и, следовательно, его составляющие

$$B_x=\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}=\frac{\partial A_z}{\partial y};\quad B_y=\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}=-\frac{\partial A_z}{\partial x};\quad B_z=0.$$

Окончательные результаты:

$$B_x = \frac{\mu_0 i y}{2\pi}\left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}\right);\ B_y = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{h+x}{r_1^2} + \frac{h-x}{r_2^2}\right).$$

В плоскости проводов линии ($y = 0$):

$$B_x = 0;\ B_y = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{1}{h+x} + \frac{1}{h-x}\right).$$

В плоскости симметрии линии ($x = 0$):

$$B_x = 0;\ B_y = \frac{\mu_0 i h}{\pi r_1^2} = \frac{\mu_0 i h}{\pi(h^2 + y^2)}.$$

Две последние формулы для индукции на осях x и y легко выводятся методом наложения при использовании известной формулы для поля длинного провода: $H = i/(2\pi r)$.

5.3.17 (р). Внутри оболочки кабеля поле полностью определяется током жилы. Напряженность поля на оси x внутри жилы $H_y = i(h - x)/(2\pi a^2)$, а вне жилы $H_y = i/(2\pi(h - x))$. За пределами кабеля при $|x| > b$ поле есть результат наложения полей оболочки и жилы: $H_y = i/(2\pi x) - i/(2\pi(x - h)) = ih/(2\pi x(h - x))$. График $H_y(x)$ приведен на рис. 5.94. Приняв в условии задачи, что оболочка имеет нулевую толщину, получаем скачок касательной составляющей $\vec{H}$ при $x = b = 1{,}2$ см на величину плотности поверхностного тока $J_S = i/(2\pi b) = 27$ А/м, как указано в [1, с. 482].

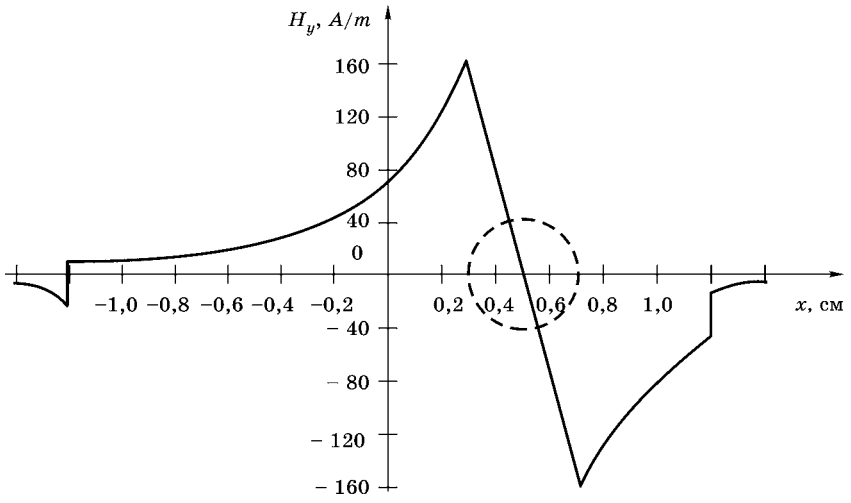


Рис. 5.94

5.3.18 (р). В первой области, где протекает ток, векторный потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона [1, с. 554] $\Delta\vec{A}_1 = -\mu_0\vec{J}$. Постоянный ток по сечению проводника распределяется равномерно; плотность тока $J = J_z = i/(\pi r_0^2)$. Векторный потенциал также имеет только одну составляющую $A_1 = A_{1z}$. Вместо векторного дифференциального уравнения имеем одно скалярное $\Delta A_{1z} = -\mu_0 J_{1z}$. Запишем его в цилиндрической системе координат

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_{1z}}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 A_{1z}}{\partial \varphi^2}\right)+\frac{\partial^2 A_{1z}}{\partial z^2}=-\mu J_z.$$

Поле длинного проводника плоскопараллельное ($\partial/\partial z = 0$) и имеет осевую симметрию ($\partial/\partial\varphi = 0$). Поэтому уравнение принимает вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_{1z}}{\partial r}\right)=-\mu J,$$

а его решение

$$A_{1z}=-\frac{\mu_0 J_z r^2}{4}+C_1\ln r+C_2.$$

Во второй области в отсутствие тока поле описывается уравнением Лапласа $\Delta\vec{A}_2=0$:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_{2z}}{\partial r}\right)=0,$$

решение которого $A_{2z} = C_3\ln r + C_4$.

Константа $C_1 = 0$, поскольку в противном случае на оси провода при $r \to 0$ потенциал $A_{1z} \to \infty$. Остальные постоянные интегрирования находятся из граничных условий на поверхности провода. При $r = r_0$ имеем: 1) $A_{1z} = A_{2z}$; 2) $\partial A_{1z}/\partial r = \partial A_{2z}/\partial r$.

Применив первое условие, получаем $(-\mu_0 J_z r_0^2)/4 + C_2 = C_3\ln r_0 + C_4$, а из второго условия следует $(-\mu_0 J_z r_0)/2 = C_3/r_0$.

Окончательные выражения:

$$A_{1z}=-\frac{\mu_0 J_z r^2}{4}+C_2=-\frac{\mu_0 i r^2}{4\pi r_0^2}+C_2;$$

$$A_{2z}=-\frac{\mu_0 J_z r_0^2}{4}-\frac{\mu_0 J_z r_0^2}{2}\ln\frac{r}{r_0}+C_2=-\frac{\mu_0 i}{4\pi}-\frac{\mu_0 i}{2\pi}\ln\frac{r}{r_0}+C_2.$$

Постоянная C_2 остается неопределенной; ее значение зависит от выбора точки отсчета потенциала.

Вектор магнитной индукции и векторный потенциал связаны векторным соотношением $\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}$, которое сводится к трем скалярным для определения составляющих:

$$B_r=\mathrm{rot}_r\vec{A}=\frac{1}{r}\frac{\partial A_{1z}}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}=0;$$

$$B_z=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\varphi-\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right)\right]=0;$$

$$B_\varphi=\frac{\partial A_r}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial r}=-\frac{\partial A_z}{\partial r}.$$

Единственная составляющая индукции внутри и вне провода

$$B_{1\varphi}=-\frac{\partial A_{1z}}{\partial r}=\frac{\mu_0 i r}{2\pi r_0^2}=\frac{J_z r}{2};\quad B_{2\varphi}=\frac{\mu_0 i}{2\pi r}.$$

Векторные линии поля — концентрические окружности; направление $\vec{B}$ связано с направлением тока правилом правого винта ($B_\varphi > 0$).

5.3.19 (р). Энергию магнитного поля линии можно найти, интегрируя плотность энергии $w^{м} = BH/2$ по всему объему, занимаемому полем. При другом подходе используется выражение

$$W^{м} = \frac{1}{2}\int_{V}\vec{J}\vec{A}dV.$$

Здесь интегрирование ведется по объему, в котором $\vec{J} \neq 0$, т. е. по объемам V_1 и V_2 проводов линии (на единицу длины).

В первом проводе плотность тока $J = i/(\pi a^2)$. Векторный потенциал в точке M (см. задачу 5.3.18 (р))

$$A = A_1 + A_2 = -\frac{\mu_0 i r^2}{4\pi a^2} + \frac{\mu_0 i}{4\pi} - \frac{\mu_0 i}{2\pi}\ln b + \frac{\mu_0 i}{2\pi}\ln R,$$

где составляющая A_1 (первое слагаемое) связана с током первого провода, а A_2 — с обратным током второго провода, причем

$$R = \sqrt{h^2 + r^2 - 2hr\cos\varphi} = h\sqrt{1 + (r/h)^2 - 2r\cos\varphi/h}.$$

Поскольку $\ln R = \ln h + \frac{1}{2}\ln[1 + (r/h)^2 - 2r\cos\varphi/h]$, выражение для векторного потенциала приобретает вид

$$A = \frac{\mu_0 i}{4\pi} + \frac{\mu_0 i}{2\pi}\ln\frac{h}{b} - \frac{\mu_0 i r^2}{4\pi a^2} + \frac{\mu_0 i}{4\pi}\ln[1 + (r/h)^2 - 2r\cos\varphi/h].$$

Магнитная энергия, обусловленная током в первом проводе,

$$W_1^{м} = \frac{1}{2}\int_{V_1} JAdV = \frac{1}{2}J\int_{V_1} AdV = \frac{i}{2\pi a^2}\int_{V_1} AdV = \frac{i}{2\pi a^2}\int_0^a\int_0^{2\pi} Ardrd\varphi,$$

где $dV = rdrd\varphi$ — элемент объема (на единицу длины провода).

Выполнив интегрирование, получим

$$W_1^{м} = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi}\left(\frac{1}{2} + 2\ln\frac{h}{b}\right).$$

Магнитная энергия поля второго тока

$$W_2^{м} = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi}\left(\frac{1}{2} + 2\ln\frac{h}{a}\right).$$

Так как $W^{м} = W_1^{м} + W_2^{м} = Li^2/2$, то индуктивность линии

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(1 + 4\ln\frac{h}{\sqrt{ab}}\right).$$

Численные результаты: $L = 4{,}13 \cdot 10^{-7}$ Гн/м; при отсутствии зазора между проводами ($h = a + b = 3$ см) получим $L = 4 \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

5.3.20 (м). В плоскости $y = 0$ (вид сверху) участок линии можно рассматривать как виток прямоугольной формы со сторонами l и $2(h - r_0)$. Напряженность поля в точке $M(x, 0)$ на оси x находится по принципу наложения; при этом удобно использовать известную формулу $H = i/(2\pi r)$:

$$H = \frac{i}{2\pi(h + x)} + \frac{i}{2\pi(h - x)}.$$

Магнитный поток через площадь S витка

$$\Phi = \int\limits_S \vec{B} d\vec{S} = \mu \int\limits_S H dS.$$

Внешняя индуктивность определяется соотношением $L = \Phi / i$. Результат расчета:

$$L = \frac{\mu l}{\pi} \ln \frac{2h - r_0}{r_0} \approx \frac{\mu l}{\pi} \ln \frac{2h}{r_0}.$$

Вычисление потока Φ с использованием векторного потенциала показано в [1, с. 568].

Внешняя индуктивность на единицу длины линии используется как первичный параметр при записи телеграфных уравнений [1, с. 303]. Другой параметр — погонная емкость (см. задачу 5.3.4 (м)).

5.3.21 (м). Магнитное поле кабеля исследовано в задаче 5.3.8 (м). Энергия поля — сумма энергий отдельных областей кабеля: $W^{\text{м}} = W_1^{\text{м}} + W_2^{\text{м}} + W_3^{\text{м}}$. Энергия поля в жиле

$$W_1^{\text{м}} = \int\limits_{V_1} w_1^{\text{м}} dV,$$

где $w_1^{\text{м}} = \mu_1 H_1^2 / 2$ — плотность магнитной энергии; $dV = 2\pi l r dr$ — элементарный объем (тонкостенный цилиндр). По этой же схеме определяются энергии поля $W_2^{\text{м}}$ в изоляции и $W_3^{\text{м}}$ в оболочке, а затем $L = 2W^{\text{м}} / i^2$. Результат расчета:

$$L = L_1 + L_2 + L_3 = \frac{\mu_1 l}{8\pi} + \frac{\mu_2 l}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{\mu_3 l}{2\pi} \left[\frac{r_3^4}{(r_3^2 - r_2^2)^2} \ln \frac{r_3}{r_2} - \frac{3r_3^2 - r_2^2}{4(r_3^2 - r_2^2)} \right].$$

Первое слагаемое L_1 — внутренняя индуктивность цилиндрического проводника (жилы); L_2 — внешняя индуктивность кабеля. Индуктивностью оболочки L_3 можно пренебречь, поскольку плотность энергии $w^{\text{м}} = \mu_3 H_3^2 / 2$ в обычных условиях мала.

В гармоническом режиме при высоких частотах токи жилы и оболочки становятся поверхностными. При этом L_1 и L_3 стремятся к нулю. Внешняя индуктивность кабеля (на единицу длины)

$$L_2 = \frac{\mu_2}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

используется как первичный параметр при записи телеграфных уравнений [1, с. 303].

5.3.22 (м). При расчете следует исходить из представления индуктивности как меры энергии магнитного поля: $W^{\text{м}} = Li^2/2$. Задаваясь током i, по закону полного тока в интегральной форме находим напряженность $\vec{H}$ магнитного поля, плотность магнитной энергии $w^{\text{м}}$ и затем энергию в стенке провода единичной длины.

Окончательный результат:

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \left[\frac{r_2^2 - 3r_1^2}{4(r_2^2 - r_1^2)} + \frac{r_1^4}{(r_2^2 - r_1^2)^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right].$$

Внутренняя индуктивность сплошного цилиндрического проводника ($r_1 = 0$) равна $L = \mu / 8\pi$ и не зависит от радиуса.

5.3.23 (р). Пусть ток первой обмотки i_1. При плотной намотке и $\mu \gg \mu_0$ магнитное поле локализовано в сердечнике; векторные линии поля — концентрические окружности.

Для линии радиуса r закон полного тока принимает вид $H_1 2\pi r = i_S$. Полный ток, охватываемый линией поля, $i_S = n_1 i_1$ и, следовательно, напряженность поля $H_1 = n_1 i_1/(2\pi r)$.

Магнитный поток, пронизывающий один виток первой обмотки,

$$\Phi = \int_S \vec{B}_1 d\vec{S} = \mu \int_S H_1 dS,$$

где S — площадь сечения сердечника. Таким образом,

$$\Phi = \frac{\mu n_1 i_1}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} h dr = \frac{\mu n_1 h i_1}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

По определению потокосцепление $\psi_{11} = n_1 \Phi$, следовательно, индуктивность (собственная) первой обмотки

$$L = \frac{\psi_{11}}{i} = \frac{\mu n_1^2 h}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Магнитный поток через один виток второй обмотки остается таким же, потокосцепление $\psi_{21} = n_2 \Phi$ и взаимная индуктивность обмоток

$$M = \frac{\psi_{21}}{i_1} = \frac{\mu n_1 n_2}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

5.3.24 (м). Задача обсуждается в [1, с. 568–569]. При $d \ll l_c$ из граничных условий следует, что индукции в сердечнике и зазоре равны, причем

$$B = \frac{ni}{l_c/\mu + d/\mu_0}.$$

При отсутствии зазора индукция $B' = \mu ni/l_0 = \mu ni/(l_c + d)$ и отношение

$$k = \frac{B}{B'} = \frac{l_c/d + 1}{l_c/d + \mu/\mu_0} < 1;$$

если $l_c/d = 50$ и $\mu/\mu_0 = 100$, то $k = 0{,}33$.

Индуктивность катушки с зазором $L = \mu n^2 S/(l_c + \mu d/\mu_0)$. При зазоре, составляющем всего лишь $0{,}02 l_c$, индуктивность уменьшается в три раза.

5.3.25 (р). Взаимная магнитная энергия $W_{12}^{\text{м}}$ двух полей $\vec{H}_1$ и $\vec{H}_2$, занимающих объем V и создаваемых токами i_1 и i_2, определяется выражением [1, с. 570–571]:

$$W_{12}^{\text{м}} = \int_V \mu(\vec{H}_1 \vec{H}_2) dV = M i_1 i_2.$$

Поле прямолинейного тока $\vec{H}_1$ существует во всем пространстве; векторные линии поля — концентрические окружности; величина $H_1 = i_1/(2\pi r)$.

Магнитное поле тока i_2 при плотной намотке и достаточно большой магнитной проницаемости сосредоточено в сердечнике; его векторные линии также концентрические окружности, а напряженность поля $H_2 = n i_2/(2\pi r)$.

При этих условиях интегрирование проводится по объему сердечника, причем $\vec{H}_1 \vec{H}_2 = H_1 H_2$:

$$W_{12}^{\text{м}} = \frac{\mu n i_1 i_2}{(2\pi)^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} 2\pi h r dr = \frac{\mu n h i_1 i_2}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1};$$

отсюда следует:

$$M = \frac{\mu n h}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Другой подход к решению этой задачи изложен в [1, с. 569].

5.3.26 (м). Задаем ток i в линии с проводами 1 и 2. Взаимная индуктивность $M = \Phi/i$, где Φ — магнитный поток через площадь прямоугольного витка, образованного проводами 3 и 4 длиной l. Вычисление потока упрощается при использовании векторного потенциала двухпроводной линии [1, с. 556]. В точке P вектор $\vec{A}$ направлен вдоль проводов; его модуль

$$A = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Поток Φ вычисляется как циркуляция $\vec{A}$ по контуру витка. На проводе 3

$$A_3 = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{h_1^2 + d^2}}{d}.$$

Записав выражение для A_4, найдем $\Phi = (A_3 - A_4)l$ и затем

$$M = \frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{(h_2 + d)\sqrt{h_1^2 + d^2}}{d\sqrt{h_1^2 + (h_2 + d)^2}}.$$

5.3.27 (р). Определение магнитного потока, создаваемого током одной из рамок, через площадь соседней рамки является достаточно сложной задачей. Проведем решение методом участков.

Воспользуемся выражением, не связанным непосредственно с расчетом поля [1, с. 565]:

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_2}{r}.$$

Разобьем контуры на прямолинейные участки и вычислим двойной интеграл для каждой пары. Очевидно, что для взаимно перпендикулярных сторон квадратов $d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2 = 0$, и поэтому такие пары не рассматриваются.

Обозначим взаимную индуктивность участков, лежащих на расстоянии h, через M', а лежащих на расстоянии, равном $\sqrt{h^2 + d^2}$, через M''. Взаимная индуктивность в целом определяется как сумма $M = 4M' + 4M''$, где

$$M' = \frac{\mu}{4\pi} \int_0^a \int_0^a \frac{dy_1 dy_2}{\sqrt{(y_1 - y_2)^2 + h^2}}; \quad M'' = -\frac{\mu}{4\pi} \int_0^a \int_0^a \frac{dy_1 dy_2}{\sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (h^2 + a^2)}}.$$

Значение $M'' < 0$, так как здесь $d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2 = -1$ (токи антипараллельны). Вычислим M':

$$M' = \frac{\mu}{4\pi} \int_0^a dy_2 \int_0^a \frac{dy_1}{\sqrt{(y_1 - y_2)^2 + h^2}} = \frac{\mu}{4\pi} \int_0^a \ln\left(y_1 - y_2 + \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + h^2}\right) dy =$$

$$= \frac{\mu}{2\pi} \left[h - \sqrt{h^2 + a^2} + a \ln \frac{a + \sqrt{h^2 + a^2}}{h} \right].$$

Выражение для M'' получается при замене h на $\sqrt{h^2+a^2}$. Окончательный результат:

$$M=\frac{2\mu}{\pi}\left[h-2\sqrt{h^2+a^2}+\sqrt{h^2+2a^2}+a\ln\frac{\left(a+\sqrt{h^2+a^2}\right)\sqrt{h^2+a^2}}{h\left(a+\sqrt{h^2+a^2}\right)}\right].$$

Численное решение: $M=4{,}8\cdot10^{-9}$ Гн.

5.3.28 (р). Пусть ток в проводе i. Магнитная индукция в плоскости рамки на расстоянии r от оси провода $B=\mu_0 i/(2\pi r)$. Магнитный поток, пронизывающий площадь S рамки, равен потоку через прямоугольник со сторонами (r_2-r_1) и b (см. рис. 5.49):

$$\Phi=\int\limits_S\vec{B}d\vec{S}=\frac{\mu bi}{2\pi}\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r}=\frac{\mu bi}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1},$$

где $r_1=h$; $r_2=\sqrt{h^2+a^2-2ha\cos\alpha}$. Потокосцепление $\psi=n\Phi$, а искомая взаимная индуктивность

$$M=\frac{\mu nb}{2\pi}\ln\frac{\sqrt{h^2+a^2-2ha\cos\alpha}}{h}.$$

5.3.29 (м). Полезно использовать указания к решению задачи 5.3.28 (р). В первой и второй системе соответственно получим

$$M=\frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{a+b}{\sqrt{h^2+b^2}};\quad M=\frac{\mu_0 l}{4\pi}\ln\frac{b^2+h^2}{a^2+h^2}.$$

5.3.30 (р). Пусть ток в проводе i. Магнитная индукция в элементе площади витка $dS=rdrd\alpha$ равна $B=\mu_0 i/(2\pi(d-r\cos\alpha))$. Магнитный поток через площадь витка

$$\Phi=\frac{\mu_0 i}{\pi}\int\limits_0^{r_0}\int\limits_0^{\pi}\frac{rdrd\alpha}{d-r\cos\alpha}=\frac{\mu_0 i}{\pi}\int\limits_0^{r_0}dr\int\limits_0^{\pi}\frac{d\alpha}{\left(\frac{d}{r}-\cos\alpha\right)}=\frac{\mu_0 i}{\pi}\int\limits_0^{r_0}\frac{\pi dr}{\sqrt{\left(\frac{d}{r}\right)^2-1}}=\mu_0 i\left(d-\sqrt{d^2-r_0^2}\right).$$

Взаимная индуктивность

$$M=\mu_0\left(d-\sqrt{d^2-r_0^2}\right).$$

В случае малого витка $(r_0\ll d)$

$$(d^2-r_0^2)^{1/2}=d\left(1-\frac{r_0^2}{d^2}\right)^{1/2}\approx d\left(1-\frac{r_0^2}{2d^2}\right)=d-\frac{r_0^2}{2d};$$

следовательно, $M=\mu_0 r_0^2/(2d)$.

Эту формулу можно получить элементарно. Пусть в плоскости витка индукция $B=\text{const}$ и равна значению в центре: $B_0=\mu i/(2\pi d)$. Тогда

$$M=\Phi_0/i=B_0\pi r_0^2/i=\mu_0 r_0^2/(2d).$$

5.3.31 (м). При решении задачи используется метод зеркальных изображений. Расчетная модель для определения поля $\vec{H}_1,\vec{B}_1$ в первой среде $(x\ll h)$ содержит два тока в однородном магнетике (воздухе) с проницаемостью $\mu_1=\mu_0$: заданный ток i и ток-изображение $i'=(\mu_2-\mu_1)i/(\mu_2+\mu_1)=(\mu-\mu_0)i/(\mu_0+\mu)$. Координата тока $x=2h$; направления i' и i при $\mu_2>\mu_1$ совпадают.

Модель для расчета поля $\vec{H}_2, \vec{B}_2$ во второй среде ($x \geq h$) — только один ток-изображение в однородном магнетике с проницаемостью $\mu_2 = \mu$: $i'' = 2\mu_1 i/(\mu_2 + \mu_1) = 2\mu_0 i/(\mu_0 + \mu)$. Координата тока $x = 0$; направления i'' и i всегда совпадают.

Результаты расчета:

$$H_{1y} = \frac{i}{2\pi x} - \frac{i'}{2\pi(2h - x)};\ B_{1y} = \mu H_{1y};\ H_{2y} = \frac{i''}{2\pi x};\ B_{2y} = \mu H_{2y}.$$

5.3.32 (р). По закону Ампера сила, действующая на элемент тока $i = d\vec{l}$, находящийся во внешнем поле $\vec{B}$, будет $d\vec{f} = i[d\vec{l}\vec{B}]$. В данной задаче внешнее поле — это поле тока i' в месте расположения тока i, т. е. $H' = i'/4\pi h$. Таким образом, искомая сила

$$f = \mu_1 \frac{|\mu_2 - \mu_1|}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \frac{i^2}{4\pi h}.$$

Если $\mu_2/\mu_1 = 100$ (провод находится в воздухе $\mu_1 = \mu_0$ над железной плитой $\mu_2 = 100\mu_0$), провод притягивается к плите с силой

$$f = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{99}{101} \cdot \frac{10^4}{4\pi \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = 0{,}049\ \text{Н/м}.$$

Если $\mu_1/\mu_2 = 100$ (провод находится в железной плите $\mu_1 = 100\mu_0$), сила направлена от поверхности и равна $f = 4{,}9$ Н/м.

5.3.33 (м). Следует воспользоваться указаниями к решению задач 5.3.31 (м) и 5.3.32 (р). Искомая сила

$$f = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \mu_2 i_1 \frac{i_2}{2\pi(2h)} + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \mu_2 i_2 \frac{i_2}{2\pi(2h)} = \frac{\mu_2 i_2}{4\pi h} \frac{2\mu_1 i_1 + \mu_1 i_2 - \mu_2 i_2}{\mu_1 + \mu_2}.$$

5.3.34 (м). Согласно методу зеркальных изображений магнитный поток витка увеличивается и соответствует току $i + i' = i + (\mu - \mu_0)i/(\mu + \mu_0) = 2\mu i/(\mu + \mu_0)$. Следовательно, индуктивность возрастает до значения $L' \approx 2\mu L/(\mu + \mu_0)$.

5.3.35 (р). Сила, действующая на элемент тока $d\vec{f} = i[d\vec{l}\vec{B}]$, имеет одну составляющую $df_x = -B_z dy$. Вектор $\vec{B}$ — магнитная индукция внешнего (по отношению к $id\vec{l}$) поля. Это поле создается частью провода на оси x и равно $B_z = \mu_0 i/(4\pi y)$ (см. задачу 5.3.1 (м)); оно вдвое меньше поля бесконечно длинного провода. Искомая сила «выпрямляет» провод:

$$f_x = -\frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_a^b \frac{dy}{y} = -\frac{\mu_0 i}{4\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

Численное решение: $f = 24$ Н.

5.3.36 (р). Считая, что влево от перемычки длина проводов значительно превышает расстояние h между ними, можно записать (см. задачу 5.3.1 (м)):

$$B_y = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{h - x}\right).$$

где первое слагаемое — поле первого провода. Элементарная сила $df_z = iB_y dx$, а сила, действующая на перемычку,

$$f_z = \int_{r_0}^{h - r_0} df_z = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi} \ln \frac{h - r_0}{r_0}.$$

Приняв $i = 10^3$ А; $h = 0{,}1$ м; $r_0 = 0{,}005$ м, получим $f_z = 1{,}04$ Н. Перемычка движется равноускоренно; скорость $v(t) = f_z t/m$.

5.3.37 (м). Если перемычка находится в плоскости проводов и не является прямолинейной, из закона Ампера $d\vec{f} = i[d\vec{l}\vec{B}]$ получим

$$df_x = i(B_z dy - B_y dz) = -iB_y dz;\ \ df_y = i(B_x dz - B_z dx) = 0.$$

Выражение $df_z = i(B_y dx - B_x dy) = iB_y dx$ совпадает с записанным в задаче 5.3.36 (р).

5.3.38 (р). Сила, действующая на элемент тока витка, имеет две составляющие. Вдоль оси x: $df_x = iB_z r_0 \cos\alpha d\alpha = iB_0 r_0 (x/a - 1)\cos\alpha d\alpha$.

Результирующая сила

$$f_x = 2iB_0 r_0 \int_0^{\pi}\left(\frac{x_0 + r_0\cos\alpha}{a} - 1\right)\cos\alpha d\alpha = 2iB_0 r_0 \frac{r_0}{a}\int_0^{\pi}\cos^2\alpha d\alpha = \frac{iB_0\pi r_0^2}{a}.$$

Виток стремится занять положение, когда пронизывающий его магнитный поток возрастает ($f_x > 0$). При изменении направления тока $f_x < 0$. Однако виток находится в неустойчивом равновесии. Он стремится повернуться вокруг оси x, а далее опять $f_x > 0$.

Составляющая $df_y = iB_z r_0 \sin\alpha d\alpha$ вызывает только деформацию витка.

5.3.39 (р). По закону Ампера сила, действующая во внешнем поле $\vec{B}$ на элементарный объем dV с током плотностью $\vec{J}$, будет $d\vec{f} = [\vec{J}\vec{B}]dV$. Модуль силы $df = JBdV$; модуль момента $dN = 2rdf$. Так как плотность тока $J = i/(2\pi hr)$, а $dV = hrdrd\alpha$, то элементарный момент $dN = iBrdrd\alpha/\pi$. Момент, приложенный к диску,

$$N = \frac{iB}{\pi}\int_0^{r_0} rdr \int_0^{\pi} d\alpha = \frac{iBr_0^2}{2}.$$

5.3.40 (м). Силу можно найти по закону Ампера. Более простое решение основано на том, что обобщенные силы, действующие между контурами с неизменными токами, могут быть найдены путем дифференцирования взаимной магнитной энергии по соответствующим обобщенным координатам: $f_g = \partial W_м/\partial g$.

Взаимная индуктивность системы ток — виток (см. решение задачи 5.3.30 (р)) будет $M = \mu_0\left(d - \sqrt{d^2 - r_0^2}\right)$. Выбирая в качестве координаты $g = d$, получаем модуль

$$|f_d| = \mu_0 i_1 i_2\left[\frac{d}{\sqrt{d^2 - r_0^2}} - 1\right].$$

Направление силы зависит от направления токов, как и знак взаимной индуктивности M [1, с. 565].

5.3.41 (м). Возможно решение по закону Ампера: $f = iBl$, где B — индукция поля одного из проводов в месте расположения другого провода.

При другом подходе вычисляется энергия магнитного поля $W_м = Li^2/2$, где L — внешняя индуктивность линии (см. указания к решению задачи 5.3.20 (м)). Искомая сила

$$f_h = \frac{\partial W_м}{\partial h} = \frac{\mu_0 i^2 l}{2\pi h}.$$

Так как $f_h > 0$, сила действует в направлении увеличения обобщенной координаты (провода линии отталкиваются).

5.3.42 (р). Индуктивность участка кабеля длиной l без учета индуктивности оболочки (см. задачу 5.3.21 (м)):

$$L = \frac{\mu_0 l}{8\pi} + \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Энергия магнитного поля $W^{\text{м}} = Li^2/2$, а обобщенная сила, соответствующая координате r_2, равна $f_{r_2} = \partial W^M / \partial r_2 = \mu_0 i^2 l/(4\pi r_2)$. Она имеет смысл общего усилия, растягивающего оболочку ($f_{r_2} > 0$). Давление, испытываемое оболочкой,

$$p = f_{r_2}/(2\pi r_2 l) = \mu_0 i^2/(8\pi^2 r_2^2).$$

Разрывное усилие в сечении A оболочки определяется следующим образом (рис. 5.95). На элементарную ленту длиной l действует сила $df = pldb = plr_2 d\alpha$. Проекция $df_x = df\sin\alpha = \mu_0 i^2 l \sin\alpha d\alpha/(8\pi^2 r_2)$, а усилие в сечении

$$f_A = \int df_x = \frac{\mu_0 i^2 l}{8\pi^2 r_2} \int_0^{\pi/2} \sin\alpha d\alpha = \frac{\mu_0 i^2 l}{8\pi^2 r_2}.$$

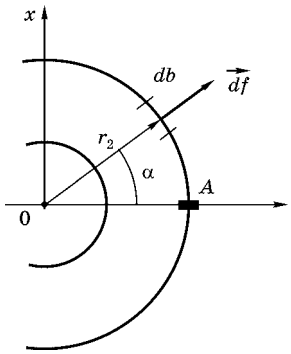


Рис. 5.95

Численное решение: $f_A = 53$ Н.

5.3.43 (м). Если считать, что магнитная индукция поля жилы в оболочке $B = B(r_{2)} = \mu_0 i/(2\pi r_2)$, то на элементарную ленту с током di действует сила $df = Bldi$. Она вдвое больше, чем в задаче 5.3.42 (р).

При расчете нужно учесть, что в пределах оболочки индукция изменяется от $B(r_2)$ до $B(r_3) = 0$, и воспользоваться ее средним арифметическим значением.

5.3.44 (м). На внутренней стороне стенки индукция равна нулю, на внешней $B(r_0) = \mu_0 i/(2\pi r_0)$, а ее среднее значение $B = \mu_0 i/(4\pi r_0)$. По закону Ампера сила, действующая на элементарную ленту длиной l и шириной db, равна $df = Bldi$, где $di = idb/(2\pi r_0)$. Сила направлена к оси, проводник сжимается; при этом давление на стенку

$$p = \frac{df}{ldb} = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 r_0^2}.$$

Численное решение: $p = 114{,}7$ Н/м^2.

5.3.45 (р). Обобщенная сила, действующая вдоль координаты r,

$$f_r = \frac{\partial W^{\text{м}}}{\partial r} = \frac{i^2}{2}\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{\mu_0 i^2}{2}\left(\ln\frac{8r}{a} - 0{,}75\right).$$

Так как $f_r > 0$, сила действует в направлении увеличения r (разрывает кольцо). Сила на единицу длины средней линии $f'_r = f_r/(2\pi r)$, а сила в сечении провода кольца (см. решение задачи 5.3.42 (р))

$$f_A = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi}\left(\ln\frac{8r}{a} - 0{,}75\right).$$

Обобщенная сила, сжимающая провод,

$$f_a = \frac{i^2}{2}\frac{\partial L}{\partial a} = -\frac{\mu_0 i^2 r}{2a}.$$

Численное решение: $f_A = 5{,}25 \cdot 10^{-5}$ Н; $f_a = 3{,}14 \cdot 10^{-3}$ Н.

5.3.46 (р). Намагниченное тело можно рассматривать как систему электрических связанных (амперовых) токов, протекающих в вакууме.

Уравнение, связывающее вектор намагниченности с плотностью связанных токов $\operatorname{rot}\vec{M} = \mu_0 \vec{J}^{\text{м}}$. На границе раздела сред 1 и 2 при разрыве вектора $\vec{M}$ справедливо уравнение $[\vec{n}(\vec{M}_2 - \vec{M}_1)] = \vec{J}_S^{\text{м}}$, где $\vec{n}$ — единичная нормаль из первой среды во вторую; $\vec{J}_S^{\text{м}}$ — вектор плотности поверхностного тока. Аналогичные соотношения известны: первое уравнение Максвелла $\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{J}$ и соответствующее ему граничное условие $[\vec{n}(\vec{H}_2 - \vec{H}_1)] = \vec{J}_S$ [1, с. 453, 482].

При однородной намагниченности $\vec{M} = \text{const}$ в объеме магнита связанные токи отсутствуют $\vec{J}^{\text{м}} = 0$. На поверхности при $\vec{M}_1 = \vec{M}$ и $\vec{M}_2 = 0$ получим $[\vec{n}\vec{M}] = -\mu_0 \vec{J}_S^{\text{м}}$. Таким образом, магнит эквивалентен электрическому поверхностному току в вакууме с плотностью $J_S^{\text{м}} = M/\mu_0$; направления $\vec{J}_S^{\text{м}}$ и $\vec{M}$ связаны правилом правого винта.

Аналогичная система токов — круглая катушка (соленоид) рассмотрена в задаче 5.3.3 (м). Необходимо только в формуле для расчета индукции $B_z = \mu_0 H_z$ заменить плотность поверхностного тока соленоида («ампер-витки») ni/l на M/μ_0:

$$B_z = \frac{M}{2}\left[\frac{z + l/2}{((z + l/2)^2 + r_0^2)^{1/2}} - \frac{z - l/2}{((z + l/2)^2 + r_0^2)^{1/2}}\right].$$

Индукция максимальна в центре магнита ($z = 0$).

На торце (полюсе) магнита ($z = l/2$)

$$B_z = \frac{Ml}{2(l^2 + r_0^2)^{1/2}}.$$

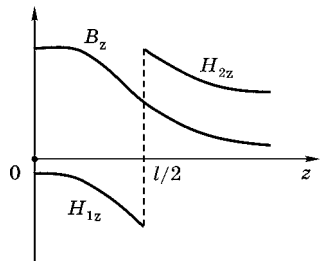


Рис. 5.96

Напряженность поля внутри магнита находится из соотношения $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}_2 + \vec{M}$, откуда $H_{1z} = (B_z - M)/\mu_0$. Очевидно, что $H_{1z} < 0$ и, следовательно, векторы $\vec{H}_1$ и $\vec{M}$ направлены противоположно. Вне магнита, как обычно, $H_{2z} = B_z/\mu_0$. Качественные зависимости индукции и напряженности показаны на рис. 5.96.

На торце магнита нормальная составляющая $\vec{B}$ непрерывна, тогда как нормальная составляющая $\vec{H}$ изменяется скачком на величину M/μ_0. Отметим также, что (в силу отсутствия токов проводимости) по закону полного тока циркуляция $\vec{H}$ по любому контуру, проходящему сквозь тело магнита, равна нулю ($H_{1z} < 0$).

В эталонном соленоиде ($l \gg r_0$) имеем $B_z = \mu_0 ni/l$; в длинном магните при тех же условиях $B_z = M$, а напряженность поля внутри $H_{1z} \to 0$.

5.3.47 (м). Для нахождения системы связанных зарядов используется уравнение $\operatorname{div}\vec{M} = -\rho_{\text{м}}$ и его поверхностная форма (граничные условия) $M_{2n} - M_{1n} = -\sigma_{\text{м}}$, где $\vec{n}$ — единичная нормаль из среды 1 (магнит) в среду 2 (см. рис. 5.58). Так как намагниченность $\vec{M} = \text{const}$, имеем $\rho_{\text{м}} = 0$ — магнитные заряды в объеме магнита отсутствуют. На боковой поверхности $\vec{M} \perp \vec{n}$ и, следовательно, $\sigma_{\text{м}} = 0$. Заряды присутствуют только на торцах магнита: при $z = l/2$ поверхностная плотность заряда $\sigma_{\text{м}} = M$, а при $z = -l/2$ получим $\sigma_{\text{м}} = -M$. Таким образом, эквивалентное представление магнита — два равномерно заряженных диска.

Для определения напряженности магнитного поля $\vec{H}$ можно использовать готовое решение для напряженности электрического поля $\vec{E}$ заряженного диска (см. ответ задачи 5.1.9 (м)) с заменой $\sigma \to \sigma_м$, $\varepsilon_0 \to \mu_0$. Например, поле положительно заряженного торца при $z > l/2$

$$H_z^+ = \frac{M}{2\mu_0}\left(1 - \frac{z - l/2}{\sqrt{(z-l/2)^2 + r_0^2}}\right),$$

причем $H_z^+ > 0$. Поле отрицательно заряженного торца $H_z^- < 0$, а результирующее поле $H_{2z} > 0$.

Внутри магнита ($0 < |z| < l/2$) имеем $H_z^+ < 0$ и $H_z^- < 0$; их сумма $H_{1z} < 0$.

Магнитная индукция находится из уравнений связи: вне магнита $B_z = \mu_0 H_{2z} > 0$, в объеме магнита $B_z = \mu_0 H_{1z} + M > 0$.

5.3.48 (м). Возможен переход к системе амперовых токов или магнитных зарядов, как это сделано в задачах 5.3.46 (р) и 5.3.47 (м). Рассмотрим другой способ решения: воспользуемся результатами, полученными в задаче о диэлектрическом шаре в однородном электрическом поле [1, с. 524–529]. Составляющие поля шара, обусловленные его поляризацией, не зависят от того, чем поляризация вызвана.

Рассматривая поляризацию P как плотность электрического момента p, имеем $P = p/V$, где V — объем шара. Соответствующая составляющая потенциала вне шара находится из (24.68): $U_{1p} = Pr_0^3 \cos\theta/(3\varepsilon_0 r^2)$. Внутри шара с учетом (24.66): $U_{2p} = U_2 - U_0 = Pr\cos\theta/(3\varepsilon_0)$.

Формулы для расчета магнитного поля, связанного с намагниченностью, получаются при замене $\vec{P}/\varepsilon_0 \to \vec{M}/\mu_0$, $U_p \to U_m$, где U_m — скалярный магнитный потенциал.

Далее, выполнив операцию $\vec{H} = -\mathrm{grad} U_m$, записываем

$$H_{1r} = \frac{2Mr_0^3\cos\theta}{3\mu_0 r^3};\quad H_{1\theta} = \frac{Mr_0^3\cos\theta}{3\mu_0 r^3};\quad \vec{H}_2 = -\frac{\vec{M}}{3\mu_0}.$$

Картина поля $\vec{H}$ показана на рис. 5.59*б*.

5.3.49 (р). Можно считать, что на пленке записан гармонический сигнал. Для упрощения задачи положим, что протяженность пленки в направлениях $|z|$ не ограничена. Тогда приходим к плоскопараллельному магнитному полю, зависящему только от двух координат x и y. Так как токи проводимости в области наблюдения отсутствуют, $\mathrm{rot}\,\vec{H} = 0$ и для расчета поля можно использовать скалярный потенциал U_m [1, с. 559]. В областях 1 и 3 справедливо уравнение Лапласа $\Delta U_{m1,3} = 0$. В пленке (область 2) $\mathrm{div}\vec{B} = \mathrm{div}(\mu_0\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \mathrm{div}\vec{H} + \mathrm{div}\vec{M} = 0$. Поскольку $\mathrm{div}\vec{M} = \partial M_x/\partial x + \partial M_y/\partial y = 0$, то $\mathrm{div}\vec{H} = 0$, и при известном условии $\vec{H} = -\mathrm{grad} U_m$ получаем $\Delta U_{m2} = 0$.

На основании математической аналогии полей [1, с. 562–563] общее решение уравнения Лапласа для плоскопараллельного поля в декартовых координатах [1, с. 517–519] можно использовать для записи $U_m(x, y)$. При выборе из общего решения подходящих функций нужно учесть периодичность по y и «условие на бесконечности»: при $|x| \to \infty$ имеем $U_m \to 0$. Следовательно, $U_{m1} = C_1 e^{kx}\cos ky$; $U_{m2} = (C_2 e^{kx} + C_3 e^{-kx})\cos ky$; $U_{m3} = C_4 e^{-kx}\cos ky$.

Для определения четырех постоянных используются граничные условия — равенство потенциалов и нормальных составляющих магнитной индукции. На верхней границе ($x = 0$) имеем $U_{m3} = U_{m2}$; $-\mu_0 \partial U_{m3}/\partial x = -\mu_0 \partial U_{m2}/\partial x + M_x$. На нижней границе ($x = -a$) аналогично записываем $U_{m2} = U_{m1}$; $-\mu_0 \partial U_{m2}/\partial x + M_x = -\mu_0 \partial U_{m1}/\partial x$.

Окончательные результаты:

$$U_{m3} = \frac{M_0}{2\mu_0 k}(1 - e^{-ka})e^{-kx}\cos ky;$$
$$U_{m2} = \frac{M_0}{2\mu_0 k}(e^{kx} - e^{-k(x+a)})\cos ky.$$

Формула для U_{m1} следует из U_{m3} при замене $x \to (-x)$; $a \to (-a)$.

Поле пленки можно связывать с поверхностными магнитными зарядами, плотность которых $\sigma_м = |M|$ (см. рис. 5.60). При другом подходе — это поле электрических (амперовых) токов. Их плотность $\vec{J}^м = \mathrm{rot}\vec{M}/\mu_0$ и, следовательно, токи текут по $|z|$:

$$J_z^м = \frac{1}{\mu_0}\left(-\frac{\partial M_x}{\partial y}\right) = \frac{M_0 k}{\mu_0}\sin ky.$$

Примечание. Задача рассматривается в учебнике: *Поливанов К. М.* Теория электромагнитного поля. М.: Энергия, 1969.

5.6.4. Задачи 5.4.1–5.4.36 к теме «Стационарное и квазистационарное электромагнитное поле»

5.4.1 (р). Постоянный ток распределяется по сечению провода равномерно. Вектор плотности тока $\vec{J} = \mathrm{const}$ имеет одну составляющую $J_z = i/(\pi r_0^2)$. Как следует из закона Ома, $E_z = J_z/\gamma$. Поскольку $E_z = -\partial U/\partial z$, потенциал поля $U(z) = -E_z z + C$ убывает в направлении протекания тока. Из граничных условий для касательных составляющих $\vec{E}$ следует, что в среде у поверхности провода также существует продольное поле E_z.

Напряженность магнитного поля находится по закону полного тока (см. указания к решению задачи 5.3.8 (м)): $H_\varphi = J_z r/2$.

Вектор Пойнтинга $\vec{\Pi} = [\vec{E}\vec{H}]$ в проводе имеет единственную составляющую $\Pi_r = -E_z H_\varphi = -J_z^2 r/(2\gamma)$. Векторные линии $\vec{\Pi}$ показаны на рис. 5.61*б*. Электромагнитная энергия поступает от поверхности в объем провода.

Дивергенция вектора Пойнтинга в цилиндрической системе координат

$$\mathrm{div}\vec{\Pi} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\Pi_r) = -\frac{J_z^2}{\gamma} = -J_z E_z = -\vec{J}\vec{E}.$$

Это равенство следует также из уравнения энергетического баланса [1, с. 485] при условиях стационарности ($\partial w/\partial t = 0$) и отсутствия сторонних сил ($\vec{J}^{ст} = 0$). Интенсивность стоков поля $\vec{\Pi}$ определяется плотностью мощности тепловых потерь $\vec{J}\vec{E}$ (закон Джоуля — Ленца в дифференциальной форме).

Электромагнитная мощность, поступающая в провод, равна потоку вектора $\vec{\Pi}$ через боковую поверхность S:

$$P_S = \int_S \vec{\Pi} d\vec{S} = 2\pi r_0 l \Pi_r\big|_{r=r_0} = -\frac{J_z^2 \pi r_0^2 l}{\gamma} = -i^2 \cdot \frac{l}{\gamma \pi r_0^2}.$$

Мощность тепловых потерь в проводе $P_{\Pi} = -P_S$. Ее можно искать также в форме закона Джоуля — Ленца в интегральной форме $P_{\Pi} = Ri^2$, где $R = l/\gamma\pi r_0^2$ — сопротивление участка провода, длина которого l и сечение (πr_0^2).

Численное решение: $J = 1{,}99 \cdot 10^6$ А/м^2; $E = 3{,}55 \cdot 10^{-2}$ В/м; $H(r_0) = 4 \cdot 10^6$ А/м; $\operatorname{div}\vec{\Pi} = -7{,}1 \cdot 10^6$ Вт/м^3; $|P_S| = 35{,}5$ Вт.

5.4.2 (р). Потенциал плоскопараллельного электрического поля между пластинами $U(x, z) = C_1 x + C_2 xz + C_3$ [1, с. 517]. Положив $U(0, z) = 0$, имеем $C_3 = 0$. При краевом условии $U(h, 0) = U_0/2$ получим $C_1 h = U_0/2$, откуда следует $C_1 = U_0/(2h)$. Второе краевое условие — равенство касательных составляющих $\vec{E}$: при $x = h$ имеем $J/\gamma = -\partial U/\partial z$, $J/\gamma = -C_2 h$ и, следовательно, $C_2 = -J/(\gamma h)$.

Таким образом, потенциал поля

$$U(x, z) = \frac{U_0}{2h} x - \frac{J}{\gamma h} xz.$$

Составляющие напряженности $E_x = -\partial U/\partial x = -U_0/(2h) + Jz/(\gamma h)$ (поперечное поле) и $E_z = -\partial U/\partial z = Jx/(\gamma h)$ (продольное поле). Векторные линии $\vec{E}$ показаны на рис. 5.62*б*.

Магнитное поле при условии бесконечных пластин однородное и имеет одну составляющую $H_y = -Ja$.

Вектор Пойнтинга $\vec{\Pi} = [\vec{E}\vec{H}] = \Pi_x \vec{e}_x + \Pi_z \vec{e}_z$, где $\Pi_x = -E_z H_y$ и $\Pi_z = -E_x H_y$ характеризуют плотности потоков энергии в пластины и вдоль пластин.

Продольная составляющая напряженности максимальна на поверхности пластин. При $|x| = h$ и $z = 0$ отношение $|E_z/E_x| = 2Jh/(U_0\gamma) = 1{,}42 \cdot 10^{-5}$. Продольное поле существенно слабее; во многих случаях (передающие линии) им можно пренебречь. Поле в диэлектрике, окружающем проводники с токами, мало отличается от поля электростатического.

5.4.3 (м). При «нулевом» сопротивлении жилы и оболочки ($\gamma \to \infty$) продольным полем E_z можно пренебречь (см. задачу 5.4.2 (р)). Тогда поле E_r в изоляции рассчитывается как электростатическое. Напряженность магнитного поля H_φ находится по закону полного тока.

Вектор $\vec{\Pi}$ указывает направление движения электромагнитной энергии (от источника к нагрузке); он имеет одну составляющую

$$\Pi_z = \frac{U_0 i}{2\pi r^2 \ln\dfrac{r_2}{r_1}}.$$

Поток $\vec{\Pi}$ через площадь S сечения изоляции равен передаваемой по кабелю мощности:

$$\int_S \vec{\Pi} d\vec{S} = \int_S \Pi_z dS = U_0 i.$$

5.4.4 (м). Магнитное поле находится как сумма полей двух длинных проводов. В точках M_1 и M_2 напряженность поля $H_y = \dfrac{i}{2\pi}\left(\dfrac{1}{h+x} + \dfrac{1}{h-x}\right)$; в точке M_3 имеем $H_y = \dfrac{ih}{\pi(h^2 + y^2)}$.

Выражения для напряженности электрического поля можно получить методом наложения, суммируя поля двух разноименно заряженных проводов, или просто путем замены $i \to \tau/\varepsilon_0$. Линейная плотность заряда $\tau = CU_0$, где C — погонная емкость линии (см. задачу 5.1.34 (м)).

Вектор $\vec{\Pi}$ имеет единственную составляющую $\Pi_z = E_x H_y > 0$. Энергия от источника к нагрузке переносится в пространстве вдоль проводов («полеводов»). В точках M_1, M_2 и M_3

$$\Pi_{z(1,2)} = \frac{U_0 i}{4\pi \ln \dfrac{2h}{r_0}} \left(\frac{1}{h+x} + \frac{1}{h-x} \right)^2; \quad \Pi_{z(3)} = \frac{U_0 i h^2}{\pi (h^2 + y^2)^2 \ln \dfrac{2h}{r_0}}.$$

Поток вектора $\vec{\Pi}$ через плоскость xy равен мощности линии $U_0 i$.

5.4.5 (м). Подобная задача обсуждается в [1, с. 463–465; 487]. Приняв, что нижняя пластина заряжена положительно, получим

$$E_z = \frac{U_0}{h}(1 - e^{-t/\tau}); \quad J_z^{\text{см}} = \frac{\varepsilon U_0}{h\tau} e^{-t/\tau}; \quad H_\varphi(r,t) = \frac{\varepsilon U_0}{2h\tau} e^{-t/\tau};$$

$$\Pi_r(r,t) = -\frac{\varepsilon U_0^2 r}{2h^2 \tau}(1 - e^{-t/\tau}) e^{-t/\tau}; \quad P_S(t) = \Pi_r(r_0,t) \cdot 2\pi r_0 h;$$

$$W = \int_0^\infty | P_S | \, dt = \frac{U_0}{2} \cdot \frac{\varepsilon \pi r_0^2}{h} = \frac{C U_0^2}{2},$$

где C — емкость плоского конденсатора.

5.4.6 (р). Магнитное поле в длинной катушке является однородным и направлено вдоль оси (см. задачу 5.3.3 (м)): $B_z(t) = \mu_0 n i(t) = \mu_0 n I_m \cos\omega t = B_m \cos\omega t$, где B_m — амплитуда магнитной индукции. Вихревое электрическое поле имеет цилиндрическую симметрию; векторные линии $\vec{E}$ — концентрические окружности. Для определения напряженности можно использовать второе уравнение Максвелла в интегральной форме [1, с. 467–468]:

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi_S}{\partial t}.$$

Если выбрать контур l совпадающим с векторной линией радиуса r, получим простое алгебраическое уравнение $E_\varphi \cdot 2\pi r = -\partial \Phi_S / \partial t$. Магнитный поток через площадь контура $\Phi_S(r, t) = B_z(t) \pi r^2$ и, следовательно,

$$E_\varphi(r,t) = -\frac{\partial B_z(t)}{\partial t} \cdot \frac{r}{2}.$$

Формула справедлива при любой временной зависимости $B_z(t)$ (см. пример 3 в [1, с. 469]).

В данной задаче

$$E_\varphi(r,t) = \frac{\omega B_m r}{2} \sin\omega t = E_m(r) \sin\omega t.$$

Вихревое электрическое поле (в отличие от магнитного) не является однородным. Амплитуда $E_m(r) = \omega B_m r/2 = \mu_0 n I_m \omega r/2$ линейно растет вдоль r; на оси $E_m(0) = 0$.

Вектор Пойнтинга имеет только радиальную составляющую $\Pi_r(r,\ t) = E_\varphi H_z = E_m H_m \sin\omega t \cdot \cos\omega t = 0{,}5 E_m H_m \sin 2\omega t$. В течение четверти периода ($\Pi_r < 0$) энергия запасается в объеме катушки; в последующую четверть ($\Pi_r > 0$) — уходит. Такая же временная зависимость мгновенной мощности $p_L(t)$ наблюдается в индуктивном элементе цепи.

Напряжение между точками 1 и 2

$$u_{1,2} = \int_l \vec{E} d\vec{l}$$

в вихревом поле зависит от пути интегрирования. Для проводника в форме полуокружности $(\widehat{\vec{E}d\vec{l}} = 0)$ получим $u_{1,2} = E_m(a)\pi a \sin\omega t$; для прямого проводника $(\widehat{\vec{E}d\vec{l}} = \pi/2)$ напряжение $u_{1,2} = 0$.

Пусть сердечник катушки — стеклянная трубка, заполненная инертным газом. Если свечение газа происходит при напряженности E_c, то прежде всего оно начнется вблизи витков при $E_m(r_0) = E_c$. Рост амплитуды тока I_m и частоты ω может привести к образованию зоны свечения шириной $(r_0 - r_c)$, где $r_c = 2E_c/(\mu_0 n I_m \omega) < r_0$. Для неона при низком давлении $E_c = 20$ В/см.

5.4.7 (м). Внутри бесконечно длинного стержня $\vec{H} = 0$, а $\vec{B} = \vec{M}$ (см. задачу 5.3.46 (р)); вне стержня $\vec{B} = 0$. Поэтому, как показано в решении задачи 5.4.6 (р), при $r \le r_0$

$$E_\varphi = -\frac{\partial M_z(t)}{\partial t}\frac{r}{2} = \frac{M_0 r}{2\tau} e^{-t/\tau}.$$

При $r \ge r_0$ магнитный поток $\Phi_S(t) = M_z(t)\pi r_0^2$ и

$$E_\varphi = -\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial \Phi_S}{\partial t} = -\frac{r_0^2}{2r}\cdot\frac{\partial M_z}{\partial t} = \frac{M_0 r_0^2}{2\tau r} e^{-t/\tau}.$$

Допущение $\gamma = 0$ позволяет исключить из рассмотрения токи проводимости (вихревые токи).

5.4.8 (р). Магнитная индукция в точке наблюдения $M(x)$ имеет одну составляющую

$$B_y(x,t) = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi}\left(\frac{1}{h+x} + \frac{1}{h-x}\right) = \frac{\mu_0 I_m}{2\pi}\left(\frac{1}{h+x} + \frac{1}{h-x}\right) = B_m(x)\cos\omega t.$$

Проектируя второе уравнение Максвелла $\operatorname{rot}\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$ на ось y, имеем при независимости поля от z

$$\operatorname{rot}_y \vec{E} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) = -\frac{\partial B_y}{\partial t};\ \ \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} = -\omega B_m(x)\sin\omega t.$$

Выполнив интегрирование, получим

$$E_z(x,t) = \frac{\mu_0 I_m \omega}{2\pi}\ln\frac{h-x}{h+x}\sin\omega t.$$

Постоянная интегрирования равна нулю, так как в силу симметрии $E_z(0,\ t) = 0$. Векторные линии $\vec{E}$ (см. рис. 5.66*б*) замыкаются в бесконечности.

При другом подходе к определению вихревого поля используется соотношение $\vec{E} = -\partial\vec{A}/\partial t$. Векторный потенциал двухпроводной линии с тонкими проводами в точке $M(x)$ [1, с. 556]:

$$A_z(x,t) = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\ln\frac{h-x}{h+x} = \frac{\mu_0 I_m}{2\pi}\ln\frac{h-x}{h+x}\cos\omega t.$$

Выражение для $E_z = -\partial A_z/\partial t$ совпадает с полученным выше из уравнения Максвелла.

Амплитуда напряженности вихревого поля

$$E_m(x) = \frac{\mu_0 I_m \omega}{2\pi}\left|\ln\frac{h-x}{h+x}\right|$$

максимальна у поверхности проводов при $x = \pm(h - r_0)$.

Амплитуда напряжения между концами проводника $U_{m1,2} = E_m(a)\cdot b$ пропорциональна длине его продольного участка. На поперечных участках $\vec{E} \perp d\vec{l}$; их вклад в напряжение равен нулю.

Полная напряженность поля имеет потенциальную и вихревую составляющие: $\vec{E} = -\mathrm{grad}U - \partial\vec{A}/\partial t$. Потенциальная (квазистатическая) составляющая связана с зарядами проводов и может быть найдена, если задано напряжение линии.

Численное решение: $E_m(a) = 0{,}4$ В/м; $U_{m1,2} = 1{,}2$ В.

5.4.9 (м). Векторные линии $\vec{E}$ — концентрические окружности. Из второго уравнения Максвелла в интегральной форме следует (см. задачу 5.4.6 (р))

$$E_\varphi(r,t) = -\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial\Phi_S(r,t)}{\partial t},$$

где $\Phi_S(r, t)$ — магнитный поток, охватываемый векторной линией $\vec{E}$ радиуса r.

При $r < r_0$ имеем $\Phi_S(r, t) = B_0\pi r^2\cos\omega t$, $E_\varphi(r, t) = \omega B_0 r\sin\omega t/2$, амплитуда $E_m(r) = \omega B_0 r/2$.

При $r > r_0$ магнитный поток имеет две составляющие $\Phi_S = \Phi_{S1} + \Phi_{S2}$; здесь $S_1 = \pi r_0^2$ — площадь круга, где $B_m(r) = B_0$, а $S_2 = \pi(r^2 - r_0^2)$ — площадь кольца, где $B_m(r) = B_0(r_0/r)^n$. Проведя интегрирование для определения Φ_{S2}, получим

$$E_m(r) = \frac{\omega B_0 r_0^2}{2(n-2)r}\left[n - 2\left(\frac{r_0}{r}\right)^{n-2}\right].$$

Из условия $\partial E_m(r)/\partial r = 0$ следует, что амплитуда электрического поля достигает максимума при

$$r_{\max} = r_0\left[\frac{2(n-1)}{n}\right]^{\frac{1}{n-2}}.$$

На рис. 5.67*б* в условии задачи показана качественная зависимость $E_m(r)$.

При расчете энергии заряда для простоты можно положить, что время его обращения $\Delta t \ll T = 1/f$ и, следовательно,

$$W = 2\pi r_{\max} q E_m(r_{\max})\sin\omega t.$$

Численное решение: $r_{\max} = 36$ см, $E_m(r_{\max}) = 54{,}5$ В/м, $W = 72{,}7$ эВ.

5.4.10 (м). Выражения для расчета амплитуды:

$$E_{m1} = \frac{\omega B_{m1} r}{2}, \quad (r < a);$$

$$E_{m2} = \frac{\omega}{2r}[B_{m1}a^2 + B_{m2}(r^2 - a^2)], \quad (a < r < b);$$

$$E_{m3} = \frac{\omega}{2r}[B_{m1}a^2 + B_{m2}(b^2 - a^2)], \quad (r > b).$$

Амплитуда E_{m2} минимальна при $r = a\sqrt{(B_{m1}/B_{m2}) - 1}$. Основные точки для построения зависимости $E_m(r)$ таковы: $E_m(0) = 0$; $E_m(a) = E_m(b) = 0{,}5a = 0{,}5$; $r = 2a = 2$; $E_m(2a) = 0{,}4a = 0{,}4$.

5.4.11 (р). В соответствии с законом электромагнитной индукции [1, с. 468] $e = -\partial\Phi_S/\partial t$, где Φ_S — магнитный поток, пронизывающий контур. Введем обозначения $\vec{S} = S\vec{n}$, где $\vec{n}$ — единичная нормаль к плоскости контура, и угол $\alpha = \omega_0 t$. Теперь с учетом однородности поля $\vec{B}$ магнитный поток $\Phi_S = \vec{B}\vec{S} = BS\cos\alpha = B_m S\cos\omega t \cdot \cos\omega_0 t$, а электродвижущая сила $e = B_m S[\omega\sin\omega t \cdot \cos\omega_0 t + \omega_0\cos\omega t \cdot \sin\omega_0 t]$. При совпадении частоты изменения индукции с частотой вращения контура ($\omega = \omega_0$) имеем $e = \omega B_m S\sin 2\omega t$. Частота ЭДС равна 2ω; амплитуда $e_m = \omega B_m S$ соответствует условиям, когда вектор $\vec{B}$ перпендикулярен плоскости неподвижного контура.

5.4.12 (р). При условии «больших расстояний» $h \gg r_1$ векторный потенциал поля первой катушки [1, с. 558] $A_\varphi = mn_1\sin\theta/(4\pi r^2)$, где $m = \mu_0 iS = \mu_0 i\pi r_1^2$ — магнитный момент одного витка. Магнитный поток через площадь второй катушки [1, с. 567] $\Phi_S = A_\varphi 2\pi r_2$, потокосцепление $\psi_S = n_2\Phi_S = \mu_0\pi i n_1 n_2 r_1^2 r_2^2 (h^2 + r_2^2)^{-3/2}/2$, а искомое напряжение $u(t) = -\partial\psi_S/\partial t$.

В первом случае при $i(t) = I_m\cos\omega t$ амплитуда напряжения

$$U_m = \mu_0\pi\omega I_m n_1 n_2 r_1^2 r_2^2 (h^2 + r_2^2)^{-3/2}/2.$$

Во втором случае $\psi_S = Ci[(h + a\sin\omega t)^2 + r_2^2]^{-3/2}$, где для упрощения записи введена константа $C = \mu_0\pi n_1 n_2 r_1^2 r_2^2/2$. Напряжение на катушке

$$u(t) = -3Ci\omega a h_0 (h_0^2 + r_2^2)^{-5/2}\cos\omega t.$$

В третьем случае при условии малости второй катушки ($r_2 \ll h$) потокосцепление $\psi_S = Cih^{-3}$. Если $i(t) = I_m\cos\omega t$, амплитуда напряжения $U_m = C\omega I_m h^{-3}$. Если $i = \text{const}$, то $u(t) = -3Ci\omega a(h + a\sin\omega t)^{-4}\cos\omega t$.

Выражение для ψ_S при $r_2 \ll h$ легко получить, рассматривая поле первой катушки вблизи оси z как поле магнитного диполя [1, с. 558]: $H_z = 2m/(4\pi\mu_0 h^3)$, $\psi_S = \mu_0 H_z \pi r_2^2$.

5.4.13 (м). Так как $h \gg r_1$, магнитное поле контура определяется как поле диполя, причем на оси z имеем $H_\theta = 0$, $H_r = H_z$. Записывая выражение для магнитного потока при условии $r_2 \ll h$, можно считать, что в области наложения контура $H_z = \text{const}$. Кроме того, при записи нужно учесть угол $\alpha = \omega t$ между нормалью к площади контура и осью z. Амплитуда ЭДС $e_m = \mu_0\omega i n S_1 S_2/(2\pi h^3)$, где S_1 и S_2 — площади контуров.

5.4.14 (м). Провода находятся в вихревом электрическом поле $\vec{E}$, причем по закону электромагнитной индукции в любом проводящем контуре циркуляция $\vec{E}$ равна электродвижущей силе $e(t)$.

Запишем уравнения Кирхгофа в первом варианте (см. рис. 5.70*а*): $R_1 i_1 + R_2 i_2 = e$ (контур $abca$), $R_3 i_3 + R_2 i_2 = 0$ (контур $adca$), $i_1 - i_2 + i_3 = 0$ (узел a).

При втором варианте расположения проводов (см. рис. 5.70*б*): $R_1 i_1 + R_2 i_2 = e$ (контур $abca$), $R_1 i_1 - R_3 i_3 = 0$ (контур $abcda$, не охватывающий магнитный поток), $i_1 - i_2 + i_3 = 0$ (узел a).

Результат решения уравнений: $u_{1,3} = -R_2 R_3 e/D$, $u_{3,2} = R_1 R_3 e/D$, где $D = R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3$. Таким образом, показания вольтметра, подключенного к точкам a и c, зависят от расположения подводящих проводов.

Если магнитная индукция линейно растет, то $\partial \vec{B}/\partial t, \vec{E}$, e и u_3 не зависят от времени, а напряжения $u_{3,1}$ и $u_{3,2}$ имеют разную полярность.

5.4.15 (м). При перемещении в магнитном поле возникает вихревое электрическое поле $\vec{E} = [\vec{v}\vec{B}]$ («поле движения») и, соответственно, напряжение (ЭДС) между точками 1 и 2. Ток резистора $i = Bvh/R$. При $B = 0{,}1$ Тл, $v = 1$ м/с, $h = 1$ м, $R = 10$ Ом ток $i = 10^{-2}$ А.

5.4.16 (м). Напряженность электрического поля $E_r = vB$, где $v = v(r)$ — линейная скорость. Искомое напряжение $u = \omega B r_0^2/2 = 0{,}94$ В, ток $i = u/R = 94$м А.

5.4.17 (р). При выбранных направлениях векторных функций, а также u_C и i, можем записать уравнение связи $D = \varepsilon_0 E + P_0$ и граничное условие $D = \sigma$ [1, с. 456, 492]. Исходя из принципа непрерывности полного тока [1, с. 462], имеем $i = -i^{\text{см}} = -SJ^{\text{см}} = -S\partial D/\partial t = -S\partial\sigma/\partial t$. Подстановка этих соотношений в равенство $Eh = u_C = Ri$ приводит к уравнению

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \frac{h}{\varepsilon_0 RS}\sigma = \frac{h}{\varepsilon_0 RS}P_0.$$

Решение уравнения — сумма свободной и установившейся (вынужденной) составляющих $\sigma(t) = Ae^{-t/\tau} + \sigma(\infty)$. Здесь $\tau = \varepsilon_0 RS/h$ — постоянная времени, а $\sigma(\infty) = P_0$, что следует из дифференциального уравнения при $\partial/\partial t = 0$.

При начальном условии $\sigma(0) = 0$ константа $A = -P_0$ и, следовательно, $\sigma(t) = P_0(1 - e^{-t/\tau})$.

Теперь легко найти напряженность поля $E(t) = (\sigma - P_0)/\varepsilon_0 = -P_0 e^{-t/\tau}/\varepsilon_0$, а затем напряжение $u_C = Eh$ и ток $i = u_C/R$. Зависимости $\sigma(t)$ и $E(t)$ показаны на рис. 5.73*б*.

Векторы поляризации и напряженности поля в пластине направлены встречно: электрическое поле стремится деполяризовать диэлектрик. Начальное значение $E(0) = -P_0/\varepsilon$; это поле наблюдается в пластине при $t < 0$ как поле двух заряженных плоскостей при $|\sigma_{\text{св}}| = P_0$. В установившемся режиме $E(\infty) = 0$, поскольку $\sigma = P_0 = -\sigma_{\text{св}}$ и, следовательно, суммарный заряд (индуцированный свободный и связанный) равен нулю. Ток резистора — экспоненциальный импульс длительностью 3τ.

Отметим, что в постановке задачи возникновение поляризации $\vec{P}_0 \cdot \delta_1(t)$ можно связать с механической деформацией пластины из пьезоэлектрика.

5.4.18 (м). Напряженность поля в пластине $\vec{E}_1$, в воздухе — $\vec{E}_2$, причем направления совпадают. Из граничных условий следует равенство $D_1 = D_2$, так как свободный заряд на границе пластина — воздух отсутствует [1, с. 481]. Далее нужно учесть, что $D_1 = D_2 = \sigma$ и $E_1 h_1 + E_2 h_2 = u_C = Ri$.

Результаты решения:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \frac{h}{\varepsilon_0 RS}\sigma = \frac{h_1}{\varepsilon_0 RS}P_0;\ \ \sigma(t) = \frac{h_1}{h}(1 - e^{-t/\pi})P_0,$$

где $\tau = \dfrac{\varepsilon_0 S}{h} R = C_0 R$, а C_0 — емкость воздушного конденсатора;

$$E_1(t) = -\frac{1}{\varepsilon_0 h}(h_2 + h_1 e^{-t/\tau})P_0; \quad E_2(t) = -\frac{h_1}{\varepsilon_0 h}(1 - e^{-t/\tau})P_0;$$

$$u_C(t) = -\frac{h_1}{\varepsilon_0} P_0 e^{-t/\tau}; \quad i = -\frac{h_1}{\varepsilon_0 R} P_0 e^{-t/\tau}.$$

Анализ решения: $\sigma(\infty) = P_0 h_1/h$; $E_1(0) = -P_0/\varepsilon_0$; $E_1(\infty) = -P_0 h_2/(\varepsilon_0 h)$; $E_2(\infty) = P_0 h_1/(\varepsilon_0 h)$. Действительные направления полей в диэлектрике и воздухе противоположны; поэтому $u_c(\infty) = E_1(\infty)h_1 + E_2(\infty)h_2 = 0$. Ток смещения течет от первого электрода ко второму ($J^{\text{см}} = \varepsilon_0 \partial E_2/\partial t$), а ток проводимости — от второго к первому через резистор.

5.4.19 (р). Процесс накопления и рассеивания свободного заряда является инерционным [1, с. 489]. Поэтому при $t = 0$ свободный заряд на границе слоев отсутствует ($\sigma(0) = 0$) и из граничных условий следует $D_1(0) = D_2(0)$ и $\varepsilon_1 E_1(0) = \varepsilon_2 E_2(0)$. Так как напряжение конденсатора $U_0 = E_1(0)h_1 + E_2(0)h_2$, начальные значения напряженностей $E_1(0) = U_0\varepsilon_2/(\varepsilon_1 h_2 + \varepsilon_2 h_1)$; $E_2(0) = U_0\varepsilon_1/(\varepsilon_1 h_2 + \varepsilon_2 h_1)$.

Чтобы получить дифференциальное уравнение для $E_1(t)$, воспользуемся соотношениями $E_1 h_1 + E_2 h_2 = U_0$ и $\gamma_1 E_1 + \varepsilon_1 \partial E_1/\partial t = \gamma_2 E_2 + \varepsilon_2 \partial E_2/\partial t$, причем второе из них выражает принцип непрерывности полного тока [1, с. 482]. Отсюда следует

$$\frac{\partial E_1}{\partial t} + \frac{1}{\tau} E_1 = \frac{U_0 \gamma_2}{\varepsilon_1 h_2 + \varepsilon_2 h_1},$$

где $\tau = \dfrac{\varepsilon_1 h_2 + \varepsilon_2 h_1}{\gamma_1 h_2 + \gamma_2 h_1}$.

Решение уравнения — сумма свободной и установившейся (вынужденной) составляющих $E_1(t) = Ae^{-t/\tau} + E_1(\infty)$, где $E_1(\infty) = U_0\gamma_2/(\gamma_1 h_2 + \gamma_2 h_1)$, а константа $A = E_1(0) - E_1(\infty)$. Окончательно получаем

$$E_1(t) = \left[\frac{\gamma_2}{\gamma_1 h_2 + \gamma_2 h_1} + \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 h_2 + \varepsilon_2 h_1} - \frac{\gamma_2}{\gamma_1 h_2 + \gamma_2 h_1}\right) e^{-t/\tau}\right] U_0.$$

Дифференциальное уравнение и его решение для $E_2(t)$ легко получить путем перестановки индексов $1 \rightleftarrows 2$.

Отношение начальных значений $E_1(0)/E_2(0) = \varepsilon_2/\varepsilon_1$, а отношение $E_1(\infty)/E_2(\infty) = \gamma_2/\gamma_1$. Таким образом, в начале переходного процесса $\vec{E}$ распределяется по «ε», а в установившемся режиме — по «γ». В процессе происходит перераспределение поля в слоях. Если $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ и $\gamma_1 < \gamma_2$, то $E_1(t)$ возрастает, а $E_2(t)$ убывает.

Перераспределение поля связано с накоплением свободного заряда на границе раздела слоев. В установившемся режиме [1, с. 541]

$$\sigma(\infty) = D_2(\infty) - D_1(\infty) = \varepsilon_2 E_2(\infty) - \varepsilon_1 E_1(\infty) = \frac{(\varepsilon_2\gamma_1 - \varepsilon_1\gamma_2)}{\gamma_1 h_2 + \gamma_2 h_1} U_0.$$

Если $\varepsilon_1/\gamma_1 = \varepsilon_2/\gamma_2$, граница не заряжена ($\sigma = 0$), причем $E_1(0) = E_1(\infty)$, $E_2(0) = E_2(\infty)$ и, следовательно, переходного процесса нет.

По условию задачи длительность переходного процесса при $h_1 = h_2$ равна $3\tau = 3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/(\gamma_1 + \gamma_2) \approx 265c$.

5.4.20 (м). Процесс образования системы объемных зарядов является инерционным. Поэтому при $t = 0$: $\rho = 0$, $\operatorname{div}\vec{D} = 0$, $D = \text{const}$, $E = D/\varepsilon$. Напряжение конденсатора $U_0 = \int_0^h E dx = \int_0^h \frac{D}{\varepsilon} dx$, откуда следует $D = \frac{U_0 a}{\ln\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$.

Поляризация $P = D - \varepsilon_0 E$; объемная плотность связанного заряда

$$\rho_{\text{св}} = -\operatorname{div}\vec{P} = -\partial P/\partial x = -\varepsilon_0 a D/(\varepsilon_1 - ax)^2.$$

В установившемся режиме ($t \to \infty$): $J^{\text{см}} = 0, \operatorname{div}\vec{J} = 0$, $J = \text{const}$, $E = J/\gamma, J = \gamma U_0/h$. В этом случае $D = \varepsilon E = (\varepsilon_1 - ax)J/\gamma$, плотность свободного заряда $\rho = \operatorname{div}\vec{D} = -aJ/\gamma$, плотность связанного заряда $\rho_{\text{св}} = -\partial(\varepsilon E)/\partial x = aJ/\gamma = -\rho$.

5.4.21 (р). Решение проведем в частотной области. Пренебрегая краевым эффектом ($h \ll r_0$), запишем комплексные амплитуды поля: электрическое поле $\dot{E}_m = \dot{U}_m/h = U_m/h$; полный ток $\dot{J}^{\text{п}}_m = \gamma\dot{E}_m + j\omega\varepsilon\dot{E}_m = (\gamma + j\omega\varepsilon)\dot{E}_m$; магнитное поле $\dot{H}_m = \dot{J}^{\text{п}}_m r/2$. Комплексный вектор Пойнтинга $\dot{\Pi} = \dot{E}_m \overset{*}{H}_m/2$ на боковой поверхности конденсатора ($r = r_0$) принимает значение $\dot{\Pi} = (\gamma - j\omega\varepsilon)U_m^2 r_0/(4h^2)$. Комплексная мощность, поступающая через эту поверхность, $\dot{P}_S = \Pi 2\pi r_0 h = (\gamma - j\omega\varepsilon)U_m^2 S/(2h)$, где $S = \pi r_0^2$ — площадь пластины. Мощность тепловых потерь $P = \operatorname{Re}\dot{P}_S = \gamma U_m^2 S/(2h)$.

Для определения проводимости Y конденсатора воспользуемся соотношением $\dot{P}_S = \overset{*}{Y} U_m^2/2$, откуда следует $Y = 2\overset{*}{P}_S/U_m^2 = (\gamma + j\omega\varepsilon)S/h = g + jb$.

Вещественная часть $g = \gamma S/h$ и мнимая часть $b = \omega\varepsilon S/h$ являются параметрами схемы замещения — параллельного RC-контура. На векторной диаграмме токов (см. рис. 5.74*б*) обозначен угол потерь δ.

Второй вариант решения, исключающий рассмотрение энергетических процессов, основан на законе Ома:

$$\dot{E}_m = \dot{U}_m/h; \dot{J}^{\text{п}}_m = (\gamma + j\omega\varepsilon)\dot{E}_m; \dot{I}_m = \dot{J}^{\text{п}}_m S; Y = \dot{I}_m/\dot{U}_m.$$

5.4.22 (м). Соотношения, записанные в решении задачи 5.4.19 (р) и выражающие напряжение и принцип непрерывности полного тока через $E_1(t)$ и $E_2(t)$, нужно записать в комплексной форме. Решения полученной системы уравнений:

$$\dot{E}_{m1} = \frac{(\gamma_2 + j\omega\varepsilon_2)\dot{U}_m}{(\gamma_1 + j\omega\varepsilon_1)h_2 + (\gamma_2 + j\omega\varepsilon_2)h_1};$$

$$\dot{E}_{m2} = \frac{(\gamma_1 + j\omega\varepsilon_1)\dot{U}_m}{(\gamma_1 + j\omega\varepsilon_1)h_2 + (\gamma_2 + j\omega\varepsilon_2)h_1}.$$

Если диэлектрики слоев идеальные ($\gamma_1 = \gamma_2 = 0$), то $\dot{E}_{m1}/\dot{E}_{m2} = \varepsilon_2/\varepsilon_1$. Если конденсатор долго находится под постоянным напряжением ($\omega \to 0$), то устанавливается распределение поля по проводимостям: $E_{m1}/E_{m2} = \gamma_2/\gamma_1$.

5.4.23 (м). Комплексная амплитуда плотности полного тока

$$\dot{J}_m^{\text{п}} = \gamma\dot{E}_m + j\omega\varepsilon\dot{E}_m = (\gamma + j\omega\varepsilon)\dot{E}_m = j\omega\dot{\varepsilon}\dot{E}_m,$$

где $\dot{\varepsilon} = \varepsilon - j\gamma/\omega$ — комплексная диэлектрическая проницаемость. Поэтому искомые амплитуды $\dot{E}_{m1} = \dot{\varepsilon}_2\dot{U}_m/(\dot{\varepsilon}_1 h_1 + \dot{\varepsilon}_2 h_2)$; $\dot{E}_{m2} = \dot{\varepsilon}_1\dot{E}_{m1}/\dot{\varepsilon}_2$.

Эти выражения легко получить после решения задачи при условии, что диэлектрики идеальные ($\gamma_1 = \gamma_2 = 0$); достаточно только в полученных формулах произвести замену $\varepsilon_1 \to \dot{\varepsilon}_1, \varepsilon_2 \to \dot{\varepsilon}_2$.

5.4.24 (р). Пусть $\dot{I}_m$ — комплексная амплитуда полного тока утечки в изоляции кабеля на единицу его длины. Тогда комплексная амплитуда плотности полного тока ($r_1 < r < r_2$) будет $\dot{J}_m^{\text{п}} = \dot{I}_m/(2\pi r)$, для напряженностей поля имеем

$$\dot{E}_{m1} = \dot{J}_m^{\text{п}}/(j\omega\dot{\varepsilon}_1) = -j\dot{I}_m/(2\pi\omega\dot{\varepsilon}_1 r), \dot{E}_{m2} = -j\dot{I}_m/(2\pi\omega\dot{\varepsilon}_2 r).$$

Для того чтобы выразить $\dot{I}_m$ через $\dot{U}_m$, воспользуемся определением

$$\dot{U}_m = \int_{r_1}^{r_2}\dot{E}_{m1}dr + \int_{r_2}^{r_3}\dot{E}_{m2}dr.$$

Окончательные результаты

$$\dot{E}_{m1} = \frac{\dot{U}_m}{r\left(\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{\dot{\varepsilon}_1}{\dot{\varepsilon}_2}\ln\frac{r_3}{r_2}\right)}, \quad \dot{E}_{m2} = \frac{\dot{U}_m}{r\left(\frac{\dot{\varepsilon}_2}{\dot{\varepsilon}_1}\ln\frac{r_2}{r_1} + \ln\frac{r_3}{r_2}\right)}$$

полезно сравнить с полученными для кабеля при идеальной изоляции в статическом режиме (см. задачу 5.1.22 (м)).

Численное решение:

$$\dot{\varepsilon}_1 = (8{,}85 - j3{,}18)\cdot 10^{-11}\ \Phi/\text{м}, \quad \dot{\varepsilon}_2 = 1{,}67\cdot 10^{-11}\ \Phi/\text{м},$$
$$\dot{E}_{m1}(r_1) = (166 + j5)\cdot 10^3\ \text{В/м}, \quad \dot{E}_{m2}(r_2) = (560 - j28)\cdot 10^3\ \text{В/м}.$$

5.4.25 (р). Для определения напряженности электрического поля в шаре используется формула электростатики [1, с. 527] с заменой ε_2 на $\dot{\varepsilon}_2$:

$$\dot{E}_{m2} = 3\varepsilon_1 E_{m1}/(2\varepsilon_1 + \dot{\varepsilon}_2) = E_{m2}e^{j\alpha_2}.$$

Комплексная проницаемость $\dot{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2 - j\gamma/\omega = \varepsilon_2(1 - j\gamma/(\varepsilon_2\omega)) = \varepsilon_2(1 - j\,\text{tg}\,\delta)$, где $\text{tg}\delta = \gamma/(\varepsilon_2\omega)$ — тангенс угла потерь (см. рис. 5.74*б*).

Плотность мощности тепловых потерь (средняя за период)

$$p = \gamma E_{m2}^2/2 = \varepsilon_2\omega\,\text{tg}\,\delta E_{m2}^2/2$$

и, поскольку поле E_2 — однородное, мощность потерь в шаре $P = 4\pi r_0^3 p/3$.

5.4.26 (р). При условии квазистационарности магнитное поле в шаре [1, с. 563] $H_2(t) = 3\mu_1 H_{m1}\cos\omega t/(2\mu_1 + \mu_2) = H_{m2}\cos\omega t$. Напряженность вихревого электрического поля на векторной линии радиуса ρ (см. рис. 5.76)

$$E(t) = -\frac{1}{2\pi\rho}\frac{\partial\Phi_S}{\partial t},$$

где магнитный поток $\Phi_S = \mu_2 H_2(t)\pi\rho^2$. Таким образом, $E(t) = \omega\mu_2 H_{m2}\rho\sin\omega t/2 = E_m\sin\omega t$.

Плотность тепловых потерь, связанных с вихревыми токами,

$$p = \gamma E_m^2/2 = \omega^2\gamma\mu_2^2 H_{m2}^2\rho^2/4.$$

Мощность потерь в шаре объемом V

$$P = \int_V p\,dV = A\int_V \rho^2\,dV,$$

где для упрощения записи введено обозначение $A = \omega^2\gamma\mu_2^2 H_{m2}^2/4$. Используя связь $\rho = r\sin\theta$ и формулу $dV = r^2 dr\sin\theta d\theta d\varphi$, получаем $P = 8\pi r_0^5 A/15$.

5.4.27 (р). Запишем изображение $P(t)$ по Лапласу: $P(s) = \varepsilon_0\chi[1/s - 1/(s + 1/\tau)]E_0 = \varepsilon_0\chi(s)E_0$. Отсюда находим операторную восприимчивость $\chi(s) = \chi/(1 + s\tau)$. Операторная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(s) = [1 + \chi(s)]\varepsilon_0 = [1 + \chi/(1 + s\tau)]\varepsilon_0$.

Для перехода в частотную область, проведя замену $s \to j\omega$, получим выражение для комплексной диэлектрической проницаемости

$$\dot\varepsilon(j\omega) = \left[1 + \frac{\chi}{1 + j\omega\tau}\right]\varepsilon_0 = \left[1 + \frac{\chi(1 - j\omega\tau)}{1 + (\omega\tau)^2}\right]\varepsilon_0 = \varepsilon_1(\omega) - j\varepsilon_2(\omega);$$

$$\mathrm{Re}\,\dot\varepsilon(j\omega) = \left[1 + \frac{\chi}{1 + (\omega\tau)^2}\right]\varepsilon_0;\quad \mathrm{Im}\,\dot\varepsilon(j\omega) = \frac{\omega\tau\chi}{1 + (\omega\tau)^2}.$$

Частотные зависимости показаны на рис. 5.77*б*. При низких частотах ($\omega \to 0$) проницаемость $\varepsilon_1 = (1 + \chi)\varepsilon_0$ совпадает со статическим значением; при $\omega \to \infty$ имеем $\varepsilon_1 \to \varepsilon_0$. Таким образом, запаздывание поляризации проявляется в уменьшении проницаемости с ростом частоты. Зависимость $\varepsilon_2(\omega)$ имеет резонансный характер — максимум при частоте $1/\tau$.

В диэлектрике с «мгновенной» поляризацией, ток смещения опережает по фазе напряженность поля на $\pi/2$ (см. рис. 5.74*б*): $\dot J_m^{\text{см}} = j\omega\varepsilon\dot E_m$. В данном случае

$$\dot J_m^{\text{см}} = j\omega\dot\varepsilon\dot E_m = j\omega(\varepsilon_1 - j\varepsilon_2)E_m = (\omega\varepsilon_2 - j\omega\varepsilon_1)\dot E_m.$$

Первое слагаемое — вещественная часть тока совпадает по фазе с напряженностью поля и определяет тепловые потери: плотность мощности $p = \omega\varepsilon_2 E_m^2/2$. Эти потери не связаны с проводимостью (диэлектрик идеальный); их можно объяснить «внутренним трением» при изменении поляризации. Тангенс угла потерь $\mathrm{tg}\delta = \varepsilon_2/\varepsilon_1$; если удельная проводимость $\gamma \neq 0$, то $\mathrm{tg}\delta = (\gamma + \omega\varepsilon_2)/(\omega\varepsilon_1)$.

5.4.28 (р). Напряженность поля $\dot E_m = \dot U_m/h = U_m/h$. Статическая восприимчивость $\chi = (\varepsilon - \varepsilon_0)/\varepsilon_0$; комплексная диэлектрическая проницаемость $\dot\varepsilon = \varepsilon_1 - j\varepsilon_2$ определяется по формулам, приведенным в решении задачи 5.4.27 (р). Далее используем основные соотношения теории [1, с. 454–456, 460, 478] применительно к гармоническому режиму с заменой: а) временных функций поля комплексными амплитудами; б) $\varepsilon \to \dot\varepsilon$; в) $\partial/\partial t \to j\omega$. При этом электрическое смещение $\dot D_m = \dot\varepsilon\dot E_m = \dot\sigma_m$, поляризация $P_m = (\dot\varepsilon - \varepsilon_0)\dot E_m = \dot\sigma_{m\text{св}}$, плотность тока смещения $\dot J_m^{\text{см}} = j\omega\dot D_m = j\omega\dot\varepsilon\dot E_m$.

Комплексную плотность мощности записываем аналогично комплексной мощности двухполюсника $\dot P_S = \dot U_m \dot I_m^*/2$; имеем

$$\dot{p}_S = \dot{E}_m \overset{*}{\dot{J}}{}_m^{\text{см}}/2 = \dot{E}_m(-j\omega\varepsilon \overset{*}{\overset{*}{\dot{E}}}_m)/2 = \omega E_m^2(\varepsilon_2 - j\varepsilon_1)/2;$$

плотность тепловых потерь $p = \operatorname{Re}\dot{p}_S = \omega\varepsilon_2 E_m^2/2$.

Численное решение:

$$\omega = 100\ 1/\text{с}, E_m = 2\cdot 10^4\ \text{В/м}, \text{с} = 6,$$
$$\dot{\varepsilon} = (4-j3)\varepsilon_0 = 5\varepsilon_0 e^{-j37^\circ}, \dot{D}_m = 10^5\varepsilon_0 e^{-j37^\circ}\ \text{Кл/м}^2,$$
$$\dot{P}_m = (3-j3)\varepsilon_0\dot{E}_m = 6\sqrt{2}\cdot 10^4\varepsilon_0 e^{-j45^\circ}\ \text{Кл/м}^2, \dot{J}_m^{\text{см}} = 10^7\varepsilon_0 e^{j53^\circ}\ \text{А/м}^2,$$
$$p = 6\varepsilon_0 10^{12}\ \text{Вт/м}^3.$$

5.4.29 (р). Из системы уравнений Максвелла [1, с. 475] в однородной среде при условии $\vec{J} \gg \vec{J}^{\text{см}}$ и $\rho = 0$ можно получить уравнение второго порядка $\Delta\vec{J} = \gamma\mu\partial\vec{J}/\partial t$. В гармоническом режиме в частотной области имеем $\Delta\dot{\vec{J}}_m = j\omega\mu\gamma\dot{\vec{J}}_m$ и, введя обозначение $\dot{k} = \sqrt{-j\omega\mu\gamma}$, получим $\Delta\dot{\vec{J}}_m + \dot{k}^2\dot{\vec{J}}_m = 0$.

В средней части тонкой длинной ленты ($\partial/\partial x = \partial/\partial z = 0$) ток имеет только одну составляющую $\dot{J}_{mz} = \dot{J}_m$, а уравнение принимает вид $\partial^2\dot{J}_m/\partial y^2 + k^2\dot{J}_m = 0$.

Решение уравнения $\dot{J}_m(y) = Ae^{-j\dot{k}y} + Be^{j\dot{k}y}$; при краевых условиях $\dot{J}_m(\pm a) = J_{m0}$ имеем $\dot{J}_m(y) = J_{m0}\cos(\dot{k}y)/\cos(\dot{k}a)$.

Ток ленты $\dot{I}_m$ — это поток $\dot{\vec{J}}_m$ через поперечное сечение ленты:

$$\dot{I}_m = \int_{-a}^{a}\dot{J}_m h dy = \frac{2J_{m0}h}{\dot{k}}\operatorname{tg}(\dot{k}a).$$

Напряжение на поверхности ленты между двумя сечениями на расстоянии l $\dot{U}_{m0} = E_{m0}l = J_{m0}/(\gamma l)$; следовательно, сопротивление участка ленты

$$Z = \frac{\dot{U}_{m0}}{\dot{I}_m} = \frac{\dot{k}l}{2\gamma h}\operatorname{ctg}(\dot{k}a) = r + jx.$$

Сопротивление зависит от частоты ω, а также двух параметров материала ленты γ и μ. Оно имеет индуктивный характер ($x > 0$); так проявляется внутренняя индуктивность проводника.

Выражение для коэффициента $\dot{k}$ можно преобразовать к виду $\dot{k} = (1-j)/\Delta$, где $\Delta = \sqrt{2/(\omega\mu\gamma)}$ — глубина проникновения. При резком поверхностном эффекте $\Delta \ll a$, $\operatorname{ctg}(\dot{k}a) \approx j$ и сопротивление $Z = \dfrac{l}{2\gamma h\Delta}(1+j) = r + jx$.

Схема замещения участка ленты — последовательная RL-цепь; так как $r = x$ разность фаз между напряжением и током $\varphi = \pi/4$.

При постоянном токе сопротивление $R = l/(\gamma S) = l/(2\gamma ah)$ и, следовательно, отношение сопротивлений $n = r/R = a/\Delta > 1$.

Численное решение: $\Delta = 0{,}66$ мм, $\Delta \gg a$ (эффект резкий), $n = 12{,}2$.

5.4.30 (м). На боковой поверхности $y = a$ напряженность магнитного поля находится по закону полного тока в интегральной форме; при условии $h \gg a$ имеем $\dot{H}_{mx} = -\dot{I}_m/(2h)$ (см. решение задачи 5.3.4 (р)). По закону Ома $\dot{E}_{mz} = J_{m0}/\gamma$. Выразив J_{m0} через $\dot{I}_m$, * находим единственную составляющую комплексного вектора Пойнтинга $\dot{\Pi}_{my} = \dot{E}_{mz} H_{mx}/2$, а затем — комплексную мощность, поступающую в ленту через боковую поверхность $S = hl$: получим $\dot{P}_S = \dot{k} l l_m^2 \operatorname{cth}(\dot{k}a)/(4\gamma h)$. Искомое сопротивление $Z = 2\dot{P}_S / I_m^2$.

5.4.31 (м). В ленте наблюдается магнитный поверхностный эффект. Уравнение поля $\Delta\dot{\bar{H}}_m + \dot{k}^2\dot{\bar{H}}_m = 0$ и его решение аналогичны полученным в задаче 5.4.29 (р): имеем $\dot{H}_{mz} = H_{m0}\cos(\dot{k}y)/\cos(\dot{k}a)$, где $\dot{k} = \sqrt{-j\omega\mu\gamma}$. Напряженность поля и магнитная индукция $\dot{B}_{mz} = \mu\dot{H}_{mz}$ максимальны на поверхности ленты. Среднее значение индукции

$$B_{mz}^{\text{ср}} = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} \mu\dot{H}_{mz}\,dy = \frac{\mu H_{m0}}{\dot{k}a}\operatorname{tg}(\dot{k}a),$$

а среднее (действующее) значение проницаемости

$$\dot{\mu} = \dot{B}_{mz}^{\text{ср}}/H_{m0} = \mu\operatorname{tg}(\dot{k}a)/\dot{k}a = (390 - j64)\ \text{Гн/м}.$$

5.4.32 (м). В известном магнитном поле $\dot{H}_{mz} = H_{m0}\cos(\dot{k}y)/\cos(\dot{k}a)$, где $\dot{k} = (1-j)/\Delta$, вихревое электрическое поле можно найти, используя уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot}\dot{\bar{E}}_m = -j\omega\mu\dot{\bar{H}}_m \quad \text{или} \quad \operatorname{rot}\dot{\bar{H}}_m = \gamma\dot{E}_m.$$

Во втором варианте $\dot{\bar{E}}_m = \operatorname{rot}\dot{\bar{H}}_m/\gamma$ и тогда

$$\dot{E}_{mx} = \frac{1}{\gamma}\cdot\frac{\partial\dot{H}_{mz}}{\partial y} = -\frac{\dot{k}}{\gamma}H_{m0}\frac{\sin(\dot{k}y)}{\cos(\dot{k}a)} = E_m(y)e^{j\alpha(y)}.$$

На оси ленты при $y = 0$ получим $\dot{E}_{mx} = 0; \dot{E}_{mx}(y) = -\dot{E}_{mx}(-y)$ — линии вихревого поля замкнуты; при $|y| = a$ амплитуда $E_m(a)$ принимает максимальное значение.

На боковой поверхности $y = a$ единственная составляющая комплексного вектора Пойнтинга $\dot{\Pi}_{my} = -\dot{E}_{mx}\overset{*}{H}_{mz}/2$. При этом поток комплексной мощности через площадку S этой поверхности $\dot{P}_S = \dot{k}SH_{m0}^2\operatorname{tg}(\dot{k}a)/2$. Мощность тепловых потерь на вихревые токи $P = 2\operatorname{Re}\dot{P}_S$.

При другом подходе к расчету мощности вначале находится амплитуда $E_m(y)$, затем плотность мощности тепловых потерь $p(y) = \gamma E_m^2/2$ и, наконец, выполняется интегрирование $p(y)$ по объему $V = 2aS$.

Для получения расчетных формул нужно использовать следующие преобразования:

$$\sin(\dot{k}y) = \sin[(1-j)y/\Delta] = \sin[(1-j)M] = \operatorname{ch}M\sin M - j\operatorname{sh}M\cos M = A + jB;$$
$$\cos(\dot{k}a) = \cos[(1-j)a/\Delta] = \cos[(1-j)N] = \operatorname{ch}N\cos N + j\operatorname{sh}N\sin N = C + jD.$$

В этом случае $E_m(y) = \dfrac{\sqrt{2}}{\gamma\Delta}H_{m0}\left(\dfrac{A^2+B^2}{C^2+D^2}\right)^{1/2}$; $\dot{P}_S = \dfrac{\dot{k}S}{2\gamma}H_{m0}\dfrac{A(a)+jB(a)}{C+jD}$.

5.4.33 (р). Глубина проникновения в случае металлического проводника

$$\Delta = 1/\left(\sqrt{\pi f \mu \gamma}\right) = 6{,}7 \cdot 10^{-2} \text{ мм}.$$

Поскольку радиус $r_0 = 10$ мм существенно больше глубины проникновения, поверхностный эффект — резкий. Можно считать, что ток сосредоточен в скин-слое толщиной Δ. Комплексное сопротивление отрезка провода $Z = (1 + j)l/(\gamma S) = (1 + j)l/(\gamma P\Delta)$, где $S = P\Delta$ — площадь сечения скин-слоя; $P = 2\pi r_0$ — периметр сечения провода. Активное и индуктивное сопротивления равны: $r = x = l/(\gamma P\Delta) = 4{,}16 \cdot 10^{-2}$ Ом. При постоянном токе сопротивление $R = l/(\gamma S)$, а внутренняя индуктивность $L = \mu l/(8\pi)$. Поэтому коэффициент увеличения сопротивления $n_R = r_0/(2\Delta) = 7{,}46$, а коэффициент уменьшения индуктивности $n_L = 2\Delta/r_0 = 0{,}134$.

5.4.34 (р). В поставленной краевой задаче выделяем три области. Уравнение поля в стенке экрана (область 2) $\Delta\dot{\vec{H}}_m + \dot{k}^2\dot{\vec{H}}_m = 0$, где $\dot{k} = \sqrt{-j\omega\mu\gamma}$. Вне экрана (область 1) и под экраном (область 3) в непроводящей среде ($\gamma = 0$) в квазистационарном приближении поле описывается уравнением $\Delta\dot{\vec{H}}_m = 0$. Полагая, что в средней части экрана $\partial/\partial x = \partial/\partial z = 0$ и вектор $\vec{H}$ имеет единственную составляющую вдоль оси z, получим уравнение $\partial^2\dot{H}_{mz}/\partial y^2 = 0$, решения которого в первой области $\dot{H}_{mz} = C_1 y + C_2$, а в третьей — $\dot{H}_{mz} = C_3 y + C_4$. Поскольку внешнее поле однородное, то $\dot{H}_{mz}$ при $y \to \infty$ остается конечным и равным H_0. Поэтому $C_1 = 0$, $\dot{H}_{mz} = H_0$ и, значит, на внешнее «приложенное» поле экран не влияет. Внутреннее поле $\dot{H}_{mz}(y) = \dot{H}_{mz}(-y)$, откуда следует $C_3 = 0$; внутреннее поле, так же как и внешнее, является однородным: $\dot{H}_{m3} = \text{const}$. Решение в стенке экрана имеет вид

$$\dot{H}_{mz} = Ae^{-j\dot{k}y} + Be^{j\dot{k}y}.$$

Для определения трех постоянных $\dot{H}_{m3}$, A и B воспользуемся краевыми условиями. Из равенства касательных составляющих $\vec{H}$ при $y = a$ и $y = a + b$ следуют два уравнения

$$Ae^{-j\dot{k}a} + Be^{j\dot{k}a} = \dot{H}_{m3}; \quad Ae^{-j\dot{k}(a+b)} + Be^{j\dot{k}(a+b)} = H_0.$$

Для получения третьего уравнения используем граничные условия для вектора $\vec{E}$. В стенке экрана $\dot{\vec{E}}_m = \text{rot}\,\dot{\vec{H}}_m/\gamma$, так что

$$\dot{E}_{mx} = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial\dot{H}_{mz}}{\partial y} = j\frac{\dot{k}}{\gamma}(Be^{j\dot{k}y} - Ae^{-j\dot{k}y}).$$

Под экраном $\text{rot}\,\dot{\vec{E}}_m = -j\omega\mu_0\dot{\vec{H}}_{m3}$, $\partial\dot{E}_{mx}/\partial y = j\omega\mu_0\dot{H}_{m3}$, $\dot{E}_{mx} = j\omega\mu_0 y\dot{H}_{m3} + C$, причем в силу нечетности $\dot{E}_{mx}$ константа $C = 0$. Из равенства касательных составляющих $\vec{E}$ при $y = a$ следует уравнение

$$Ae^{-j\dot{k}a} - Be^{j\dot{k}a} = -\frac{\omega\mu_0\gamma a}{\dot{k}}\dot{H}_{m3}.$$

Окончательное выражение для коэффициента экранирования

$$\dot{S}(j\omega) = \frac{\dot{H}_{m3}}{\dot{H}_0} = \frac{1}{\cos(\dot{k}b) - \dfrac{\mu_0}{\mu}\dot{k}a\sin(\dot{k}b)}.$$

В области низких частот ($\Delta \gg b$) поверхностный эффект практически не проявляется, экран ведет себя как виток с током. При этом $\dot{k}b = (1-j)b/\Delta \ll 1$, $\cos(\dot{k}b) \approx 1$, $\sin(\dot{k}b) \approx \dot{k}b$ и модуль коэффициента экранирования $|S| = [1 + (\mu_0 \omega \gamma a b)^2]^{-1/2}$.

При высоких частотах ($\Delta \ll b$) имеем

$$\cos(\dot{k}b) \approx \exp(jkb)/2;\ \sin(\dot{k}b) \approx -j\exp(j\dot{k}b)/2;\ |S| = \sqrt{2}\mu\Delta\exp(-b/a)/\mu_0 a.$$

Вихревые токи сосредоточены в скин-слое на внешней стороне стенки экрана.

В целом амплитудно-частотная характеристика $|S(\omega)|$ подобна АЧХ фильтра нижних частот. В постоянном магнитном поле $|S(0)| = 1$; этот вывод относится и к экрану из магнетика при $\mu > \mu_0$.

5.4.35 (р). В случае резкого эффекта вихревые токи можно считать поверхностными; поле в проводнике отсутствует. При этом из граничных условий [1, с. 482] имеем $\vec{n}[\vec{B}_2 - \vec{B}_1] = 0$ и $\vec{n}[\vec{H}_2 - \vec{H}_1] = \vec{J}_S$; в воздухе у поверхности магнитное поле имеет только касательную составляющую.

Эти же условия сохраняются в модели, где влияние вихревых токов учитывается током-изображением $i'(t) = -i(t)$ обратного направления (см. рис. 5.80). Оба тока находятся в однородной среде — воздухе.

Магнитная энергия витка в поле вихревых токов $W^{\text{м}} = i\Phi'/2$ выражается через магнитный поток Φ', пронизывающий виток. В свою очередь, поток определяется как циркуляция векторного потенциала поля тока i' [1, с. 565], следовательно, $\Phi' = 2\pi a A'$ и, таким образом, $W^{\text{м}} = \pi a i A'$. Сила, действующая на виток, находится как обобщенная сила $f = \partial W^{\text{м}}/\partial z = \pi a i(\partial A'/\partial z)$. Очевидно, что $f(t) \geq 0$, — два разнонаправленных тока отталкиваются.

Векторный потенциал в точках витка при $r = a$

$$A' = \frac{\mu_0 i'}{\pi k}\left[\left(1 - \frac{k^2}{2}\right)K - E\right];\ k = \left(\frac{4a^2}{4a^2 + z^2}\right)^{1/2},$$

где K, E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода модуля k. После дифференцирования получим формулу для расчета силы:

$$f(t) = \frac{\mu_0 I_m^2 h}{\sqrt{a^2 + h^2}}\left[-K + \left(1 + \frac{a^2}{2h^2}\right)E\right]\cos^2 \omega t = f_m \cos^2 \omega t.$$

Среднее значение силы за период $f_{\text{ср}} = f_m/2$.

Численное решение: $k = 0{,}995$; $K = 3{,}7$; $E = 1{,}04$; $f_{\text{ср}} = 6{,}22 \cdot 10^{-2}$ Н.

5.4.36 (м). В данной задаче сила — следствие намагниченности плиты. Поле связанных (амперовых) токов определяется методом зеркальных изображений (см. задачу 5.3.31 (м)). Ток-изображение $i' = (\mu - \mu_0)i/(\mu + \mu_0) \approx i$ по направлению совпадает с током витка. Виток притягивается к плите, причем модуль силы остается прежним.

В общем случае, когда влиянием вихревых токов нельзя пренебречь, на виток действуют силы той и другой природы. Соотношение между ними определяется условиями конкретной задачи. Например, при нагревании проводника (за счет вихревых токов) и связанном с этим уменьшением магнитной проницаемости притяжение витка может смениться отталкиванием.

5.6.5. Задачи 5.5.1–5.5.22 к теме «Волновое электромагнитное поле»

5.5.1 (р). В изотропном диэлектрике направления распространения фазовой волны и переноса энергии совпадают. Волновой вектор $\vec{k}$ и вектор Пойнтинга $\vec{\Pi}$ сонаправлены (см. рис. 5.81). Среднее за период значение $\vec{\Pi}_{\text{ср}}$ связано со средней мощностью $P = W/t$ соотношением

$$\int_S \vec{\Pi}_{\text{ср}} d\vec{S} = \int_S \Pi_{\text{ср}} \cos\theta dS = P,$$

откуда вследствие однородности волны следует $\Pi_{\text{ср}} = W/(St\cos\theta)$.

С другой стороны, в среде без потерь (электрическая и магнитная составляющие синфазны) $\Pi_{\text{ср}} = E_m H_m / 2 = E_m^2/(2Z)$, где $Z = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 120\pi$ — волновое сопротивление вакуума (воздуха). Следовательно, амплитуда напряженности электрического поля волны $E_m = \sqrt{2Z\Pi_{\text{ср}}} = \sqrt{2ZW/(St\cos\theta)}$.

5.5.2 (м). Воспользовавшись результатами задачи 5.5.1 (р), получим

$$E_m = \sqrt{240\pi\Pi_{\text{ср}}} = 8{,}69\cdot 10^3 \text{ В/м}, \; H_m = E_m/Z = E_m/(120\pi) = 23 \text{ А/м}.$$

5.5.3 (р). Напряжение (ЭДС) определяется вторым уравнением Максвелла в интегральной форме [1, с. 467]

$$e = \oint_l \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B} d\vec{S},$$

причем направление обхода контура l и вектор $d\vec{S}$ образуют правовинтовую систему.

Таким образом, существует два варианта расчета. Первый вариант заключается в вычислении циркуляции в поле плоской волны $\vec{E} = \vec{E}_m \cos(\omega t - kz)$, где волновое число $k = 2\pi/\lambda = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$. В частотной области комплексная амплитуда ЭДС выражается через комплексную амплитуду $\dot{\vec{E}}_m$ волны

$$\dot{e}_m = \oint_l \dot{\vec{E}}_m d\vec{l} = \oint_l \vec{E}_m e^{-jkz} d\vec{l} = -aE_m + aE_m e^{-jkb} =$$
$$= -aE_m e^{-jkb/2}(e^{jkb/2} - e^{jkb/2}) = -j2E_m a\sin(kb/2)e^{-jkb/2}.$$

Амплитуда напряжения на выводах рамки $U_m = 2E_m a|\sin(kb/2)|$.

При втором варианте расчета в частотной области $\dot{e}_m$ выражается через комплексную амплитуду $\dot{\vec{H}}_m$ волны:

$$\dot{e}_m = -j\omega\mu_0 \int_S \dot{\vec{H}}_m d\vec{S} = -j\omega\mu_0 \int_S \dot{H}_m dS = -j\omega\mu_0 H_m \int_S e^{-jkz} dS.$$

Выполнив интегрирование, получим соотношение $U_m = 2\omega\mu_0 H_m a|\sin(kb/2)/k|$, которое при замене $\omega\mu_0/k = Z$ и $ZH_m = E_m$ переходит в выражение для U_m, найденное в первом варианте.

5.5.4 (м). При решении задачи используются соотношения

$$\dot{k}^2 = \omega^2\dot{\varepsilon}\mu_0 = \omega^2\varepsilon(1 - j\operatorname{tg}\delta)\mu_0;\ Z = \sqrt{\mu/\dot{\varepsilon}} = \sqrt{\mu/|\dot{\varepsilon}|}e^{j\varphi};$$
$$E_m = |Z|H_m;\ \varphi = \alpha_E - \alpha_H = \delta/2;\ \beta = 2\pi/\lambda = \omega/v;$$
$$\Pi_{\text{ср}} = (E_m H_m \cos\varphi)/2;\ E_m(z) = E_m(0)\exp(-\alpha z).$$

Результаты расчета: $\varepsilon = 3{,}419\varepsilon_0$, $\operatorname{tg}\delta = 0{,}533$, $|Z| = 60{,}96\pi$ Ом, $\delta = 28°$, $\varphi = 14°$, $v = 1{,}57 \cdot 10^8$ м/с, $\lambda = 1{,}57$ м, $\Pi_{\text{ср}}(0) = 25$ Вт/м^2, $E_m(1) = 36{,}76$ В/м, $\Pi_{\text{ср}}(1) = 3{,}38$ Вт/м^2. При отсутствии потерь ($k = 4$): $\varepsilon = 3{,}646\varepsilon_0$, $Z = 62{,}84\pi$ Ом, $\varphi = 0°$; скорость и длина волны остаются прежними.

5.5.5 (р). Для определения длины волны $\lambda = v/f$ необходимо знать фазовую скорость и частоту. В поглощающих средах скорость волны $v = \left[\sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{0{,}5\left(\sqrt{1+tg^2\delta}+1\right)}\right]^{-1}$.

При отсутствии релаксационной поляризации (см. задачу 5.4.27 (р)) тангенс угла потерь $\operatorname{tg}\delta = \gamma/(\varepsilon\omega)$ и, следовательно, $f = \gamma/(2\pi\varepsilon\operatorname{tg}\delta)$. По определению, $\operatorname{tg}\delta$ есть отношение амплитуд плотностей токов проводимости и смещения; поэтому по условию задачи $\operatorname{tg}\delta = 1$.

Результаты расчета: при $\varepsilon = 81\varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $\gamma = 4{,}4$ См/м (морская вода), скорость $v = 3 \cdot 10^7$ м/с, $f = 890$ мГц, длина волны $\lambda = 3{,}37$ см.

5.5.6 (м). В среде с малыми потерями ($\operatorname{tg}\delta \ll 1$) при расчете коэффициента затухания α можно воспользоваться приближением $\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta} \approx 1 + \operatorname{tg}^2\delta/2$. Глубина проникновения

$$\Delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{2}{\omega\operatorname{tg}\delta\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{\lambda}{\pi\operatorname{tg}\delta} = \frac{\lambda_0}{\pi\operatorname{tg}\delta\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}},$$

где λ — длина волны в диэлектрике; ε_r и μ_r — относительные проницаемости.

Результаты расчета: $\Delta_1 = 18{,}98$ мм, $\Delta_2 = 1{,}43$ мм.

5.5.7 (м). При решении задачи используются соотношения:

$$\operatorname{tg}\delta = \gamma/(\varepsilon\omega),\ \beta = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{0{,}5\left(\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta}+1\right)},\ \alpha = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{0{,}5\left(\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta}-1\right)},$$
$$v = \omega/\beta,\ \lambda = v/f = 2\pi/\beta,\ \dot{\varepsilon} = \varepsilon(1 - j\operatorname{tg}\delta),\ |Z| = \sqrt{\mu/|\dot{\varepsilon}|},\ \varphi = \delta/2,\ \Delta = 1/\alpha.$$

Результаты расчета: 1) в пресной воде $\operatorname{tg}\delta = 0{,}022$, $\beta = 1{,}89$ 1/м, $\alpha = 0{,}208$ 1/м, $v = 3{,}33 \cdot 10^7$ м/с, $\lambda = 0{,}333$ м, $|\dot{\varepsilon}| = 81\varepsilon_0$, $|Z| = 41{,}9$ Ом, $\varphi = 0{,}63°$, $\Delta = 4{,}8$ м; 2) в морской воде $\operatorname{tg}\delta = 9{,}7$, $\beta = 4{,}36$ 1/м, $\alpha = 40$ 1/м, $v = 1{,}44 \cdot 10^7$ м/с, $\lambda = 0{,}144$ м, $|\dot{\varepsilon}| = 790\varepsilon_0$, $|Z| = 13{,}4$ Ом, $\varphi = 42°$, $\Delta = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ м. Волна затухает на пути $3\Delta = 7{,}5$ см.

5.5.8 (м). При решении задачи используются соотношения

$$\dot{k} = \beta - j\alpha = \sqrt{-j\omega\mu\gamma} = \omega\sqrt{\dot{\varepsilon}\mu},\ |Z| = \sqrt{\mu/|\dot{\varepsilon}|},\ \varphi = -0{,}5\arg(\dot{\varepsilon}),$$
$$\Delta = 1/\alpha,\ v = \omega/\beta,\ \lambda = 2\pi/\beta = 2\pi\Delta.$$

Результаты расчета: 1) при $f = 50$ Гц имеем $\alpha = \beta = 107$ 1/м, $\dot{\varepsilon} = -j1{,}86 \cdot 10^5$, $|Z| = 2{,}6 \cdot 10^{-6}$ Ом, $\varphi = 45°$, $\Delta = 9{,}34$ мм, $v = 2{,}94$ м/с, $\lambda = 58{,}8$ мм; 2) при $f = 10$ кГц имеем $\alpha = \beta = 1490$ 1/м, $\dot{\varepsilon} = -j9{,}3 \cdot 10^2$, $|Z| = 3{,}7 \cdot 10^{-5}$ Ом, $\varphi = 45°$, $\Delta = 0{,}66$ мм, $v = 42$ м/с, $\lambda = 4{,}2$ мм.

Полное затухание происходит на пути $3\Delta = 3\lambda/(2\pi) \approx \lambda/2$. Представление о волновом характере поля в металле условно («квазиволновое» поле).

5.5.9 (м). Закон преломления на границе идеальных диэлектриков $\sin\theta_1/\sin\theta_2 = k_2/k_1 = v_1/v_2 = n_{21} = n_2/n_1$. Здесь $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1\mu_1/(\varepsilon_0\mu_0)}$ — абсолютный показатель преломления первой среды, а $n_{21} = \sqrt{\varepsilon_2\mu_2/(\varepsilon_1\mu_1)}$ — относительный показатель преломления сред.

Результаты расчета: $\theta_2 = 19{,}47°$, $v_2 = 2 \cdot 10^8$ м/с, $\lambda_2 = 200$ м.

5.5.10 (м). При нормальном падении коэффициент отражения по напряженности $r_E = (Z_2 - Z_1)/(Z_1 + Z_2)$; коэффициент прозрачности $g_E = 1 + r_E = 2Z_2/(Z_1 + Z_2)$. Волновое сопротивление воздуха $Z_1 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 120\pi$; сопротивление среды $Z_2 = \sqrt{\mu_2/\dot{\varepsilon}_2}$, где $\dot{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2 - j\gamma_2/\omega = \varepsilon_2(1 - j\operatorname{tg}\delta)$.

Результаты расчета: 1) для пресной воды ($\operatorname{tg}\delta = 0{,}022 \ll 1$) имеем

$$Z_2 \approx \sqrt{\mu_0/\varepsilon_2} \approx 40\pi/3,\ r_E = -0{,}8 = 0{,}8\exp(j\pi),$$

модуль $|r_E| = 0{,}8$, скачок фазы $\vec{E}$ при отражении $\varphi_E = \pi$, $g_E = 0{,}2$, $r = |r_E|^2 = 0{,}64$, $g = 1 - r = 0{,}36$; 2) для морской воды $Z_2 = 40\pi(0{,}24 + j0{,}22)/3$, $r_E = 0{,}95\exp(j178°)$, $|r_E| = 0{,}95$, $\varphi_E = 178°$, $g_E = 1 + r_E = 0{,}05 + j0{,}047$, $r = 0{,}9$, $g = 0{,}1$. Отражается 90% падающей энергии.

5.5.11 (м). При решении используются формулы для определения коэффициента отражения r_E (см. указания к решению задачи 5.5.10 (м)). Амплитуды поля отраженной волны $E_m^r = |r_E|E_0 = 4{,}3 \cdot 10^{-2}$ В/м, $H_m^r = E_m^r/(120\pi) = 1{,}14 \cdot 10^{-4}$ А/м.

5.5.12 (р). Коэффициент отражения от идеального проводника $r_E = -1$, откуда следует, что амплитуда отраженной волны $E_m^r = E_0$, а фаза отличается на π. Проекции волнового вектора $\vec{k}^r$ с учетом равенства $k^r = k$ записываются в виде $k_x^r = k_x$, $k_z^r = -k_z$. Таким образом, выражение для отраженной волны

$$E_y^r(t) = E_0\cos(\omega t - k_x x - k_z z + \pi) = -E_0\cos(\omega t - k_x x + k_z z).$$

Для определения результирующего поля сложим комплексные амплитуды волн:

$$\dot{E}_{my} = E_0 e^{j(-k_x x - k_z z)} - E_0 e^{j(-k_x x + k_z z)} = E_0 e^{-jk_x x}(e^{-jk_z z} - e^{jk_z z}) = -j2E_0\sin(k_z z)e^{-jk_x x}.$$

Во временной области $E_y(t) = 2E_0\sin(k_z z)\sin(\omega t - k_x x)$.

Магнитное поле находится из второго уравнения Максвелла:

$$\dot{H}_{mx} = -\frac{1}{j\omega\mu}\operatorname{rot}_x\vec{E}_m = \frac{1}{j\omega\mu}\frac{\partial\dot{E}_{my}}{\partial z} = -\frac{2E_0k_z}{\omega\mu}\cos(k_z z)e^{-jk_x x};$$

$$\dot{H}_{mx} = -\frac{1}{j\omega\mu}\frac{\partial\dot{E}_{my}}{\partial x} = \frac{k_x}{\omega\mu}\dot{E}_{my}.$$

Таким образом, электромагнитное поле имеет признаки стоячей волны (по оси z) и бегущей волны вдоль поверхности (по оси x). Волна плоская (уравнение фронта $x = \text{const}$), не однородная и не поперечная, поскольку имеется проекция H_x на направление распространения. Расстояние между узлами $\Delta z = \pi/k_z = \pi/(k\cos\theta) = \lambda/(2\cos\theta)$ превышает половину длины волны, что имеет место при нормальном падении ($\theta = 0$). Фазовая скорость направленной волны $v_x = \omega/k_x = \omega/(k\sin\theta) = v/(\sin\theta) > v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ («быстрая волна»).

5.5.13 (р). При $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ абсолютные показатели преломления $n_1 > n_2$, а относительный показатель $n_{21} = n = n_2/n_1 < 1$. Как следует из закона преломления $\sin\theta/\sin\theta_2 = n$, $\theta_2 > \theta$. Угол падения, при котором $\theta_2 = \pi/2$, называется критическим, причем $\sin\theta^{кр} = n$. При $\theta > \theta^{кр}$ происходит полное отражение. Однако, несмотря на это, поле проникает во вторую среду.

Запишем комплексную амплитуду поля

$$\dot{E}_{my} = E_m e^{-j(k_{2x}x + k_{2z}z)} = E_m e^{-j(k_2 x\sin\theta_2 + k_2 z\cos\theta_2)}.$$

Если $\theta > \theta^{кр}$, то $\sin\theta > n$ и $\sin\theta_2 = \sin\theta/n > 1$. Таких действительных углов нет, но формально можно записать $\cos\theta_2 = \sqrt{1-\sin^2\theta_2} = \pm j\sqrt{(\sin\theta/n)^2 - 1}$. При этом (физический смысл имеет только знак «$-$») $\dot{E}_{my} = E_m e^{-j\alpha z} e^{-j\beta x}$, где $\alpha = k_2\sqrt{(\sin\theta/n)^2 - 1}$; $\beta = k_2\sin\theta/n$.

Уравнение поверхности равных амплитуд имеет вид $z = \text{const}$. Амплитуда электрического поля экспоненциально убывает вдоль оси z; глубина проникновения $\Delta = 1/\alpha$. Уравнение фронта волны $x = \text{const}$.

Фазовая скорость поверхностной волны

$$v_x = \omega/\beta = \omega n/(k_2\sin\theta) = v_2 n/(\sin\theta) < v_2 = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$$

(«медленная» волна).

Результаты расчета: $\sin\theta^{кр} = n = 0{,}58$, $\theta^{кр} = 35{,}5°$, $\Delta = 0{,}43$ м, $v_x = 2\cdot 10^8$ м/с.

5.5.14 (р). Магнитное поле находится из второго уравнения Максвелла:

$$\dot{H}_{mx} = \frac{1}{j\omega\mu_0}\frac{\partial\dot{E}_{my}}{\partial z} = \frac{j\alpha}{\omega\mu_0}\dot{E}_m;\quad \dot{H}_{mz} = \frac{-1}{j\omega\mu_0}\frac{\partial\dot{E}_{my}}{\partial x} = \frac{\beta}{\omega\mu}\dot{E}_m;\quad \dot{H}_{my} = 0.$$

Электромагнитное поле во второй среде во временной области: $E_y(t) = E_m e^{-\alpha z}\cos(\omega t -$

$- \beta x)$; $H_x(t) = -\dfrac{\alpha}{\omega\mu_0}E_m e^{-\alpha z}\sin(\omega t - \beta x)$; $H_z(t) = \dfrac{\beta}{\omega\mu_0}E_m e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta x)$.

Составляющие вектора Пойнтинга:

$$\Pi_x(t) = E_y H_z = \frac{\beta}{\omega\mu_0}E_m^2 e^{-2\alpha z}\cos^2(\omega t - \beta x);$$

$$\Pi_z(t) = -E_y H_x = \frac{\alpha}{2\omega\mu_0}E_m^2 e^{-2\alpha z}\sin 2(\omega t - \beta x);$$

$$\Pi_y(t) = 0.$$

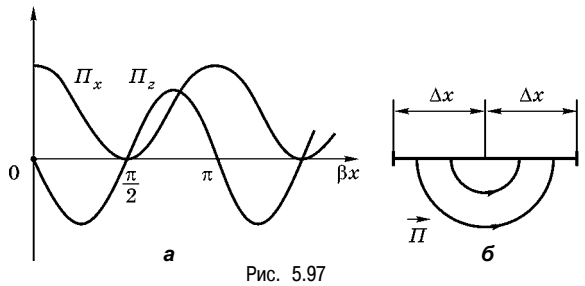


Рис. 5.97

Зависимости Π_x и Π_z на поверхности раздела ($z = 0$) в фиксированный момент времени $t = 0$ представлены на рис. 5.97*а*. Ширина полосы, где энергия входит (или выходит), находится из условия $\beta\Delta x = \pi/2$, откуда следует $\Delta x = \pi/(2\beta) = \pi n/(2k_2\sin\theta) = \lambda_2 n/(4\sin\theta)$. При $\theta = 60°$, $n = 1/\sqrt{3} = 0{,}58$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_0$, $f = 100$ мГц ширина $\Delta x = 0{,}5$ м. Составляющая Π_x всегда остается положительной, а Π_z изменяет знак. Энергия движется по векторным линиям $\vec{\Pi}$, показанным на рис. 5.97*б*.

Явление полного отражения используется в радиотехнике (диэлектрический волновод) и волоконной оптике.

5.5.15 (р). Пусть E_m — амплитуда падающей волны, а $k_2 = 2\pi/\lambda_2$ — волновое число в слое. Для определения комплексных амплитуд компонент отраженной волны используются коэффициенты отражения r_E и прозрачности g_E по напряженности. На первой границе для прямой волны $r_{E1} = (Z_2 - Z_1)/(Z_1 + Z_2)$, $g_{E1} = 1 + r_{E1}$, а для обратной, отраженной от второй границы, $r'_{E1} = -r_{E1}$, $g'_{E1} = 2Z_1/(Z_1 + Z_2) = 1 + r'_{E1} = 1 - r_{E1}$; на второй границе для прямой волны $r_{E2} = (Z_3 - Z_2)/(Z_2 + Z_3)$. Таким образом, первая компонента отраженной волны при $z = 0$ будет $\dot{E}^r_{m1} = \dot{E}_m r_{E1}$ (рис. 5.98*а*), вторая $\dot{E}^r_{m2} = \dot{E}_m g_{E1} r_{E2} g'_{E1} e^{-j2k_2h}$ (рис. 5.98*б*), третья $\dot{E}^r_{m3} = \dot{E}^r_{m2}(-r_{E1} r_{E2} e^{-j2k_2h})$ (рис. 5.98*в*). Скачок фазы при отражении определяется знаком коэффициента отражения; например, при $Z_2 < Z_1$ имеем $r_{E1} < 0$ и, следовательно, скачок $\varphi_E = \pi$. Кроме того, отставание второй компоненты по фазе связано с прохождением пути $2h$ и равно $2k_2h = 4\pi h/\lambda_2$.

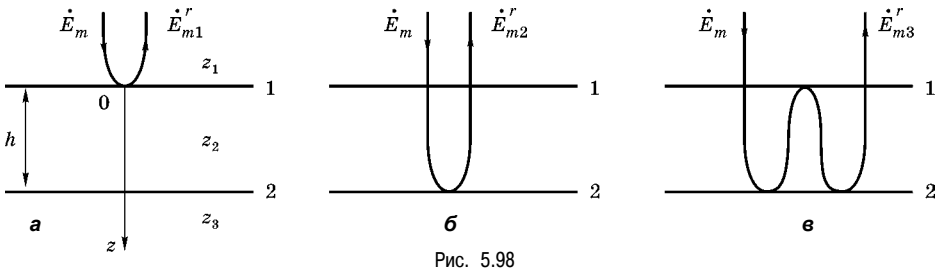


Рис. 5.98

Последовательно записывая амплитуды компонент, получим комплексную амплитуду отраженной волны на первой границе (при $z = 0$):

$$\dot{E}^r_m = \dot{E}^r_{m1} + \dot{E}^r_{m2} + \dot{E}^r_{m3} + \ldots = \dot{E}^r_{m1} + S,$$

где S — сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = -r_{E1}r_{E2}\exp(-j2k_2h)$.

Коэффициент отражения по напряженности

$$R_E = \frac{\dot{E}_m^r}{\dot{E}_m} = \frac{r_{E1} + r_{E2}e^{-j2k_2h}}{1 + r_{E1}r_{E2}e^{-j2k_2h}} = |R_E|e^{j\Phi_E}.$$

Коэффициент отражения по мощности

$$R = \frac{\Pi_{\text{ср}}^r}{\Pi_{\text{ср}}} = |R_E|^2 = \frac{r_{E1}^2 + r_{E2}^2 + 2r_{E1}r_{E2}\cos(2k_2h)}{1 + r_{E1}^2r_{E2}^2 + 2r_{E1}r_{E2}\cos(2k_2h)}.$$

5.5.16 (м). Нужно преобразовать выражение для R_E при условиях $h = \lambda_2 m/2$, $k_2h = \pi m$ (при $m = 1, 2, 3, \ldots$).

5.5.17 (м). Формулу для расчета коэффициента отражения R следует переписать с учетом соотношений $r_{E1} = -r_{E2}$ и $(r_{E1})^2 = r_1 = r_2 = r$, где $r > 0$ — коэффициент отражения от границ слоя по мощности; тогда получим $R = 2r(1 - \cos 2k_2h)/(1 - 2r\cos 2k_2h + r^2)$.

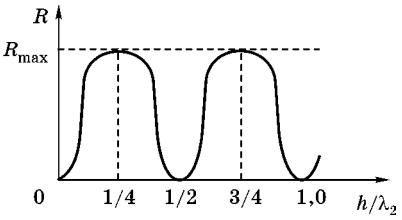


Рис. 5.99

Коэффициент $R = 0$ при условии $h = \lambda_2 m/2$ ($m = 1, 2, 3, \ldots$); «полуволновой» слой полностью прозрачен. Максимальный коэффициент отражения $R_{\max} = 4r/(1 + r)^2$ наблюдается при толщине слоя $h = \lambda_2(2m - 1)/4$ («четвертьволновой» слой). Зависимость $R = R(h/\lambda_2)$ показана на рис. 5.99.

Результаты расчета: а) в первом варианте $Z_1 = 120\pi$, $Z_2 = 40\pi$, $r_{E1} = -r_{E2} = -0{,}5$, $r = 0{,}25$, $R_{\max} = 0{,}62$; б) во втором варианте $Z_2 = 12\pi$, $r_{E1} = -0{,}82$, $r = 0{,}67$, $R_{\max} = 0{,}96$. «Четвертьволновой» слой отражает 96% падающей энергии («зеркало» из диэлектрика).

5.5.18 (м). По условию задачи волновые сопротивления $Z_1 > Z_2 > Z_3$, и поэтому $r_{E1} < 0$ и $r_{E2} < 0$. Используя коэффициенты отражения по мощности $r_1 > 0$ и $r_2 > 0$, можно записать $r_{E1} = -\sqrt{r_1}$, $r_{E2} = -\sqrt{r_2}$ и, следовательно,

$$R = \left(r_1 + 2\sqrt{r_1r_2}\cos 2k_2h + r_2\right)/\left(1 + 2\sqrt{r_1r_2}\cos 2k_2h + r_1r_2\right).$$

Коэффициент отражения принимает наименьшее значение $R_{\min}$ при условии $\cos 2k_2h = -1$; отсюда толщина слоя $h = \lambda_2(2m - 1)/4$ (при $m = 1, 2, 3, \ldots$).

В свою очередь, требование $R_{\min} = 0$ приводит к уравнению $r_1 - 2\sqrt{r_1r_2} + r_2 = 0$, откуда следует $Z_2 = \sqrt{Z_1Z_3}$ и $\varepsilon_2 = \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}$. Результат сохраняется при убывании проницаемости: $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$.

5.5.19 (м). Слой, который помещается на поверхность раздела сред для устранения отражения, называется согласующим слоем. Используя результаты решения задачи 5.5.18 (м), получим $\varepsilon_2 = 3\varepsilon_0$; при этом $\lambda_2 = \lambda_1/n_2 = 3\sqrt{3}$; наименьшая толщина слоя $h = \lambda_2/4 = 1{,}3$ мм.

5.5.20 (р). При условии $r_0 \ll \lambda$ можно считать, что в каждый момент времени шар находится в однородном электрическом поле $\vec{E}(t)$. В этом случае дипольный момент

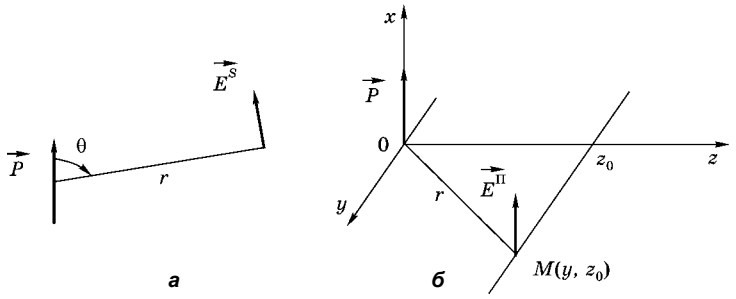


Рис. 5.100

шара $\vec{p}(t) = 4\pi\varepsilon_0 r_0^3 \vec{E}(t)$ [1, с. 528]. Далее шар можно уподобить элементу гармонического тока: во временной области $i\vec{l} = \vec{l}\,\partial q/\partial t = \partial\vec{p}/\partial t$, а в частотной области $\dot{I}_m\vec{l} = j\omega\dot{\vec{p}}_m$. В дальней зоне при $r \gg r_0$ (рис. 5.100*а*) комплексная амплитуда поля шара (рассеянное поле):

$$\dot{E}^S_{m\theta} = \frac{j\dot{I}_m l k^2 \sin\theta}{4\pi\omega\varepsilon_0 r} e^{-jkr} = -\frac{\dot{p}_m k^2 \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r} e^{-jkr}.$$

Полное поле $\vec{E}^{\text{п}}$ находится путем суммирования поля падающей волны и рассеянного поля. В точке M (рис. 5.100*б*):

$$\dot{E}^{\text{п}}_{mx} = \dot{E}_{mx} + \dot{E}^S_{mx} = \dot{E}_{mx} - \dot{E}^S_{m\theta} = E_0 e^{-jkz_0} + \frac{aE_0}{r} e^{-jkr},$$

где $a = k^2 r_0^3$. Амплитуда полного поля $E^{\text{п}}_m = E_0[1 + (a/r)^2 + 2a\cos k(r - z_0)/r]^{1/2}$, причем $r = (y^2 + z_0^2)^{1/2}$.

Третья составляющая в $E^{\text{п}}_m$ при увеличении y изменяется по затухающему колебательному закону. Расстояние Δy между соседними максимумами находится из условия $k\left(\sqrt{z_0^2 + (\Delta y)^2} - z_0\right) = 2\pi$. Отсюда получаем $(\Delta y)^2 = \lambda^2 + 2\lambda z_0$ и, следовательно, $\Delta y > \lambda$.

На оси y (при $z_0 = 0$) амплитуда $E^{\text{п}}_m = E_0[1 + (a/y)^2 + 2a\cos(ky)/y]^{1/2}$; расстояние между максимумами $\Delta y = \lambda$.

На оси $z > 0$ («за шаром») поля падающей и рассеянной волн синфазны, так что $E^{\text{п}}_m = E_0(1 + a/z)$. В «области тени» происходит монотонное уменьшение амплитуды, причем $E^{\text{п}}_m \to E_0$.

На оси $z < 0$ («перед шаром») происходит суммирование полей встречных волн:

$$\dot{E}^{\text{п}}_m = E_0 e^{-jkz} + \frac{aE_0}{|z|} e^{-jkz} = E_0\left(1 + \frac{a}{|z|} e^{j2kz}\right) e^{-jkz}.$$

Амплитуда поля $E^{\text{п}}_m = E_0[1 + (a/z)^2 + 2a\cos(2kz)/|z|]^{1/2}$; расстояние между максимумами $\Delta z = \lambda/2$.

Оценка величин, входящих в полученные формулы: при $r_0 = 1$ мм, $\lambda = 10$ мм, $z_0 = 40$ мм коэффициент $a = 0{,}4$ мм, $(a/z_0)^2 = 10^{-4}$, $2a/z_0 = 0{,}02$.

5.5.21 (м). Амплитуда напряженности электрического поля волны $E_m = I_m lk^2/(4\pi\omega\varepsilon r)$. Средняя за период мощность излучения $P = I_m^2 R/2 = (I_m l)^2 Zk^2/(12\pi)$. Отсюда при учете равенства $k/(\omega\varepsilon) = Z$ получим $E_m = I_m\sqrt{3RZ/(2\pi)}/(2r)$; $H_m = E_m/Z$.

Результаты расчета: $E_m = 0{,}64$ В/м, $H_m = 1{,}7 \cdot 10^{-3}$ А/м.

5.5.22 (р). Электрическое поле в дальней зоне описывается сферической волной

$$\dot{E}_{m\theta} = \dot{E}_m = j\frac{\dot{I}_m lk^2 \sin\theta}{4\pi\omega\varepsilon r} e^{-jkr}.$$

Полагая, что на больших расстояниях ($r \gg l$) направления векторов поля совпадают ($\theta_1 = \theta_2 = \theta$), находим комплексную амплитуду напряженности поля в точке наблюдения M:

$$\dot{E}_m = \dot{E}_{m1} + \dot{E}_{m2} = j\frac{\dot{I}_m lk^2 \sin\theta}{4\pi\omega\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1}e^{-j(kr_1 - \pi/2)} + \frac{1}{r_2}e^{-jkr_2}\right);$$

здесь принято $\dot{I}_{m1} = I_m e^{-j\pi/2}$, $\dot{I}_{m2} = I_m$.

При суммировании будем учитывать только различие фаз двух слагаемых, полагая их амплитуды равными. Положив $1/r_1 \approx 1/r_2 = 1/r$, получим

$$\dot{E}_m = j\frac{I_m lk^2 \sin\theta}{4\pi\omega\varepsilon r}(1 + e^{-jk(r_1 - r_2)}e^{j\pi/2})e^{-jkr_2}.$$

Разность фаз волн в точке M при условии $r \gg \lambda/4$ будет $k(r_1 - r_2) \approx k\lambda\sin\theta/4 = \pi\sin\theta/2$. Таким образом, на расстояниях, существенно превышающих расстояние между элементами тока,

$$\dot{E}_m = j\frac{I_m lk^2 \sin\theta}{4\pi\omega\varepsilon r}[1 + e^{j\pi(1-\sin\theta)/2}].$$

Максимальную амплитуду имеет волна, распространяющаяся вдоль оси x (при $\theta = \pi/2$). Если $\theta = -\pi/2$, амплитуда $E_m = 0$ — излучение влево отсутствует. Система имеет однонаправленное излучение.