Содержание

ЧАСТЬ 4. ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Глава 23. Уравнения электромагнитного поля 11
23.1. Электромагнитное поле и его уравнения в интегральной форме 11
23.2. Закон полного тока в дифференциальной форме — первое уравнение Максвелла 15
23.3. Закон электромагнитной индукции в дифференциальной форме — второе уравнение Максвелла 18
23.4. Теорема Гаусса и постулат Максвелла в дифференциальной форме 19
23.5. Выражение в дифференциальной форме принципов непрерывности магнитного потока и непрерывности электрического тока 22
23.6. Теорема Остроградского. Теорема Стокса 23
23.7. Полная система уравнений электромагнитного поля 25
23.8. Граничные условия на поверхности раздела двух сред с различными электрическими и магнитными свойствами 28
23.9. Электростатическое поле и поле постоянных токов как частные случаи электромагнитного поля 30

Глава 24. Электростатическое поле 32
24.1. Безвихревой характер электростатического поля. Градиент электрического потенциала 32
24.2. Убывание потенциала и напряженности поля на больших расстояниях от системы заряженных тел 35
24.3. Определение потенциала по заданному распределению зарядов 38
24.4. Уравнения Пуассона и Лапласа 39
24.5. Граничные условия на поверхности проводников 41
24.6. Граничные условия на поверхности раздела двух диэлектриков 41
24.7. Основная задача электростатики 43
24.8. Плоскопараллельное поле 44
24.9. Применение функций комплексного переменного 47
24.10. Поле уединенного провода круглого сечения 49
24.11. Поле двух плоскостей, сходящихся под углом 51
24.12. Поле двухпроводной линии передачи 52
24.13. Поле параллельных несоосных цилиндров 55
24.14. Поле у края плоского конденсатора 57
24.15. Графический метод построения картины плоскопараллельного поля 59
24.16. Графический метод построения картины поля тел вращения 60
24.17. Графический метод построения картины поля для неоднородной изолирующей среды 61
24.18. Тело из диэлектрика во внешнем электростатическом поле 61

24.19. Диэлектрический шар во внешнем однородном поле 62
24.20. Общий метод расчета электрического поля в неоднородной среде. Метод интегральных уравнений 65
24.21. Проводящее тело во внешнем электростатическом поле. Электростатическое экранирование 69
24.22. Металлический шар во внешнем однородном поле 71
24.23. Метод зеркальных изображений 72
24.24. Применение метода разделения переменных для решения задач электростатики 75
24.25. Численный расчет электростатического поля методом сеток 78
24.26. Вариационный подход к расчету электрического поля в неоднородной среде. Метод конечных элементов 79

Глава 25. Расчет электрической емкости 84
25.1. Емкость между круглыми цилиндрами. Емкость двухпроводной линии передачи 84
25.2. Потенциальные коэффициенты, коэффициенты электростатической индукции и частичные емкости в системе тел 87
25.3. Потенциальные коэффициенты в системе параллельных весьма длинных проводов 91
25.4. Емкость двухпроводной линии с учетом влияния земли 92
25.5. Емкость трехфазной линии передачи 93
25.6. Метод средних потенциалов для расчета потенциальных коэффициентов и емкостей в системе проводов 96
25.7. Вычисление емкости по картине поля 100

Вопросы, упражнения, задачи к главам 23, 24 и 25 101
23.1. Уравнения электромагнитного поля в дифференциальной форме . . 101
23.2. Система уравнений электромагнитного поля 104
23.3. Граничные условия на поверхностях раздела сред с различными свойствами 104
24.1. Потенциал электростатического поля 106
24.2. Уравнения Лапласа и Пуассона 108
24.3. Плоскопараллельное электростатическое поле 111
24.4. Метод комплексного потенциала 111
24.5. Электростатическое поле проводов круглого сечения 114
24.6. Картина электростатического поля 115
24.7. Метод интегральных уравнений 115
24.8. Метод зеркальных изображений 116
24.9. Метод разделения переменных 117
24.10. Методы сеток и конечных элементов 118
25.1. Емкость между круглыми цилиндрами 118
25.2. Потенциальные коэффициенты, коэффициенты электростатической индукции и частичные емкости в системе тел 119
25.3. Емкость линий передачи 121
25.4. Метод средних потенциалов 124

Глава 26. Электрическое поле постоянных токов 125
26.1. Уравнения электромагнитного поля постоянных токов 125
26.2. Электрическое поле в диэлектрике, окружающем проводники с постоянными токами 125
26.3. Электрическое поле и поле вектора плотности тока в проводящей среде 126
26.4. Граничные условия на поверхности раздела двух проводящих сред 127
26.5. Аналогия электрического поля в проводящей среде с электростатическим полем 128
26.6. Ток утечки в кабеле и сопротивление изоляции кабеля 130
26.7. Сопротивление заземления 130
Глава 27. Магнитное поле постоянных токов 134
27.1. Вихревой характер магнитного поля токов. Скалярный потенциал магнитного поля в области вне токов 134
27.2. Векторный потенциал магнитного поля токов 136
27.3 Метод приведения вихревого магнитного поля к безвихревому 138
27.4. Выражение магнитного потока и энергии магнитного поля через векторный потенциал 141
27.5. Общая задача расчета магнитного поля постоянных токов 142
27.6. Плоскопараллельное поле 143
27.7. Применение функций комплексного переменного 145
27.8. Поле линейных проводов. Принцип соответствия плоскопараллельных электрических и магнитных полей 145
27.9. Прямолинейный провод с током во внешнем однородном поле 147
27.10. Поле проводов, имеющих конечное сечение произвольной формы 148
27.11. Поле проводов круглого сечения 149
27.12. Поле двухпроводной линии передачи 150
27.13. Граничные условия на поверхности раздела двух сред с различными магнитными проницаемостями 151
27.14. Поле токов вблизи плоских поверхностей ферромагнитных тел. Метод зеркальных изображений 152
27.15. Графический метод построения картины поля 153
27.16. Пространственная задача. Поле кругового контура с током 157
27.17. Выражение скалярного потенциала через телесный угол, под которым виден контур тока 159
27.18. Магнитное поле контура произвольной формы на большом расстоянии от контура 161
27.19. Тело во внешнем магнитном поле. Аналогия с электростатической задачей 161
27.20. Шар и эллипсоид вращения во внешнем однородном магнитном поле 162
27.21. Магнитное поле в неоднородной среде. Применение метода интегральных уравнений 164

27.22. Коэффициенты размагничивания 167
27.23. Магнитное экранирование 168
27.24. Расчет магнитного поля в неоднородной среде методом конечных разностей 168

Глава 28. Расчет индуктивностей 171
28.1. Общие выражения для взаимной и собственной индуктивностей . . . 171
28.2. Взаимная индуктивность двух круговых контуров 175
28.3. Индуктивность кругового контура 176
28.4. Метод участков 177
28.5. Индуктивности контуров, составленных из прямолинейных отрезков 179
28.6. Индуктивность прямоугольной рамки 180
28.7. Взаимная индуктивность между двумя двухпроводными линиями . . . 181
28.8. Индуктивность двухпроводной линии 182
28.9. Индуктивность трехфазной линии 182

Вопросы, упражнения, задачи к главам 26, 27 и 28 185
26.1. Электрическое поле постоянных токов в диэлектрике и в проводящей среде 185
27.1. Скалярный потенциал магнитного поля 187
27.2. Векторный потенциал магнитного поля 188
27.3. Комплексный магнитный потенциал 191
27.4. Метод зеркальных изображений 193
28.1. Индуктивности контуров, катушек и токопроводов 194
28.2. Метод участков 197
28.3. Индуктивность двухпроводной линии 198
28.4. Индуктивность трехфазной линии 199

Глава 29. Переменное электромагнитное поле в диэлектрике 201
29.1. Плоская электромагнитная волна в диэлектрике. Скорость распространения электромагнитной волны 201
29.2. Вектор Пойнтинга 206
29.3. Поток электромагнитной энергии 208
29.4. Излучение электромагнитных волн антенной. Опыты Г. Герца. Работы П. Н. Лебедева. Изобретение радио А. С. Поповым 211
29.5. Электродинамические векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля 216
29.6. Электрический диполь с переменными зарядами 221
29.7. Электромагнитное поле на расстояниях от диполя, малых по сравнению с длиной волны 223
29.8. Электромагнитное поле на расстояниях от диполя, значительно превышающих длину волны 224
29.9. Мощность и сопротивление излучения диполя и антенны 224
29.10. Передача электромагнитной энергии вдоль проводов линии 226

29.11. Передача электромагнитной энергии по внутренней полости металлических труб 229
29.12. Волноводы 230

Глава 30. Переменное электромагнитное поле в проводящей среде 238
30.1. Плоская электромагнитная волна в проводящей среде 238
30.2. Длина волны и затухание волны 240
30.3. Явление поверхностного эффекта 242
30.4. Активное и внутреннее индуктивное сопротивления проводов 242
30.5. Сопротивление провода при резком проявлении поверхностного эффекта 245
30.6. Поверхностный эффект в массивных проводах из ферромагнитного материала 248
30.7. О комплексных магнитной и диэлектрической проницаемостях 250
30.8. Неравномерное распределение переменного магнитного потока в плоском листе 251
30.9. Неравномерное распределение тока в цилиндрическом проводе круглого сечения 254
30.10. Активное и внутреннее индуктивное сопротивления цилиндрических проводов круглого сечения 259
30.11. Эффект близости. Поверхностная закалка индукционным методом 261
30.12. Электромагнитное экранирование 262
30.13. Экспериментальное исследование и моделирование электрических и магнитных полей 263
30.14. О критериях разграничения задач теории электрических и магнитных цепей и задач теории электромагнитного поля 268

Вопросы, упражнения, задачи к главам 29 и 30 272
29.1. Плоская электромагнитная волна в диэлектрике 272
29.2. Вектор Пойнтинга 273
29.3. Вихревая и потенциальная составляющие электромагнитного поля 274
29.4. Передача электромагнитной энергии вдоль проводов линии 275
30.1. Плоская электромагнитная волна в проводящей среде 276
30.2. Активное и индуктивное сопротивления проводов 277
30.3. Неравномерное распределение переменного магнитного потока и электрического тока 281
30.4. Эффект близости. Электромагнитное экранирование 283

Глава 23. Ответы на вопросы, решения упражнений и задач 285
23.1. Уравнения электромагнитного поля в дифференциальной форме . . . 285
23.2. Система уравнений электромагнитного поля 289
23.3. Граничные условия на поверхностях раздела сред с различными свойствами 291
24.1. Потенциал электростатического поля 293
24.2. Уравнения Лапласа и Пуассона 296

24.3. Плоскопараллельное электростатическое поле 302
24.4. Метод комплексного потенциала 302
24.5. Электростатическое поле проводов круглого сечения 305
24.6. Картина электростатического поля 306
24.7. Метод интегральных уравнений 306
24.8. Метод зеркальных изображений 306
24.9. Метод разделения переменных 308
24.10. Методы сеток и конечных элементов 309
25.1. Емкость между круглыми цилиндрами 310
25.2. Потенциальные коэффициенты, коэффициенты электростатической индукции и частичные емкости в системе тел 311
25.3. Емкость линий передачи 313
25.4. Метод средних потенциалов 318
26.1. Электрическое поле постоянных токов в диэлектрике и в проводящей среде 319
27.1. Скалярный потенциал магнитного поля 322
27.2. Векторный потенциал магнитного поля 323
27.3. Комплексный магнитный потенциал 328
27.4. Метод зеркальных изображений 331
28.1. Индуктивности контуров, катушек и токопроводов 334
28.2. Метод участков 337
28.3. Индуктивность двухпроводной линии 338
28.4. Индуктивность трехфазной линии 340
29.1. Плоская электромагнитная волна в диэлектрике 341
29.2. Вектор Пойнтинга 343
29.3. Вихревая и потенциальная составляющие электромагнитного поля 344
29.4. Передача электромагнитной энергии вдоль проводов линии 346
30.1. Плоская электромагнитная волна в проводящей среде 349
30.2. Активное и индуктивное сопротивления проводов 351
30.3. Неравномерное распределение переменного магнитного потока и электрического тока 358
30.4. Эффект близости. Электромагнитное экранирование 360

Алфавитный указатель 361

О структуре учебника

Курс «Теоретические основы электротехники» включает в себя четыре части. Первая, сравнительно короткая, именуемая «Основные понятия и законы теории электромагнитного поля и теории электрических и магнитных цепей», содержит обобщения понятий и законов из области электромагнитных явлений и развитие формулировок и определений основных понятий и законов теории электрических и магнитных цепей. Эта часть, связывая курсы физики и теоретических основ электротехники, одновременно формирует у читателя правильные физические представления о процессах, происходящих в электрических и магнитных цепях и в электромагнитных полях. Она помогает также глубже понять излагаемые в последующих частях курса математические формулировки и методы решения задач.

Вторая и наибольшая по объему часть курса, именуемая «Теория линейных электрических цепей», содержит последовательное изложение этой теории, сопровождаемое значительным количеством примеров. Здесь излагаются основные свойства линейных электрических цепей и различные подходы к расчету установившихся и переходных процессов в таких цепях. Основное внимание уделяется методам анализа, позволяющим рассчитывать характеристики электромагнитных процессов в электрических цепях, структура и параметры которых известны. Вместе с тем, рассмотрены также и основные подходы к задачам синтеза и диагностики цепей, актуальность которых растет в настоящее время. Применение методов этих разделов учебника позволяет создавать электрические цепи с наперед заданными свойствами, а также определять параметры или диагностировать состояние реальных устройств.

Третья часть курса называется «Теория нелинейных электрических и магнитных цепей». В ней излагаются свойства нелинейных электрических и магнитных цепей и методы расчета происходящих в них процессов. Параметры нелинейных цепей зависят от тока, напряжения или магнитного потока, и это приводит к существенному усложнению математических моделей нелинейных элементов и методов анализа процессов в нелинейных цепях. Вместе с тем эти вопросы имеют большое значение в связи с широким использованием элементов цепей с нелинейными характеристиками в современных устройствах.

Последняя, четвертая, часть — «Теория электромагнитного поля». Многие электротехнические проблемы не могут быть полностью рассмотрены при помощи теории цепей и должны решаться с привлечением методов теории электромагнитного поля. Прежде всего, эти методы необходимы для расчета важнейших электромагнитных параметров электротехнических устройств, таких индуктивность, емкость, сопротивление, чем, однако, далеко не исчерпывается область их применения. Без использования современных методов теории электромагнитного поля невозможно рассмотрение вопросов излучения и распространения в пространстве электромагнитных волн, потерь в мощных энергетических устройствах, создания и использования устройств с высокой напряженностью электри-

ческого или магнитного полей и т. п. Наличие в учебнике первой части: «Основные понятия и законы теории электромагнитного поля и теории электрических и магнитных цепей», дает возможность начать рассмотрение теории электромагнитного поля с общих уравнений, что позволяет подробно рассмотреть подходы к решению задач теории электромагнитного поля и примеры их решения в рамках ограниченного объема учебника.

В учебнике принята сквозная нумерация глав. В первый том учебника входит часть 1 «Основные понятия и законы теории электромагнитного поля и теории электрических и магнитных цепей» (главы 1–3) и начало части 2 «Теория линейных электрических цепей» (главы 3–8), во второй том — окончание части 2 «Теория линейных электрических цепей» (главы 9–18), а также часть 3 «Теория нелинейных электрических цепей» (главы 19–22), в третий том — часть 4 «Теория электромагнитного поля» (главы 23–30). Четвертый том включает в себя вопросы, упражнения и задачи по всем частям курса, а также набор расчетных заданий по всему курсу с методическими указаниями для их выполнения. В нем приведены также ответы на вопросы, решения упражнений и задач.

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Глава двадцать третья

Уравнения электромагнитного поля

23.1. Электромагнитное поле и его уравнения в интегральной форме

В гл. 1, т. 1 были рассмотрены основные свойства электромагнитного поля и приведены основные понятия и законы, характеризующие электромагнитное поле.

Электромагнитное поле является особым видом материи. Всякая электрически заряженная частица окружена электромагнитным полем, составляющим с ней единое целое. Но электромагнитное поле может существовать и в свободном, отделенном от заряженных частиц состоянии в виде движущихся со скоростью, близкой к $3 \cdot 10^8$ м/с, фотонов или вообще в виде излученного движущегося с этой скоростью электромагнитного поля (электромагнитных волн).

Электромагнитное поле характеризуется непрерывным распределением в пространстве, и вместе с тем оно обнаруживает дискретную структуру в виде квантов излученного электромагнитного поля, например фотонов.

Электромагнитное поле является носителем определенного количества энергии, которая способна преобразовываться в другие виды энергии — химическую, тепловую, энергию механического движения и т. п.

Электромагнитное поле, являясь носителем определенного количества энергии, обладает также и определенной соответствующей этой энергии массой, которая может быть определена из общей связи $W = mc^2$ между полной энергией W и полной массой m, причем c есть скорость света в пустоте. Однако плотность массы в используемых обычно электромагнитных полях весьма мала. Пусть магнитная индукция равна 1 Тл и напряженность электрического поля равна 10^8 В/м = 10^6 В/см. Последнее может быть достигнуто только при весьма высоком вакууме. При этих условиях объемная плотность энергии электромагнитного поля, равная сумме объемных плотностей энергии электрического и магнитного полей, имеет значение

$$W' = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{10^{16}}{2 \cdot 4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} + \frac{1}{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} = 4{,}42 \cdot 10^5 \text{ Дж/м}^3.$$

Соответственно объемная плотность массы электромагнитного поля при этом равна

$$\frac{m}{V} = \frac{W'}{c^2} = \frac{4{,}42 \cdot 10^5}{(3 \cdot 10^8)^2} = 4{,}91 \cdot 10^{-12} \text{ кг/м}^3,$$

т. е. представляет собой весьма малую величину.

Наличие массы поля имеет принципиальное значение. В частности, располагая значением массы поля, весьма легко подсчитать давление света на поверхность тела, на которую он падает. Давление света было экспериментально установлено и количественно измерено в блестящих опытах П. Н. Лебедева, подтвердивших выводы теории электромагнитного поля.

Ничтожная плотность массы используемых на практике электромагнитных полей дает основание обычно не интересоваться этой характеристикой поля и обращать внимание в основном на энергетическую сторону рассматриваемых явлений.

Электромагнитное поле наряду с вышеперечисленными свойствами характеризуется *особыми электромагнитными свойствами*, не рассматриваемыми в механике, а именно способностью оказывать силовое воздействие на заряженные частицы. Это воздействие зависит от скорости заряженных частиц.

В первой части курса было указано, что электрическое и магнитное поля являются лишь двумя сторонами всегда единого электромагнитного поля. Деление объективно существующего независимого от наших наблюдений электромагнитного поля на две его составляющие — поле электрическое и поле магнитное — является относительным, т. е. зависит от условий, при которых производится наблюдение электромагнитного поля с помощью тех или иных устройств. В первой части курса были установлены количественные соотношения, определяющие связь между этими двумя сторонами электромагнитных явлений.

Из всего рассмотренного в первой части курса вытекает, что всякий электрический ток обязательно сопровождается магнитным полем и, наоборот, магнитное поле неизбежно связано с электрическим током. Принято различать три вида электрического тока: ток проводимости, плотность которого пропорциональна напряженности электрического поля; ток смещения, плотность которого пропорциональна скорости изменения напряженности электрического поля, и ток переноса, плотность которого определяется скоростью движущихся свободных электрически заряженных частиц или тел, зависящей от электрического напряжения вдоль пути, пройденного этими частицами или телами. Однако физически следует различать лишь два вида электрического тока, характеризующихся иными признаками. Первый вид тока представляет собой движение элементарных частиц, обладающих электрическим зарядом. Сюда относятся ток переноса, ток проводимости и часть тока смещения, обязанная своим появлением изменению электрической поляризованности вещества. Второй вид тока, который не может быть представлен как движение известных нам заряженных элементарных частиц, есть ток электрического смещения в пустоте.

В пространстве, окружающем движущиеся заряженные частицы, существует как электрическое поле, так и магнитное поле. Эти поля определяют собой две стороны единого электромагнитного поля.

Токи электрического смещения в пустоте возникают при изменении электрического поля во времени и также окружены магнитным полем. Следовательно, при всяком изменении электрического поля во времени возникает в том же пространстве связанное с ним магнитное поле. Оба эти поля определяют и в этом случае единое электромагнитное поле.

Связь между электрическим током и напряженностью магнитного поля устанавливается законом полного тока

$$\oint \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = i,$$

гласящим, что линейный интеграл напряженности магнитного поля по любому замкнутому контуру равен полному току сквозь поверхность, ограниченную этим контуром.

Уравнение, выражающее закон полного тока, понимаемое в указанном выше обобщенном смысле, когда в правой его части содержатся все виды токов, в том числе и ток смещения в пустоте, дано Максвеллом. Посредством этого уравнения устанавливается одна из важнейших связей между электрической и магнитной сторонами электромагнитных явлений, а именно, оно определяет магнитное поле, возникающее при движении заряженных частиц и при изменении электрического поля.

Вторая связь определяет электрическое поле, возникающее при изменении во времени магнитного поля. Она открыта Фарадеем и сформулирована им в виде закона электромагнитной индукции. Максвеллу принадлежит заслуга обобщения этого закона для любой среды. Согласно максвелловой формулировке закона электромагнитной индукции, электродвижущая сила, возникающая в контуре при изменении магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную контуром, равна взятой со знаком минус скорости изменения этого потока. Сущность обобщения Максвелла заключается в том, что контур, в котором возникает ЭДС, может быть представлен расположенным в любой среде. В частности, это может быть лишь мысленный контур, находящийся целиком в пустоте.

Возникновение ЭДС в таком контуре при изменении магнитного поля есть результат появления индуцированного электрического поля. При этом электродвижущая сила, действующая вдоль контура, равна линейному интегралу напряженности электрического поля, взятому вдоль этого контура. Таким образом, обобщенная максвеллова формулировка закона электромагнитной индукции представляется в виде

$$\oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Сущность явления электромагнитной индукции заключается в том, что при всяком изменении магнитного поля во времени возникает в том же пространстве связанное с ним электрическое поле.

Последнее уравнение определяет индуцированное электрическое поле, напряженность которого мы обозначали $E_{\text{инд}}$. Источниками электрического поля являются также электрически заряженные частицы и тела. Связь электрического поля, окружающего эти частицы и тела, с их электрическим зарядом определяется постулатом Максвелла

$$\oint_s \boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{s} = q,$$

который гласит: поток вектора электрического смещения сквозь любую замкнутую поверхность в любой среде равен свободному заряду, заключенному в объеме, ограниченном этой поверхностью.

Линии вектора напряженности индуцированного электрического поля всюду непрерывны. Линии вектора электрического смещения, связанного с зарядами тел и частиц, начинаются и кончаются на этих зарядах.

Линии вектора магнитной индукции всюду непрерывны, что выражается соотношением

$$\oint_s \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{s} = 0.$$

Приведенные выше четыре соотношения и являются основными уравнениями электромагнитного поля в интегральной форме.

Изучение электромагнитного поля и методов его расчета имеет весьма большое значение.

В гл. 3, т. 1, в которой были даны основные понятия теории электрических и магнитных цепей, была отмечена сложность физических явлений в этих цепях. Было показано, что возможность построения теории электрических и магнитных цепей основана на ряде научных абстракций, на пренебрежении рядом явлений, которые при определенных условиях можно считать второстепенными. Теория электрических и магнитных цепей оперирует с параметрами цепей, например с индуктивностью, емкостью, электрическим сопротивлением, магнитным сопротивлением и т. д., принимая значения этих параметров как данные. Однако для расчета параметров цепей необходимо знать электрические и магнитные поля, образующиеся на участках цепей при наличии в этих участках токов и напряжений. Изучение электромагнитных полей важно не только для расчета параметров цепей. Оно необходимо, если мы желаем более полно рассмотреть картину электромагнитных явлений в том или ином устройстве, не ограничивая себя теми допущениями, на которых основана теория электрических и магнитных цепей. По существу, для полной характеристики электромагнитных явлений в любом устройстве необходимо знать пространственное распределение определяющих их физических величин — плотности тока, напряженности электрического поля, магнитной индукции и т. д. и их изменение во времени. Поэтому для глубокого изучения электромагнитных явлений необходимо изучить характеризующие их поля.

Далеко не всегда при анализе электромагнитных явлений могут быть введены и использованы понятия об электрической и магнитной цепях, хотя бы даже

для получения приближенного решения. Существует много важных практических случаев, когда эти понятия теряют свой смысл и когда анализ электромагнитных явлений может быть произведен только путем детального изучения электромагнитного поля. В качестве одного из важнейших примеров можно указать на излучение и распространение электромагнитных волн.

Стройность уравнений электромагнитного поля отражает собой предельно высокую упорядоченность внутреннего движения материи, существующей в форме электромагнитного поля. Даже при самых сильных используемых нами электромагнитных полях в них не возникает турбулентное или хаотическое движение, свойственное тепловым процессам и процессам при движении жидкостей и газов. Отмеченная выше весьма малая плотность массы электромагнитного поля, связанная с отсутствием массы покоя, обусловливает то, что энергия электромагнитного поля легко передается со скоростью света вдоль проводов и в свободном пространстве. Эти свойства электромагнитного поля дают возможность с помощью электромагнитных устройств осуществлять управление большими потоками энергии, создавать сложные быстродействующие кибернетические системы управления, передавать огромные потоки информации, посылать сигналы на сотни миллионов километров в космическое пространство, производить вычисления с помощью электронных машин с исключительно большой скоростью.

Исследуя электромагнитное поле, необходимо определять все величины, его характеризующие, в каждой точке пространства. Поэтому мы не можем удовлетвориться интегральной формой уравнений и должны представить их в дифференциальной форме.

В дальнейшем будем рассматривать электромагнитное поле в неподвижных средах, и в частности в неподвижных проводниках. Соответственно во всех уравнениях будем вводить частные производные по времени.

23.2. Закон полного тока в дифференциальной форме — первое уравнение Максвелла

Согласно уравнению $\oint \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = i$, выражающему закон полного тока, линейный интеграл напряженности магнитного поля, взятый по замкнутому контуру, может рассматриваться как мера электрического тока, проходящего сквозь поверхность s, ограниченную этим контуром. Однако по величине этого интеграла нельзя судить о распределении тока по поверхности s. Чтобы решить этот вопрос, необходимо воспользоваться этим же уравнением в дифференциальной форме. Допустим, мы желаем выяснить, проходит ли ток сквозь малую поверхность, на которой расположена точка A, и какова плотность тока в этой точке (рис. 23.1).

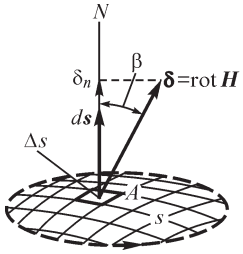

Рис. 23.1

Линейный интеграл напряженности магнитного поля, взятый вдоль малого контура, ограничивающего поверхность Δs, равен малому току Δi, проходящему сквозь эту поверхность: $\oint \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = \Delta i$, и может служить мерой тока Δi. Величина Δi зависит от размеров поверхности Δs. Чтобы получить вполне

определенную величину, разделим правую и левую части равенства на Δs и найдем предел, к которому стремится отношение, когда Δs стремится к нулю, стягиваясь в точке A. Будем иметь

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\oint \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta i}{\Delta s}.$$

Величина, стоящая в правой части равенства, представляет собой составляющую вектора плотности тока по направлению нормали к поверхности s в точке A:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta i}{\Delta s} = \delta \cos\beta = \delta_n.$$

Величина, стоящая в левой части равенства, как известно из курса математики, представляет собой проекцию на направление нормали к поверхности s в точке A вектора, называемого в и х р е м, или р о т о р о м, вектора $\boldsymbol{H}$. Вихрь вектора $\boldsymbol{H}$ обозначают rot $\boldsymbol{H}$. Соответственно для его проекции имеем обозначение

$$\mathrm{rot}_n \boldsymbol{H} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\oint \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l}}{\Delta s}.$$

Стало быть,

$$\mathrm{rot}_n \boldsymbol{H} = \delta_n.$$

Если элемент поверхности расположить так, чтобы положительная нормаль к нему совпадала с направлением вектора плотности тока, то предел отношения $\Delta i/\Delta s$ получит наибольшее значение, равное плотности тока в точке A, причем направление положительной нормали мы связываем правилом правого винта с направлением обхода контура. При таком расположении элемента поверхности в правой части равенства, написанного в векторной форме, будет стоять вектор плотности тока, а в левой — вектор rot $\boldsymbol{H}$. Таким образом, в дифференциальной форме закон полного тока представится в виде

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{H} = \delta.$$

Это уравнение электромагнитного поля носит название п е р в о г о у р а в н е н и я М а к с в е л л а. Ценность записи уравнения поля в векторной форме заключается в том, что такая запись не зависит от выбора системы координат. Однако выражения для составляющих вихря некоторого вектора $\boldsymbol{A}$, в частности вектора $\boldsymbol{H}$, через составляющие самого вектора $\boldsymbol{A}$ получаются различными в разных системах координат.

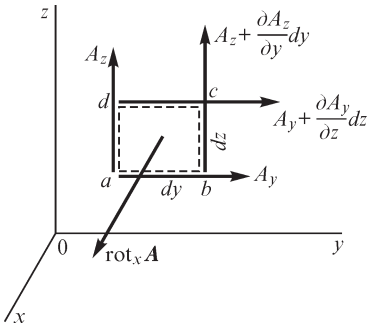

Рис. 23.2

Выразим составляющие вектора rot $\boldsymbol{A}$ в декартовых координатах. Рассмотрим бесконечно малый прямоугольный контур *abcda* (рис. 23.2) в плоскости, параллельной плоскости *YOZ*, и составим сумму произведений $\boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{l}$ по всем сторонам контура. Имеем

$+ A_y\, dy$ вдоль стороны ab;

$+\left(A_z + \dfrac{\partial A_z}{\partial y} dy \right) dz$ вдоль стороны bc,

$-\left(A_y + \dfrac{\partial A_y}{\partial z} dz \right) dy$ вдоль стороны cd;

$- A_z\, dz$ вдоль стороны da.

При этом A_y, $\left(A_z + \dfrac{\partial A_z}{\partial y} dy \right)$, $\left(A_y + \dfrac{\partial A_y}{\partial z} dz \right)$ и A_z — средние в пределах соответствующей стороны значения составляющих вектора $\boldsymbol{A}$. Суммируя эти величины и деля сумму на величину площадки $dy\, dz$, ограниченной контуром, находим

$$\operatorname{rot}_x \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}.$$

Определяя аналогичным образом другие составляющие, получаем

$$\operatorname{rot}_x \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z};\ \operatorname{rot}_y \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x};\ \operatorname{rot}_z \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Последние два выражения легко получаются из первого циклической перестановкой букв x, y, z.

Таким образом, в декартовых координатах первое уравнение Максвелла принимает вид

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \delta_x;\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \delta_y;\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \delta_z.$$

Пользуясь приведенными выше соображениями, можем получить выражения вектора $\operatorname{rot} \boldsymbol{A}$ и в других системах координат. Например, в цилиндрических координатах ρ, α, z радиальная, тангенциальная и осевая составляющие равны

$$\operatorname{rot}_\rho \boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial z},\ \operatorname{rot}_\alpha \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho},$$

$$\operatorname{rot}_z \boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\alpha) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial \alpha}.$$

В сферических координатах ρ, θ, φ составляющие вектора $\operatorname{rot} \boldsymbol{A}$ равны

$$\operatorname{rot}_\rho \boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho \sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\varphi \sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right],$$

$$\operatorname{rot}_\theta \boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \rho}(r A_\varphi)\right],$$

$$\operatorname{rot}_\varphi \boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\theta) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta}\right].$$

23.3. Закон электромагнитной индукции в дифференциальной форме — второе уравнение Максвелла

Напишем в дифференциальной форме уравнение $\oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = -\dfrac{d\Phi}{dt}$, выражающее закон электромагнитной индукции. При этом, рассматривая поле в неподвижных средах, заменим полную производную по времени частной производной. Составим линейный интеграл напряженности электрического поля по малому контуру, ограничивающему малую поверхность Δs (рис. 23.3); разделим его на величину поверхности и найдем предел, к которому стремится полученное отношение, когда поверхность Δs стремится к нулю, стягиваясь в некоторой точке A поля. При этом получим проекцию на направление нормали к выбранному элементу поверхности в точке A вихря вектора $\boldsymbol{E}$:

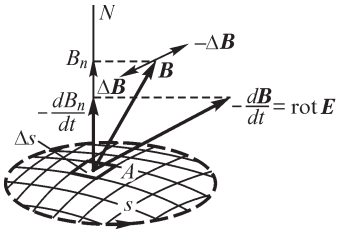

Рис. 23.3

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l}}{\Delta s} = \operatorname{rot}_n \boldsymbol{E}.$$

В правой части уравнения мы должны поток $\Delta\Phi$ сквозь поверхность Δs разделить на поверхность Δs и найти предел, к которому стремится это отношение, когда $\Delta s \to 0$. При этом получим составляющую вектора магнитной индукции $\boldsymbol{B}$ в точке A, нормальную к выбранному элементу поверхности:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta s} = \frac{d\Phi}{ds} = B_n.$$

Таким образом, имеем

$$\operatorname{rot}_n \boldsymbol{E} = -\frac{\partial B_n}{\partial t}.$$

Выберем положение элемента поверхности так, чтобы нормаль к нему совпала с вектором $-\partial\boldsymbol{B}/\partial t$. Тогда в левой части равенства получим вихрь вектора $\boldsymbol{E}$. Будем иметь

$$\operatorname{rot}_n \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}.$$

Это уравнение и представляет собой выражение закона электромагнитной индукции в дифференциальной форме. Оно называется в т о р ы м у р а в н е н и е м М а к с в е л л а.

Направление вектора $\partial\boldsymbol{B}/\partial t$ есть направление, к которому стремится направление приращения $\Delta\boldsymbol{B}$ вектора магнитной индукции, происходящего за промежуток времени Δt, когда $\Delta t \to 0$. Если вектор $\boldsymbol{B}$ изменяется не только по величине, но и по направлению, то производная $\partial\boldsymbol{B}/\partial t$ не направлена по одной прямой с вектором $\boldsymbol{B}$.

В декартовой системе координат получаем

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=-\frac{\partial B_x}{\partial t};\ \frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}=-\frac{\partial B_y}{\partial t};\ \frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-\frac{\partial B_z}{\partial t}.$$

23.4. Теорема Гаусса и постулат Максвелла в дифференциальной форме

Теорема Гаусса в применении к электрическому полю гласит: поток вектора напряженности электрического поля сквозь замкнутую поверхность в однородной и изотропной среде равен отношению электрического заряда, заключенного в объеме пространства, ограниченного этой поверхностью, к абсолютной диэлектрической проницаемости среды, т. е.

$$\oint_s \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{s}=\frac{q}{\varepsilon}.$$

Таким образом, интеграл напряженности электрического поля, распространенный по некоторой замкнутой поверхности (рис. 23.4), для однородной и изотропной среды может рассматриваться как мера электрического заряда, заключенного внутри этой поверхности. Однако по величине этого интеграла еще нельзя судить о распределении электрического заряда внутри объема, ограниченного замкнутой поверхностью. Для решения этого вопроса необходимо применить теорему Гаусса в дифференциальной форме. Допустим, что мы желаем выяснить, находится ли электрический заряд в малом объеме ΔV, заключающем в себе точку A, и какова объемная плотность электрического заряда в этой точке.

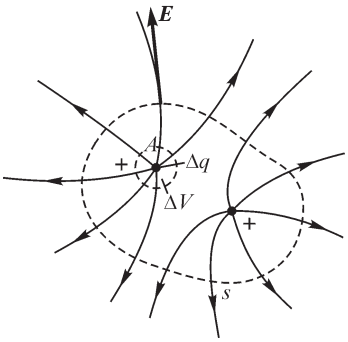

Рис. 23.4

Поток вектора $\boldsymbol{E}$ сквозь малую поверхность, ограничивающую объем ΔV, равен деленному на ε малому заряду Δq, заключенному внутри этой поверхности:

$$\oint_s \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{s}=\frac{\Delta q}{\varepsilon}.$$

Разделим обе части уравнения на ΔV и найдем предел, к которому стремится отношение, когда $\Delta V\to 0$. Имеем

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{s}}{\Delta V}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta q}{\varepsilon\Delta V}.$$

Выражение, стоящее в левой части уравнения, называется р а с х о ж д е н и е м, или д и в е р г е н ц и е й, вектора $\boldsymbol{E}$ и кратко обозначается div $\boldsymbol{E}$. В правой части получаем объемную плотность ρ электрического заряда в данной точке пространства, деленную на ε. Таким образом, теорема Гаусса в дифференциальной форме принимает вид

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Термин «расхождение» хорошо характеризует особенности поля в тех местах, где $\rho \neq 0$, и в тех местах, где $\rho = 0$. Положительный заряд можно рассматривать как «источник» линий напряженности электрического поля, около него начинаются эти линии. Отрицательный заряд является как бы «стоком» (отрицательным источником) линий, около него линии кончаются. Поэтому если в некотором объеме ΔV объемная плотность электрического заряда не равна нулю, то через поверхность, ограничивающую этот объем, линии напряженности электрического поля *расходятся* в окружающее пространство или *сходятся* из него (рис. 23.5, *а*, *б*), что кратко выражается словами: расхождение вектора $\boldsymbol{E}$ не равно нулю. В области поля, где отсутствуют объемные заряды ($\rho = 0$), линии напряженности поля не начинаются и не кончаются; через любой элемент объема такого пространства линии напряженности поля только проходят (рис. 23.5, *в*), но не расходятся от него и не сходятся к нему. Мы говорим, что расхождение вектора $\boldsymbol{E}$ во всех точках такой области равно нулю: $\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 0$. Поле в области, где $\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 0$, называется с о л е н о и д а л ь н ы м (от греческого слова σωληνυιδη′ζ — трубкообразный).

Значение расхождения вектора не зависит от выбора системы координат, и соответственно последнее уравнение инвариантно в отношении системы координат. Однако выражения расхождения некоторого вектора $\boldsymbol{A}$ через его составляющие получаются различными в разных системах координат.

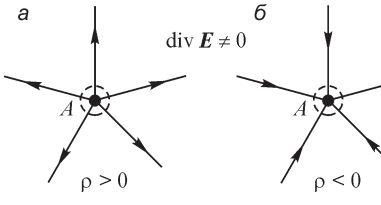

Рис. 23.5

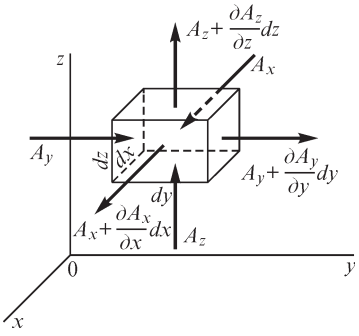

Рис. 23.6

Выразим $\operatorname{div}\boldsymbol{A}$ в декартовых координатах. Представим себе бесконечно малый параллелепипед со сторонами *dx*, *dy* и *dz*, параллельными осям координат (рис. 23.6). Поток вектора $\boldsymbol{A}$ сквозь поверхность параллелепипеда слагается из потоков сквозь его грани. Имеем

– $A_x\, dy\, dz$ сквозь дальнюю грань;

$+\left(A_x + \dfrac{\partial A_x}{\partial x}\, dx\right) dy\, dz$ сквозь ближнюю грань;

– $A_y\, dx\, dz$ сквозь левую грань;

$+\left(A_y + \dfrac{\partial A_y}{\partial y}\,dy\right) dx\,dz$ сквозь правую грань;

$-A_z\,dx\,dy$ сквозь нижнюю грань;

$+\left(A_z + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}\,dz\right) dx\,dy$ сквозь верхнюю грань.

При этом A_x, $\left(A_x + \dfrac{\partial A_x}{\partial x}\,dx\right)$ и т. д. — средние в пределах соответствующей грани значения нормальных к поверхности грани составляющих вектора $\boldsymbol{A}$. Суммируя потоки через все грани и деля сумму на объем параллелепипеда $dx\,dy\,dz$, находим

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Расхождение вектора иногда обозначают $\nabla\boldsymbol{A}$, где ∇ (читается «набла») представляет собой символический дифференциальный векторный оператор Гамильтона. В декартовой системе координат он имеет вид

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

где $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ — единичные векторы по осям OX, OY и OZ. Величины $\dfrac{\partial}{\partial x} = \nabla_x$, $\dfrac{\partial}{\partial y} = \nabla_y$, $\dfrac{\partial}{\partial z} = \nabla_z$ мы должны рассматривать как составляющие ∇ по осям координат.

Дифференциальное выражение $\nabla\boldsymbol{A}$ формально можно рассматривать как скалярное произведение векторов ∇ и $\boldsymbol{A}$. Действительно,

$$\nabla\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(\boldsymbol{i}A_x + \boldsymbol{j}A_y + \boldsymbol{k}A_z) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}A_x + \frac{\partial}{\partial y}A_y + \frac{\partial}{\partial z}A_z = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \operatorname{div}\boldsymbol{A},$$

так как $\boldsymbol{ii} = \boldsymbol{jj} = \boldsymbol{kk} = 1$ и $\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{jk} = \boldsymbol{ki} = 0$.

Таким образом, теорему Гаусса в дифференциальной форме можно написать также в виде

$$\nabla\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}.$$

В декартовой системе координат она имеет вид

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Выражения для $\operatorname{div}\boldsymbol{A}$ принимают вид:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$ — в цилиндрической и

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 A_\rho) + \frac{1}{\rho \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{\rho \sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$ — в сферической системах координат.

Для неоднородной и анизотропной среды теорема Гаусса не применима. При этом следует пользоваться аналогичным, имеющим значительно более общий характер уравнением для вектора электрического смещения $\boldsymbol{D}$. Именно, согласно постулату Максвелла, поток вектора электрического смещения сквозь любую замкнутую поверхность в любой среде равен свободному электрическому заряду, заключенному в пространстве, ограниченном этой поверхностью:

$$\oint_s \boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{s} = q.$$

В дифференциальной форме постулат Максвелла принимает вид

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_s \boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{s}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V},$$

т. е.

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = \rho$$

или в иной записи

$$\nabla \boldsymbol{D} = \rho.$$

В декартовых координатах это уравнение пишется в форме

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho.$$

Заметим попутно, что выражение rot $\boldsymbol{A}$ может быть записано через знак ∇ в виде векторного произведения $[\nabla \boldsymbol{A}]$, в чем нетрудно убедиться.

23.5. Выражение в дифференциальной форме принципов непрерывности магнитного потока и непрерывности электрического тока

Имеющий фундаментальное значение принцип непрерывности магнитного потока утверждает, что линии магнитной индукции нигде не имеют ни начала, ни конца — они всюду непрерывны. Иными словами, магнитный поток сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint_s \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{s} = 0.$$

В природе не существует магнитных масс, являющихся источниками линий магнитной индукции, подобных электрическим зарядам, которые дают начало линиям электрического смещения. Магнитное поле порождается только электрическими токами, и линии магнитной индукции, окружающие электрические

токи, всегда замкнуты, непрерывны. Дифференциальной записью математической формулировки этого важного принципа является выражение

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0,$$

которое справедливо для всех точек любого магнитного поля.

Столь же фундаментальное значение имеет принцип непрерывности электрического тока, согласно которому линии тока нигде не прерываются, всегда являясь замкнутыми. Полный ток, включающий в себя токи проводимости, переноса и смещения, проходящий сквозь любую замкнутую поверхность в направлении внешней нормали, равен нулю:

$$\oint_s \delta \, d\boldsymbol{s} = 0.$$

Как было указано в первой части, это важнейшее положение приобретает совершенно общий характер лишь с введением в рассмотрение, помимо токов, представляющих собой движение элементарных заряженных частиц, также и токов электрического смещения в пустоте. Дифференциальной записью последнего равенства является выражение

$$\mathrm{div}\,\delta = 0,$$

которое, так же как и выражение $\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0$, справедливо во всех точках пространства.

С формальной стороны выражение $\mathrm{div}\,\delta = 0$ является прямым следствием первого уравнения Максвелла. Действительно, $\mathrm{div}\,\delta = \mathrm{div\ rot}\,\boldsymbol{H}$, но для любого вектора $\boldsymbol{A}$ расхождение его вихря тождественно равно нулю. Таким образом,

$$\mathrm{div\ rot}\,\boldsymbol{A} = \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{rot}_x\,\boldsymbol{A} + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{rot}_y\,\boldsymbol{A} + \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{A} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = 0.$$

Поэтому в полной системе уравнений электромагнитного поля, в которую в качестве одного из основных входит первое уравнение Максвелла, из двух выражений, характеризующих принципы непрерывности магнитного потока и электрического тока, должно содержаться только первое.

23.6. Теорема Остроградского. Теорема Стокса

Установим два важных, имеющих большое значение в теории поля, равенства, выражающих собой теорему Остроградского и теорему Стокса. Эти равенства имеют чисто геометрический смысл и справедливы для произвольного вектора $\boldsymbol{A}$, но мы получим их сначала на основании имеющихся в нашем распоряжении уравнений для векторов напряженностей электрического и магнитного полей и затем уже дадим им геометрическую интерпретацию.

Пусть заряд q распределен некоторым образом по объему V, ограниченному поверхностью s. Тогда $q = \int_V \rho \, dV$. Используя теорему Гаусса в интегральной фор-

ме, можем написать: $\oint_s \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{s} = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon} dV$. Заменяя ρ/ε через div $\boldsymbol{E}$ согласно той же теореме в дифференциальной форме, получаем равенство

$$\oint_s \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{s} = \int_V \operatorname{div} \boldsymbol{E}\, dV.$$

Это равенство может быть написано для любого вектора $\boldsymbol{A}$, непрерывного вместе со своими первыми производными в области V и на поверхности s:

$$\oint_s \boldsymbol{A} d\boldsymbol{s} = \int_V \operatorname{div} \boldsymbol{A}\, dV.$$

Оно является формулировкой теоремы Остроградского и имеет чисто геометрический смысл преобразования объемного интеграла в поверхностный. Действительно, представим себе объем V разделенным на элементы объема dV. Величина div $\boldsymbol{A}$ в соответствии с ее определением есть отношение потока вектора $\boldsymbol{A}$ сквозь поверхность, ограничивающую объем dV, к объему dV. Следовательно, div $\boldsymbol{A}\, dV$ есть поток вектора $\boldsymbol{A}$ сквозь поверхность, ограничивающую объем dV. Представим два соседних объема dV, соприкасающихся друг с другом по некоторой поверхности ds. Очевидно, если поток сквозь поверхность соприкосновения для одного объема будет выходящим из него, т. е. положительным, то для другого он будет входящим в него, т. е. отрицательным. Поэтому при составлении интеграла $\int_V \operatorname{div} \boldsymbol{A}\, dV$ по всему объему V потоки сквозь все поверхности между смежными элементарными объемами dV в сумме дадут нуль. Останутся только потоки сквозь те поверхности ds крайних элементарных объемов dV, которые являются элементами поверхности s, ограничивающей весь объем V. Таким образом, интеграл $\int_V \operatorname{div} \boldsymbol{A}\, dV$ действительно равен потоку вектора $\boldsymbol{A}$ сквозь поверхность s, т. е. равен интегралу $\oint_s \boldsymbol{A} d\boldsymbol{s}$.

Установим теперь второе важное равенство. Пусть сквозь некоторую незамкнутую поверхность s, ограниченную контуром l, проходит ток i. Имеем $i = \int_s \delta\, ds$. Согласно первому уравнению Максвелла в интегральной форме, можем написать $\oint_l \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = \int_s \delta\, d\boldsymbol{s}$. Используя то же уравнение в дифференциальной форме, заменим δ на rot $\boldsymbol{H}$. Получим

$$\oint_l \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = \int_s \operatorname{rot} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{s}.$$

Это равенство может быть написано для любого вектора $\boldsymbol{A}$, непрерывного вместе со своими первыми производными на поверхности s и на контуре l:

$$\oint_l \boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{l} = \int_s \operatorname{rot} \boldsymbol{A} d\boldsymbol{s}.$$

Оно выражает собой теорему Стокса и имеет чисто геометрический смысл преобразования поверхностного интеграла в интеграл по контуру. Действительно, представим себе поверхность s разделенной на элементы ds. Величина нормальной составляющей вектора rot $\boldsymbol{A}$ в соответствии с ее определением есть отношение суммы произведений $\boldsymbol{A}\,d\boldsymbol{l}$ по всем сторонам контура, ограничивающего элементарную площадку ds, к величине поверхности ds. Следовательно, rot $\boldsymbol{A}\,d\boldsymbol{s}$ представляет собой эту сумму. При составлении интеграла $\int_s \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}\,d\boldsymbol{s}$ по всей поверхности s произведения $\boldsymbol{A}\,d\boldsymbol{l}$ для всех соприкасающихся сторон соседних элементарных площадок взаимно компенсируются, и остаются только произведения $\boldsymbol{A}\,d\boldsymbol{l}$ по всем элементам dl контура l, ограничивающего всю поверхность s, что и приводит к последнему равенству.

23.7. Полная система уравнений электромагнитного поля

Рассматривая элементарные заряженные частицы, движущиеся в пустоте, и окружающее их поле, мы различаем два вида электрического тока: ток переноса и ток электрического смещения в пустоте. В части пространства, занимаемой движущимися заряженными частицами, существуют токи переноса, плотность которых имеет выражение $\boldsymbol{J}_{\text{пер}} = \rho\boldsymbol{v}$. В остальном пространстве, окружающем движущиеся заряженные частицы, существуют токи электрического смещения, имеющие плотность $\delta_{\text{см}} = \partial\boldsymbol{D}/\partial t$, где $\boldsymbol{D}$ — электрическое смещение в пустоте.

В общем виде можно написать: $\delta = \partial\boldsymbol{D}/\partial t + \rho\boldsymbol{v}$, причем в одних точках пространства первое слагаемое равно нулю, а в других точках равно нулю второе слагаемое.

Векторы $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{E}$ электрического поля и соответственно векторы $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{H}$ магнитного поля связаны через электрическую постоянную ε_0 и магнитную постоянную μ_0 соотношениями:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H}.$$

Таким образом, полная система уравнений электромагнитного поля в этом случае имеет вид

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \delta; \quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}; \quad \delta = \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} + \rho\boldsymbol{v};$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E}; \quad \boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H}; \quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = \rho; \quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0.$$

Используя связи $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H}$, можно эти уравнения переписать так, чтобы они содержали только векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$. Эти векторы следует рассматривать как основные векторы электромагнитного поля. Действительно, как мы видели (см. ч. I), сила, действующая на заряженную частицу, движущуюся в электромагнитном поле, определяется именно этими векторами. Учитывая, что ε_0 и μ_0 – постоянные величины, получаем

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} = \mu_0\delta; \quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}; \quad \delta = \varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} + \rho\boldsymbol{v}; \quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}; \quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0.$$

При микроскопическом рассмотрении явлений только что приведенный случай является общим. При этом в некоторой области пространства элементарные частицы, обладающие электрическим зарядом, могут отсутствовать, и электрические токи могут быть замкнутыми на себя токами электрического смещения, что, например, имеет место в излученной электромагнитной волне.

При изучении электромагнитных процессов в веществе обычно нет необходимости рассматривать сложную микроструктуру вещества. Действительное электромагнитное поле в веществе весьма резко изменяется от точки к точке в пространстве между элементарными заряженными частицами, входящими в состав вещества, и в каждой точке величины, характеризующие поле, являются быстро изменяющимися функциями времени вследствие движения с большой скоростью этих частиц. Однако эти неоднородности имеют микроскопический характер, и мы имеем все основания их осреднить в пространстве и во времени при рассмотрении макроскопических процессов. При этом осредненные величины, вообще говоря, будут функциями координат и времени, но изменяющимися значительно медленнее, чем истинные величины при микроскопическом рассмотрении явления.

Если свободные заряженные частицы находятся в столь разреженном веществе, что они могут беспрепятственно ускоряться под действием электрического поля, не испытывая или почти не испытывая столкновений с молекулами вещества, то в таком случае под действием осредненного электрического поля возникает упорядоченный ток переноса. Примером может служить ток между электродами в сильно разреженном газе, когда расстояние между электродами меньше средней длины свободного пробега ионов и электронов.

Если элементарные заряженные частицы, движущиеся в веществе, многократно путем столкновения передают атомам вещества кинетическую энергию, приобретаемую при ускорении в осредненном электрическом поле, то под действием постоянного осредненного поля устанавливается постоянная средняя скорость заряженных частиц. При этом в изотропной среде осредненная плотность тока может быть выражена в форме произведения осредненной напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}$ и величины γ, характеризующей электропроводность вещества и именуемой удельной проводимостью вещества. Такой ток называем током проводимости. Примерами могут служить токи в металлах, полупроводниках и электролитах.

Плотность тока переноса $\boldsymbol{J}_{\text{пер}}$ и плотность тока проводимости $\boldsymbol{J}_{\text{пр}}$ могут быть представлены в виде произведения осредненной объемной плотности заряда движущихся частиц на осредненную их скорость. При этом если в движении участвуют как положительно, так и отрицательно заряженные частицы, то плотность тока может быть выражена в виде $\boldsymbol{J} = \rho_+\boldsymbol{v}_+ + \rho_-\boldsymbol{v}_-$, где ρ_+ и $\boldsymbol{v}_+$ — объемная плотность заряда и средняя скорость положительно заряженных частиц и ρ_- и $\boldsymbol{v}_-$ — тоже отрицательно заряженных частиц.

Для тока проводимости имеем возможность представить плотность тока в изотропной среде также в форме

$$\boldsymbol{J}_{\text{пр}} = \gamma\boldsymbol{E}.$$

Удельная проводимость γ зависит от температуры среды и в общем случае может зависеть также и от напряженности электрического поля.

Во всех остальных случаях, когда среду не представляется возможным характеризовать определенным образом зависящей от температуры и напряженности поля удельной электрической проводимостью, т. е. когда связь между плотностью тока и напряженностью электрического поля не представляется возможным выразить в форме $\boldsymbol{J} = \gamma \boldsymbol{E}$, условимся явление движения заряженных частиц именовать током переноса. При таком условии в окрестности данной точки пространства может быть либо ток проводимости, либо ток переноса, а не оба эти вида тока одновременно.

Всякое вещество под действием электрического поля поляризуется. Элементарные заряженные частицы, входящие в состав атомов и молекул, смещаются: частицы с положительными зарядами — в направлении поля, с отрицательными зарядами — против поля. Этот процесс мы количественно характеризовали поляризованностью $\boldsymbol{P}$ вещества. Полное осредненное электрическое смещение $\boldsymbol{D}$ в веществе равно сумме осредненного электрического смещения $\boldsymbol{D}_0$ в пустоте и поляризованности $\boldsymbol{P}$ вещества:

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}_0 + \boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}.$$

Для осредненных значений $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{E}$ для изотропного вещества можно написать соотношение

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E},$$

где ε — абсолютная диэлектрическая проницаемость вещества.

В выражении для плотности тока смещения в диэлектрике

$$\delta_{\text{см}} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \frac{\partial (\varepsilon \boldsymbol{E})}{\partial t}$$

будем подразумевать под $\delta_{\text{см}}$, $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{E}$ также осредненные значения соответствующих величин.

При внесении вещества во внешнее магнитное поле в веществе возникают согласованные элементарные токи, создающие магнитные поля, направленные против внешнего поля, если вещества диамагнитные, и в сторону внешнего поля, если вещества парамагнитные и ферромагнитные. Осредненное значение магнитной индукции может быть представлено при этом в виде суммы

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} + \mu_0 \boldsymbol{M},$$

где $\boldsymbol{H}$ — осредненная напряженность магнитного поля и $\boldsymbol{M}$ — намагниченность вещества. Соотношение между $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{H}$ для изотропного вещества пишется в виде

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H},$$

где μ — абсолютная магнитная проницаемость вещества.

Рассматривая в дальнейшем осредненные в указанном смысле значения всех величин, будем иметь для любого изотропного вещества следующую систему уравнений электромагнитного поля:

$$\text{rot}\,\boldsymbol{H} = \delta; \quad \text{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}; \quad \delta = \gamma \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{J}_{\text{пер}};$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}; \quad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}; \quad \text{div}\,\boldsymbol{D} = \rho; \quad \text{div}\,\boldsymbol{B} = 0.$$

Плотность тока для общности выражена в виде суммы трех составляющих. При этом надо иметь в виду, что по самому смыслу первой и третьей составляющих они не могут иметь места в одной и той же точке пространства одновременно. Две первые составляющие могут быть одновременно в полупроводящей среде. Однако в хорошо проводящих веществах всегда можно пренебречь второй составляющей по сравнению с первой и в диэлектриках обычно можно пренебречь первой составляющей по сравнению со второй.

При решении конкретных задач к приведенным выше уравнениям электромагнитного поля необходимо добавить граничные условия на поверхностях, являющихся границами между различными средами — границами между диэлектриками и проводниками, между двумя диэлектриками с различными ε, между двумя проводящими средами с различными γ, между двумя средами с различными μ. Эти граничные условия будут сформулированы в следующем параграфе. При исследовании переменных полей в общем случае должны быть заданы также начальные условия.

Кроме того, для решения вопроса о передаче энергии электромагнитным полем необходимо использовать выражение для объемной плотности энергии электромагнитного поля:

$$W' = W_{\text{э}}' + W_{\text{м}}' = \frac{\boldsymbol{ED}}{2} + \frac{\boldsymbol{BH}}{2}.$$

23.8. Граничные условия на поверхности раздела двух сред с различными электрическими и магнитными свойствами

Рассмотрение уравнений электромагнитного поля, записанных в дифференциальной форме в выбранной системе координат, показывает, что величины ***H***, ***E***, ***B***, ***D*** должны быть непрерывными функциями координат, так как в противном случае их производные не существуют. Функции ***H***, ***E***, ***B***, ***D*** могут быть разрывными в точках на границах раздела сред с различными электрическими или магнитными свойствами, а также в точках поверхностей с весьма тонкими распределенными на них слоями зарядов или токов.

Так как уравнения электромагнитного поля не могут быть записаны в таких точках, то задача нахождения электромагнитного поля не может быть решена, если не дополнить уравнения соотношениями, связывающими составляющие векторов ***H***, ***E***, ***B***, ***D*** по обе стороны поверхностей, являющихся границами раздела сред с различными электрическими или магнитными свойствами, и называемыми граничными условиями.

Рассмотрим поведение поля на границе раздела двух однородных и изотропных сред с различными электрическими и магнитными свойствами.

В каждой из сред поле будем характеризовать векторами ***X***, ***Y***, связанными между собой соотношением $\boldsymbol{Y} = a\boldsymbol{X}$, где a — скалярная величина, и удовлетво-

ряющими уравнениям rot $\boldsymbol{X} = 0$, div $\boldsymbol{Y} = 0$, или в интегральной форме: $\oint_l \boldsymbol{X}\, d\boldsymbol{l} = 0$, $\oint_s \boldsymbol{Y}\, d\boldsymbol{s} = 0$ (рис. 23.7).

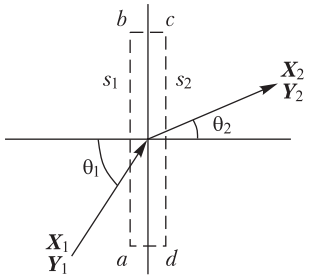

Рис. 23.7

Пусть вектор $\boldsymbol{X}$ в первой среде у поверхности раздела образует с нормалью к ней угол θ_1. Определим соответствующий угол θ_2 во второй среде. Для линейного интеграла $\oint_l \boldsymbol{X}\, d\boldsymbol{l}$ по контуру *abcda* имеем: $\oint_l \boldsymbol{X}\, d\boldsymbol{l} = X_1 \sin\theta_1 \cdot ab - X_2 \sin\theta_2\, cd = 0$, если *bc* и *ad* бесконечно малы по сравнению с *ab* и *cd*.

Ввиду того, что $ab = cd$, получаем:

$$X_1 \sin\theta_1 = X_2 \sin\theta_2, \qquad (*)$$

т. е. на поверхности раздела равны касательные составляющие вектора $\boldsymbol{X}$.

Вообразим замкнутую поверхность, образованную плоскими поверхностями s_1 и s_2, следы которых в плоскости рисунка суть линии *ab* и *cd*, и цилиндрической поверхностью, пересекающейся с плоскостью рисунка по линиям *bc* и *ad*. Поток вектора $\boldsymbol{Y}$ сквозь эту замкнутую поверхность равен нулю, так как внутри поверхности нет источников поля $\boldsymbol{Y}$. Пренебрегая потоком сквозь бесконечно малую цилиндрическую поверхность, получаем

$$\int_{s_1} \boldsymbol{Y}\, d\boldsymbol{s} + \int_{s_2} \boldsymbol{Y}\, d\boldsymbol{s} = -Y_1 \cos\theta_1 s_1 + Y_2 \cos\theta_2 s_2 = 0,$$

откуда, принимая во внимание, что $s_1 = s_2$, находим

$$Y_1 \cos\theta_1 = Y_2 \cos\theta_2, \qquad (**)$$

т. е. на поверхности раздела равны нормальные составляющие вектора $\boldsymbol{Y}$.

Разделив равенство (*) на (**), с учетом соотношения $Y_1 = a_1 X_1$ и $Y_2 = a_2 X_2$, получаем условие преломления линий при переходе их из одной среды в другую:

$$\frac{\operatorname{tg}\theta_1}{\operatorname{tg}\theta_2} = \frac{a_1}{a_2}.$$

Если линии вектора $\boldsymbol{X}$ нормальны к поверхности раздела, то векторы $\mathbf{Y}$ будут одинаковы в обеих средах: $\boldsymbol{Y}_1 = \boldsymbol{Y}_2$, но вектор $\boldsymbol{X}$ на поверхности раздела скачком изменяет свое значение, так как

$$X_1 = \frac{Y_1}{a_1} \neq X_2 = \frac{Y_2}{a_2}.$$

Понимая под функцией $\boldsymbol{X}$ одну из величин $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, а под функцией $\boldsymbol{Y}$ — $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{J}$ или $\boldsymbol{B}$, можем записать соотношения, связывающие их касательные и нормальные составляющие на поверхности раздела двух сред с различными свойствами, характеризуемыми скалярной величиной *a*, равной ε, γ или μ.

Полученные условия непрерывности соответствующих составляющих величин $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{B}$ на поверхности раздела двух сред сохраняются также и в случае

анизотропных сред, свойства которых характеризуются тензорной величиной (a). Однако условия преломления линий при переходе их из одной среды в другую принимают более сложный вид.

В некоторых случаях на границах раздела сред с различными свойствами размещаются источники поля, такие как электрические заряды с поверхностной плотностью σ и подводимые извне сторонние токи с линейной плотностью j. В этих условиях граничные условия видоизменяются, так как интегралы $\oint_s \boldsymbol{D}\,d\boldsymbol{s}$, $\oint_l \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l}$ уже нельзя приравнять к нулю.

23.9. Электростатическое поле и поле постоянных токов как частные случаи электромагнитного поля

Уже было отмечено, что при движении заряженного тела около него возникают как электрическое, так и магнитное поля, т. е. обнаруживается электромагнитное поле, и что лишь в частном случае покоящегося заряженного тела около него обнаруживается только одно электрическое поле. Уже из этого простого факта следует, что уравнения, характеризующие электростатическое поле, должны вытекать как частный случай из общих уравнений электромагнитного поля. Очевидно, это будет простейший частный случай, характерный тем, что всюду плотность тока равна нулю. Рассмотрению этого частного случая будут посвящены следующие две главы.

Другим простейшим случаем является система неподвижных сверхпроводящих контуров, по которым протекают постоянные токи. Около таких контуров обнаруживается только статическое магнитное поле. Действительно, электрическое поле в такой системе полностью отсутствует, так как магнитный поток не изменяется во времени и, следовательно, в пространстве не индуцируется никаких ЭДС и, кроме того, сопротивление проводников, а следовательно, и падение напряжения в проводниках равны нулю. Магнитное поле неподвижных постоянных магнитов имеет такой же характер, как и поле около неподвижных сверхпроводящих контуров с токами, так как оно создается элементарными токами в теле магнита, протекающими без потерь энергии. Несколько более сложным и вместе с тем весьма важным частным случаем электромагнитного поля является поле постоянных токов, протекающих в неподвижных проводниках, обладающих отличным от нуля электрическим сопротивлением. В этом случае около проводников и внутри них обнаруживаются как постоянное магнитное поле, так и постоянное электрическое поле. Рассмотрению этих случаев посвящаются двадцать шестая, двадцать седьмая и двадцать восьмая главы.

В последних двух главах будет рассмотрен общий случай — электромагнитное поле, изменяющееся во времени.

Проблема расчета электромагнитного поля при сложной форме геометрии области рассматривается в разделе математики, называемом математической физикой.

В дальнейшем мы приведем некоторые из методов математической физики, оптимальные для рассмотренных ранее задач. Из большой совокупности подходов могут быть выделены три: непосредственные аналитические методы расчета

непрерывного распределения в пространстве и во времени рассчитываемых величин (напряженностей E, H поля, потенциалов U и других); численные методы, при которых искомые величины отыскиваются в конечней совокупности точек, называемых узлами, при помощи конечно-разностных уравнений; методы представления исходных уравнений поля в виде интегральных уравнений и методы физического и математического моделирования.

Глава двадцать четвертая

Электростатическое поле

24.1. Безвихревой характер электростатического поля. Градиент электрического потенциала

Основной задачей настоящей главы является рассмотрение методов расчета электростатического поля, т. е. электрического поля системы неподвижных относительно наблюдателя заряженных тел при отсутствии электрических токов. Если в системе нет намагниченных тел, то магнитное поле отсутствует. Следовательно, всюду

$$\boldsymbol{J} = 0; \qquad \boldsymbol{B} = 0; \qquad \boldsymbol{H} = 0.$$

Наличие в электрическом поле свободных распределенных в объеме зарядов привело бы к возникновению электрического тока. Поэтому предположение, что $\boldsymbol{J} = 0$, ведет к заключению, что всюду $\rho = 0$. Могут быть только заряды, распределенные по поверхностям заряженных тел.

Из системы уравнений электромагнитного поля остается следующая совокупность:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0; \qquad \boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}; \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{D} = 0.$$

Условие $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0$ свидетельствует, что *электростатическое поле имеет безвихревой характер*. Поле, удовлетворяющее этому условию, называют безвихревым. Согласно теореме Стокса, для любого замкнутого контура имеем

$$\oint_l \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = \int_s \operatorname{rot} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{s} = 0.$$

Таким образом, условие $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0$ выражает в дифференциальной форме ранее высказанное важное положение: в электростатическом поле линейный интеграл вектора $\boldsymbol{E}$ вдоль любого замкнутого контура равен нулю. Соответственно в электростатическом поле линейный интеграл вектора $\boldsymbol{E}$, взятый от точки A до точки B, не зависит от выбора пути интегрирования и полностью определяется в заданном поле положением точек A и B. Это обстоятельство дало нам возможность ввести понятие о потенциале электростатического поля. Потенциал электростатического поля в точке A мы определили как линейный интеграл вектора $\boldsymbol{E}$, взятый от точки A до некоторой заданной точки P, т. е. $U_A = \int_A^P \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l}$. Потенциал в точке P равен нулю. Линейный интеграл вектора $\boldsymbol{E}$ вдоль некоторого пути от точки A до точки B есть разность электрических потенциалов в точках A и B:

$$\int_A^P \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = U_A - U_B.$$

Установим связь между напряженностью электрического поля и изменением потенциала в пространстве. Допустим, что положение точки A, в которой рассматриваем потенциал U, определяется ее расстоянием l от начальной точки O

вдоль некоторого пути (рис. 24.1), идущего в точку P, где потенциал принят равным нулю. Выражение для потенциала при этом можно написать в виде

$$U = \int_{l}^{l_P} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = \int_{l}^{l_P} \boldsymbol{E} \cos\alpha\, dl,$$

причем l_P — длина всего пути от точки O до точки P; α — угол между направлением вектора $\boldsymbol{E}$ и касательной к пути.

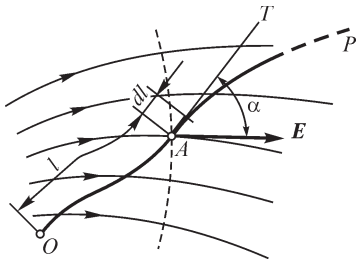

Рис. 24.1

Взяв частную производную от обеих частей равенства по нижнему пределу, найдем

$$\frac{\partial U}{\partial l} = -E \cos a,$$

откуда следует, что приращение потенциала, рассчитанное на единицу перемещения в каком-либо направлении, численно равно взятой с обратным знаком составляющей напряженности поля в этом направлении.

В частности, в декартовых координатах имеем

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -E_x; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -E_y; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -E_z.$$

Если направление перемещения dl составляет прямой угол ($\alpha = \pi/2$) с вектором $\boldsymbol{E}$, то $\cos\alpha = 0$ и $\partial U/\partial l = 0$. Следовательно, мысленно перемещаясь в направлении, нормальном к направлению линий напряженности поля, будем иметь $U = \text{const}$, т. е. будем оставаться *на поверхности равного потенциала*. *Линии напряженности поля нормальны к поверхностям равного потенциала*. Уравнение $U(x, y, z) = \text{const}$ определяет совокупность точек, лежащих на поверхности равного потенциала, т. е. является уравнением этой поверхности. Следы поверхностей равного потенциала в плоскости чертежа называют линиями равного потенциала. Линии равного потенциала пересекаются с линиями напряженности поля всюду под прямым углом.

Совмещая направление перемещения dl с направлением вектора $\boldsymbol{E}$, будем иметь

$$\alpha = 0; \quad \cos\alpha = 1; \quad \frac{\partial U}{\partial t} = -E.$$

Это характерное направление совпадает с нормалью к поверхности равного потенциала. Поэтому условимся обозначать перемещение dl в этом направлении через dn, в соответствии с чем напишем:

$$\frac{\partial U}{\partial n} = -E.$$

Очевидно, dn есть элемент длины линии напряженности поля, причем координату n считаем растущей в направлении вектора $\boldsymbol{E}$.

Производная от потенциала по координате имеет наибольшее значение в направлении, нормальном к поверхности равного потенциала и противоположном

направлению вектора $\boldsymbol{E}$. Это наибольшее значение производной может быть изображено вектором, направленным против вектора $\boldsymbol{E}$ и носящим название градиента электрического потенциала. Его обозначают символом grad U.

Градиент потенциала равен приращению потенциала, отнесенному к единице длины и взятому в направлении, в котором это приращение имеет наибольшее значение:

$$|\text{grad } U| = \left|\frac{\partial U}{\partial n}\right|.$$

Векторы $\boldsymbol{E}$ и grad U равны между собой по величине и направлены в противоположные стороны:

$$\text{grad } U = -\boldsymbol{E}.$$

Составляющие градиента электрического потенциала по осям в декартовой системе координат суть $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$. Следовательно,

$$\text{grad } U = \boldsymbol{i}\frac{\partial U}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial U}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Градиент потенциала может быть обозначен при помощи символического оператора ∇ (знак «набла») в виде ∇U. При этом ∇U формально можно рассматривать как произведение символического вектора ∇ на скаляр U. В декартовых координатах имеем

$$\nabla U = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)U = \boldsymbol{i}\frac{\partial U}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial U}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial U}{\partial z} = \text{grad } U.$$

Следовательно, равенство $\boldsymbol{E} = -\text{ grad } U$ может быть написано в форме

$$\boldsymbol{E} = -\nabla U.$$

Знак минус в этом равенстве указывает, что потенциал убывает в направлении линий напряженности поля. Это является следствием определения потенциала как линейного интеграла напряженности электрического поля, взятого от рассматриваемой точки A до заданной точки P, в которой $U = 0$. Такое определение целесообразно, так как при этом потенциал положительно заряженного тела оказывается также положительным при условии, что потенциал бесконечно удаленных точек принимается равным нулю.

Все сказанное свидетельствует о том, что всякое *безвихревое поле есть поле потенциальное*, т. е. такое, которое может быть охарактеризовано потенциальной функцией $U(x, y, z)$.

Обратно, всякое потенциальное поле является безвихревым, что вытекает из тождества rot grad $U = 0$. Действительно,

$$\text{rot}_x \text{ grad } U = \frac{\partial}{\partial y}\text{grad}_z\ U - \frac{\partial}{\partial z}\text{grad}_y\ U = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = 0.$$

Аналогично $\mathrm{rot}_y \operatorname{grad} U = 0$ и $\mathrm{rot}_z \operatorname{grad} U = 0$. Подчеркнем еще раз, что для заданного поля потенциал определяется с точностью до произвольной постоянной, зависящей от выбора той точки, где принимается $U = 0$.

24.2. Убывание потенциала и напряженности поля на больших расстояниях от системы заряженных тел

Во многих случаях существенно знать, как изменяется потенциал при удалении на весьма большое расстояние от системы заряженных тел.

Простейшие случаи были рассмотрены в первой части. Так, напряженность поля и потенциал уединенного точечного заряда q на расстоянии r от него в однородной и изотропной среде соответственно равны

$$E = \frac{1}{\varepsilon}\frac{q}{4\pi r^2}; \quad U = \frac{1}{\varepsilon}\frac{q}{4\pi r},$$

причем принимается равным нулю потенциал бесконечно удаленных точек.

Любая система заряженных тел с отличным от нуля суммарным зарядом, расположенных в конечной области пространства, может рассматриваться на расстояниях, весьма больших по сравнению с размерами этой области, как точечный заряд. Поэтому при таких весьма больших расстояниях будут справедливы с точностью до малых более высокого порядка последние формулы, причем q — общий заряд системы. Следовательно, для любой системы заряженных тел, расположенных в конечной области пространства и имеющих суммарный заряд, отличный от нуля, потенциал стремится к нулю в бесконечности как $1/r$ и напряженность поля — как $1/r^2$.

В том случае, когда сумма зарядов всех тел, образующих систему, равна нулю, потенциал убывает в бесконечности еще быстрее. Такую систему можно подразделить на диполи, так как для каждого положительного заряда dq_1 можно подобрать в системе равный ему по значению отрицательный dq_2. Потенциал диполя на больших расстояниях r от него выражается формулой

$$U = \frac{qd\cos\varphi}{4\pi\varepsilon r^2} = \frac{p\cos\varphi}{4\pi\varepsilon r^2},$$

где $p = qd$ — электрический момент диполя; φ — угол между радиус-вектором r и осью диполя, положительное направление которой принимаем от отрицательного заряда к положительному (рис. 24.2).

Заметим, что потенциал равен нулю не только в бесконечности, но и во всех точках плоскости, нормальной к оси диполя и проходящей через середину оси диполя, так как для этой плоскости $\cos\varphi = 0$.

Составляющие E_r и E_φ напряженности поля вдоль радиуса r и по касательной к окружности радиуса r в плоскости, проходящей через ось диполя, оказываются равными

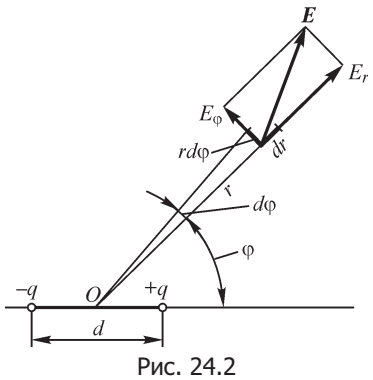

Рис. 24.2

$$E_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{2p\cos\varphi}{4\pi\varepsilon r^3}; \quad E_\varphi = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{p\sin\varphi}{4\pi\varepsilon r^3}.$$

Таким образом,

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\varphi^2} = \frac{p}{4\pi\varepsilon r^3}\sqrt{3\cos^2\varphi + 1}.$$

Итак, потенциал диполя на больших расстояниях от него убывает, как $1/r^2$, а напряженность поля — как $1/r^3$. Поэтому для любой совокупности заряженных тел, заключенных в конечной области пространства и имеющих суммарный заряд, равный нулю, потенциал убывает в бесконечности не медленнее, чем $1/r^2$, а напряженность поля — не медленнее, чем $1/r^3$. При этом возможно и более быстрое убывание потенциала, если оси отдельных диполей, на которые можно подразделить систему зарядов, ориентированы в противоположных направлениях и, следовательно, поля этих диполей ослабляют друг друга.

Во всех указанных задачах был принят равным нулю потенциал бесконечно удаленных точек. Это не может быть сделано при рассмотрении поля бесконечно длинных проводов, суммарный заряд которых отличен от нуля. Хотя реальные провода всегда имеют конечную длину, однако при исследовании поля очень длинных параллельных прямолинейных проводов часто упрощают задачу, допуская, что провода имеют бесконечную длину. Как увидим дальше, этим достигается существенное упрощение задачи. Рассмотрим уединенный бесконечно длинный прямолинейный провод, равномерно по длине заряженный, с линейной плотностью заряда τ. Напряженность поля такого провода, как было получено в первой части, равна

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon r}.$$

Полагая, что точка P, в которой $U = 0$, удалена от оси провода на расстояние r_P, получим

$$U = \int_r^{r_P} \frac{\tau}{2\pi\varepsilon r}\,dr = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}(\ln r_P - \ln r).$$

В частности, можно принять $U = 0$ при $r_P = 1$. Тогда будем иметь

$$U = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln r.$$

Принять же $r_P = \infty$ нельзя, так как интеграл при этом теряет смысл — потенциал всюду при любом конечном r становится бесконечным.

Однако если существует несколько параллельных проводов и при этом суммарный заряд их равен нулю, т. е. $\tau = \Sigma\tau_k = 0$, что обычно и имеет место в реальных задачах, то потенциал в бесконечности можно принять равным нулю даже и в том случае, если условно рассматривать провода как бесконечно длинные. Рассмотрим сначала два провода с зарядами на единицу длины $\tau_1 = \tau$ и $\tau_2 = -\tau$. На рис. 24.3 отмечены точки пересечения проводов с плоскостью рисунка. Про-

вода нормальны к плоскости рисунка. Расстояние между проводами обозначим через d. Для потенциала в точке A имеем выражение

$$U = \frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_{P_1}}{r_1} + \frac{\tau_2}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_{P_2}}{r_2} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_{P_1}}{r_{P_2}} - \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_1}{r_2},$$

где r_1 и r_2 — расстояния точки A от проводов, r_{P_1} и r_{P_2} — расстояния точки P от проводов.

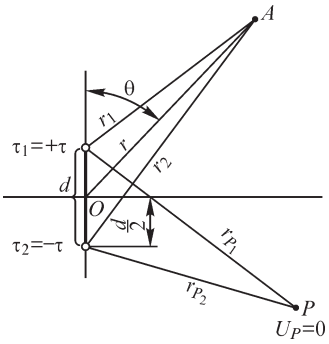

Рис. 24.3

При удалении точки P в бесконечность $r_{P_1} \to r_{P_2}$ и первое слагаемое обращается в нуль. Таким образом, если принять равным нулю потенциал бесконечно удаленных точек, то на всех конечных расстояниях r_1 и r_2 потенциал получается конечным:

$$U = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_1}{r_2}.$$

Заметим, что при этом потенциал равен нулю также на плоскости, проходящей посередине между проводами, так как для всех точек этой плоскости $r_1 = r_2$.

Определим, как убывает потенциал на больших расстояниях от проводов. При $r \gg d$ имеем $r_1/r_2 \approx 1 - d\cos\theta/r_2 \approx 1 - d\cos\theta/r$, где r — расстояние точки A от середины отрезка, соединяющего оси проводов, а θ — угол между радиусом r и этим отрезком. Следовательно, при $r \gg d$

$$U = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\left(1 - \frac{d\cos\theta}{r}\right).$$

Разлагая логарифм в ряд по степеням $d\cos\theta/r$ и пренебрегая членами высших порядков малости, находим

$$U = \frac{\tau d\cos\theta}{2\pi\varepsilon r}.$$

Составляющие напряженности поля при $r \gg d$ имеют выражения:

$$E_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\tau d\cos\theta}{2\pi\varepsilon r^2};\quad E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta} = \frac{\tau d\sin\theta}{2\pi\varepsilon r^2},$$

и, следовательно,

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{\tau d}{2\pi\varepsilon r^2}.$$

Таким образом, для пары бесконечно длинных проводов, имеющих равные и противоположные по знаку заряды, потенциал в бесконечности стремится к нулю, как $1/r$, а напряженность поля — как $1/r^2$. Любую систему бесконечно длинных параллельных проводов, расположенных на конечных расстояниях друг от друга и имеющих суммарный заряд $\Sigma\tau_k$, равный нулю, можно разделить на пары проводов с равными и противоположными по знаку зарядами. Следовательно, потенциал такой системы убывает в бесконечности не медленнее, чем $1/r$, а напряженность поля — не медленнее, чем $1/r^2$.

24.3. Определение потенциала по заданному распределению зарядов

Выражение потенциала точечного заряда дает возможность указать для однородной среды общий метод вычисления потенциала при заданном распределении в конечной области пространства электрических зарядов.

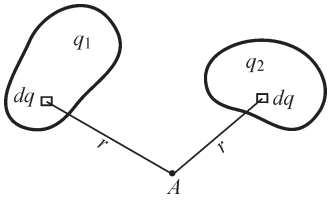

Рис. 24.4

Подразделив все распределенные в пространстве заряды (рис. 24.4) на элементарные части dq, будем рассматривать эти элементы dq как точечные заряды. Потенциал в точке A, определяемый каждым таким элементом, равен $dU = \frac{1}{\varepsilon}\frac{dq}{4\pi r}$. Следовательно, потенциал, определяемый всей совокупностью распределенных в пространстве зарядов, может быть найден из формулы

$$U = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \frac{dq}{r}.$$

Если электрический заряд распределен по объему V, причем объемная плотность заряда в некоторой точке пространства есть ρ, то следует разбить весь объем на элементы dV. Тогда

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho\, dV}{r}.$$

Если заряд распределен лишь в весьма тонких слоях у поверхности заряженных тел, как это имеет место у тел из проводящего материала, то можно считать, что заряд распределен на поверхности тел. Разбивая заряженные поверхности на элементы ds, можем написать $dq = \sigma\, ds$, где σ — поверхностная плотность заряда. Тогда выражение для потенциала принимает вид

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_s \frac{\sigma\, ds}{r},$$

причем интеграл должен быть распространен по всем заряженным поверхностям. То обстоятельство, что в объемах, занятых самими заряженными телами, находится проводящая среда и, следовательно, среда во всем пространстве неоднородна, в данном случае несущественно, так как внутри проводящих тел поле отсутствует. Мы могли бы мысленно убрать проводящее вещество тел, заменив его диэлектриком с проницаемостью ε и сохранив все поверхностные заряды тел. При этом поле осталось бы без изменения.

В случае когда заряд распределен на проводах, диаметр сечения которых мал по сравнению с расстояниями от проводов до точек поля, в которых определяется потенциал, можно считать заряд сосредоточенным на осях проводов. Если τ — линейная плотность заряда, то $dq = \tau dl$ и

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_l \frac{\tau\, dl}{r}, \qquad (*)$$

причем интеграл распространяется вдоль всех заряженных проводов.

Наконец, при конечном числе n зарядов, которые могут рассматриваться как точечные, имеем

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{q_k}{r_k}.$$

Учитывая соотношение $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} U$, можем записать следующие выражения для напряженности электрического поля:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho\boldsymbol{r}}{r^3}\,dV, \qquad \boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_s \frac{\sigma\boldsymbol{r}}{r^3}\,ds, \qquad \boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_l \frac{\tau\boldsymbol{r}}{r^3}\,dl.$$

Здесь $\boldsymbol{r}$ — вектор, направленный от точки расположения заряда к точке определения напряженности поля и равный расстоянию между ними.

Отметим еще раз, что формулами, приведенными в настоящем параграфе, можно пользоваться для вычисления потенциала только в том случае, если заряды распределены в конечной области пространства. В частности, формулой (*) можно пользоваться, если длина проводов конечна. Действительно, эта формула основана на выражении для потенциала точечного заряда, которое получено в предположении, что потенциал бесконечно удаленных точек равен нулю. Однако, как было показано выше, для бесконечно длинных проводов потенциал в бесконечности не может быть принят равным нулю, так как при этом на всех конечных расстояниях потенциал получился бы бесконечно большим. Соответственно и интеграл $\int_l \frac{\tau\,dl}{r}$ в применении к бесконечно длинным проводам всюду обращается в бесконечность.

Заметим, что в случае объемного и поверхностного распределения зарядов потенциал остается конечным и в тех точках, где ρ или σ не равны нулю. В случае же линейного распределения зарядов потенциал самих заряженных нитей, если предположить их бесконечно тонкими, получается бесконечно большим. Поэтому точки нитей должны быть исключены из рассмотрения. Точно так же для системы точечных зарядов потенциал обращается в бесконечность в точках, где сосредоточены заряды. Эти точки также должны быть исключены из рассмотрения.

Физический смысл имеет только объемное распределение зарядов. Тем не менее условное представление о поверхностном, линейном или точечном распределении зарядов весьма полезно при решении многих конкретных практических задач.

24.4. Уравнения Пуассона и Лапласа

Подставляя в уравнение

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon},$$

выражающее теорему Гаусса в дифференциальной форме, вместо величин E_x, E_y и E_z их выражения через потенциал:

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x};\quad E_y = -\frac{\partial U}{\partial y}\quad \text{и}\quad E_z = -\frac{\partial U}{\partial z},$$

получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Это дифференциальное уравнение носит название у р а в н е н и я П у а с с о н а. Интеграл

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho\, dV}{r},$$

приведенный в предыдущем параграфе, является решением уравнения Пуассона в случае, когда заряды распределены в конечной области пространства.

Если в рассматриваемой области пространства отсутствуют объемные электрические заряды, то уравнение Пуассона получает вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

и называется в этом частном случае у р а в н е н и е м Л а п л а с а. Электростатическое поле удовлетворяет уравнению Лапласа.

Левые части уравнений Пуассона и Лапласа представляют собой расхождение градиента потенциала и могут быть записаны в форме, не зависящей от выбора системы координат:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} U = -\frac{\rho}{\varepsilon};\quad \operatorname{div}\operatorname{grad} U = 0.$$

Нередко можно встретить запись левой части этих уравнений с помощью символического оператора в виде $\nabla^2 U$. Действительно,

$$\nabla^2 = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

и, следовательно,

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Оператор ∇^2 часто обозначают Δ и называют оператором Лапласа или лапласианом. Следовательно, уравнения Пуассона и Лапласа могут быть написаны также в виде

$$\nabla^2 U = -\frac{\rho}{\varepsilon}\quad \text{или}\quad \Delta U = -\frac{\rho}{\varepsilon};\quad \nabla^2 U = 0\quad \text{или}\quad \Delta U = 0.$$

24.5. Граничные условия на поверхности проводников

Так как в электростатическом поле электрические токи отсутствуют, то из соотношения $\boldsymbol{J} = \gamma \boldsymbol{E}$ следует, что внутри проводников ($\gamma \neq 0$) всюду должно быть $\boldsymbol{E} = 0$. Из выражения $\boldsymbol{E} = -\text{grad}\, U$ при этом следует, что для каждого проводника потенциал всех его точек имеет одно и то же значение. Поверхности проводников суть поверхности равного электрического потенциала, и линии напряженности поля в диэлектрике нормальны к ним. Обозначим через E_n и E_t нормальную и касательную к поверхности проводника составляющие вектора $\boldsymbol{E}$ в диэлектрике около поверхности проводника. Граничное условие для поля в диэлектрике на поверхности проводника может быть записано в виде $U = \text{const}$ или, что то же самое, $E_t = 0$, $E = E_n = -\partial U/\partial n$. При этом $D = \varepsilon E = -\varepsilon \dfrac{\partial U}{\partial n} = \sigma$, где σ — плотность электрического заряда на поверхности проводника.

24.6. Граничные условия на поверхности раздела двух диэлектриков

На границе раздела двух однородных и изотропных диэлектриков с абсолютными диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2, находящихся в электрическом поле (рис. 24.5), напряженность и электрическое смещение которого удовлетворяют уравнениям $\oint\limits_l \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = 0$ и $\oint\limits_s \boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{s} = 0$, можем (см. § 23.8), принимая $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{D}$, $a_1 = \varepsilon_1$, $a_2 = \varepsilon_2$ на основании отношений (*), (**), записать условия $\boldsymbol{E}_1 \sin\theta_1 = \boldsymbol{E}_2 \sin\theta_2$ и $\boldsymbol{D}_1 \cos\theta_1 = \boldsymbol{D}_2 \cos\theta_2$, выражающие непрерывность касательных составляющих вектора $\boldsymbol{E}$ и нормальных составляющих вектора $\boldsymbol{D}$. Условие преломления линий принимает вид:

$$\frac{\text{tg}\,\theta_1}{\text{tg}\,\theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

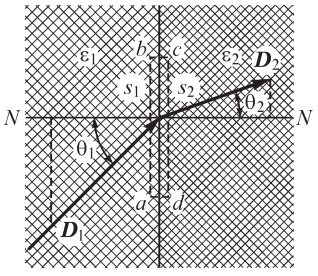

Рис. 24.5

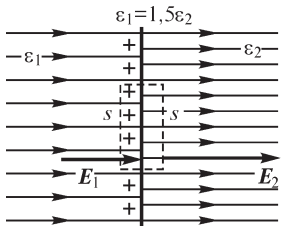

Рис. 24.6

Рассмотрим случай, когда линии напряженности поля нормальны к поверхности раздела (рис. 24.6) двух изотропных сред с абсолютными диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2. Векторы смещения будут одинаковы в обеих средах: $\boldsymbol{D}_1 = \boldsymbol{D}_2$, но напряженность поля на поверхности раздела скачком изменяет свое значение, так как

$$E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_1} \neq E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_2}.$$

Пусть $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ и соответственно диэлектрическая восприимчивость χ_1 первой среды больше диэлектрической восприимчивости χ_2 второй. Тогда $E_1 < E_2$. На рис. 24.6 изображено для этого случая поле вектора $\boldsymbol{E}$.

У поверхности раздела двух диэлектриков из первой среды выступают положительные заряды диполей и из второй среды — отрицательные заряды диполей. Так как $\chi_1 > \chi_2$, то положительные заряды преобладают над отрицательными и в тонком слое у поверхности раздела образуется связанный положительный заряд. Ввиду чрезвычайной малости толщины этого слоя его заряд можно рассматривать как поверхностный с плотностью σ'. Применяя постулат Максвелла к замкнутой поверхности, след которой изображен на рис. 24.6 штриховой линией, получим $D_1 = D_2$, так как свободных зарядов на поверхности раздела двух диэлектриков нет. Следовательно,

$$\varepsilon_0 E_1 + P_1 = \varepsilon_0 E_2 + P_2 \quad \text{или} \quad \varepsilon_0 (E_2 - E_1) = P_1 - P_2.$$

С другой стороны, применяя теорему Гаусса в форме $\oint_s \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{s} = \frac{q + q'}{\varepsilon_0}$ и учитывая, что $q = 0$, будем иметь

$$\oint_s \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{s} = \frac{q'}{\varepsilon_0} \quad \text{или} \quad -E_1 s + E_2 s = \frac{q'}{\varepsilon_0},$$

откуда

$$\varepsilon_0 (E_2 - E_1) = \frac{q'}{s} = \sigma'.$$

Таким образом, $\sigma' = P_1 - P_2$.

Итак, вследствие неодинаковой способности диэлектриков поляризоваться на их поверхности возникает связанный поверхностный заряд с плотностью, равной разности поляризованностей диэлектрика, из которого линии напряженности поля выходят, и диэлектрика, в который они входят. В общем случае, когда линии напряженности поля подходят к поверхности раздела под некоторым углом, σ' равно, как нетрудно убедиться, разности нормальных составляющих векторов $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{P}_2$.

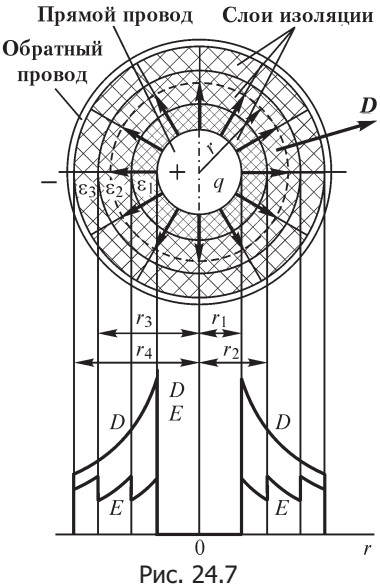

Рис. 24.7

В виде примера рассмотрим концентрический кабель с несколькими слоями диэлектрика с разными диэлектрическими проницаемостями (рис. 24.7). Вообразим цилиндрическую поверхность радиуса r и длины l, ось которой совмещена с осью кабеля. Поток смещения сквозь эту по-

верхность равен заряду $q = \tau l$, расположенному на отрезке l внутреннего провода кабеля, т. е. $\int_s \boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{s} = q = \tau l$, причем τ — линейная плотность заряда.

Так как на всей поверхности ввиду симметрии $D = \text{const}$ и вектор $\boldsymbol{D}$ нормален к поверхности, то $\int_s \boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{s} = Ds = 2\pi r l D$.

Итак,

$$D = \frac{\tau}{2\pi r}.$$

Напряженность в k-м слое изоляции равна

$$E_k = \frac{D}{\varepsilon_k} = \frac{\tau}{2\pi r \varepsilon_k}.$$

В пределах каждого слоя напряженность поля убывает с увеличением r, при переходе же к следующему слою она изменяется скачком в связи с изменением ε. Этот скачок мы и можем объяснить появлением связанных зарядов на поверхности раздела двух слоев диэлектрика.

В каждом слое напряженность поля имеет максимальное значение у внутренней поверхности слоя, равное $E_{km} = \frac{\tau}{2\pi r_k \varepsilon_k}$, причем r_k — внутренний радиус слоя.

Представляется возможным при проектировании кабеля подобрать величины $r_k\varepsilon_k$ для всех слоев так, чтобы величины E_{km} отвечали допустимым значениям напряженности, соответствующим электрической прочности слоев. В частности, если допустимая максимальная напряженность поля E_{km} во всех слоях одинакова, то следует стремиться к соблюдению условий:

$$r_1\varepsilon_1 = r_2\varepsilon_2 = \ldots = r_k\varepsilon_k = \ldots = \text{const}.$$

Применением многослойной изоляции достигается значительное выравнивание напряженности поля вдоль радиуса, что иллюстрируется эпюрой на рис. 24.7.

24.7. Основная задача электростатики

Общей задачей расчета электрического поля является определение напряженности поля во всех его точках по заданным зарядам или потенциалам тел. Для электростатического поля задача полностью решается отысканием потенциала как функции координат. Если полностью задано распределение электрических зарядов в однородной и изотропной среде, то решение может быть получено методом, изложенным в § 24.3. Обратная задача отыскания распределения зарядов по заданному распределению потенциала решается с помощью уравнения Лапласа и граничного условия $-\varepsilon \frac{\partial U}{\partial n} = \sigma$ поверхности заряженных проводящих тел.

Однако большей частью задача оказывается значительно сложнее. Обычно рассматривается система заряженных проводящих тел, окруженных диэлектриком, в котором отсутствуют объемные заряды. Заданы либо потенциалы всех тел: U_1, U_2, ..., U_k, ..., либо полные заряды тел: q_1, q_2, ..., q_k. Распределение же зарядов по

поверхности каждого тела неизвестно и подлежит определению. В этом и заключается основная трудность задачи. Также неизвестным является и распределение потенциала в пространстве. Особенно усложняется задача для неоднородной или неизотропной среды.

Решение такой задачи аналитическим путем в конечном виде возможно только для отдельных частных случаев. В некоторых случаях удается найти решение при помощи искусственных приемов. В связи с этим чрезвычайно важно установить те необходимые и достаточные требования, при удовлетворении которых поле определяется единственным образом. Этими требованиями являются следующие:

1. Поле в диэлектрике должно удовлетворять уравнениям:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0; \qquad \boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}; \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{D} = 0.$$

При этом уравнение $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0$, как было показано в § 24.1, эквивалентно равенству $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} U$.

Для однородной среды эти уравнения приводятся к одному уравнению для потенциала U:

$$\operatorname{div}(\varepsilon \boldsymbol{E}) = \varepsilon \operatorname{div} \boldsymbol{E} = -\varepsilon \operatorname{div} \operatorname{grad} U = -\varepsilon \nabla^2 U = 0,$$

т. е. к уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

2. Поверхности проводящих тел должны быть поверхностями равного потенциала, т. е. для каждой такой поверхности должно быть соблюдено условие $U = \text{const}$; этот же потенциал тело имеет, конечно, и во всем своем объеме.

3. Потенциалы на поверхности тел должны быть равны заданным значениям U_k, если по условиям задачи известны эти потенциалы. Если же заданы полные заряды тел, то для каждого тела должно быть удовлетворено условие

$$q_k = \int_{s_k} \sigma ds = -\int_{s_k} \varepsilon \frac{\partial U}{\partial n} ds.$$

Можно показать, что выполнение этих требований не только необходимо, но и достаточно, чтобы задача была решена единственным образом. Это важное положение часто называют теоремой единственности.

24.8. Плоскопараллельное поле

Задача расчета весьма упрощается, если все величины, характеризующие поле, зависят только от двух координат. Такому условию удовлетворяет поле системы из нескольких бесконечно длинных параллельных друг другу цилиндрических проводов с зарядами, равномерно распределенными по их длине. Диэлектрик будем предполагать однородным. Направим ось OZ параллельно осям проводов. Тогда все линии напряженности поля будут лежать в плоскостях, параллельных плоскости XOY. Картина поля во всех этих плоскостях одинакова, и достаточно

исследовать поле только в плоскости *XOY*. Поле такого вида будем называть п л о с к о п а р а л л е л ь н ы м п о л е м. На рис. 24.8 изображены поперечные сечения двух проводов и картина поля около них. Потенциал плоскопараллельного поля есть функция только двух координат: x и y. Поверхности равного потенциала суть цилиндрические поверхности с образующими, параллельными оси *OZ*. Линии равного потенциала в плоскости *XOY* определяются уравнениями вида

$$U(x, y) = \text{const}.$$

Условимся наносить на чертеже линии равного потенциала через такие промежутки, чтобы при переходе от любой линии к соседней всегда получать одинаковое приращение ΔU потенциала.

Уравнение линии напряженности поля может быть получено на основе следующих соображений. Пусть некоторая линия напряженности поля рассматривается как начальная (рис. 24.8). Соединим произвольную точку $M(x, y)$ с некоторой точкой A начальной линии криволинейным отрезком MmA. Обозначим через Ψ_E поток вектора $\boldsymbol{E}$ сквозь поверхность, которую описал бы отрезок MmA, перемещаясь параллельно самому себе в направлении оси OZ и проходя путь l. Условимся рассматривать поток на единицу длины проводов и введем обозначение $V = \Psi_E/l$.

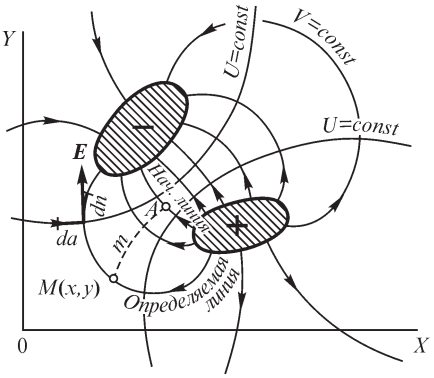

Рис. 24.8

Величина V, так же как и величина потока Ψ_E, зависит от положения точки M, т. е. является функцией ее координат, что мы запишем в виде $V(x, y)$. Ясно, что для всех точек $M(x, y)$, лежащих на одной и той же линии напряженности поля, функция $V(x, y)$ имеет одинаковые значения. Поэтому уравнение

$$V(x, y) = \text{const},$$

определяющее совокупность таких точек, и является уравнением этой линии напряженности поля. Функцию $V(x, y)$ называют ф у н к ц и е й п о т о к а.

Функция $V(x, y)$ многозначна, так как если обойти по некоторому замкнутому контуру сечение какого-либо заряженного провода, то V получит приращение, равное $\Delta\Psi_E/l$, где Ψ_E — поток сквозь цилиндрическую поверхность, охватывающую отрезок этого провода длиной l. Эта многозначность не имеет существенного значения, так как напряженность поля, как сейчас будет показано, определяется в виде производной функции V по координате и значение постоянной слагающей функции не играет существенной роли.

Условимся наносить на чертеже линии напряженности поля так, чтобы при переходе от любой линии к соседней всегда получать одно и то же приращение ΔV функции потока.

Отметим, что уравнения $U(x, y) = \text{const}$ и $V(x, y) = \text{const}$ определяют два семейства кривых, пересекающихся всюду под прямым углом, т. е. образующих в

плоскости *XOY* ортогональную сетку. Пусть dn — элемент длины линии напряженности поля и da — элемент длины линии равного потенциала. Очевидно, во всех точках поля $dn \perp da$. Будем считать координату n возрастающей в направлении вектора $\boldsymbol{E}$. Координату a будем считать возрастающей влево от вектора $\boldsymbol{E}$ для наблюдателя, расположившегося так, что для него вектор $\boldsymbol{E}$ направлен снизу вверх. Потенциал U увеличивается в направлении против вектора $\boldsymbol{E}$, т. е. в сторону уменьшения координаты n. Условимся считать функцию потока V возрастающей в том же направлении, в котором увеличивается a. Напряженность электрического поля при этих условиях может быть выражена через U и V в форме

$$E = -\frac{\partial U}{\partial n} = +\frac{\partial V}{\partial a}. \qquad (*)$$

Равенство $E = -\partial U/\partial n$ нам уже знакомо. Оно говорит, что величина вектора $\boldsymbol{E}$ численно равна уменьшению потенциала на единицу длины в направлении линии напряженности поля. Соотношение же $E = \partial V/\partial a$ следует из того, что напряженность поля численно равна потоку вектора $\boldsymbol{E}$, проходящему через единицу поверхности, нормальной к линиям напряженности поля. Давая приращение только одной координате a, получим соответствующее приращение потока $d_a\Psi_E$. Поток $d_a\Psi_E$ проходит через поверхность $l\,da$. Так как эта поверхность нормальна к линиям напряженности поля, то

$$E = \frac{d_a\Psi_E}{l\,da} = \frac{d_aV}{da} = \frac{\partial V}{\partial a}.$$

Уравнение (*) выражено в системе криволинейных ортогональных координат n и a, где n отсчитывается вдоль линий напряженности поля и a — вдоль линий равного потенциала. Переходя к декартовым координатам, напишем:

$$\left.\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} = +\frac{\partial V}{\partial y}; \\ E_y &= -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

Равенства $E_x = -\dfrac{\partial U}{\partial x}$ и $E_y = -\dfrac{\partial U}{\partial y}$ были уже приведены ранее.

Равенства $E_x = \dfrac{\partial V}{\partial y}$ и $E_y = -\dfrac{\partial V}{\partial x}$ вытекают из следующих соображений. Дадим приращение только координате y. Сквозь площадку $l\,dy$ проходит поток $d_y\Psi_E = = E_x l\,dy$. Отсюда имеем

$$E_x = \frac{d_y\Psi_E}{l\,dy} = \frac{d_yV}{dy} = \frac{\partial V}{\partial y}.$$

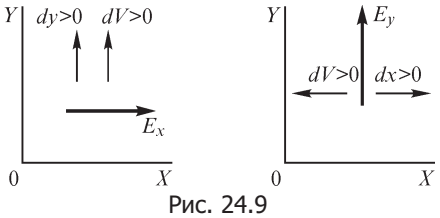

Рис. 24.9

Знак плюс (+) следует принять потому, что V и y возрастают оба влево от E_x (рис. 24.9). Давая приращение только координате x, найдем соответственно

$$d_x \Psi_E = -E_y l\, dx \quad \text{или} \quad E_y = -\frac{d_x \Psi_E}{l\, dx} = -\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Здесь необходимо поставить знак минус (–), так как V возрастает влево, а x — вправо от E_y (см. рис. 24.9).

Обе функции, U и V, удовлетворяют уравнению Лапласа. Продифференцировав первое уравнение (**) еще раз по x и второе еще раз по y, получим $-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$ и $-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$, откуда

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

Дифференцируя первое уравнение по y и второе по x, найдем $-\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ и $-\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, откуда

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

Таким образом, любые функции U и V, удовлетворяющие совокупности уравнений (**), удовлетворяют и первому требованию, сформулированному в § 24.7.

Для заданной системы проводников эти функции должны быть такого вида, чтобы удовлетворялось второе требование — постоянство потенциала U на поверхности каждого проводника.

Кроме того, для определения постоянных в выражениях функций U и V необходимо использовать третье условие — количественное задание потенциалов или зарядов проводников.

Соотношения (**) вполне достаточны для вычисления составляющих напряженности поля, если тем или иным способом найдена либо функция $U(x, y)$, либо функция $V(x, y)$.

24.9. Применение функций комплексного переменного

Будем рассматривать плоскость, в которой расположены линии напряженности плоскопараллельного поля, как плоскость комплексного переменного $z = x + jy$, в которой по оси абсцисс откладываются вещественные количества (x), а по оси ординат — мнимые количества (jy). Назовем эту плоскость плоскостью z. Каждой точке такой плоскости соответствует вполне определенное комплексное число z.

Введем в рассмотрение комплексную величину $\zeta = \xi + j\eta$, где $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ — функции x и y.

Говорят, что ζ есть регулярная аналитическая функция комплексного переменного z в некоторой области, если она однозначна, непрерывна и имеет опре-

деленную непрерывную производную во всех точках этой области. При этом обозначают $\zeta = f(z)$.

Давая переменной z приращение Δz, получим приращение функции $\Delta\zeta = f(z + \Delta z) - f(z)$. Если отношение $\Delta\zeta/\Delta z$ стремится к определенному пределу

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta\zeta}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{d\zeta}{dz}$$

независимо от того, по какому закону стремится к нулю Δz, то этот предел и называется производной от функции комплексного переменного.

Выбирая приращение Δz один раз в направлении оси вещественных ($\Delta z = \Delta x$), другой раз — в направлении оси мнимых ($\Delta z = j\Delta y$) количеств, можем написать условие дифференцируемости функции в виде

$$\frac{d\zeta}{dz} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x \xi + j\Delta_x \eta}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y \xi + j\Delta_y \eta}{j\Delta y},$$

где $\Delta_x\xi$ и $\Delta_x\eta$ — изменение ξ и η при изменении только x на величину Δx; $\Delta_y\xi$ и $\Delta_y\eta$ — то же при изменении только y на величину Δy. Это равенство может быть переписано в виде

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{\partial\xi}{\partial x} + j\frac{\partial\eta}{\partial x} = -j\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial y},$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = -\frac{\partial\xi}{\partial y}; \quad \frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{\partial\xi}{\partial x}.$$

Последние уравнения называют уравнениями Коши—Римана. Они необходимы и, как нетрудно показать, достаточны для того, чтобы функция $\zeta = f(z)$ комплексного переменного z имела определенную производную. Из этих уравнений получаем

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2\xi}{\partial y\,\partial x} = -\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\eta}{\partial y\,\partial x} = -\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}$$

или

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} = 0,$$

т. е. функции $\zeta(x, y)$ и $\eta(x, y)$, а следовательно, и функция $\zeta = \xi + j\eta$ удовлетворяют уравнению Лапласа.

Сопоставляя уравнения Коши–Римана, связывающие ξ и η, с уравнениями (**) в предыдущем параграфе, дающими связь между V и U, замечаем их полное соответствие. Это означает, что можем непосредственно принять $\xi = V$ и $\eta = U$ и соответственно положить

$$\zeta = \xi + j\eta = V + jU = f(z).$$

Функция $\zeta = V + jU$, вещественная часть которой есть функция потока, а мнимая — потенциал, называется комплексным потенциалом поля.

Составляющие вектора напряженности поля могут быть получены из уравнений:

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

Нередко интересуются только модулем E вектора $\boldsymbol{E}$, так как вынужденное состояние диэлектрика определяется именно значением напряженности поля. Для вычисления E имеем соотношение

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2}.$$

Но, согласно уравнениям Коши—Римана, $\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial x}$. Следовательно,

$$E = \sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2} = \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|.$$

Из всего сказанного следует, что задача расчета поля решена, если найдена аналитическая функция $\zeta = f(z)$, удовлетворяющая граничным условиям на поверхности проводов, т. е. такая, мнимая часть которой принимает постоянное значение на контуре, ограничивающем сечение провода. Указать общий метод нахождения такой функции для любой формы сечений проводов не представляется возможным.

По заданной конфигурации контура сечения проводов функция $\zeta = f(z)$ может быть найдена только для некоторых форм сечений. Однако можно пойти обратным путем. Именно, исследуя различные аналитические функции, можно найти соответствующие им поля и получить таким путем решения для ряда конкретных случаев. Это очень существенно, так как создает возможность при сложной форме сечения проводов, для которой не может быть получено точное решение, подобрать близкий случай, рассмотренный теоретически, и выводы, полученные из последнего, приближенно применить к исследуемому реальному случаю.

24.10. Поле уединенного провода круглого сечения

Рассмотрим аналитическую функцию $\zeta = A\,j \ln z + C$, где A — вещественная величина, а $C = C_1 + jC_2$.

Обозначив $z = re^{j\theta}$, получим

$$\zeta = \xi + j\eta = Aj\ln r - A\theta + C_1 + jC_2.$$

Полагая $\xi = V$ и $\eta = U$, находим

$$V = -A\theta + C_1; \quad U = A\ln r + C_2.$$

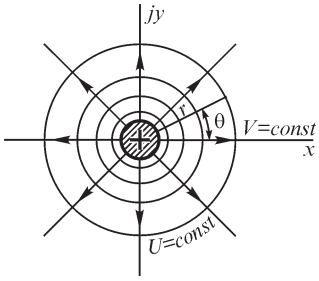

Рис. 24.10

Уравнение линий напряженности поля: V = const или θ = const. Уравнение линий равного потенциала: U = const или r = const.

Следовательно, функция $\zeta = A\,j \ln z + C$ определяет поле, линии напряженности которого являются лучами, исходящими из начала координат (рис. 24.10). Линии равного потенциала являются окружностями с центром в начале координат, и поверхности равного потенциала — поверхностями круговых цилиндров. Если совместим с одной из этих поверхностей поверхность заряженного провода кругового сечения, то для поверхности провода будет удовлетворено основное требование — постоянство потенциала. Следовательно, можно утверждать, что рассматриваемая функция является комплексным потенциалом поля вне провода.

Постоянная A определяется на основании того, что при обходе по замкнутому контуру вокруг сечения провода угол θ возрастает на 2π, а функция V получает приращение, равное Ψ_E/l, где Ψ_E — поток вектора $\boldsymbol{E}$ сквозь цилиндрическую поверхность, охватывающую отрезок провода длиной l. Согласно теореме Гаусса, этот поток должен быть равен отношению заряда q отрезка провода к абсолютной диэлектрической проницаемости ε среды. Следовательно, $\frac{q}{\varepsilon l} = -A\cdot 2\pi$ и $A = -\frac{q}{2\pi\varepsilon l} = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}$, причем τ — заряд на единицу длины провода.

Итак,

$$V = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\theta + C_1; \quad U = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln r + C_2.$$

Постоянные C_1 и C_2 зависят от выбора начальной линии напряженности поля, для которой принимается $V = 0$, и от выбора линии равного потенциала, на которой принимается $U = 0$.

Напряженность поля, согласно последнему выражению предыдущего параграфа, равна

$$E = \left|\frac{d\zeta}{dz}\right| = \left|-\frac{\tau}{2\pi\varepsilon} j\frac{1}{z}\right| = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon r}.$$

Приращение ΔU потенциала при переходе от линии равного потенциала, помеченной номером ν, к соседней, (ν + 1)-й, линии, согласно принятому допущению, должно быть постоянным, не зависящим от ν:

$$\Delta U = U_{\nu+1} - U_\nu = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}(\ln r_{\nu+1} - \ln r_\nu) = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_{\nu+1}}{r_\nu} = \text{const},$$

т. е.

$$\frac{r_{\nu+1}}{r_\nu} = B = \text{const}.$$

Следовательно, радиусы окружностей равного потенциала изменяются в геометрической прогрессии, знаменатель которой может быть выбран произвольно.

Приращение ΔV функции потока при переходе от ν-й линии напряженности поля к $(\nu + 1)$-й мы условились также принимать одинаковым для всех промежутков между линиями напряженности поля:

$$\Delta V = V_{\nu+1} - V_{\nu} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}(\theta_{\nu+1} - \theta_{\nu}) = \text{const},$$

откуда

$$\theta_{\nu+1} - \theta_{\nu} = \Delta\theta_{\nu} = \text{const},$$

т. е. линии напряженности поля должны отстоять друг от друга на равные углы. На рис. 24.10 вычерчено поле уединенного провода, причем принято $B = 1{,}5$ и $\Delta\theta = \pi/4$.

Поле вне провода такое же, как если бы весь заряд провода был сосредоточен на его оси. Следовательно, полученное решение справедливо для уединенного линейного провода любой формы сечения. Линейными проводами называем такие, поперечные размеры сечений которых весьма малы по сравнению с расстоянием от проводов до точек, в которых рассматривается поле.

Заметим, что если бы ось провода проходила не через начало координат, а через точку $z_1 = x_1 + jy_1$, то поле характеризовалось бы функцией

$$\zeta = V + jU = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon} j \ln(z - z_1) + C.$$

24.11. Поле двух плоскостей, сходящихся под углом

Рассмотрим теперь функцию $\zeta = A \ln z + C$. Полагая опять $\xi = V$ и $\eta = U$, будем иметь

$$\zeta = V + jU = A \ln r + jA\theta + C_1 + jC_2.$$

Уравнение линий напряженности поля $V = A \ln r + C_1 = \text{const}$, т. е. $r = \text{const}$. Уравнение линий равного потенциала $U = A\theta + C_2$, т. е. $\theta = \text{const}$.

Линии напряженности поля представляют собой окружности, линии равного потенциала — радиальные прямые, и поверхности равного потенциала — плоскости, проходящие через ось OZ. Совместим с любыми двумя поверхностями равного потенциала поверхности двух металлических пластин, имеющие электрические заряды, равные по значению, но противоположные по знаку (рис. 24.11). В начале координат пластины отделены друг от друга весьма тонким слоем диэлектрика. Так как основное требование постоянства потенциала на поверхности каждой пластины оказывается удовлетворенным, то, следовательно, поле таких пластин характеризуется рассмотренной функцией. Постоянные A и C_2 найдем из условий: $U = C_2 = U_1$ при $\theta = 0$, $U = A\alpha + C_2 = U_2$ при $\theta = \alpha$. Следовательно, $A\alpha = U_2 - U_1$, где α — угол между пластинами. Кроме того, $\ln r = 0$ и $C_1 = V_1$ при $r = 1$. Таким образом, функция, характеризующая поле, имеет вид

$$\zeta = \frac{U_2 - U_1}{\alpha} \ln z + V_1 + jU_1.$$

Напряженность поля равна

$$E = \left|\frac{d\zeta}{dz}\right| = \left|\frac{U_2 - U_1}{\alpha z}\right| = \frac{U_2 - U_1}{\alpha r},$$

т. е. так же, как и для уединенного провода, она изменяется обратно пропорционально r.

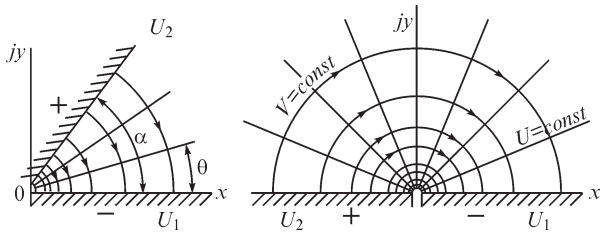

Рис. 24.11

Обратим внимание на то, что функция $\zeta = A \ln z + C$ отличается от функции, рассмотренной в предыдущем параграфе, только множителем j. Это приводит к перемене местами U и V и соответственно к перемене местами линий напряженности поля и линий равного потенциала (см. рис. 24.10 и 24.11).

24.12. Поле двухпроводной линии передачи

Рассмотрим важный для практики случай — поле двухпроводной линии передачи (рис. 24.12). Провода, расположенные друг от друга на расстоянии $2b$, вначале будем считать линейными.

Пользуясь принципом наложения, получаем выражение для комплексного потенциала

$$\zeta = V + jU = -\frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon} j\ln(z - z_1) - \frac{\tau_2}{2\pi\varepsilon} j\ln(z - z_2) + C,$$

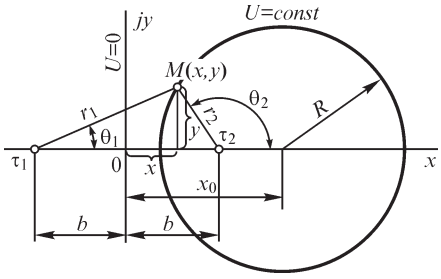

Рис. 24.12

где τ_1 и τ_2 — линейные плотности зарядов проводов; z_1 и z_2 — комплексные координаты точек пересечения проводов с плоскостью XOY.

Расположив оси координат так, как показано на рис. 24.12 ($z_1 = -b$, $z_2 = +b$), и учитывая, что для двухпроводной линии $\tau_1 = -\tau_2 = \tau$, получаем

$$\zeta = V + jU = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon} j\ln\left(\frac{z+b}{z-b}\right) + C.$$

Обозначая $z + b = r_1 e^{j\theta_1}$ и $z - b = r_2 e^{j\theta_2}$, где r_1 и r_2 — расстояния от точки z до осей проводов и θ_1 и θ_2 — соответствующие углы с осью OX, находим

$$V = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}(\theta_2 - \theta_1) + C_1;$$

$$U = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1} + C_2.$$

Положив $C_2 = 0$, получаем $U = 0$ при $r_1 = r_2$, т. е. линией нулевого потенциала при $C_2 = 0$ является ось ординат. Уравнение любой линии равного потенциала имеет вид

$$U = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1} = \text{const},$$

или

$$\frac{r_2}{r_1} = k = \text{const}.$$

Покажем, что линии равного потенциала суть окружности с центрами на оси *OX*. Имеем

$$\frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{(b-x)^2 + y^2}{(b+x)^2 + y^2} = k^2$$

или

$$(1-k^2)x^2 - 2(1+k^2)bx + (1-k^2)y^2 = -b^2(1-k^2).$$

Разделим последнее уравнение на $(1 - k^2)$ и добавим с каждой стороны по члену $\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 b^2$. Получим

$$x^2 - 2\frac{1+k^2}{1-k^2}bx + \left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 b^2 + y^2 = -b^2 + \left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 b^2,$$

или

$$\left(x - \frac{1+k^2}{1-k^2}b\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2kb}{1-k^2}\right)^2,$$

что является уравнением окружности с координатами центра

$$x_0 = \frac{1+k^2}{1-k^2}b \quad \text{и} \quad y_0 = 0$$

и радиусом

$$R = \frac{2k}{\left|1-k^2\right|}b.$$

Чтобы приращение потенциала при переходе от любой линии равного потенциала к соседней оставалось постоянным, должно быть соблюдено условие

$$\Delta U = U_{\nu+1} - U_{\nu} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\left(\ln\frac{r_{2,\,\nu+1}}{r_{1,\,\nu+1}} - \ln\frac{r_{2,\,\nu}}{r_{1,\,\nu}}\right) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{k_{\nu+1}}{k_{\nu}} = \text{const},$$

т. е. числа k при возрастании порядкового номера ν линий должны изменяться в геометрической прогрессии:

$$\frac{k_{\nu+1}}{k_{\nu}} = B = \text{const}.$$

Положив в выражении для функции потока $C_1 = 0$, получим $V = 0$ при $\theta_2 = \theta_1$, т. е. начальной линией напряженности поля при $C_1 = 0$ являются участки оси абсцисс, уходящие от проводов в бесконечность. Уравнение любой линии напряженности поля имеет форму

$$V = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}(\theta_2 - \theta_1) = \text{const}, \quad \text{или} \quad \theta_2 - \theta_1 = \vartheta = \text{const}$$

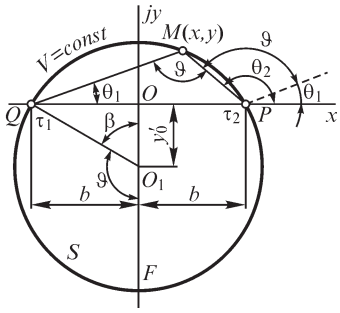

Рис. 24.13

и, следовательно, является уравнением дуги окружности, пересекающейся с проводами, что видно непосредственно из рис. 24.13. Действительно, угол QMP, под которым виден отрезок QP из точек $M(x, y)$, лежащих на линии напряженности поля, равен углу ϑ и остается постоянным. Координаты центра окружности: $x'_0 = 0$ и $y'_0 = -b\ \text{ctg}\ \beta$. Так как углы QO_1F и QMP равны между собой, как измеряемые одной и той же дугой QSF, то

$$y'_0 = -b\ \text{ctg}(\pi - \vartheta) = b\,\text{ctg}\,\vartheta.$$

Чтобы подразделить поле на трубки равного потока, следует считать разность $\Delta V = V_{\nu+1} - V_{\nu}$ одинаковой для двух любых соседних линий. Для этого необходимо при переходе от любой линии напряженности поля к соседней изменять угол ϑ на постоянную величину $\Delta\vartheta$.

На рис. 24.14 построена картина поля двух линейных проводов, причем принято $B = \sqrt{3}$ и $\Delta\vartheta = \pi/6$.

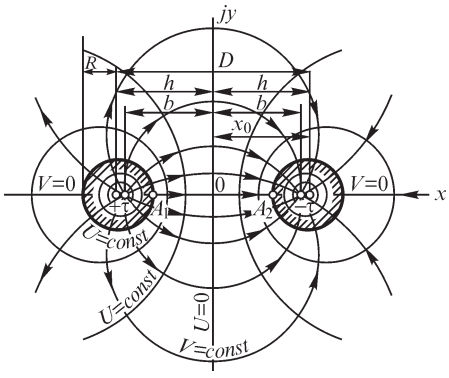

Рис. 24.14

Провода реальной линии передачи имеют конечные сечения. Распределение электрического заряда по поверхности проводов при этом зависит от формы их сечений и будет неравномерным даже для проводов круглого сечения. Последнее утверждение становится очевидным, если принять во внимание притяжение зарядов разного знака, расположенных на прямом и обратном проводах. Поверхностная плотность заряда должна иметь максимум в точках двух проводов, находящихся на кратчайшем расстоянии друг от друга. Распределение заря-

да по поверхности проводов неизвестно, что весьма осложняет задачу. Однако в важном частном случае для проводов круглого сечения задача может быть решена точно, если заметить, что в поле двух линейных проводов все поверхности равного потенциала являются поверхностями круглых цилиндров. Всегда можно так расположить оси линейных проводов, чтобы две поверхности равного потенциала совпали с поверхностями реальных проводов (см. рис. 24.14).

Поле внутри металлических проводов будет отсутствовать. Поле же в диэлектрике при такой замене реальных проводов эквивалентными им линейными останется без изменения, так как при этом удовлетворяется основное граничное условие — постоянство потенциала на поверхности провода. Таким образом, задача расчета поля двух проводов круглого сечения сводится к отысканию положения эквивалентных им линейных проводов или, как говорят, к нахождению электрических осей проводов.

Обозначим через D расстояние между геометрическими осями проводов и через $h = D/2$ расстояние от геометрической оси до плоскости нулевого потенциала. Пусть x_0 и R — координата центра и радиус окружности равного потенциала, совпадающей с окружностью сечения провода. Имеем $h = |x_0|$ и согласно выражениям для x_0 и R получаем

$$h = \frac{1+k^2}{|1-k^2|}b; \quad R = \frac{2k}{|1-k^2|}b.$$

Отсюда нетрудно убедиться, что $h^2 - R^2 = b^2$ и, следовательно,

$$b = \sqrt{h^2 - R^2}.$$

Эта формула и дает возможность определить положение электрических осей по заданным расстоянию $D = 2h$ между геометрическими осями и радиусу R сечений проводов.

На рис. 24.14 заштрихованы сечения проводов около контуров сечений. Так как поле подразделено на трубки равного потока ($\Delta V = \text{const}$), то густота линий напряженности поля всюду пропорциональна значению напряженности поля. Картина поля, изображенная на рисунке, отчетливо показывает, что напряженность поля имеет максимум в точках A_1 и A_2. Около этих точек диэлектрик находится в наиболее напряженном состоянии, и при повышении напряжения между проводами нарушение электрической прочности диэлектрика начинается именно в этих точках.

24.13. Поле параллельных несоосных цилиндров

Решенная в предыдущем параграфе задача для двух линейных проводов дает возможность найти поле между двумя параллельными несоосными цилиндрами, имеющими круглые сечения различных радиусов R_1 и R_2 (рис. 24.15). Действительно, всегда можно так расположить оси линейных проводов, чтобы в их поле две поверхности равного потенциала совпали с поверхностями заданных проводящих цилиндров. Пусть D — расстояние между геометрическими осями цилиндров, h_1 и h_2 — расстояния от геометрических осей до плоскости по-

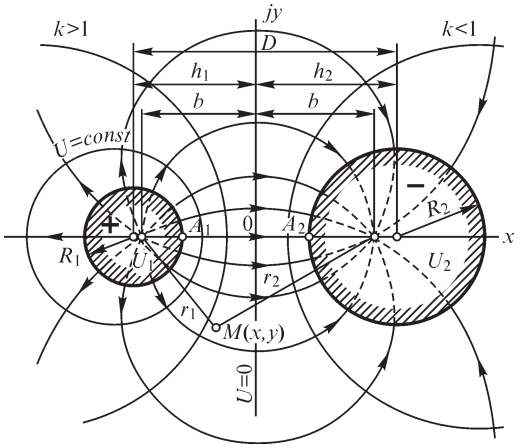

Рис. 24.15

стоянного (нулевого) потенциала, b — расстояние от электрических осей до этой плоскости. Согласно формуле $b = \sqrt{h^2 - R^2}$, справедливой для каждого провода, имеем

$$b^2 = h_1^2 - R_1^2 = h_2^2 - R_2^2,$$

или

$$(h_2 + h_1)(h_2 - h_1) = R_2^2 - R_1^2.$$

При расположении цилиндров согласно рис. 24.15 имеем $h_1 + h_2 = D$ и, следовательно, $h_2 - h_1 = \dfrac{R_2^2 - R_1^2}{D}$.

В этом случае имеем

$$h_1 = \frac{D^2 + R_1^2 - R_2^2}{2D}; \quad h_2 = \frac{D^2 + R_2^2 - R_1^2}{2D}.$$

При расположении цилиндров один внутри другого (полого) (рис. 24.16) $h_2 - h_1 = D$, следовательно, $h_2 + h_1 = \dfrac{R_2^2 - R_1^2}{D}$.

В этом случае имеем

$$h_1 = -\frac{D^2 + R_1^2 - R_2^2}{2D}; \quad h_2 = \frac{D^2 + R_2^2 - R_1^2}{2D}.$$

Выражения для h_1 и h_2 можно написать в общем виде, справедливом для обоих расположений цилиндров при любом соотношении радиусов R_1 и R_2:

$$h_1 = \left|\frac{D^2 + R_1^2 - R_2^2}{2D}\right|;$$

$$h_2 = \left|\frac{D^2 + R_2^2 - R_1^2}{2D}\right|.$$

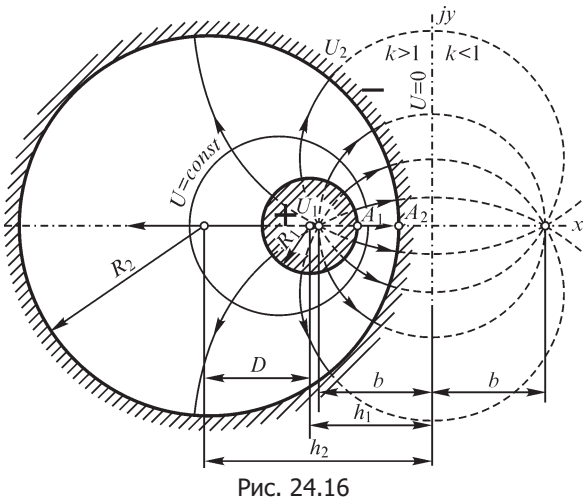

Рис. 24.16

Из этих формул определяется положение плоскости нулевого потенциала, и из формулы $b = \sqrt{h_1^2 - R_1^2} = \sqrt{h_2^2 - R_2^2}$ находятся положения электрических осей, т. е. эквивалентных линейных проводов, что дает возможность построить поле по методу, изложенному в предыдущем параграфе.

24.14. Поле у края плоского конденсатора

Рассмотрим функцию $z = A(e^{a\zeta} + a^{\zeta})$, где a и A — вещественные и постоянные величины. Положив $\zeta = V + jU$, будем иметь

$$x + jy = A(e^{aV}\cos aU + je^{aV}\sin aU + aV + jaU),$$

или

$$x = A(e^{aV}\cos aU + aV); \quad y = A(e^{aV}\sin aU + aU).$$

В частном случае, когда $aU = \pm\pi$, выражения для x и y приобретают вид

$$x = A(aV - e^{aV}); \quad y = \pm A\pi.$$

Эти уравнения определяют две полупрямые, параллельные оси OX. Действительно, координата x при изменении функции потока V имеет один максимум, определяемый из условия

$$\frac{dx}{dV} = Aa(1 - e^{aV}) = 0, \quad \text{т.е.} \quad V = 0.$$

Это максимальное значение равно $x_{\max} = -A$. Крайним значениям функции потока $V = -\infty$ и $V = +\infty$ соответствует значение $x = -\infty$. Следовательно, при изменении функции потока от $-\infty$ до $+\infty$ координата x принимает все значения между $-\infty$ и $-A$. Координата же y остается постоянной. Она имеет значения: для одной полупрямой $y_1 = +A\pi$ и для другой $y_2 = -A\pi$. На рис. 24.17 изображены эти полупрямые. Обозначив расстояние между ними через d, будем иметь $y_1 - y_2 = 2A\pi = d$ и, следовательно, $A = d/2\pi$.

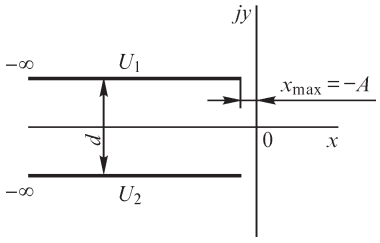

Рис. 24.17

Обнаруживается замечательное свойство исследуемой нами функции, а именно: две линии равного потенциала определяемого ею поля являются параллельными полупрямыми. Потенциал одной из них равен $U_1 = \pi/a$, потенциал другой имеет значение $U_2 = -\pi/a$. Таким образом, постоянная a определяется через разность потенциалов: $U_1 - U_2 = 2\pi/a$, откуда

$$a = \frac{2\pi}{U_1 - U_2}.$$

Если заметим, что эти полупрямые являются следами в плоскости z двух ограниченных с одной стороны бесконечных параллельных пластин, то нам станет ясно, что рассмотренная функция определяет поле между пластинами плоского конденсатора, ограниченными с одной стороны. Подставляя в выражение для z найденные значения постоянных A и a, получаем

$$z = \frac{d}{2\pi}\left(e^{\frac{2\pi}{U_1 - U_2}\zeta} + \frac{2\pi}{U_1 - U_2}\zeta\right),$$

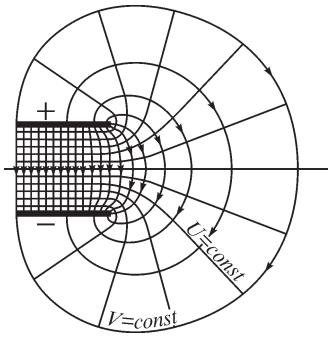

Рис. 24.18

причем $\zeta = V + jU$. Полагая $V = \text{const} = V_n$ и задаваясь рядом значений U в интервале $U_2 < U < U_1$, получим ряд точек, лежащих на одной линии напряженности поля, по которым и можем построить эту линию. Для построения других линий постоянную величину V_n будем изменять при переходе от одной линии к соседней каждый раз на одинаковую величину ΔV.

Полагая $U = \text{const} = U_n$, причем $U_2 < U_n < U_1$, и задаваясь рядом значений V, найдем точки, принадлежащие одной и той же линии равного потенциала. Линии равного потенциала строим так, чтобы для любых двух соседних линий имело место условие $\Delta U = \text{const}$. На рис. 24.18 построено поле у края плоского конденсатора.

Весьма существенно выяснить, на каком расстоянии от края конденсатора можно считать поле практически однородным. С этой целью найдем положение той точки на оси OX, в которой напряженность поля отличается на 1 % от напряженности $E_0 = \dfrac{U_1 - U_2}{d}$ однородного поля. Напряженность в любой точке поля имеет значение $E = \left|\dfrac{d\zeta}{dz}\right|$. Следовательно,

$$\frac{1}{E} = \left|\frac{dz}{d\zeta}\right| = Aa\left|e^{a\zeta} + 1\right|.$$

На оси OX потенциал равен нулю, что нетрудно усмотреть из выражения для координаты y. Действительно, если принять в этом выражении $U = 0$, то получим $y = 0$. Поэтому для точек на оси OX имеем $z = V$. Приняв еще во внимание, что $Aa = \dfrac{d}{U_1 - U_2} = \dfrac{1}{E_0}$, получаем для оси OX уравнение

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{E_0}(e^{aV} + 1).$$

Стало быть,

$$\frac{E - E_0}{E_0} = \frac{E}{E_0} - 1 = \frac{1}{e^{aV} + 1} - 1 = -\frac{e^{aV}}{e^{aV} + 1}.$$

Полагая $\dfrac{E - E_0}{E_0} = -0{,}01$, получим $e^{aV} = 0{,}0101$ и $aV = -4{,}60$. Вводя эти числовые значения в выражение для координаты x, которое при $U = 0$ имеет вид $x = A(e^{aV} + aV)$, получаем $x \gg -4{,}6A$. Расстояние искомой точки от края конденсатора равно $(x - x_0) = 3{,}6A$, так как расстояние края пластин от оси OY есть $x_0 = -A$. Используя значение постоянной A, окончательно находим

$$\left|x - x_0\right| = 3{,}6\frac{d}{2\pi} = 0{,}57d.$$

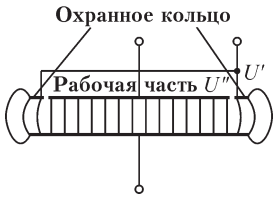

Рис. 24.19

Таким образом, уже на расстоянии от края конденсатора, имеющем порядок толщины диэлектрика между пластинами, поле можно считать однородным с весьма высокой степенью точности.

В эталонных воздушных конденсаторах, рассчитанных на высокое напряжение, и в которых расстояние между пластинами значительно, для исключения краевого эффекта выделяют в качестве рабочей части только среднюю часть пластины (рис. 24.19). Край пластины образует при этом так называемое охранное кольцо, изолированное от рабочей части пластины, но имеющее потенциал, по возможности близкий к потенциалу рабочей части. Произведенный расчет дает возможность определить требуемую ширину охранного кольца.

24.15. Графический метод построения картины плоскопараллельного поля

Во многих практических случаях форма сечений заряженных проводников и их взаимное расположение настолько сложны, что точный аналитический расчет поля оказывается невозможным. В связи с этим получает большое практическое значение графический метод построения картины поля, который разработан для плоскопараллельных полей и полей, окружающих заряженные тела вращения.

Наиболее просто построение осуществляется для плоскопараллельного поля. Должны быть соблюдены следующие условия:

1) линии напряженности поля и линии равного потенциала должны пересекаться всюду под прямым углом;

2) линии напряженности поля должны быть перпендикулярны к контурам, ограничивающим сечения проводников;

3) ячейки сетки, образованной линиями напряженности поля и линиями равного потенциала, при достаточной густоте сетки должны быть приблизительно подобны друг другу.

Третье условие соответствует требованию, чтобы приращение потенциала ΔU при переходе от любой линии равного потенциала к соседней было постоянным и чтобы поле было подразделено на трубки равного потока, т. е. чтобы $\Delta V = \text{const}$. При наличии такого требования третье условие вытекает из уравнений

$$E = -\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial a}.$$

Если обозначить средние размеры ячейки сетки: Δn — по направлению линии напряженности поля и Δa — по направлению линии равного потенциала (рис. 24.20), то эти уравнения приближенно могут быть записаны в форме

$$E = -\frac{\Delta U}{\Delta n} = \frac{\Delta V}{\Delta a}.$$

При условиях $\Delta U = \text{const}$ и $\Delta V = \text{const}$ имеем

$$\frac{\Delta n}{\Delta a} = k_1 = \text{const},$$

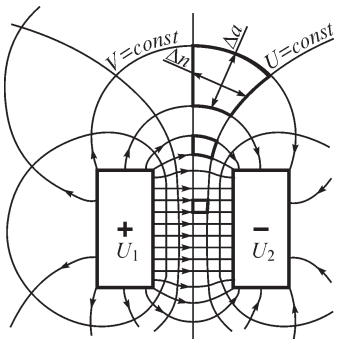

Рис. 24.20

откуда и следует, что при достаточно густой сетке ее ячейки должны представлять собой приблизительно подобные прямоугольники, если форма ячейки не слишком искажена кривизной линий. Но даже и при значительном искажении ячеек, когда трудно говорить об их подобии, последнее соотношение весьма помогает правильно построить картину поля. Обычно картину поля рисуют на глаз, стремясь удовлетворить первому и второму условиям, а затем уже постепенно вносят исправления так, чтобы удовлетворилось и третье условие. Рекомендуется для облегчения построения выбирать $\Delta n = \Delta a$. На рис. 24.20 в виде примера построено поле между двумя прямолинейными проводами прямоугольного сечения, имеющими одинаковые заряды разных знаков.

24.16. Графический метод построения картины поля тел вращения

Построение поля, образованного заряженными телами вращения с общей осью вращения, также может быть выполнено графическим путем. Поле строят в одной из меридианных плоскостей. В виде примера на рис. 24.21 построено поле около круглого стержня, проходящего через вырезанное в пластине круглое отверстие.

Первое и второе условия, сформулированные для плоскопараллельного поля в предыдущем параграфе, остаются без изменений, третье же условие, касающееся формы ячеек, несколько усложняется. При вращении картины поля вокруг оси заряженных тел каждая линия напряженности поля опишет поверхность вращения. Можно условиться выбирать эти поверхности так, чтобы поток $\Delta\Psi_E$, проходящий между двумя соседними поверхностями, всюду был одинаков. Тогда, если Δa — среднее в пределах ячейки поля расстояние между этими поверхностями, отсчитываемое в меридианной плоскости по направлению линии равного потенциала, и E — среднее значение напряженности в пределах отрезка Δa, то $\Delta\Psi_E = 2\pi r \Delta a E$, где r — расстояние от середины отрезка Δa до оси вращения. Таким образом, имеем

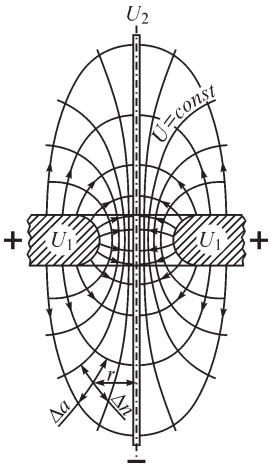

Рис. 24.21

$$E = -\frac{\Delta U}{\Delta n} = \frac{1}{2\pi r}\frac{\Delta\Psi_E}{\Delta a}.$$

Так как $\Delta U = \text{const}$ и $\Delta\Psi_E = \text{const}$, то получаем

$$\frac{\Delta n}{\Delta a} = k_2 r,$$

где $k_2 = \text{const}$.

Такому соотношению приблизительно и удовлетворяет поле, построенное на рис. 24.21.

24.17. Графический метод построения картины поля для неоднородной изолирующей среды

Все вышеизложенное относилось к однородной среде. Допустим, что изолирующая среда состоит из нескольких однородных диэлектриков с различными значениями ε, причем поверхности раздела между диэлектриками для плоскопараллельного поля являются цилиндрическими поверхностями и для поля тел вращения — поверхностями вращения вокруг общей оси. При этом лучше изображать на рисунке не линии напряженности поля, а линии электрического смещения, так как на поверхности раздела двух диэлектриков трубки смещения не претерпевают разрыва.

Так как $D = \varepsilon E$ и $\Delta\Psi_D = \varepsilon\Delta\Psi_E$, то будем иметь для плоскопараллельного поля

$$E = -\frac{\Delta U}{\Delta n} = \frac{1}{\varepsilon_p}\frac{\Delta\Psi_{1D}}{\Delta a},$$

где $\Psi_{1D} = \Psi_D/l$ — поток смещения, рассчитанный на единицу длины проводников. Следовательно, для плоскопараллельного поля получается условие

$$\frac{\Delta n}{\Delta a} = \varepsilon_p k_1,$$

где $k_1 = \text{const}$ и ε_p — абсолютная диэлектрическая проницаемость в той области, где строится ячейка сетки поля.

Для поля тел вращения

$$E = -\frac{\Delta U}{\Delta n} = \frac{1}{2\pi r\varepsilon_p}\frac{\Delta\Psi_D}{\Delta a}$$

и

$$\frac{\Delta n}{\Delta a} = r\varepsilon_p k_2,$$

где $k_2 = \text{const}$.

Кроме того, необходимо принять во внимание условие преломления линий электрического смещения на поверхности раздела двух диэлектриков (см. § 24.6).

24.18. Тело из диэлектрика во внешнем электростатическом поле

Практическое значение имеет задача о расчете поля в случае, когда тело из диэлектрика вносится в заданное внешнее поле. Положительно заряженные частицы, входящие в состав атомов и молекул вещества, смещаются в направлении поля, а отрицательно заряженные частицы — в противоположном направлении. На поверхности тела появляются связанные заряды разных знаков. Эти связанные заряды создают свое поле как внутри тела, так и вне его. Напряженность $\boldsymbol{E}$ результирующего поля является геометрической суммой напряженности $\boldsymbol{E}_0$ внешнего поля и напряженности $\boldsymbol{E}_1$ поля связанных зарядов. Трудность задачи

заключается в том, что поляризация вещества, а следовательно, и связанные заряды определяются результирующей напряженностью $\boldsymbol{E}$, которая сама зависит от связанных зарядов.

Если тело из диэлектрика находится в среде, диэлектрическая проницаемость которой меньше диэлектрической проницаемости вещества тела, то внутри тела поле связанных зарядов направлено против внешнего поля. Это нетрудно усмотреть из рис. 24.22. Такое поле связанных зарядов внутри тела называют деполяризующим электрическим полем, и его напряженность обозначают через $\boldsymbol{E}_{\text{деп}}$.

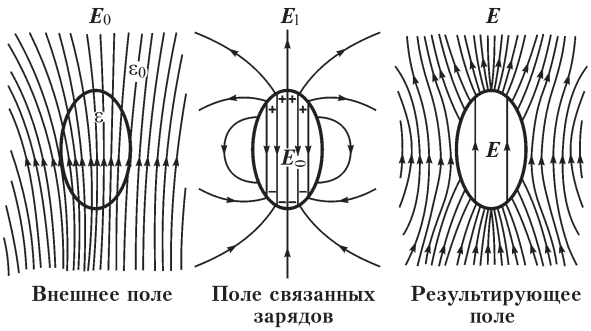

Рис. 24.22

Задача расчета заключается в следующем. Необходимо найти распределение связанных зарядов, создающих такое поле, которое, будучи наложенным на заданное внешнее поле, дает результирующее поле, удовлетворяющее граничным условиям на поверхности тела — равенству касательных составляющих вектора $\boldsymbol{E}$ и равенству нормальных составляющих вектора $\boldsymbol{D}$ по обе стороны поверхности. В следующем параграфе рассмотрен простейший пример задачи такого типа.

24.19. Диэлектрический шар во внешнем однородном поле

Пусть шар из диэлектрика внесен во внешнее однородное поле напряженности $\boldsymbol{E}_0$, существующее в пустоте. Предположим, что шар поляризуется однородно, т. е. что однородно результирующее поле, создающее поляризацию, и, следовательно, однородно и деполяризующее поле.

Обозначим напряженность деполяризующего поля через $\boldsymbol{E}_{\text{деп}}$. Следовательно, напряженность результирующего поля внутри шара будет

$$E'' = E_0 - E_{\text{деп}}.$$

Направим ось OZ в сторону внешнего поля (рис. 24.23). Вследствие симметрии относительно оси OZ достаточно рассмотреть поле в одной меридианной плоскости.

Потенциал U'' внутри шара найдется из условия

$$E'' = -\frac{\partial U''}{\partial z},$$

откуда

$$U'' = -E''z + \text{const}.$$

Полагая $U'' = 0$ при $z = 0$ и замечая, что $z = r\cos\varphi$, получим

$$U'' = -(E_0 - E_{\subset\supset})\, r\cos\varphi.$$

При этом составляющая $-E_0 r\cos\varphi$ представляет собой потенциал внешнего поля, а составляющая $E_{\subset\supset} r\cos\varphi$ — потенциал поля связанных зарядов внутри шара.

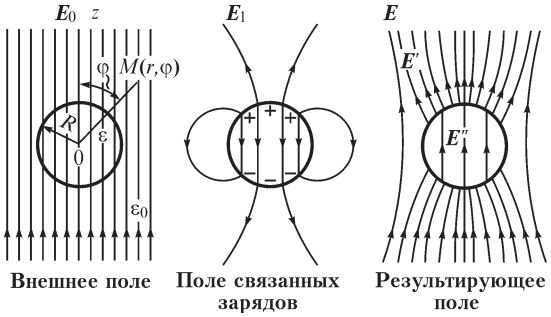

Рис. 24.23

Во внешнем пространстве однородно поляризованный шар создает поле такое же, как электрический диполь, помещенный в центре шара. Действительно, неполяризованный диэлектрический шар можно представить себе как две наложенные друг на друга разноименно заряженные сферы с зарядами, равномерно распределенными по их объему. Эти заряды образуются совокупностью положительных и соответственно отрицательных элементарных частиц, входящих в состав молекул диэлектрика. При однородной поляризации все молекулы поляризуются одинаково. Пусть d — длина осей элементарных диполей, т. е. среднее расстояние, на которое смещаются друг от друга в молекулах заряды противоположных знаков. Весь поляризованный шар эквивалентен двум равномерно и разноименно заряженным сферам, смещенным друг от друга на расстояние d. Но каждая сфера создает во внешнем пространстве такое же поле, как если бы весь заряд был сосредоточен в ее центре. Следовательно, две смещенные относительно друг друга сферы эквивалентны диполю.

Так как радиус R шара много больше длины d диполя, то вне шара потенциал поля, вызванного поляризацией шара, определится приведенной в § 24.2 формулой $\dfrac{p\cos\varphi}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, где p — электрический момент диполя, эквивалентного поляризованному шару.

Налагая этот потенциал на потенциал внешнего однородного поля, вне шара будем иметь

$$U' = -E_0\, r\cos\varphi + \frac{p\cos\varphi}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Обозначим результирующую напряженность поля и электрическое смещение вне шара E' и D'. Используем граничные условия на поверхности шара.

При $r = R$ имеем

$$E'_t = E''_t \quad \text{или} \quad \left(-\frac{1}{r}\frac{\partial U'}{\partial \varphi}\right)_{r=R} = \left(-\frac{1}{r}\frac{\partial U''}{\partial \varphi}\right)_{r=R},$$

т. е.

$$-E_0 \sin\varphi + \frac{p\cos\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = -(E_0 - E_{\text{⊂⊃}})\sin\varphi.$$

Следовательно,

$$E_{\text{⊂⊃}} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 R^3}.$$

Кроме того, при $r = R$

$$D'_n = D''_n \quad \text{или} \quad \varepsilon_0\left(-\frac{\partial U'}{\partial \varphi}\right)_{r=R} = \varepsilon\left(-\frac{\partial U''}{\partial \varphi}\right)_{r=R},$$

т. е.

$$\varepsilon_0 E_0 \cos\varphi + \frac{p\cos\varphi}{2\pi R^3} = \varepsilon(E_0 - E_{\text{⊂⊃}})\cos\varphi.$$

Следовательно,

$$\varepsilon_0 E_0 + \frac{p}{2\pi R^3} = \varepsilon E_0 - \varepsilon E_{\text{⊂⊃}}.$$

Используя выражение $E_{\text{⊂⊃}} = \dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$, получаем

$$\varepsilon_0 E_0 + 2\varepsilon_0 E_{\text{⊂⊃}} = \varepsilon E_0 - \varepsilon E_{\text{⊂⊃}}$$

и

$$E_{\text{⊂⊃}} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0.$$

Таким образом, момент эквивалентного диполя равен

$$p = 4\pi\varepsilon_0 R^3 E_{\text{⊂⊃}} = 4\pi R^3 \varepsilon_0 \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0.$$

Нам удалось выразить p и E через напряженность E_0 заданного внешнего поля. При этом граничные условия на поверхности шара удовлетворяются для всех точек поверхности, т. е. для любого значения φ при $r = R$. Следовательно, наше предположение, что шар в однородном поле поляризуется однородно, правильно.

Нетрудно найти распределение связанных зарядов по поверхности шара. Именно поверхностная плотность σ этих зарядов равна нормальной составляющей вектора поляризованности:

$$\sigma = P_n = P\cos\varphi,$$

где

$$P = \frac{p}{\frac{4\pi}{3}R^3} = 3\varepsilon_0 \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 = 3\varepsilon_0 E_{\text{⬭}}.$$

Мы нашли распределение связанных зарядов из условия, что шар поляризован однородно. Можно высказать обратное положение, что распределение связанных зарядов на поверхности шара с плотностью, пропорциональной $\cos\varphi$, вызывает однородное деполяризующее поле внутри шара.

Можно доказать, что таким же замечательным свойством поляризоваться однородно во внешнем однородном поле обладает эллипсоид. Шар является его частным случаем.

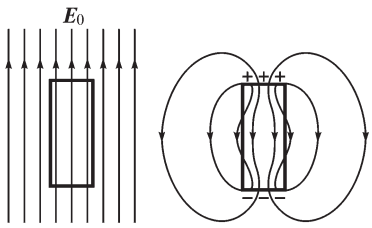

Рис. 24.24

Нетрудно сообразить, что тело произвольной формы будет поляризоваться в однородном поле неоднородно. Рассмотрим, например, цилиндр конечной длины, помещенный в однородное поле так, что его образующие совпадают с направлением поля (рис. 24.24). Если предположить, что цилиндр поляризуется однородно, то связанные заряды появятся только на его торцах. Очевидно, при этом поле связанных зарядов не может быть внутри цилиндра однородным, а следовательно, неоднородным будет и результирующее поле, что противоречит предположению об однородной поляризации.

24.20. Общий метод расчета электрического поля в неоднородной среде. Метод интегральных уравнений

В предыдущих параграфах были рассмотрены некоторые частные случаи расчета электрических полей в однородных средах. В § 24.3 приведен общий метод определения потенциала в однородной среде по заданному распределению зарядов. В § 24.18 показано, что в случае неоднородных сред на границах раздела однородных сред появляются связанные заряды. Если среда неоднородна, то под воздействием внешнего поля связанные заряды появляются по всему ее объему. Распределение этих зарядов определяется не только напряженностью электрического поля свободных зарядов, но и самими связанными зарядами. Напомним, что трудность решения рассматриваемой задачи заключается в том, что поляризация вещества, а следовательно, и связанные заряды определяются результирующей напряженностью $\boldsymbol{E}$, которая сама зависит от распределения связанных зарядов. Таким образом, для применения метода § 24.3 необходимо привести неоднородную среду к эквивалентной ей однородной.

Допустим, что поверхность s разделяет объем V_i с неоднородной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_i(x, y, z)$, и объем V_e с однородной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_e = \text{const}$. В объемах V_i и V_e распределены заряды с объемной плотностью ρ_i и ρ_e соответственно (рис. 24.25).

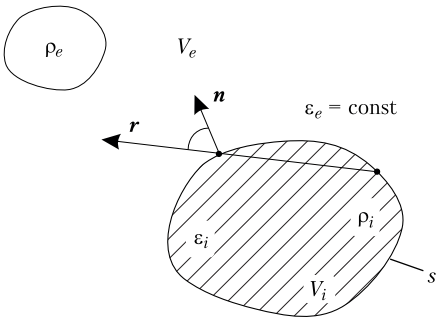

Рис. 24.25

Для нахождения величин связанных зарядов воспользуемся выражениями

$$\operatorname{div}\boldsymbol{D} = \rho,\ \boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E} \text{ или } \operatorname{div}\varepsilon\boldsymbol{E} = \varepsilon\operatorname{div}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}\nabla\varepsilon.$$

Тогда в среде с диэлектрической проницаемостью ε_i имеем $\operatorname{div}\boldsymbol{E}_i = \dfrac{\rho_i}{\varepsilon_i} - \dfrac{1}{\varepsilon_i}\boldsymbol{E}_i \cdot \nabla\varepsilon_i$, а в среде с диэлектрической проницаемостью ε_e имеем $\operatorname{div}\boldsymbol{E}_\varepsilon = \dfrac{\rho_\varepsilon}{\varepsilon_\varepsilon} - \dfrac{1}{\varepsilon_\varepsilon}\boldsymbol{E}_\varepsilon \cdot \nabla\varepsilon_\varepsilon$.

Допустим, что рассматриваемую задачу расчета поля в неоднородной среде мы хотим заменить задачей расчета поля в однородной среде с диэлектрической проницаемостью ε. Для этого следует определить объемную плотность зарядов, соответствующих новому значению диэлектрической проницаемости.

Для сохранения неизменными величин $\operatorname{div}\boldsymbol{E}_i$ и $\operatorname{div}\boldsymbol{E}_e$ при переходе к однородной среде с диэлектрической проницаемостью ε объемную плотность ρ_i заряда следует умножить на величину $\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_i}$, а объемную плотность ρ_e заряда — на величину $\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_e}$:

$$\rho' = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_i}\rho_i - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_i}\boldsymbol{E}_i\nabla\varepsilon_i = \rho'_i + \rho \qquad (*)$$

в области V_i и $\rho'_e = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_e}\rho_e$ в области V_e.

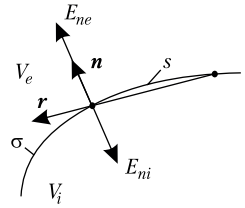

Рис. 24.26

При сведении среды к однородной необходимо аналогичным образом преобразовать поверхностную плотность σ заряда на границе раздела сред. Для ее нахождения воспользуемся выражением $\oint_s \boldsymbol{D}\,d\boldsymbol{s} = q$ (рис. 24.26).

Нормальная к поверхности s составляющая напряженности поля в однородной среде равна $+\dfrac{\sigma}{2\varepsilon}$ с одной и $-\dfrac{\sigma}{2\varepsilon}$ с другой стороны поверхности.

Напряженность электрического поля в точке на границе раздела сред можно разделить на две части: образованную всеми зарядами за исключением поверхностного заряда, расположенного в этой точке (E_n), и образованную поверхностным зарядом, расположенным в этой точке. Тогда нормальные составляющие напряженности поля с обеих сторон поверхности равны соответственно

$$E_{ne} = E_n + \frac{\sigma}{2\varepsilon}, \qquad E_{ni} = E_n - \frac{\sigma}{2\varepsilon}.$$

Если их подставить в выражающее граничное условие соотношение $\varepsilon_i E_{ni} = \varepsilon_e E_{ne}$, то можно найти величину σ:

$$\sigma = 2\varepsilon \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + \varepsilon_e} E_n = 2\varepsilon\lambda E_n, \qquad (**)$$

где $\lambda = \dfrac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + \varepsilon_e}$.

Таким образом, переход от неоднородной среды к однородной можно выполнить, если в точках неоднородности поместить электрические заряды, объемная ρ и поверхностная σ плотности которых определяются через неизвестные величины $\boldsymbol{E}$ и $E_{n,}$ которые сами зависят не только от заданных сторонних, но и от искомых «вторичных» зарядов.

Для записи уравнений, которым удовлетворяют объемная ρ и поверхностная σ плотности вторичных источников, выразим величины $\boldsymbol{E}$ и E_n через плотности заданных и вторичных источников (см. § 24.3):

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V_i}\rho_i \frac{\varepsilon}{\varepsilon_i}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}dV_i + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V_e}\rho_e \frac{\varepsilon}{\varepsilon_e}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}dV_e + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V_i}\frac{\rho\boldsymbol{r}}{r^3}dV_i + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\oint_s\frac{\sigma\boldsymbol{r}}{r^3}ds,$$

($\boldsymbol{r}$ — вектор, направленный от точки, где расположен заряд, к точке, в которой находим величину $\boldsymbol{E}$, и равный расстоянию между ними), $E_n = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}$ и, подставляя их в полученные выше выражения (*), (**), находим:

$$\rho + \frac{\operatorname{grad}\varepsilon_i}{4\pi\varepsilon_i}\int_{V_i}\frac{\rho\boldsymbol{r}}{r^3}dV_i + \frac{\operatorname{grad}\varepsilon_i}{4\pi\varepsilon_i}\oint_s\frac{\sigma\boldsymbol{r}}{r^3}ds = -\frac{\operatorname{grad}\varepsilon}{4\pi\varepsilon_i}\int_{V_i}\frac{\rho'_i\boldsymbol{r}}{r^3}dV_i - \frac{\operatorname{grad}\varepsilon}{4\pi\varepsilon_i}\oint_{V_e}\frac{\rho'_e\boldsymbol{r}}{r^3}dV_e,$$

$$\sigma - \frac{\lambda}{2\pi}\oint_s\sigma\frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}}{r^3}ds - \frac{\lambda}{2\pi}\int_{V_i}\rho\frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}}{r^3}dV_i = \frac{\lambda}{2\pi}\int_{V_i}\rho'_i\frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}}{r^3}dV_i + \frac{\lambda}{2\pi}\int_{V_e}\rho'_e\frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}}{r^3}dV_e.$$

Решая систему из двух интегральных уравнений, можем отределить плотности ρ и σ зарядов и рассчитать напряженность $\boldsymbol{E}$ поля.

В кусочно-однородной среде, когда диэлектрическая проницаемость ε_i вещества тела, находящегося в среде с проницаемостью ε_e, имеет одинаковое значение во всех точках, имеем $\operatorname{grad}\varepsilon_i = 0$, вследствие чего при переходе к однородной среде с диэлектрической проницаемостью ε «вторичные» источники размещены только на поверхности s и подчиняются уравнению

$$\sigma - \frac{\lambda}{2\pi}\oint_s\sigma\frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}}{r^3}ds = \frac{\lambda}{2\pi}\int_{V_i}\rho'_i\frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}}{r^3}dV_i + \frac{\lambda}{2\pi}\int_{V_e}\rho'_e\frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}}{r^3}dV_e.$$

Учитывая, что $\oint_s\sigma\dfrac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}}{r^3}ds = \oint_s\sigma\dfrac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}ds$ (см. рис. 24.26), и обозначая правую часть уравнения через $2\varepsilon\lambda E_{0n}$, получим окончательно

$$\sigma - \frac{\lambda}{2\pi}\oint_s\sigma\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}ds = 2\varepsilon\lambda E_{0n}. \qquad (***)$$

Решение интегральных уравнений является сложной задачей и может быть найдено в общем случае численными методами. В некоторых случаях, когда поверхность раздела является плоской, цилиндрической либо сферической, могут быть применены аналитические методы решения.

Свойства полученных уравнений, относящихся к интегральным уравнениям типа Фредгольма второго рода, зависят как от коэффициента при входящей под знак интеграла искомой плотности заряда, называемого ядром, так и от значения множителя λ. При расчете трехмерного электрического поля ядро имеет вид $\frac{\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r^2}$, тогда как при рассмотрении плоскопараллельного поля оно, как нетрудно убедиться, суть $\frac{\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r}$. Для двухмерных полей входящие в уравнение интегралы по объему переходят в поверхностные, а интегралы по поверхностям — в контурные.

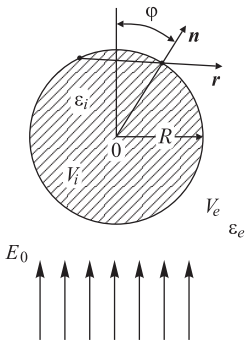

Рис. 24.27

Значение множителя λ определяется соотношением диэлектрических проницаемостей тела и окружающей его среды и находится в пределах $0 \le \lambda \le 1$, причем крайние значения получаются при $\varepsilon_i = 0$ и $\varepsilon_i = \infty$.

В качестве примера решения задачи расчета электрического поля методом интегральных уравнений рассмотрим случай, когда бесконечно длинный цилиндр радиусом R из диэлектрика с абсолютной проницаемостью ε_i внесен в среду с проницаемостью ε_e. Принимая, что внешнее электрическое поле напряженностью $\boldsymbol{E}_0$ нормально к оси цилиндра, приведем среду к однородной с проницаемостью ε_e (рис. 24.27).

Поскольку на контуре цилиндра выполняется условие $\frac{\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r} = \frac{1}{2R}$, то при $dl = R\,d\varphi$ интегральное уравнение

$$\sigma - \frac{\lambda}{\pi}\oint_l \sigma \frac{\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r}\,dl = 2\varepsilon_e \lambda E_{0n}$$

переходит в уравнение

$$\sigma - \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sigma\,d\varphi = 2\varepsilon_e \lambda E_{0n}.$$

В данном случае решение этого уравнения тривиально, так как входящий в него интеграл равен нулю вследствие симметричного распределения зарядов на поверхности цилиндра: $\sigma = 2\varepsilon_e \lambda E_{0n}$.

При условии однородности внешнего поля имеет место соотношение $E_{0n} = E_0 \cos\varphi$ и, следовательно, $\sigma = 2\varepsilon_e \lambda E_0 \cos\varphi$.

Можно показать, что полученное распределение заряда создает внутри цилиндра однородное электрическое поле напряженностью $E = \lambda E_0 = \dfrac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + \varepsilon_e} E_0$, в связи с чем результирующее поле внутри цилиндра также является однородным напряженностью $E = (1 - \lambda)\, E_0 = \dfrac{2\varepsilon_e}{\varepsilon_i + \varepsilon_e} E_0$.

При $\varepsilon_i > \varepsilon_e$ деполяризующее электрическое поле направлено навстречу внешнему, что имеет место при $\lambda > 0$.

Решим методом интегральных уравнений рассмотренную в § 24.19 задачу о шаре с диэлектрической проницаемостью ε_i, внесенном в однородное поле напряженностью $\boldsymbol{E}_0$, существующем в среде с диэлектрической проницаемостью ε.

Учитывая, что на поверхности шара справедливо соотношение $\dfrac{\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r^2} = \dfrac{1}{2Rr}$, из интегрального уравнения (***) получаем

$$\sigma - \frac{\lambda}{4\pi R} \oint_s \frac{\sigma}{r}\, ds = 2\varepsilon\lambda E_{0n}.$$

Так как $E_{0n} = E_0 \cos\varphi$, то, исходя из условия однородности поля внутри шара, будем искать решение в виде $\sigma = \sigma_m \cos\varphi$.

Вычислив входящий в уравнение интеграл $\oint_s \dfrac{\sigma_m \cos\varphi}{r}\, ds = \dfrac{4\pi R}{3}\sigma_m \cos\varphi$, находим искомую плотность заряда $\sigma = 6\varepsilon \dfrac{\lambda}{3 - \lambda} E_0 \cos\varphi = 3\dfrac{\varepsilon_i - \varepsilon}{\varepsilon_i + 2\varepsilon}\varepsilon E_{0n}$ и напряженность электрического поля внутри шара: $E_i = E_0 - \dfrac{\sigma_m}{3\varepsilon} = \dfrac{3\varepsilon}{\varepsilon_i + 2\varepsilon} E_0$, где $\dfrac{\sigma_m}{3\varepsilon} =$

$= \dfrac{\varepsilon_{\text{ι}} - \varepsilon}{\varepsilon_{\text{ι}} + 2\varepsilon} \mathrm{E}_0 = \mathrm{E}_{\subset\supset}$ — напряженность деполяризующего поля.

Аналитическое решение интегрального уравнения для плотности вторичных источников при неоднородной поляризации тела даже при его простой форме затруднительно. В таких задачах интегральное уравнение решают численно.

24.21. Проводящее тело во внешнем электростатическом поле. Электростатическое экранирование

Большое практическое значение имеют также задачи, в которых рассматриваются заряженные или незаряженные проводящие тела, внесенные в заданное внешнее электрическое поле. Поле внутри проводящего тела исчезает. В пространстве вне тела внешнее поле изменяется. На поверхности тела наводятся (индуцируются) электрические заряды. Это называется явлением электростатической индукции. На рис. 24.28 в виде примера показано результирующее поле около проводящего тела, внесенного в поле заряженных пластин.

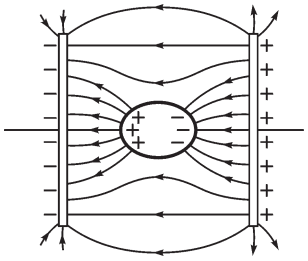

Рис. 24.28

Если внесенное тело не было заряжено, то сумма наведенных на нем зарядов оказывается равной нулю. Эти заряды распределяются так, чтобы их поле внутри проводящего тела в точности скомпенсировало поле всех внешних зарядов. Ничто не изменится, если проводящее тело будет полым — во всей полости тела поле также будет отсутствовать. Этим обстоятельством широко пользуются для *электростатического экранирования* электрических измерительных приборов и элементов измерительных схем от внешних электрических полей. С этой целью приборы помещают в замкнутые металлические оболочки, называемые *экранами*. Как показывает опыт, достаточно выполнить экраны из мелкой металлической сетки.

Если желательно придать самому экрану потенциал, равный нулю, то экран соединяют с землей. Это бывает полезно, например, в случае, если от прибора, заключенного в экран, выходят проводники к внешней схеме, которая находится при потенциале, близком к потенциалу земли.

Заземленный экран способен в равной мере защищать внешнее пространство от поля зарядов, помещенных внутри экрана.

Подобную экранирующую роль играет защитная свинцовая оболочка кабелей (рис. 24.29, *а*). Поле, существующее между отдельными проводами кабеля, не выходит за пределы свинцовой оболочки, и этим исключается электростатическое влияние кабеля на близлежащие провода линий связи. Иногда в кабеле экранируют каждый провод в отдельности (рис. 24.29, *б*), чем достигается более равномерное распределение поля около каждого из проводов кабеля.

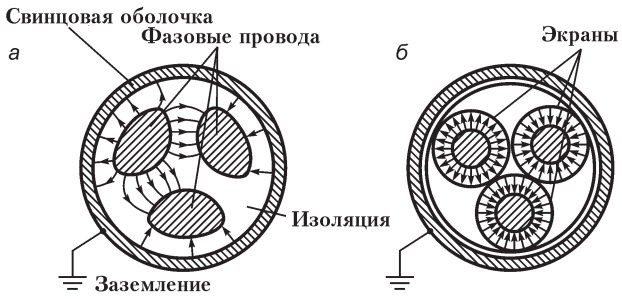

Рис. 24.29

Интересуясь результирующим полем, которое образуется вне проводящего тела, внесенного во внешнее поле, например в случае, показанном на рис. 24.28, мы должны рассматривать это поле как результат наложения поля наведенных на теле зарядов на заданное внешнее поле. Если, кроме того, внесенное тело имеет суммарный заряд, отличный от нуля, то необходимо наложить еще и поле этого заряда.

Пример расчета результирующего поля приведен в следующем параграфе.

24.22. Металлический шар во внешнем однородном поле

Задача, рассмотренная в § 24.19, позволяет найти поле, окружающее металлический шар, внесенный во внешнее однородное поле. Внутри шара поле должно отсутствовать, и потенциал в объеме шара должен иметь постоянное значение. Следовательно, заряды, которые наводятся на поверхности шара, должны создавать внутри шара однородное поле, полностью компенсирующее внешнее поле. Как вытекает из рассмотрения, произведенного в § 24.19, такое поле образуется зарядами, поверхностная плотность которых пропорциональна cos φ. Во внешнем пространстве эти заряды создают поле такое же, как эквивалентный диполь, помещенный в центре шара. Таким образом, интересующая нас задача сводится к рассмотренной в § 24.19 задаче о диэлектрическом шаре, если в ней принять $E'' = E_0 - E_{\subset\supset} = 0$, т. е. $E_{\subset\supset} = E_0$. Согласно формуле $E_{\subset\supset} = \dfrac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0$, это равенство достигается в пределе при $\varepsilon = \infty$. Поэтому поля вектора $\boldsymbol{E}$ одинаковы для металлического шара и шара из диэлектрика при $\varepsilon = \infty$. Вне шара в обоих случаях одинаковы и поля вектора $\boldsymbol{D}$. Однако внутри шара из диэлектрика вектор $\boldsymbol{D}$ и при $\varepsilon = \infty$ остается конечным и не равным нулю. Именно, учитывая равенства $P = 3\varepsilon_0 E$ и $E_{\subset\supset} = E_0$, имеем

$$D'' = \varepsilon_0 E'' + P = P = 3\varepsilon_0 E_0.$$

Это связано с тем, что трубки электрического смещения непрерывны на границе диэлектрика и, сгущаясь внутри тела с большой диэлектрической проницаемостью, проходят через тело без разрывов. Связанные заряды на границе двух диэлектриков не дают начала новым трубкам смещения.

Внутри же металлического тела исчезает не только поле вектора $\boldsymbol{E}$, но и поле вектора $\boldsymbol{D}$. Заряды, наведенные на поверхности тела, являются теперь свободными, образовавшимися вследствие конечной проводимости тела. Трубки электрического смещения, существующие вне тела, заканчиваются на этих зарядах и не проникают внутрь тела. Отсюда видно, что рассмотрение проводника как диэлектрика с $\varepsilon = \infty$, по существу, является формальным.

Более сложной является задача определения поля вокруг заряженного или незаряженного металлического тела, внесенного во внешнее неоднородное поле. Ее можно решить, используя метод интегральных уравнений, формально рассматривая диэлектрик как проводник.

При $\varepsilon_i = 0$ имеем $\lambda = 1$, и уравнение (***) § 24.20 для случая незаряженного тела переходит в интегральное уравнение

$$\sigma - \frac{1}{2\pi} \oint_s \sigma \frac{\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r^2} ds = 2\varepsilon E_{0n},$$

которое позволяет рассчитать плотность распределенных на поверхности проводящего тела свободных зарядов.

Если помещенное во внешнее поле проводящее тело имеет заряд q, то, прибавляя к обеим частям последнего уравнения соотношение $\frac{1}{s}\oint_s \sigma\, ds = \frac{q}{s}$, получаем уравнение

$$\sigma - \frac{1}{2\pi}\oint_s \sigma\left[\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2} - \frac{2\pi}{\sigma}\right] ds = \frac{q}{s} + 2\varepsilon E_{0n},$$

учитывающее заряд тела.

24.23. Метод зеркальных изображений

Расчет поля заряженных проводников, расположенных вблизи плоских поверхностей, ограничивающих проводящую среду, сводится при помощи метода зеркальных изображений к расчету поля нескольких проводников при отсутствии проводящей среды.

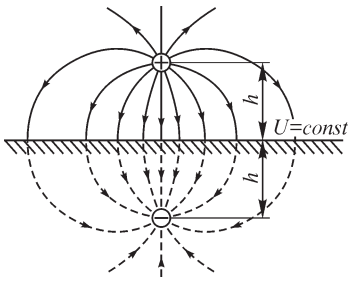

Рис. 24.30

Рассмотрим поле прямолинейного провода, расположенного на расстоянии h от плоской поверхности проводящей среды (рис. 24.30). Это соответствует, например, проводу, подвешенному на высоте h над поверхностью земли. Все линии напряженности поля, начинающиеся на положительно заряженном проводе, заканчиваются у поверхности проводящей среды, где появляется индуцированный отрицательный заряд. Поле определяется как зарядом провода, так и всем зарядом, распределенным по поверхности проводящей среды. Распределение индуцированного заряда из условий задачи не известно и также подлежит определению.

На первый взгляд задача расчета поля в такой системе кажется довольно сложной. Однако она решается весьма просто при помощи *метода зеркальных изображений*. Устраним мысленно проводящую среду и заменим ее проводом, являющимся зеркальным изображением реального провода в поверхности раздела и имеющим заряд той же величины, что и заряд реального провода, но противоположного знака (рис. 24.30). Действительный провод и его зеркальное изображение составляют двухпроводную линию, поле которой изображено на рис. 24.14. Из рис. 24.14 видно, что плоскость, расположенная посередине между действительным проводом и его зеркальным изображением, является поверхностью равного потенциала. В действительных условиях поверхность проводящей среды как раз совпадает с этой плоскостью и также является поверхностью равного потенциала. Отсюда следует, что *если заменить проводящую среду зеркальным изображением провода с изменением знака заряда, то в области над проводящей средой поле останется таким же, как и в действительных условиях*. В этом и заключается метод зеркальных изображений.

Этот метод применим и при любом числе проводов, протянутых параллельно друг другу и параллельно плоской поверхности, ограничивающей проводящую среду (рис. 24.31). Каждый провод должен быть зеркально отражен в поверхно-

сти проводящей среды с изменением знака заряда, после чего проводящая среда может быть мысленно удалена и рассмотрено поле совокупности действительных проводов и их зеркальных изображений. В таком поле плоскость, расположенная на месте поверхности проводящей среды, является поверхностью равного потенциала, так как заряды противоположных знаков размещены симметрично относительно этой плоскости. Следовательно, найденное таким путем поле и будет действительным полем в области над поверхностью проводящей среды.

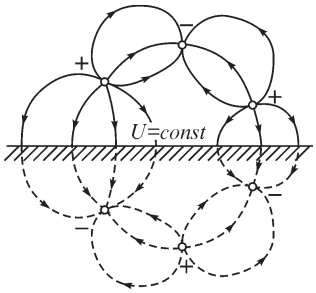

Рис. 24.31

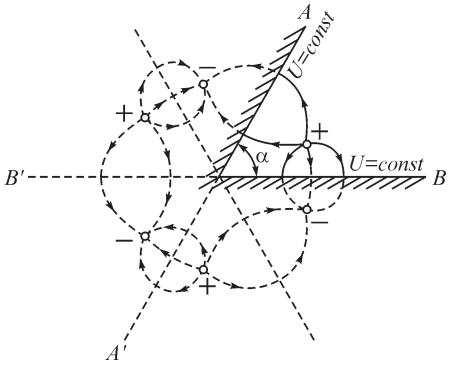

Рис. 24.32

Метод зеркальных изображений также может быть использован, когда проводящая среда ограничена двумя плоскостями, сходящимися под углом $\alpha = \pi/n$, где n — целое число, причем угол α отсчитывается в диэлектрике, где рассматривается поле. Разделив все пространство на одинаковые части плоскостями, пересекающимися под углом α (см. рис. 24.32), что возможно, только если n есть целое число, и последовательно отражая провод в этих плоскостях, получим систему из действительного провода и серии его зеркальных изображений. В поле такой системы плоскости $A - A'$ и $B - B'$ являются плоскостями равного потенциала, так как заряды противоположных знаков размещены симметрично по отношению к ним. Поэтому поле этой системы совпадает с действительным полем в той части пространства, где последнее существует.

Метод зеркальных изображений в полной мере применим и для заряженных тел любой формы, расположенных в диэлектрике около плоскостей, ограничивающих проводящую среду. Естественно, поле при этом уже не будет плоскопараллельным.

Метод зеркальных изображений можно применить также в условиях, когда плоская поверхность разделяет две среды с различными диэлектрическими проницаемостями. Пусть источником электрического поля является положительный заряд q, помещенный в среде *1* с диэлектрической проницаемостью ε_1 на расстоянии h от плоской поверхности раздела сред (рис. 24.33).

При сведении среды к однородной с диэлектрической проницаемостью ε_1 поместим на плоской поверхности электрический заряд, плотность которого, как следует из соотношения (**) § 24.20, можно определить по формуле $\sigma = 2\varepsilon_1 \lambda E_{0n}$,

так как составляющая напряженности $E_n(\sigma)$ поля, обусловленная зарядами на плоскости, обращается в нуль.

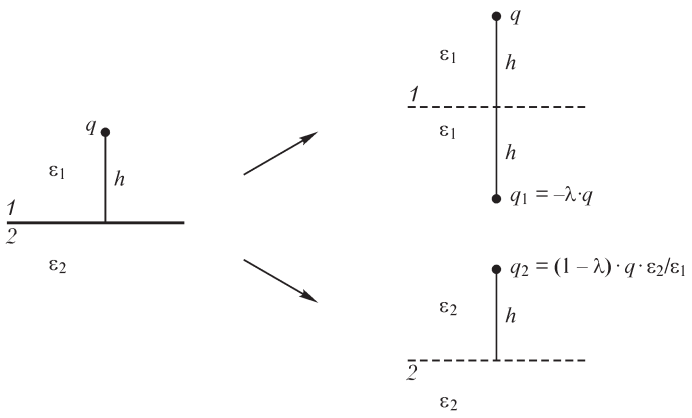

Рис. 24.33

При $\varepsilon_2 = \infty$, т. е. при формальной замене диэлектрика проводником, имеем $\lambda = 1$ и $\sigma = 2\varepsilon_1 E_{0n}$. Так как напряженность $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(q) + \boldsymbol{E}(\sigma)$ поля в проводящей среде, обусловленная зарядом q и распределенным на плоскости зарядом, равна нулю, то $\boldsymbol{E}(q) = -\boldsymbol{E}(\sigma)$ и, следовательно, поле поверхностных зарядов эквивалентно полю заряда $-q$. Поэтому электрическое поле в среде *1* определяется заданным зарядом q и его зеркально изображенным зарядом $q_1 = -q$, а поле в проводящей среде — зарядом q и зарядом $-q$, который эквивалентен поверхностному и помещен в ту же точку в среде *1*, т. е. зарядом, равным $q_2 = q - q = 0$, что дает значение напряженности поля в проводящей среде $\boldsymbol{E} = 0$.

При конечном значении ε_2 из выражения $\sigma = 2\varepsilon_1 \lambda E_{0n}$ следует, что электрическое поле поверхностных зарядов эквивалентно полю заряда, равного $-q\lambda$, в связи с чем поле в среде *1* можно найти при наложении электрических полей заданного заряда q и зеркально изображенного заряда $q_1 = -q\lambda = -\dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} q$.

Для расчета поля в области *2* неоднородную среду заменяем однородной с диэлектрической проницаемостью ε_2, причем для сохранения неизменной составляющей напряженности электрического поля, создаваемого заданным зарядом q, последний должен быть изменен и стать равным $q\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$. Поле в среде *2* определяется наложением полей заряда $q\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ в области *1* и заряда $-\dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} q \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$, помещенного в ту же точку:

$$q_2 = q\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} q\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} q.$$

Величина λ и постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 выбираются таковыми, чтобы были удовлетворены заданные граничные условия. Так, если при $x = 0$ и при $x = a$ имеет место условие $U = 0$, то, следовательно, $C_2 = 0$ и $C_1 \sin \lambda a = 0$, откуда вытекает, что $\lambda a = \pi n$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$ в силу того, что $C_1 \neq 0$.

Таким образом, постоянная λ может принимать не произвольные значения, а лишь значения, удовлетворяющие равенству $\lambda_n = \dfrac{\pi n}{a}$ и называемые собственными числами. Соответствующие им функции X_n, Y_n носят название собственных функций.

Общее решение уравнения запишем в виде

$$U(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (D_{1n} \operatorname{sh} \lambda_n y + D_{2n} \operatorname{ch} \lambda_n y) \sin \lambda_n x,$$

где через D_{1n}, D_{2n} обозначены величины $D_{1n} = C_{1n}C_{3n}$, $D_{2n} = C_{1n}C_{4n}$. Входящие в него постоянные D_{1n}, D_{2n} следует определить исходя из необходимости удоовлетворения условий: $U = U_1(x)$ при $y = 0$, $U = U_2(x)$ при $y = b$, которые приводят к соотношениям

$$U_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_{2n} \sin \lambda_n x,$$

$$U_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (D_{1n} \operatorname{sh} \lambda_n b + D_{2n} \operatorname{ch} \lambda_n b) \sin \lambda_n x.$$

Коэффициенты ряда можно найти с помощью известных для коэффициентов ряда Фурье выражений:

$$D_{20} = \frac{1}{a} \int_0^a U_1(x)\, dx, \qquad (*)$$

$$D_{2n} = \frac{2}{a} \int_0^a U_1(x) \sin \frac{\pi n}{a} x\, dx = U_{1n},$$

$$D_{1n} \operatorname{sh} \lambda_n b + D_{2n} \operatorname{ch} \lambda_n b = \frac{2}{a} \int_0^a U_2(x) \sin \frac{\pi n}{a} x\, dx = U_{2n}, \qquad (**)$$

откуда

$$D_{1n} = \frac{U_{2n} - U_{1n} \operatorname{ch} \lambda_n b}{\operatorname{sh} \lambda_n b}.$$

В общем случае решение уравнения Лапласа в прямоугольной системе координат методом разделения переменных можно записать в виде ряда

$$U(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (C_{1n} \sin \lambda_n x + C_{2n} \cos \lambda_n x)(C_{3n} \operatorname{sh} \lambda_n y + C_{4n} \operatorname{ch} \lambda_n y)$$

либо в виде ряда

$$U(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}(C_{1n}\mathrm{sh}\,\lambda_n x+C_{2n}\mathrm{ch}\,\lambda_n x)(C_{3n}\sin\lambda_n y+C_{4n}\cos\lambda_n y),$$

коэффициенты которого находятся при разложении функций, определяющих граничные условия, в ряд по собственным функциям задачи (в рассмотренной выше задаче по функциям $\sin\lambda_n x$).

Решение уравнения Лапласа, записанного в цилиндрической либо иной системе координат, также может быть представлено в виде ряда, однако собственными функциями такого решения будут другие. Они определяются видом соответствующих уравнений.

Решение $U(x, y)$ имеет вид бесконечного ряда, и при расчете потенциала, напряженности поля либо интегральных параметров, таких как емкость, сила, приходится ограничить количество учитываемых в нем членов. Метод находит применение для расчета поля в однородной среде в областях с простой формой границ, так как при других условиях он становится весьма трудоемким.

Очевидным недостатком метода разделения переменных, кроме трудоемкости определения собственных функций и собственных значений, является существенная зависимость точности решения от количества удерживаемых членов ряда. Практика показывает, что для получения решения с удовлетворительной точностью приходится учитывать многие десятки членов ряда. Кроме того, метод разделения переменных ограничен в области своего применения в связи с необходимостью наличия простых граничных конфигураций.

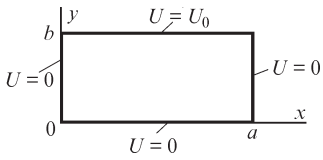

Рис. 24.35

Используя полученное решение, найдем потенциал в прямоугольной области (рис. 24.35) при условиях $U = 0$ при $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ и $U = U_0$ при $y = b$.

Из условия $U_1(x) = 0$ при $y = 0$ получаем $D_{2n} = 0$ (см. (*)), и из условия

$$U_2(x)=U_0=\sum_{n=0}^{\infty}D_{1n}\mathrm{sh}\,\lambda_n b\sin\lambda_n x \quad \text{при } y=b$$

$$D_{1n}\,\mathrm{sh}\,\lambda_n b=\frac{2}{a}\int_0^a U_0\sin\lambda_n x\,dx=\frac{4U_0}{\pi n},\quad n=1,3,5,\ldots$$

Таким образом, искомое решение принимает вид

$$U(x,y)=\frac{4U_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{\pi n x}{a}\ \mathrm{sh}\dfrac{\pi n y}{a}}{n\,\mathrm{sh}\dfrac{\pi n b}{a}},\quad n=1,3,5,\ldots$$

Найденный потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа и заданным граничным условиям. Действительно, при $y = b$, $x \neq 0$ он равен

$$U(x,b)=\frac{4U_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi n x}{a}=U_0,\quad n=1,3,5,\ldots$$

и обращается в нуль на других границах области.

24.25. Численный расчет электростатического поля методом сеток

В качестве иллюстрации численного метода расчета электромагнитного поля при помощи конечно-разностных уравнений и способа их получения рассмотрим случай расчета плоскопараллельного электростатического поля в неоднородной среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$.

Разностные уравнения могут быть записаны для системы узлов, произвольно размещенных в данной области. Однако при этом возникают большие трудности формирования системы разностных уравнений и их решения. В связи с этим наибольшее распространение получили методы, при которых узлы 1, 2, 3,... (рис. 24.36) располагаются в вершинах сетки прямоугольников, которые образуются при пересечении вертикальных и горизонтальных линий.

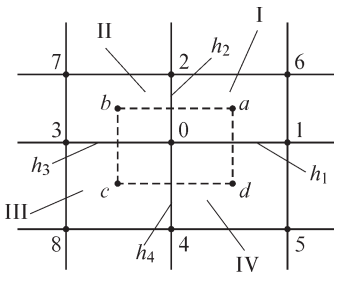

Рис. 24.36

Если электрический заряд распределен в пространстве с объемной плотностью $\rho(x, y)$, то уравнение для узла 0 сетки $\oint_s \boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{s} = \int_V \rho\, dV$ можно записать в виде

$$\int_{abcda} \varepsilon(x, y)\, E_n(x, y)\, dl = \int_S \rho(x, y)\, ds,$$

где $E_n = -\dfrac{\partial U}{\partial n}$ — нормальная к контуру составляющая напряженности электрического поля.

Интеграл в левой части этого выражения можем представить в виде суммы четырех интегралов вдоль путей *ab*, *bc*, *cd*, *da* и вычислить их приближенно, используя известные методы приближенного вычисления интегралов. Применение метода прямоугольников приводит к выражениям

$$\int_{ab} \varepsilon(x, y) E_y\, dx \cong \left(\varepsilon_{\text{Icp}} \frac{h_1}{2} + \varepsilon_{\text{IIcp}} \frac{h_3}{2}\right) \frac{U_0 - U_2}{h_2} = k_2 (U_0 - U_2),$$

$$\int_{bc} \varepsilon(x, y) E_x\, dy \cong \left(\varepsilon_{\text{IIcp}} \frac{h_2}{2} + \varepsilon_{\text{IIIcp}} \frac{h_2}{2}\right) \frac{U_0 - U_3}{h_3} = k_3 (U_0 - U_3),$$

$$\int_{cd} \varepsilon(x, y) E_y\, dx \cong \left(\varepsilon_{\text{IIIcp}} \frac{h_3}{2} + \varepsilon_{\text{IVcp}} \frac{h_1}{2}\right) \frac{U_0 - U_4}{h_4} = k_4 (U_0 - U_4),$$

$$\int_{da} \varepsilon(x, y) E_x\, dy \cong \left(\varepsilon_{\text{IVcp}} \frac{h_4}{2} + \varepsilon_{\text{Icp}} \frac{h_2}{2}\right) \frac{U_0 - U_1}{h_4} = k_1 (U_0 - U_1),$$

$$\int_s \rho(x, y)\, ds = \rho_{\text{Icp}} \frac{h_1 h_2}{4} + \rho_{\text{IIcp}} \frac{h_2 h_3}{4} + \rho_{\text{IIIcp}} \frac{h_3 h_4}{2} + \rho_{\text{IVcp}} \frac{h_1 h_4}{4} = -f_0,$$

в которых величины ε_{Icp}, $\varepsilon_{\text{IIcp}}$, ..., ρ_{Icp}, ..., ρ_{IVcp} являются средними функций $\varepsilon(x, y)$, $\rho(x, y)$ в соответствующих ячейках.

Полученное уравнение

$$k_1U_1 + k_2U_2 + k_3U_3 + k_4U_4 - U_0\sum_{i=1}^{i=4} k_i = f_0 \qquad (*)$$

выражает искомый потенциал U_0 через потенциалы четырех соседних узлов. Число входящих в уравнение потенциалов будет большим, если применить более точные соотношения для вычисления интегралов, выражая их не только через потенциалы узлов 1, 2, 3, 4, 0, но также, например, через потенциалы узлов 5, 6, 7, 8.

Уравнения вида (*) образуют систему разностных уравнений, которая может быть разрешена относительно искомых потенциалов узлов известными методами решения систем алгебраических уравнений.

Записывая систему алгебраических уравнений в матричной форме $\mathbf{k}\,\mathbf{U} = \mathbf{F}$, отметим, что характерной особенностью системы разностных уравнений является редкая заполненность матрицы коэффициентов ненулевыми элементами. При использовании уравнений вида (*) строки матрицы содержат 5 отличных от нуля элементов, так что при полном числе элементов n^2 количество ненулевых элементов не превышает $5n$. Эта особенность разностных уравнений позволяет применить эффективные методы решения, учитывающие редкую заполненность их матриц коэффициентов.

Изложенный выше подход применим для расчета плоскомеридианных и трехмерных полей. В этих случаях элементы матрицы коэффициентов $\mathbf{k}$ выражаются с помощью других соотношений.

24.26. Вариационный подход к расчету электрического поля в неоднородной среде. Метод конечных элементов

Ранее было отмечено (см. § 2.1, т. 1), что затрачиваемая внешними источниками энергия при создании электромагнитных полей минимальна, если процесс создания этих полей происходит без потерь энергии. Таким образом, и распределение энергии в электромагнитных полях происходит так, чтобы потребляемая от источника энергия была минимальной.

Если при решении задач расчета электромагнитных полей приходится оперировать такими понятиями, как потенциал и определяемые им производные величины, то можно утверждать, что эти функции должны быть такими, чтобы определяемая ими энергия поля была минимальной.

Исходя из этого принципа, конечно-разностные уравнения электромагнитного поля могут быть определены через таким образом подобранные функции, которые обеспечивают принцип минимума энергии, определяемой некоторым функционалом J.

Постановка задачи расчета потенциала, связанная с минимизацией функционала J, носит название вариационной, так как потенциал разыскивают путем вариации функционала и нахождения таких его значений, которые обеспечивают минимум функционала.

Один из путей отыскания потенциала вариационным методом связан с представлением его в виде интерполяционного полинома

$$U(x, y, z) = \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n(x, y, z),$$

где a_n — подлежащие определению коэффициенты, φ_n — так называемые базисные функции заданного вида.

Учитывая, что энергию электрического поля зарядов объемной плотностью ρ можно записать в форме $W_э = 0{,}5\int_V \varepsilon (\operatorname{grad} U)^2 \, dV$ либо в форме $W_э = 0{,}5\int_V \rho U \, dV$, энергетический функционал можно представить как

$$J(U) = \int_V \varepsilon (\operatorname{grad} U)^2 \, dV - 2\int_V \rho U \, dV. \qquad (*)$$

Здесь первый интеграл выражает удвоенную, а второй — учетверенную энергию поля.

В некоторых задачах объем V ограничен поверхностью s, на которой задан потенциал либо его производная $\dfrac{\partial U}{\partial n}$ по нормали к поверхности. При заданном на поверхности s потенциале минимизируемый энергетический функционал имеет вид (*), тогда как при заданной на ней функции $\dfrac{\partial U}{\partial n}$

$$J(U) = \int_V \varepsilon [\operatorname{grad} U(x, y, z)]^2 \, dV - 2\int_V \rho U(x, y, z) \, dV - \oint_s U(x, y, z) \frac{\partial U}{\partial n} \, ds.$$

Коэффициенты a_n, входящие в выражение для потенциала $U(x, y, z)$, можем найти из условия $\dfrac{\partial J}{\partial a_n} = 0$ ($n = 1, 2, ..., N$), порождающего систему алгебраических уравнений.

Энергию магнитного поля в объеме V можно представить как сумму энергий, заключенных в ее отдельных конечных элементах. Это позволяет в пределах элементов записать более простые выражения для потенциалов.

Вид и свойства вариационного метода определяются базисными функциями φ. Распространение получили базисные функции, каждая из которых отличается от нуля только в пределах своей подобласти, называемой конечным элементом.

Простейшими геометрическими элементами на плоскости могут быть заполняющие ее треугольники, а в пространстве – тетраэдры. Возможно использование и других плоских и объемных элементов.

Характер интерполяционного полинома определяет особенности распределения потенциала внутри элемента, однако количество узлов элемента (геометрическая форма элемента) задает количество членов этого полинома независимо от его степени. Другими словами, количество искомых коэффициентов интерполяционного полинома должно быть равным числу принадлежащих элементу узлов.

Число узлов треугольного элемента при линейной интерполяции потенциала $U(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y$ должно быть равным трем, так как полином содержит

три коэффициента. Коэффициенты α_0, α_1, α_2 следует выразить через потенциалы узлов (в данном случае вершин) элемента, связав тем самым величины a_1, a_2, a_3 выражения $U(x, y) = \sum_n a_n \varphi_n$ с коэффициентами α_0, α_1, α_2.

Решая систему уравнений

$$U_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_i + \alpha_2 y_i$$
$$U_j = \alpha_0 + \alpha_1 x_j + \alpha_2 y_j$$
$$U_k = \alpha_0 + \alpha_1 x_k + \alpha_2 y_k$$

(здесь x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k – координаты вершин i, j, k элемента) относительно величин α_0, α_1, α_2, получаем:

$$\alpha_0 = U_i b_i + U_j b_j + U_k b_k$$
$$\alpha_1 = U_i c_i + U_j c_j + U_k c_k$$
$$\alpha_2 = U_i d_i + U_j d_j + U_k d_k,$$

где коэффициенты b, c, d определяются через координаты вершин треугольника.

Сопоставление выражений $U(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y = U_i b_i + U_j b_j + U_k b_k + (U_i c_i + U_j c_j + U_k c_k) x + (U_i d_i + U_j d_j + U_k d_k) y$ и $U(x, y) = a_i \varphi_i(x, y) + a_j \varphi_j(x, y) + a_k \varphi_k(x, y)$ показывает, что $a_i = U_i$, $a_j = U_j$, $a_k = U_k$ и $\varphi_i(x, y) = b_i + c_i x + d_i y$, $\varphi_j(x, y) = b_j + c_j x + d_j y$, $\varphi_k(x, y) = b_k + c_k x + d_k y$.

Как видно, базисная функция $\varphi_i(x, y)$ равна 1 в вершине i элемента и, являясь линейной функцией координат x, y, обращается в нуль в вершинах j, k. Аналогичным свойством характеризуются и базисные функции $\varphi_j(x, y)$, $\varphi_k(x, y)$.

В общем случае, когда элемент имеет p узлов, введение матриц

$\| \boldsymbol{\alpha} \|^{\mathrm{T}} = \| \alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_p \|$,
$\| \mathbf{U} \|^{\mathrm{T}} = \| U_1, U_2, \ldots U_p \|$,
$\| \mathbf{x} \| = \| 1, x, y, z, x^2, y^2, \ldots \|$,
$\| \boldsymbol{\varphi} \| = \| \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_p \|$

позволяет записать выражение $U(x, y) = \mathbf{x}\,\boldsymbol{\alpha}$ и после решения уравнения $\mathbf{U} = \mathbf{X}\,\boldsymbol{\alpha}$, где

$$\mathbf{X} = \begin{Vmatrix} 1, x_1, y_1, z_1, x_1^2, \ldots \\ 1, x_2, y_2, z_2, x_2^2, \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ 1, x_p, y_p, z_p, x_p^2, \ldots \end{Vmatrix}$$

матрица размерностью $p \times p$, найти величину $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{X}^{-1}\,\mathbf{U}$ и выразить потенциал $U(x, y)$ через базисные функции:

$$U(x, y) = \mathbf{x}\,\mathbf{X}^{-1}\,\mathbf{U} = \boldsymbol{\varphi}\,\mathbf{U}.$$

Рассмотрим формирование системы уравнений метода конечных элементов при расчете плоскопараллельного электростатического поля.

Для получения алгебраических уравнений функционал $J(U)=\int_s \varepsilon(\operatorname{grad} U)^2\,ds -$ $-2\int_s \rho U ds$ следует представить через суммы функционалов J_e элементов. Определим вид матрицы системы уравнений $\sum_{e=1}^{M}\frac{\partial J_e}{\partial U_n}=0$, $n = 1, 2, ..., N$, где M — число элементов области, N — число узлов внутри области s.

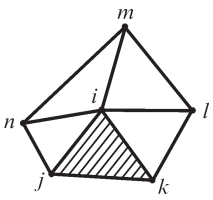

Рис. 24.37

Пусть узел с номером i является общим для нескольких треугольных элементов (рис. 24.37).

Производная $\frac{\partial J_e}{\partial U_i}$ функционала элемента с узлами i, j, k

$$\frac{\partial J_e}{\partial U_i}=2\int_{s_e}\varepsilon(\operatorname{grad}U)\frac{\partial}{\partial U_i}(\operatorname{grad}U)\,ds_e-2\int_{s_e}\rho\frac{\partial U}{\partial U_i}ds_e.$$

Учитывая, что

$$\operatorname{grad}U=\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}U_i+\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}U_j+\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}U_k\right)+\boldsymbol{j}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}U_i+\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}U_j+\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}U_k\right),$$

$$\frac{\partial U}{\partial U_i}=\varphi_i,\qquad \frac{\partial(\operatorname{grad}U)}{\partial U_i}=\boldsymbol{i}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}$$

и вводя обозначения

$$a_{ii}^e=2\int_{s_e}\varepsilon\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\right)ds_e,$$

$$a_{ij}^e=2\int_{s_e}\varepsilon\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}\right)ds_e,$$

$$a_{ik}^e=2\int_{s_e}\varepsilon\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}\right)ds_e,$$

$$f_i^e=-2\int_{s_e}\rho\varphi_i\,ds_e,$$

получаем

$$\frac{\partial J_e}{\partial U_i}=a_{ii}^eU_i+a_{ij}^eU_j+a_{ik}^eU_k+f_i^e.$$

Входящие в это соотношение коэффициенты при потенциалах вершин элементов, как и величину f_i^e, обычно рассчитывают аналитически. Для рассматриваемого случая, когда элемент содержит только три узла, производные вида $\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}$ принимают постоянные значения, и соответствующие интегралы вычисляются особенно просто.

Рассчитывая производные функционалов всех элементов области по потенциалу узла i и суммируя соответствующие коэффициенты, находим (см. рис. 24.37)

$$k_{ii} = \sum_e a_{ii}^e,\ k_{ij} = \sum_e a_{ij}^e,\ k_{ik} = \sum_e a_{ik}^e,\ k_{il} = \sum_e a_{il}^e,\ k_{im} = \sum_e a_{im}^e,\ F_i = \sum_e f_i^e.$$

Таким образом, i-я строка матрицы **K** системы алгебраических уравнений **K U** = **F**, получаемая при вычислении производной функционала по потенциалу U_i узла i, в данном примере, когда узел i является общим лишь для 5 элементов, суть 0, 0, ...0, k_{ii}, k_{ij}, k_{ik}, k_{il}, k_{im}, k_{in}, 0, ..., 0, 0, если узлы i, j, k, l, m, n нумерованы один за другим.

Подобно рассмотренному можем рассчитать коэффициенты других строк матрицы **K**. Она имеет, как правило, не более 10 % ненулевых коэффициентов, так как производные $\frac{\partial J_e}{\partial U_i}$ функционалов элементов, которые не включают в себя узел i, обращаются в нуль. В связи с тем, что матрица **K** является редкозаполненной, для решения уравнений метода конечных элементов применяют специальные экономичные методы, учитывающие это свойство системы уравнений.

Решив уравнение **KU** = **F**, можем рассчитать напряженность поля внутри элементов, а также другие дифференциальные и интегральные характеристики.

Метод конечных элементов применяют при численных расчетах полей в неоднородных, анизотропных и нелинейных средах, когда получение аналитических решений затруднительно.

Глава двадцать пятая

Расчет электрической емкости

25.1. Емкость между круглыми цилиндрами. Емкость двухпроводной линии передачи

Емкость между двумя уединенными проводящими телами равна отношению заряда $q_1 = q$ одного из тел к разности их потенциалов $U_1 - U_2$; причем предполагается, что заряды тел равны по абсолютному значению и противоположны по знаку, т. е. $q_2 = -q_1 = -q$. Вычисление емкости между двумя телами сводится к вычислению разности их потенциалов в этих условиях. В качестве важного примера найдем выражение для емкости между двумя параллельными круглыми проводящими цилиндрами. Цилиндры будем предполагать бесконечно длинными, емкость будем определять между их отрезками длиной l. В §§ 24.12 и 24.13 было исследовано поле таких цилиндров.

Потенциал в некоторой точке, удаленной на расстояния r_1 и r_2 от электрических осей цилиндров (см. рис. 24.12 и 24.15), определяется формулой

$$U = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1} + C_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln k + C_2.$$

Нас интересует разность потенциалов самих цилиндров. Для определения потенциалов цилиндров выберем на их поверхностях точки, например наиболее близкие друг к другу точки A_1 и A_2 (см. рис. 24.14 и 24.15). Пусть k_1 — значение отношения r_2/r_1 для точки A_1 и соответственно k_2 — значение этого отношения для точки A_2. Имеем

$$U_1 - U_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{k_1}{k_2}.$$

Так как $q = \tau l$, то

$$C = \frac{q}{U_1 - U_2} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\dfrac{k_1}{k_2}}.$$

Отношение r_2/r_1 для любой точки поля может быть выражено через радиус R окружности равного потенциала, проходящей через эту точку (см. рис. 24.12), и через расстояние $h = |x_0|$ от центра этой окружности до плоскости постоянного потенциала (на рис. 24.12 — до плоскости нулевого потенциала). Воспользовавшись формулами $h = \dfrac{1+k^2}{|1-k^2|}\,b$ и $R = \dfrac{2k}{|1-k^2|}b$, приведенными в § 24.12, получаем $\dfrac{h}{R} = \dfrac{1-k^2}{2k}$, откуда $k^2 - 2\dfrac{h}{R}k + 1 = 0$ и

$$k = \frac{h}{R} \pm \sqrt{\frac{h^2}{R^2} - 1}.$$

Знак плюс следует брать при $k > 1$, что соответствует случаю $r_2 > r_1$, т. е. расположению окружности равного потенциала слева от плоскости $U = \text{const}$ (см. рис. 24.15). Знак минус следует брать при $k < 1$, что соответствует расположению окружности равного потенциала справа от плоскости $U = \text{const}$.

Рассмотрим частные случаи.

1. Емкость круглого цилиндра относительно плоскости (рис. 25.1).

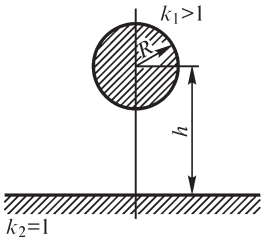

Рис. 25.1

Для плоскости постоянного потенциала $k_2 = r_2/r_1 = 1$, так как эта плоскость расположена посередине между электрическими осями (см. рис. 24.12). Следовательно,

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\left[\frac{h}{R} + \sqrt{\left(\frac{h}{R}\right)^2 - 1}\right]}.$$

Здесь h — расстояние от оси цилиндра до плоскости и R — радиус цилиндра. Полученной формулой можно пользоваться для вычисления емкости относительно земли провода, подвешенного на высоте h параллельно поверхности земли. Так как обычно $h \gg R$, то приближенно

$$C \approx \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{2h}{R}}.$$

2. Емкость между несоосными, не охватывающими друг друга круглыми цилиндрами (рис. 25.2).

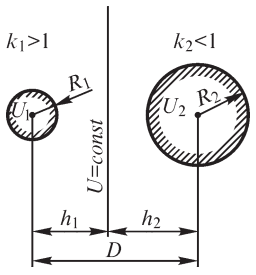

Рис. 25.2

Имеем $k_1 > 1$ и $k_2 < 1$, и, следовательно, перед знаком квадратного корня в формуле для k_1 надо взять знак плюс, а для k_2 — знак минус. Таким образом,

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\left[\left(\frac{h_1}{R_1} + \sqrt{\left(\frac{h_1}{R_1}\right)^2 - 1}\right) \Big/ \left(\frac{h_2}{R_2} - \sqrt{\left(\frac{h_2}{R_2}\right)^2 - 1}\right)\right]}.$$

Учитывая, что для любого числа x существует тождество

$$\frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = x + \sqrt{x^2 - 1},$$

можем переписать формулу для емкости между цилиндрами в виде

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\left[\left(\frac{h_1}{R_1} + \sqrt{\left(\frac{h_1}{R_1}\right)^2 - 1}\right)\left(\frac{h_2}{R_2} + \sqrt{\left(\frac{h_2}{R_2}\right)^2 - 1}\right)\right]}.$$

Величины h_1 и h_2 определяются через расстояние между геометрическими осями цилиндров и через их радиусы R_1 и R_2 по формулам:

$$h_1 = \left|\frac{D^2 + R_1^2 - R_2^2}{2D}\right|;\quad h_2 = \left|\frac{D^2 + R_2^2 - R_1^2}{2D}\right|,$$

выведенным в § 24.13.

Для двух цилиндров одинаковых радиусов имеем $R_1 = R_2 = R$ и $h_1 = h_2 = D/2$. Формула для емкости при этом принимает вид

$$C = \frac{\pi\varepsilon l}{\ln\left(\frac{D}{2R} + \sqrt{\frac{D^2}{4R^2} - 1}\right)}.$$

3. Емкость между тонкими проводами. Емкость двухпроводной линии передачи.

Если $R_1 \ll D$ и $R_2 \ll D$, то, согласно формулам для h_1 и h_2, имеем

$$h_1 \approx \frac{D}{2};\quad h_2 \approx \frac{D}{2};\quad \frac{h_1}{R_1} \approx \frac{D}{2R_1} >> 1 \quad \text{и} \quad \frac{h_2}{R_2} \approx \frac{D}{2R_2} >> 1.$$

Поэтому формула для емкости может быть представлена в приближенной форме:

$$C \approx \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\left(\frac{D}{R_1}\frac{D}{R_2}\right)} = \frac{\pi\varepsilon l}{\ln\frac{D}{\sqrt{R_1 R_2}}}.$$

Если радиусы проводов одинаковы: $R_1 = R_2 = R$, как это обычно имеет место для двухпроводной линии передачи, то получаем

$$C \approx \frac{\pi\varepsilon l}{\ln\frac{D}{R}}.$$

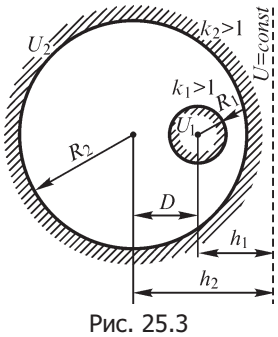

Рис. 25.3

4. Емкость между несоосными, охватывающими друг друга круглыми цилиндрами (рис. 25.3).

В этом случае имеем $k_1 > 1$ и $k_2 > 1$ и, следовательно,

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\left[\left(\frac{h_1}{R_1} + \sqrt{\left(\frac{h_1}{R_1}\right)^2 - 1}\right):\left(\frac{h_2}{R_2} + \sqrt{\left(\frac{h_2}{R_2}\right)^2 - 1}\right)\right]}.$$

При этом h_1 и h_2 определяются теми же формулами, что и в п. 2.

5. Емкость между соосными круглыми цилиндрами. Последняя формула переходит в формулу для емкости между соосными цилиндрами в пределе при $h_1/R_1 \to \infty$ и $h_2/R_2 \to \infty$.

Действительно, для соосных цилиндров $D = 0$ и, согласно выражениям для h_1 и h_2, имеем $h_1 = \infty$ и $h_2 = \infty$; причем $h_1/h_2 = 1$. Учитывая это, из последней формулы получаем

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}}.$$

25.2. Потенциальные коэффициенты, коэффициенты электростатической индукции и частичные емкости в системе тел

В системе нескольких заряженных тел потенциал каждого тела определяется не только зарядом данного тела, но также и зарядами всех остальных тел. При этом, если ε не зависит от напряженности поля, то потенциал является линейной функцией зарядов. Это положение было использовано (см. ч. I) при выводе выражения для энергии заряженных тел. Рассмотрим это положение и вытекающие из него соотношения более подробно.

Если внести незаряженное проводящее тело A_2 в поле другого тела A_1, имеющего заряд q_1, то тело A_2 приобретает некоторый потенциал U_2', отличный от нуля. Если вносимое тело A_2 имеет ничтожно малые размеры (рис. 25.4), то можно пренебречь искажением поля, возникающим от появления на вносимом теле индуцированных зарядов. При этом тело A_2 приобретает потенциал, который был в точке его расположения до его внесения. При значительных размерах вносимого тела (рис. 25.5) поле искажается, и потенциал U_2' будет определяться как зарядом q_1 тела A_1, так и зарядами, индуцированными на теле A_2. Следовательно, U_2' зависит от формы поверхностей обоих тел и от взаимного их расположения. Если диэлектрическая проницаемость среды не зависит от напряженности поля, то потенциал U_2' изменяется пропорционально заряду q_1, так как в этом случае при изменении заряда q_1 распределение зарядов на поверхности тел и соответственно картина поля не изменяются. Итак, можно написать:

$$U_2' = \alpha_{21} q_1.$$

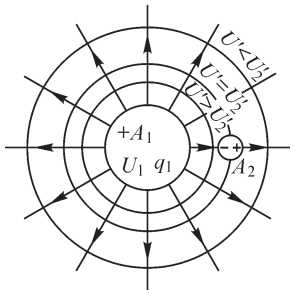

Рис. 25.4

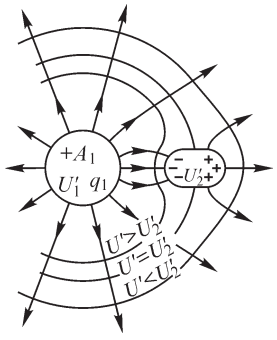

Рис. 25.5

Связь между потенциалом U_1' тела A_1 и его зарядом можно выразить в аналогичной форме:

$$U_1' = \alpha_{11} q_1.$$

Следует подчеркнуть, что коэффициент α_{11} не равен величине $1/C_1$, где C_1 — емкость тела A_1, определяемая в предположении, что все другие тела от него бесконечно удалены. Такое равенство приближенно имеет место только в том случае, когда вносимое тело A_2 весьма мало (см. рис. 25.4). В общем случае (см. рис. 25.5) потенциал U_1 определяется как зарядом q_1, распределенным на поверхности тела A_1, так и зарядами, индуцированными на теле A_2. Таким образом, коэффициент α_{11}, так же как и коэффициент α_{21}, зависит от формы обоих тел и от их взаимного расположения.

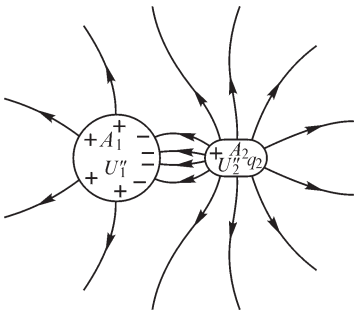

Рис. 25.6

Предположим теперь, что тело A_1 имеет суммарный заряд, равный нулю, в то время как заряд q_2 тела A_2 отличен от нуля (рис. 25.6). При этом тела приобретают потенциалы, значения которых пропорциональны заряду q_2:

$$U_1'' = \alpha_{12} q_2 \quad \text{и} \quad U_2'' = \alpha_{22} q_2.$$

Если заряды обоих тел отличны от нуля, то потенциалы тел могут быть найдены на основе принципа наложения. Имеем

$$U_1 = U_1' + U_1'' = \alpha_{11} q_1 + \alpha_{12} q_2;$$
$$U_2 = U_1' + U_2'' = \alpha_{21} q_1 + \alpha_{22} q_2.$$

В общем случае, когда имеется n заряженных тел: A_1, A_2, ..., A_n, получаем систему уравнений:

$$U_1 = \alpha_{11} q_1 + \alpha_{12} q_2 + \ldots + \alpha_{1k} q_k + \ldots + \alpha_{1n} q_n;$$
$$U_2 = \alpha_{21} q_1 + \alpha_{22} q_2 + \ldots + \alpha_{2k} q_k + \ldots + \alpha_{2n} q_n;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$U_k = \alpha_{k1} q_1 + \alpha_{k2} q_2 + \ldots + \alpha_{kk} q_k + \ldots + \alpha_{kn} q_n;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$U_n = \alpha_{n1} q_1 + \alpha_{n2} q_2 + \ldots + \alpha_{nk} q_k + \ldots + \alpha_{mn} q_n.$$

Коэффициенты α носят название потенциальных коэффициентов. Они зависят от формы и размеров поверхностей тел, от взаимного расположения тел и от диэлектрической проницаемости среды. Коэффициенты α_{kk} с одинаковыми индексами называются собственными потенциальными коэффициентами, а коэффициенты α_{nk} с различными индексами — взаимными потенциальными коэффициентами. Эти уравнения служат для вычисления потенциалов тел по заданным их зарядам.

Нередко возникает обратная задача: известны потенциалы тел, требуется найти их заряды. Решая приведенные выше уравнения относительно зарядов, получим

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \beta_{11}U_1 + \beta_{12}U_2 + \ldots + \beta_{1k}U_k + \ldots + \beta_{1n}U_n;\\
q_2 &= \beta_{21}U_1 + \beta_{22}U_2 + \ldots + \beta_{2k}U_k + \ldots + \beta_{2n}U_n;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
q_k &= \beta_{k1}U_1 + \beta_{k2}U_2 + \ldots + \beta_{kk}U_k + \ldots + \beta_{kn}U_n;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
q_n &= \beta_{n1}U_1 + \beta_{n2}U_2 + \ldots + \beta_{nk}U_k + \ldots + \beta_{nn}U_n.
\end{aligned}
$$

Коэффициенты β называются *коэффициентами электростатической индукции* — *собственными* при одинаковых индексах и *взаимными* при разных индексах. Они имеют размерность емкости.

Собственный коэффициент электростатической индукции β_{kk} может быть найден, если принять, что потенциалы всех тел, кроме тела A_k, равны нулю. При этом получим $q_k = \beta_{kk}U_k$.

На практике равным нулю принимают потенциал поверхности земли. Следовательно, для того чтобы тело приняло потенциал, равный нулю, его, как принято выражаться, необходимо «заземлить», т. е. соединить проводником с землей. Для определения опытным путем коэффициента β_{kk} следует, заземлив все тела, кроме тела A_k (рис. 25.7), сообщить последнему потенциал U_k, хотя бы присоединив это тело к полюсу электрической батареи, другой полюс которой заземлен. Измерив вольтметром напряжение U_k между телом и землей, отключим вольтметр и батарею и разрядим тело A_k на землю через баллистический гальванометр G_k. По отбросу гальванометра определим заряд q_k тела, а следовательно, сможем вычислить и искомый коэффициент β_{kk}. Все соединительные и заземляющие проводники в этом опыте должны быть весьма тонкими, чтобы присутствие их по возможности мало искажало поле. Коэффициенты с одинаковыми индексами все положительны: $\beta_{kk} > 0$, так как в описанном опыте потенциал и заряд тела A_k имеют одинаковые знаки.

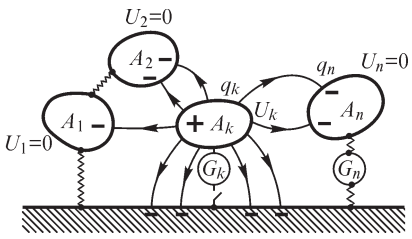

Рис. 25.7

Если в том же опыте измерить при помощи другого гальванометра G_n заряд q_n, который был связан на поверхности тела A_n и освободился при разряде тела A_k, то получим возможность определить и взаимный коэффициент электростатической индукции β_{nk} из соотношения $q_n = \beta_{nk}U_k$.

Очевидно, коэффициент β_{nk}, так же как и все взаимные коэффициенты электростатической индукции, отрицателен. Это непосредственно явствует из рис. 25.7: при $U_k > 0$ линии поля начинаются на теле A_k и заканчиваются на теле A_n и, следовательно, $q_n < 0$. Таким образом, вообще $\beta_{kp} < 0$ при $k \neq p$.

Нередко пользуются уравнениями в несколько иной форме, а именно: выражают заряд каждого тела не через потенциалы тел, а через разности потенциалов данного тела и других тел, в том числе и земли. Имеем

$$q_1 = C_{11}(U_1 - 0) + C_{12}(U_1 - U_2) + \ldots + C_{1k}(U_1 - U_k) + \ldots + C_{1n}(U_1 - U_n);$$

. . . . . .

$$q_k = C_{k1}(U_k - U_1) + C_{k2}(U_k - U_2) + \ldots + C_{kk}(U_k - 0) + \ldots + C_{kn}(U_k - U_n);$$

. . . . . .

$$q_n = C_{n1}(U_n - U_1) + C_{n2}(U_n - U_2) + \ldots + C_{nk}(U_n - U_k) + \ldots + C_{nn}(U_n - 0).$$

Коэффициенты C в этих уравнениях называются частичными емкостями — собственными при одинаковых индексах и взаимными при различных индексах. Для определения собственной частичной емкости C_{kk} следует принять потенциалы всех тел равными U_k. Тогда $q_k = C_{kk}U_k$.

Для измерения емкости C_{kk} необходимо соединить между собой все тела, зарядить всю эту систему до потенциала U_k относительно земли и затем, отключив источник ЭДС, разрядить систему на землю (рис. 25.8). При этом гальванометр должен быть включен так, чтобы был измерен только заряд q_k тела A_k.

Рис. 25.8

Ясно, что $C_{kk} > 0$, так как при положительном потенциале системы и заряд на ней будет положителен. При этом же условии $U_1 = U_2 = \ldots = U_k = \ldots = U_n$ из уравнений, содержащих коэффициенты электростатической индукции, имеем

$$q_k = (\beta_{k1} + \beta_{k2} + \ldots + \beta_{kk} + \ldots + \beta_{kn})U_k.$$

Следовательно,

$$C_{kk} = \beta_{k1} + \beta_{k2} + \ldots + \beta_{kk} + \ldots + \beta_{kn}.$$

Взаимная частичная емкость C_{nk} определяется из того же опыта, что и коэффициент β_{nk}. Действительно, при $U_1 = U_2 = \ldots = U_{k-1} = U_{k+1} = \ldots = U_n = 0$ и $U_k \neq 0$ из уравнений, содержащих частичные емкости, имеем $q_n = -C_{nk}U_k$. Следовательно, $C_{nk} = -\beta_{nk}$. Таким образом, вообще при $k \neq p$

$$C_{kp} = -\beta_{kp} \text{ и } C_{kp} > 0.$$

Преимущество уравнений, содержащих частичные емкости, по сравнению с уравнениями, содержащими коэффициенты электростатической индукции, состоит в том, что в них все коэффициенты положительны.

Отметим, что имеет место равенство $\alpha_{kp} = \alpha_{pk}$, справедливость которого легко доказать из условия независимости энергии системы заряженных тел от последовательности, в которой устанавливаются заряды системы, аналогично тому, как было доказано равенство $M_{kp} = M_{pk}$ (см. ч. I). Пользуясь определителями, легко показать также, что $\beta_{kp} = \beta_{pk}$. И из условия $C_{kp} = -\beta_{kp}$ следует, что $C_{kp} = C_{pk}$. Это соотношение выражает принцип взаимности для системы заряженных тел.

25.3. Потенциальные коэффициенты в системе параллельных весьма длинных проводов

В виде примера, весьма важного для практики, рассмотрим систему проводов, протянутых параллельно друг другу над поверхностью земли (рис. 25.9). Длину проводов будем предполагать столь большой, что поле можно считать плоскопараллельным. Обычно диаметры проводов весьма малы по сравнению с расстоянием между их осями и с высотой их подвеса. В таком случае проще всего определяются потенциальные коэффициенты α. Для определения коэффициентов α_{11}, α_{21}, α_{31}, ..., α_{n1} достаточно принять $q_1 \neq 0$ и $q_2 = q_3 = ... = q_n = 0$. При этом ни один провод не должен быть заземлен. Уравнения приобретают вид

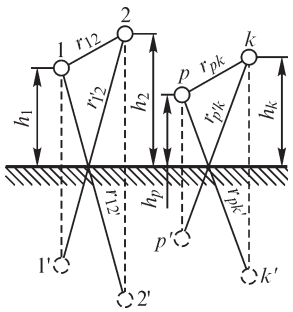

Рис. 25.9

$$U_1 = \alpha_{11} q_1;\ \ U_2 = \alpha_{21} q_1; \ldots;\ \ U_k = \alpha_{k1} q_1; \ldots$$

Поле заряженного первого провода будет таким же, как и при одном проводе, протянутом над поверхностью земли (см. рис. 24.27), так как искажением поля вследствие существования других проводов можно пренебречь ввиду малости их сечений. При таком условии коэффициент α_{11} является величиной, обратной емкости провода по отношению к земле, выражение для которой получено в § 25.1 в предположении отсутствия остальных проводов. Следовательно,

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\varepsilon l} \ln \frac{2h_1}{R_1}$$

и вообще

$$\alpha_{kk} = \frac{1}{2\pi\varepsilon l} \ln \frac{2h_k}{R_k}.$$

Коэффициент α_{21} нетрудно определить, если заметить, что незаряженные провода ввиду малости их сечений принимают в поле заряженного провода те потенциалы, которые получаются в местах их расположения и при отсутствии их. Найдем, пользуясь уравнением $U = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_2}{r_1} + C_2$, приведенным в § 24.12, потенциал на оси второго провода, определяемый зарядами первого провода и его зеркального изображения в поверхности земли. Постоянная C_2 в данном случае равна нулю, так как для точек на поверхности земли расстояния r_1 и r_2 до провода и его зеркального изображения равны между собой и, кроме того, для этих точек $U = 0$.

Замечая, что для точки, лежащей на оси второго провода, необходимо принять $r_1 = r_{12}$ и $r_2 = r_{1'2}$ (см. рис. 25.9), получаем

$$U_2 = \frac{q_1}{2\pi\varepsilon l} \ln \frac{r_{1'2}}{r_{12}}.$$

Следовательно,

$$\alpha_{21} = \frac{1}{2\pi\varepsilon l} \ln \frac{r_{1'2}}{r_{12}}.$$

Вообще будем иметь

$$\alpha_{kp} = \frac{1}{2\pi\varepsilon l} \ln \frac{r_{p'k}}{r_{pk}}.$$

Так как $r_{p'k} = r_{pk'}$ (см. рис. 25.9), то $\alpha_{kp} = \alpha_{pk}$, что было отмечено в предыдущем параграфе для общего случая.

Умение рассчитывать потенциальные коэффициенты, коэффициенты электростатической индукции и частичные емкости весьма важно во многих практических задачах, например при расчете параметров линии передачи со сложным расположением проводов, при выяснении вопроса о влиянии линии передачи высокого напряжения на расположенные рядом с ней линии связи и т. д.

25.4. Емкость двухпроводной линии с учетом влияния земли

Полученные в предыдущем параграфе выражения для потенциальных коэффициентов в системе параллельных проводов, протянутых над поверхностью земли, дают возможность найти выражение для емкости двухпроводной линии передачи с учетом влияния земли.

Для двух проводов имеем

$$U_1 = \alpha_{11} q_1 + \alpha_{12} q_2; \quad U_2 = \alpha_{21} q_1 + \alpha_{22} q_2.$$

Пусть заряды проводов равны по абсолютному значению и противоположны по знаку: $q_2 = -q_1$. Заменяя q_2 на $-q_1$, получаем

$$U_1 = (\alpha_{11} - \alpha_{12}) q_1; \quad U_2 = (\alpha_{21} - \alpha_{22}) q_1.$$

Следовательно, искомая емкость имеет выражение

$$C = \frac{q_1}{U_1 - U_2} = \frac{1}{\alpha_{11} + \alpha_{22} - 2\alpha_{12}}.$$

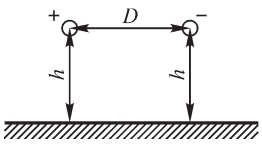

Рис. 25.10

Определим, пользуясь этой формулой, емкость двухпроводной линии, провода которой подвешены на одинаковой высоте h от земли и на расстоянии D друг от друга (рис. 25.10). Радиусы проводов одинаковы и равны R. Согласно формулам, полученным в предыдущем параграфе, имеем

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\varepsilon l} \ln \frac{2h}{R}; \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{1}{2\pi\varepsilon l} \ln \frac{\sqrt{(2h)^2 + D^2}}{D}.$$

Следовательно,

$$C = \frac{1}{2(\alpha_{11} - \alpha_{12})} = \frac{\pi\varepsilon l}{\ln\left(\dfrac{2h}{R} \dfrac{D}{\sqrt{4h^2 + D^2}}\right)}.$$

Если высота подвеса h много больше расстояния между проводами D, то $\sqrt{4h^2 + D^2} \approx 2h$ и

$$C \approx \frac{\pi\varepsilon l}{\ln\dfrac{D}{R}},$$

т. е. получаем формулу, выведенную ранее (см. § 25.1) без учета влияния земли.

25.5. Емкость трехфазной линии передачи

Все полученные выше соотношения, строго говоря, справедливы только для электростатического поля. Однако с большой степенью точности они могут быть использованы и при вычислении параметров линий передачи при промышленной частоте. Критерием допустимости приближенного рассмотрения переменного электрического поля около проводов линии в отдельные моменты времени как электростатического поля может служить соотношение между линейными размерами области, в которой рассматривается поле, и длиной электромагнитной волны. Вопрос о длине λ электромагнитной волны и о скорости v ее распространения будет рассмотрен в §§ 29.1 и 29.2. Имеет место соотношение $\lambda = v/f$, где f — частота колебаний. В воздухе $v = 3\cdot10^5$ км/с, и при частоте 50 Гц имеем $\lambda = 6000$ км. На длине волны фаза колебаний напряженности поля меняется на 2π. В пределах области, линейные размеры которой значительно меньше λ, можно считать фазу колебаний напряженности поля одинаковой во всех точках области и с большой степенью точности рассматривать поле в каждый момент времени как электростатическое.

В уравнениях, связывающих заряды и потенциалы, необходимо под q и U понимать в этом случае мгновенные заряды проводов и мгновенные напряжения между проводами и землей. При синусоидальном режиме эти уравнения могут быть написаны в символической форме для комплексных действующих зарядов $\dot{q}$ и напряжений $\dot{U}$. Для трехпроводной линии уравнения приобретают вид

$$\begin{aligned}
\dot{q}_1 &= \beta_{11}\dot{U}_1 + \beta_{12}\dot{U}_2 + \beta_{13}\dot{U}_3;\\
\dot{q}_2 &= \beta_{21}\dot{U}_1 + \beta_{22}\dot{U}_2 + \beta_{23}\dot{U}_3;\\
\dot{q}_3 &= \beta_{31}\dot{U}_1 + \beta_{32}\dot{U}_2 + \beta_{33}\dot{U}_3.
\end{aligned}$$

Предположим, что напряжения $\dot{U}_1, \dot{U}_2$ и $\dot{U}_3$ образуют симметричную систему, т. е. $\dot{U}_2 = a^2\dot{U}_1$ и $\dot{U}_3 = a\dot{U}_1$, где a — комплексный множитель (см. ч. II). Имеем

$$a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2};\quad a^2 = e^{j\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$a^3 = 1;\quad \frac{1}{a} = a^2;\quad \frac{1}{a^2} = a.$$

В этом случае уравнения могут быть записаны в форме

$$\dot{q}_1 = (\beta_{11} + a^2\beta_{12} + a\beta_{13})\dot{U}_1;$$
$$\dot{q}_2 = (\beta_{22} + a^2\beta_{23} + a\beta_{21})\dot{U}_2;$$
$$\dot{q}_3 = (\beta_{33} + a^2\beta_{31} + a\beta_{32})\dot{U}_3.$$

Величины, стоящие в скобках, вещественны при условии, что провода линии расположены симметрично относительно друг друга, т. е. если $\beta_{12} = \beta_{23} = \beta_{31}$, так как $(a + a^2) = -1$ есть вещественное число. При этом стоящие в скобках величины представляют собой емкости проводов относительно земли или, что то же, емкость линии на одну фазу при соединении звездой.

При отсутствии симметрии в расположении проводов, т. е. если $\beta_{12} \neq \beta_{23} \neq \beta_{31}$, стоящие в скобках величины оказываются комплексными. Их вещественные части являются емкостями проводов относительно земли, так как они определяют часть заряда, изменяющуюся в фазе с напряжением, и, следовательно, определяют реактивную составляющую тока, сдвинутую по фазе на угол $\pi/2$ относительно напряжения. Мнимые части величин, стоящих в скобках, определяют активные составляющие токов в проводах, находящиеся в фазе или в противофазе с напряжениями. Заметим, что сумма мнимых частей для всех трех фаз равна нулю, так как при суммировании получаем перед всеми коэффициентами β_{12}, β_{23} и β_{31} вещественные множители $(a + a^2) = -1$. Это значит, что если в одних фазах мнимые части определяют положительную активную мощность, то в других они определяют такую же по абсолютному значению, но отрицательную активную мощность. Физически это означает, что при несимметричном расположении проводов некоторое количество энергии передается за период путем электростатической индукции из одной фазы в другую. Это своеобразное явление обусловливает несимметрию токов при симметричных напряжениях. Естественно, что несимметрия токов определяется не только появлением разных по значению и по знаку активных составляющих, но также и различием реактивных составляющих вследствие того, что емкости проводов различны.

Полная симметрия в расположении проводов может быть достигнута только в кабеле, в котором заземленная оболочка охватывает симметрично все три провода (см. рис. 24.29, *б*). В воздушной линии даже при расположении проводов по вершинам равностороннего треугольника (рис. 25.11) наличие земли вносит несимметрию. Подавно несимметричной оказывается линия с расположением проводов согласно рис. 25.12.

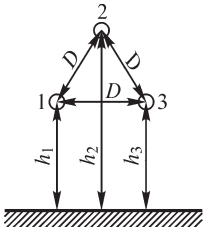

Рис. 25.11

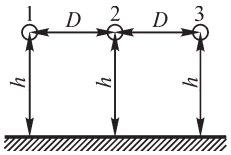

Рис. 25.12

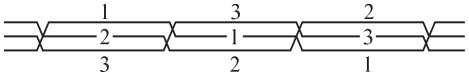

Рис. 25.13

Обычно через равные расстояния изменяют расположение проводов на опорах так, что постепенно осуществляется круговая перестановка (транспозиция) проводов (рис. 25.13). Основная цель круговой перестановки — уменьшить электростатическое и электромагнитное влияние проводов линии высокого напряжения и сильного тока на соседние линии связи. При наличии круговой перестановки средние значения параметров всей линии получаются одинаковыми для всех фаз, и всю линию можно рассматривать как симметричную. В среднем для всей линии не будет иметь места передача энергии за целый период из одной фазы в другую путем электростатической индукции.

С достаточной для практики точностью решение можно получить, вводя в систему уравнений

$$\dot{U}_1 = \alpha_{11}\dot{q}_1 + \alpha_{12}\dot{q}_2 + \alpha_{13}\dot{q}_3;$$
$$\dot{U}_2 = \alpha_{21}\dot{q}_1 + \alpha_{22}\dot{q}_2 + \alpha_{23}\dot{q}_3;$$
$$\dot{U}_3 = \alpha_{31}\dot{q}_1 + \alpha_{32}\dot{q}_2 + \alpha_{33}\dot{q}_3$$

средние для всей линии значения потенциальных коэффициентов α.

Обозначим

$$\alpha_m = \frac{\alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{13}}{3}; \quad \alpha_0 = \frac{\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}}{3},$$

где α_{12}, α_{23}, α_{31}, α_{11}, α_{22}, α_{33} — истинные значения коэффициентов для одного из участков, и будем считать в дальнейшем, что для всей линии все коэффициенты α с разными индексами равны α_m и все коэффициенты α с одинаковыми индексами равны α_0.

Естественно, что в симметричной линии при симметричной системе напряжений и заряды $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, $\dot{q}_3$ образуют также симметричную систему, т. е. $\dot{q}_2 = a^2\dot{q}_1$, $\dot{q}_3 = a\dot{q}_1$.

Уравнения в этом случае приобретают вид

$$\dot{U}_1 = \alpha_0\dot{q}_1 + \alpha_m\dot{q}_2 + \alpha_m\dot{q}_3 = [\alpha_0 + (a + a^2)\alpha_m]\dot{q}_1 = (\alpha_0 - \alpha_m)\dot{q}_1;$$
$$\dot{U}_2 = \alpha_m\dot{q}_1 + \alpha_0\dot{q}_2 + \alpha_m\dot{q}_3 = (\alpha_0 - \alpha_m)\dot{q}_2;$$
$$\dot{U}_3 = \alpha_m\dot{q}_1 + \alpha_m\dot{q}_2 + \alpha_0\dot{q}_3 = (\alpha_0 - \alpha_m)\dot{q}_3.$$

Следовательно, искомая емкость провода относительно земли равна

$$C = \frac{1}{\alpha_0 - \alpha_m}.$$

Согласно формулам, приведенным в § 25.3, имеем

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi\varepsilon l}\frac{1}{3}\left(\ln\frac{2h_1}{R_1} + \ln\frac{2h_2}{R_2} + \ln\frac{2h_3}{R_3}\right);$$
$$\alpha_m = \frac{1}{2\pi\varepsilon l}\frac{1}{3}\left(\ln\frac{r_{12'}}{r_{12}} + \ln\frac{r_{23'}}{r_{23}} + \ln\frac{r_{31'}}{r_{31}}\right).$$

Таким образом,

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\left(2\dfrac{\sqrt[3]{h_1 h_2 h_3}}{\sqrt[3]{R_1 R_2 R_3}}\dfrac{\sqrt[3]{r_{12} r_{23} r_{31}}}{\sqrt[3]{r_{12'} r_{23'} r_{31'}}}\right)}.$$

При расположении проводов согласно схеме рис. 25.12 имеем

$$r_{12} = r_{23} = D;\quad r_{31} = 2D;\quad h_1 = h_2 = h_3 = h;$$
$$r_{12'} = r_{23'} = \sqrt{4h^2 + D^2};\quad r_{31'} = \sqrt{4h^2 + 4D^2}.$$

Следовательно,

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\left(\dfrac{2hD}{R\sqrt[3]{(4h^2 + D^2)\sqrt{h^2 + D^2}}}\right)}.$$

Пренебрегая влиянием земли, т. е. принимая $D \ll h$, получим

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\dfrac{\sqrt[3]{2}\,D}{R}}.$$

25.6. Метод средних потенциалов для расчета потенциальных коэффициентов и емкостей в системе проводов

Для расчета емкости сложных систем, состоящих из нескольких проводов конечной длины, например емкости радиоантенн, широко используется приближенный метод, предложенный Хоу.

В электростатическом поле потенциал проводника одинаков во всех его точках, заряд же распределяется по поверхности проводника неравномерно. Хоу предложил для вычисления емкости исходить из обратного, по существу, не отвечающего действительности предположения. Именно: предполагается, что заряд распределяется равномерно по поверхности проводников и для линейных проводников — равномерно по их длине. Вычисляется распределение потенциала по поверхности или по длине проводников, и в формулу для емкости вводится среднее значение вычисленных таким образом потенциалов проводников. В соответствии с этим будем называть такой метод *методом средних потенциалов*. Этот метод, хотя и основан на предположении, не соответствующем реальным условиям, в ряде случаев, например при вычислении емкости системы, образованной параллельными проводами, дает достаточно точные результаты. Объясняется это тем, что неравномерность распределения заряда заметно сказывается лишь на концах таких проводов. Упрощение же расчета достигается весьма большое, так как при заданном распределении заряда потенциал вычисляется по формулам:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_s \frac{\sigma\, ds}{r} \quad \text{и} \quad U = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_l \frac{\tau\, dl}{r}.$$

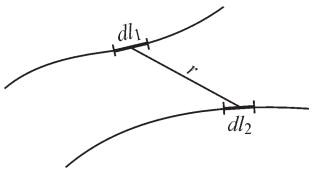

Рис. 25.14

Предположим, что имеются два отрезка проводов, длины которых l_1 и l_2 (рис. 25.14). Требуется вычислить потенциальный коэффициент α_{12}. Предположим, что $q_1 = 0$ и $q_2 \neq 0$. При этом имеем

$$U_1 = \alpha_{12} q_2.$$

Пользуясь приближенным методом, предполагаем, что заряд q_2 распределен равномерно вдоль второго провода с линейной плотностью $\tau_2 = q_2/l_2$. Потенциал в некоторой точке первого провода, определяемый зарядом q_2, будет равен

$$U_1' = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{l_2} \frac{\tau_2\, dl_2}{r} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon l_2}\int_{l_2} \frac{dl_2}{r},$$

причем интегрирование производится вдоль всего второго провода. Среднее значение потенциала первого провода получается в результате интегрирования вдоль первого провода:

$$U_1 = \frac{1}{l_1}\int_{l_1} U_1' dl_1 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon l_1 l_2}\int_{l_1}\int_{l_2} \frac{dl_1 dl_2}{r}.$$

Таким образом, искомый потенциальный коэффициент определяется формулой

$$\alpha_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon l_1 l_2}\int_{l_1}\int_{l_2} \frac{dl_1 dl_2}{r}.$$

Выражение для потенциального коэффициента с одинаковыми индексами, например α_{11} для прямолинейного отрезка провода круглого сечения, может быть найдено путем следующих рассуждений. Предполагаем соответственно принятому допущению, что заряд, находящийся на поверхности провода, равномерно распределен по длине провода. Находим потенциал U', создаваемый этим зарядом в разных точках оси провода, и вычисляем среднее значение U потенциала вдоль оси. Пусть r — расстояние от кольцевого элемента поверхности проводника, имеющего длину dl' в направлении оси проводника (рис. 25.15), до элемента dl оси проводника, l — длина проводника и r_0 — радиус его сечения. Потенциал U' в некоторой точке оси, определяемый всем зарядом q проводника, равен

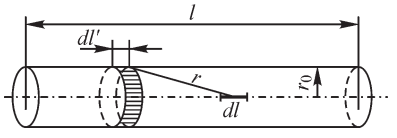

Рис. 25.15

$$U' = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{l}\int_l \frac{dl'}{r}.$$

Среднее значение потенциала вдоль всей оси будет

$$U = \frac{1}{l}\int_l U'dl = \frac{q}{4\pi\varepsilon l^2}\int_l\int_l \frac{dl'\,dl}{r}.$$

Следовательно,

$$\alpha_{11} = \frac{1}{4\pi\varepsilon l^2}\int_l\int_l \frac{dl'dl}{r},$$

причем наименьшее значение r есть r_0.

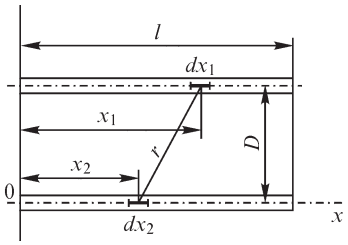

Рис. 25.16

В качестве примера определим, пользуясь методом средних потенциалов, потенциальный коэффициент α_{12} для параллельных отрезков проводов, расположенных на расстоянии D друг от друга и имеющих одинаковые длины $l_1 = l_2 = l$, причем начала отрезков лежат на одном перпендикуляре к ним. Оси координат расположим так, как показано на рис. 25.16. Имеем

$$\alpha_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon l^2}\int_0^l\int_0^l \frac{dx_1 dx_2}{\sqrt{D^2 + (x_2 - x_1)^2}}.$$

Но

$$\int_0^l \frac{dx_2}{\sqrt{D^2 + (x_2 - x_1)^2}} = \int_{-x_1}^{l-x_1} \frac{d(x_2 - x_1)}{\sqrt{D^2 + (x_2 - x_1)^2}} = \operatorname{Arsh}\frac{l - x_1}{D} + \operatorname{Arsh}\frac{x_1}{D}.$$

Следовательно,

$$\alpha_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon l^2}\int_0^l \left(\operatorname{Arsh}\frac{l - x_1}{D} + \operatorname{Arsh}\frac{x_1}{D}\right)dx_1.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\int_0^l \operatorname{Arsh}\frac{l - x_1}{D}\,dx_1 = \int_0^l \operatorname{Arsh}\frac{x_1}{D}\,dx_1.$$

Замечая, что

$$\int \operatorname{Arsh} y\,dy = y\operatorname{Arsh} y - \int y\,d(\operatorname{Arsh} y) =$$

$$= y\operatorname{Arsh} y - \int \frac{y\,dy}{\sqrt{1+y^2}} = y\operatorname{Arsh} y - \sqrt{1+y^2} + \text{const},$$

находим

$$\alpha_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon l^2}\,2\int_0^l \operatorname{Arsh}\frac{x_1}{D}\,dx_1 = \frac{D}{2\pi\varepsilon l^2}\left|\frac{x_1}{D}\operatorname{Arsh}\frac{x_1}{D} - \sqrt{1+\frac{x_1^2}{D^2}}\right|_0^l =$$

$$= \frac{1}{2\pi\varepsilon l}\frac{D}{l}\left(\frac{l}{D}\operatorname{Arsh}\frac{l}{D} - \sqrt{1+\frac{l^2}{D^2}} + 1\right) = \frac{1}{2\pi\varepsilon l}\left(\operatorname{Arsh}\frac{l}{D} - \sqrt{\frac{D^2}{l^2}+1} + \frac{D}{l}\right).$$

При вычислении коэффициентов α_{11} и α_{22} с одинаковыми индексами для прямолинейного проводника, имеющего круглое сечение радиуса r_0, результат интегрирования приведет к формуле, которая получается из только что полученной формулы путем замены D на r_0. Следовательно,

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\varepsilon l}\left(\operatorname{Arsh}\frac{l}{r_0} - \sqrt{\frac{r_0^2}{l^2}+1} + \frac{r_0}{l} \right).$$

Так как при выводе этой формулы наличие другого провода не учитывалось, то емкость уединенного цилиндра конечной длины получается из выражения

$$C = \frac{1}{\alpha_{11}} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\operatorname{Arsh}\frac{l}{r_0} - \sqrt{\frac{r_0^2}{l^2}+1} + \frac{r_0}{l}}.$$

Заметим, что имеет место соотношение

$$\operatorname{Arsh}\frac{l}{r_0} = \ln\left(\frac{l}{r_0} + \sqrt{\frac{l^2}{r_0^2}+1} \right).$$

При $l \gg r_0$ будет

$$\operatorname{Arsh}\frac{l}{r_0} - \sqrt{\frac{r_0^2}{l^2}+1} + \frac{r_0}{l} \approx \ln\frac{2l}{r_0} - 1 = \ln\frac{l}{r_0} + \ln 2 - 1 = \ln\frac{l}{r_0} - 0{,}307.$$

Следовательно,

$$C \approx \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{l}{r_0} - 0{,}307} \approx \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{l}{r_0}}.$$

Емкость между цилиндрами найдется из системы уравнений:

$$U_1 = \alpha_{11} q_1 + \alpha_{12} q_2; \quad U_2 = \alpha_{21} q_1 + \alpha_{22} q_2.$$

Принимая $q_2 = -q_1$ и учитывая, что $\alpha_{21} = \alpha_{12}$ и $\alpha_{22} = \alpha_{11}$, получаем

$$U_1 = (\alpha_{11} - \alpha_{12}) q_1; \quad U_2 = -(\alpha_{11} - \alpha_{12}) q_1;$$

$$C = \frac{q_1}{U_1 - U_2} = \frac{1}{2(\alpha_{11} - \alpha_{12})},$$

где α_{12} и α_{11} находятся по только что полученным формулам.

При $l \gg r_0$ и $l \gg D$ имеем

$$\alpha_{11} - \alpha_{12} \approx \frac{1}{2\pi\varepsilon l}\left[\left(\ln\frac{2l}{r_0} - 1 \right) - \left(\ln\frac{2l}{D} - 1 \right) \right] = \frac{1}{2\pi\varepsilon l}\ln\frac{D}{r_0}$$

и, следовательно,

$$C \approx \frac{\pi\varepsilon l}{\ln D/r_0},$$

что совпадает с выведенной ранее формулой для емкости двухпроводной линии передачи (см. § 25.1).

25.7. Вычисление емкости по картине поля

Емкость между двумя цилиндрическими телами большой длины или между двумя телами вращения с общей осью можно вычислить, пользуясь картиной поля, построенной хотя бы приближенным графическим методом, изложенным в §§ 24.15–24.17.

Отношение потока вектора смещения $\Delta\Psi_D$ сквозь сечение одной трубки к приращению потенциала ΔU между соседними линиями равного потенциала, согласно уравнениям, приведенным в § 24.17, равно:

для плоскопараллельного поля $\left|\dfrac{\Delta\Psi_D}{\Delta U}\right| = \varepsilon_p l \dfrac{\Delta a}{\Delta n} = \dfrac{1}{k_1} l;$

для поля тел вращения $\left|\dfrac{\Delta\Psi_D}{\Delta U}\right| = 2\pi r \varepsilon_p \dfrac{\Delta a}{\Delta n} = 2\pi \dfrac{1}{k_2}.$

Заряд тела равен, согласно постулату Максвелла, полному потоку смещения сквозь сечения всех трубок, начинающихся на теле. Если число этих трубок равно m_1, то $q = m_1 \Delta\Psi_D$. Разность потенциалов между двумя телами равна $U_1 - U_2 = m_2 \Delta U$, где m_2 — число интервалов между соседними линиями равного потенциала. Таким образом,

$$C = \frac{q_1}{U_1 - U_2} = \left|\frac{\Delta\Psi_D}{\Delta U}\right| \frac{m_1}{m_2} = k_3 \frac{m_1}{m_2},$$

причем для плоскопараллельного поля $k_3 = l/k_1$, а для поля тел вращения $k_3 = 2\pi/k_2$. Число k_3 задают, приступая к графическому построению поля. Оно определяет форму ячеек поля, т. е. отношение $\Delta a/\Delta n$. Числа m_1 и m_2 находят из построенной картины поля.

Вопросы, упражнения, задачи к главам 23, 24 и 25

23.1. Уравнения электромагнитного поля в дифференциальной форме

ВОПРОСЫ

1. (О) Какими характерными свойствами должны отличаться задачи, которые можно решить на основе уравнений электромагнитного поля, записанных в интегральной форме?

2. Правильно ли понимать под электрическим током только движение заряженных частиц или тел?

3. Создается ли магнитное поле электрическим полем, *а*) не изменяющимся во времени, *б*) изменяющимся во времени по линейному закону, *в*) изменяющимся во времени по синусоидальному закону?

4. (О) Зависит ли входящий в правую часть уравнения $\oint_l \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = -\dfrac{d\Phi}{dt}$ магнитный поток от электрического тока, индуцируемого этим потоком?

5. (О) При каком условии в проводящем теле, находящемся в не изменяющемся во времени магнитном поле, может индуцироваться ЭДС?

6. Каково значение величины rot $\boldsymbol{H}$ в однородном магнитном поле?

7. Можно ли, зная направление и значение напряженности магнитного поля в точке, указать в этой точке *а*) направление вектора rot $\boldsymbol{H}$, *б*) значение модуля вектора rot $\boldsymbol{H}$?

8. Во всех точках некоторой области выполнено уравнение rot $\boldsymbol{H} = 0$. Может ли в этой области существовать магнитное поле?

9. (О) Можно ли понимать под магнитной индукцией **B**, входящей в правую часть второго уравнения Максвелла, индукцию стороннего поля, не зависящую от индуцируемого им электрического поля?

10. (О) Является ли безвихревым электрическое поле, единственная составляющая напряженности E_x прямоугольной системы координат которого есть функция только координаты x?

11. Является ли функция div **D** векторной?

12. Зависит ли значение функции div $\boldsymbol{A}$ в точке от выбора системы координат, в которой ее рассчитывают?

13. Может ли соленоидальное поле быть вихревым?

14. Чем различаются изображения силовых линий электрического поля в областях, где имеются сосредоточенные электрические заряды и где их нет?

15. Плотность какого из зарядов входит в правую часть уравнения $\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \dfrac{1}{\varepsilon}\rho$: свободного или связанного?

16. (О) Может ли поле одного из векторов, связанных соотношением $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$, быть соленоидальным, а другого вектора нет?

17. Свободные заряды в некотором объеме отсутствуют, так что $\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 0$. Справедливо ли равенство $\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0$ в точках объема, если среда *а*) однородна, *б*) неоднородна?

18. (О) При каких условиях справедливо выражение $\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0$?

19. (О) Вектор $\boldsymbol{H}$ напряженности магнитного поля в области, свободной от тока, направлен вдоль оси x. Является ли напряженность поля функцией координат? Будет ли ответ тем же, если плотность тока не равна нулю? ($\mu = \text{const}$.)

20. (О) Имеют ли смысл выражения $\operatorname{div} \operatorname{div} \boldsymbol{A}$, $\operatorname{rot} \operatorname{grad} V$, $\operatorname{grad} \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$, $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$, $\operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{A}$, $\operatorname{grad} \operatorname{grad} V$, $\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$, $\operatorname{rot} \operatorname{div} \boldsymbol{A}$? Какие из них тождественно равны нулю?

21. (О) При каком характере распределения в пространстве электрического тока и заряда величины $\operatorname{rot} \boldsymbol{H}$, $\operatorname{div} \boldsymbol{D}$ теряют смысл?

УПРАЖНЕНИЯ

1. (Р) Определите плотность $\boldsymbol{J}(x, y, z)$ тока как функцию координат в области, где напряженность магнитного поля характеризуется функциями *а*) $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i}by + \boldsymbol{j}ax$, *б*) $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}a$, *в*) $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}cz^2$, *г*) $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}H_0 e^{-ax}$, *д*) $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i}by\sqrt{x^2 + y^2} + \boldsymbol{j}ax\sqrt{x^2 + y^2}$, *е*) $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i}by(x^2 + y^2)^{-0,5} + \boldsymbol{j}ax\,(x^2 + y^2)^{-0,5}$, *ж*) $H_\alpha = \dfrac{a}{r}$, *з*) $H_\alpha = H_0 e^{-ar}$, где a, b, c – постоянные, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. (Р) Определите закон изменения в пространстве напряженности $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}H_\alpha$ магнитного поля, создаваемого электрическим током с заданным законом его распределения: $J_r = J_\alpha = 0$ и *а*) $J_z = J_0 = \text{const}$, *б*) $J_z = J_0 ar$, *в*) $J_z = J_0 \dfrac{1}{ar}$, *г*) $J_z = J_0 (ar)^n$, *д*) $J_z = J_0 / (ar)^2$, *е*) $J_z = J_0 \exp(ar)$.

3. (Р) Запишите выражение $\operatorname{rot} \mu \boldsymbol{H}$ в прямоугольной системе координат и преобразуйте его к виду $\operatorname{rot} \mu \boldsymbol{H} = f_1 \operatorname{rot} \boldsymbol{H} + \boldsymbol{f}_2$. Найдите функции f_1 и $\boldsymbol{f}_2$, учитывая, что $\mu = \mu(x, y, z)$.

4. Интегрируя уравнение $\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$ и принимая магнитную проницаемость равной μ_0 всюду, рассчитайте напряженность магнитного поля внутри и вне *а*) бесконечно длинного провода круглого сечения радиусом $R = 1$ мм с током $i = 10$ А, *б*) бесконечно длинной трубы с внутренним и внешним радиусами $R_i = 5$ мм, $R_e = 8$ мм с током $i = 20$ А при условии $J = \text{const}$ в проводе и в трубе.

5. (Р) Магнитные поля с напряженностями $\boldsymbol{H}_1(x, y, z)$ и $\boldsymbol{H}_2(x, y, z)$ удовлетворяют равенству $\operatorname{rot} \boldsymbol{H}_1 = \operatorname{rot} \boldsymbol{H}_2$. Найдите связь между величинами $\boldsymbol{H}_1$ и $\boldsymbol{H}_2$.

6. Магнитная индукция в бесконечно длинном ферромагнитном стержне круглого сечения радиусом R направлена вдоль его оси, постоянна по сечению и изменяется по закону $B_z = B_0 \sin \omega t = 0{,}1 \sin 314\, t$ Тл. Определите напряженность $\boldsymbol{E}$

электрического поля на расстоянии $r = 2$ см $< R$ от оси стержня, пренебрегая индуцируемым в стержне током.

7. (Р) Является ли вихревым электрическое поле, напряженность $\boldsymbol{E}$ которого задана выражением *а*) $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{i}by + \boldsymbol{j}ax + \boldsymbol{k}cz$, *б*) $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{j}e^{ar}$, *в*) $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{i}E_1 + \boldsymbol{j}E_2 + \boldsymbol{k}E_3$, *г*) $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{i}ax + \boldsymbol{j}by + \boldsymbol{k}cz)-2$, *д*) $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{i}ax + \boldsymbol{j}by + \boldsymbol{k}cz)$, *е*) $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{k}E_m \operatorname{sh} ax$, *ж*) $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{j}E_m \sin cz$, *з*) $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{i}ax + \boldsymbol{j}by + \boldsymbol{k}cz)r^{-3/2}$, где a, b, c, E_1, E_2, E_3 — постоянные, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

8. (Р) Бесконечно длинная стальная пластина, ширина d которой значительно превышает ее толщину h, расположена в плоскости $y = 0$, нормальной к линиям индукции $B = B_m \sin \omega t$ однородного магнитного поля. Определите плотность $J_z(x)$ тока по ширине пластины при допущении, что магнитная индукция, обусловленная индуцированным в пластине током, значительно меньше B_m. Удельная электрическая проводимость стали равна 10^6 См/м. Рассчитайте ток в пластине при $d = 5$ см, $h = 2$ мм, $B_m = 0{,}001$ Тл, $\omega = 314$ с$^{-1}$.

9. (Р) Рассчитайте плотность $J(r)$ тока, индуцированного в тонком стальном диске, толщина h которого значительно меньше радиуса $R = 2{,}5$ см и плоскость которого перпендикулярна линиям магнитной индукции $B = 0{,}001 \sin 314\,t$ Тл внешнего однородного поля при допущении, что магнитная индукция, созданная индуцированным в диске током, значительно меньше индукции внешнего магнитного поля. Удельная электрическая проводимость стали равна 10^6 См/м.

10. (Р) Напряженность электрического поля задана одним из выражений, приведенным в упр. 7. Найдите плотность $\rho(x, y, z)$ электрического заряда, создающего потенциальное поле и распределенного в однородной среде с проницаемостью ε.

11. Запишите теорему Гаусса $\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon$ в таком виде, когда в правую часть входит не только свободный, но и связанный заряд плотностью $\rho_{\text{связ}} = \rho'$.

12. (Р) Запишите выражение $\operatorname{div} \boldsymbol{D}$ в дифференциальной форме в прямоугольной системе координат при условии, что среда анизотропна и оси координат *а*) совпадают с главными осями анизотропии, *б*) не совпадают с главными осями анизотропии.

13. Используя символический оператор ∇, запишите выражение $\operatorname{rot} \boldsymbol{A}$ в прямоугольной системе координат.

14. (Р) В воздушном пространстве между проводящими пластинами напряженность электрического поля изменяется по закону $\boldsymbol{E}(x) = \boldsymbol{i}E_0(1 + ax)$, где x — координата, отсчитываемая от одной из пластин ($\boldsymbol{i}$ — орт оси x). Определите плотность $\rho(x)$ объемного электрического заряда, помещенного между пластинами.

15. (Р) Объемная плотность электрического заряда, находящегося в воздухе между двумя весьма длинными соосными проводящими цилиндрическими поверхностями радиусами R_1 и R_2, изменяется по закону $\rho(r)$. Найдите напряженность $E(r)$ электрического поля при $R_1 \le r \le R_2$.

16. (Р) Запишите в прямоугольной системе координат дифференциальные операторы *а*) $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{H}$, *б*) $\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$, *в*) ∇U, *г*) $\nabla(\nabla U)$, *д*) $\nabla \times \boldsymbol{E}$, *е*) $\nabla \times (\nabla U)$.

17. (Р) Определите, может ли магнитная индукция выражаться формулами *а*) $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{i}B_0e^{-\alpha x}$, *б*) $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{i}ax + \boldsymbol{j}by)$, *в*) $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{i}ax - \boldsymbol{k}cz)$, *г*) $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{j}B_0e^{-\alpha x}$, *д*) $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{k}B_m \operatorname{sh} \alpha x$, *е*) $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{j}((ax)^2 + (by)^2)^{-0,5}$, *ж*) $\boldsymbol{B} = B_0(\boldsymbol{j}x + \boldsymbol{j}y - \boldsymbol{k}z)$, *з*) $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{i}(x^2 + y^2)^{-0,5} + \boldsymbol{j}(x^2 + y^2)^{-0,5}$, *и*) $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{i}B_m \sin kx$, *к*) $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{j}B_m \sin kx$.

18. (Р) Учитывая уравнение $\operatorname{div} \boldsymbol{\delta} = 0$, получите выражение $\operatorname{div} \boldsymbol{E}$ в *а*) однородной среде с удельной электрической проводимостью γ, *б*) неоднородной в отношении электрической проводимости среды, в которой течет ток проводимости плотностью $\boldsymbol{J} = \gamma \boldsymbol{E}$.

23.2. Система уравнений электромагнитного поля

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. (О) Почему в систему уравнений электромагнитного поля входит уравнение $\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$, тогда как уравнение $\operatorname{div} \boldsymbol{\delta} = 0$ не входит?

2. Может ли существовать векторное поле $\boldsymbol{A}$, удовлетворяющее уравнениям $\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{f} \neq 0$, $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = C \neq 0$, т. е. поле, созданное как векторными, так и скалярными источниками?

3. (О) Можно ли поле плотности тока представить в виде $\boldsymbol{\delta} = \operatorname{rot} \boldsymbol{F}$, где $\boldsymbol{F}$ — некоторая векторная функция, не равная напряженности $\boldsymbol{H}$ поля?

4. (Р) Подсчитайте полное число переменных, входящих в систему уравнений электромагнитного поля, учитывая, что векторные переменные содержат в общем случае три составляющих. Сопоставьте полученное число с количеством уравнений.

5. (Р) Используя уравнения электромагнитного поля, выведите соотношение $-\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div}(\gamma \boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}_{\text{пер}})$, выражающее принцип сохранения электрического заряда.

6. (Р) Полная система уравнений электромагнитного поля упрощается в ряде частных случаев. Запишите уравнения для не изменяющихся во времени полей. Разделите их на две несвязанные группы, описывающие электрические и магнитные поля.

7. (Р) Основываясь на уравнениях $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$, $\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{\delta}$, получите уравнения относительно *а*) напряженности электрического поля, *б*) напряженности магнитного поля, рассматривая поле в 1) проводящей среде, принимая $\boldsymbol{J} = \gamma \boldsymbol{E}$ и пренебрегая током электрического смещения, 2) диэлектрике, принимая $\boldsymbol{J} = \varepsilon \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$.

23.3. Граничные условия на поверхностях раздела сред с различными свойствами

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. (О) Почему граничные условия $B_{n1} = B_{n2}$, $E_{t1} = E_{t2}$, как и условия $H_{t1} = H_{t2}$, $D_{n1} = D_{n2}$ не являются независимыми в случае переменного электромагнитного поля?

2. (О) В чем причина возникновения скачка нормальной к поверхности раздела сред составляющей напряженности *а*) электрического, *б*) магнитного поля?

3. Какие из составляющих векторов $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}$ могут претерпевать разрыв в точках поверхностей раздела двух сред с различными электрическими и магнитными свойствами?

4. (О) Сохраняют ли непрерывность касательные и нормальные составляющие векторов $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}$ на поверхности раздела двух анизотропных сред с различными электрическими и магнитными свойствами?

5. Какое из условий: $D_{n1} = D_{n2}$ или $E_{t1} = E_{t2}$ сохранит свой вид при наличии свободного заряда с поверхностной плотностью σ на поверхности раздела двух сред с различными диэлектрическими проницаемостями?

6. (Р) Запишите условие, связывающее нормальные к поверхности раздела двух сред с различными диэлектрическими проницаемостями составляющие вектора электрического смещения, если размещенный на ней свободный электрический заряд имеет поверхностную плотность σ.

7. (Р) Запишите условие, связывающее касательные к поверхности раздела двух сред с различными магнитными проницаемостями составляющие вектора напряженности магнитного поля, если размещенный на ней слой тока имеет плотность j.

8. (Р) Покажите, что в точках поверхности раздела ферромагнитного тела и воздуха выполняется равенство $\boldsymbol{n}_2(\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) = \boldsymbol{n}_2\boldsymbol{M}$, где $\boldsymbol{n}_2$ — вектор нормали к поверхности, направленный внутрь ферромагнитной среды, $\boldsymbol{M}$ — намагниченность, 1, 2 — индексы воздушной и ферромагнитной среды.

9. Поверхностью раздела сред 1 и 2 является плоскость $z = 0$. Известны векторы $\boldsymbol{D}_1$ (в среде 1) и $\boldsymbol{H}_2$ (в среде 2) при $z = 0$: $\boldsymbol{D}_1 = (\boldsymbol{i}\,2x + \boldsymbol{j}\,3y^2 + \boldsymbol{k}\,5)\cdot 10^9$ Кл/м^2, $\boldsymbol{H}_2 = (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}\,5y^2 + \boldsymbol{k}\,4)\cdot 10^3$ А/м.

Рассчитайте величины $\boldsymbol{D}_2$, $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{B}_2$ на поверхности раздела сред. Их проницаемости $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_0$, $\varepsilon_2 = 4\varepsilon_0$, $\mu_1 = 50\mu_0$, $\mu_2 = 100\mu_0$.

10. Поверхностный ток с линейной плотностью $j = 10^3$ А/м имеет направление, параллельное оси x и размещен на плоскости $z = 0$, являющейся поверхностью раздела сред с магнитными проницаемостями $\mu_1 = \mu_0$ при $z < 0$ и $\mu_2 = 100\mu_0$ при $z > 0$. Напряженность магнитного поля в среде с проницаемостью μ_0 равна $\boldsymbol{H}_1 = (\boldsymbol{i}\cdot 10^3 + \boldsymbol{j}\cdot 2\cdot 10^3 + \boldsymbol{k}\cdot 10^3)$ А/м. Рассчитайте напряженность магнитного поля и магнитную индукцию в среде с проницаемостью μ_2.

11. (Р) Внутри находящегося в воздухе параллельно оси z бесконечно длинного круглого цилиндра, диэлектрическая проницаемость которого $\varepsilon = 2\varepsilon_0$, электрическое поле однородно и его напряженность $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{j}E_y = \boldsymbol{j}\,100$ В/м. Рассчитайте значения составляющих векторов напряженности $\boldsymbol{E}_e$ и смещения $\boldsymbol{D}_e$ на его поверхности в воздухе. Сохраняет ли однородность поле в воздухе?

12. (Р) На плоской поверхности $x = \text{const}$ раздела воздуха и магнитной среды с тензором магнитной проницаемости (μ) напряженность магнитного поля в воз-

духе $\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{i}H_{x1} + \boldsymbol{j}H_{y1}$. Определите напряженность $\boldsymbol{H}_2$ магнитного поля в магнитной среде, а также магнитную индукцию $\boldsymbol{B}_2$ в ней и $\boldsymbol{B}_1$ в воздухе, принимая, что главные оси анизотропии *а*) совпадают с осями *x*, *y*, *б*) не совпадают с осями *x*, *y*.

24.1. Потенциал электростатического поля

ВОПРОСЫ

1. (О) Почему потенциал связывают с напряженностью поля соотношением $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} U$, а не соотношением $\boldsymbol{E} = \operatorname{grad} U$?

2. Почему напряженность электростатического поля не изменяется при увеличении либо уменьшении потенциала во всех точках области на одно и то же число? Изменится ли напряженность поля, если изменить потенциал во всех точках в k раз?

3. Чему равна напряженность электростатического поля в области, где потенциал имеет постоянное, не зависящее от координат точки значение?

4. В направлении вектора $\boldsymbol{n}$ потенциал изменяется с наибольшей скоростью. В каком направлении потенциал не изменяется?

5. Под каким углом к поверхности проводящего тела подходят линии напряженности электрического поля?

6. Чему равна функция grad U внутри проводящего тела?

7. Полный заряд системы тел равен нулю. Может ли на большом расстоянии r от них потенциал убывать как r^{-1}, r^{-2}, r^{-n}?

8. Как следует разместить два расположенных рядом диполя, чтобы на большом расстоянии от них потенциал убывал как r^{-2}, r^{-4}?

9. (О) В линии передачи провода рассматривают как бесконечно длинные. При каком условии потенциал поля в бесконечно удаленных точках можно принять равным нулю?

10. (О) Почему для расчета потенциала заряженного тела можно пользоваться выражением $U = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\oint\limits_s \dfrac{\sigma\, ds}{r}$, справедливым только в однородной среде с диэлектрической проницаемостью ε? Ведь само проводящее тело нарушает однородность среды?

11. (О) Можно ли применить выражение $U = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\oint\limits_s \dfrac{\sigma\, ds}{r}$ для расчета потенциала поля заряженного проводящего тела, если в его поле расположено проводящее незаряженное тело?

12. (О) Можно ли для расчета потенциала поля зарядов, распределенных с объемной плотностью ρ в объеме V диэлектрика с проницаемостью ε_i, воспользоваться выражением $U = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_e}\int\limits_V \dfrac{\rho\, dV}{r}$, если проницаемость окружающего пространства ε_e?

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

1. Найдите составляющие E_x, E_y, E_z напряженности электростатического поля, потенциал которого

а) $U = U_0 = \text{const}$, *б)* $U = ax$, *в)* $U = ax + by + kz$, *г)* $U = axy$, *д)* $U = Ua\,(x^2 + y^2 + z^2)^{-0,5}$, *е)* $U = e^{-\alpha x} \operatorname{sh} ky \cos mz$.

2. Найдите составляющие E_r, E_α, E_z напряженности электростатического поля, потенциал которого *а)* $U = U_0 a^{-\alpha r}$, *б)* $U = U_0 e^{-\alpha r} \sin k\alpha$, *в)* $U = U_0 e^{-\alpha r} \cos k\alpha$, *г)* $U = ar^{-n} \sin k\alpha$, *д)* $U = (ar^n + br^{-n}) \cos k\alpha \sin mz$.

3. (Р) Является ли потенциальным поле, напряженность которого задана выражением *а)* $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{i}\, 5 \cdot 10^3$, *б)* $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{i}\, 7 \cdot 10^3 + \boldsymbol{j}\, 5 \cdot 10^2$, *в)* $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{i}\, ax$, *г)* $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{k}\, by$, *д)* $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{i}\, ax^2 + \boldsymbol{j}\, bz$, *е)* $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{i}\, axy + \boldsymbol{j}\, ax + \boldsymbol{k}\, ax^2$?

4. (Р) Найдите потенциал поля, напряженность которого *а)* $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{i} E_1$, *б)* $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{j}\, by$, *в)* $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{k}\, cz^2$, *г)* $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{i} E_1\, e^{-\alpha x}$, *д)* $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{j} E_2 + \boldsymbol{k} E_3$, *е)* $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{i}\, ax + \boldsymbol{k}\, cz$, *ж)* $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{j}\, cy + \boldsymbol{k}\, a$.

5. (Р) Каким условиям должны удовлетворять функции E_1, E_2, E_3, чтобы поле напряженностью *а)* $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{i} E_1 + \boldsymbol{j} E_2$, *б)* $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{j} E_2 + \boldsymbol{k} E_3$, *в)* $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{i} E_1 + \boldsymbol{k} E_3$ было потенциальным?

6. Потенциал поля задан выражением: *а)* $U = ax$, *б)* $U = ax + by$, *в)* $U = ar$, *г)* $U = axy$. Определите составляющие напряженности поля. Изобразите линии $U = \text{const}$ и линии напряженности поля.

7. (Р) Получите выражения для расчета потенциала и составляющих напряженности поля на больших расстояниях от расположенных в углах квадрата зарядов $+q$, $+q$, $-q$, $-q$ (рис. В24.1, *а*) и $+q$, $-q$, $+q$, $-q$ (рис. В24.1, *б*).

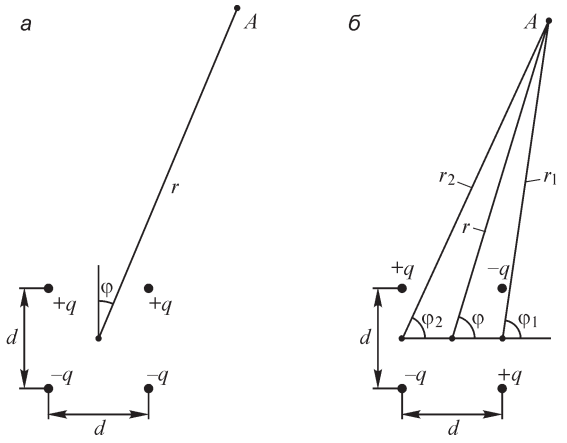

Рис. В24.1

8. (Р) Найдите потенциал и напряженность поля на оси тонкого кольца радиусом R, заряженного с постоянной линейной плотностью τ.

9. (Р) Найдите потенциал поля, созданного бесконечно длинной равномерно заряженной пластиной шириной $2a$ с весьма малой толщиной d ($d \ll 2a$). Поверхностная плотность заряда пластины равна σ.

10. (Р) Найдите потенциал и напряженность поля, созданного совокупностью N заряженных параллельных друг другу бесконечно длинных нитей, размещенных равномерно на цилиндрической поверхности радиусом R при линейной плотности их зарядов *а*) $\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau$, *б*) $\tau_1 = -\tau_2 = +\tau_3 = -\tau_4 = +\tau_5 = \ldots = \tau$. Определите закон убывания потенциала и напряженности поля на больших расстояниях от нитей.

11. (Р) Получите выражения для расчета потенциала и напряженности поля равномерно заряженной с плотностью заряда τ прямолинейной нити длиной l в плоскости, перпендикулярной нити и проходящей через ее середину.

24.2. Уравнения Лапласа и Пуассона

ВОПРОСЫ

1. Какой должна быть форма проводящего тела, обеспечивающего условие постоянства потенциала в объеме V?

2. (О) Какие из выражений grad div $\boldsymbol{E}$, grad $\boldsymbol{E}$, grad rot $\boldsymbol{A}$, div grad U, rot grad U, grad div grad U имеют смысл?

3. Удовлетворяет ли уравнениям Лапласа и Пуассона потенциал электростатического поля в *а*) неоднородной среде, *б*) кусочно-однородной среде, *в*) однородной среде, *г*) анизотропной однородной среде?

4. (О) Правая часть уравнения Лапласа равна нулю, поэтому его решением является, в частности, функция $U = \text{const}$, так как тогда каждое из слагаемых левой части уравнения обращается в нуль. Почему уравнение Лапласа может иметь и иные решения, отличные от решения $U = \text{const}$?

5. (О) Поле создано заряженными проводящими телами. Каким уравнением — Пуассона или Лапласа оно описывается?

6. (О) Могут ли потенциал или его производные иметь разрывы?

7. (О) На замкнутой поверхности, внутри которой заряд отсутствует, потенциал постоянен. Чему равен потенциал внутри поверхности? Изменяется ли он вне поверхности?

8. Какие значения принимает функция div $\boldsymbol{D}$ *а*) внутри заряженного проводника, б) в окружающем его диэлектрике, *в*) на поверхности заряженного проводника, *г*) на поверхности незаряженного проводника?

9. Подходят ли под прямым углом к поверхности проводника линии напряженности электрического поля, если окружающая его диэлектрическая среда характеризуется анизотропными свойствами?

10. (О) Почему при решении общей задачи электростатики удобно вначале определять потенциал, а не сразу напряженность электрического поля?

11. (О) Незаряженное проводящее тело, потенциал которого неизвестен, находится в электростатическом поле. Какому условию удовлетворяет функция $\dfrac{\partial U}{\partial n}$ на его поверхности? Как изменится это условие, если тело заряжено и его заряд равен q?

12. (О) Какая из задач электростатики имеет более простое решение: *а*) при заданном распределении зарядов на поверхностях проводников или *б*) при заданных потенциалах проводников? Диэлектрик, окружающий проводник, однороден.

13. На замкнутой поверхности, охватывающей однородную среду, задан потенциал $U = \text{const}$. Свободные заряды внутри поверхности отсутствуют. Существует ли поле внутри поверхности? Изменится ли ответ, если *а*) потенциал на поверхности не постоянен, *б*) среда кусочно-однородна, *в*) внутри поверхности имеется свободный электрический заряд?

14. Может ли на поверхности внесенного в электростатическое поле тела претерпевать разрыв *а*) потенциал, *б*) нормальная к поверхности тела составляющая напряженности поля, *в*) касательная к поверхности тела составляющая напряженности поля?

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

1. (Р) Потенциалы обкладок однослойного конденсатора равны $-U_0$ и U_0. Считая, что потенциал в пространстве между обкладками изменяется только в направлении, нормальном к обкладкам, определите закон его изменения в случае *а*) плоского, *б*) цилиндрического конденсатора. Расстояние между обкладками равно d. Радиус внутренней обкладки цилиндрического конденсатора равен R.

2. (Р) В пространстве между плоскими электродами, потенциалы которых равны 0 и U_0, распределен заряд с объемом плотностью ρ. Найдите потенциал и напряженность поля в точках между электродами, принимая диэлектрическую проницаемость равной $\varepsilon = \varepsilon_0$ и допуская, что поле изменяется только вдоль координаты, отсчитываемой по нормали к электродам. Расстояние между электродами равно d.

3. (Р) Потенциалы цилиндрических соосных катода и анода (их радиусы $R_к$, $R_а$ ($R_к < R_а$) , а длина l значительно превышает радиусы) равны $U_к = 0$, $U_а = U_0$. Часть межэлектродного пространства (от $r = R_к$ до $r = R_0 = 0{,}5(R_к + R_а)$) заполнена электронами с постоянной объемной плотностью ρ. Найдите зависимости $U(r)$, $E(r)$, считая поле электростатическим и не изменяющимся по координатам α и z; $\varepsilon = \varepsilon_0$ всюду.

4. Покажите, что составляющие E_x, E_y, E_z напряженности электростатического поля удовлетворяют в однородной среде уравнению Лапласа.

5. (Р) В пространстве между заземленными обкладками плоского воздушного конденсатора распределен электрический заряд плотностью *а*) $\rho = \rho_0 = \text{const}$, *б*) $\rho = ax$, *в*) $\rho = \rho_0 + ax$, *г*) $\rho = ax^2 + bx + \rho_0$, *д*) $\rho = \rho_0 e^{\alpha x}$, *е*) $\rho = \rho_0 e^{-\alpha x}$, *ж*) $\rho = \rho_m \sin kx$. Координату x отсчитываем вдоль нормали к обкладкам.

Найдите потенциал и напряженность поля. Расстояние между обкладками равно $2d$. Примите $\rho \neq 0$ при $0 < x < d$ и $\rho = 0$ при $d < x < 2d$; $\varepsilon = \varepsilon_0$ всюду.

6. (Р) В среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2\varepsilon_0$ потенциал электростатического поля выражается одной из формул: *а*) $U = ax$, *б*) $U = ax^2 + bx + U_0$,

в) $U = U_0 + ax^2$, *г*) $U = U_0 e^{\alpha x}$, *д*) $U = U_m \sin kx$, *е*) $U = U_m \frac{a}{r}$, *ж*) $U = U_m \operatorname{sh} kx$, *з*) $U = ar^2$, *и*) $U = ar^{-3} + br^{-2} + cr^{-1} + U_0$.

Определите, существует ли в области электрический заряд и рассчитайте его плотность.

7. Может ли в области, где объемная плотность заряда равна нулю, потенциал электростатического поля быть представлен выражением:

а) $U = ax^2 + by^2 + cz$, *б*) $U = axy + byz + cxz$, *в*) $U = ax^3 + bxy + cz^2$, *г*) $U = a\,r \cos \alpha$, *д*) $U = \frac{a}{r} + br$?

8. Определите объемную плотность электрического заряда, потенциал которого равен *а*) $U = axyz$, *б*) $U = axy^2z$. Диэлектрическая проницаемость среды равна ε_0.

9. (Р) На цилиндрической поверхности радиусом R потенциал изменяется по закону $U = U_m \sin k\alpha$, где k — некоторое целое положительное число, $0 < \alpha \leq 2\pi$. Считая, что поле является плоскопараллельным, найдите потенциал $U(r, \theta)$ и напряженность $E(r, \alpha)$ поля в предположении, что $\varepsilon = \varepsilon_0$ всюду. Убедитесь в том, что при $k = 1$ внутри поверхности поле однородное.

10. (Р) Сформулируйте соображения, определяющие выбор системы координат, в которой целесообразно записывать и решать уравнения Лапласа и Пуассона.

11. Плоский конденсатор содержит k слоев диэлектрика, проницаемости которых равны $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, ..., \varepsilon_k$. Поверхности раздела диэлектриков — плоскости, параллельные обкладкам конденсатора. Запишите граничные условия для потенциала и его производной на поверхности между i и $i + 1$ слоями. Подсчитайте число постоянных при интегрировании уравнений Лапласа и число условий для потенциала и его производной.

12. (Р) Проводящее тело с полостью, помещенное в электростатическое поле, принимает потенциал U. Найдите потенциал в полости.

13. (Р) Бесконечно длинный проводящий цилиндр радиусом R помещен в нормальное к его оси однородное электростатическое поле напряженностью $E_0 = 100$ В/м. Используя решение упражнения 9, найдите плотность наведенного на поверхности цилиндра заряда, принимая вне цилиндра $\varepsilon = \varepsilon_0$.

14. (Р) В пространство между обкладками плоского воздушного конденсатора, расстояние между которыми $d = 2$ см и напряжение $U_0 = 10$ В, вставлена незаряженная проводящая пластина толщиной $d_1 = 0{,}2$ см, поверхности которой параллельны обкладкам. Расстояние от пластины до обкладки, потенциал которой равен нулю, $d_2 = 0{,}5$ см. Рассчитайте потенциал $U(y)$ и напряженность $E(y)$ поля в трех областях: в пластине и в двух воздушных слоях (ось y перпендикулярна пластинам).

15. (Р) Решите предыдущую задачу при условии, что конденсатор цилиндрический, радиусы обкладок которого $R_1 = 2$ мм, $R_2 = 5$ мм. Толщина проводящего ци-

линдра, соосного с обкладками конденсатора, $d_1 = 0{,}2$ мм, расстояние от него до внутренней обкладки $d_2 = 1$ мм.

16. (Р) Выведите уравнение, которому удовлетворяет потенциал U в неоднородном диэлектрике с проницаемостью $\varepsilon = f(x, y, z)$.

17. На замкнутой поверхности S задан потенциал. В области, ограниченной этой поверхностью, имеются свободные заряды. Предложите подход к определению поля в области, основанный на методе наложения.

24.3. Плоскопараллельное электростатическое поле

ВОПРОСЫ

1. Почему при изображении картины плоскопараллельного поля линии постоянных значений потенциала проводят так, чтобы приращение потенциала между соседними линиями сохранялось одним и тем же?

2. Почему линии $V = \text{const}$ наносят так, чтобы приращение функции потока при переходе от некоторой линии напряженности поля к соседней сохранялось постоянным?

3. Какова связь между функцией потока и зарядом проводника на единицу длины?

4. Можно ли при изучении поля, характеристики которого являются функциями координат x, y, z, ввести понятия *а*) потенциала, *б*) функции потока?

5. Сохраняет ли функция потока постоянное значение на поверхности проводника?

6. (О) Почему потенциал и функция потока, удовлетворяя одному и тому же уравнению, не совпадают, т. е. являются различными функциями?

7. (О) Почему в задачах электростатики чаще решают уравнение Лапласа относительно потенциала, а не функции потока?

24.4. Метод комплексного потенциала

ВОПРОСЫ

1. Какова размерность комплексного потенциала?

2. (О) Задан комплексный потенциал $\zeta(z)$ поля. Как определить форму проводников, поле которых он описывает?

3. (О) Можно ли, зная комплексный потенциал поля, определить плотность заряда на поверхности заряженного проводника?

4. Комплексные потенциалы двух полей различаются на постоянное число $C_1 + jC_2$. Одинаковы ли напряженность $E(x, y)$ и составляющие напряженности $E_x(x, y)$, $E_y(x, y)$ этих полей?

5. (О) Можно ли использовать понятие комплексного потенциала для расчета поля в неоднородной среде?

6. На каком основании можно заключить, что функция $\zeta = Aj \ln z + C$ является при соответствующем выборе постоянных комплексным потенциалом электрического поля заряженного провода круглого сечения?

7. Зависит ли комплексный потенциал заряженного уединенного провода круглого сечения от его радиуса?

8. Можно ли изобразить линии $U = \text{const}$ и $V = \text{const}$ внутри заряженного провода?

9. Вне заряженного провода комплексный потенциал равен $\zeta = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\theta - \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} j \ln r +$ $+ C_1 + jC_2$. Каков комплексный потенциал внутри провода?

10. Изменится ли комплексный потенциал поля заряженного бесконечно длинного прямолинейного провода, если провод поместить в однородное электрическое поле, напряженность которого направлена поперек оси провода?

11. Изменяется ли комплексный потенциал в точке, перемещающейся вдоль *а*) линии напряженности поля, *б*) линии постоянного потенциала?

12. (О) Почему при конформном отображении области сохраняется неизменной емкость между телами, ведь расстояние между ними изменяется?

13. В каком случае провод радиусом сечения R при конформном отражении области с помощью функции $\zeta = z^2$ сохранит свою форму в плоскости ζ? Может ли сохраниться форма проводов двухпроводной линии при таком отображении?

14. Расстояние между линейными проводами с координатами $x_1 + jy_1$, $x_2 + jy_2$ равно r. Каким оно будет при конформном отображении области функцией *а*) $\zeta = e^z$, *б*) $\zeta = \text{sh}\, z$, *в*) $\zeta = az + b$, *г*) $\zeta = z + \frac{1}{z}$?

15. (О) Сохраняется ли неизменным при конформном отображении области поток вектора напряженности сквозь замкнутую поверхность, охватывающую заряженный провод?

16. (О) Можно ли определить силу взаимодействия двух заряженных линейных проводов, рассчитывая ее по значениям линейной плотности заряда и напряженности поля в области ω при конформном отображении области z с помощью функции $\xi(z)$?

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

1. (Р) Запишите комплексный потенциал однородного поля.

2. Запишите уравнения линий функции потока $V(x, y)$ и линий электрического потенциала $U(x, y)$ по выражению комплексного потенциала поля *а*) $\zeta(z) = Az + B$, *б*) $\zeta(z) = Az^2$, *в*) $\zeta(z) = A \ln z + B$, *г*) $\zeta(z) = Aj \ln z + B$, *д*) $\zeta(z) = Az^{0,5}$. Найдите напряженность $E(x, y)$ поля и ее составляющие $E_x(x, y)$, $E_y(x, y)$.

3. Объясните смысл разности $\Delta V = V(x_1, y_1) - V(x_2, y_2)$.

4. (О) Объясните причину трудностей расчета поля методом комплексного потенциала в кусочно-однородной среде.

5. Запишите комплексный потенциал поля заряженного провода круглого сечения в прямоугольной системе координат.

6. (Р) Запишите комплексный потенциал поля заряженного провода круглого сечения, помещенного в однородное поле, напряженность которого перпендикулярна оси провода.

7. (Р) Запишите комплексный потенциал поля двух тонких проводов круглого сечения, расстояние d между осями которых равно 1 м. Заряды на единицу длины проводов *а*) $\tau_1 = \tau_2$, *б*) $\tau_1 = -\tau_2$.

8. (Р) Запишите комплексный потенциал и напряженность поля N проводов, заряженных с линейной плотностью заряда τ каждый, распределенных равномерно по окружности радиусом R и образующих «расщепленную» фазу линии передачи.

9. (Р) $2N$ линейных проводов с зарядами плотностью $+\tau$ и $-\tau$ расположены равномерно по окружности радиусом R так, что соседние провода имеют заряды разных знаков. Найдите комплексный потенциал поля.

10. (Р) Запишите комплексный потенциал и выражение для напряженности поля двух линейных разноименно заряженных проводов, расположенных *а*) на оси y на расстоянии $2h$ друг от друга, *б*) на оси x на расстоянии $2d$ друг от друга симметрично относительно начала координат.

11. (Р) Провод радиусом сечения R расположен внутри двугранного угла α, образованного проводящими плоскими поверхностями. Рассчитайте радиус $R_\omega = R\left|\dfrac{d\omega}{dz}\right|_{z=z_0}$ провода в плоскости ω при конформном отображении области функцией $\omega = z^{\pi/\alpha}$ в предположении, что провод линейный, принимая координату оси провода в плоскости z равной $z_0 = r_0 e^{j\varphi_0}$. Оцените величину ΔR отклонения контура провода от кругового в плоскости ω.

12. В условиях предыдущей задачи провод имеет потенциал U_0 относительно проводящих поверхностей с потенциалом $U = 0$. Рассчитайте координаты нескольких (6 ÷ 8) точек линии, потенциал которой постоянен и равен $U = 0{,}5U_0$, и постройте эту линию.

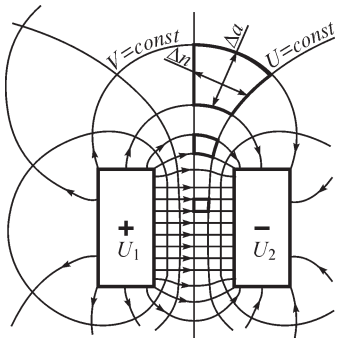

Рис. В24.2

13. Принимая диэлектрическую проницаемость среды, окружающей изображенные на рис. В24.2 провода, равной ε_0, рассчитайте *а*) заряд провода на единицу его длины, *б*) напряжение между проводами *в*) емкость проводов на единицу длины при условии, что поток трубки $\Delta V = 50$ В и напряжение между соседними линиями равного потенциала $\Delta U = 50$ В.

24.5. Электростатическое поле проводов круглого сечения

ВОПРОСЫ

1. В каких точках двух параллельных проводов круглого сечения плотность заряда, а также напряженность поля принимают наибольшие (наименьшие) значения, если провода имеют заряды *а*) одного знака, *б*) разных знаков?

2. Совпадают ли геометрические и электрические оси *а*) уединенного заряженного провода круглого сечения, *б*) двух круглых проводов с зарядами разных знаков, *в*) двух круглых проводов с зарядами одного знака?

3. Может ли электрическая ось провода располагаться вне его сечения?

4. Изменяется ли расстояние между геометрической и электрической осями провода при изменении высоты его подвеса над плоской поверхностью земли?

5. У какого из двух разноименно заряженных проводов различных радиусов плотность заряда имеет наибольшее по модулю значение? На поверхности какого из проводов напряженность поля достигает наибольшего значения?

6. Можно ли, определив положение электрических осей проводов, рассчитать напряженность поля, пользуясь выражением $E = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon r}$ в точках *а*) вне проводов, *б*) внутри проводов, *в*) на их поверхности?

7. Каково положение плоскости нулевого потенциала двух проводов радиусом R каждый и потенциалами $-U_0$ и U_0?

8. В некоторой области густота линий $V = \text{const}$ больше, чем в других областях такой же площади. Какое заключение можно сделать о густоте линий равного потенциала в этих областях?

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

1. Рассчитайте напряженность поля и плотность электрического заряда на поверхности проводов круглого сечения при заданном *а*) напряжении $U = 1000$ В между проводами, *б*) линейной плотности $\tau = 1{,}5\cdot10^{-9}$ Кл/м их зарядов. Расстояние D между геометрическими осями проводов и их радиусы приведены в таблице:

R_2, см	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
R_1, см	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5
D, см	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27

2. (Р) Рассчитайте наибольшие значения напряженности электрического поля на контурах сечений цилиндров при их расположении согласно рис. В24.3 ($R_1 = 1$ см, $R_2 = 2$ см, $A_1A_2 = d = 3$ см) и рис. В24.4 ($R_1 = 1$ см, $R_2 = 5$ см, $A_1A_2 = d = 1$ см). Линейные плотности зарядов $\tau_1 = -\tau_2 = \tau = 10^{-9}$ Кл/м, диэлектрическая проницаемость среды ε_0.

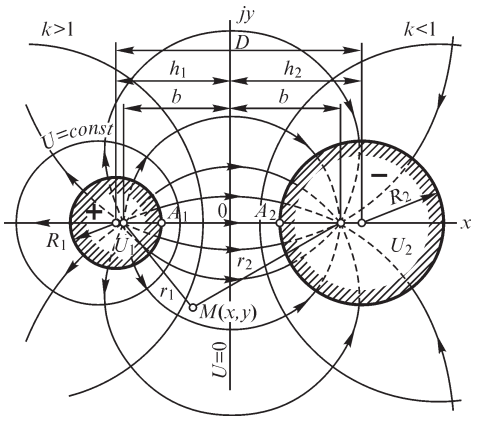

Рис. В24.3

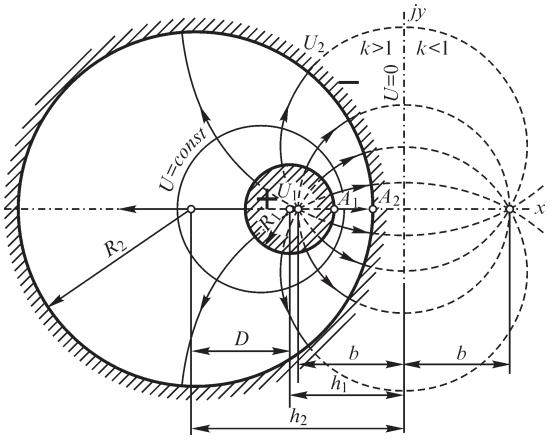

Рис. В24.4

3. (Р) При условиях предыдущей задачи определите напряжение между цилиндрами, при котором напряженность поля E_{A_1} достигает значения $E_{\text{доп}} = 30$ кВ/см.

24.6. Картина электростатического поля

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. (О) Правильно ли построена картина поля, если ячейки сетки, образованные линиями $V = \text{const}$ и $U = \text{const}$, представляют собой подобные *а*) четырехугольники, *б*) треугольники, *в*) шестиугольники?

2. В поле заряженного провода находится незаряженный провод. Каково соотношение между числом входящих и выходящих из незаряженного провода линий напряженности поля?

3. В однородном поле находится заряженный провод. Равно ли число входящих в провод силовых линий числу выходящих из него линий?

4. (О) Можно ли изобразить картину поля, соблюдая требуемые правила ее построения, если в электрическом поле заряженных проводов имеется тело, диэлектрическая проницаемость которого отличается от проницаемости окружающей среды?

5. В центре какой из двух ячеек картины поля напряженность больше: в ячейке большего или меньшего размера?

6. Заряженный провод охвачен металлической оболочкой, которая *а*) соединена с землей, *б*) изолирована и не заряжена. Изобразите для этих случаев линии напряженности электрического поля в области, охваченной оболочкой, и вне ее.

24.7. Метод интегральных уравнений

ВОПРОСЫ

1. (О) Почему при замене неоднородной среды с диэлектрической проницаемостью в объеме V_i, равной $\varepsilon_i = \varepsilon_i(x, y, z)$, на однородную с диэлектрической проницаемостью ε_e кроме объемных зарядов приходится вводить еще и поверхностные?

2. (О) При сведении среды к однородной и введении на поверхности s простого слоя зарядов плотностью σ величина скачка составляющей напряженности E_n поля сохраняется той же, что и в кусочно-однородной среде. Сохраняется ли при этом неизменной величина скачка касательной составляющей D_τ вектора электрического смещения?

3. (О) Можно ли при сведении среды к однородной на поверхности s тела разместить вместо простого двойной слой зарядов, обеспечивающий требуемый скачок касательной составляющей вектора электрического смещения?

4. (О) Тело из вещества с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon \neq \varepsilon_0$ находится в воздухе во внешнем поле. Каким интегральным свойством характеризуется плотность вторичных источников?

24.8. Метод зеркальных изображений

ВОПРОСЫ

1. Как определить плотность зарядов, индуцированных на поверхности проводящей среды, пользуясь методом зеркальных изображений?

2. Сохраняется ли неизменным при введении зеркально изображенных в проводящей среде зарядов поле *а*) в диэлектрике, где расположен заряженный провод, *б*) на границе проводящей среды со стороны диэлектрика, *в*) на границе проводящей среды со стороны проводящей среды, *г*) внутри проводящей среды?

3. Можно ли воспользоваться методом зеркальных изображений для расчета поля заряженного тела конечных размеров, например проводящего шара, расположенного над плоской поверхностью проводящей среды?

4. Следует ли при применении метода зеркальных изображений сделать оговорку о том, что заряженные провода должны быть линейными?

5. (О) Почему только при целом n, определяющем угол $\alpha = \pi/n$ (рис. В24.5), возможно применение метода зеркальных изображений? Какой путь расчета поля возможен при $\alpha \neq \pi/n$?

6. Сколько зеркально изображенных проводов должно быть учтено при расчете поля заряженного провода, расположенного внутри прямого ($\alpha = \pi/2$) угла, образованного проводящими поверхностями? Каково число зеркально изображенных проводов при $\alpha = \pi/n$, если n — целое число? (см. рис. В24.5)

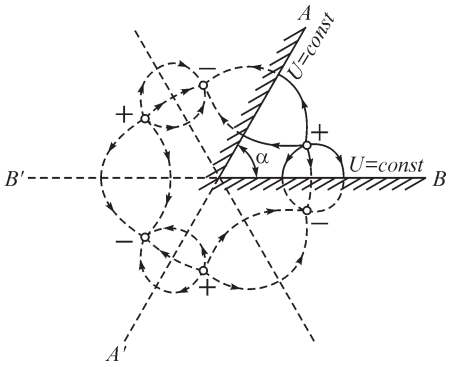

Рис. В24.5

7. (О) Заряженный прямолинейный провод расположен в диэлектрике параллельно плоскости, на которой задано условие $\dfrac{\partial U}{\partial n} = 0$. Можно ли применить метод зеркальных изображений для расчета поля в диэлектрике?

8. (О) На одной стороне ($x = 0$) прямого двугранного угла задано условие $U = 0$, а на другой ($y = 0$) — $\dfrac{\partial U}{\partial n} = 0$. Можно ли применить метод зеркальных изображений для расчета поля в диэлектрике?

УПРАЖНЕНИЯ

1. (Р) Провод радиусом $R = 0{,}5$ см протянут над плоской поверхностью земли на высоте $h = 13$ м. Определите плотность заряда на поверхности земли при напряжении между проводом и землей $U = 110$ кВ. Найдите отношение h/R, при котором погрешность расчета поля на поверхности земли не превышает 1,0 % при допущении, что радиус провода $R \approx 0$.

2. (Р) Рассчитайте, пользуясь методом зеркальных изображений, силу, действующую на подвешенный в воздухе на высоте $h = 0{,}5$ м над плоской поверхностью земли провод, линейная плотность заряда которого равна 10^{-9} Кл/м. Диэлектрическую проницаемость земли примите равной $\varepsilon_з = \varepsilon_i$, $\gamma_з = 0$.

3. В пространстве ($\varepsilon = \varepsilon_0$) между двумя проводящими параллельными плоскими поверхностями, потенциалы которых равны нулю, расположен точечный заряд q. Пользуясь методом зеркальных изображений, укажите знаки и расположение изображенных электрических зарядов. Рассчитайте потенциал и напряженность поля при расстоянии между поверхностями, равном d, и между зарядом и одной из поверхностей, равном h.

4. Укажите знаки и расположение зеркально изображенных зарядов в условиях предыдущей задачи, принимая для одной из поверхностей $U = 0$, а для другой $-\dfrac{\partial U}{\partial n} = 0$.

24.9. Метод разделения переменных

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. (О) Задача расчета поля в прямоугольной области решена методом разделения переменных при условиях $U = 0$ на сторонах $x = 0$ и $x = a$, $U = 0$ при $y = 0$ и $U = U_0$ при $y = b$ (см. рис. 24.35). Изменятся ли собственные числа и собственные функции задачи при задании условий $U = 0$ на сторонах $y = 0$, $y = b$, $U = 0$ при $x = 0$, $U = U_0$ при $x = a$?

2. (Р) На сторонах прямоугольной области задано условие вида $\partial U/\partial n = f$, где функция f различна на каждой из сторон. Единственное ли решение имеет задача расчета потенциала внутри области в такой постановке? Запишите интегральное условие, которому должна удовлетворять функция f.

3. (Р) На каждой из сторон прямоугольной области задано некоторое распределение потенциала. Предложите способ расчета поля внутри области на основе методов наложения и разделения переменных.

4. (Р) Прямолинейный весьма длинный провод с линейной плотностью заряда τ расположен внутри прямоугольного проводящего канала, потенциал стенок ко-

торого равен нулю. Предложите основанный на методах наложения и разделения переменных способ расчета поля в канале.

5. (Р) На цилиндрической поверхности радиусом R потенциал равен $U(R, \alpha) = U_m \sin k\alpha$. Пользуясь методом разделения переменных, решите уравнение Лапласа $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2}=0$ и найдите потенциал и напряженность поля в областях *а*) $0 \le r \le R$, *б*) $r \ge R$.

24.10. Методы сеток и конечных элементов

ВОПРОСЫ

1. При расчете двумерного поля методом сеток образующие систему алгебраические уравнения содержат в простейшем случае по пять слагаемых. Может ли в каждое уравнение входить большее число слагаемых? Чем определяется это число?

2. Каких элементов матрицы коэффициентов системы сеточных уравнений больше: равных нулю или отличных от нуля?

3. Чему равно отношение числа ненулевых элементов матрицы коэффициентов системы сеточных уравнений к полному числу элементов при простейшей разностной аппроксимации уравнения Лапласа, если порядок системы уравнений равен n?

4. Из полного числа N узлов расчетной области n узлов лежит на ее границе, причем в $n/2$ граничных узлах задан потенциал, а в $n/2$ узлах — его нормальная производная. Каков порядок системы алгебраических уравнений, которыми на этой сетке аппроксимируется уравнение Лапласа?

5. (О) Какой смысл имеет входящий в функционал энергии интеграл $\oint_s U\frac{\partial U}{\partial n}ds$?

6. (О) Сколько узлов должен иметь треугольный элемент при квадратичной интерполяции потенциала внутри его?

7. (О) Сколько узлов должен иметь тетраэдр при *а*) линейной, *б*) квадратичной интерполяции потенциала внутри его?

8. (О) Область разбита на плоские треугольные элементы. Сохраняет ли в области непрерывность потенциал и составляющие вектора напряженности поля при *а*) линейной, *б*) квадратичной интерполяции потенциала?

9. (О) Узел с номером j является общим для m треугольных элементов. Сколько потенциалов входит в уравнение, составленное для этого узла, при линейной интерполяции потенциала внутри элементов?

25.1. Емкость между круглыми цилиндрами

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. (О) Изменится ли емкость между проводящими цилиндрами, если внутри одного из них образовать полость и заполнить ее средой с диэлектрической проницаемостью ε?

2. (О) Имеет ли смысл емкость уединенного прямолинейного бесконечно длинного провода радиусом R?

3. (О) Имеет ли смысл емкость между двумя бесконечно тонкими прямолинейными бесконечно длинными проводами?

4. (О) Можно ли ввести понятие емкости уединенного тела с диэлектрической проницаемостью ε, расположенного в воздухе либо в другом диэлектрике с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_1 \neq \varepsilon$?

5. (О) Объясните, почему емкость круглого цилиндра длиной l относительно плоскости (рис. В25.1) в два раза превышает емкость между двумя цилиндрами того же радиуса, расстояние между осями которых равно $2h$. Какую цепную аналогию можно использовать для объяснения?

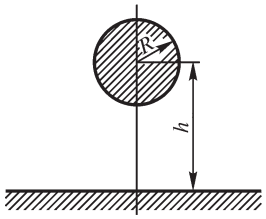

Рис. В25.1

6. Постройте кривую зависимости емкости между несоосными охватывающими друг друга круглыми цилиндрами длиной l, от расстояния D между их осями. Определите величину D, при которой емкость между цилиндрами принимает наименьшее значение.

7. (О) Радиусы R_1, R_2 сечений проводов двухпроводной линии значительно меньше расстояния D между их осями. Получите выражение для расчета емкости между проводами на основе метода наложения при расчете разности потенциалов проводов.

8. Получите выражение для емкости круглого цилиндрического провода длиной l и радиусом R, протянутого параллельно плоской поверхности земли на расстоянии $h \gg R$, используя методы зеркальных изображений и наложения.

9. (О) Можно ли определить емкость на единицу длины бесконечно длинного прямолинейного провода, подвешенного над плоской поверхностью тела, диэлектрическая проницаемость которого принята равной нулю?

25.2. Потенциальные коэффициенты, коэффициенты электростатической индукции и частичные емкости в системе тел

ВОПРОСЫ

1. Возрастает ли потенциал заряженного проводящего тела с зарядом $q > 0$ при внесении в его поле другого проводящего тела с зарядом *а*) $q_1 > 0$, *б*) $q_1 < 0$, *в*) $q_1 = 0$?

2. (О) Зависит ли собственный потенциальный коэффициент α_{kk} от *а*) заряда k-го тела, *б*) заряда n-го тела, *в*) взаимного расположения k-го и n-го тела, *г*) взаимного расположения m-го и k-го тела, *д*) диэлектрической проницаемости среды, *е*) размера k-го тела, *ж*) размера n-го тела?

3. (О) Для определения потенциального коэффициента α_{11} в системе двух тел следует, приняв $q_2 = 0$, $q_1 \neq 0$, найти потенциал U_1 первого тела. Следует ли при

этом удалить второе тело либо можно оставить его незаряженным в поле заряда первого тела?

4. (О) Имеется несколько проводящих тел. Изменится ли потенциальный коэффициент α_{kk} k-го тела при дополнении системы еще одним проводящим телом? Изменятся ли при этом взаимные потенциальные коэффициенты α_{km} и α_{mk}?

5. (О) Два проводящих тела медленно приближаются друг к другу. Как изменяются потенциальные коэффициенты α_{11}, α_{12}, α_{22}?

6. Равен ли собственный коэффициент электростатической индукции β_{kk} емкости C_k k-го тела?

7. (О) Каков знак собственного потенциального коэффициента α_{kk}? Взаимного потенциального коэффициента α_{kn}?

8. Справедливо ли неравенство $\beta_{kk} > \left|\sum_i \beta_{ki}\right|$, $i \neq k$, т. е. имеет ли место диагональное преобладание матрицы коэффициентов электростатической индукции?

9. При какой форме и каком расположении трех тел их взаимные потенциальные коэффициенты равны между собой?

10. Имеет ли смысл собственный потенциальный коэффициент уединенного весьма длинного провода?

11. Весьма длинный провод расположен между двумя параллельными плоскостями, потенциалы которых равны нулю. Имеет ли смысл собственный потенциальный коэффициент провода?

12. Можно ли для нахождения емкости между двумя телами, не являющимися длинными параллельными проводами, применить формулы, выражающие емкость двух проводов через потенциальные коэффициенты?

УПРАЖНЕНИЯ

1. Экспериментальная установка позволяет измерить все заряды и потенциалы системы проводящих тел. Определите необходимое число измерений для нахождения потенциальных коэффициентов системы *а*) трех тел, *б*) n тел.

2. (Р) Выразите коэффициенты электростатической индукции через потенциальные коэффициенты в системе *а*) двух тел, *б*) трех тел.

3. (Р) Выразите емкость между двумя телами через их *а*) потенциальные коэффициенты, *б*) коэффициенты электростатической индукции, *в*) частичные емкости.

4. (Р) Выразите частичные емкости в системе двух тел через потенциальные коэффициенты.

5. (Р) Получите выражения для расчета потенциальных коэффициентов двух весьма длинных линейных проводов радиусами R, расположенных внутри прямого двугранного угла, на сторонах которого потенциалы равны нулю.

6. Изобразите схему электрической цепи для расчета емкости между двумя проводами многопроводной линии, протянутых над поверхностью земли, при числе

ее проводов, равном трем, четырем, n. Элементами цепи являются собственные и взаимные частичные емкости проводов.

7. Постройте кривую зависимости емкости C двухпроводной линии от расстояния D между осями проводов. К каким значениям стремится емкость C при *а*) сближении проводов, *б*) $D \to \infty$?

25.3. Емкость линий передачи

ВОПРОСЫ

1. Возрастает ли емкость двухпроводной линии при увеличении высоты подвеса проводов над поверхностью земли?

2. Высота подвеса одного из проводов двухпроводной линии над поверхностью земли равна h_1. Расстояние между проводами $D < h_1$. При каком положении второго провода емкость между проводами имеет *а*) наибольшее, *б*) наименьшее значение?

3. Провода двухпроводной линии, протянутые на высоте h над поверхностью земли, проходят далее в ущелье, расстояние от стен которого до проводов также равно h. Как изменяется емкость линии на единицу ее длины? ($\gamma_з = \gamma_{стен} \neq 0$).

4. Могут ли быть комплексными *а*) коэффициенты электростатической индукции, *б*) потенциальные коэффициенты, *в*) частичные емкости?

5. Почему понятие емкости между проводами, введенное в условиях электростатики, можно использовать при анализе процессов в линии, когда в проводах течет электрический ток и их поверхности не эквипотенциальны?

6. Коэффициент, связывающий комплексные заряд провода и напряжение между проводом и землей, является также комплексным: $q = (a + jb)U$. Какова емкость провода относительно земли?

7. Будет ли передаваться активная мощность из одной фазы в другую при расположении проводов линии в вершинах равностороннего треугольника, когда средняя высота подвеса проводов значительно превышает расстояние между ними?

8. К транспонированной трехфазной линии приложена несимметричная система напряжений. Будет ли в такой линии передаваться активная мощность из одной фазы в другую?

УПРАЖНЕНИЯ

1. (Р) При какой высоте h подвеса проводов двухпроводной линии над поверхностью земли погрешность расчета емкости, возникающая при пренебрежении влиянием земли, не превысит значения 1,0 %? Расстояние между проводами равно $D = 1$ м, радиусы проводов $R_1 = R_2 = 1$ см (рис. В25.2).

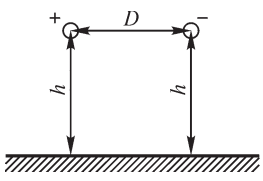

Рис. В25.2

2. Изобразите частичные емкости в системе двух весьма длинных проводов, показанных на рис. В25.2, и выразите емкость линии через частичные емкости.

3. (Р) Рассчитайте емкость воздушной двухпроводной линии, провода которой подвешены над поверхностью земли на высоте $h_1 = 4$ м, $h_2 = 4{,}5$ м при расстоянии $D = 0{,}5$ м между ними. Радиусы проводов $R = 0{,}6$ см.

4. (Р) Рассчитайте емкость воздушных двухпроводных линий (рис. В25.3). Потенциал отмеченных штриховой линией поверхностей равен нулю. Определите погрешность расчета емкости при пренебрежении влиянием проводящей поверхности. Исходные численные данные сведены в таблицу.

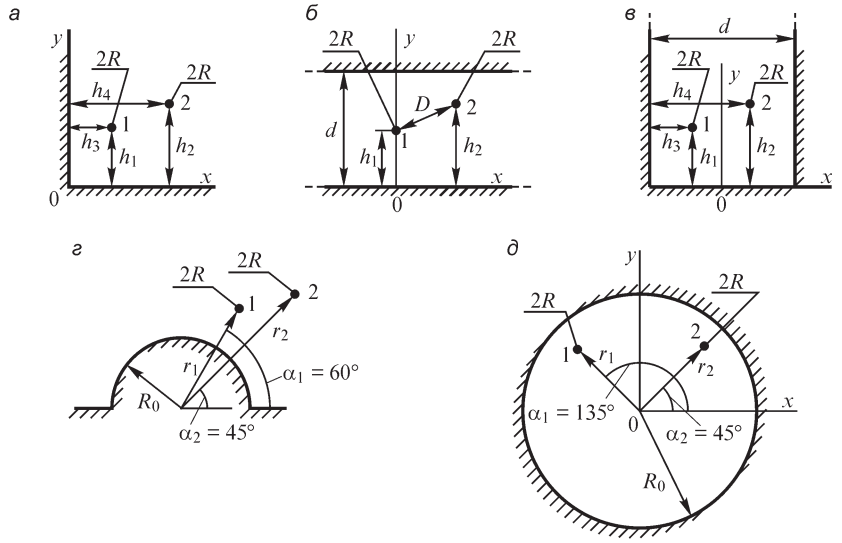

Рис. В25.3

Вариант	h_1, м	h_2, м	h_3, м	h_4, м	d, м	D, м	r_1, м	r_2, см	R, см	R_0, см
а	4	4	5	6	–	–	–	–	2	–
б	0,2	0,3	–	–	1	0,3	–	–	1	–
в	0,2	0,4	0,1	0,3	0,5	–	–	–	0,2	–
г	–	–	–	–	–	–	4	5	2	2
д	–	–	–	–	–	–	0,2	0,4	1	0,5

5. (Р). Один из проводов воздушной двухпроводной линии, протянутой над поверхностью земли, изолирован и не заряжен. Найдите его потенциал, а также напряжение U_{12} между проводами, если потенциал другого провода равен $U = 10$ кВ, радиусы проводов $R_1 = R_2 = 1$ см, расстояние между ними $D = 20$ см, высота подвеса $h = 3$ м. (Потенциал земли равен нулю.)

6. (Р) Наименьшая высота подвеса над землей проводов одинаковых радиусов R трехфазной транспонированной линии равна h (рис. В25.4), расстояние между соседними проводами равно D. При каком расположении проводов емкость линии имеет *а*) наименьшее, *б*) наибольшее значение?

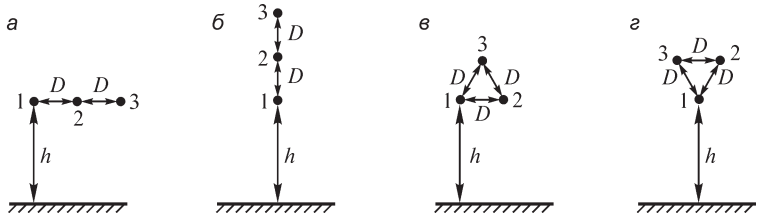

Рис. В25.4

7. (Р) Рассчитайте заряды изображенных на рис. В25.4 проводов трехфазных линий длиной l. Потенциалы проводов $U_1 = -40$ кВ, $U_2 = -40$ кВ, $U_3 = 80$ кВ, их радиусы $R = 10$ мм, расстояние между ними $D = 5$ м, $h = 10$ м ($U_{\text{земли}} = 0$).

8. (Р) Рассчитайте потенциалы и заряды проводов (см. рис. В25.4) линий передачи при потенциале первого провода $U_1 = 110$ кВ, если *а*) второй и третий провода изолированы и не заряжены, *б*) второй провод заземлен, а третий изолирован и не заряжен, *в*) второй и третий провода заземлены. Все размеры указаны в условиях упражнения 7. (Потенциал земли равен нулю.)

9. Выполните предыдущее упражнение при условиях, что напряжение между проводами 1, 2 равно $U_{12} = 110$ кВ и что потенциалы проводов неизвестны.

10. (Р) Провода транспонированной (варианты *а*–*г*) трехфазной линии протянуты вблизи проводящей поверхности сложной формы и равноудалены друг от друга (рис. В25.5). Рассчитайте емкость провода, принимая диэлектрическую проницаемость среды равной ε_0, радиусы проводов R, расстояние между ними D. Необходимые размеры приведены в таблице. Оцените погрешность расчета емкости провода при допущении, что среда однородна.

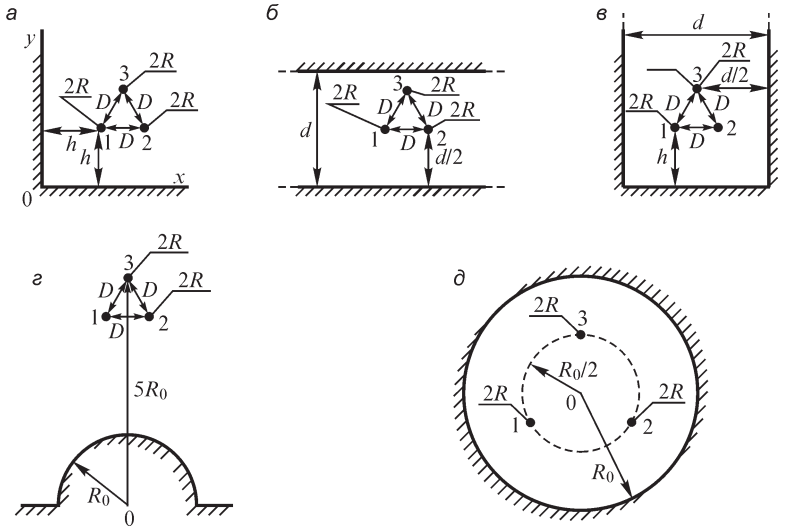

Рис. В25.5

	R, см	D, м	d, м	h, м	R_0, м
а	1,5	2	–	10	–
б	0,5	0,2	1	–	–
в	0,5	0,2	1	1	–
г	1,5	2	–	–	4
д	0,15	–	–	–	0,05

25.4. Метод средних потенциалов

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. (О) Почему трудности расчета емкости тела значительно уменьшаются, если известно распределение плотности заряда на его поверхности?

2. (О) Зависит ли погрешность расчета емкости между двумя прямолинейными параллельными отрезками проводов методом средних потенциалов от длины l отрезков и расстояния h между ними?

3. При каком условии метод средних потенциалов позволяет получить точное решение?

4. Какую форму имеет уединенное проводящее тело, емкость которого, рассчитанная методом средних потенциалов, имеет точное значение?

5. (О) Зависит ли погрешность расчета емкости между двумя сферами методом средних потенциалов от *а*) их радиусов при заданном расстоянии между их центрами, *б*) расстояния между центрами при заданных радиусах сфер?

Глава двадцать шестая

Электрическое поле постоянных токов

26.1. Уравнения электромагнитного поля постоянных токов

В настоящей главе будем рассматривать поле постоянных токов в неподвижных проводниках и проводящих средах. Постоянный ток может протекать только в замкнутой проводящей цепи. Если электрическое сопротивление цепи отлично от нуля, то прохождение тока в ней вызывает падение напряжения. Следовательно, как в диэлектрике, окружающем проводники с постоянным током, так и внутри самих проводников будет существовать не только магнитное, но и электрическое поле. Эти постоянные поля называют с т а ц и о н а р н ы м и.

Первое уравнение Максвелла $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$ в этом случае указывает, что $\boldsymbol{H}$, а следовательно, и $\boldsymbol{B}$, так же как и J, не зависят от времени. Поэтому из второго уравнения Максвелла $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\partial\boldsymbol{B}/\partial t$ следует, что вне источников ЭДС $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = 0$.

Таким образом, уравнения электромагнитного поля для постоянных токов в неподвижной проводящей среде вне источников ЭДС приобретают вид

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J};\quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = 0;\quad \boldsymbol{J} = \gamma\boldsymbol{E};$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E};\quad \boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H};\quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = \rho;\quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0.$$

Условие $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = 0$ свидетельствует, что вне источника ЭДС электрическое поле постоянных токов является, так же как и электростатическое поле, *безвихревым*. Такое поле является *потенциальным*, т. е. для его характеристики может быть введена функция координат $U(x, y, z)$, называемая электрическим потенциалом, причем $\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\,U$.

26.2. Электрическое поле в диэлектрике, окружающем проводники с постоянными токами

Рассмотрим сначала электрическое поле в диэлектрике, окружающем проводники с постоянными токами. Так как при отсутствии токов в диэлектрике следует принять в нем $\rho = 0$, то поле в диэлектрике характеризуется уравнениями:

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = 0,\quad \text{т. е.}\quad \boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\,U;\quad \boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E};\quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = 0.$$

Для однородной среды, когда $\varepsilon = \mathrm{const}$, эти уравнения дают $\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = 0$ или $\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,U = 0$, т. е. потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа.

Таким образом, в самом диэлектрике такое поле ничем не отличается от электростатического. Однако граничные условия на поверхности проводников уже не соответствуют тем, которые имеют место в электростатике. В электростатической задаче поверхность каждого проводника является поверхностью равного потенциала. При прохождении по проводнику электрического тока в проводнике возникает падение потенциала, и, следовательно, поверхность проводника уже не будет равнопотенциальной. Линии напряженности электрического поля в диэлектрике подходят к поверхности проводника не под прямым углом, так как на поверхности проводника появляется касательная составляющая напря-

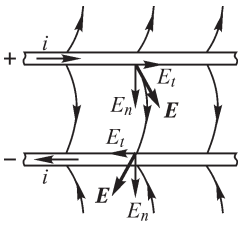

Рис. 26.1

женности поля в направлении линий тока. На рис. 26.1 показан характер линий напряженности электрического поля около проводов линии передачи. С принципиальной точки зрения указанное обстоятельство существенно осложняет расчет поля, однако практически во многих случаях его можно не учитывать, так как обычно падение напряжения вдоль проводников на длине, сравнимой с расстоянием между проводниками, ничтожно мало по сравнению с разностью потенциалов проводников.

В качестве примера сравним между собой касательную E_t и нормальную E_n — составляющие вектора $\boldsymbol{E}$ в диэлектрике у поверхности проводов линии передачи (см. рис. 26.1). Касательная составляющая представляет собой падение напряжения, отнесенное к единице длины провода, и может быть определена из выражения $E_t = J/\gamma$. Если принять для медных проводов $\gamma = 5{,}8 \cdot 10^7$ См/м и $J = 5 \cdot 10^6$ А/м^2, получим $E_t = 0{,}086$ В/м. Нормальная составляющая зависит от напряжения u между проводами и расстояния D между ними. Так как поле между проводами неоднородно и наиболее сильное поле сосредоточено около проводов, то $E_n > u/D$. Даже для проводов линии низкого напряжения, проложенных на значительном расстоянии друг от друга, как это бывает в сырых помещениях, величина E_n оказывается много больше E_t. Пусть, например, u = 100 В и D = 10 см. При этом $E_n > 1000$ В/м и, следовательно, $E_n/E_t > 10^4$. Для линий высокого напряжения величина E_n близка к критическому градиенту потенциала для воздуха, т. е. имеет порядок $E_n \approx 30$ кВ/см $= 3 \cdot 10^6$ В/м. Следовательно, для таких линий $E_n/E_t \approx 3{,}5 \cdot 10^7$.

Полученные цифры показывают, что составляющая E_t ничтожно мала по сравнению с E_n, и при рассмотрении поля около проводов ею можно пренебречь без опасения внести этим сколь-нибудь заметную ошибку. В таком случае граничные условия на поверхности проводников оказываются тождественными условиям в электростатике. Поэтому при рассмотрении электрического поля в диэлектрике, окружающем проводники с постоянными токами, можно использовать решения, полученные при рассмотрении соответствующих электростатических задач.

26.3. Электрическое поле и поле вектора плотности тока в проводящей среде

Внутри проводников, по которым проходит электрический ток, также существует электрическое поле. Напряженность этого поля в изотропной по отношению к проводимости среде связана с плотностью тока соотношением $\boldsymbol{J} = \gamma \boldsymbol{E}$, которое представляет собой выражение закона Ома в дифференциальной форме.

В изотропной среде направление линий электрического тока всюду совпадает с направлением линий напряженности электрического поля. Если, кроме того, среда однородна (γ = const), то и густота линий тока всюду пропорциональна густоте линий напряженности электрического поля, т. е. картины линий тока и линий напряженности поля подобны друг другу.

Если среда неоднородна в отношении проводимости, то линии тока остаются в ней непрерывными, что следует из принципа непрерывности тока, выражаемого условием $\oint_s \boldsymbol{J}\, d\boldsymbol{s} = 0$ или $\operatorname{div} \boldsymbol{J} = 0$, которое представляет собой обобщенную форму первого закона Кирхгофа соответственно в интегральной и в дифференциальной формах. Но в такой неоднородной среде линии напряженности электрического поля будут прерывными. На поверхности раздела двух сред с различными удельными проводимостями нормальная составляющая вектора напряженности электрического поля изменяется скачкообразно.

Поверхности проводников, являющиеся границами между проводящей средой и диэлектриком, очевидно, образуются совокупностью линий тока, так как нормальная к ним составляющая вектора плотности тока равна нулю.

В настоящей главе будем исследовать пространственное распределение тока в массивных проводящих средах. Поле вектора плотности тока в таких средах, вообще говоря, будет неоднородным, и для вычисления тока i, проходящего сквозь некоторую поверхность s, взятую в проводящей среде, необходимо производить интегрирование $i = \oint_s \boldsymbol{J}\, d\boldsymbol{s}$.

Внутри проводящей среды вне источников ЭДС всюду соблюдается условие $\oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = 0$ или $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0$, что выражает второй закон Кирхгофа соответственно в интегральной и дифференциальной формах в области, где нет источников ЭДС Поле оказывается потенциальным. Поверхности равного электрического потенциала, определяемые уравнением $U(x, y, z) = \text{const}$, пересекаются линиями напряженности электрического поля под прямым углом, а следовательно, в изотропной среде они пересекаются под прямым углом и линиями тока.

Таким образом, электрическое поле и поле вектора плотности тока в проводящей среде вне источников ЭДС характеризуются системой уравнений:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0; \quad \boldsymbol{J} = \gamma \boldsymbol{E}; \quad \operatorname{div} \boldsymbol{J} = 0.$$

Эти уравнения вытекают из приведенной в § 26.1 системы уравнений, причем уравнение $\operatorname{div} \boldsymbol{J} = 0$, как было указано в § 23.5, является следствием уравнения $\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$, так как $\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = 0$.

Вопрос о пространственном распределении тока чрезвычайно важен при рассмотрении многих практических задач, например при исследовании токов в земле, токов в массивных проводниках, токов проводимости в изоляции и т. д.

26.4. Граничные условия на поверхности раздела двух проводящих сред

Установим соотношение между касательными и нормальными составляющими векторов напряженности электрического поля и плотности электрического тока на поверхности раздела двух проводников с различными удельными электрическими проводимостями γ_1 и γ_2 (рис. 26.2)

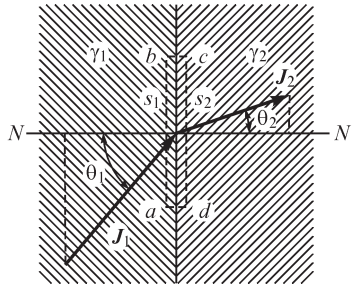

Рис. 26.2

Вследствие выполнения уравнений $\oint_l \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} = 0$, $\oint_s \boldsymbol{J}_{\text{пр}}\,d\boldsymbol{s} = 0$, $\boldsymbol{J}_{\text{пр}} = \gamma \boldsymbol{E}$ можем (см. § 23.8) принять $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{J}_{\text{пр}}$, $a_1 = \gamma_1$, $a_2 = \gamma_2$ и на основании условий (*), (**) из § 23.8 записать соотношения:

$$E_1 \sin\theta_1 = E_2 \sin\theta_2, \quad \boldsymbol{J}_1 \cos\theta_1 = \boldsymbol{J}_2 \cos\theta_2, \quad \frac{\operatorname{tg}\theta_1}{\operatorname{tg}\theta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2},$$

выражающие непрерывность соответствующих составляющих напряженности электрического поля и плотности тока в проводящей среде, а также условие преломления линий тока проводимости.

Во многих практических случаях мы встречаемся с переходом тока из металлических тел в окружающую среду, удельная проводимость которой во много раз меньше удельной проводимости материала этих тел. Такие условия имеют место, например, в случае наличия токов утечки через изоляцию между проводами, находящимися при разных потенциалах. Ток утечки возникает вследствие несовершенства изоляции. Удельная проводимость изоляции во много раз меньше удельной проводимости материала проводов. Например, для кабельной бумаги имеем приблизительно $\gamma \approx 10^{-13}$ См/м, тогда как для меди $\gamma = 58 \cdot 10^6$ См/м, т. е. отношение удельной проводимости меди к удельной проводимости изоляции имеет порядок $6 \cdot 10^{20}$. В качестве другого примера можно указать случай перехода тока в землю через зарытые в землю металлические электроды. Обычно применяют стальные электроды. Удельная проводимость стали приблизительно равна $\gamma \approx 5 \cdot 10^6$ См/м.

Удельная проводимость почвы зависит от влажности почвы и от ее состава. В среднем ее можно считать равной $\gamma \approx 10^{-2}$ См/м. Таким образом, отношение удельной проводимости материала электродов к удельной проводимости почвы имеет порядок $5 \cdot 10^8$.

Во всех этих случаях при рассмотрении поля в среде с малой удельной проводимостью можно пренебречь падением напряжения внутри металлических тел и считать поверхности тел поверхностями равного потенциала.

26.5. Аналогия электрического поля в проводящей среде с электростатическим полем

Между соотношениями, характеризующими стационарное электрическое поле постоянных токов в проводящей среде, и соотношениями, характеризующими электростатическое поле в диэлектрике, можно провести формальную аналогию.

Для электрического поля токов в проводящей среде имеют место соотношения:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = 0; \quad \int_A^B \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} = U_A - U_B; \quad \boldsymbol{J} = \gamma \boldsymbol{E}; \quad \operatorname{div}\boldsymbol{J} = 0; \quad \int_s \boldsymbol{J}\,d\boldsymbol{s} = \Delta i.$$

Они формально совпадут с соотношениями для электростатического поля в диэлектрике:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0; \quad \int_A^B \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = U_A - U_B; \quad \boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}; \quad \operatorname{div} \boldsymbol{D} = 0; \quad \int_s \boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{s} = \Delta q,$$

если в последних заменить вектор электрического смещения $\boldsymbol{D}$ вектором плотности тока $\boldsymbol{J}$, электрический заряд Δq — током Δi и абсолютную диэлектрическую проницаемость ε — удельной проводимостью γ.

В выражении $\int_s \boldsymbol{J}\, d\boldsymbol{s} = \Delta i$ величина Δi есть ток сквозь сечение s трубки тока. Этот ток протекает сквозь любое сечение трубки, в частности в начале трубки, где ток вводится в рассматриваемую проводящую среду из электрода, погруженного в эту среду. В выражении $\int_s \boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{s} = \Delta q$ величина Δq есть заряд на поверхности заряженного тела в начале рассматриваемой трубки электрического смещения, а s — любое сечение этой трубки. Отсюда ясно, что если условия для вектора $\boldsymbol{J} = \gamma \boldsymbol{E}$ на границе данной проводящей среды с удельной проводимостью γ совпадают с условиями для вектора $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$ на границе такой же формы диэлектрика с абсолютной диэлектрической проницаемостью ε, то электрические поля в проводящей среде и в диэлектрике должны быть аналогичны друг другу.

В электростатической задаче границей диэлектрика является поверхность проводящего тела. Эта поверхность есть поверхность равного потенциала, и вектор $\boldsymbol{D}$ к ней нормален. В примерах, рассмотренных в предыдущем параграфе, границей плохо проводящей среды (почвы или несовершенной изоляции) является поверхность проводников. С большой степенью точности эту поверхность можно считать поверхностью равного потенциала и вектор плотности тока $\boldsymbol{J}$ в плохо проводящей среде считать направленным по нормали к ней. На основании изложенного можно утверждать, что картина электрического поля токов (в почве или в изоляции) в этих задачах должна совпадать с картиной поля в соответствующих электростатических задачах.

На этом основан так называемый метод электростатической аналогии, позволяющий в ряде случаев при расчете токов в проводящей среде воспользоваться готовыми решениями соответствующих задач электростатики. Метод электростатической аналогии дает возможность также заменить исследование электростатического поля экспериментальным исследованием поля тока в проводящей среде, о чем будет сказано в § 30.13.

В частности, формулы для электрической проводимости $G = i/U$ сред, в которых протекает ток, могут быть получены из соответствующих формул для емкости $C = q/U$ тел, так как в аналогичных задачах ток i заменяется зарядом q. Электрическая емкость тела или емкость между телами определяется геометрическими параметрами тел и абсолютными диэлектрическими проницаемостями сред, окружающих тела. Поэтому, чтобы получить формулу для G, достаточно заменить в соответствующей формуле для C абсолютные диэлектрические проницаемости ε диэлектриков удельными проводимостями γ проводящих сред. Если проводящая среда и соответственно диэлектрик однородны, то в формулу для проводимости G удельная проводимость γ входит множителем и соответст-

венно в формулу для емкости C абсолютная диэлектрическая проницаемость ε также входит множителем. В таком случае для аналогичных задач имеем

$$\frac{G}{C} = \frac{\gamma}{\varepsilon}.$$

26.6. Ток утечки в кабеле и сопротивление изоляции кабеля

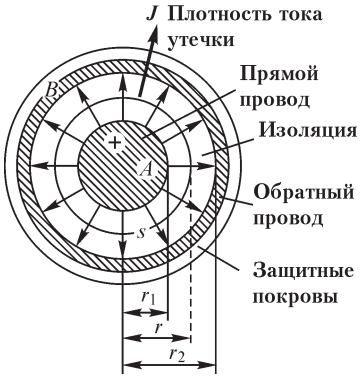

Рис. 26.3

Определим ток утечки i в кабеле, возникающий вследствие несовершенства изоляции. Сечение кабеля изображено на рис. 26.3. Линии напряженности поля и линии тока утечки в изоляции можно считать направленными по радиусам.

Проведем внутри изоляции цилиндрическую поверхность, имеющую радиус r и длину l в направлении оси кабеля. Имеем $i = 2\pi rlJ$ и, следовательно, $E = \dfrac{J}{\gamma} = \dfrac{i}{2\pi rl\gamma}$.

Напряжение u_{AB} между проводами найдем, составляя линейный интеграл напряженности электрического поля вдоль радиуса:

$$u_{AB} = \int_A^B \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = \int_{r_1}^{r_2} E\, dr = \frac{i}{2\pi l\gamma} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Отсюда находим сопротивление R и проводимость G изоляции кабеля:

$$R = \frac{u_{AB}}{i} = \frac{i}{2\pi l\gamma} \ln \frac{r_2}{r_1};$$

$$G = \frac{1}{R} = \frac{2\pi l\gamma}{\ln \dfrac{r_2}{r_1}}.$$

Формулу для проводимости G можно было написать сразу, пользуясь методом электростатической аналогии. Для этого достаточно в формуле для емкости кабеля

$$C = \frac{2\pi l\varepsilon}{\ln \dfrac{r_2}{r_1}},$$

приведенной в § 25.1, п. 5, заменить ε на γ.

26.7. Сопротивление заземления

Для осуществления соединения какой-либо точки электрической цепи с землей зарывают в землю металлические проводники, к которым и присоединяют соответствующую точку цепи. Систему таких зарытых в землю проводников называют з а з е м л и т е л е м. Так, например, при соединении в звезду обмоток высокого

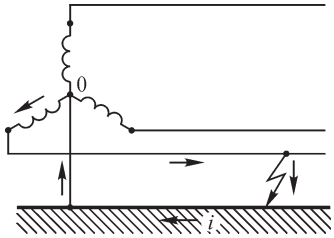

Рис. 26.4

напряжения трехфазного трансформатора, питающего линию передачи, обычно заземляют непосредственно или через некоторое сопротивление нейтральную точку трансформатора (рис. 26.4). Этим достигается то, что напряжения проводов линии по отношению к земле при нормальном режиме не могут быть больше фазных напряжений. При повреждении изоляции одного из фазных проводов возникает ток короткого замыкания, проходящий от места повреждения через землю и заземлитель к нейтральной точке трансформатора. Электрический ток, проходя через землю, встречает некоторое сопротивление, называемое *сопротивлением заземления*. По существу, это — сопротивление земли, которое встречает ток при растекании от заземлителя. Вдоль поверхности земли создается падение напряжения, которое вблизи от мест заземления может достигать опасных для жизни человека значений уже на длине шага человека. Поэтому весьма существенно уметь вычислить сопротивление растеканию тока в земле при различных конструкциях заземлителей.

С заземлением отдельных точек цепи встречаемся в цепях как переменного, так и постоянного тока. В приведенном примере в земле протекает переменный ток. Распределение переменного тока в проводящей среде, в принципе, должно отличаться от распределения постоянного тока, так как при переменном токе в контурах, которые можно себе представить в проводящей среде, возникают индуцированные электродвижущие силы, оказывающие влияние на распределение тока. Однако ввиду большого удельного сопротивления земли при вычислении токов вблизи электродов можно пренебречь, во всяком случае при промышленной частоте, индуцированными электродвижущими силами по сравнению с активным падением напряжения и вести расчет, как при постоянном токе.

Формулы для проводимости $G = i/U$ заземления могут быть написаны на основании метода электростатической аналогии по имеющимся формулам для емкости $C = q/U$ соответственно расположенных тел.

В электростатических задачах обычно равным нулю принимают потенциал бесконечно удаленных точек. В интересующих нас задачах, относящихся к токам в земле, также принимают равным нулю потенциал бесконечно удаленных точек или практически достаточно удаленных от электрода точек. При этом в выражении $G = i/U$ величина U есть потенциал электрода, так же как в выражении $C = q/U$ величина U есть потенциал заряженного тела.

Необходимо еще заметить, что в земле линии тока не уходят в бесконечность, а собираются у другого электрода или, как в примере, показанном на рис. 26.4, у места повреждения изоляции линии. Однако это обстоятельство мало сказывается на распределении тока около данного электрода и на значении соответствующего ему сопротивления заземления, так как основное сопротивление растеканию тока сосредоточено вблизи электрода, где плотность тока в земле имеет наибольшие значения.

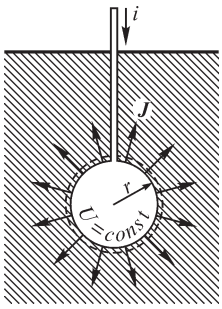

Рис. 26.5

Рассмотрим некоторые примеры. Так как емкость уединенного шара радиуса r равна

$$C = 4\pi\varepsilon r,$$

то проводимость заземления для шарового электрода, погруженного в землю столь глубоко, что можно пренебречь влиянием поверхности земли (рис. 26.5), должна быть равна

$$G = \frac{1}{R} = 4\pi\gamma r,$$

причем R — сопротивление заземления.

Если электрод расположен близко от поверхности земли, то линии тока искажаются, как это видно из рис. 26.6. В этом случае можно воспользоваться методом зеркальных изображении. Линии тока у поверхности земли должны быть к ней касательны. Это условие останется удовлетворенным, если мысленно заполнить воздушное пространство над поверхностью земли проводящей средой с такой же, как у земли, удельной проводимостью и поместить в эту среду электрод, являющийся зеркальным изображением действительного электрода относительно поверхности земли. Ток, выходящий из мнимого электрода, должен быть равен по значению и по знаку току, выходящему из действительного электрода в землю. Проводимость заземления для действительного электрода, очевидно, равна половине проводимости системы, образованной электродом и его зеркальным изображением. Так, например, проводимость для электрода в форме полушария, расположенного у поверхности земли так, как показано на рис. 26.7, равна

$$G = \frac{1}{R} = 2\pi\gamma r.$$

Часто применяют заземлители в виде труб, забитых вертикально в землю (рис. 26.8).

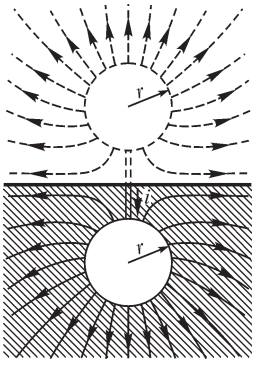

Рис. 26.6

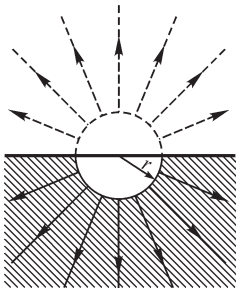

Рис. 26.7

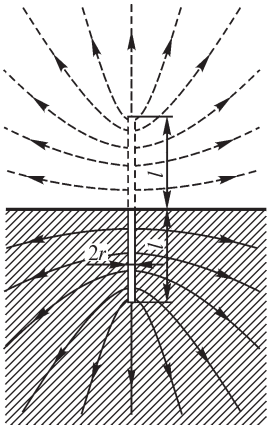

Рис. 26.8

Пусть l — длина трубы и r — ее радиус. Предположим, что один конец трубы находится у самой поверхности земли. Длина трубы вместе с ее зеркальным изображением равна $2l$.

Емкость цилиндра, имеющего длину $2l$ и радиус r, при $2l \gg r$ согласно формуле, приведенной в § 25.6, приближенно равна

$$C \approx \frac{2\pi\varepsilon 2l}{\ln\dfrac{2l}{r}}.$$

Следовательно, проводимость для системы из электрода и его зеркального изображения равна

$$G \approx \frac{4\pi\gamma l}{\ln\dfrac{2l}{r}}.$$

Таким образом, проводимость заземления для электрода в форме вертикальной трубы выражается формулой

$$G = \frac{2\pi\gamma l}{\ln\dfrac{2l}{r}}.$$

Для уменьшения сопротивления заземления заземляющее устройство часто выполняют в виде рядов забитых в землю труб, соединенных между собой металлическими полосами. Расчет проводимости заземления при таком сложном заземлителе может быть выполнен по аналогии с расчетом емкости системы соединенных между собой прямолинейных отрезков проводников. С этой целью с успехом может быть использован метод средних потенциалов, изложенный в § 25.6.

Глава двадцать седьмая

Магнитное поле постоянных токов

27.1. Вихревой характер магнитного поля токов. Скалярный потенциал магнитного поля в области вне токов

Уравнения магнитного поля постоянных токов, как это следует из системы уравнений, приведенных в § 26.1, имеют вид

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}; \quad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}; \quad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0.$$

Первое уравнение свидетельствует о том, что магнитное поле токов является *вихревым*. Следовательно, там, где $J \neq 0$, нельзя указать такую скалярную функцию координат $U_м(x, y, z)$, градиент которой пропорционален вектору $\boldsymbol{H}$, так как из-за тождества rot grad $U_м = 0$ при этом оказалось бы всюду rot $\boldsymbol{H} = 0$.

Иными словами, вихревое поле не является потенциальным.

Однако в той части пространства, где плотность тока равна нулю, имеем rot $\boldsymbol{H} = 0$ и, следовательно, в этой части пространства можно представить $\boldsymbol{H}$ в виде

$$\boldsymbol{H} = -\operatorname{grad} U_м.$$

Величину $U_м$ называют скалярным потенциалом магнитного поля. Индекс «м» ставим, чтобы отличить магнитный потенциал от электрического. Имеем

$$H_x = -\frac{\partial U_м}{\partial x}; \quad H_y = -\frac{\partial U_м}{\partial y}; \quad H_z = -\frac{\partial U_м}{\partial z},$$

и вообще составляющая вектора $\boldsymbol{H}$ по любому направлению равна уменьшению магнитного потенциала, отнесенному к единице длины в этом направлении:

$$H_l = H \cos \alpha = -\frac{\partial U_м}{\partial l},$$

где α — угол между направлением вектора $\boldsymbol{H}$ и направлением, в котором определяется составляющая H_l.

Потенциал одинаков во всех точках поверхности, пересекаемой линиями напряженности поля под прямым углом, так как, перемещаясь по этой поверхности, имеем $\cos \alpha = 0$ и $\partial U_м / \partial l = 0$, т. е. $U_м = \text{const}$. Такую поверхность называют поверхностью равного магнитного потенциала. Ее уравнение имеет вид

$$U_м(x, y, z) = \text{const}.$$

Если обозначить через dn перемещение в сторону вектора $\boldsymbol{H}$ по нормали к поверхности равного потенциала или, что то же, по касательной к линии напряженности поля, то, очевидно, будем иметь

$$\left| \operatorname{grad} U_м \right| = H = -\frac{\partial U_м}{\partial n}.$$

Из сказанного ясно, что пользоваться понятием скалярного магнитного потенциала можно только в той области пространства, где $J = 0$. Однако и в этой части пространства $U_м$ является многозначной функцией. Чтобы показать это, рассмотрим магнитное поле около контура с током (рис. 27.1). Линейный интеграл напряженности магнитного поля, взятый по любому замкнутому контуру, *не охватывающему контура с током*, равен нулю: $\oint \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = 0$. В частности, равен нулю интеграл по пути *AnBmA*, изображенному на рис. 27.1. Следовательно, $\int\limits_{AnB} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = \int\limits_{AmB} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l}$, т. е. интеграл, взятый между двумя заданными точками *A* и *B*, определяется только положением этих точек и не зависит от выбора пути интегрирования между точками при условии, что замкнутые контуры, образованные двумя различными путями интегрирования, не охватывают контуров с токами. При таком условии интеграл

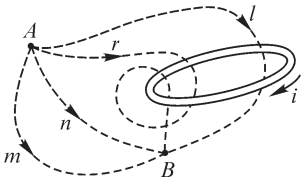

Рис. 27.1

$$\int\limits_{A}^{B} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = \int\limits_{AmB} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = U_{мA} - U_{мB}$$

можно рассматривать как разность магнитных потенциалов $U_{мA}$ и $U_{мB}$ поля в точках *A* и *B*. Если условно принять равным нулю потенциал в некоторой заданной точке *P* ($U_{мP} = 0$), то разность потенциалов в точках *A* и *P* будет равна потенциалу в точке *A*:

$$\int\limits_{A}^{P} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = U_{мA}.$$

Однако если выбрать такой замкнутый путь интегрирования, который охватывает контур тока *i*, например путь *AlBmA* на рис. 27.1, то линейный интеграл напряженности магнитного поля по такому пути уже не равен нулю:

$$\oint\limits_{AlBmA} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = \int\limits_{AlB} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} - \int\limits_{AmB} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = i \neq 0,$$

откуда

$$\int\limits_{AlB} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = \int\limits_{AmB} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} + i = U_{мA} - U_{мB} + i.$$

Путь *ArBmA* охватывает два раза контур с током *i*. Для такого пути имеем $\oint\limits_{ArBmA} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = 2i$ и, следовательно,

$$\int\limits_{ArB} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = \int\limits_{AmB} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} + 2i = U_{мA} - U_{мB} + 2i,$$

и вообще интеграл по некоторому пути *AxB* может отличаться от интеграла по пути *AmB* на *ki*, где *k* — целое число, если все пути проходят вне области пространства, занятой самими проводниками с током:

$$\int_{AxB} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = U_{мA} - U_{мB} + ki.$$

Совместив точку B с точкой P, в которой потенциал принят равным нулю, получаем

$$\int_{AxP} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = U_{мA} + ki.$$

Таким образом, скалярный магнитный потенциал оказывается величиной *многозначной*.

27.2. Векторный потенциал магнитного поля токов

Вектор магнитной индукции можно представить в виде вихря некоторого вспомогательного вектора $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A},$$

причем вектор $\boldsymbol{A}$ при заданном распределении в пространстве электрических токов является функцией координат.

Вектор $\boldsymbol{A}$ носит название векторного потенциала магнитного поля. Определим его так, чтобы уравнения магнитного поля

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}; \quad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}; \quad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$$

были удовлетворены во всем пространстве — и там, где отсутствуют токи, и там, где $J \neq 0$.

Условие $\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$, выражающее принцип непрерывности магнитного потока, удовлетворяется тождественно, если $\boldsymbol{B}$ представить через $\boldsymbol{A}$ в виде $\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$, так как всегда $\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = 0$ (см. § 23.5).

Найдем выражение векторного потенциала, определяющее его по заданному распределению токов так, чтобы были удовлетворены остальные два уравнения:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}.$$

Ограничимся рассмотрением однородной среды. Умножим правую и левую части первого уравнения на абсолютную магнитную проницаемость μ среды. Получим

$$\mu \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \mu \boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{J},$$

и так как $\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$, то имеем

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \mu \boldsymbol{J}.$$

В частности, для проекции на ось OX можем написать

$$\operatorname{rot}_x (\operatorname{rot} \mathbf{A}) = \mu J_x.$$

Развернем левую часть этого уравнения. Имеем

$$\operatorname{rot}_x (\operatorname{rot} \boldsymbol{A}) = \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{rot}_z \boldsymbol{A} - \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{rot}_y \boldsymbol{A} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial A_y}{\partial y} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Прибавим к этому выражению величину $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial A_x}{\partial x}$ и вычтем равную ей величину $\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}$. Получим

$$\operatorname{rot}_x(\operatorname{rot}\boldsymbol{A}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{div}\boldsymbol{A}-\nabla^2 A_x.$$

Подчиним вектор $\boldsymbol{A}$ условию $\operatorname{div}\boldsymbol{A}=0$, т. е. будем считать, что поле вектора $\boldsymbol{A}$ не имеет источников. Действительно, при условии $\operatorname{div}\boldsymbol{A}\neq 0$ всегда можно принять $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}'+\boldsymbol{A}''$, причем $\operatorname{div}\boldsymbol{A}'=0$ и $\operatorname{div}\boldsymbol{A}''\neq 0$. Поле составляющей $\boldsymbol{A}''$ как созданное источниками является потенциальным, и, следовательно, $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}''=0$. Поэтому $\boldsymbol{B}=\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\operatorname{rot}\boldsymbol{A}'$, т. е. наличие составляющей $\boldsymbol{A}''$ не изменяет величину $\boldsymbol{B}$ и можно принять $\boldsymbol{A}''=0$. Окончательно получаем

$$\operatorname{rot}_x(\operatorname{rot}\boldsymbol{A})=-\nabla^2 A_x.$$

Уравнение $\operatorname{rot}_x(\operatorname{rot}\boldsymbol{A})=\mu J_x$ переписывается в виде

$$\nabla^2 A_x=\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}=-\mu J_x.$$

Это есть уравнение Пуассона, оно полностью совпадает с уравнением Пуассона для электрического потенциала (см. § 24.4), если заменить A_x на U и μJ_x на ρ/ε. Поэтому его решение можно написать по аналогии с решением уравнения Пуассона для электрического потенциала. Для электрического потенциала мы имели

$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V\frac{\rho\,dV}{r}.$$

Заменяя U на A_x и ρ/ε на μJ_x, получаем

$$A_x=\frac{\mu}{4\pi}\int_V\frac{J_x dV}{r}.$$

Интегрирование достаточно распространить по всему объему, где $J_x\neq 0$. Величина r — это расстояние от центра элемента объема dV, в котором проекция вектора плотности тока есть J_x, до точки, в которой определяется A_x.

Аналогичным путем нетрудно получить выражения для других составляющих векторного потенциала. Окончательно будем иметь

$$A_x=\frac{\mu}{4\pi}\int_V\frac{J_x dV}{r};\quad A_y=\frac{\mu}{4\pi}\int_V\frac{J_y dV}{r};\quad A_z=\frac{\mu}{4\pi}\int_V\frac{J_z dV}{r};$$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}A_x+\boldsymbol{j}A_y+\boldsymbol{k}A_z=\frac{\mu}{4\pi}\int_V\frac{(\boldsymbol{i}J_x+\boldsymbol{j}J_y+\boldsymbol{k}J_z)\,dV}{r},$$

что можно записать кратко:

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \boldsymbol{J}\,\frac{dV}{r},$$

понимая здесь интегрирование как геометрическое суммирование.

Полученные выражения, служащие для определения составляющих векторного потенциала по заданному распределению тока в пространстве, справедливы всюду, в частности и там, где $J \neq 0$. Они пригодны при условии, что токи существуют в ограниченном объеме пространства, а это физически всегда и имеет место. При этом значение векторного потенциала убывает по мере удаления в бесконечность от области, занятой токами, не медленнее, чем $1/r$, что нетрудно усмотреть из последнего выражения. Так как составляющие вектора $\boldsymbol{B}$ выражаются через пространственные производные от составляющих вектора $\boldsymbol{A}$, то значение магнитной индукции B, а следовательно, и значение напряженности поля H убывают в бесконечности не медленнее, чем $1/r^2$.

Выражение для $\boldsymbol{A}$ может быть упрощено, если токи протекают по контурам из линейных проводников, поперечные размеры сечений которых весьма малы по сравнению с длиной контуров и по сравнению с расстояниями от проводников до точек, в которых определяется $\boldsymbol{A}$. Представим элемент объема проводника в виде $dV = d\boldsymbol{l}\,d\boldsymbol{s}$, где $d\boldsymbol{s}$ — элемент поверхности s поперечного сечения и $d\boldsymbol{l}$ — элемент длины l проводника.

Выберем направления $d\boldsymbol{l}$ всюду так, чтобы они совпадали с направлениями вектора плотности тока $\boldsymbol{J}$, т. е. разобьем проводник на отрезки трубок тока. При этом $\boldsymbol{J}\,(d\boldsymbol{s}\,d\boldsymbol{l}) = (\boldsymbol{J}\,d\boldsymbol{s})\,d\boldsymbol{l}$ и

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu}{4\pi}\oint_l\int_s \boldsymbol{J}\,\frac{(d\boldsymbol{s}\,d\boldsymbol{l})}{r} = \frac{\mu}{4\pi}\oint_l\int_s (\boldsymbol{J}\,d\boldsymbol{s})\,\frac{d\boldsymbol{l}}{r}.$$

Но при соблюдении вышеуказанных условий можно считать, что расстояния r до точки, в которой определяется $\boldsymbol{A}$, одинаковы для всех элементов ds данного сечения s. Точно так же можно считать одинаковыми все отрезки dl между двумя поперечными сечениями. Следовательно, можно написать

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu}{4\pi}\oint_l \frac{d\boldsymbol{l}}{r}\int_s \boldsymbol{J}\,d\boldsymbol{s} = \frac{\mu}{4\pi}\oint_l \frac{i\,d\boldsymbol{l}}{r},$$

где $i = \int_s \boldsymbol{J}\,d\boldsymbol{s}$ — ток в проводнике.

27.3. Метод приведения вихревого магнитного поля к безвихревому

Метод приведения вихревого магнитного поля к безвихревому основан на разложении вектора напряженности $\boldsymbol{H}$ магнитного поля на вихревую $\boldsymbol{H}_\text{в}$ и безвихревую $\boldsymbol{H}_\text{р}$ составляющие, т. е. на представлении напряженности магнитного поля в виде суммы $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_\text{р} + \boldsymbol{H}_\text{в}$. При этом допускается, что вектор плотности тока $\boldsymbol{J}$ порождает только неизвестную напряженность $\boldsymbol{H}_\text{в}$, которая и определяет вихревую часть магнитного поля т. е. $\operatorname{rot}\boldsymbol{H}_\text{в} = \boldsymbol{J}$. Основой метода приведения вихревого

магнитного поля к безвихревому является возможность раздельного расчета вихревой составляющей, который может быть выполнен более простыми способами. Так как величина div $\boldsymbol{H}_{в}$ не задана, то уравнение rot $\boldsymbol{H}_{в} = \boldsymbol{J}$ имеет множество не зависящих от магнитных свойств вещества решений. По этой причине уравнение rot $\boldsymbol{H}_{в} = \boldsymbol{J}$ может быть решено для случая однородной среды.

Поскольку div $\boldsymbol{J} = 0$ и $\boldsymbol{J} = \text{rot}\, \boldsymbol{H}_{в}$, то для выделенной безвихревой составляющей, равной $\boldsymbol{H}_{р} = \boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}_{в}$, справедливо уравнение

$$\text{rot}\,(\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}_{в}) = \text{rot}\, \boldsymbol{H}_{р} = 0,\ \boldsymbol{H}_{р} = -\text{grad}\, U_{м},$$

т. е. $\boldsymbol{H}_{р}$ можно представить в виде градиента скалярного магнитного потенциала $U_{м}$ и напряженность магнитного поля записать в виде

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_{в} - \text{grad}\, U_{м}.$$

В этом случае уравнение div $\boldsymbol{B} = 0$ можно записать как div $\mu\,(\boldsymbol{H}_{в} - \text{grad}\, U_{м}) = 0$, откуда

$$\text{div}\, \mu\, \text{grad}\, U_{м} = \text{div}\, \mu\, \boldsymbol{H}_{в}, \qquad (*)$$

в котором неизвестными являются $U_{м}$ и $\boldsymbol{H}_{в}$. В наиболее общем случае трехмерного магнитного поля должны быть определены четыре скалярные функции — три составляющие $\boldsymbol{H}_{в}$ и скалярный магнитный потенциал $U_{м}$. В уравнении (*) задающим для расчета $U_{м}$ является $\boldsymbol{H}_{в}$. Поэтому прежде всего должно быть найдено решение уравнения rot $\boldsymbol{H}_{в} = \boldsymbol{J}$.

Возможность выбора произвольного распределения div $\boldsymbol{H}_{в}$ является существенным преимуществом метода преобразования вихревого магнитного поля в безвихревое. Появляется возможность выбирать из множества решений наиболее оптимальное. Одним из способов расчета величины $\boldsymbol{H}_{в}$ является использование закона Био—Савара:

$$\boldsymbol{H}_{в} = \frac{1}{4\pi}\int_{V} \frac{\boldsymbol{J}\boldsymbol{r}}{r^{3}}\, dV,$$

где объем V является односвязной областью с токами. При помощи этого выражения величина $\boldsymbol{H}_{в}$ может быть рассчитана во всех точках проводников с токами. Оговорка относительно односвязности объема интегрирования при вычислении вихревой составляющей $\boldsymbol{H}_{в}$ искомого поля связана с тем обстоятельством, что объем может занимать не только часть пространства, где протекает электрический ток, но и часть, где ток отсутствует. Интеграл $\oint_{l} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l}$ по контуру, охватывающему ток, равен этому току, тогда как интеграл $-\oint_{l} \nabla U_{м}\, d\boldsymbol{l}$ равен нулю всегда. Это противоречие устраняется, если область интегрирования является односвязной.

Для обеспечения односвязности области интегрирования приходится вводить непроницаемые для обхода тока поверхности. Таковой в случае изображенного на рис. 27.1 контура с током может быть любая поверхность, натянутая на произвольный контур, образованный линией тока, лежащей на поверхности проводника.

Из аналогии уравнений для скалярного потенциала div ε grad $U = -\rho$ электростатического поля и для скалярного магнитного потенциала div μ grad $U_м$ = div μ $\boldsymbol{H}_в$ следует, что величину – div μ $\boldsymbol{H}_в$ можно рассматривать как объемную плотность $\rho_м = -$div μ $\boldsymbol{H}_в$ фиктивного магнитного заряда m, являющегося формально введенной расчетной величиной. Из этой аналогии вытекает, что соотношению $-\oint_s \varepsilon \operatorname{grad} U_м \, d\boldsymbol{s} = q$ соответствует аналогичное соотношение $-\oint_s \mu \operatorname{grad} U_м \, d\boldsymbol{s} = m$.

В однородной среде с магнитной проницаемостью μ скалярный магнитный потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона div grad $U_м$= div $\boldsymbol{H}_в$= – $\rho_м/\mu$, решение которого в силу сказанного выше можно записать как

$$\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}_в = \frac{1}{4\pi\mu}\int_V \frac{\rho_м \boldsymbol{r}}{r^3}\, dV,$$

и получить выражение для искомой напряженности магнитного поля в виде

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{4\pi\mu}\int_V \frac{\rho_м \boldsymbol{r}}{r^3}\, dV + \boldsymbol{H}_в.$$

В качестве примера рассмотрим случай приведения вихревого магнитного поля тороидального с внутренним радиусом R_1 и наружным радиусом R_2 проводника высоты h с постоянным током плотностью $\boldsymbol{J}$ (рис. 27.2, *а*).

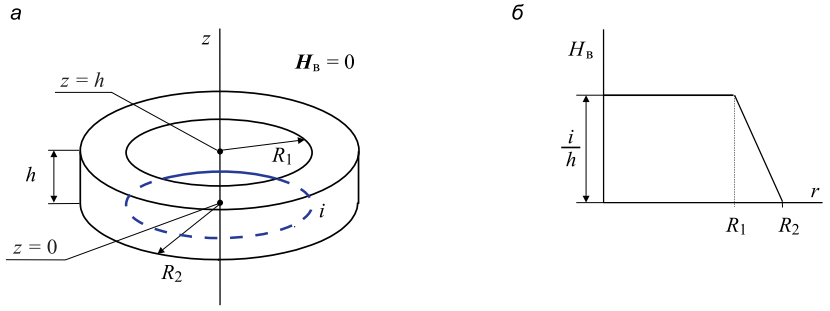

Рис. 27.2

Примем магнитную проницаемость μ постоянной всюду.

Ограничим односвязную область с током нижней (с координатой $z = 0$), верхней (с координатой $z = h$) и боковой поверхностями цилиндра радиусом R_2. Это означает, что $\boldsymbol{H}_в = 0$ всюду вне образованного этими поверхностями объема. В цилиндрической системе координат вектор $\boldsymbol{J}$ имеет составляющую J_α. Поскольку rot $\boldsymbol{H}_в = \boldsymbol{J}$, то при $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{j}\, J_\alpha$ можно оперировать единственной составляющей $H_в = H_{вz}$. Тогда для $H_в$ имеем

$$-\frac{dH_в}{dr} = J_\alpha, \text{ или } H_в(r) = -\int_{R_2}^{r} J_\alpha\, dr = (R_2 - r)J_\alpha,$$

так что $H_в(r) = (R_2 - r)\, J_\alpha$ при $R_1 < r < R_2$ и $H_в(r) = (R_2 - R_1)\, J_\alpha$ при $0 < r < R_1$.

Зависимость $H_B(r)$ изображена на рис. 27.2, *б*.

Пусть ток направлен таким образом, что положительное направление вектора $\boldsymbol{H}_{\text{в}}$ совпадает с таковым для оси z. При этом $H_{\text{в}}$ скачкообразно меняется на величину $H_{\text{в}}$ на поверхности $z = 0$ и на величину $-H_{\text{в}}$ на поверхности $z = h$. В соответствии с условием $\operatorname{div} \mu \boldsymbol{H}_{\text{в}} = \mu \dfrac{\partial H_{\text{вz}}}{\partial z} = -\rho_{\text{м}}$ на этих поверхностях появятся магнитные заряды: $-m$ на нижней поверхности и $+m$ на верхней, тогда как во всех остальных точках области магнитных зарядов не будет. Хотя объемная плотность магнитных зарядов на указанных поверхностях обращается в бесконечность, их поверхностная плотность конечна и равна $\sigma_{\text{м}}(r) = -\mu H_{\text{в}}(r) < 0$ на нижней и $\sigma_{\text{м}}(r) = = +\mu H_{\text{в}}(r) > 0$ на верхней поверхности.

Найденные магнитные заряды полностью определяют магнитное поле во всех точках области, где $\boldsymbol{H}_{\text{в}} = 0$, т. е. там, где его можно описать с помощью скалярного магнитного потенциала. В той же части пространства, в которой присутствует вихревая составляющая $H_{\text{в}}$, составляющие напряженности магнитного поля равны $H_r = -\dfrac{\partial U_{\text{м}}}{\partial r}$, $H_\alpha = -\dfrac{\partial U_{\text{м}}}{r \partial \alpha}$, $H_z = H_{\text{в}} - \dfrac{\partial U_{\text{м}}}{\partial z}$.

27.4. Выражение магнитного потока и энергии магнитного поля через векторный потенциал

Установим связь между магнитным потоком Ф сквозь некоторую поверхность s и векторным потенциалом $\boldsymbol{A}$ магнитного поля. Имеем

$$\Phi = \int_s \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{s} = \int_s \operatorname{rot} \boldsymbol{A} d\boldsymbol{s}.$$

Согласно теореме Стокса, $\int_s \operatorname{rot} \boldsymbol{A} d\boldsymbol{s} = \oint_l \boldsymbol{A} d\boldsymbol{l}$. Следовательно,

$$\Phi = \oint_l \boldsymbol{A} d\boldsymbol{l}.$$

Таким образом, *магнитный поток сквозь поверхность s равен линейному интегралу векторного потенциала по замкнутому контуру, ограничивающему эту поверхность*.

Для вычисления магнитного потока через вектор магнитной индукции при помощи интеграла $\int_s \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{s}$ необходимо определить вектор $\boldsymbol{B}$ во всех точках поверхности s. При вычислении магнитного потока через векторный потенциал $\boldsymbol{A}$ достаточно знать последний только на контуре, ограничивающем эту поверхность. Интегрирование по поверхности заменяется интегрированием по контуру, что во многих случаях оказывается весьма полезным.

Вычисление энергии магнитного поля в объеме на основе выражения $W_{\text{м}} = \dfrac{1}{2}\int_V \boldsymbol{H}\boldsymbol{B}\, dV$ сопряжено с большими затруднениями, так как необходимо рассчитать напряженность $\boldsymbol{H}$ и индукцию $\boldsymbol{B}$ магнитного поля во всех точках бесконечного пространства. Вычисление энергии магнитного поля $W_{\text{м}}$ можно упро-

стить, если преобразовать интеграл по неограниченному объему V в интеграл по объему V_J, в котором существует создающий магнитное поле электрический ток плотностью $\boldsymbol{J}$.

Для такого преобразования воспользуемся соотношением $\boldsymbol{B} = \text{rot}\,\boldsymbol{A}$ и известным из векторной алгебры выражением $\text{div}\,[\boldsymbol{AH}] = \boldsymbol{H}\,\text{rot}\,\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\,\text{rot}\,\boldsymbol{H}$, или $\boldsymbol{H}\,\text{rot}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\,\text{rot}\,\boldsymbol{H} + \text{div}\,[\boldsymbol{AH}]$. После подстановки в формулу для энергии магнитного поля выражения $\boldsymbol{A}\,\text{rot}\,\boldsymbol{H} + \text{div}\,[\boldsymbol{AH}]$ вместо $\boldsymbol{H}\,\text{rot}\,\boldsymbol{A}$ имеем

$$W_{\text{м}} = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{A}\,\text{rot}\,\boldsymbol{H}\,dV + \frac{1}{2}\int_V \text{div}\,[\boldsymbol{AH}]\,dV. \qquad (*)$$

Можно показать, что второе слагаемое в (*) стремится к нулю, поэтому

$$W_{\text{м}} = \frac{1}{2}\int_{V_J} \boldsymbol{AJ}\,dV_J,$$

что позволяет ограничить вычисление интеграла лишь в той части объема, в которой плотность электрического тока не равна нулю.

Оперирование векторным потенциалом облегчает рассмотрение ряда важных положений теории магнитного поля, так же как пользование скалярным потенциалом упрощает рассмотрение многих вопросов электростатики.

27.5. Общая задача расчета магнитного поля постоянных токов

Общей задачей расчета магнитного поля постоянных токов является нахождение вектора магнитной индукции или вектора напряженности магнитного поля во всех точках пространства по заданному распределению тока в пространстве. Эта задача полностью решается нахождением векторного потенциала $\boldsymbol{A}$ как функции координат. При этом магнитная индукция определяется из соотношения $\boldsymbol{B} = \text{rot}\,\boldsymbol{A}$. В общем случае аналитическими методами эту задачу удается решить в ограниченном числе случаев.

Решение задачи расчета трехмерного магнитного поля в неоднородных средах при использовании векторного магнитного потенциала, как правило, связано с большими трудностями. Они определяются, во-первых, тем, что для трехмерного магнитного поля в неоднородных средах за редким исключением невозможно найти аналитическое решение и поэтому приходится прибегать к различным численным методам. Во-вторых, при использовании численных методов наличие трех скалярных составляющих векторного магнитного потенциала и необходимость удовлетворить граничные условия приводит к тому, что системы конечно-разностных уравнений оказываются громоздкими и плохообусловленными.

Интересуясь магнитным полем вне проводников с током, т. е. только в области пространства, где плотность тока равна нулю, имеется возможность воспользоваться также другим методом. В этой области пространства магнитное поле можно охарактеризовать скалярным магнитным потенциалом $U_{\text{м}}$. Вектор напряженности поля при этом определяется из соотношения $\boldsymbol{H} = -\text{grad}\,U_{\text{м}}$.

Методы расчета магнитного поля на основе скалярного магнитного потенциала аналогичны примененным при расчете электростатических полей, и в этом их

большое достоинство. Такая аналогия дает возможность решить ряд задач, относящихся к расчету магнитных полей, путем сопоставления их с соответствующими решениями задач электростатики. Однако существенным недостатком метода является невозможность расчета магнитного поля в областях с токами.

Расчет магнитного поля в областях с токами на основе использования скалярного магнитного потенциала может быть реализован при условии приведения вихревого магнитного поля к безвихревому. При таком подходе можно использовать все численные методы, изложенные в главе 24 для расчета электростатических полей.

27.6. Плоскопараллельное поле

Рассмотрим магнитное поле системы бесконечно длинных параллельных цилиндрических проводников с токами в однородной среде. Ось *OZ* направим параллельно осям проводников. В таком случае линии напряженности поля целиком лежат в плоскостях, параллельных плоскости *XOY*, и картина поля во всех этих плоскостях одинакова, т. е. поле такой системы токов плоскопараллельное. Поверхности равного магнитного потенциала $U_м$ суть цилиндрические поверхности с образующими, параллельными оси *OZ*. Линии равного потенциала в плоскости *XOY* определяются уравнением

$$U_м(x, y) = \text{const}.$$

Интервалы между соседними линиями равного потенциала будем выбирать так, чтобы при переходе от одной линии к другой соблюдалось условие $\Delta U_м = \text{const}$.

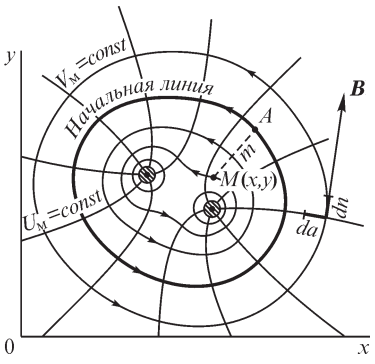

Рис. 27.3

Уравнение линии напряженности поля можно получить на основе соображений, аналогичных тем, которые были использованы для получения уравнения линии напряженности электрического поля. Условимся считать положительными токи, направленные к наблюдателю. Выберем одну линию напряженности поля в качестве начальной. На рис. 27.3 она отмечена жирной линией.

Соединим произвольную точку $M(x, y)$ с некоторой точкой A начальной линии отрезком MmA. Пусть Ψ_H есть поток вектора $\boldsymbol{H}$ сквозь поверхность, которую описал бы отрезок MmA, перемещаясь параллельно самому себе в направлении оси *OZ* и проходя путь l. Условимся рассматривать поток на единицу длины проводов. Введем обозначение $V_м = \Psi_H / l$. Величина $V_м$, называемая ф у н к ц и е й п о т о к а, зависит от положения точки M и, следовательно, является функцией координат этой точки. Для всех точек, лежащих на одной и той же линии напряженности поля, функция $V_м(x, y)$ имеет одинаковое значение. Следовательно, уравнение

$$V_м(x, y) = \text{const},$$

определяющее совокупность таких точек, и является уравнением линии напряженности поля.

Условимся располагать на чертеже линии напряженности поля так, чтобы при переходе от любой линии к соседней всегда получать одно и то же приращение $\Delta V_м$ функции потока.

Обозначив через dn элемент длины линии напряженности поля и через da элемент длины линии равного потенциала, будем иметь всюду $dn \perp da$. Координату n условимся считать возрастающей в направлении вектора $\boldsymbol{H}$. Координату a будем считать возрастающей влево от вектора $\boldsymbol{H}$ для наблюдателя, расположившегося так, что вектор $\boldsymbol{H}$ кажется ему направленным снизу вверх (см. рис. 27.3). Функцию потока будем считать возрастающей в том же направлении, в котором увеличивается a.

Напряженность магнитного поля выражается через $U_м$ и $V_м$ в виде

$$H = -\frac{\partial U_м}{\partial n} = +\frac{\partial V_м}{\partial a}. \qquad (*)$$

Первое равенство уже было приведено ранее. Второе выражение следует из того, что напряженность поля численно равна потоку вектора $\boldsymbol{H}$ сквозь единицу поверхности, нормальной к линиям напряженности поля. Пусть $d_a\Psi_H$ — приращение потока вектора $\boldsymbol{H}$, соответствующее приращению только одной координаты a. Поток $d_a\Psi_H$ проходит через поверхность $l\,da$, нормальную к линиям напряженности поля. Следовательно,

$$H = \frac{d_a\Psi_H}{l\,da} = \frac{d_aV_м}{l\,da} = \frac{\partial V_м}{\partial a}.$$

Выражения (*) совершенно аналогичны соответствующим выражениям в § 24.8, определяющим напряженность электрического поля.

Составляющие вектора $\boldsymbol{H}$ в декартовых координатах выражаются в виде

$$H_x = -\frac{\partial U_м}{\partial x} = +\frac{\partial V_м}{\partial y}; \quad H_y = -\frac{\partial U_м}{\partial y} = -\frac{\partial V_м}{\partial x}. \qquad (**)$$

Эти равенства пишутся на основании тех же соображений, что и соответствующие равенства (**) в § 24.8. Из них путем повторного дифференцирования получаем уравнения:

$$\frac{\partial^2 U_м}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_м}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 V_м}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_м}{\partial y^2} = 0,$$

т. е. обе функции, $U_м$ и $V_м$, удовлетворяют уравнению Лапласа. Необходимо, однако, подчеркнуть, что это имеет место только в области пространства, не занятой электрическим током. Только в этой области возможно выразить напряженность поля в виде градиента скалярного потенциала $U_м$. Такая оговорка не относится к выражениям напряженности поля через функцию потока:

$$H = \frac{\partial V_м}{\partial a}; \quad H_x = \frac{\partial V_м}{\partial y}; \quad H_y = -\frac{\partial V_м}{\partial x},$$

которые по самому их смыслу должны быть *справедливы также и внутри проводников с током*.

Наконец, отметим, что функция потока $V_м$, введенная для характеристики плоскопараллельного поля, весьма просто связана с векторным потенциалом. В рассматриваемом случае векторный потенциал направлен всюду параллельно оси OZ, т. е. $A_x = A_y = 0$; $A_z \neq 0$, так как вектор плотности тока всюду параллелен этой оси. Поэтому имеем

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial y}; \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{\partial A_z}{\partial x}; \quad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0.$$

Умножая равенства (**) на μ и сопоставляя их с последними равенствами, получаем

$$A_z = \mu V_м + C,$$

причем постоянная C может быть отброшена как не имеющая существенного значения.

27.7. Применение функций комплексного переменного

Магнитный потенциал $U_м$ и функция потока $V_м$ в области, не занятой токами, связаны между собой соотношениями (**), совпадающими с уравнениями Коши–Римана, которым должны удовлетворять функции $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$, определяющие вещественную и мнимую части аналитической функции $\zeta = \xi + j\eta = f(z)$ комплексного переменного $z = x + jy$. Поэтому для описания плоскопараллельных магнитных полей вне токов, так же как и при описании плоскопараллельных электрических полей, можем воспользоваться аналитическими функциями комплексного переменного, положив $\xi = V_м$ и $\eta = U_м$, т. е. принимая

$$\zeta = \xi + j\eta = V_м + jU_м = f(z).$$

Составляющие вектора $\boldsymbol{H}$ могут быть получены из уравнений:

$$H_x = -\frac{\partial U_м}{\partial x} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad H_y = -\frac{\partial U_м}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

Модуль вектора $\boldsymbol{H}$ равен

$$H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2} = \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|.$$

27.8. Поле линейных проводов. Принцип соответствия плоскопараллельных электрических и магнитных полей

Рассмотрим функцию $\zeta = K \ln z + C$, где K — вещественная величина и $C = C_1 + j C_2$. Выражая переменную z в полярных координатах, будем иметь $z = re^{j\theta}$ и

$$\zeta = V_м + jU_м = K \ln r + jK\theta + C_1 + jC_2.$$

Уравнение линий напряженности поля можно написать в виде

$$V_м = K \ln r + C_1 = \text{const}, \quad \text{т. е.} \quad r = \text{const}.$$

Уравнение линий равного потенциала имеет вид

$$U_{\text{м}} = K\theta + C_2 = \text{const}, \quad \text{т.е.} \quad \theta = \text{const}.$$

Линии напряженности поля суть окружности с общим центром в начале координат. Линии равного потенциала — радиальные лучи. Такой характер имеет магнитное поле линейного провода с током, проходящего перпендикулярно к плоскости *XOY* через начало координат. Постоянная K определяется из условия, что при обходе вокруг тока i в положительном направлении угол θ изменяется на 2π, а магнитный потенциал получает приращение, равное $\Delta U_{\text{м}} = -i$. Стало быть, $i = -K\,2\pi$, и $K = -i/(2\pi)$. Окончательно получаем выражения для $V_{\text{м}}$ и $U_{\text{м}}$:

$$V_{\text{м}} = -\frac{i}{2\pi}\ln r + C_1; \quad U_{\text{м}} = -\frac{i}{2\pi}\theta + C_2.$$

Чтобы интервал между двумя линиями равного потенциала соответствовал определенному приращению $\Delta U_{\text{м}}$ потенциала, эти линии должны отстоять друг от друга на равные углы $\Delta\theta$.

Для того чтобы линии напряженности поля делили поле на трубки равного потока, необходимо соблюсти для двух соседних, ν-й и $(\nu + 1)$-й, линий условие

$$V_{\text{м}} = -\frac{i}{2\pi}(\ln r_{\nu+1} - \ln r_{\nu}) = -\frac{i}{2\pi}\ln\frac{r_{\nu+1}}{r_{\nu}} = \text{const},$$

т. е.

$$\frac{r_{\nu+1}}{r_{\nu}} = N = \text{const}.$$

Следовательно, радиусы линий напряженности поля должны возрастать в геометрической прогрессии, знаменатель которой можно выбрать произвольно.

На рис. 27.4 изображено магнитное поле уединенного провода, причем принято $N = 1{,}5$ и $\Delta\theta = \pi/4$.

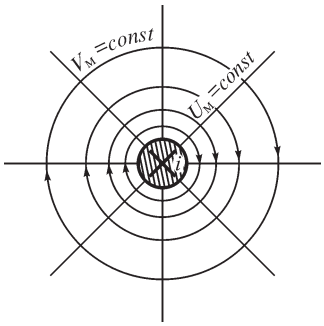

Рис. 27.4

В том случае, когда имеется n линейных проводов с токами, можно воспользоваться принципом наложения и находить комплексный потенциал из выражения

$$\zeta = V_{\text{м}} + jU_{\text{м}} = -\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{k=n} i_k \ln(z - z_k) + C,$$

где z_k определяет точку, через которую проходит провод с током i_k.

Сравнивая полученные выражения для потенциала и функции потока магнитного поля линейных проводов с токами с соответствующими выражениями для потенциала и функции потока электрического поля линейных заряженных проводов (см. § 24.10) и сопоставляя картину магнитного поля на рис. 27.4 с картиной электрического поля на рис. 24.10, замечаем их соответствие с той лишь разницей, что U и V поменялись местами. Отсюда следует замечательный вывод:

Картина магнитного поля линейных токов совпадает с картиной электрического поля линейных зарядов, если токи и заряды распределены в пространстве одинаково. Различие между этими картинами заключается лишь в том, что на месте линий напряженности электрического поля располагаются линии равного магнитного потенциала и на месте линий равного электрического потенциала располагаются линии напряженности магнитного поля.

Поэтому достаточно построить только картину одного поля, электрического или магнитного, второе же получается на основе только что высказанного положения, которое можно назвать принципом соответствия плоскопараллельных электрического и магнитного полей.

27.9. Прямолинейный провод с током во внешнем однородном поле

Функция $\zeta = Dz + C$ определяет собой однородное магнитное поле. Действительно, имеем

$$\zeta = V_{\text{м}} + jU_{\text{м}} = Dx + jDy + C_1 + jC_2.$$

Линии напряженности поля суть прямые, параллельные оси *OY*. Они выражаются уравнением

$$V_{\text{м}} = Dx + C_1 = \text{const}$$

или

$$x = \text{const}.$$

Вектор напряженности поля направлен параллельно оси *OY*. Напряженность поля равна

$$H_y = -\frac{\partial V_{\text{м}}}{\partial x} = -D = -H_0.$$

На основании принципа наложения можем утверждать, что функция

$$\zeta = -\frac{i}{2\pi}\ln z + H_0 z + C$$

определяет собой поле прямолинейного провода с током i во внешнем однородном поле, напряженность которого $H_y = -H_0$. Так как

$$\ln z = \ln r + j\theta = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + j\ \text{arctg}\frac{y}{x},$$

то уравнение линий напряженности поля может быть написано в виде

$$V_{\text{м}} = -\frac{i}{2\pi}\ln(x^2 + y^2) + H_0 x + C_1 = \text{const},$$

а уравнение линий равного потенциала может быть представлено в виде

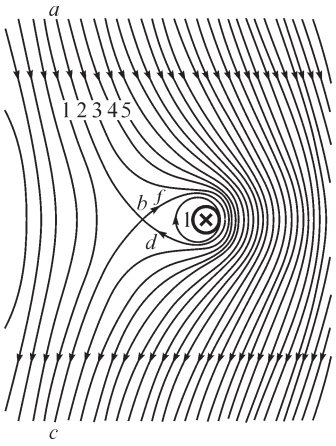

Рис. 27.5

$$U_{\text{м}} = -\frac{i}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + H_0 y + C_2 = \text{const}.$$

Такое поле изображено на рис. 27.5. В точке b напряженность поля равна нулю. Линию напряженности поля, проходящую через эту точку и помеченную цифрой 2, можно рассматривать как одну линию $abfdbc$. В этом случае она подобна линиям 3, 4 и 5, расположенным вправо от провода с током. Ее можно рассматривать и как две линии: линию abc и замкнутую линию $bfdb$. В таком случае она подобна двум линиям, отмеченным цифрой 1, одна из которых проходит слева от провода, а другая охватывает провод.

27.10. Поле проводов, имеющих конечное сечение произвольной формы

При исследовании магнитного поля вблизи массивных проводов, имеющих сечение сложной формы, эти провода уже нельзя рассматривать как линейные. Разобьем провод на бесконечно тонкие параллельные нити. Координаты центра сечения нити в плоскости XOY обозначим через x' и y' (рис. 27.6). Поверхность сечения нити равна $ds = dx'\,dy'$. Каждая такая нить является линейным проводом с током $di = J\,ds$, где J — плотность тока, и по отношению к ней справедливы полученные выше выражения для функции потока и потенциала. Функция потока и потенциал, определяемые в точке $M(x, y)$ током i, протекающим во всем проводе, получаются суммированием функций потока и потенциалов, определяемых в этой точке токами, протекающими в отдельных нитях. Следовательно, выражения для величин $V_{\text{м}}$ и $U_{\text{м}}$ в точке $M(x, y)$ должны быть получены интегрированием по сечению s провода выражений для функции потока и потенциала, определяемых в точке $M(x, y)$ токами в нитях. Таким образом, можно написать

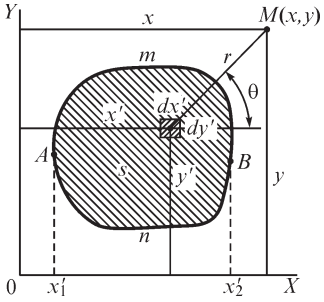

Рис. 27.6

$$V_{\text{м}} = -\int_s \frac{J}{2\pi}\ln r\,ds + C_1; \quad U_{\text{м}} = -\int_s \frac{J}{2\pi}\theta\,ds + C_2,$$

где r — расстояние от центра сечения нити тока до точки $M(x, y)$ и θ — угол, составляемый осью OX с радиус-вектором $\boldsymbol{r}$.

Формулой для $U_{\text{м}}$ можно пользоваться лишь при рассмотрении поля вне провода с током, так как понятие скалярного потенциала только здесь имеет смысл. Формула же для $V_{\text{м}}$ пригодна при рассмотрении поля как вне провода с током, так и внутри него.

Полученное общее выражение функции потока в случае $J = \text{const}$ может быть написано в виде

$$V_{\text{м}} = -\frac{Js}{2\pi}\frac{1}{s}\int_s \ln r\,ds + C_1 = -\frac{i}{2\pi}\frac{1}{s}\int_s \ln r\,ds + C_1,$$

где s — поверхность сечения провода. Величину $\frac{1}{s}\int_s \ln r\, ds$, входящую в это выражение, обозначают следующим образом:

$$\frac{1}{s}\int_s \ln r\, ds = \ln g.$$

Здесь r — расстояние от точки M до элемента ds поверхности. Величину g называют средним геометрическим расстоянием от точки M до поверхности s. Поясним этот термин. Разобьем площадь s на n равных частей Δs (рис. 27.7) так, что $s = n\,\Delta s$. Среднее геометрическое всех n расстояний от точки M до центров всех площадок Δs равно $g = \sqrt[n]{r_1 r_2 \ldots r_n}$ или

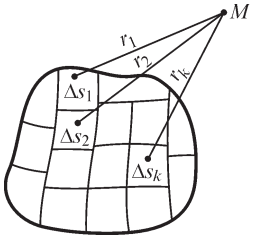

Рис. 27.7

$$\ln g = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \ln r_k = \frac{1}{s}\sum_{k=1}^{k=n} \ln r_k \Delta s.$$

Увеличивая число площадок, получаем в пределе при $n \to \infty$

$$\ln g = \frac{1}{s}\int_s \ln r\, ds.$$

Таким образом, имеем

$$V_м = -\frac{i}{2\pi}\ln g + C_1.$$

Ясно, что среднее геометрическое расстояние от точки до плоской поверхности зависит только от формы контура, ограничивающего эту поверхность, и от положения точки по отношению к этой поверхности.

27.11. Поле проводов круглого сечения

Поле вне провода круглого сечения такое же, как если бы весь ток i проходил по оси провода. Поэтому вне провода, согласно изложенному в § 27.8, имеем

$$V_м = -\frac{i}{2\pi}\ln r_0 + C_1,$$

где r_0 — расстояние от точки M, в которой определяется $V_м$, до центра сечения.

Найдем выражение для функции потока внутри провода. Напряженность поля на расстоянии r_0 от оси провода определяется на основании закона полного тока и соображений симметрии:

$$\oint \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = H 2\pi r_0 = J\pi r_0^2 = i\frac{r_0^2}{R^2},$$

где R — радиус сечения провода ($r_0 < R$). Имеем

$$H = i\frac{r_0}{2\pi R^2}.$$

Поток вектора $\boldsymbol{H}$ сквозь площадку, имеющую длину в направлении оси провода, равную единице, и ширину dr_0, равен $H\, dr_0$. Следовательно,

$$dV_{\text{м}} = -H\,dr_0 = -\frac{ir_0}{2\pi R^2}\,dr_0.$$

Знак минус необходимо поставить, так как $V_{\text{м}}$ и r_0 возрастают при $i > 0$ в противоположных направлениях.

Интегрируя, находим

$$V_{\text{м}} = -i\frac{r_0^2}{4\pi R^2} + C_1.$$

Подразделяя поле на трубки равного потока $\Delta V_{\text{м}}$, получаем

$$\Delta V_{\text{м}} = -\frac{i}{4\pi R^2}(r_{0,\nu+1}^2 - r_{0,\nu}^2) = \text{const}$$

или

$$r_{0,\nu+1}^2 = r_{0,\nu}^2 + K.$$

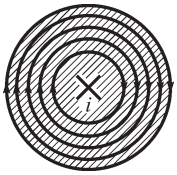

Рис. 27.8

Так как внутренний радиус внутренней трубки равен нулю, то имеем связь между радиусами линий магнитной индукции:

$$r_{0,1}^2 = K;\quad r_{0,2}^2 = r_{0,1}^2 + K = 2K;\ \ldots;\quad r_{0,\nu}^2 = \nu K.$$

На рис. 27.8 изображено поле внутри провода, причем поток подразделен на пять трубок равного потока.

27.12. Поле двухпроводной линии передачи

Магнитное поле нескольких постоянных токов, протекающих в прямолинейных проводах, имеющих круглые сечения любых размеров, вне проводов такое же, как если бы эти токи протекали по линейным проводам, совмещенным с осями действительных проводов. В самом деле, постоянное магнитное поле соседних проводов не индуцирует в теле данного провода электродвижущих сил. Поэтому распределение тока в теле каждого провода остается таким же, как и в том случае, когда этот провод уединен. Так как магнитное поле тока, протекающего в уединенном проводе круглого сечения, вне провода такое же, как если бы весь ток был сосредоточен на оси провода, то и при любом числе проводов круглого сечения при рассмотрении поля вне проводов можно их заменить линейными проводами, совмещенными с геометрическими осями действительных проводов. Необходимо подчеркнуть, что это правило справедливо только по отношению к пространству вне проводов, только при постоянном токе и только в том случае, если магнитная проницаемость материала проводов равна магнитной проницаемости окружающей среды, например для медных или алюминиевых проводов в воздухе.

Такое правило неверно по отношению к электрическому полю нескольких массивных проводов круглого сечения, так как близость соседних проводов вызывает перераспределение заряда на поверхности данного провода.

Для построения картины магнитного поля токов, протекающих в двух линейных проводах, образующих двухпроводную линию передачи, воспользуемся ранее рассчитанной картиной электрического поля двух заряженных линейных

проводов (см. рис. 24.14), заменив в этой картине на основании принципа соответствия (см. § 27.8) линии напряженности электрического поля линиями равного магнитного потенциала и линии равного электрического потенциала — линиями напряженности магнитного поля. Выражения для функции потока и для потенциала имеют вид

$$V_{\text{м}} = -\frac{1}{2\pi}(i_1 \ln r_1 + i_2 \ln r_2) + C_1 = \frac{i}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1} + C_1;$$

$$U_{\text{м}} = -\frac{1}{2\pi}(i_1\theta_1 + i_2\theta_2) + C_2 = \frac{i}{2\pi}(\theta_2 - \theta_1) + C_2,$$

так как

$$i_1 = -i_2 = i.$$

Линии напряженности поля суть окружности с центрами на прямой, пересекающейся с осями проводов. Координаты центров и радиусы этих окружностей определяются из выражений, полученных в § 24.12 при расчете электрического поля. Линиями равного магнитного потенциала являются дуги окружностей, проходящих через оси обоих проводов. На рис. 27.9 изображена картина магнитного поля двухпроводной линии передачи.

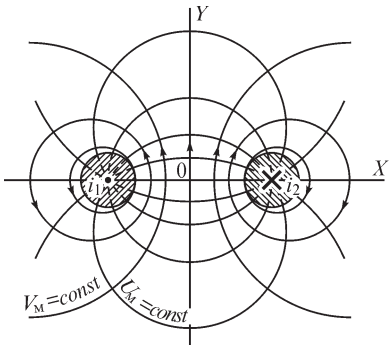

Рис. 27.9

В реальных условиях провода имеют сечения конечных размеров. При этом вне проводов поле такое же, как если бы токи были сосредоточены на геометрических осях проводов. В этом отношении магнитное поле отличается от электрического, так как электрическое поле около проводов круглого сечения оказывается таким же, как если бы заряды были сосредоточены на электрических осях проводов, не совпадающих с их геометрическими осями. Внутри проводов магнитные линии представляют собой сложные кривые. Так, функция потока внутри прямого провода имеет выражение

$$V_{\text{м}} = -\frac{ir_1^2}{4\pi R^2} + \frac{i}{2\pi}\ln r_2 + C_1$$

и линии $V_{\text{м}}$ = const имеют сложную форму.

27.13. Граничные условия на поверхности раздела двух сред с различными магнитными проницаемостями

Если линии магнитной индукции пересекают поверхность раздела двух участков магнитной цепи, имеющих различные магнитные проницаемости, под некоторым углом к нормали к этой поверхности, то на поверхности раздела линии магнитной индукции изменяют свое направление.

Найдем общие условия, которым подчиняются составляющие векторов магнитной индукции и напряженности магнитного поля на границе двух сред с раз-

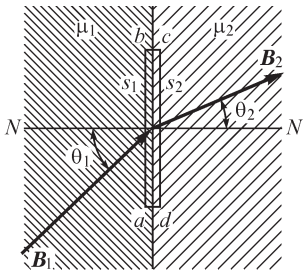

Рис. 27.10

личными абсолютными магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2. Обе среды будем предполагать однородными и изотропными. Пусть θ_1 и θ_2 — углы между направлениями линий магнитной индукции и направлением нормали к поверхности раздела в первой и второй среде (рис. 27.10).

Сопоставление уравнений $\oint_l \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} = 0$, $\oint_s \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{s} = 0$, $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$ с уравнениями $\oint_l \boldsymbol{X}\,d\boldsymbol{l} = 0$, $\oint_s \boldsymbol{Y}\,d\boldsymbol{s} = 0$, $\boldsymbol{Y} = a\boldsymbol{X}$ (см. § 23.8) позволяет принять $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{B}$, $a_1 = \mu_1$, $a_2 = \mu_2$ и записать искомые соотношения $H_1 \sin\theta_1 = H_2 \sin\theta_2$, $B_1 \cos\theta_1 = B_2 \cos\theta_2$, $\dfrac{\operatorname{tg}\theta_1}{\operatorname{tg}\theta_2} = \dfrac{\mu_1}{\mu_2}$, выражающие условия непрерывности соответствующих составляющих векторов $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{B}$, а также условия преломления линий магнитной индукции на поверхности сред с различными магнитными проницаемостями.

Большое практическое значение имеет вопрос о характере магнитного поля в воздухе около поверхностей стальных частей машин, трансформаторов, электромагнитов и других электротехнических устройств. Магнитные проницаемости ферромагнитной среды и воздуха сильно разнятся между собой. Для воздуха практически $\mu_2 = \mu_0$. Пусть для ферромагнитной среды $\mu_1 = 1000\,\mu_0$. В таком случае имеем $\operatorname{tg}\theta_1 = 1000 \operatorname{tg}\theta_2$. Если линии магнитной индукции внутри ферромагнитной среды (рис. 27.11) составляют с нормалью угол $\theta_1 = 89°$, то соответствующий угол в воздухе оказывается равным $\theta_2 \approx 3°20'$. Поэтому во всех случаях, когда магнитное поле создается токами, протекающими по проводникам, расположенным в воздухе, практически можно принять $\theta_2 = 0$, т. е. считать, что линии магнитной индукции в воздухе нормальны к поверхности тел из ферромагнитных материалов.

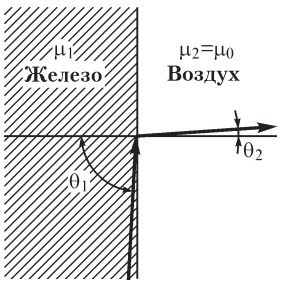

Рис. 27.11

27.14. Поле токов вблизи плоских поверхностей ферромагнитных тел. Метод зеркальных изображений

Пусть около бесконечной плоскости, ограничивающей ферромагнитную среду, для которой примем $\mu = \infty$, расположен в воздухе параллельно плоскости провод с током i (рис. 27.12). Поверхность ферромагнитной среды является поверхностью равного магнитного потенциала, так как линии напряженности поля в воздухе к ней перпендикулярны.

Удалим мысленно ферромагнитную среду, заменив ее током i', являющимся зеркальным изображением в поверхности раздела действительного тока i. Ток i' примем равным току i и имеющим то же направление.

Средняя плоскость между действительным током и его зеркальным изображением, совпадающая с поверхностью раздела в действительной задаче, являет-

ся плоскостью равного магнитного потенциала. Это вытекает хотя бы из того, что линии магнитной индукции, охватывающие оба тока, должны расположиться симметрично относительно этой плоскости, что возможно, только если они ее пересекают под прямым углом.

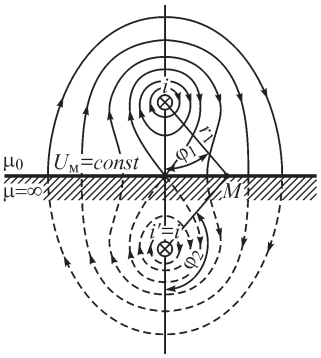

Рис. 27.12

Итак, после замены ферромагнитной среды током i' условия на граничной плоскости не изменились. Остался без изменения и ток i в области действительного поля. Поэтому приходим к следующему весьма существенному выводу: *поле прямолинейного тока i, проходящего в воздухе параллельно плоской поверхности массивного тела из ферромагнитного материала, совпадает в воздухе с полем, которое образуется двумя токами — действительным током i и его зеркальным изображением i′ = i в поверхности тела, в предположении, что ферромагнитная среда удалена.*

Основанный на этом положении метод расчета поля называют методом зеркальных изображений. С аналогичным методом мы ознакомились в главе о расчете электростатического поля. Однако электрические заряды должны быть отражены в поверхности проводящей среды с изменением знака заряда, ток же отражается в поверхности ферромагнитной среды без изменения направления.

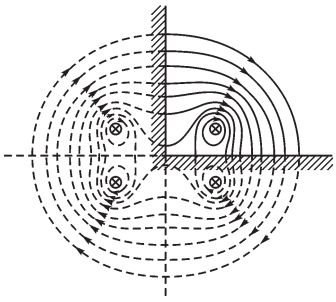
Рис. 27.13

Метод зеркальных изображений, очевидно, может быть распространен на любое число проводников с токами, причем проводники могут иметь сечения любой формы. Этот метод, так же как и для электростатического поля, может быть использован, когда две поверхности, ограничивающие ферромагнитную среду, сходятся под углом $\alpha = \pi/n$, где n — целое число, причем угол α отсчитывается в воздухе. Поле при $\alpha = \pi/2$ показано на рис. 27.13.

27.15. Графический метод построения картины поля

В сложных случаях аналитический расчет поля оказывается невозможным и приходится прибегать к приближенным графическим методам построения картины поля. Такой метод весьма полезен при построении картины поля около стальных полюсов электрических машин и аппаратов. На помощь нам при этом приходит то обстоятельство, что линии магнитной индукции в воздухе около полюсов нормальны к их поверхностям, и, следовательно, поверхности полюсов можно считать поверхностями равного магнитного потенциала. Такое условие верно в том случае, когда поле создается токами, проходящими по проводникам и обмоткам, расположенным в воздухе, что обычно и имеет место. Установим сначала метод построения картины поля в области, не занятой проводниками с токами, создающими исследуемое поле, т. е. около тех частей полюсов, которые

выступают за пределы обмоток с током, наложенных на сердечники полюсов. Если, помимо того, в данной области пространства поле приближенно можно считать плоскопараллельным, то, очевидно, следует руководствоваться правилами, аналогичными тем, которые были установлены в § 24.15 для построения электрического поля, а именно:

1) линии напряженности поля и линии равного магнитного потенциала должны пересекаться всюду под прямым углом;

2) поверхности ферромагнитных сред следует считать поверхностями равного магнитного потенциала и линии напряженности поля в воздухе следует проводить перпендикулярно к ним;

3) ячейки сетки, образованной линиями напряженности поля и линиями равного потенциала, при достаточной густоте сетки должны быть приблизительно подобны друг другу.

Обозначим средние размеры ячейки сетки в направлении линии напряженности поля через Δn и в направлении линии равного магнитного потенциала — через Δa. Тогда последнее правило можно выразить в форме

$$\frac{\Delta n}{\Delta a} = k = \text{const}.$$

Путем ряда последовательных приближений удается построить картину поля, удовлетворяющую всем указанным требованиям.

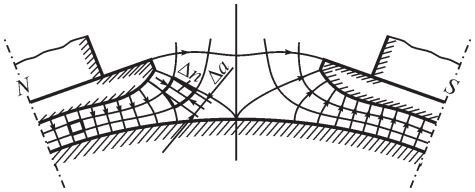

Рис. 27.14

На рис. 27.14 изображена построенная таким способом картина поля около полюсов электрической машины.

Если построена картина поля, то из нее может быть найдено магнитное сопротивление $R_м$ или магнитная проводимость $\Lambda = 1/R_м = \Phi/F$ воздушного промежутка между полюсом и якорем, причем Φ — магнитный поток в рассматриваемом промежутке и F — м. д. с. на длине промежутка. Если m_1 — число трубок магнитной индукции, то

$$\Phi = m_1 \Delta\Phi = m_1 l \mu_0 H \Delta a,$$

где $\Delta\Phi$ — поток в одной трубке и l — длина в направлении оси OZ (перпендикулярном плоскости рисунка). Если m_2 — число интервалов между соседними линиями равного потенциала, то $F = m_2 \Delta U_м = m_2 H \Delta n$, где $\Delta U_м$ — изменение потенциала на протяжении одного интервала.

Таким образом,

$$\Lambda = \mu_0 l \frac{\Delta a}{\Delta n} \frac{m_1}{m_2} = l\lambda.$$

Величина λ представляет собой магнитную проводимость на единицу длины в направлении оси *OZ*. Она зависит исключительно от конфигурации рассматриваемого участка магнитной цепи.

Приведенные правила построения картины поля справедливы только в области, не занятой электрическим током. В области, где расположены проводники или катушки с током, эти правила неприменимы, так как здесь теряет смысл понятие скалярного магнитного потенциала. Для построения приближенной картины поля и в тех местах, где около сердечника полюса расположены катушки с током, поступают следующим образом. Сжимают сечение катушки в направлении к поверхности сердечника до нулевых размеров. Иначе говоря, предполагают, что ток течет по бесконечно тонкому слою, прилегающему к поверхности сердечника. При таком предположении во всем пространстве около полюса токов нет, и понятие скалярного магнитного потенциала может быть использовано. При этом поле всюду должно удовлетворять первому и третьему условиям. Однако второе условие — перпендикулярность линий напряженности поля к поверхности ферромагнитной среды — сохраняется только там, где на поверхности ферромагнитной среды нет токов. В местах, где имеются распределенные поверхностные токи, соответствующие токам в катушках, это условие не соблюдается. Рассмотрим плоскую поверхность ферромагнитной среды, по которой протекает в тонком слое ток (рис. 27.15). Пусть ток протекает в направлении, нормальном к плоскости рисунка. Составим линейный интеграл вектора $\boldsymbol{H}$ по контуру *abcda*. Если для ферромагнитной среды принять $\mu = \infty$, то будем иметь внутри ферромагнитной среды $H = 0$. Пусть *ad* и *bc* весьма малы по сравнению с *ab*. Тогда

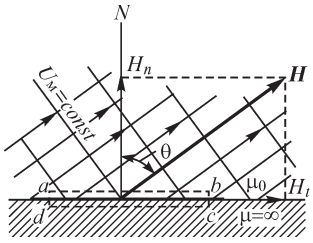

Рис. 27.15

$$\oint_{abcda} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = H_t\, ab,$$

где H_t — касательная составляющая вектора $\boldsymbol{H}$ в воздухе около поверхности ферромагнитной среды. Но этот интеграл равен току *i*, проходящему сквозь контур *abcda*. Поэтому

$$H_t = \frac{i}{ab},$$

т. е. *касательная составляющая напряженности поля в воздухе отлична от нуля и равна линейной плотности тока*. Следовательно, линии напряженности поля около таких поверхностей не перпендикулярны к ним. Направление линий остается неизвестным, так как неизвестна нормальная составляющая вектора $\boldsymbol{H}$.

При построении поля поступают следующим образом. Строят сначала поле около тех частей полюсов, где нет токов, пользуясь вышеизложенными правилами. Поверхности полюсов в этих местах считают равнопотенциальными. Остальные линии равного потенциала этого поля подводят к соответствующим точкам контура полюса в местах, где протекают поверхностные токи. Положение этих точек зависит от распределения тока в поверхностном слое. Разность по-

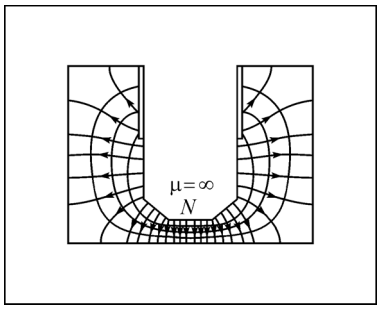

Рис. 27.16

тенциалов двух соседних линий равна току, протекающему между соответствующими двумя точками, к которым необходимо подвести эти линии. Линии равного потенциала, так же как и линии напряженности поля, в местах, где протекают токи, наклонны к контуру полюса (см. рис. 27.15). Затем строят все поле, стремясь к тому, чтобы всюду удовлетворялись первое и третье требования. Когда это удается, поле построено правильно. На рис. 27.16 приведен пример построенного таким путем поля около полюса, обтекаемого током.

Если поле создается несколькими токами и при этом легко может быть построено поле каждого тока в отдельности, то для построения результирующего поля можно применить графический метод наложения полей, предложенный Максвеллом.

Пусть имеются два параллельных провода круглого сечения с токами i_1 и i_2 в однородной среде. Картины поля каждого тока в отдельности строятся весьма просто (см. § 27.8).

Построим на одном рисунке картину линий напряженности поля тока i_1 и картину линий напряженности поля тока i_2 с такой густотой, чтобы имело место равенство $|\Delta V_{м1}| = |\Delta V_{м2}|$. При соблюдении этого условия получающаяся в итоге наложения двух полей сетка позволяет легко построить картину линий напряженности результирующего поля обоих токов, i_1 и i_2. Действительно, уравнение линии напряженности результирующего поля имеет вид $V_{м1} + V_{м2} = \text{const}$ и, следовательно, для любых двух точек, лежащих на этой линии, имеем $\Delta V_{м1} + \Delta V_{м2} = 0$, т. е. $\Delta V_{м1} = -\Delta V_{м2}$.

Если при построении отдельных полей соблюдено условие $|\Delta V_{м1}| = |\Delta V_{м2}|$, то ряд точек пересечения линий напряженности отдельных полей будет принадлежать одной и той же линии напряженности результирующего поля. Для того чтобы перейти от одной такой точки к другой, необходимо, переходя в одном поле на соседнюю линию, переходить и в другом поле также на соседнюю линию. При этом, если токи i_1 и i_2 одинаково направлены, то, удаляясь от одного тока, следует приближаться к другому; если же токи i_1 и i_2 имеют разные направления, то следует одновременно удаляться от обоих токов или одновременно приближаться к ним. Практически это означает, что линия напряженности результирующего поля переходит через ячейку сетки, получающейся от наложения отдельных полей, по криволинейной диагонали этой ячейки, причем следует избрать ту или иную диагональ в зависимости от знаков токов. На рис. 27.17, *а* (верхняя часть рисунка) построена картина линий напряженности поля при $i_2 = -2i_1$, а на рис. 27.18, *а* — при $i_2 = 2i_1$. Аналогичный прием может быть использован для построения картины линий равного магнитного потенциала результирующего поля, которые описываются уравнением $U_{м1} + U_{м1} = \text{const}$. На рис. 27.17, *б* (нижняя часть рисунка) осуществлено такое построение для случая $i_2 = -2i_1$, а на рис. 27.18, *б* — для случая $i_2 = 2i_1$.

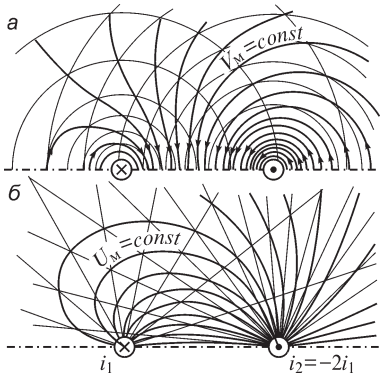

Рис. 27.17

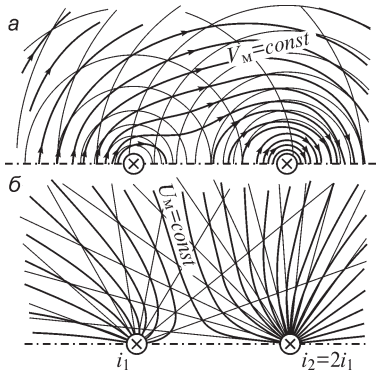

Рис. 27.18

Если наложим картины линий напряженности на картины линий равного магнитного потенциала результирующего поля для соответствующих случаев, то получим ортогональную сетку.

Пользуясь принципом соответствия плоскопараллельных электрического и магнитного полей (см. § 27.8), можем утверждать, что для двух заряженных линейных проводов рис. 27.17, *а* и 27.18, *а* дают картины линий равного электрического потенциала при $\tau_2 = -2\tau_1$ и при $\tau_2 = 2\tau_1$ и соответственно рис. 27.17, *б* и 27.18, *б* дают картины линий напряженности электрического поля. Этот метод может быть использован и в более сложных случаях. Например, если поле в электромагните создается токами в двух катушках и построены поля, создаваемые отдельно током в одной и током в другой катушке, то указанным методом легко построить результирующее поле как при $i_2/i_1 > 0$, так и при $i_2/i_1 < 0$.

27.16. Пространственная задача. Поле кругового контура с током

Расчет магнитных полей токов, протекающих по контурам, имеющим во всех направлениях конечные размеры, представляет собой весьма сложную задачу. При этом все величины, характеризующие поле, являются функциями трех координат. Общий метод решения заключается для однородной среды в нахождении по заданному распределению токов векторного потенциала по формулам, указанным в § 27.2. Вектор магнитной индукции определяется из соотношения $\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\, \boldsymbol{A}$.

Простейший пример пространственной задачи — поле токов, протекающих по круговым контурам, лежащим в параллельных плоскостях и имеющим центры на общей оси. Достаточно рассмотреть картину такого поля в одной плоскости, проходящей через эту ось, так как все поле получается вращением найденной картины вокруг оси. Сюда относится важный случай — магнитное поле катушек с током, состоящих из круговых витков.

Определим поле одного кругового контура с током i (рис. 27.19). Естественно рассматривать поле в цилиндрических координатах z, ρ, α. Начало координат поместим в центре контура с током. Ось OZ направим перпендикулярно плоскости контура.

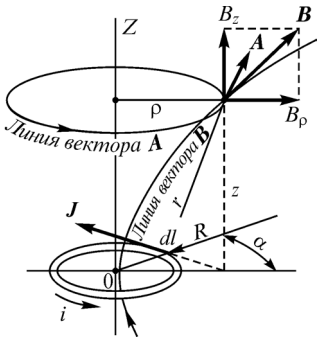

Рис. 27.19

Пусть поперечные размеры сечения s проводника весьма малы по сравнению с радиусом R кольца. Рассматривая поле на расстояниях от проводника, значительно превышающих поперечные размеры его сечения, можем вычислять векторный потенциал по формуле (см. § 27.2)

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu}{4\pi}\oint_l \frac{i\,d\boldsymbol{l}}{r}.$$

Интегрирование производится вдоль всего контура с током. Вследствие симметрии относительно оси OZ линии векторного потенциала должны быть окружностями, лежащими в плоскостях, параллельных плоскости контура тока, и имеющими центры на оси OZ. Следовательно, $\boldsymbol{A}$ имеет единственную составляющую A_α. Она равна

$$A = A_\alpha = \frac{\mu}{4\pi}\oint_l \frac{i\cos\alpha\; dl}{r}.$$

Так как

$$r = \sqrt{z^2 + R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\alpha}, \quad dl = R\,d\alpha,$$

то

$$A = \frac{\mu i R}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\alpha\; d\alpha}{\sqrt{z^2 + R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\alpha}}.$$

Приведем этот интеграл к эллиптическим интегралам, для которых имеются таблицы. Примем $\alpha = \pi - 2\beta$, $d\alpha = 2d\beta$,

$$\frac{4R\rho}{z^2 + (R+\rho)^2} = k^2.$$

Число k лежит в пределах $0 \le k \le 1$. Значение $k = 1$ получается при $z = 0$ и $\rho = R$, т. е. на оси контура с током, который предполагаем весьма тонким. Здесь A обращается в бесконечность, но, как было отмечено, принятая упрощенная формула для A может быть использована только на достаточном расстоянии от проводника. Имеем $\cos\alpha = -\cos\beta = 2\sin^2\beta - 1$,

$$r = \sqrt{z^2 + R^2 + \rho^2 - 4R\rho\sin^2\beta + 2R\rho} = \frac{2\sqrt{R\rho}}{k}\sqrt{1 - k^2\sin^2\beta}.$$

Следовательно,

$$A = -\frac{\mu i}{8\pi}\sqrt{\frac{R}{\rho}}\; k\int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{2(2\sin^2\beta - 1)\,d\beta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\beta}}$$

или

$$A = \frac{\mu i}{2\pi}\sqrt{\frac{R}{\rho}}\, k\int_0^{\pi/2} \frac{2\sin^2\beta - 1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\beta}}\, d\beta = \frac{\mu i}{2\pi}\sqrt{\frac{R}{\rho}}\, f(k).$$

Пользуясь тождеством

$$\frac{2\sin^2\beta-1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}=\frac{1}{k^2}\left(\frac{2-k^2}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}-2\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}\right),$$

можем написать

$$f(k)=\left(\frac{2}{k}-k\right)K-\frac{2}{k}E,$$

где

$$K=\int_0^{\pi/2}\frac{d\beta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}$$

и

$$E=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}\;d\beta$$

представляют собой полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Они являются функциям модуля k. На рис. 27.20 приведены кривые, выражающие эти функции, и кривые, дающие величину $f(k)$, входящую в выражение для векторного потенциала.

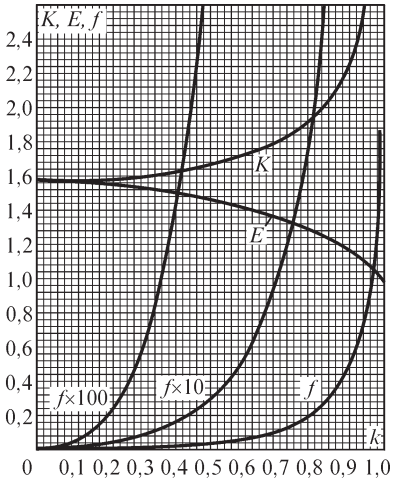

Рис. 27.20

Линии магнитной индукции исследуемого поля лежат в плоскостях, проходящих через ось OZ. Вектор магнитной индукции имеет только две составляющие, B_z и B_ρ, которые находятся из выражений:

$$B_z=\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{A};\quad B_\rho=\mathrm{rot}_\rho\,\boldsymbol{A}.$$

Для вычисления этих составляющих необходимо использовать выражения составляющих вектора rot $\boldsymbol{A}$ через составляющие вектора $\boldsymbol{A}$ в цилиндрических координатах.

27.17. Выражение скалярного потенциала через телесный угол, под которым виден контур тока

Покажем, что скалярный магнитный потенциал $U_м$ в некоторой точке M поля замкнутого тока i пропорционален телесному углу ω, под которым видна из этой точки поверхность, ограниченная контуром тока (рис. 27.21). При перемещении из точки M в точку M' на расстояние dl' потенциал получает приращение

$$dU_м=-H\cos\alpha\;dl'=-\boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l}'.$$

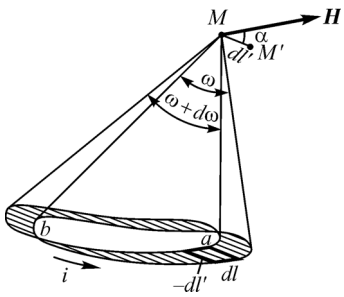

Рис. 27.21

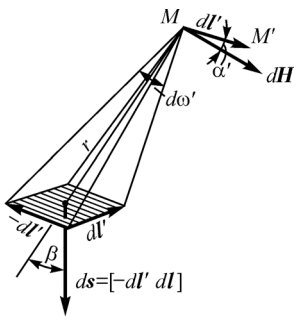

Рис. 27.22

Точно такое же приращение получил бы потенциал в точке M, если весь контур переместить параллельно самому себе на расстояние $-d\boldsymbol{l}'$ в противоположном направлении.

Выделим элемент длины $d\boldsymbol{l}$ контура тока и рассмотрим приращение потенциала $dU'_{\text{м}}$ в точке M, вызванное перемещением этого элемента по пути $-d\boldsymbol{l}'$ (рис. 27.22). Имеем

$$dU'_{\text{м}} = -d\boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l}',$$

где $d\boldsymbol{H}$ — напряженность поля в точке M от тока i в элементе $d\boldsymbol{l}$. Согласно закону Био–Савара–Лапласа,

$$d\boldsymbol{H} = \frac{1}{4\pi}\frac{i}{r^2}\left[d\boldsymbol{l}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right].$$

Следовательно,

$$dU'_{\text{м}} = -\frac{1}{4\pi}\frac{i}{r^2}d\boldsymbol{l}'\left[d\boldsymbol{l}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right] = \frac{i}{4\pi r^2}[-d\boldsymbol{l}'\ d\boldsymbol{l}]\frac{\boldsymbol{r}}{r}.$$

Но $[-d\boldsymbol{l}'\ d\boldsymbol{l}] = d\boldsymbol{s}$ есть вектор, нормальный к площадке, описываемой отрезком $d\boldsymbol{l}$ при перемещении его на пути $-d\boldsymbol{l}'$, и равный по величине этой площадке. Следовательно, $d\boldsymbol{s}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r} = \cos\beta\, ds$ есть проекция этой площадки на сферу радиуса r с центром в точке M и $\dfrac{1}{r^2}\left(d\boldsymbol{s}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\right) = d\omega'$ есть телесный угол, под которым видна площадка из точки M. Итак,

$$dU'_{\text{м}} = \frac{i}{4\pi}d\omega'.$$

Чтобы получить изменение $dU_{\text{м}}$ потенциала, вызванного в точке M током во всем замкнутом контуре (см. рис. 27.20), необходимо просуммировать величины $dU'_{\text{м}}$ по всем элементам $d\boldsymbol{l}$ контура. При этом, суммируя в правой части величины $d\omega'$, получим телесный угол $d\omega$, под которым видна из точки поверхность, описываемая всем контуром при перемещении его на пути $-d\boldsymbol{l}'$. Очевидно, $d\omega$ есть приращение телесного угла ω, под которым видна из точки M поверхность, ограниченная контуром тока. Таким образом,

$$dU_{\text{м}} = \frac{i}{4\pi}d\omega \quad \text{и} \quad U_{\text{м}} = \frac{i}{4\pi}\omega + C.$$

Если принять $U_{\text{м}} = 0$ в бесконечно удаленных от контура тока точках, для которых $\omega = 0$, то будем иметь $C = 0$ и

$$U_{\text{м}} = \frac{i}{4\pi}\omega.$$

Телесный угол ω положителен, если из точки M ток в контуре кажется направленным против часовой стрелки (см. рис. 27.20).

27.18. Магнитное поле контура произвольной формы на большом расстоянии от контура

Обозначим через r расстояние точки M, в которой отыскивается потенциал $U_м$, от некоторой точки O внутри контура (рис. 27.23). Пусть r много больше линейных размеров контура. Пусть ON — направление от O к M, при котором при заданном r телесный угол ω получается наибольшим, равным ω_{max}. При всяком другом направлении, составляющем с этим направлением угол φ, при том же r будем иметь $\omega = \omega_{max} \cos\varphi$. Но $\omega_{max} = s/r^2$, где s — часть поверхности сферы радиуса r, вырезаемая центральным конусом с телесным углом ω_{max}. Таким образом, согласно выражению $U_м = \dfrac{i}{4\pi}\omega$, имеем

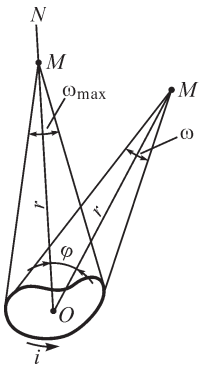

Рис. 27.23

$$U_м = \frac{is}{4\pi}\frac{\cos\varphi}{r^2}.$$

Для плоского контура при r, намного большем размеров контура, s есть площадь, ограниченная контуром, и ON — направление нормали к ней.

Так как произведение $is = m$ есть магнитный момент тока i в замкнутом контуре, то формулу для $U_м$ можно представить в виде

$$U_м = \frac{m\cos\varphi}{4\pi r^2}.$$

Составляющие напряженности поля на больших расстояниях от контура имеют выражения:

$$H_r = -\frac{\partial U_м}{\partial r} = \frac{2m\cos\varphi}{4\pi r^3};$$

$$H_\varphi = -\frac{1}{r}\frac{\partial U_м}{\partial \varphi} = \frac{m\sin\varphi}{4\pi r^3}.$$

Из изложенного вытекает следующее важное положение. На больших расстояниях от контура тока напряженность магнитного поля убывает обратно пропорционально кубу расстояния, и характер поля совершенно не зависит от формы контура тока. Напряженность поля полностью определяется магнитным моментом.

Весьма интересно отметить, что характер магнитного поля на больших расстояниях от контура тока такой же, как и характер электрического поля диполя на больших от него расстояниях. Это становится ясным, если сопоставить полученные в настоящем параграфе формулы с формулами в § 24.2 для поля электрического диполя.

27.19. Тело во внешнем магнитном поле. Аналогия с электростатической задачей

Задача о расчете магнитного поля при наличии во внешнем магнитном поле тела из вещества с абсолютной магнитной проницаемостью μ аналогична рассмот-

ренной в §§ 24.18 и 24.19 задаче о расчете электрического поля при наличии во внешнем электрическом поле тела из диэлектрика с абсолютной диэлектрической проницаемостью ε.

Действительно, как уравнения поля, так и граничные условия аналогичны в обоих случаях.

Для магнитного поля имеем во всей интересующей нас области пространства $\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = 0$, так как в этой области отсутствуют макроскопические токи. Следовательно, уравнения магнитного поля имеют вид

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = 0; \quad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} = \mu_0 \boldsymbol{H} + \mu_0 \boldsymbol{M}; \quad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0.$$

В соответствующей электростатической задаче в рассматриваемой области пространства $\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 0$, так как в этой области нет свободных зарядов. Поэтому уравнения электрического поля имеют вид

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0; \quad \boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}; \quad \operatorname{div} \boldsymbol{D} = 0.$$

Заметим, что уравнения $\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = 0$ и $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0$ эквивалентны уравнениям

$$\boldsymbol{H} = -\operatorname{grad} U_{\text{м}} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} U.$$

Граничными условиями на поверхности тела, внесенного во внешнее магнитное поле, являются равенство в обоих средах нормальных составляющих вектора магнитной индукции и касательных составляющих вектора напряженности поля:

$$B_{n1} = B_{n2} \quad \text{и} \quad H_{t1} = H_{t2}.$$

Для тела из диэлектрика, внесенного во внешнее электрическое поле, граничные условия имеют аналогичный вид:

$$D_{n1} = D_{n2} \quad \text{и} \quad E_{t1} = E_{t2}.$$

Таким образом, при исследовании поля тел во внешнем магнитном поле можем воспользоваться аналогичными задачами, решенными в электростатике, с заменой $\boldsymbol{E}$ на $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}$ на $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{P}$ на $\mu_0 \boldsymbol{M}$ и ε на μ. Так как поляризованность вещества $P = dp/dV$, а намагниченность $M = dm/dV$, то в аналогичных задачах электрический момент соответствует умноженному на μ_0 магнитному моменту.

27.20. Шар и эллипсоид вращения во внешнем однородном магнитном поле

В § 24.19 был рассмотрен шар из диэлектрика, находящийся во внешнем электрическом поле. Было найдено, что шар поляризуется однородно.

Точно так же шар из вещества с абсолютной магнитной проницаемостью μ, помещенный во внешнее однородное магнитное поле, поляризуется однородно. Пусть шар помещен в пустоте и $\mu > \mu_0$. Тогда вектор напряженности $\boldsymbol{H}_{\subset\supset}$ поля, определяемого намагниченностью шара, оказывается внутри шара направленным против вектора напряженности $\boldsymbol{H}_0$ внешнего поля. В этом случае поле вектора $\boldsymbol{H}_{\subset\supset}$ называется *размагничивающим полем*. Используя формулы,

полученные в § 24.19, и произведя в них соответствующую замену, получим формулы для интересующего нас случая. Напряженность размагничивающего поля определяется формулой

$$H_{\supset} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} H_0.$$

Вне шара поле, вызванное намагниченностью шара, такое же, как поле тока в весьма малом замкнутом контуре, находящемся в центре шара, имеющего магнитный момент m, равный геометрической сумме магнитных моментов всех элементарных токов в объеме шара.

Пользуясь формулами, полученными в § 24.19, находим

$$\mu_0 m = 4\pi\mu_0 R^3 H_{\supset} = 4\pi R^3 \mu_0 \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0 + 2\mu_0} H_0,$$

где R — радиус шара.

Намагниченность M вещества шара равна магнитному моменту, отнесенному к единице объема шара. Следовательно,

$$\mu_0 M = \frac{\mu_0 m}{\frac{4\pi}{3} R^3} = 3\mu_0 \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0 + 2\mu_0} H_0 = 3\mu_0 H_{\supset}.$$

Результирующая напряженность и результирующая магнитная индукция внутри шара равны:

$$H = H_0 - H_{\supset} = \frac{3\mu_0}{\mu_0 + 2\mu_0} H_0;$$

$$B = \frac{3\mu}{\mu_0 + 2\mu_0} \mu_0 H_0 = \frac{3\mu}{\mu_0 + 2\mu_0} B_0.$$

Чем больше μ, тем сильнее размагничивающее поле и тем слабее поле H, но тем сильнее поле B. В пределе при $\mu \to \infty$ имеем

$$H_{\supset} = H_0; \quad H = 0; \quad B = 3B_0.$$

Таким замечательным свойством намагничиваться однородно во внешнем однородном поле обладает эллипсоид, частным случаем которого является шар. На рис. 27.24 для эллипсоида изображены внешнее однородное поле, поле вектора $\boldsymbol{H}$, определяемое намагниченностью эллипсоида и связанное с условным представлением о наведенных магнитных массах, результирующее поле вектора $\boldsymbol{H}$ и результирующее поле вектора $\boldsymbol{B}$.

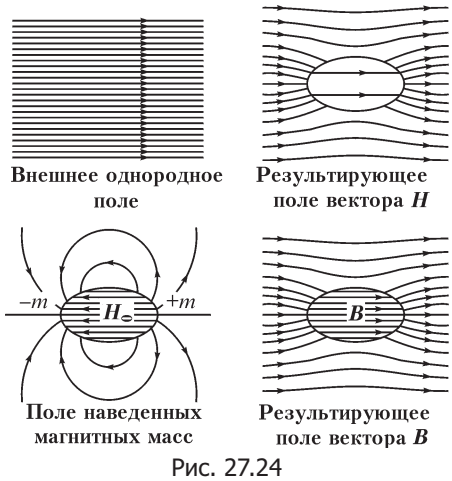

Рис. 27.24

27.21. Магнитное поле в неоднородной среде. Применение метода интегральных уравнений

Решение задачи расчета магнитного поля в неоднородной среде становится полностью аналогичным соответствующей задаче электростатики при введении в рассмотрение магнитных зарядов объемной и поверхностной плотностью $\rho_м$ и $\sigma_м$, эквивалентных создающим поле токам.

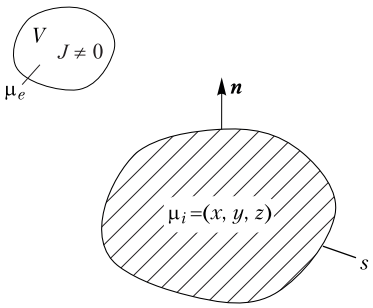

Рис. 27.25

Для расчета магнитного поля постоянного тока, протекающего в области V со средой, имеющей магнитную проницаемость μ_e, применим рассмотренный в § 24.20 метод интегральных уравнений. В части пространства, ограниченной замкнутой поверхностью s, магнитная проницаемость определяется функцией $\mu_i(x, y, z)$. Повторяя рассуждения, выполненные в § 24.20 при введении вторичных источников электростатического поля, и приводя среду к однородной с магнитной проницаемостью μ_e, получаем соотношения для плотности вторичных источников в виде (рис. 27.25)

$$\rho_м = -\frac{\mu_e}{\mu_i}\boldsymbol{H}_i \operatorname{grad}\mu_i, \quad \sigma_м = 2\mu_e\lambda H_n, \tag{*}$$

где H_n — нормальная к поверхности s составляющая напряженности магнитного поля, $\lambda = \dfrac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + \mu_e}$.

При расчете поля в кусочно-однородной среде по аналогии с интегральным уравнением (***), полученным в § 24.20, находим интегральное уравнение относительно размещенных на поверхности s магнитных зарядов плотностью $\sigma_м$:

$$\sigma_м - \frac{\lambda}{2\pi}\oint_s \frac{\sigma_м \cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r^2}\,ds = 2\mu_e\lambda H_{0n}. \tag{**}$$

Свойства этого интегрального уравнения такие же, что и уравнения (***) § 24.20. При использовании скалярного магнитного потенциала и введении эквивалентных электрическим токам магнитных зарядов расчет входящей в правую часть уравнения (**) величины H_{0n} становится полностью аналогичным расчету величины E_{0n} в соответствующей задаче электростатики.

Правая часть уравнения (**) может быть выражена также и через создающие внешнее магнитное поле электрические токи, если для расчета напряженности магнитного поля применить закон Био—Савварра. Рассчитывая величину H_{0n}, целесообразно сопоставить затраты на вычисление интеграла $H_{0n} = -\dfrac{\partial}{\partial n}\dfrac{1}{4\pi\mu_e}\displaystyle\int\frac{\rho_м dV}{r}$ при замене токов магнитными зарядами и интеграла $H_{0n} = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_V \frac{[\boldsymbol{J}, \boldsymbol{r}]_n}{r^3}\,dV$, если такая замена не выполняется.

Изложенный подход можно применить для расчета как трехмерных, так и двухмерных магнитных полей. В случае плоскопараллельного поля входящая под знак интеграла функция в уравнении (**) будет иной, так как составляющая напряженности магнитного поля, нормальная к контуру l сечения поверхности раздела сред плоскостью $X0Y$, выражается формулой

$$H_n = \frac{1}{2\pi\mu_e}\int_s \rho_{\text{мв}}\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\,ds + \frac{1}{2\pi\mu_e}\oint_l \frac{\sigma_{\text{м}}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\,dl,$$

где s — сечение плоскостью $X0Y$ области с источниками внешнего поля, $\rho_{\text{мв}}$ — объемная плотность магнитных зарядов, определяющих внешнее поле.

Уравнение (**) можно теперь записать в виде

$$\sigma_{\text{м}} - \frac{\lambda}{\pi}\oint_l \frac{\sigma_{\text{м}}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\,dl = \frac{\lambda}{\pi}\int_s \rho_{\text{мв}}\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\,ds.$$

Как отмечалось, применение векторного магнитного потенциала для расчета двухмерных магнитных полей так же эффективно, как и скалярного магнитного потенциала при преобразовании вихревых полей к потенциальным. Поэтому для расчета плоскопараллельного магнитного поля постоянного тока в кусочно-однородной среде в качестве вторичных источников используем размещенные на поверхности раздела сред электрические токи плотностью j.

Пусть контур l разделяет среды с магнитными проницаемостями μ_i и μ_e (рис. 27.26).

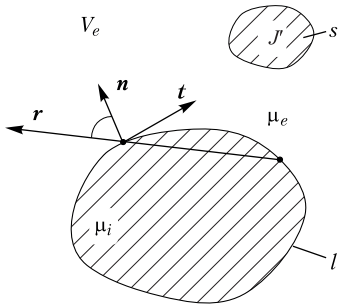

Рис. 27.26

Плотность j токов, расположенных на контуре сечения тела с магнитной проницаемостью μ_i, должна быть выбрана так, чтобы обеспечить при переходе к однородной среде с проницаемостью μ скачок касательной составляющей магнитной индукции $\frac{B_{te}}{B_{ti}} = \frac{\mu_e}{\mu_i}$. Размещение на контуре l в однородной среде с некоторой магнитной проницаемостью μ слоя тока плотностью j (см. рис. 27.26) вызывает скачок касательных составляющих напряженности магнитного поля $H_{ti} - H_{te} = j$ и магнитной индукции $B_{ti} - B_{te} = \mu j$. Обозначив через B_t касательную к контуру составляющую магнитной индукции в однородной среде, обусловленную всеми источниками за исключением расположенного в рассматриваемой точке, можем записать: $B_{te} = B_t - \frac{\mu j}{2}$, $B_{ti} = B_t + \frac{\mu j}{2}$. Подставляя эти выражения в соотношение $\frac{B_{te}}{B_{ti}} = \frac{\mu_e}{\mu_i}$, получаем после простых преобразований уравнение $j = \frac{2}{\mu}\frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + \mu_e}B_t = \frac{2}{\mu}\lambda B_t$, которое после подстановки величины

$$B_t = \frac{\partial A}{\partial n} = -\frac{\mu}{2\pi}\int_s J'\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\,ds - \frac{\mu}{2\pi}\oint_l j\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\,dl$$

приводит к интегральному уравнению

$$j + \frac{\lambda}{\pi}\oint_l j\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\,dl = -\frac{\lambda}{\pi}\int_s J'\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\,ds.$$

Здесь s— сечение проводов с током плотностью J', задающим внешнее магнитное поле.

Если электрический ток, создающий внешнее магнитное поле, протекает в среде с магнитной проницаемостью μ_i, то под входящей под знак интеграла плотностью тока следует понимать величину, равную $J' = \frac{\mu_i}{\mu} J$. В случаях, когда электрический ток протекает в среде с магнитной проницаемостью μ_e, имеем $J' = \frac{\mu_e}{\mu} J$.

Как и полученное выше уравнение (**), данное уравнение является интегральным уравнением относительно плотности вторичных источников и характеризуется аналогичными свойствами. Его решение может быть в некоторых случаях получено аналитически, однако в общем случае оно требует численного решения.

Найденное выше соотношение $j = (2/\mu)\lambda B_t$ можем использовать для расчета плоскопараллельного магнитного поля постоянного тока i, протекающего по прямолинейному проводу, расположенному в среде с магнитной проницаемостью μ_1 параллельно плоской поверхности раздела сред с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2. Повторяя рассуждения, приведенные в § 24.23, найдем значения токов

$$i_1 = i\lambda = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} i, \quad i_2 = \frac{2\mu_2}{\mu_2 + \mu_1} i.$$

Подобно зеркальному изображению в электрическом поле, для расчета магнитного поля в среде с магнитной проницаемостью μ_1 следует ввести зеркально изображенный ток i_1 и после замены μ_2 на μ_1 учесть токи i и i_1 (рис. 27.27, *а*). Для расчета поля в среде с магнитной проницаемостью μ_2 ток i заменяем на i_2, а магнитную проницаемость принимаем равной μ_2 во всем пространстве (рис. 27.27, *б*).

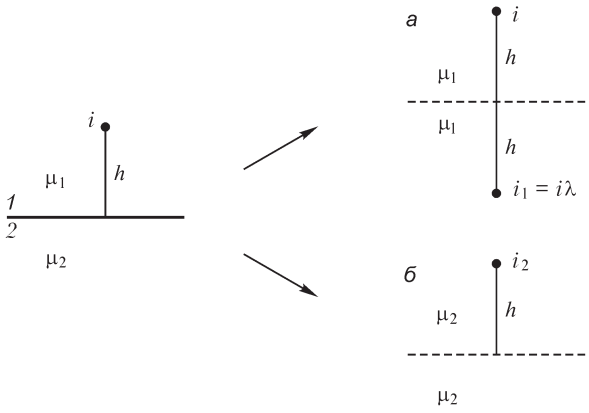

Рис. 27.27

27.22. Коэффициенты размагничивания

Для эллипсоидов как $H_{\subset\supset}$, так и M пропорциональны напряженности H_0 внешнего поля. Стало быть, можно написать

$$H_{\subset\supset} = NM.$$

Коэффициент пропорциональности N называют коэффициентом размагничивания. От него зависит при данной намагниченности значение напряженности размагничивающего поля. Коэффициент размагничивания зависит только от формы намагничиваемого тела. Для шара получаем

$$N = \frac{H_{\subset\supset}}{M} = \frac{1}{3}.$$

Расчет дает для эллипсоида вращения формулу

$$N = \frac{\dfrac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \ln(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}) - 1}{\lambda^2 - 1} = \frac{1 - \dfrac{\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \arccos\lambda}{1 - \lambda^2},$$

причем λ есть отношение оси вращения эллипсоида, которая предполагается направленной вдоль линии внешнего поля, к оси, ей перпендикулярной. Первым выражением для N удобно пользоваться при $\lambda > 1$, вторым — при $\lambda < 1$.

Для бесконечной, расположенной поперек поля пластины, которую можно рассматривать как сплющенный эллипсоид, находим $N = 1$, приняв $\lambda = 0$. Это — наивысшее возможное значение N. Для шара, полагая $\lambda = 1$ и раскрывая неопределенность, получаем $N = 1/3$. Для бесконечно длинного стержня, расположенного вдоль поля, полагая $\lambda = \infty$ и раскрывая неопределенность, получаем $N = 0$.

Свойство эллипсоидов однородно намагничиваться в однородном внешнем поле используется в магнитометрии. Для исследования магнитных свойств ферромагнитных материалов можно изготовить из этих материалов образцы, имеющие форму эллипсоида вращения или близкую к ней форму. Однородность намагничивания особенно важна именно при испытании ферромагнитных материалов, так как их магнитная проницаемость μ зависит от напряженности поля и только при однородном намагничивании значение μ во всем объеме образца будет одинаковым.

Ввести в рассмотрение коэффициент размагничивания, *зависящий только от формы тела*, строго говоря, возможно только для эллипсоидов и их частных случаев: шара, пластины, бесконечно длинного цилиндра с эллиптическим или круглым сечением. Однако для приближенных практических расчетов магнитного поля, которое образуется при внесении в однородное внешнее поле тел иной формы, например коротких цилиндров, все же вводят в расчет коэффициенты размагничивания таких тел. Такой расчет является только ориентировочным, так как тела, отличные по форме от эллипсоидов, намагничиваются неоднородно в однородном внешнем магнитном поле.

27.23. Магнитное экранирование

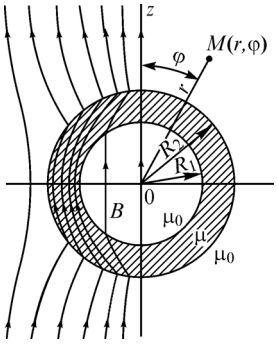

Рис. 27.28

Для защиты электроизмерительных приборов от влияния посторонних магнитных полей их системы помещают в массивные замкнутые или почти замкнутые оболочки из ферромагнитного материала. Такие оболочки называют магнитными экранами. Поле внутри экрана оказывается ослабленным по сравнению с внешним полем.

Для экрана в форме полого шара с радиусами R_1 и R_2 (рис. 27.28) и с абсолютной магнитной проницаемостью стенок μ, помещенного во внешнее однородное поле с индукцией B_0, магнитная индукция B в полости экрана может быть рассчитана и оказывается равной

$$B = B_0 \frac{1}{1+\frac{2}{9}\left(1-\frac{R_1^3}{R_2^3}\right)\left(\frac{\mu_0}{\mu}+\frac{\mu}{\mu_0}-2\right)}.$$

Например, если $R_1 = 0{,}9R_2$ и $\mu = 500\mu_0$, то $B = 0{,}031B_0$, т. е. напряженность поля внутри экрана составляет 3 % от напряженности внешнего поля. Для ферромагнитного вещества $\mu \gg \mu_0$, и экранирующее действие определяется тем, что линии магнитной индукции внешнего поля, стремясь пройти по пути с наименьшим магнитным сопротивлением, сгущаются внутри стенок экрана, почти не проникая в его полость.

Нередко применяют многоступенчатые экраны в виде нескольких полых ферромагнитных тел, расположенных одно внутри другого.

27.24. Расчет магнитного поля в неоднородной среде методом конечных разностей

Численный расчет магнитного поля постоянных токов в неоднородной среде можно выполнить методом конечных разностей аналогично расчету электростатического поля. Аналогия решения уравнений Лапласа и Пуассона будет полной, если выполнить эквивалентную замену электрических токов магнитными зарядами плотностью $\rho_м$. Численный расчет трехмерного магнитного поля целесообразно выполнять, заменяя электрические токи магнитными зарядами, так как в этом случае вместо векторного уравнения можно перейти к решению скалярного уравнения для скалярного магнитного потенциала. Для формирования конечно-разностных уравнений воспользуемся соотношением

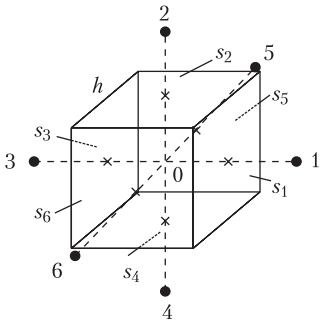

Рис. 27.29

$$\oint_s \mu \operatorname{grad} U \, d\boldsymbol{s} = \oint_s \mu \frac{\partial U}{\partial n} ds = -m \quad (m \text{ — магнитный заряд}).$$

Разобьем рассматриваемый объем V на совокупность одинаковых кубов с длиной ребра h (рис. 27.29).

Разместим магнитный заряд m в центре 0 куба и представим интеграл $\oint\limits_s \mu \dfrac{\partial U}{\partial n} ds$ по поверхности s куба в виде суммы шести интегралов по поверхностям s_1, s_2, ..., s_6 и вычислим их приближенно:

$$\int\limits_{s_1} \mu(x,y,z)\,\mathrm{grad}_x U\, ds \cong (\mu_{1\text{ср}} h^2 + \mu_{0\text{ср}} h^2)\frac{U_1 - U_0}{h} = k_1(U_1 - U_0),$$

$$\int\limits_{s_2} \mu(x,y,z)\,\mathrm{grad}_y U\, ds \cong (\mu_{2\text{ср}} h^2 + \mu_{0\text{ср}} h^2)\frac{U_2 - U_0}{h} = k_2(U_2 - U_0),$$

$$\vdots$$

$$\int\limits_{s_6} \mu(x,y,z)\,\mathrm{grad}_z U\, ds \cong (\mu_{6\text{ср}} h^2 + \mu_{0\text{ср}} h^2)\frac{U_6 - U_0}{h} = k_6(U_6 - U_0).$$

Здесь величины $\mu_{1\text{ср}}$, $\mu_{2\text{ср}}$, ..., $\mu_{6\text{ср}}$ являются средними функций $\mu(x, y, z)$ в соответствующих кубах.

Конечно-разностное уравнение

$$k_1U_1 + k_2U_2 + \ldots + k_6U_6 - U_0\sum_{i=1}^{i=6} k_i = -\rho_{\text{мср}} h^3, \qquad (*)$$

в котором $\rho_{\text{мср}} = m/h^3$, выражает потенциал U_0 узла 0 через потенциалы соседних шести узлов. Совокупность таких уравнений образует систему, которая может быть разрешена относительно искомых потенциалов узлов.

При численном расчете плоскопараллельного магнитного поля в неоднородной среде получим разностное уравнение относительно векторного магнитного потенциала, принимая за исходное соотношение $\oint\limits_l \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = i$. При этом исключается необходимость перехода от токов к эквивалентным им магнитным зарядам.

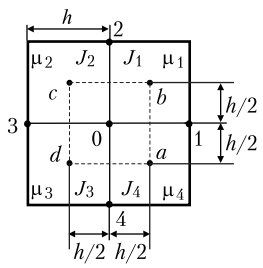

Рис. 27.30

Разобьем область на совокупность квадратов с длиной стороны h.

На рис. 27.30 изображены четыре смежных квадрата, в каждом из которых магнитные проницаемости μ_1, ..., μ_4 и плотности J_1, ..., J_4 тока имеют в общем случае различные значения.

Вычислим интеграл $\oint\limits_l \boldsymbol{B}/\mu\, d\boldsymbol{l}$ вдоль контура $abcd$, для чего разобьем его на четыре интеграла по сторонам ab, bc, cd, da контура:

$$\int\limits_{ab} \frac{\boldsymbol{B}}{\mu} d\boldsymbol{l} \cong \left(\frac{h}{2\mu_4} + \frac{h}{2\mu_1}\right)\frac{A_0 - A_1}{h} = k_1(A_0 - A_1),$$

$$\int\limits_{bc} \frac{\boldsymbol{B}}{\mu} d\boldsymbol{l} \cong \left(\frac{h}{2\mu_1} + \frac{h}{2\mu_2}\right)\frac{A_0 - A_2}{h} = k_2(A_0 - A_2),$$

$$\int_{cd} \frac{\boldsymbol{B}}{\mu}\, d\boldsymbol{l} \cong \left(\frac{h}{2\mu_2} + \frac{h}{2\mu_3} \right) \frac{A_0 - A_3}{h} = k_3 (A_0 - A_3),$$

$$\int_{da} \frac{\boldsymbol{B}}{\mu}\, d\boldsymbol{l} \cong \left(\frac{h}{2\mu_4} + \frac{h}{2\mu_3} \right) \frac{A_0 - A_4}{h} = k_4 (A_0 - A_4).$$

Входящий в разностное уравнение $(A_0 - A_1)\, k_1 + (A_0 - A_2)\, k_2 + (A_0 - A_3)\, k_3 + (A_0 - A_4)\, k_4 = i$ ток i сквозь площадку, ограниченную контуром *abcda*, выразим через плотности $J_1, ..., J_4$ тока в квадратах $i \cong J_{\text{ср}} h^2 = 0{,}25\, (J_1 + J_2 + J_3 + J_4)\, h^2$ и получим окончательно:

$$\sum_{i=1}^{4} k_i A_i - A_0 \sum_{i=1}^{4} k_i = -J_{\text{ср}}\, h^2. \qquad (**)$$

По аналогии с разностными уравнениями (*) уравнения (**), записанные для совокупности ячеек сетки, образуют систему алгебраических уравнений, решение которой позволяет определить векторный потенциал в совокупности точек области.

Глава двадцать восьмая

Расчет индуктивностей

28.1. Общие выражения для взаимной и собственной индуктивностей

В настоящей главе будем рассматривать статические индуктивности. Соответственно магнитные потоки, определяющие эти индуктивности, будем находить при постоянном токе. Статические индуктивности зависят от геометрических параметров, определяющих форму, размеры и взаимное расположение контуров, и от магнитной проницаемости среды, окружающей контуры, а также от магнитной проницаемости вещества самих проводящих контуров. Если $\mu = \text{const}$, то индуктивности контуров не зависят от токов в них.

Обратим особое внимание на то, что индуктивности определяются потокосцеплением, т. е. для вычисления индуктивности электрического контура необходимо определить полное число сцеплений единичных линий магнитной индукции с контуром.

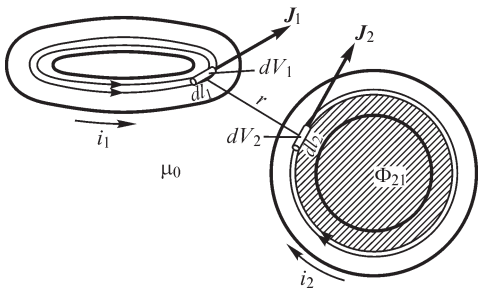

Рис. 28.1

Получим общее выражение для взаимной индуктивности двух контуров произвольно заданной формы (рис. 28.1).

Предположим, что контуры находятся в воздухе и материал проводников неферромагнитный. Примем всюду $\mu = \mu_0$. Условимся обозначать потокосцепление взаимной индукции буквой с двумя индексами: первый индекс будет указывать, с каким контуром сцепляется поток, второй — каким током обусловливается поток. Будем искать потокосцепление Ψ_{21} со вторым контуром, обусловленное током i_1 в первом контуре.

Представим себе весь проводник второго контура подразделенным на элементарные трубки тока i_2 (рис. 28.1). Поток, сцепляющийся с одной из таких трубок, равен линейному интегралу векторного потенциала вдоль оси этой трубки

$$\Phi_{21} = \oint_{l_2} \boldsymbol{A}_2 \, d\boldsymbol{l}_2.$$

На рис. 28.1 заштрихована поверхность, сквозь которую проходит поток Φ_{21}.

Этот поток сцепляется с током di_2, протекающим в рассматриваемой трубке тока и составляющим долю di_2/i_2 всего тока i_2 во втором контуре. Следовательно, он вносит в величину Ψ_{21} долю, равную

$$d\Psi_{21} = \frac{di_2}{i_2} \oint_{l_2} \boldsymbol{A}_2 \, d\boldsymbol{l}_2.$$

Так как ток di_2 имеет постоянное значение вдоль всей трубки тока, то его можно внести под знак интеграла. Обозначая через ds_2 сечение трубки тока и через $\boldsymbol{J}_2$ плотность тока в этом сечении, можем написать $di_2 = \boldsymbol{J}_2 ds_2$. Последнее равенство приобретает вид

$$d\Psi_{21} = \frac{1}{i_2}\oint_{l_2}(\boldsymbol{J}_2\, d\boldsymbol{s}_2)(\boldsymbol{A}_2\, d\boldsymbol{l}_2).$$

Так как векторы $\boldsymbol{J}_2$ и $d\boldsymbol{l}_2$ имеют одно и то же направление, то $(\boldsymbol{J}_2\, d\boldsymbol{s}_2)\ (\boldsymbol{A}_2\, d\boldsymbol{l}_2) = (d\boldsymbol{l}_2\ d\boldsymbol{s}_2)\ (\boldsymbol{A}_2\ \boldsymbol{J}_2)$ и, следовательно,

$$d\Psi_{21} = \frac{1}{i_2}\oint_{l_2}(\boldsymbol{J}_2\boldsymbol{A}_2)(d\boldsymbol{s}_2\, d\boldsymbol{l}_2).$$

Интегрируя по всему сечению s_2 второго проводника, получим

$$\Psi_{21} = \frac{1}{i_2}\int_{s_2}\oint_{l_2}(\boldsymbol{J}_2\boldsymbol{A}_2)(d\boldsymbol{s}_2\, d\boldsymbol{l}_2).$$

Произведение $d\boldsymbol{s}_2 d\boldsymbol{l}_2$ есть элемент объема dV_2 второго проводника. Поэтому потокосцепление Ψ_{21} может быть представлено в виде

$$\Psi_{21} = \frac{1}{i_2}\int_{V_2}\boldsymbol{J}_2\boldsymbol{A}_2\, dV_2.$$

Так как мы желаем определить величину Ψ_{21} как потокосцепление взаимной индукции, обусловленное током i_1, то соответственно и векторный потенциал $\boldsymbol{A}_2$ необходимо выразить через ток i_1. Согласно изложенному в § 27.2, имеем

$$\boldsymbol{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_1}\boldsymbol{J}_1\frac{dV_1}{r},$$

где V_1 — объем пространства, занимаемого первым контуром; r — расстояние от элемента объема dV_1 до точки, в которой определяется векторный потенциал, и $\boldsymbol{J}_1$ — вектор плотности тока в точках элемента объема dV_1. Подставляя выражение для векторного потенциала в последнее выражение для Ψ_{21}, получаем

$$\Psi_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi i_2}\int_{V_1}\int_{V_2}\boldsymbol{J}_1\boldsymbol{J}_2\frac{dV_1\, dV_2}{r}.$$

Отсюда находим общее выражение для взаимной индуктивности:

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_1} = \frac{\mu_0}{4\pi i_1 i_2}\int_{V_1}\int_{V_2}\boldsymbol{J}_1\boldsymbol{J}_2\frac{dV_1\, dV_2}{r}.$$

Интегрирование должно быть произведено один раз по всему объему первого проводника и другой раз — по всему объему второго проводника, причем r есть расстояние между элементами объемов dV_1 и dV_2. Полученная формула верна только для однородной в магнитном отношении среды, так как использованное при ее выводе выражение для векторного потенциала справедливо только в этом случае. В частности, и магнитная проницаемость материала самих проводников

должна быть такой же, как и проницаемость окружающей среды. Как было ранее отмечено, при μ = const взаимная индуктивность не зависит от токов в контурах. Наличие токов i_1 и i_2 в последнем выражении не противоречит этому положению. Действительно, внеся токи под знаки интегралов, получим в подынтегральном выражении отношения $\boldsymbol{J}_1/i_1$ и $\boldsymbol{J}_2/i_2$, которые характеризуют распределение токов в проводниках. Но при постоянном токе распределение тока зависит только от формы проводника и не изменяется при изменении тока. Поэтому отношение плотности тока в каждой точке проводника ко всему току полностью определяется формой проводника.

Если бы мы стали определять потокосцепление взаимной индукции Ψ_{12} с первым контуром, обусловленное током во втором контуре, то, очевидно, получили бы

$$\Psi_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi i_1}\int_{V_1}\int_{V_2} \boldsymbol{J}_1\boldsymbol{J}_2\,\frac{dV_1 dV_2}{r}.$$

Следовательно, для взаимной индуктивности $M_{12} = \Psi_{12}/i_2$ мы имели бы то же самое выражение, что и для M_{21}. Тем самым подтверждается важный вывод, полученный в первой части из условия независимости энергии магнитного поля токов от порядка установления токов, а именно: при μ = const имеет место равенство

$$M_{kp} = M_{pk}.$$

Получим общее выражение для собственной индуктивности L контура, пользуясь найденным общим выражением для взаимной индуктивности M_{21} двух контуров. Представим себе два совершенно одинаковых контура, сближающихся до полного слияния так, что один из них занимает объем другого. После такого слияния, по существу, уже остается только один контур. Из выражения для M_{21} нетрудно получить выражение для L такого контура, приняв $i_1 = i_2 = i$ и $V_1 = V_2 = V$. Имеем

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi i^2}\int_{V}\int_{V} \boldsymbol{J}\boldsymbol{J}'\,\frac{dV\,dV'}{r},$$

причем $\boldsymbol{J}$ — плотность тока в элементе объема dV; $\boldsymbol{J}'$ — плотность тока в элементе dV' и r — расстояние между элементами объема dV и dV'. Интегрирование производится дважды по объему всего проводника (рис. 28.2).

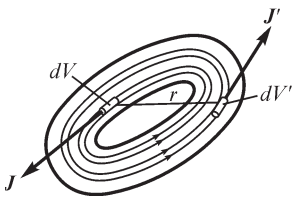

Рис. 28.2

Приведенное выше выражение для расчета индуктивности L можно получить, используя также соотношение $W = \frac{1}{2}\int_{V_J} \boldsymbol{A}\boldsymbol{J}\,dV_J$ (см. § 27.4), связывающее величины W, $\boldsymbol{J}$ и $\boldsymbol{A}$. Учитывая, что $\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_J} \boldsymbol{J}\,\frac{dV_J}{r}$, для индуктивности $L = 2W_м/i^2$ находим выражение, совпадающее с найденным выше при $V_J = V$ и $V_J' = V_J$.

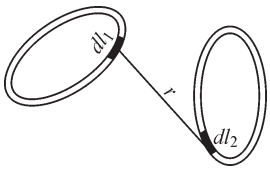

Рис. 28.3

Выражение для M_{21} весьма упрощается для контуров из линейных проводников, поперечные размеры сечений которых весьма малы по сравнению с длиной контуров и по сравнению с расстоянием между ними (рис. 28.3). В таком случае нет необходимости делить проводники на трубки тока. Векторный потенциал в центре элемента dl_2 проводника второго контура можно вычислить по формуле (см. § 27.2)

$$\boldsymbol{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l_1}\frac{i_1 d\boldsymbol{l}_1}{r}.$$

Потокосцепление Ψ_{21} при этом может быть принято равным потоку Φ_{21} сквозь поверхность, ограниченную осью проводника второго контура, т. е.

$$\Psi_{21} = \Phi_{21} = \oint_{l_2}\boldsymbol{A}_2\, d\boldsymbol{l}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{i_1 d\boldsymbol{l}_1 d\boldsymbol{l}_2}{r}.$$

Разделив Ψ_{21} на i_1, получаем

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{d\boldsymbol{l}_1 d\boldsymbol{l}_2}{r}.$$

Представляется возможным упростить и выражение для L контура, образованного из тонкого проводника. Однако упрощенную формулу нельзя при этом привести в точности к тому виду, к которому было приведено выражение для M_{21}, т. е. нельзя свести в формуле для L двукратное интегрирование по объему проводника к двукратному интегрированию по оси проводника, так как такой интеграл обращается в бесконечность.

Упрощение формулы для L контура из тонкого проводника круглого сечения можно выполнить следующим путем. Разделим потокосцепление Ψ на две части: $\Psi = \Psi_{внеш} + \Psi_{внутр}$, причем $\Psi_{внеш}$ определяется линиями магнитной индукции, охватывающими весь проводник, следовательно, расположенными целиком во внешней по отношению к проводнику среде, и $\Psi_{внутр}$ определяется линиями магнитной индукции, проходящими внутри тела проводника. Линии, определяющие величину $\Psi_{внеш}$, проходят сквозь заштрихованную на рис. 28.4 поверхность, ограниченную контуром l_2, лежащим на внутренней поверхности проводника. В случае если проводник образует один виток, то каждая такая линия сцепляется один раз с проводником и, следовательно,

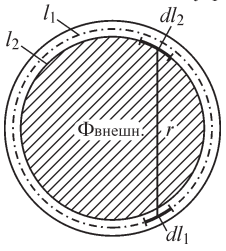

Рис. 28.4

$$\Psi_{внеш} = \Phi_{внеш} = \oint_{l_2}\boldsymbol{A}_2\, d\boldsymbol{l}_2,$$

где $\boldsymbol{A}_2$ — значение векторного потенциала на контуре l_2. Величину $\boldsymbol{A}_2$ можем приближенно вычислить по формуле

$$\boldsymbol{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l_1}\frac{i_1 d\boldsymbol{l}_1}{r}.$$

Предположим, что весь ток i течет по оси проводника. При этом интегрирование производится по всей оси l_1 проводника. Интеграл имеет конечное значение, так как все точки контура l_2, в которых определяется $\boldsymbol{A}_2$, лежат на конечном расстоянии r от точек контура l_1.

Таким образом,

$$\Psi_{\text{внеш}} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{d\boldsymbol{l}_1 d\boldsymbol{l}_2}{r}.$$

Величину $\Psi_{\text{внутр}}$ приближенно можно принять равной внутреннему потокосцеплению в отрезке длиной l_1 бесконечно длинного прямолинейного провода круглого сечения, поскольку радиус кривизны контура проводника велик по сравнению с поперечными размерами сечения. Согласно выражению, полученному в ч. I, имеем

$$\Psi_{\text{внутр}} = \frac{\mu_0}{8\pi} i l_1,$$

где μ — абсолютная магнитная проницаемость материала провода. Индуктивность L можно представить в виде

$$L = \frac{\Psi_{\text{внеш}}}{i} + \frac{\Psi_{\text{внутр}}}{i} = L_{\text{внеш}} + L_{\text{внутр}},$$

причем $L_{\text{внеш}}$ называют в н е ш н е й, а $L_{\text{внутр}}$ — в н у т р е н н е й индуктивностью. Итак, можем написать следующее упрощенное выражение для индуктивности контура из тонкого проводника круглого сечения:

$$L = L_{\text{внеш}} + L_{\text{внутр}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{d\boldsymbol{l}_1 d\boldsymbol{l}_2}{r} + \frac{\mu l_1}{8\pi}.$$

28.2. Взаимная индуктивность двух круговых контуров

Найдем выражение для взаимной индуктивности круговых контуров, расположенных в параллельных плоскостях так, что их центры лежат на одной прямой, нормальной к этим плоскостям (рис. 28.5).

Искомую формулу получим, выполнив двукратное интегрирование вдоль обоих контуров согласно выражению

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{d\boldsymbol{l}_1 d\boldsymbol{l}_2}{r}.$$

Однако интегрирование уже было выполнено в § 27.16 при отыскании векторного потенциала в поле кругового тока. Именно для векторного потенциала A_2 на оси второго проводника, определяемого током i_1, протекающим в первом контуре, имеем выражение

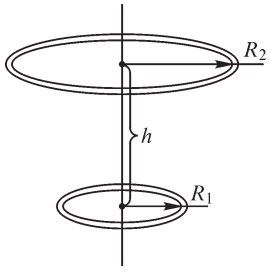

Рис. 28.5

$$A_2 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi}\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\, f(k).$$

При этом в соответствии с принятым в § 27.15 обозначением получаем

$$k^2 = \frac{4R_1R_2}{h^2 + (R_1 + R_2)^2}.$$

Здесь R_1 и R_2 — радиусы контуров и h — расстояние между их центрами. Принято $\mu = \mu_0$, так как предполагается, что контуры находятся в воздухе.

Функция $f(k)$ изображена в виде кривой на рис. 27.20. Она может быть представлена через полные эллиптические интегралы первого и второго рода согласно выражениям, приведенным в § 27.16. Вектор $\boldsymbol{A}_2$ касателен к оси проводника второго контура и вследствие симметрии имеет одинаковую величину вдоль всего второго контура. Следовательно, потокосцепление взаимной индукции со вторым контуром, обусловленное током i_1 в первом контуре, получается равным

$$\Psi_{21} = \oint_{l_2} \boldsymbol{A}_2\, d\boldsymbol{l}_2 = \oint_{l_2} A_2\, dl_2 = A_2 \oint_{l_2} dl_2 = A_2 2\pi R_2 = \mu_0 i_1 \sqrt{R_1R_2}\, f(k).$$

Таким образом, искомая взаимная индуктивность выражается формулой

$$M = \frac{\Psi_{21}}{i_1} = \mu_0 \sqrt{R_1R_2}\, f(k).$$

28.3. Индуктивность кругового контура

Найдем формулу для индуктивности круглого кольца из тонкого проводника круглого сечения (рис. 28.6). Внешняя индуктивность $L_{\text{внеш}}$, определяемая потоком $\Phi_{\text{внеш}}$, линии которого охватывают все сечение проводника, равна взаимной индуктивности между бесконечно тонкими круговыми контурами, один из которых, l_1, совпадает с осью проводника и другой, l_2, является внутренней, т. е. наименьшей, окружностью на поверхности проводника. Следовательно, полагая в последнем выражении § 28.2 $R_1 = R$ и $R_2 = R - a$, можем написать

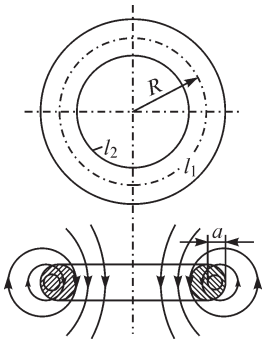

Рис. 28.6

$$L_{\text{внеш}} = \mu_0 \sqrt{R(R-a)}\, f(k) \approx \mu_0 R f(k),$$

где a — радиус сечения проводника и R — радиус кольца, причем $a \ll R$. Так как контуры l_1 и l_2 лежат в одной плоскости, то в выражении для k^2 следует принять $h = 0$. Имеем

$$k^2 = \frac{4(R-a)R}{(R-a+R)^2} = 1 - \frac{a^2}{4R^2 - 4Ra + a^2} \approx 1 - \left(\frac{a}{2R}\right)^2.$$

Следовательно,

$$k \approx \sqrt{1-\left(\frac{a}{2R}\right)^2} \approx 1-\frac{a^2}{8R^2}.$$

Величина $f(k)$, входящая в выражение для $L_{\text{внеш}}$, может быть определена из кривой на рис. 27.20. Однако для рассматриваемого случая $a \ll R$ можно получить приближенное выражение для $f(k)$. Так как $k \approx 1$, то приближенно имеем

$$f(k) = \left(\frac{2}{k} - k\right)K - \frac{2}{k}E \approx K - 2E.$$

Можно показать, что при $k \approx 1$ эллиптические интегралы $K(k)$ и $E(k)$ имеют следующие приближенные значения:

$$K \approx \ln\frac{4}{\sqrt{1-k^2}} \approx \ln\frac{8R}{a} \quad \text{и} \quad E \approx 1.$$

Следовательно,

$$L_{\text{внеш}} = \mu_0 R f(k) \approx \mu_0 R\left(\ln\frac{8R}{a} - 2\right).$$

Так как $l_1 = 2\pi R$, то внутренняя индуктивность выражается формулой

$$L_{\text{внутр}} = \frac{\mu l_1}{8\pi} = \frac{\mu R}{4}.$$

Следовательно,

$$L = \mu_0 R\left(\ln\frac{8R}{a} - 2\right) + \frac{\mu}{4}R.$$

Если провод из неферромагнитного материала, то $\mu \approx \mu_0$ и

$$L = \mu_0 R\left(\ln\frac{8R}{a} - 1{,}75\right).$$

Выражение для внутренней индуктивности получено в предположении равномерного распределения тока по сечению проводника, что соблюдается при постоянном токе. При переменном токе высокой частоты в случае резкого проявления поверхностного эффекта внутренний поток при $\mu = \mu_0$ будет мал, и точнее вычислять индуктивность по формуле

$$L = \mu_0 R\left(\ln\frac{8R}{a} - 2\right),$$

пренебрегая величиной $L_{\text{внутр}}$.

28.4. Метод участков

Полученные в § 28.1 выражения для индуктивностей контуров из тонких проводников дают основание ввести метод расчета, основанный на условных понятиях о взаимной индуктивности между участками проводников и об индуктивностях участков проводников.

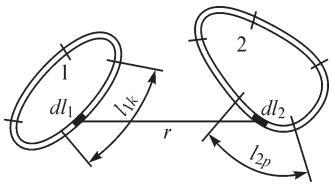

Рис. 28.7

Пусть имеются два контура. Разобьем первый контур на m участков и второй контур — на n участков (рис. 28.7). Длину k-го участка первого контура обозначим через l_{1k} и длину p-го участка второго контура — через l_{2p}. Разбивая в выражении для M_{21} интегралы по замкнутым контурам l_1 и l_2 на суммы интегралов, взятых вдоль участков контуров, будем иметь

$$M_{21} = \sum_{k=1}^{k=m} \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{l_{1k}} \int_{l_{2p}} \frac{d\boldsymbol{l}_1 d\boldsymbol{l}_2}{r}.$$

Выражение, стоящее под знаком двойной суммы, можем рассматривать как взаимную индуктивность $M_{1k,2p}$ между k-м участком первого контура и p-м участком второго контура. Таким образом,

$$M_{21} = \sum_{k=1}^{k=m} \sum_{p=1}^{p=n} M_{1k,2p}.$$

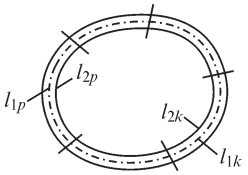

Рис. 28.8

Аналогично можно поступить при вычислении индуктивности контура. Разобьем весь контур на m участков (рис. 28.8). При этом пусть l_{1k} есть отрезок k-го участка по оси проводника, а l_{2p} — отрезок p-го участка по внутреннему контуру, лежащему на поверхности проводника. Хотя для тонкого проводника $l_{1k} = l_{2k}$, но необходимо различать эти два участка, так как в формуле для L интегрирование производится один раз по оси проводника, другой раз — по указанному внутреннему контуру. Формула для L принимает вид

$$L = \sum_{k=1}^{k=m} \sum_{p=1}^{p=m} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{l_{1k}} \int_{l_{2p}} \frac{d\boldsymbol{l}_1 d\boldsymbol{l}_2}{r} + L_{\text{внутр}}.$$

Выражение под знаком двойной суммы можно условно рассматривать при $k = p$ как внешнюю индуктивность $L_{\text{внеш}}$ k-го участка контура и при $k \neq p$ — как взаимную индуктивность M_{kp} между k-м и p-м участками контура. При вычислении M_{kp} можно интегрирование по отрезку внутреннего контура l_{2p} заменить интегрированием по отрезку оси l_{1p} того же p-го участка. Тогда будем иметь

$$M_{1k,2p} \approx M_{1k,1p} = M_{kp} \quad \text{и} \quad M_{1p,2k} \approx M_{1p,1k} = M_{pk}.$$

Учитывая, что $M_{kp} = M_{pk}$, получаем

$$L = \sum_{k=1}^{k=m} L_{\text{внеш}\,k} + 2\sum_{k=1}^{k=m} \sum_{p=1}^{p=m} M_{kp} + L_{\text{внутр}},$$

где

$$L_{\text{внеш}\,k} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{l_{1k}} \int_{l_{2k}} \frac{d\boldsymbol{l}_1 d\boldsymbol{l}_2}{r}; \quad M_{kp} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{l_{1k}} \int_{l_{1p}} \frac{d\boldsymbol{l}_1 d\boldsymbol{l}_1'}{r},$$

причем dl_1 — элемент на оси k-го участка, dl_1' — элемент на оси p-го участка.

В выражении для L во втором члене $p \neq k$ и определенное сочетание индексов k и p встречается только один раз независимо от порядка, в котором они стоят.

Рассмотренный метод облегчает расчет индуктивностей в тех случаях, когда контуры можно разбить на участки, имеющие простую форму, например на прямолинейные отрезки или на дуги окружностей.

28.5. Индуктивности контуров, составленных из прямолинейных отрезков

Формулы для взаимной индуктивности $M_{1k,\,2p}$ и индуктивности $L_{\text{внеш}\,k}$ участков проводов сходны с формулами для потенциальных коэффициентов отрезков проводов, полученными в § 25.6 по методу средних потенциалов. Различие заключается в множителях, стоящих перед знаками интегралов, и в том, что в формулы для индуктивностей входит скалярное произведение векторов $d\boldsymbol{l}_1$ и $d\boldsymbol{l}_2$, т. е. величина $d\boldsymbol{l}_1\, d\boldsymbol{l}_2 = \cos\theta\; dl_1 dl_2$, где θ — угол между направлениями элементарных отрезков dl_1 и dl_2, а в формулы для потенциальных коэффициентов входит произведение $dl_1 dl_2$ длин отрезков.

В случае когда отрезки l_1 и l_2 прямолинейны, величина $\cos\theta$ одинакова для всех элементов dl_1 и dl_2 и может быть вынесена за знак интеграла. При этом формула для взаимной индуктивности между этими отрезками приобретает вид

$$M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cos\theta \int_{l_1}\int_{l_2} \frac{dl_1 dl_2}{r}.$$

В формуле для собственной индуктивности $L_{\text{внеш}}$ прямолинейного отрезка необходимо принять $\cos\theta = 1$, и, следовательно,

$$L_{\text{внеш}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{l}\int_{l} \frac{dl_1 dl_2}{r}.$$

Эти формулы отличаются от формул для потенциальных коэффициентов α_{12} и α_{11} только множителями. Имеем

$$\frac{M_{12}}{\alpha_{12}} = \mu_0\varepsilon_0 l_1 l_2 \cos\theta; \quad \frac{L_{\text{внеш}}}{\alpha_{11}} = \mu_0\varepsilon_0 l^2.$$

На это обстоятельство обратил внимание в одной из своих работ Л. А. Цейтлин. Оно имеет важное значение, так как дает возможность имеющиеся в литературе формулы для индуктивностей использовать для вычисления потенциальных коэффициентов и обратно.

В § 25.6 была выведена формула для коэффициентов α_{12} двух параллельных отрезков прямых проводов одинаковой длины l, расположенных так, что начала отрезков находятся на одном к ним перпендикуляре. Расстояние между осями проводов равно D.

Если направления обхода, которые считаем положительными, для обоих отрезков совпадают, то $\theta = 0$ и $\cos\theta = 1$. Если положительные направления обоих отрезков противоположны, то $\theta = \pi$ и $\cos\theta = -1$. Используя выражения для отношения M_{12}/α_{12}, получаем

$$M = \pm\mu_0\varepsilon_0 l^2 \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 l}\left(\operatorname{Arsh}\frac{l}{D} - \sqrt{\frac{D^2}{l^2}+1} + \frac{D}{l}\right).$$

Учитывая равенство

$$\operatorname{Arsh}\frac{l}{D} = \left(\ln\frac{l}{D} + \sqrt{\frac{l^2}{D^2}+1}\right),$$

можем написать

$$M = \pm\frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\ln\frac{l+\sqrt{l^2+D^2}}{D} - \frac{\sqrt{l^2+D^2}-D}{l}\right).$$

В частном случае при $l \gg D$ получаем

$$M = \pm\frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\ln\frac{2l}{D} - 1\right).$$

Из последней формулы непосредственно вытекает выражение для внешней индуктивности прямолинейного отрезка проводника длиной l, имеющего круглое сечение радиуса r_0, причем $r_0 \ll l$. В этой формуле необходимо заменить D на r_0 и взять знак плюс. Имеем

$$L_{\text{внеш}} = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\ln\frac{2l}{r_0} - 1\right).$$

Обратим особое внимание на то, что коэффициенты α_{12} были вычислены в § 25.6 приближенным методом средних потенциалов, основанным на допущении, что заряд распределен равномерно по длине провода, т. е. что линейная плотность заряда одинакова по всей длине провода. Однако формулы для M и L в этом отношении вполне точны, так как постоянный ток имеет одно и то же значение на всей длине провода.

28.6. Индуктивность прямоугольной рамки

Воспользуемся методом участков для вычисления индуктивности прямоугольной рамки из провода круглого сечения (рис. 28.9). Длины сторон рамки обозначим через a и b, радиус сечения — через r_0. Пусть $a \gg r_0$ и $b \gg r_0$.

Взаимная индуктивность между взаимно перпендикулярными сторонами рамки равна нулю, так как здесь $\cos\theta = 0$. Следовательно, достаточно учесть только взаимные индуктивности между парами противоположных параллельных сторон рамки. Для этих сторон $\cos\theta = -1$, так как, перемещаясь вдоль контура рамки, мы обходим противолежащие стороны в противоположных направлениях.

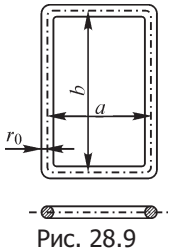

Рис. 28.9

Для сторон рамки, имеющих длину $l = a$ и расстояние между осями проводников $D = b$, обозначив через $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ диагональ рамки, получаем

$$M_a = -\frac{\mu_0 a}{2\pi}\left(\ln\frac{a+d}{b} - \frac{d-b}{a}\right) = \frac{\mu_0 a}{2\pi}\left(\ln\frac{b}{a+d} + \frac{d-b}{a}\right).$$

Соответственно для сторон, имеющих длину b и расстояние между осями проводов a, можем написать:

$$M_b = \frac{\mu_0 b}{2\pi}\left(\ln\frac{a}{b+d} + \frac{d-a}{b}\right).$$

Внешние индуктивности сторон, имеющих длины a и b, равны

$$L_{\text{внеш}\,a} = \frac{\mu_0 a}{2\pi}\left(\ln\frac{2a}{r_0} - 1\right); \quad L_{\text{внеш}\,b} = \frac{\mu_0 b}{2\pi}\left(\ln\frac{2b}{r_0} - 1\right).$$

Внутреннюю индуктивность всей рамки находим, замечая, что длина контура равна $2(a + b)$. Следовательно,

$$L_{\text{внутр}} = \frac{\mu}{4\pi}(a+b),$$

где μ — абсолютная магнитная проницаемость материала провода. Таким образом, получаем окончательно

$$L = 2L_{\text{внеш}\,a} + 2L_{\text{внеш}\,b} + 2M_a + 2M_b + L_{\text{внутр}} =$$
$$= \frac{\mu_0}{\pi}\left[a\ln\frac{2ab}{r_0(a+d)} + b\ln\frac{2ab}{r_0(b+d)} - 2(a+b-d)\right] + \frac{\mu}{\pi}\left(\frac{a+b}{4}\right).$$

28.7. Взаимная индуктивность между двумя двухпроводными линиями

Найдем выражение для взаимной индуктивности между двумя двухпроводными линиями, образованными проводами круглого сечения. На рис. 28.10 цифрой 1 помечено сечение прямого провода первой линии и цифрой 1′ — сечение обратного провода этой линии. Соответственно цифрами 2 и 2′ помечены сечения прямого и обратного проводов второй линии. Пусть длина линии l много больше всех расстояний между проводами. В таком случае при подсчете величины M можно пренебречь отрезками, соединяющими провода в начале и в конце линии и изображенными на рис. 28.10 штрихами. Пользуясь методом участков, находим

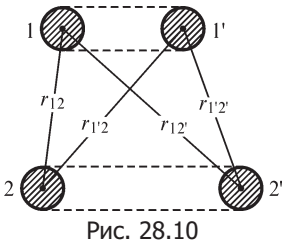

Рис. 28.10

$$M = M_{12} + M_{12'} + M_{1'2'} + M_{1'2} = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\ln\frac{2l}{r_{12}} - 1\right) - \frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\ln\frac{2l}{r_{12'}} - 1\right) +$$
$$+ \frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\ln\frac{2l}{r_{1'2'}} - 1\right) - \frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\ln\frac{2l}{r_{1'2}} - 1\right) = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{r_{12'}r_{1'2}}{r_{12}r_{1'2'}}.$$

В числителе под знаком логарифма стоят расстояния между прямым проводом одной линии и обратным проводом другой линии, а в знаменателе — рас-

стояния между прямыми и обратными проводами обеих линий. Величина M может оказаться положительной или отрицательной в зависимости от того, будет ли величина, стоящая под знаком логарифма, больше или меньше единицы. Для расположения проводов, показанного на рис. 28.10, $M > 0$. Это значит, что при обоих положительных токах в линиях потоки самоиндукции и взаимной индукции направлены согласно.

Если бы мы поменяли местами прямой и обратный провода в одной из линий, т. е. изменили условное положительное направление тока в одной из линий, то получили бы для такого же расположения проводов $M < 0$. Это значит, что при обоих положительных токах потоки были бы направлены встречно.

28.8. Индуктивность двухпроводной линии

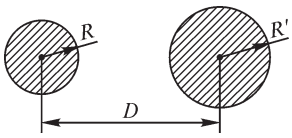

Рис. 28.11

Определим, пользуясь методом участков, индуктивность петли, образованной двумя параллельными проводами круглого сечения (рис. 28.11). Расстояние между осями проводов — D, радиусы их сечений — R и R', длина петли — l. Можем написать

$$L = L_{\text{внеш}1} + L_{\text{внеш}1'} + 2M_{11'} + L_{\text{внутр}},$$

где

$$L_{\text{внеш}1} = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\ln\frac{2l}{R} - 1\right); \quad L_{\text{внеш}1'} = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\ln\frac{2l}{R'} - 1\right);$$

$$M_{11'} = -\frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\ln\frac{2l}{D} - 1\right); \quad L_{\text{внутр}} = \frac{\mu 2l}{8\pi} = \frac{\mu l}{4\pi},$$

причем μ — абсолютная магнитная проницаемость материала проводов. Получаем

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{D^2}{RR'} + \frac{\mu l}{4\pi} = \frac{l}{\pi}\left(\mu_0 \ln\frac{D}{\sqrt{RR'}} + \frac{\mu}{4}\right).$$

В важном частном случае для двухпроводной линии обычно $R' = R$.

При этом

$$L = \frac{l}{\pi}\left(\mu_0 \ln\frac{D}{R} + \frac{\mu}{4}\right).$$

При $\mu > \mu_0$, например для стальных проводов, эта формула является приближенной, так как наличие ферромагнитной среды искажает поле около проводов. Однако этим искажением можно пренебречь, если радиусы сечений проводов малы по сравнению с расстоянием между проводами. При $\mu = \mu_0$ эта формула, как можно показать, дает при $l \gg D$ точное значение статической индуктивности для любых соотношений между D и R.

28.9. Индуктивность трехфазной линии

В каждом проводе трехфазной линии передачи индуктируется не только ЭДС самоиндукции, обусловленная переменным током в этом проводе, но также и

ЭДС взаимной индукции, обусловленная токами в других проводах линии. Рассмотрим трехпроводную линию, т. е. линию, в которой отсутствует нейтральный провод. Обычно активные сопротивления r и индуктивности L одинаковы для всех трех проводов. Однако взаимные индуктивности M_{12}, M_{23} и M_{31} между проводами при несимметричном расположении проводов будут отличаться друг от друга. Если токи в линии изменяются по синусоидальному закону, то можно воспользоваться символическим методом и для падения напряжений в проводах написать выражения:

$$\dot{U}_1 = (r + j\omega L)\,\dot{I}_1 + j\omega M_{12}\dot{I}_2 + j\omega M_{13}\dot{I}_3;$$
$$\dot{U}_2 = (r + j\omega L)\,\dot{I}_2 + j\omega M_{23}\dot{I}_3 + j\omega M_{21}\dot{I}_1;$$
$$\dot{U}_3 = (r + j\omega L)\dot{I}_3 + j\omega M_{31}\dot{I}_1 + j\omega M_{13}\dot{I}_2.$$

Предположим, что токи в линии образуют симметричную систему, т. е. $\dot{I}_2 = a^2\dot{I}_1$; $\dot{I}_3 = a\dot{I}_1$, где $a = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $a^2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Учитывая, что $a^3 = 1$, можем переписать уравнения в виде

$$\left.\begin{aligned}\dot{U}_1 &= [r + j\omega\,(L + a^2M_{12} + aM_{13})]\,\dot{I}_1;\\ \dot{U}_2 &= [r + j\omega\,(L + a^2M_{23} + aM_{21})]\,\dot{I}_2;\\ \dot{U}_3 &= [r + j\omega\,(L + a^2M_{31} + aM_{32})]\,\dot{I}_3.\end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Выражения, стоящие в круглых скобках, все вещественны только в случае симметричного расположения проводов, когда

$$M_{12} = M_{23} = M_{31} = M.$$

Действительно, принимая во внимание, что $a^2 + a = -1$, в этом случае получаем

$$\dot{U}_1 = [r + j\omega\,(L - M)]\,\dot{I}_1;$$
$$\dot{U}_2 = [r + j\omega\,(L - M)]\,\dot{I}_2;$$
$$\dot{U}_3 = [r + j\omega\,(L - M)]\,\dot{I}_3.$$

Разность $L - M = L'$ в последних уравнениях можно рассматривать как эквивалентную индуктивность одного провода. Индуктивность L уединенного провода длиной l и с радиусом сечения R выражается формулой

$$L = L_{\text{внеш}} + L_{\text{внутр}} = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\ln\frac{2l}{R} - 1\right) + \frac{\mu l}{8\pi},$$

где μ — абсолютная магнитная проницаемость материала провода.

Взаимная индуктивность M между параллельными проводами диной l с расстоянием между осями D при $l \gg D$ выражается формулой

$$M = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\ln\frac{2l}{D} - 1\right).$$

При этом перед формулой следует взять знак плюс, так как положительные направления токов во всех проводах мы принимаем в одну сторону вдоль линии передачи. Таким образом,

$$L' = L - M = \frac{l}{2\pi}\left(\mu_0 \ln\frac{D}{R} + \frac{\mu}{4}\right).$$

При несимметричном расположении проводов расстояния между осями проводов не равны друг другу: $D_{12} \neq D_{23} \neq D_{31}$.

Однако если через равные интервалы вдоль линии осуществлена транспозиция проводов, то выражение для L' сохранит свой вид, если под M понимать среднее значение взаимной индуктивности для трех участков линии:

$$M = \frac{1}{3}(M_{12} + M_{23} + M_{31}) = \frac{l}{2\pi}\mu_0\left(\ln\frac{2l}{D'} - 1\right),$$

где

$$D' = \sqrt[3]{D_{12}D_{23}D_{31}}.$$

В несимметричной трехфазной линии при прохождении по ней переменного тока имеют место своеобразные энергетические процессы. В уравнениях (*) при $M_{12} \neq M_{23} \neq M_{31}$ выражения, стоящие в круглых скобках, являются комплексными. Их мнимые части после умножения на $j\omega$ дадут вещественные величины, имеющие смысл активных сопротивлений.

Складывая выражения, стоящие в уравнениях (*) в круглых скобках для всех трех фаз, получим при каждой взаимной индуктивности вещественный множитель $a^2 + a = -1$. Следовательно, сумма дополнительных активных сопротивлений во всех трех фазах равна нулю, т. е. если в отдельных фазах они положительны, то в других они отрицательны. Иными словами, если из одних фаз энергия отдается, то в другие она поступает в том же количестве, т. е. совершается перенос энергии путем электромагнитной индукции из одной фазы в другую.

В заключение главы отметим, что разработке методов расчета индуктивностей посвящен ряд работ советских авторов: Г. Н. Петрова, Л. А. Цейтлина, В. А. Фока и других.

Вопросы, упражнения, задачи к главам 26, 27 и 28

26.1. Электрическое поле постоянных токов в диэлектрике и в проводящей среде

ВОПРОСЫ

1. Чем различаются электрические поля, определяемые понятиями «статические» и «стационарные»?

2. Почему при протекании электрического тока по проводам, выполненным из вещества с конечной электрической проводимостью, в окружающем их диэлектрике возникает электрическое поле?

3. (О) По проводам, находящимся в диэлектрике, протекает постоянный ток. В каких точках величина $\operatorname{div} \boldsymbol{D}$ не равна нулю?

4. (О) Проводящее тело расположено в диэлектрике вблизи провода, по которому протекает постоянный электрический ток. Существует ли электрическое поле внутри проводящего тела? Каково значение плотности электрического заряда *а*) внутри тела, *б*) на его поверхности, *в*) в диэлектрике, *г*) на поверхности провода с током, *д*) внутри провода с током?

5. Постоянный ток течет по проводу, в объеме которого имеется полость. Существует ли электрическое поле внутри полости?

6. В диэлектрике выделен некоторый объем. Можно ли, не выходя за пределы этого объема, определить, является ли поле в объеме электростатическим или стационарным электрическим полем постоянного тока?

7. Почему в некоторых случаях стационарное электрическое поле в диэлектрике можно рассматривать как электростатическое?

8. Какое из полей в диэлектрике с большим основанием можно рассматривать как электростатическое: поле проводов высоковольтной линии передачи или поле шин низковольтной сильноточной линии, например, шин электросварочного устройства?

9. (О) На границе двух сред с различными удельными электрическими проводимостями выполняется неравенство $\operatorname{div} \boldsymbol{E} \neq 0$. Свидетельствует ли оно о существовании электрических зарядов на поверхности раздела сред?

10. Во сколько раз изменяется густота линий напряженности картины электрического поля постоянного тока, направленных по нормали к границе раздела двух сред с удельными электрическими проводимостями γ_1 и γ_2?

11. (О) В проводящую среду с удельной электрической проводимостью γ введен электрод проводимостью $\gamma_1 \gg \gamma$, в который входит ток. Каким следует принять граничное условие для потенциала на поверхности электрода при расчете электрического поля в проводящей среде?

12. В электростатическом поле трубки вектора электрического смещения опираются на равные заряды противоположных знаков. Каково аналогичное утверждение для трубок вектора плотности электрического тока в проводящей среде?

13. Почему в некоторых случаях целесообразно перейти от исследования электростатического поля к экспериментальному изучению электрического поля тока в проводящей среде?

14. (О) При выполнении какого условия поверхность заземляющего электрода можно считать эквипотенциальной? Выполняется ли это условие на практике?

УПРАЖНЕНИЯ

1. (Р) Запишите уравнения, которым удовлетворяет электрический потенциал стационарного поля в *а*) однородном, *б*) неоднородном диэлектрике.

2. (Р) Длинная двухпроводная линия постоянного тока с проводами круглого сечения с радиусом R протянута в однородном неидеальном диэлектрике с удельной электрической проводимостью γ. Сопротивление двух проводов линии на единицу ее длины равно r. На входных зажимах линии действует напряжение $U_{вх}$. Найдите зависимость напряжения на выходных зажимах линии от ее длины l при условии, что линия *а*) разомкнута, *б*) замкнута на резистор $r_н$. Расстояние D между осями проводов значительно превышает их радиусы.

3. (Р) На двух противоположных сторонах квадратной проводящей пластины постоянной толщиной d заданы потенциалы U_1 и U_2. Покажите, что ток i пластины не зависит от размеров ее сторон.

4. (Р) Две противоположные стороны 1, 2 прямоугольной пластины постоянной толщиной (рис. В26.1) покрыты слоем вещества, удельная электрическая проводимость $\gamma_э$ которого значительно больше удельной электрической проводимости $\gamma_п$ вещества пластины. Они присоединены к источнику тока. В пластине имеется вырез A, а также трещина AB, препятствующая прохождению тока. Другой вырез B в пластине заполнен веществом с удельной электрической проводимостью $\gamma \neq \gamma_п$. Запишите уравнение, которое описывает потенциал электрического поля, а также краевые и граничные условия на сторонах 1, 2, 3, 4 пластины, вырезах и трещине.

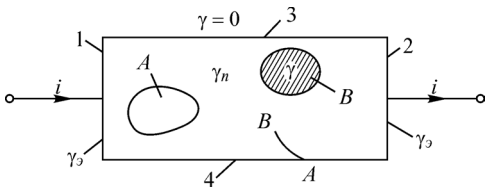

Рис. В26.1

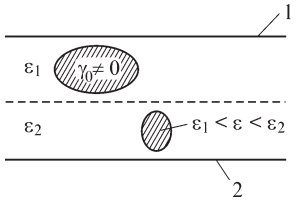

Рис. В26.2

5. (Р) Между двумя плоскими заряженными пластинами 1, 2 конечных размеров (рис. В26.2) имеется два слоя диэлектрика с проводящим и диэлектрическим вкраплениями. Пользуясь методом электростатической аналогии, изобразите устройство, поле постоянного тока в котором аналогично электростатическому полю между пластинами.

6. (Р) Получите формулу и постройте кривую зависимости проводимости G изоляции цилиндрического конденсатора от расстояния D между осями обкладок.

Рассчитайте G при радиусах обкладок $R_1 = 5$ см, $R_2 = 10$ см, $D = 2$ см; удельная электрическая проводимость неидеального диэлектрика $\gamma = 10^{-9}$ См/м. Длина обкладок конденсатора 1 м.

7. (Р) Удельные электрические проводимости диэлектриков слоев двухслойного цилиндрического коаксиального кабеля равны $\gamma_1 = 10^{-8}$ См/м, $\gamma_2 = 10^{-9}$ См/м. Радиусы обкладок и граничной поверхности слоев $R_1 = 3$ см, $R_3 = 5$ см, $R_2 = 4$ см. Определите подведенное к конденсатору напряжение, при котором ток утечки составляет $2 \cdot 10^{-3}$ А. Длина кабеля 1 км.

8. (Р) Диэлектрическая проницаемость среды, окружающей двухпроводную линию, равна $\varepsilon = 2\varepsilon_0$, ее удельная электрическая проводимость $\gamma = 10^{-8}$ См/м. При какой частоте подведенного к линии синусоидального напряжения амплитуда тока проводимости в среде равна амплитуде тока электрического смещения?

27.1. Скалярный потенциал магнитного поля

ВОПРОСЫ

1. Какой характер имеет магнитное поле, скалярный потенциал которого изменяется по линейному закону вдоль одной из координат и не зависит от двух других координат?

2. Какому уравнению удовлетворяет скалярный магнитный потенциал поля в *а*) однородной в магнитном отношении среде, *б*) неоднородной среде?

3. (О) Какие ограничения следует наложить на выбор пути интегрирования вектора напряженности магнитного поля, чтобы его скалярный потенциал был однозначным?

4. Почему, несмотря на неоднозначность скалярного магнитного потенциала, определяемая с его помощью напряженность поля однозначна?

5. (О) Может ли скалярный магнитный потенциал иметь разрывы в некоторых точках пространства? Могут ли иметь разрывы его первые производные по пространственным координатам?

6. (О) В чем заключается упрощение расчета исходного вихревого поля $\boldsymbol{H}$ при разложении его на вихревую $\boldsymbol{H}_в$ и потенциальную $-\text{grad}\, U_м$ составляющие: $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_в - \text{grad}\, U_м$?

7. (О) Правую часть уравнения $\text{div}\, \mu\, \text{grad}\, U_м = \text{div}\, \mu \boldsymbol{H}_в$, взятую с обратным знаком, по аналогии с уравнением относительно потенциала электрического поля можно рассматривать как объемную плотность «магнитных» зарядов. Какова размерность «магнитных» зарядов, их объемной, поверхностной и линейной плотности?

8. Почему вихревую составляющую $\boldsymbol{H}_в$ поля рассчитать значительно проще, чем искомое вихревое поле $\boldsymbol{H}$?

9. Потенциал $U_м$ вихревого поля в области, где протекает электрический ток, не может быть введен в рассмотрение. Почему все же можно ввести и рассчитать

скалярную функцию во всем пространстве, включая и ту его часть, где протекает электрический ток?

10. Вихревую составляющую поля $\boldsymbol{H}_{\text{в}}$, удовлетворяющую уравнению rot $\boldsymbol{H}_{\text{в}} = \boldsymbol{J}$, можно задать не единственным способом. Какими соображениями можно руководствоваться при выборе того или иного поля $\boldsymbol{H}_{\text{в}}$?

11. (О) Вихревую составляющую $\boldsymbol{H}_{\text{в}}$ поля можно рассчитать, пользуясь законом Био–Савварра $\boldsymbol{H}_{\text{в}} = \dfrac{1}{4\pi}\int\limits_V [\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{r}]\,r^{-3}dV$. При этом div $\boldsymbol{H}_{\text{в}} \equiv 0$. Где располагаются в этом случае источники потенциальной составляющей –grad $U_{\text{м}}$ поля, если среда *а*) однородна, *б*) неоднородна?

УПРАЖНЕНИЯ

1. (Р) Убедитесь в том, что скалярный магнитный потенциал можно описать в однородной среде выражением: *а*) $U_{\text{м}} = (ax^2 + by^2)$, *б*) $U_{\text{м}} = (ax + by - cz)$, *в*) $U_{\text{м}} = a(x - y)$, *г*) $U_{\text{м}} = a(x + y - 2z)$, *д*) $U_{\text{м}} = ax^2$, *е*) $U_{\text{м}} = U_0 e^{-\alpha y}$, *ж*) $U_{\text{м}} = U_0 \sin kz$, *з*) $U_{\text{м}} = a(x^2 + y^2 + z^2)^{-0,5}$, *и*) $U_{\text{м}} = (ax^2y + by^2z)$.

2. (Р) Осевая и угловая составляющие магнитной индукции равны соответственно $B_z = 0{,}5\,B_0(1 - \cos az)$, $B_\alpha = 0$. Определите ее радиальную составляющую B_r.

3. (Р) Покажите, что эквивалентный току полный фиктивный магнитный заряд должен быть равен нулю.

4. (Р) Получите выражение для расчета вихревой составляющей напряженности $H_{\text{в}y}$ магнитного поля, связывающее ее с плотностью тока J_z при рассмотрении плоскопараллельного магнитного поля и допущении, что $H_{\text{в}x} = 0$.

5. (О) Электрические токи $+i$ и $-i$ протекают по длинным прямолинейным шинам прямоугольного сечения (рис. В27.1). Рассматривая магнитное поле как плоскопараллельное и принимая $\boldsymbol{H}_{\text{в}} = \boldsymbol{j}\,H_{\text{в}y}$, рассчитайте функции $H_{\text{в}y} = H_{\text{в}y}(x, y)$, div $\mu_0\,\boldsymbol{H}_{\text{в}} = \mu_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{H}_{\text{в}y}}{\partial y} = f(x, y)$ и изобразите на графике кривую $H_{\text{в}y} = H_{\text{в}y}(x)$ при $0 \le x \le D$, $0 \le y \le h$.

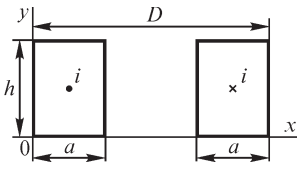

Рис. В27.1

27.2. Векторный потенциал магнитного поля

ВОПРОСЫ

1. Влияет ли выбор функции div $\boldsymbol{A}$ на магнитную индукцию?

2. (О) Электрический ток течет по весьма длинному прямолинейному проводу, расположенному в однородной среде с магнитной проницаемостью $\mu = \mu_0$. Определите число составляющих векторного магнитного потенциала в прямоугольной системе координат при $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{k}\,J_z$. Изменится ли ответ, если вблизи провода поместить тело конечных размеров с магнитной проницаемостью $\mu \ne \mu_0$?

3. (О) Электрический ток течет по кольцевому проводнику, помещенному в однородную среду ($\mu_c = \text{const}$), и имеет в цилиндрической системе координат единственную составляющую J_α. Каково направление вектора $\boldsymbol{A}$?

4. Почему на оси провода бесконечно малого сечения с током i векторный магнитный потенциал не имеет смысла?

5. Какой из методов расчета трехмерного магнитного поля — на основе скалярного или векторного магнитного потенциала — требует большего объема вычислений?

6. Магнитная индукция однородного поля равна $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{i}B_x$. Изменяется ли векторный магнитный потенциал вдоль координат x, y, z?

7. (О) Векторный магнитный потенциал $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}C|y|$ не зависит от координат x, z. Какое поле описывает этот потенциал? Где расположен и как направлен ток, создающий такое поле?

8. Магнитный поток сквозь поверхность равен нулю. Означает ли это, что на контуре, ограничивающем поверхность, векторный магнитный потенциал *а*) обращается в нуль, *б*) имеет равное нулю среднее значение?

9. Во всех точках контура направление векторного магнитного потенциала перпендикулярно вектору $d\boldsymbol{l}$, касательному к контуру. Чему равен магнитный поток сквозь поверхность, ограниченную контуром?

10. Можно ли, пользуясь выражением $\Phi = \oint_l \boldsymbol{A}d\boldsymbol{l}$, вычислить магнитный поток сквозь поверхность, проходящую *а*) полностью в проводящей среде, *б*) частично в проводящей среде и частично в диэлектрике?

УПРАЖНЕНИЯ

1. Электрический ток течет по круглому кольцу, расположенному в неоднородной среде. При какой форме размещенных в поле тока намагничивающихся тел векторный магнитный потенциал имеет во всех точках пространства только одну отличную от нуля составляющую A_α? Почему при произвольной форме ферромагнитного тела имеются и другие составляющие?

2. Объясните, почему введенная соотношением $\boldsymbol{B} = \text{rot}\,\boldsymbol{A}$ функция $\boldsymbol{A}$ носит название векторного потенциала магнитного поля?

3. (Р) Используя аналогию уравнений Пуассона для скалярного электрического потенциала и для составляющих векторного магнитного потенциала, выясните характер изменения функции $A(r)$ при $r \to \infty$ в случае плоскопараллельного поля.

4. (Р) Электрический ток $i = 100$ А течет по бесконечно длинному прямолинейному проводу круглого сечения радиусом $R = 2$ см, расположенному в однородной среде с магнитной проницаемостью μ_0. Рассчитайте и постройте кривые зависимостей $A(r)$, $B(r)$ внутри и вне провода.

5. (Р) Используя метод наложения, рассчитайте зависимость $A(x)$ вдоль линии, соединяющей ближайшие друг к другу точки двух бесконечно длинных прямолинейных проводов круглого сечения с токами встречных направлений, распо-

ложенных в однородной среде с магнитной проницаемостью μ_0. Расстояние между осями проводов $d = 10$ см. Ток каждого провода $i = 80$ А.

6. (Р) В пазу прямоугольной формы, изображенном на рис. В27.2, размещены два провода прямоугольного сечения с токами встречных направлений. Допуская, что имеющий единственную составляющую A_z векторный магнитный потенциал зависит только от координаты y, найдите зависимости $A_z(y)$, $B_x(y)$ для $0 \le y \le h$ и постройте кривые их изменения. Ток одного провода $i = 50$ А, магнитная проницаемость вещества провода μ_0.

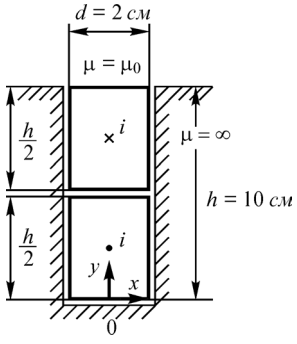

Рис. В27.2

7. (Р) Два одинаковых прямолинейных весьма длинных провода с токами i_1 и i_2 параллельны оси z и симметричны относительно плоскости yz. Каким условиям удовлетворяет векторный магнитный потенциал в точках плоскости yz при *а*) $i_1 = -i_2$, *б*) $i_1 = i_2$?

8. (Р) Рассчитайте векторный магнитный потенциал $A(r)$ поля, создаваемого токами коаксиального кабеля. Радиус жилы $R_1 = 2$ см, радиусы оболочки $R_2 = 4$ см, $R_3 = 5$ см. Ток кабеля $i = 100$ А, магнитная проницаемость равна μ_0 всюду.

9. Прямолинейный бесконечно длинный провод с током $i = 10$ А и радиусом сечения $R = 2$ см подвешен в воздухе над плоской поверхностью тела на высоте $h = 4$ м. Определите векторный магнитный потенциал и его нормальную производную в точках поверхности, если она является поверхностью *а*) идеально намагниченного, *б*) идеально проводящего тела.

10. (Р) В плоскости прямолинейного весьма длинного провода с током $i = 20$ А расположены изображенные на рис. В27.3 контуры прямоугольной (*а*) и треугольной (*б*) формы. Рассчитайте сцепленный с контурами магнитный поток, принимая $a = 2$ см, $b = 4$ см, $l = 4$ см. Магнитная проницаемость равна μ_0 всюду.

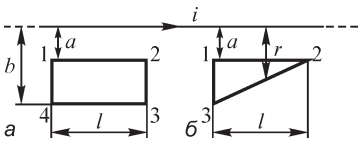

Рис. В27.3

11. (Р) Один из круговых контуров расположен в плоскости $z = 0$, а другой — в плоскости $\alpha = 0$ цилиндрической системы координат. Определите потокосцепление взаимной индукции.

12. (Р) Расположение проводов двухпроводных линий указано на рис. В27.4.

Рассчитайте взаимную индуктивность между линиями. Примите $\mu = \mu_0$.

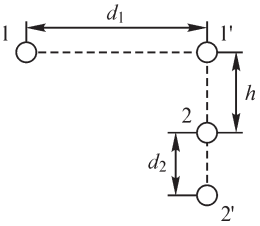

Рис. В27.4

13. Изменение векторного магнитного потенциала во всем пространстве на постоянное число не влечет за собой изменения магнитной индукции. Однако расчет энергии

магнитного поля по формулам $W_м = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{BH}\, dV$, $W_м = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{JA}\, dV$ приводит к различным результатам. Как это объяснить?

14. (Р) Определите скалярный и векторный магнитные потенциалы и их производные по нормали на контуре сечения тела, находящегося в магнитном поле (при условии плоскопараллельности поля) и выполненного из вещества с идеальными свойствами: *а*) $\mu = \infty$, $\gamma = 0$, *б*) $\mu = 0$, $\gamma = \infty$.

27.3. Комплексный магнитный потенциал

ВОПРОСЫ

1. Какие из линий семейств $U_м = \text{const}$, $V_м = \text{const}$ ($V_м$ — функция потока) можно изобразить в области *а*) свободной от тока, *б*) занятой током?

2. Правильно ли утверждение, что линии $U_м = \text{const}$ подходят под прямым углом к поверхности проводов с токами?

3. Изменится ли положение линий $U_м = \text{const}$ и $V_м = \text{const}$, изображенных на рис. В27.5, если изменить направление тока на противоположное *а*) в одном из проводов, *б*) в обоих проводах?

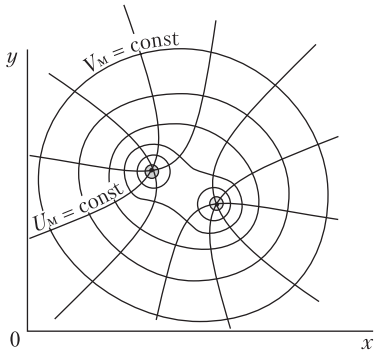

Рис. В27.5

4. Какова размерность функции потока?

5. Является ли контур сечения провода с током линией, на которой функция потока принимает постоянное значение?

6. Имеет ли векторный магнитный потенциал постоянное значение на контуре сечения провода с током?

7. На каких из линий, изображенных на рис. В27.5, векторный магнитный потенциал принимает постоянные значения?

8. Являются ли линии постоянных значений векторного магнитного потенциала теми линиями, на которых магнитная индукция сохраняет постоянные значения?

9. Можно ли построить картину магнитного поля внутри провода с током, изобразив семейства взаимно ортогональных линий $U_м = \text{const}$ и $V_м = \text{const}$?

10. Изменится ли выражение комплексного потенциала линейного провода с током, расположенного в точке с координатой $z = x + jy$ при переносе начала координат из точки $z = 0$ в точку $z = a + jb$?

11. Выполняется ли принцип соответствия магнитного и электрического полей внутри линейных проводов?

12. Можно ли ввести комплексный магнитный потенциал в области с электрическим током?

13. Какое поле описывает функция $\zeta = Dz + C$ комплексной переменной z, если D — мнимая постоянная?

14. Картина магнитного поля тока i, помещенного во внешнее однородное поле, показана на рис. В27.6. Приведет ли к изменению картины поля изменение направления тока провода на противоположное? Изменится ли при этом комплексный потенциал?

15. Каково значение напряженности магнитного поля в точке b на рис. В27.6? Сохраняет ли напряженность поля в точках линии $bfdb$ одно и то же значение?

16. Справедливо ли утверждение о постоянстве напряженности магнитного поля на линиях $V = \text{const}$ поля уединенного провода *а*) круглого сечения, *б*) произвольной формы сечения?

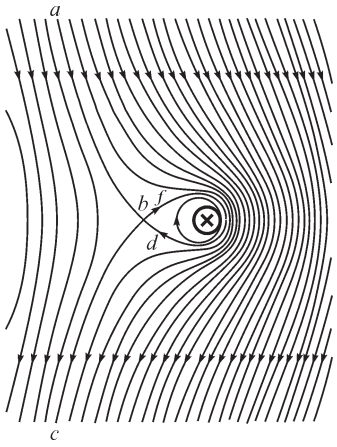

Рис. В27.6

17. Изменится ли функция потока в точках поверхности уединенного провода с током, если немагнитное вещество провода заменить на магнитное?

18. Соответствуют ли друг другу электрические и магнитные поля проводов круглого сечения, которые не являются линейными?

19. (О) Почему близость нескольких проводов с постоянным током не вызывает перераспределения в них токов: ведь на движущиеся заряженные частицы со стороны магнитного поля действует сила, в результате чего частицы должны смещаться и равномерный закон распределения плотности тока нарушаться?

20. Существуют ли аналогичные «электрическим» центрам «магнитные» центры проводов?

21. (О). В части пространства, свободной от тока, линии напряженности магнитного поля параллельны оси y. Могут ли они сгущаться в направлении оси x?

УПРАЖНЕНИЯ

1. (Р) Рассчитайте магнитный поток сквозь расположенную в воздухе в плоскопараллельном поле прямоугольную площадку, на двух параллельных сторонах которой длиной $l = 2$ м функция потока принимает значения $V_{м1} = 20$ А, $V_{м2} = 25$ А.

2. (Р) Выразите условия непрерывности касательных и нормальных составляющих векторов напряженности магнитного поля и магнитной индукции через *а*) векторный магнитный потенциал и его производные, *б*) скалярный магнитный потенциал и его производные в прямоугольной системе координат.

3. (Р) Каким должно быть соотношение между радиусами линий $A = \text{const}$ картины магнитного поля провода круглого сечения, при котором поток любой трубки магнитной индукции принимает одно и то же значение. Найдите соотношение между радиусами линий как внутри, так и вне провода.

4. (Р) Запишите комплексный потенциал двух бесконечно длинных линейных проводов с токами противоположных направлений с координатами $z_1 = b + j0$,

$z_2 = -b + j0$. Рассчитайте напряженность магнитного поля в точках осей Ox, Oy. Ток провода $i = 100$ А, $b = 15$ см.

5. (Р) Выразите производную комплексного потенциала через составляющие H_x, H_y напряженности магнитного поля. Какие операции следует выполнить над комплексным потенциалом для получения выражения $H_x + jH_y$?

6. (Р) Комплексный потенциал магнитного поля равен $\zeta(z) = -\frac{i}{2\pi}\ln z + C$. Рассчитайте магнитный поток сквозь площадку длиной l, две стороны которой перпендикулярны плоскости комплексного переменного z. Их координаты равны *а*) $z_1 = 1 + j\,0$, $z_2 = 0 + j\,1$, *б*) $z_1 = 1 + j\,0$, $z_2 = 2 + j\,0$, *в*) $z_1 = 2 + j\,0$, $z_2 = 2 + 2j$. Ток $i = 200$ А, магнитная проницаемость равна μ_0 всюду.

7. (Р) По прямолинейному алюминиевому проводу радиусом $r_a = 2$ см со стальной сердцевиной радиусом $r_c = 1$ см течет ток $i = 20$ А. Определите ток каждой из частей провода и, пользуясь методом наложения, рассчитайте комплексный магнитный потенциал провода и функцию потока внутри него. Удельная электрическая проводимость алюминия — $3{,}5\cdot10^7$ См/м, стали — 10^7 См/м, магнитная проницаемость равна $\mu = \mu_0$ всюду.

8. (Р) Рассчитайте магнитный поток внутри прямолинейного провода круглого сечения на единицу длины и сопоставьте его с внутренним потокосцеплением провода.

9. (Р) Рассматривая провода двухпроводной воздушной линии передачи как линейные круглого сечения, рассчитайте внешний магнитный поток, образованный линиями магнитной индукции, пересекающими кратчайший отрезок, соединяющий контуры сечений проводов. Ток проводов $i = 20$ А (координаты их центров равны $z_2 = 9 + j\,0$ см, $z_1 = -9 + j\,0$ см), радиусы сечений $R = 1$ см.

27.4. Метод зеркальных изображений

ВОПРОСЫ

1. Почему метод зеркальных изображений упрощает расчет магнитного поля?

2. Прямолинейный провод с постоянным током расположен в воздухе параллельно плоской поверхности тела, ограничивающей среду, магнитная проницаемость которого принята равной нулю. Можно ли для расчета поля применить метод зеркальных изображений?

3. Почему метод зеркальных изображений можно применить для расчета магнитного поля провода с током, расположенным внутри двугранного угла α, образованного поверхностями ферромагнитного тела, только тогда, когда значение π/α — целое?

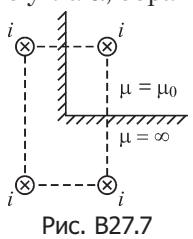

Рис. В27.7

4. Почему число изображенных токов, показанных на рис. В27.7, должно быть равным трем, а не двум?

5. (О) Над плоской поверхностью ферромагнитного тела, магнитная проницаемость которого принята бесконечно большой,

расположен изогнутый под углом 90° провод с током, стороны которого параллельны поверхности. Какова конфигурация и направление зеркально изображенного тока? Можно ли применить метод зеркальных изображений, если одна из прямолинейных частей провода параллельна поверхности, а другая перпендикулярна ей?

6. (О) Линейный круговой контур с током охватывает длинный соосный с ним цилиндр круглого сечения, магнитная проницаемость вещества которого бесконечно велика. Какой вид имеет изображенный ток? В какой части пространства — внутри либо вне цилиндра — он должен быть расположен?

УПРАЖНЕНИЯ

1. (Р) Прямолинейный бесконечно длинный тонкий провод с током $i = 200$ А подвешен на высоте 4,5 м над плоской поверхностью идеально намагниченного тела. Рассчитайте напряженность H магнитного поля на поверхности тела и постройте кривую изменения H вдоль поверхности. Определите силу взаимодействия провода с телом на единицу его длины.

2. (Р) Решите предыдущую задачу при условии, что провод подвешен над плоской поверхностью идеального диамагнитного тела, у которого $\mu = 0$, $\gamma = \infty$.

3. (Р) Прямолинейный бесконечно длинный тонкий провод с током $i = 100$ А протянут внутри прямого двугранного угла параллельно его сторонам, образованным веществом, магнитная проницаемость которого $\mu = \infty$. Рассчитайте силу притяжения провода к сторонам угла, если расстояния от провода до них равны $d_1 = 3$ м и $d_2 = 4$ м. Как изменится сила взаимодействия, если вещество является идеальным диамагнетиком?

4. (Р) Прямолинейный бесконечно длинный тонкий провод с током расположен между двумя параллельными плоскими поверхностями ферромагнитных тел параллельно им на одинаковом от них расстоянии, равном $d/2$. Сколько изображенных токов следует принять во внимание при определении поля между плоскостями методом зеркальных изображений? Оцените погрешность расчета напряженности поля на поверхности тел при учете k изображенных токов.

5. (Р) Прямолинейный бесконечно длинный провод с током $i = 50$ А расположен в воздухе параллельно бесконечной плоской поверхности тела с магнитной проницаемостью μ на расстоянии $h = 5$ см от нее. Рассчитайте и постройте кривую зависимости силы взаимодействия тока провода и ферромагнитного тела при различных μ: от $2\mu_0$ до ∞. При каких величинах μ допущение о ее бесконечно большом значении приводит к погрешности в расчете силы, не превышающей 5 %?

28.1. Индуктивности контуров, катушек и токопроводов

ВОПРОСЫ

1. (О) Зависит ли индуктивность контура от характера распределения тока по сечению провода контура?

2. (О) Имеют ли смысл понятия индуктивности контура и взаимной индуктивности контуров при допущении, что контуры являются бесконечно тонкими?

3. Могут ли иметь особенность подинтегральные функции выражений

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi i^2}\int\limits_V\int\limits_{V'} JJ'\,\frac{dVdV'}{r},\quad M = \frac{\mu_0}{4\pi i_1 i_2}\int\limits_{V_1}\int\limits_{V_2}\frac{dV_1 dV_2}{r},$$

используемых при расчете индуктивности и взаимной индуктивности?

4. (О) Можно ли рассчитать взаимную индуктивность двух контуров, если распределение тока в одном из них неизвестно?

5. (О) Контур с током i расположен во внешнем магнитном поле. Индуктивность контура можно определить по формуле $L = \frac{1}{i^2}\int\limits_V \boldsymbol{JA}\,dV$, где $\boldsymbol{J}$ — плотность тока. Следует ли под величиной $\boldsymbol{A}$ понимать векторный магнитный потенциал *а*) внешнего поля, в котором находится контур, *б*) поля тока контура, *в*) результирующий потенциал, обусловленный как внешним, так и полем тока контура?

6. Почему индуктивность уединенного контура уменьшается при увеличении частоты протекающего по нему тока?

7. (О) Круговой виток изгибается по диаметру так, что угол между плоскостями полуколец изменяется от 180° до 0°, когда полукольца сливаются. Как изменяется при этом индуктивность витка?

8. (О) Многовитковую круговую катушку можно рассматривать как совокупность круговых витков. Равна ли индуктивность катушки сумме индуктивностей ее витков?

9. (О) При каком расположении двух круговых контуров с токами сила взаимодействия между ними обращается в нуль? Равна ли нулю при этом взаимная индуктивность?

УПРАЖНЕНИЯ

1. (Р) Получите выражение для расчета внутренней индуктивности прямолинейного провода круглого сечения на единицу его длины на основе соотношения $L_{\text{внутр}} = \frac{2W_{\text{м}}}{i^2}$ при допущении, что ток распределен по сечению провода равномерно.

2. Сопоставьте внутренние индуктивности провода круглого сечения, найденные при равномерном ($k = 0$) и неравномерном [$J(r) = J_0(1 + kr)$, $k \neq 0$] распределении тока по его сечению. Координату r отсчитывайте от оси провода.

3. (Р) Сравните внутреннюю и внешнюю индуктивности проводов двухпроводной воздушной линии передачи, радиусы R которых связаны с расстоянием между осями соотношением $D = 10R$. Расчет выполните при условии, что магнитная проницаемость вещества проводов равна *а*) μ_0, *б*) $100\mu_0$.

4. В коаксиальном кабеле толщина оболочки, являющейся обратным проводом, значительно меньше ее среднего радиуса R_0, в связи с чем оболочку можно рассматривать как бесконечно тонкую. Найдите отношение индуктивностей $L_{\text{внутр}}/L_{\text{внеш}}$ кабеля, если жила выполнена из *а*) алюминия, *б*) стали с магнитной проницаемостью $100\mu_0$. Радиус жилы равен R_1.

5. (Р) Токопровод представляет собой две весьма длинные прямолинейные шины прямоугольного сечения с равными токами противоположных направлений, высота h которых значительно больше ширины d каждой из шин и расстояния D между ближними длинными сторонами шин. Пренебрегая искажением поля у краев шин, рассчитайте индуктивность токопровода на единицу его длины при условии, что плотность тока по толщине каждой из шин *а*) $J = \text{const}$, *б*) $J(x) = J_0 \dfrac{x}{d}$, где координата x лежит в пределах $0 \le x \le d$ и отсчитывается от внешних сторон шин. Магнитная проницаемость шин и окружающей их среды равна μ_0.

6. (Р) Для улучшения условий охлаждения токопровода каждая из его прямоугольных шин толщиной $2d$ заменена двумя шинами толщиной d. Получите выражение для расчета индуктивности токопровода, по двум соседним шинам которого течет ток одного направления, а по двум другим соседним шинам — противоположного. Сравните индуктивность такого токопровода с индуктивностью токопровода из двух шин толщиной $2d$ каждая и растоянием d между ними. Расстояние d между соседними шинами значительно меньше их высоты h. Магнитная проницаемость шин и окружающей их среды равна μ_0. Плотность тока шин постоянна. Токи шин каждого токопровода одинаковы.

7. (Р) Получите выражение для расчета индуктивности токопровода на единицу его длины, содержащего четыре прямоугольные шины толщиной d каждая, обращенные друг к другу длинными сторонами. Расстояние между соседними шинами d. По первой шине, считая слева направо, и по третьей течет ток прямого направления, по второй и четвертой — обратного. Сравните индуктивность такого токопровода с индуктивностью токопровода, рассмотренного в предыдущих двух задачах. Высота h шин одинакова и значительно превышает их толщину и расстояние между ними. Магнитная проницаемость шин и окружающей их среды равна μ_0. Плотность тока шин постоянна. Токи шин каждого токопровода одинаковы.

8. (Р) Индуктивности контуров равны L_1 и L_2. Найдите максимально возможное значение их взаимной индуктивности.

9. Два одинаковых соосных медных кольца находятся на расстоянии друг от друга, равном их радиусу R. Радиусы проводов колец $a = 0{,}1R$. Получите выражение для коэффициента связи.

10. (Р) Круговой контур радиусом $R = 10$ см выполнен из провода радиусом $a = 0{,}5$ см, магнитная проницаемость материала которого равна $\mu = 100\mu_0$. Можно

ли при вычислении индуктивности пренебречь его внутренней индуктивностью, если погрешность расчета не должна превышать 5 %? Изменится ли ответ, если контур выполнен из немагнитного ($\mu = \mu_0$) вещества? (Ток в контуре постоянный.)

11. (Р) Круговой контур из медного провода радиусом R, значительно превышающим радиус a его сечения, помещен во внешнее однородное магнитное поле с индукцией $B = 10^{-3}\cdot\cos 314t$ Тл, направленное по нормали к плоскости кольца. Рассчитайте мощность потерь в контуре при допущении, что магнитный поток, обусловленный индуцированным в контуре током, значительно меньше внешнего магнитного потока. Магнитная проницаемость равна μ_0 всюду, R = 3 см, a = 1 мм. Удельная электрическая проводимость меди $5{,}7\cdot10^7$ См/м.

12. (Р) Радиус расположенного в воздухе кругового витка равен 4 см. Постройте кривую зависимости отношения его индуктивности к сопротивлению при постоянном токе от радиуса провода, если материал витка *а*) медь, *б*) сталь с магнитной проницаемостью $200\mu_0$. Удельная электрическая проводимость стали $5\cdot10^6$ См/м.

28.2. Метод участков

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Можно ли применить метод участков для расчета индуктивности контуров в *а*) неоднородной линейной среде, *б*) кусочно-однородной линейной среде, *в*) нелинейной среде, магнитная проницаемость которой зависит от тока контуров?

2. Следует ли при применении метода участков представить внутреннюю индуктивность также в виде суммы внутренних индуктивностей участков?

3. (О) Почему понятия индуктивности участка провода и взаимной индуктивности между участками проводов являются условными?

4. Электрический ток не может протекать в отрезке провода, так как последний незамкнут. Однако выражения для индуктивности и взаимной индуктивности отрезков позволяют найти индуктивность замкнутых контуров. Почему это возможно?

5. Почему формулы для расчета потенциальных коэффициентов методом средних потенциалов используют для определения взаимной индуктивности и индуктивности этих отрезков только в случаях прямолинейных отрезков проводов?

6. (Р) Внешняя индуктивность квадратного контура размером $a\times a$ равна $L_к$. Равна ли $2L_к$ внешняя индуктивность прямоугольного контура размером $a\times 2a$?

7. (Р) Каков средний радиус кругового витка, имеющего такую же внешнюю индуктивность, что и квадратный виток со стороной a? Радиус провода витков $r_0 \ll a$.

28.3. Индуктивность двухпроводной линии

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. (О) Может ли взаимная индуктивность двух двухпроводных линий обращаться в нуль? Можно ли этого достичь путем выбора положительных направлений токов линий?

2. (О) Почему индуктивность проводов, найденная при постоянном токе, отличается от индуктивности при переменном токе? От каких факторов зависит различие?

3. Правильно ли будет рассчитана индуктивность двухпроводной линии на единицу длины с проводами радиусами R по формуле $L = \frac{\Psi}{i}$, если определить потокосцепление Ψ как разность максимального и минимального значений векторного магнитного потенциала?

4. (Р) Используя выражение для вычисления индуктивности прямоугольной рамки, найдите ее предельное значение, когда длина двух ее противоположных сторон неограниченно возрастает, а расстояние d между ними, равное длине двух других сторон, как и радиус r_0 провода, сохраняют постоянное значение. Сравните найденное выражение с формулой для индуктивности двухпроводной линии, радиус сечения проводов которой r_0, а расстояние между проводами d.

5. (Р) Определите индуктивность прямолинейного немагнитного провода круглого сечения радиусом R и длиной l, подвешенного на высоте h ($l \gg h$) над плоской поверхностью идеально проводящего тела, выполняющего роль провода с током обратного направления.

6. (Р) Воздушная двухпроводная линия расположена параллельно плоской поверхности земли. Радиусы проводов $R = 1$ см, расстояние между ними $D = 1$ м, высота подвеса проводов $h_1 = 5$ м, $h_2 = 6$ м, магнитная проницаемость вещества проводов $\mu = 100\mu_0$. Земля обладает идеальными проводящими свойствами. Определите погрешность расчета индуктивности при пренебрежении влиянием земли.

7. (Р) Найдите индуктивности воздушных двухпроводных линий, протянутых вблизи поверхностей с идеальными проводящими свойствами. Магнитная проницаемость вещества проводов равна $100\mu_0$, радиусы их сечений — R (рис. В28.1).

Вариант	h_1, м	h_2, м	h_3, м	h_4, м	d, м	D, м	r_1, м	r_2, см	R, см	R_0, м
а	4	4	5	6	–	–	–	–	2	–
б	0,2	0,3	–	–	1	0,3	–	–	1	–
в	0,2	0,4	0,1	0,3	0,5	–	–	–	0,2	–
г	–	–	–	–	–	–	4	5	2	2
д	–	–	–	–	–	–	0,2	0,4	1	0,5

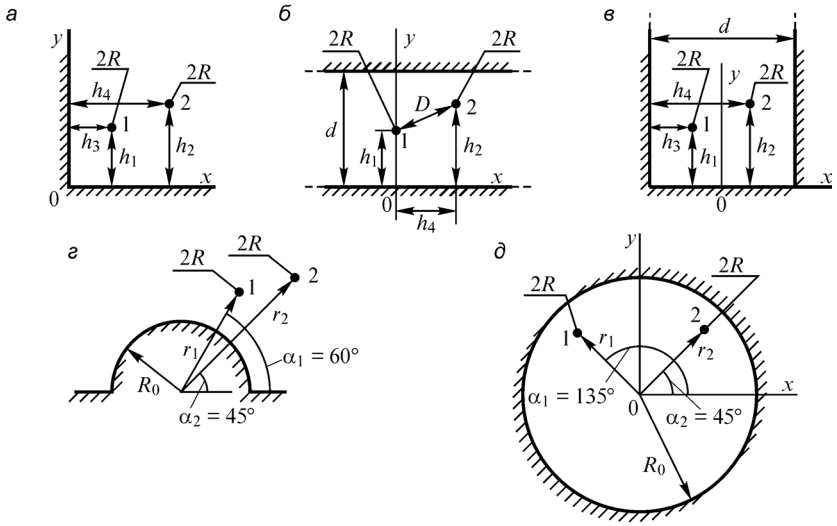

Рис. В28.1

8. (Р) Используя формулу для расчета индуктивности двухпроводной линии, рассчитайте силу взаимодействия токов проводов и сравните ее с силой, получаемой в предположении, что токи проводов сосредоточены на их осях.

28.4. Индуктивность трехфазной линии

ВОПРОСЫ

1. Сохранится ли неизменной индуктивность трехфазной линии при замене протекающей в ней системы токов прямой последовательности на систему токов *а*) обратной последовательности? *б*) нулевой последовательности?

2. Провода линий передачи расположены параллельно поверхности земли. Какое влияние на индуктивность трехфазной линии может оказать земля?

3. Зависит ли индуктивность трехфазной линии от порядка гармоники протекающего по ней тока?

4. Расстояния между проводами трехфазной линии передачи $D_{12} = D_{13} \neq D_{23}$. В какой из фаз дополнительное активное сопротивление отличается от нуля?

УПРАЖНЕНИЯ

1. (Р) Получите выражение для расчета эквивалентной индуктивности провода транспонированной трехфазной линии, расположенной над плоской поверхностью земли при условии, что удельная электрическая проводимость земли бесконечно велика. Высота подвеса проводов — h_1, h_2, h_3, расстояние между ними D_{12}, D_{13}, D_{23}, радиусы сечений проводов — R_1, R_2, R_3.

2. (Р) Рассчитайте эквивалентную индуктивность провода трехфазной транспонированной линии длиной 10 км, провода которой расположены в одной плоскости. Радиусы сечений проводов $R = 5$ мм, расстояния между соседними прово-

дами $D = 2$ м. Сравните полученное значение с индуктивностью каждых двух проводов линии, принимая $\mu = \mu_0$ всюду.

3. (Р) У какой из двух воздушных трехфазных транспонированных линий с проводами одинакового радиуса эквивалентная индуктивность провода больше: провода которой расположены в *а*) вершинах правильного треугольника с длиной стороны D или *б*) в одной плоскости так, что расстояние между соседними проводами равно D? При какой длине стороны треугольника индуктивности линий равны?

4. (Р) В электрической печи трехфазный ток подводят по трем круглым медным шинам радиусами 1,2 см, оси которых находятся в одной плоскости. Расстояния между соседними шинами $D = 0{,}2$ м. Длина шин 8 м, частота тока $f = 50$ Гц, ток шины $I = 3000$ А. Рассчитайте мощность, переносимую из одной фазы в другую. Определите, какую часть составляет эта мощность от активной мощности, выделяемой в шинах.

5. (Р) Провода трехфазной линии протянуты вблизи поверхностей с идеальными проводящими свойствами и равноудалены друг от друга (рис. В28.2). Рассчитайте эквивалентную индуктивность одного провода, учитывая транспозицию проводов (варианты *а–г*). Магнитная проницаемость вещества проводов равна $100\,\mu_0$. Оцените погрешность расчета при пренебрежении влиянием неоднородности среды. Численные данные приведены в таблице к упр. 10, § 25.3.

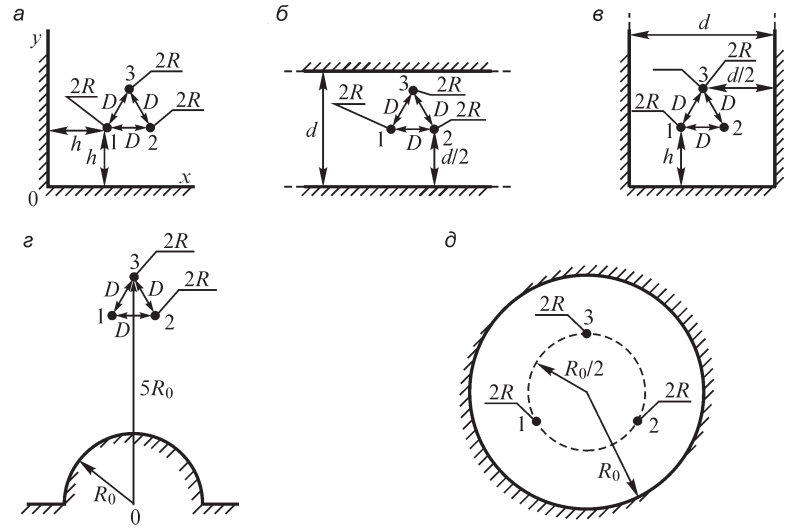

Рис. В28.2

Глава двадцать девятая

Переменное электромагнитное поле в диэлектрике

29.1. Плоская электромагнитная волна в диэлектрике. Скорость распространения электромагнитной волны

В предыдущих главах были исследованы частные проявления электромагнитного поля: электрические поля, окружающие системы неподвижных заряженных тел, и электрические и магнитные поля, окружающие системы неподвижных контуров с постоянными токами.

В общем случае для изменяющихся во времени зарядов, изменяющихся во времени токов, движущихся заряженных или намагниченных тел или движущихся контуров с токами в окружающем их пространстве существует переменное электромагнитное поле.

Ограничимся рассмотрением переменного электромагнитного поля в неподвижных однородных и изотропных средах. Для исследования этого поля необходимо обратиться к полной системе уравнений электромагнитного поля:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\delta;\quad \operatorname{rot}\boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t};\quad \delta=\gamma\boldsymbol{E}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{J}_{\text{пер}};$$
$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E};\quad \boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H};\quad \operatorname{div}\boldsymbol{D}=\rho;\quad \operatorname{div}\boldsymbol{B}=0.$$

В декартовой системе координат первые два уравнения запишутся в виде шести уравнений соответственно трем проекциям на оси координат. Используя еще выражения для векторов δ, $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{B}$, получаем эти уравнения в виде

$$\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}=\gamma E_x+\varepsilon\frac{\partial E_x}{\partial t}+J_{\text{пер}x};\qquad (а)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}=\gamma E_y+\varepsilon\frac{\partial E_y}{\partial t}+J_{\text{пер}y};\qquad (б)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=\gamma E_z+\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial t}+J_{\text{пер}z};\qquad (в)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=-\mu\frac{\partial H_x}{\partial t};\qquad (г)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}=-\mu\frac{\partial H_y}{\partial t};\qquad (д)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-\mu\frac{\partial H_z}{\partial t}.\qquad (е)$$

Предположим, что проводимость диэлектрика равна нулю ($\gamma = 0$) и что свободные заряды в диэлектрике отсутствуют ($\rho = 0$). В такой среде могут существовать только токи электрического смещения.

Для того чтобы лучше выявить основные соотношения в электромагнитном поле, рассмотрим сначала простейший случай — плоскую электромагнитную волну, распространяющуюся в однородном и изотропном диэлектрике. Электромагнитная волна называется плоской, когда все величины, характеризующие интенсивность электромагнитного процесса, зависят только от одной из декартовых координат, например от координаты z. Приблизительно такой характер имеет электромагнитная волна, излученная антенной, если эту волну рассматривать в небольшой области пространства на большом расстоянии от излучающего центра.

Итак, предположим, что векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ не зависят от координат x и y, т. е.

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial y} = 0.$$

Следовательно, $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ являются функциями только z и t. Учитывая еще условия $\gamma = 0$ и $\rho = 0$, получаем уравнения поля в виде

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}; \ (a') \qquad \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t}; \ (г')$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}; \ (б') \qquad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}; \ (д')$$

$$0 = \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t}; \ (в') \qquad 0 = \mu \frac{\partial H_z}{\partial t}. \quad (е')$$

Предположим, что поле вызвано источниками, не содержащими постоянных токов и постоянных зарядов, как это и имеет место в случае излучения волн антенной. Ток и напряжение в антенне не имеют постоянных составляющих. В таком случае векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ не могут иметь составляющих, не зависящих от времени, и уравнения (в′) и (е′) дают

$$E_z = \text{const} = 0; \quad H_z = \text{const} = 0.$$

Выберем направление осей OX и OY так, чтобы вектор $\boldsymbol{E}$ был направлен по оси OX. Это всегда можно сделать, если вектор $\boldsymbol{E}$ все время остается параллельным некоторому направлению, т. е. когда волна является поляризованной. Такие условия, в частности, обеспечиваются при излучении электромагнитных волн неподвижной антенной. В таком случае имеем $E_y = 0$. При этом уравнения ($б'$) и ($г'$) дают $\frac{\partial H_x}{\partial z} = 0$ и $\frac{\partial H_x}{\partial t} = 0$, т. е. $H_x = \text{const} = 0$.

Следовательно, вектор $\boldsymbol{H}$ направлен по оси OY. Мы получаем первый существенный вывод: *в электромагнитной волне, свободно распространяющейся в однородном и изотропном диэлектрике, векторы* $\boldsymbol{E}$ *и* $\boldsymbol{H}$ *взаимно перпендикулярны*:

$$\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{H}.$$

Итак, остаются два уравнения (a') и ($д'$):

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}; \ (a') \qquad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}. \ (д')$$

Дифференцируя второе уравнение по z и первое по t, получаем

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -\mu \frac{\partial^2 H_y}{\partial t \partial z}; \qquad -\frac{\partial^2 H_y}{\partial z \partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2},$$

откуда имеем

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}, \qquad (*)$$

причем $v = \dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$.

Уравнения (a'), (∂') и (*) по форме совершенно аналогичны уравнениям

$$-\frac{\partial i_1}{\partial x} = C\frac{\partial u_1}{\partial t}; \quad -\frac{\partial u_1}{\partial x} = L\frac{\partial i_1}{\partial t}; \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}$$

(причем $v = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$), полученным в ч. II при рассмотрении переходных процессов в неискажающей однородной линии. Решение последних уравнений было найдено в виде

$$u_1 = \varphi(x - vt) + \psi(x + vt);$$
$$i_1 = \sqrt{\frac{C}{L}}\,[\varphi(x - vt) - \psi(x + vt)].$$

Пользуясь этим решением, можем написать выражения для E_x и H_y, заменив в последних выражениях u_1 на E_x, i_1 на H_y, x на z, C на ε и L на μ. Произведя эту замену и обозначая функции от $(z - vt)$ и от $(z + vt)$ через $F_1(z - vt)$ и $F_2(z + vt)$, будем иметь искомые выражения в виде

$$E_x = F_1(z - vt) + F_2(z + vt);$$
$$H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,[F_1(z - vt) - F_2(z + vt)].$$

Так как по условию E_x и H_y не имеют составляющих, не зависящих от времени, то и функции F_1 и F_2 не имеют этих составляющих.

Выясним смысл, который имеют частные решения:

$$E_{x1} = F_1(z - vt); \quad H_{y1} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,F_1(z - vt).$$

В любой точке, движущейся в положительную сторону оси OZ со скоростью $dz/dt = v$, значения E_{x1} и H_{y1} остаются постоянными. Действительно, положение такой точки определяется координатой $z = vt + z_0$ и, следовательно, величины E_{x1} и H_{y1} в этой движущейся точке имеют значения:

$$E_{x1} = F_1(vt + z_0 - vt) = F_1(z_0) = \text{const};$$
$$H_{y1} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,F_1(z_0) = \text{const}.$$

Отсюда следует, что каждое определенное значение величины E_{x1} или величины H_{y1} распространяется в сторону положительной оси OZ со скоростью v. Поэтому можем утверждать, что эти частные решения определяют собой электромагнитную волну, распространяющуюся со скоростью v в положительном направлении оси OZ (*прямую волну*). Так как с величинами E и H связана определенная плотность энергии электромагнитного поля, то движущаяся электромагнитная волна несет с собой определенное количество электромагнитной энергии.

При помощи аналогичных рассуждений приходим к заключению, что частные решения

$$E_{x2} = F_2(z+vt); \quad H_{y2} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,F_2(z+vt)$$

определяют собой электромагнитную волну, движущуюся со скоростью v в отрицательном направлении оси OZ (*обратную волну*).

Итак, мы получили, что *электромагнитная волна распространяется в пространстве со скоростью*

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}.$$

Эта скорость зависит только от магнитных и электрических свойств среды. В пустоте она равна

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = 2{,}998\cdot 10^8 \text{ м/с} \approx 3\cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Абсолютные значения напряженностей магнитного и электрического полей связаны как в прямой, так и в обратной волне соотношением

$$H = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,E,$$

откуда получаем

$$\frac{\mu H^2}{2} = \frac{\varepsilon E^2}{2}.$$

Следовательно, *если существует только прямая или только обратная волна, то энергии магнитного и электрического полей равны между собой.*

Обратим внимание на аналогию, которую можно провести между рассмотренным явлением распространения плоской электромагнитной волны в диэлектрике, характеризующейся напряженностями E_x и H_y, и явлением распространения волн напряжения u и тока i в однородной линии при отсутствии потерь в линии. Уже было отмечено, что выражение для E_x совершенно аналогично выражению для u и соответственно выражение для H_y аналогично выражению для i. Это обстоятельство не является случайным. Действительно, можно рассматривать величину E как падение напряжения, отнесенное к единице длины линии напряженности электрического поля, и соответственно величину H — как ток, отнесенный к единице длины линии напряженности магнитного поля. При этом

отношение $E_{x1}/H_{y1} = \sqrt{\mu/\varepsilon} = z$ имеет размерность электрического сопротивления и может рассматриваться как волновое сопротивление среды аналогично волновому сопротивлению $z = \sqrt{L/C}$ однородной линии. В случае распространения волны в пустоте имеем

$$z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{1/(4\pi \cdot 9 \cdot 10^9)}} = 120\pi = 377 \text{ Ом}.$$

Выражение для скорости $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ распространения электромагнитной волны в диэлектрике аналогично выражению для скорости $v = 1/\sqrt{LC}$ распространения волн в линии.

Можно было бы ввести вместо электромагнитных констант ε_0 и μ_0 две другие, выражающиеся через них, физические константы, а именно:

$$z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \quad \text{и} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}},$$

что лучше бы выражало волновые свойства поля.

Чтобы уяснить возможность существования одновременно и прямой и обратной волн, рассмотрим переход волны из среды с абсолютной диэлектрической и абсолютной магнитной проницаемостями ε_1 и μ_1 в среду с проницаемостями ε_2 и μ_2. Предположим, что среды разделены плоскостью и что волна распространяется в направлении, нормальном к плоскости раздела. *Падающая* в первой среде на поверхность раздела волна ($E_{\varphi 1}$, $H_{\varphi 1}$) (прямая волна) частично проходит сквозь поверхность раздела, образуя во второй среде *преломленную* (прямую) волну ($E_{\varphi 2}$, $H_{\varphi 2}$) и частично отражается от поверхности раздела, образуя в первой среде *отраженную* (обратную) волну ($E_{\psi 1}$, $H_{\psi 1}$). Соотношения между напряженностями поля для этих волн на поверхности раздела можно написать, использовав на основании вышеотмеченной аналогии соотношения между напряжениями и токами в падающих, преломленных и отраженных волнах тока и напряжения.

Имеем на поверхности раздела:

$$E_{\varphi 2} = \frac{2z_2}{z_2 + z_1} E_{\varphi 1}; \quad E_{\psi 1} = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} E_{\varphi 1};$$

$$H_{\varphi 2} = \frac{2z_1}{z_1 + z_2} H_{\varphi 1}; \quad H_{\psi 1} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} H_{\varphi 1},$$

где $z_1 = \sqrt{\mu_1/\varepsilon_1}$ и $z_2 = \sqrt{\mu_2/\varepsilon_2}$ — соответствующие волновые сопротивления первой и второй среды.

Если $z_2 = z_1$, то отраженные волны отсутствуют.

Если $z_2 > z_1$, то $E_{\varphi 1}$ и $E_{\psi 1}$ имеют одинаковые знаки, а $H_{\varphi 1}$ и $H_{\psi 1}$ — разные знаки. В первой среде в результате частичного отражения волны напряженность электрического поля $E_1 = E_{\varphi 1} + E_{\psi 1}$ возрастает, а напряженность магнитного поля $H_1 = H_{\varphi 1} + H_{\psi 1}$ убывает. При $z_2 < z_1$ имеем обратную картину.

Все остальные выводы, полученные при исследовании распространения волн в однородных линиях без потерь, могут быть соответствующим образом перенесены на исследуемый случай распространения плоской электромагнитной волны в диэлектрике.

В общем случае, когда направление распространения падающей волны составляет некоторый угол с нормалью к поверхности раздела сред, для нахождения отраженной и преломленной волн необходимо использовать все граничные условия для векторов ***E***, ***D***, ***H*** и ***B***.

29.2. Вектор Пойнтинга

Определим мощность потока энергии, отнесенную к единице поверхности, нормальной к направлению распространения волны. Будем предполагать, что существует только волна, движущаяся в одном направлении. В таком случае объемная плотность энергии электромагнитного поля равна

$$\frac{\varepsilon E^2}{2}+\frac{\mu H^2}{2}=\frac{\varepsilon E}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,H+\frac{\mu H}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,E=\sqrt{\varepsilon\mu}\,EH=\frac{1}{v}EH$$

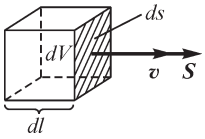

Рис. 29.1

и, следовательно, в объеме $dV = dl\ ds$ (рис. 29.1) заключена энергия

$$\frac{1}{v}EH\ dl\ ds.$$

Отрезок пути dl волна проходит за промежуток времени dt, который связан с dl соотношением $dl = v\ dt$.

Мощность потока энергии, отнесенная к единице поверхности, нормальной к вектору скорости $\boldsymbol{v}$, численно равна количеству энергии, которая проходит через единицу поверхности, нормальной к вектору $\boldsymbol{v}$, в единицу времени. Она получается равной

$$S=\frac{\dfrac{EH}{v}\,dl\,ds}{ds\,dt}.$$

Принимая во внимание, что $dl/dt = v$, находим

$$S = EH.$$

Эта величина может рассматриваться как вектор ***S***, направленный в сторону движения волны, т. е. в направлении вектора скорости $\boldsymbol{v}$.

Представления о потоке энергии и о мощности потока энергии, отнесенной к единице поверхности, были развиты в 1874 г. в работе Н. А. Умова, в которой он применил эти представления к случаю передачи энергии в упругих средах. На одиннадцать лет позже Пойнтинг применил эти представления к случаю передачи электромагнитной энергии и получил выражение вектора ***S*** через векторы ***E*** и ***H***. Соответственно, вектор ***S*** получил наименование в е к т о р а П о й н т и н г а.

Найдем связь между направлением вектора Пойнтинга и направлениями векторов ***E*** и ***H***. В прямой волне, как это следует из выражений, полученных в предыдущем параграфе, E_{x1} и H_{y1} всегда одного знака, т. е. в тот момент, когда вектор

$\boldsymbol{E}$ направлен в сторону положительной оси OX, вектор $\boldsymbol{H}$ направлен в сторону положительной оси OY. Вектор же скорости $\boldsymbol{v}$ в прямой волне направлен в сторону положительной оси OZ. Взаимное расположение векторов $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{S}$ для прямой волны показано на рис. 29.2.

В обратной волне E_{x2} и H_{y2} всегда имеют различные знаки и вектор $\boldsymbol{v}$ направлен в отрицательную сторону оси OZ. Взаимное расположение векторов $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{S}$ в обратной волне изображено на рис. 29.3.

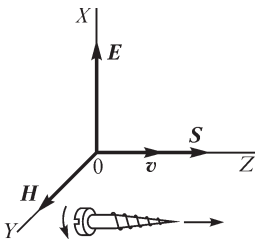

Рис. 29.2

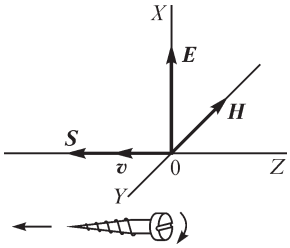

Рис. 29.3

Мы видим, что *направление вектора Пойнтинга совпадает с направлением поступательного движения оси правого винта, головка которого вращается в плоскости, содержащей векторы* $\boldsymbol{E}$ *и* $\boldsymbol{H}$*, в направлении от* $\boldsymbol{E}$ *к* $\boldsymbol{H}$ *по кратчайшему расстоянию.*

Следовательно, вектор $\boldsymbol{S}$ можно представить как векторное произведение векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$:

$$\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{H}].$$

Он определяет собой *мощность потока электромагнитной энергии, отнесенную к единице поверхности, нормальной к направлению распространения волны.* Выражение для вектора Пойнтинга было получено в предположении, что среда однородна и изотропна и что существует только прямая или только обратная волна. В следующем параграфе будет показано, что это выражение справедливо в общем случае.

Остановимся на важном практическом случае, когда E_x и H_y изменяются во времени по закону синуса. Предположим, что существует только одна прямая волна. Имеем

$$E_{x1} = F_1(z - vt) = E_{xm}\sin(\omega t + \psi);$$

$$H_{y1} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,F_1(z - vt) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,E_{xm}\sin(\omega t + \psi),$$

причем ω — угловая частота колебаний.

Последние уравнения удовлетворяются при условии, что существует равенство $\omega t + \psi = k(z - vt)$, где k — постоянная величина. Так как это равенство должно удовлетворяться для любого момента времени t, то, приняв $t = 0$, найдем $\psi = kz$. Следовательно, $\omega t = -kvt$ и $k = -\omega/v$. Таким образом, начальная фаза ψ может быть представлена в виде $\psi = -\dfrac{\omega}{v}\,z$. Стало быть, имеем

$$E_{x1} = E_{xm}\sin\left(\omega t - \frac{\omega}{v}z\right);\quad H_{y1} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,E_{xm}\sin\left(\omega t - \frac{\omega}{v}z\right).$$

На рис. 29.4 изображены векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ в разных точках оси OZ для момента времени $t = 0$. Величины $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ распределены в пространстве по закону синуса, и все это распределение перемещается в положительную сторону оси OZ со скоростью v. Действительно, точка, в которой $E_x = 0$, определяется условием: $\omega t - \frac{\omega}{v}z = 0$, или $z = vt$, т. е. движется со скоростью v в положительном направлении оси OZ. На рис. 29.4 штриховыми линиями изображено распределение поля в некоторый момент времени $t_1 > 0$.

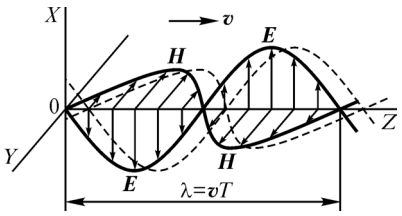

Рис. 29.4

Расстояние, на которое распространяется электромагнитная волна в течение одного периода колебаний, называется д л и н о й в о л н ы. Обозначая длину волны через λ, будем иметь

$$\lambda = vT = \frac{v}{f},$$

где f — частота колебаний.

Разность фаз колебаний в двух точках, удаленных друг от друга в направлении распространения волны на расстояние λ, имеет значение $\frac{\omega}{v}\lambda = \omega T = 2\pi$. Следовательно, *длина волны есть расстояние между двумя ближайшими точками, в которых напряженность поля имеет максимальное положительное значение.*

Чтобы наглядно представить себе все поле плоской волны, необходимо вообразить два взаимно перпендикулярных семейства линий напряженности электрического и магнитного полей, заполняющих собой все пространство, в котором распространяется волна (рис. 29.5). В каждой плоскости, параллельной плоскости XOY, линии напряженности поля распределены равномерно, но в направлении оси OZ густота линий меняется по закону синуса. Все это распределение движется со скоростью v в положительном направлении оси OZ.

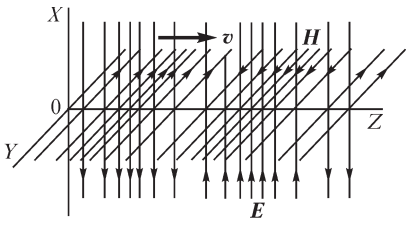

Рис. 29.5

29.3. Поток электромагнитной энергии

Вектор Пойнтинга, определяющий значение и направление потока электромагнитной энергии, передаваемой в единицу времени сквозь единицу поверхности, нормальной к направлению распространения волны, равен

$$\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{H}].$$

Покажем справедливость этого утверждения для любой среды, которая в общем случае может быть и неоднородной и анизотропной, и для любого характера поля. Свое рассмотрение ограничим только одним предположением, что электрические (ε и γ) и магнитные (μ) свойства среды не зависят от напряженностей электрического и магнитного полей и не являются функциями времени.

Рассмотрим некоторый произвольно выбранный объем V пространства, ограниченный замкнутой поверхностью s.

Предположим, что энергия ($W_э + W_м$) электрического и магнитного полей, заключенная в объеме V, изменяется во времени. Скорость ее уменьшения равна

$$-\frac{\partial}{\partial t}(W_э + W_м) = -\int_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\boldsymbol{E}\boldsymbol{D}}{2} + \frac{\boldsymbol{H}\boldsymbol{B}}{2}\right)dV.$$

В общем случае для анизотропной среды имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\boldsymbol{E}\boldsymbol{D}}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E_x D_x + E_y D_y + E_z D_z}{2}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_x E_x^2 + \varepsilon_y E_y^2 + \varepsilon_z E_z^2}{2}\right) = E_x \frac{\partial D_x}{\partial t} + E_y \frac{\partial D_y}{\partial t} + E_z \frac{\partial D_z}{\partial t} = \boldsymbol{E}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

и точно так же

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\boldsymbol{H}\boldsymbol{B}}{2}\right) = \boldsymbol{H}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}.$$

Таким образом,

$$-\frac{\partial}{\partial t}(W_э + W_м) = \int_V \left(-\boldsymbol{E}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} - \boldsymbol{H}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right)dV.$$

Выражая плотность тока смещения в виде разности результирующей плотности тока и плотностей токов проводимости и переноса и используя первое уравнение Максвелла, находим

$$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \delta - \gamma\boldsymbol{E} - \boldsymbol{J}_{пер} = \operatorname{rot}\boldsymbol{H} - \gamma\boldsymbol{E} - \boldsymbol{J}_{пер}.$$

Кроме того, второе уравнение Максвелла дает

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\boldsymbol{E}.$$

Таким образом,

$$-\frac{\partial}{\partial t}(W_э + W_м) = \int_V (-\boldsymbol{E}\operatorname{rot}\boldsymbol{H} + \gamma\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{J}_{пер}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{H}\operatorname{rot}\boldsymbol{E})\,dV.$$

Заметим, что имеет место тождество

$$\boldsymbol{H}\operatorname{rot}\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \operatorname{div}[\boldsymbol{E}\boldsymbol{H}].$$

Действительно, векторное произведение $[\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{H}]$ выражается в виде

$$[\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{H}] = \boldsymbol{i}(E_y H_z - E_z H_y) + \boldsymbol{j}(E_z H_x - E_x H_z) + \boldsymbol{k}(E_x H_y - E_y H_x).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\operatorname{div}[\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{H}] &= \frac{\partial}{\partial x}(E_y H_z - E_z H_y) + \frac{\partial}{\partial y}(E_z H_x - E_x H_z) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z}(E_x H_y - E_y H_x) = H_x\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + H_y\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \\ &+ H_z\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) - E_x\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right) - E_y\left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right) - \\ &- E_z\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right) = H_x \operatorname{rot}_x \boldsymbol{E} + H_y \operatorname{rot}_y \boldsymbol{E} + H_z \operatorname{rot}_z \boldsymbol{E} - \\ &- E_x \operatorname{rot}_x \boldsymbol{H} - E_y \operatorname{rot}_y \boldsymbol{H} - E_z \operatorname{rot}_z \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H} \operatorname{rot} \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E} \operatorname{rot} \boldsymbol{H}.\end{aligned}$$

Согласно этому тождеству и на основании теоремы Остроградского можем написать

$$\int_V (\boldsymbol{H} \operatorname{rot} \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E} \operatorname{rot} \boldsymbol{H})\, dV = \int_V \operatorname{div}[\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{H}]\, dV = \oint_s [\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{H}]\, d\boldsymbol{s}.$$

Таким образом, получаем

$$-\frac{\partial}{\partial t}(W_э + W_м) = \int_V \gamma \boldsymbol{E}^2\, dV + \int_V \boldsymbol{J}_{пер} \boldsymbol{E}\, dV + \oint_s [\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{H}]\, d\boldsymbol{s}. \qquad (*)$$

Первый интеграл в правой части полученного уравнения представляет собой энергию, поглощаемую в объеме V в единицу времени вследствие конечной проводимости среды, т. е. энергию, переходящую в теплоту в тех частях объема V, где среда обладает удельной проводимостью γ и где, следовательно, существуют токи проводимости. Второй интеграл представляет собой работу, затрачиваемую в единицу времени на ускорение свободных заряженных частиц в объеме V, т. е. на увеличение кинетической энергии этих частиц в тех частях объема V, где существуют токи переноса свободных заряженных частиц. Если имеет место столкновение этих частиц с молекулами вещества, то часть сообщенной им кинетической энергии также переходит в теплоту.

Наличие третьего интеграла показывает, что не вся убыль энергии электрического и магнитного полей в объеме V превращается внутри этого объема в теплоту и в кинетическую энергию свободных заряженных частиц. Величина этого третьего интеграла представляет собой мощность, численно равную той энергии, которая передается в единицу времени из объема V сквозь поверхность s.

Таким образом, мощность потока электромагнитной энергии сквозь поверхность s выражается в виде

$$p = \oint_s [\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{H}]\, d\boldsymbol{s} = \oint_s \boldsymbol{S}\, d\boldsymbol{s}.$$

Отсюда следует, что удельная мощность потока электромагнитной энергии, численно равная количеству энергии, передаваемой в единицу времени сквозь единицу поверхности, перпендикулярной к направлению распространения волны, может быть представлена вектором

$$\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{H}].$$

Уравнение (*) получено в предположении, что в области V не совершается механической работы по перемещению в пространстве заряженных проводящих тел и проводящих контуров с токами, а также по перемещению отдельных частей среды, неоднородных в электрическом и магнитном отношении. Это предположение заключалось в том, что величины γ, μ и ε были приняты постоянными в каждой точке пространства. Следовательно, все части неоднородной среды, и в частности проводники, предполагались неподвижными. Кроме того, не было предположено существование в области V каких-либо источников электродвижущей силы. Уравнение (*) представляет собой выражение закона сохранения энергии в применении к такому случаю.

В более общем случае внутри области V могут существовать источники электромагнитной энергии, в которых совершается преобразование энергии какого-либо вида (тепловой, химической и т. д.) или механической работы в электромагнитную энергию. Обозначив через p_e мощность этих источников, можем написать на основании закона сохранения энергии следующее равенство:

$$p_e = \frac{\partial}{\partial t}(W_э + W_м) + \int\limits_V \gamma \boldsymbol{E}^2\, dV + \int\limits_V \boldsymbol{J}_{пер}\boldsymbol{E}\, dV + \oint\limits_s [\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{H}]\, d\boldsymbol{s}. \qquad (**)$$

Умножив это уравнение на dt, получим, что работа, совершаемая всеми источниками за время dt, идет на изменение запаса энергии в магнитном и электрическом полях в объеме V, на выделение теплоты в этом объеме, на увеличение кинетической энергии находящихся в объеме V свободных заряженных частиц и что, кроме того, часть этой работы соответствует энергии, передаваемой за пределы области сквозь поверхность s.

29.4. Излучение электромагнитных волн антенной. Опыты Г. Герца. Работы П. Н. Лебедева. Изобретение радио А. С. Поповым

Всякая цепь переменного тока, строго говоря, излучает электромагнитные волны. Это принципиальное положение следует из решения системы уравнений электромагнитного поля, которое может быть получено для контуров той или иной формы. В следующих параграфах будет приведено решение для электрического диполя с переменными зарядами. Здесь остановимся лишь на некоторых общих соображениях, связанных с вопросом об излучении электромагнитных волн.

Предположим, что ток в некотором контуре увеличивается от нуля до конечного значения и затем вновь уменьшается до нуля. Если увеличивать ток в контуре бесконечно медленно, то потокосцепление самоиндукции Ψ при токе i принимает то значение, которое оно имеет при том же значении установившегося и

весьма длительно существующего постоянного тока. Энергия, израсходованная внешним источником ЭДС при увеличении тока и равная $A = \int i\frac{\partial \Psi}{\partial t}dt = \int i\,d\Psi$, преобразуется при этом в энергию магнитного поля. При бесконечно медленном уменьшении тока в контуре вся энергия, запасенная в магнитном поле, возвращается обратно источнику ЭДС. Однако полный возврат энергии поля источнику ЭДС имеет место только при бесконечно медленном изменении тока. При конечной же скорости установления и уменьшения тока часть энергии уносится излученной электромагнитной волной.

Самый факт излучения связан с тем, что скорость v распространения электромагнитного поля имеет конечное значение. Пусть в момент времени $t = 0$ ток в контуре начинает увеличиваться. До момента $t = 0$ ток в контуре отсутствовал. К моменту времени t_1, когда ток в контуре достигает максимального значения, электромагнитное поле успевает распространиться только на конечное расстояние от контура, равное vt_1. Если вслед за тем ток в контуре уменьшается, то энергия поля частично возвращается источнику. Однако граница электромагнитного поля продолжает распространяться в прежнем направлении с той же скоростью v, и к моменту времени t_2, когда ток в контуре вновь станет равен нулю, поле распространится на расстояние от контура, равное vt_2. Поэтому энергия поля не возвращается полностью источнику ЭДС. Часть энергии оказывается связанной с электромагнитной волной, свободно распространяющейся в пространстве.

Из сказанного ясно, что количество энергии излученной волны за некоторый промежуток времени зависит от скорости изменения тока в контуре. При постоянном токе и постоянных зарядах излучение не имеет места. Всякий контур, в котором протекает переменный ток, принципиально говоря, излучает электромагнитные волны. Однако при промышленной частоте $f = 50$ Гц в системах, с которыми мы имеем дело в технических устройствах, количество энергии излученной волны практически ничтожно, и при расчетах мы эту энергию не принимаем во внимание. Излучение незначительно и в диапазоне звуковых частот. Поэтому в радиотехнике используются высокие частоты — приблизительно от $f = 10^5$ Гц и выше.

Способность контура к излучению сильно зависит от его геометрической конфигурации. Для увеличения этой способности необходимо создать такие условия, чтобы магнитное и электрическое поля, связанные с переменным током и переменным напряжением в контуре, были распределены в одной и той же области пространства, окружающего контур. Так, например, контур, изображенный на рис. 29.6, содержащий катушку самоиндукции с плотно навитыми витками обмотки и конденсатор с небольшим расстоянием между пластинами, обладает весьма слабой способностью к излучению, так как основное магнитное поле и основное электрическое поле сосредоточены в разных областях пространства. Излучение незначительно также и у контура, изображенного на рис. 29.7. Магнитное поле распределено вдоль такого контура, но основное электрическое поле остается сосредоточенным в небольшом пространстве между обкладками конденсатора. Но если раздвинуть обкладки на возможно большее расстояние

друг от друга, выпрямив соединяющий их провод так, как показано на рис. 29.8, то электрическое и магнитное поля оказываются распределенными в одной и той же области пространства. Такая система обладает высокой способностью к излучению.

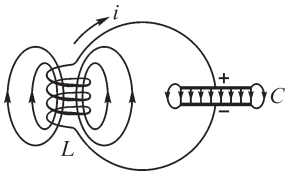

Рис. 29.6

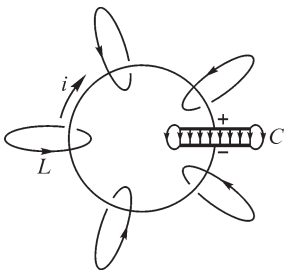

Рис. 29.7

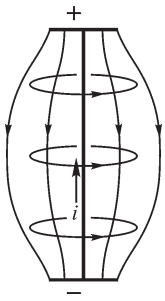

Рис. 29.8

Первые замечательные опыты, экспериментально подтвердившие теорию Максвелла, были поставлены Герцем. Основной колебательный контур, так называемый вибратор, которым пользовался Герц, по существу, был подобен контуру, изображенному на рис. 29.8. Обкладки конденсатора, выполненные либо в виде пластин, либо в виде шаров, могли передвигаться вдоль стержней l_1 и l_2 (рис. 29.9), чем достигалось изменение емкости системы. Чтобы иметь возможность зарядить конденсатор, в проводе, соединяющем его обкладки, был образован между двумя маленькими шариками искровой промежуток K. Обкладки конденсатора Герц присоединял ко вторичным зажимам индукционной катушки R. Каждое прерывание тока в первичной обмотке катушки вызывало импульс ЭДС во вторичной обмотке. Конденсатор заряжался до напряжения, при котором проскакивала искра между шариками. Заряженный конденсатор оказывался короткозамкнутым через искру, и в системе вибратора возникали колебания весьма высокой частоты. Частота колебаний зависела от емкости и индуктивности вибратора. Эти колебания весьма быстро затухали, так как их энергия расходовалась на излучение и на выделение теплоты в контуре.

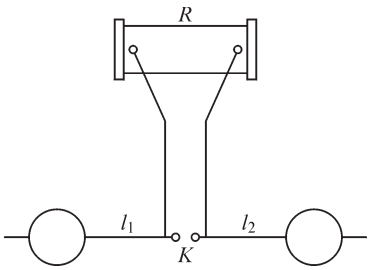

Рис. 29.9

Для обнаружения электромагнитных волн, излученных вибратором, Герц применял так называемый резонатор, состоявший из колебательного контура, снабженного искровым промежутком. При настройке резонатора в резонанс с частотой электромагнитных колебаний в вибраторе в контуре резонатора возникали достаточно сильные колебания, вызывавшие проскакивание искры в его искровом промежутке. По длине этой искры можно было судить об интенсивности электромагнитного поля в месте расположения резонатора. Герцу удалось обнаружить электромагнитное излучение на расстоянии 12 м от вибратора, имевшего геометрические размеры порядка 1 м.

Опыты Герца показали, что электромагнитные волны распространяются в соответствии с законами, которые вытекают из теории Максвелла. Эти опыты подтвердили также гипотезу Максвелла об электромагнитной природе света. Направляя излучение вибратора на большую металлическую пластину нормально к ее поверхности, Герц наблюдал стоячие волны, образующиеся в результате наложения на прямую волну волны, отраженной от пластины. Обнаруживая резонатором узлы и пучности колебаний в стоячей волне, он получал возможность измерять длину волны и, зная частоту электромагнитных колебаний в вибраторе, мог вычислить скорость распространения электромагнитных волн. Эта скорость оказалась равной скорости света.

Герц обнаружил, что электромагнитные волны, излучаемые вибратором, отражаются от металлических зеркал по тем же законам, по которым происходит отражение от зеркала и светового луча, и наблюдал также преломление электромагнитной волны при прохождении ее сквозь большую призму, сделанную из асфальта.

Блестящие опыты по исследованию распространения и преломления в различных средах электромагнитных волн и по экспериментальному доказательству электромагнитной природы света были произведены выдающимся физиком-экспериментатором П. Н. Лебедевым. П. Н. Лебедев впервые осуществил в созданной им лаборатории вибратор весьма малых размеров, который излучал весьма короткие волны, имеющие длину меньше 1 см. Он осуществил также резонатор с термопреобразователем, позволяющий принимать столь короткие волны. Герц, оперировавший волнами, имевшими длину порядка метра, вынужден был создавать призмы и зеркала больших размеров. П. Н. Лебедев в своей установке получил возможность пользоваться преломляющими и отражающими волны устройствами весьма малых размеров. Это не только сделало всю экспериментальную установку негромоздкой, но и открыло новые возможности для исследования, а именно: оказалось возможным исследовать прохождение электромагнитных волн через кристаллические тела. Результаты этого замечательного экспериментального исследования П. Н. Лебедев опубликовал в 1895 г. в работе под названием «О двойном преломлении лучей электрической силы».

Мировую славу принесли П. Н. Лебедеву его блестящие опыты, в которых он впервые экспериментально доказал давление света. В первых опытах, успешно завершенных в 1900 г., П. Н. Лебедев обнаружил и измерил давление света на твердые тела. В последующих, еще более трудных опытах, завершившихся к 1910 г., П. Н. Лебедев экспериментально доказал существование светового давления на газы. Результаты экспериментальных работ П. Н. Лебедева оказались в согласии с выводами максвелловой теории электромагнитного поля.

Имеющее мировое значение изобретение первого радиотелеграфа было сделано выдающимся русским физиком и электротехником А. С. Поповым. А. С. Попову принадлежит заслуга создания первого радиотелеграфа и применения радиосвязи для практических целей. А. С. Попов создал первый приемник радиотелеграфных сигналов. В этом приемнике он использовал для регистрации проходящих электромагнитных волн так называемый когерер, представляющий

собой стеклянную трубку с металлическим порошком. Такая трубка имеет весьма большое электрическое сопротивление, но при прохождении в месте ее расположения электромагнитных волн сопротивление трубки резко падает. Включив такую трубку в цепь источника ЭДС, можно по резкому увеличению тока судить о появлении электромагнитных волн. Однако после прекращения действия электромагнитных волн сопротивление трубки вновь не восстанавливается, и для его восстановления требуется встряхнуть трубку. А. С. Попов ввел в свой приемник устройство для автоматического встряхивания трубки, действующее под влиянием тока, возникающего в цепи трубки в результате прохождения электромагнитной волны. Таким образом, трубка автоматически приводилась в состояние готовности зарегистрировать новый сигнал. Это изобретение сразу же дало возможность регистрировать сигналы азбуки Морзе.

Для увеличения чувствительности приема А. С. Попов первый предложил использовать антенну — вертикальный провод, одним концом присоединенный к приемному устройству. Первоначально А. С. Попов применял свое приемное устройство для регистрации приближающихся грозовых разрядов, в связи с чем и назвал изобретенное им устройство грозоотметчиком. Затем он применил это устройство для осуществления радиосвязи в военно-морском деле.

Официальной датой изобретения радио принято считать 7 мая 1895 г., когда А. С. Попов выступил с публичным докладом на заседании физического отделения Русского физико-химического общества на тему «Об отношении металлических порошков к электромагнитным колебаниям». Во время этого доклада А. С. Попов демонстрировал действие своего приемного устройства.

Современные антенны передающих и приемных радиостанций осуществляются по тому же принципу, который был положен в основу конструкции первой антенны А. С. Попова. При конструировании антенны ставится задача создания развернутого колебательного контура. Антенны, расположенные над поверхностью земли, обычно состоят из вертикальных проводов, соединенных с более или менее развитой горизонтальной сетью проводов. Для передающей радиостанции нижний конец антенны присоединяют к одному из зажимов катушки генератора электромагнитных колебаний высокой частоты. Другой зажим катушки соединяют с землей через специальную систему заземлителя. ЭДС высокой частоты, возбужденная в катушке генератора, создает мощные колебания тока в антенне, контур которой обычно настраивают в резонанс с частотой колебаний в генераторе.

Мощность излучения антенны может быть вычислена следующим путем. Если антенна расположена над поверхностью хорошо проводящей земли, то можно представить себе землю замененной зеркальным изображением антенны (рис. 29.10). Окружив антенну и ее зеркальное изображение замкнутой поверхностью s, применим к объему V, ограниченному этой поверхностью, уравнение (**) предыдущего параграфа. Подразумевая под величиной p_e только мощность, равную скорости перехода энергии из антенны

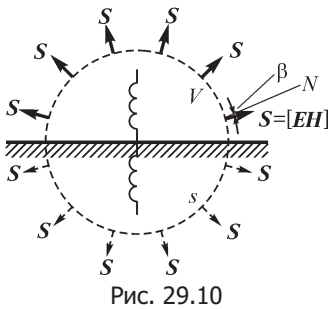

Рис. 29.10

в окружающее ее поле, т. е. исключая из рассмотрения потери энергии в окружающем антенну пространстве: $\gamma = 0$ и $\rho = 0$, $J_{\text{пер}} = 0$, получаем

$$p_e - \frac{\partial}{\partial t}(W_{\text{э}} + W_{\text{м}}) = \oint_s [\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{H}]\,d\boldsymbol{s} = \oint_s \boldsymbol{S}\,d\boldsymbol{s} = \oint_s S_n\,ds,$$

где S_n — нормальная к поверхности s составляющая вектора Пойнтинга.

Изменение запаса энергии полей ($W_{\text{э}} + W_{\text{м}}$) в объеме V за целый период колебаний тока в антенне равно нулю. Поэтому средняя мощность волны, излученной антенной и ее зеркальным изображением, равна

$$P_e = \frac{1}{T}\int_0^T p_e\,dt = \oint_s \left(\frac{1}{T}\int_0^T S_n\,dt\right) ds = \oint_s S_{n\,\text{ср}}\,ds,$$

причем $S_{n\ \text{ср}}$ есть среднее арифметическое за период колебаний значение нормальной составляющей вектора Пойнтинга. Таким образом, для вычисления мощности излучения необходимо определить в каждой точке поверхности s для каждого момента времени вектор Пойнтинга $\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{E}\boldsymbol{H}]$ и, следовательно, найти величины $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ путем решения системы уравнений электромагнитного поля.

29.5. Электродинамические векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля

Представляется возможным аналогично тому, как это было сделано при рассмотрении статических и стационарных полей, выразить и в общем случае для переменного электромагнитного поля векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ через вспомогательные величины — векторный потенциал $\boldsymbol{A}$ и скалярный потенциал U поля. Введение этих вспомогательных величин ценно тем, что они для однородной и изотропной среды довольно просто вычисляются по заданным распределению в пространстве и изменению во времени свободных зарядов и токов проводимости и переноса. Естественно, что при этом $\boldsymbol{A}$ и U являются функциями не только координат, но и времени.

Будем исходить из совокупности уравнений электромагнитного поля:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \delta;\quad \operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t};$$

$$\delta = \boldsymbol{J}_{\text{пр}} + \boldsymbol{J}_{\text{см}} + \boldsymbol{J}_{\text{пер}} = (\boldsymbol{J}_{\text{пр}} + \boldsymbol{J}_{\text{пер}}) + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t};$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E};\quad \boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H};\quad \operatorname{div}\boldsymbol{D} = \rho;\quad \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0.$$

Здесь обозначены: $\boldsymbol{J}_{\text{пр}}$ — плотность тока проводимости; $\delta_{\text{см}} = \partial\boldsymbol{D}/\partial t$ — плотность тока смещения и $\boldsymbol{J}_{\text{пер}}$ — плотность тока переноса.

Умножая первое уравнение на μ и используя третье, четвертое и пятое уравнения, можем при $\mu = \text{const}$ и $\varepsilon = \text{const}$ привести эту совокупность к четырем уравнениям:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{B} = \mu(\boldsymbol{J}_{\text{пр}} + \boldsymbol{J}_{\text{пер}}) + \varepsilon\mu\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t};\quad \operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t};$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon};\quad \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0.$$

Последнее уравнение дает возможность представить вектор $\boldsymbol{B}$ через *векторный потенциал* $\boldsymbol{A}$ электромагнитного поля в виде

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}, \qquad (*)$$

так как всегда div rot $\boldsymbol{A} = 0$. Из второго уравнения имеем

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \operatorname{rot}\left(-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right),$$

что удовлетворяется, если положить

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} U, \qquad (**)$$

так как rot grad $U = 0$. Величина U есть *скалярный потенциал* электромагнитного поля.

Подставив выражения (*) и (**) в первое уравнение электромагнитного поля, получаем

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \mu(\boldsymbol{J}_{\text{пр}} + \boldsymbol{J}_{\text{пер}}) - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \varepsilon\mu\operatorname{grad}\frac{\partial U}{\partial t}.$$

Как было показано в § 27.2, имеет место тождество

$$\operatorname{rot}_x(\operatorname{rot}\boldsymbol{A}) = \frac{\partial}{\partial x}\operatorname{div}\boldsymbol{A} - \nabla^2 A_x = \operatorname{grad}_x(\operatorname{div}\boldsymbol{A}) - \nabla^2 A_x.$$

Составляя такие же выражения для проекций A_y и A_z, умножая эти выражения на орты и складывая их, получаем

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A} - \nabla^2\boldsymbol{A}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A} - \nabla^2\boldsymbol{A} = \mu(\boldsymbol{J}_{\text{пр}} + \boldsymbol{J}_{\text{пер}}) - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \varepsilon\mu\operatorname{grad}\frac{\partial U}{\partial t}.$$

Вектор $\boldsymbol{A}$ пока выбран так, что определен его вихрь (rot $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$). Мы можем еще тем или иным способом определить расхождение этого вектора. Сделаем это так, чтобы упростилось последнее уравнение, а именно, чтобы в нем сократились первый член в левой части с последним членом в правой части. С этой целью примем

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} = -\varepsilon\mu\frac{\partial U}{\partial t}. \qquad (***)$$

После сокращения указанных членов в правой и левой частях уравнения получаем уравнение Даламбера для вектора $\boldsymbol{A}$:

$$\nabla^2\boldsymbol{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu(\boldsymbol{J}_{\text{пр}} + \boldsymbol{J}_{\text{пер}}).$$

Это уравнение распадается на три соответствующих уравнения для проекций A_x, A_y и A_z, причем в правых частях будут содержаться соответственно проекции векторов плотности тока.

Подставляя выражение (**) для $\boldsymbol{E}$ в оставшееся третье уравнение электромагнитного поля, получаем

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\boldsymbol{A} - \operatorname{div}\operatorname{grad}U = \frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Заменяя div $\boldsymbol{A}$ его выражением через U согласно равенству (***) и замечая, что div grad $U = \nabla^2 U$, находим

$$\nabla^2 U - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon},$$

т. е. скалярный потенциал при этом также удовлетворяет уравнению Даламбера.

Заметим, что при постоянных полях, когда $\partial\boldsymbol{A}/\partial t = 0$ и $\partial U/\partial t = 0$, уравнения Даламбера переходят в уже известные нам уравнения Пуассона для U и $\boldsymbol{A}$.

Исследуя поле в области, где нет свободных зарядов ($\rho = 0$) и нет токов проводимости и переноса ($J_{\text{пр}} = 0$, $J_{\text{пер}} = 0$), будем иметь уравнения:

$$\nabla^2 U = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 U}{\partial t^2};\quad \nabla^2 \mathbf{A} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2},$$

которые носят название в о л н о в ы х у р а в н е н и й.

Получим, пользуясь некоторыми общими соображениями, выражения для U, A_x, A_y и A_z, определяющие эти величины по заданному распределению зарядов и токов и их изменению во времени и являющиеся частными интегралами приведенных выше уравнений Даламбера.

Предположим, что в некотором малом элементе объема пространства содержится изменяющийся во времени заряд q. Естественно, это осуществимо физически только путем притекания свободных заряженных частиц в данный элемент объема из смежных с ним элементов объема или утекания их из данного элемента объема в смежные с ним элементы объема. Однако сначала рассмотрим поле, создаваемое только зарядом, находящимся в данном элементе объема. Пусть элемент объема столь мал, что заряд q можно рассматривать как точечный.

Вне заряда q потенциал U удовлетворяет волновому уравнению

$$\nabla^2 U = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2},$$

причем $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$. Найдем решение этого уравнения для рассматриваемого случая. Полагая, что заряд находится в начале координат и обозначая через r расстояние от заряда до точки, в которой определяется U, будем иметь

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2;\quad 2r\frac{\partial r}{\partial x} = 2x;\quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

и аналогично

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r} \quad \text{и} \quad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}.$$

Поле заряда q обладает сферической симметрией, и, следовательно, U является функцией только r и t. При этом вектор grad U направлен по радиусу и имеет величину, равную $\text{grad}_r\, U = \partial U/\partial r$. При таком условии имеем

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial r}\frac{x}{r};$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)\frac{x}{r}+\frac{\partial}{\partial x}(x)\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)x\frac{\partial U}{\partial r}=$$

$$=\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\frac{x^2}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{x}{r}x\frac{\partial U}{\partial r}.$$

Составляя такие же выражения для $\partial^2 U/\partial y^2$ и $\partial^2 U/\partial z^2$ и складывая их, получаем

$$\nabla^2 U=\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2 (rU)}{\partial r^2}.$$

Волновое уравнение приобретает вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 (rU)}{\partial r^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 (rU)}{\partial r^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 (rU)}{\partial t^2}.$$

Последнее уравнение для rU совершенно аналогично уравнению (*) для E_x, которое мы имели при исследовании плоской волны в § 29.1. Следовательно, по аналогии можем написать его решение в виде

$$rU = F_1(r-vt)+F_2(r+vt).$$

Интересуясь только прямой волной, распространяющейся от заряда, ограничимся рассмотрением частного решения $F_1(r - vt)$, причем запишем его в виде

$$rU = F_1\left[-v\left(t-\frac{r}{v}\right)\right]=f\left(t-\frac{r}{v}\right).$$

При этом $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ есть скорость распространения волны. Итак, имеем

$$U=\frac{f(t-r/v)}{r}.$$

Так как в частном случае для не изменяющегося во времени заряда q эта формула должна приобрести вид $U = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon r}$, то, следовательно, $f\left(t-\dfrac{r}{v}\right)=\dfrac{q(t-r/v)}{4\pi\varepsilon}$.

Здесь $q\,(t - r/v)$ — *значение заряда q в момент времени $(t - r/v)$, предшествующий моменту времени t, в который определяется U. При этом r/v есть промежуток времени, в течение которого волна, движущаяся со скоростью v, проходит путь r.*

Если заряды распределены в некотором объеме V пространства с объемной плотностью $\rho(x, y, z, t)$, являющейся функцией координат и времени, то, применяя полученное решение к элементарному заряду $dq = \rho dV$, заключенному в элементе объема dV, и суммируя потенциалы в некоторой точке поля от всех элементарных зарядов, получаем

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho(t - r/v)dV}{r},$$

где r — расстояние от элемента объема dV до точки, в которой определяется U.

Последнее выражение является частным решением уравнения Даламбера для U.

Аналогичным путем получаем частные решения уравнений Даламбера для проекций вектора $\boldsymbol{A}$:

$$A_x = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{J_x(t - r/v)\,dV}{r}; \quad A_y = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{J_y(t - r/v)\,dV}{r}; \quad A_z = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{J_z(t - r/v)\,dV}{r}.$$

Здесь $J_x(t - r/v)$, $J_y(t - r/v)$ и $J_z(t - r/v)$ — значения проекций вектора плотности тока проводимости или переноса в элементе объема dV в момент $(t - r/v)$, *предшествующий* моменту t, в который определяются A_x, A_y и A_z.

Полученные выражения переходят при постоянных токах в найденные ранее выражения (см. § 27.2).

Полученный результат имеет глубокое принципиальное значение — он выражает то существенное обстоятельство, что электромагнитные возмущения распространяются от центров возмущения с конечной скоростью v, и чем дальше от центра возмущения, тем больше запаздывает их действие. Соответственно *скалярный* U и *векторный* $\boldsymbol{A}$ потенциалы, выражаемые последними формулами, называют электродинамическими запаздывающими потенциалами.

В заключение обратим внимание на то, что выражение для напряженности электрического поля (**), помимо члена $(-\operatorname{grad} U)$, содержит еще член $(-\partial\boldsymbol{A}/\partial t)$. Составляя линейный интеграл напряженности электрического поля вдоль некоторого произвольного замкнутого контура, будем иметь

$$\oint \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} = \oint\left(-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} U\right)d\boldsymbol{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\oint \boldsymbol{A}\,d\boldsymbol{l} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t},$$

так как $\oint \operatorname{grad} U\,d\boldsymbol{l} = 0$ и так как интеграл $\oint \boldsymbol{A}\,d\boldsymbol{l}$ равен магнитному потоку Φ сквозь поверхность, ограниченную контуром интегрирования.

Таким образом, составляющая $(-\partial\boldsymbol{A}/\partial t)$ напряженности электрического поля имеет смысл ЭДС, индуцируемой переменным магнитным потоком, отнесенной к единице длины в направлении этой составляющей.

В электростатическом поле и электрическом стационарном поле около неподвижных проводников с постоянными токами электродвижущие силы индукции отсутствуют, и напряженность электрического поля в этом случае определяется только членом $(-\operatorname{grad} U)$, причем U не зависит от времени.

29.6. Электрический диполь с переменными зарядами

Рассмотрим электрическую колебательную систему, образованную двумя малыми металлическими сферами, соединенными проводником длиной l. Предположим, что вся емкость такого вибратора есть емкость между сферами и что соединительный проводник обладает только индуктивностью. При возникновении колебаний в такой системе переменный ток i в проводнике в каждый момент времени имеет одно и то же значение вдоль всего проводника.

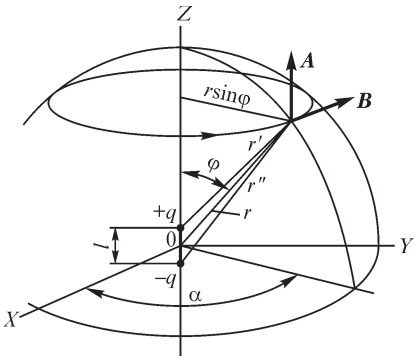

Рис. 29.11

Такой вибратор на расстояниях r от него, намного превышающих l, можно рассматривать как диполь с переменным электрическим моментом ql. Поместим диполь в начале координат и направим его ось по оси OZ (рис. 29.11).

Запаздывающий векторный потенциал $\boldsymbol{A}$ в точке, удаленной на расстояние r от вибратора, равен

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu}{4\pi}\int_l \frac{i(t-r/v)\,d\boldsymbol{l}}{r}=\frac{\mu}{4\pi}\frac{i(t-r/v)\,\boldsymbol{l}}{r}.$$

Последнее выражение получается, если учесть, что при $r \gg l$ величину $1/r$, а также, в соответствии с вышеотмеченным положением об одинаковости тока вдоль проводника, и величину $i(t - r/v)$ можно вынести за знак интеграла.

Запаздывающий скалярный потенциал в той же точке равен

$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{q(t-r'/v)}{r'}-\frac{q(t-r''/v)}{r''}\right].$$

При $r \gg l$ имеем

$$r'\approx r-\frac{l}{2}\cos\varphi;\quad r''\approx r+\frac{l}{2}\cos\varphi.$$

Разлагая эти выражения в ряд по степеням малой величины $\frac{l}{2}\cos\varphi$ и ограничиваясь двумя первыми членами разложения, получаем

$$\frac{q(t-r'/v)}{r'}=\frac{q(t-r/v)}{r}-\frac{l}{2}\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{q(t-r/v)}{r}\right];$$

$$\frac{q(t-r''/v)}{r''}=\frac{q(t-r/v)}{r}+\frac{l}{2}\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{q(t-r/v)}{r}\right].$$

Следовательно,

$$U=-\frac{l\cos\varphi}{4\pi\varepsilon}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{q(t-r/v)}{r}\right].$$

Условимся в дальнейшем опускать обозначение аргумента $(t - r/v)$ и кратко писать

$$q(t - r/v) = q; \quad i(t - r/v) = i.$$

Заметив, что

$$\frac{\partial q}{\partial r} = -\frac{1}{v}\frac{\partial q}{\partial t} \quad \text{и} \quad \frac{\partial i}{\partial r} = -\frac{1}{v}\frac{\partial i}{\partial t},$$

будем, пользуясь этими соотношениями, производные $\partial q/\partial r$ и $\partial i/\partial r$ заменять умноженными на $(-1/v)$ производными $\partial q/\partial t$ и $\partial i/\partial t$. Кроме того, заметим, что $\partial q/\partial t = i$ и $\partial^2 q/\partial t^2 = \partial i/\partial t$.

Составляющие вектора магнитной индукции определяются из соотношений:

$$B_x = \operatorname{rot}_x \boldsymbol{A}; \quad B_y = \operatorname{rot}_y \boldsymbol{A}; \quad B_z = \operatorname{rot}_z \boldsymbol{A}.$$

Заметив, что $A_x = A_y = 0$ и $A_z = \dfrac{\mu i l}{4\pi r}$, находим

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\partial A_z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\mu l}{4\pi}\left(-\frac{i}{r^2} - \frac{1}{rv}\frac{\partial i}{\partial t}\right)\frac{y}{r};$$

$$B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{\partial A_z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\mu l}{4\pi}\left(-\frac{i}{r^2} - \frac{1}{rv}\frac{\partial i}{\partial t}\right)\frac{x}{r}; \quad B_z = 0.$$

Так как $B_x/B_y = -y/x$, то вектор $\boldsymbol{B}$ касателен к окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной к оси OZ и имеющей центр на этой оси (см. рис. 29.11). Эти окружности являются магнитными линиями. Следовательно, в сферической системе координат r, φ, α вектор $\boldsymbol{B}$ имеет единственную составляющую B_α, равную по значению $|B_\alpha| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$. Так как $\sqrt{x^2 + y^2} = r\sin\varphi$ и знак B_α должен совпадать со знаком B_y при $y = 0$ и $x > 0$ (см. рис. 29.11), то

$$B_\alpha = \frac{\mu l}{4\pi}\left(\frac{i}{r^2} + \frac{1}{rv}\frac{\partial i}{\partial t}\right)\sin\varphi = \frac{\mu l \sin\varphi}{4\pi r v}\left(\frac{\partial i}{\partial t} + \frac{v}{r}i\right). \qquad (*)$$

Определим составляющие E_α, E_r и E_φ в сферических координатах, пользуясь выражением

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} U,$$

причем заметим, что $A_\alpha = 0$, $A_r = A_z\cos\varphi$ и $A_\varphi = -A_z\sin\varphi$ и что U можно представить в виде

$$U = -\frac{l\cos\varphi}{4\pi\varepsilon}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{q}{r}\right) = -\frac{l\cos\varphi}{4\pi\varepsilon}\left(-\frac{1}{rv}\frac{\partial q}{\partial t} - \frac{q}{r^2}\right) = \frac{l\cos\varphi}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{i}{rv} + \frac{q}{r^2}\right).$$

Так как A_α и U не зависят от α, то $E_\alpha = 0$. Далее имеем

$$E_r = -\frac{\partial A_r}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{\mu l\cos\varphi}{4\pi\varepsilon}\frac{\partial i}{\partial t} - \frac{l\cos\varphi}{4\pi\varepsilon}\left(-\frac{1}{rv^2}\frac{\partial i}{\partial t} - \frac{i}{r^2 v} - \frac{1}{r^2 v}\frac{\partial q}{\partial t} - \frac{2q}{r^3}\right).$$

Так как $\frac{1}{\varepsilon v^2} = \mu$, то первое слагаемое и первый член в скобках сокращаются и получаем

$$E_r = \frac{l\cos\varphi}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{2i}{r^2 v} + \frac{2q}{r^3}\right) = \frac{2\mu l\cos\varphi}{4\pi r}\left(\frac{v}{r}i + \frac{v^2}{r^2}q\right). \qquad (**)$$

Наконец,

$$E_\varphi = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial t} - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\varphi} = \frac{\mu l\sin\varphi}{4\pi r}\frac{\partial i}{\partial t} + \frac{l\sin\varphi}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r^2 v}\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{q}{r^3}\right)$$

или

$$E_\varphi = \frac{\mu l\sin\varphi}{4\pi r}\left(\frac{\partial i}{\partial t} + \frac{v}{r}i + \frac{v^2}{r^2}q\right). \qquad (***)$$

Поскольку $E_\alpha = 0$, то $\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{B}$.

В дальнейшем будем рассматривать важный практический случай синусоидального изменения тока в диполе: $I_m \sin\omega t$. С учетом конечной скорости распространения электромагнитных волн в выражении для напряженности электрического поля и для магнитной индукции мы должны подставить величину $i = I_m \sin\omega(t - r/v)$. Замечая, что $\omega r/v = 2\pi r/(Tv) = 2\pi r/\lambda$, где T — период колебаний и $\lambda = vT$ — длина волны, получаем

$$\frac{\partial i}{\partial t} = \omega I_m \cos\omega\left(t - \frac{r}{v}\right);\quad \frac{v}{r}i = \left(\frac{\lambda}{2\pi r}\right)\omega I_m \sin\omega\left(t - \frac{r}{v}\right);$$

$$\frac{v^2}{r^2}q = -\left(\frac{\lambda}{2\pi r}\right)^2 \omega I_m \cos\omega\left(t - \frac{r}{v}\right).$$

Следовательно, в выражениях для B_α, E_r и E_φ амплитуда каждого последующего члена отличается от амплитуды предыдущего множителем $\frac{\lambda}{2\pi r}$.

29.7. Электромагнитное поле на расстояниях от диполя, малых по сравнению с длиной волны

Пусть $r \ll \lambda$. В этом случае можно оставить только последние члены в выражениях для B_α, E_r и E_φ. Имеем

$$B_\alpha = \frac{\mu l i\sin\varphi}{4\pi r^2};\quad E_r = \frac{2lq\cos\varphi}{4\pi\varepsilon r^3};\quad E_\varphi = \frac{lq\sin\varphi}{4\pi\varepsilon r^3}.$$

При этом приближенная формула для B_α совпадает с формулой Био–Савара–Лапласа, справедливой для постоянного тока. Приближенные формулы для E_r и E_φ совпадают с формулами, выведенными ранее для статического диполя (см. § 24.2).

Рассмотренные здесь члены общих выражений для составляющих векторов $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{E}$ определяют только реактивную мощность в связи с тем, что мгновенные напряженности магнитного и электрического полей сдвинуты относительно друг

друга по фазе на угол $\pi/2$, так как на этот угол сдвинуты по фазе i и q. Заметим, что составляющие, которыми мы здесь пренебрегли, но которые существуют и в рассматриваемой области ($r \ll \lambda$), определяют активную мощность, что будет показано в следующем параграфе.

29.8. Электромагнитное поле на расстояниях от диполя, значительно превышающих длину волны

При $r \gg \lambda$ в выражениях для B_α и для E_φ можно пренебречь всеми членами, кроме первых. Величиной E_r можно пренебречь полностью, так как оба ее члена весьма малы по сравнению с первым членом составляющей E_φ. Имеем

$$B_\alpha = \frac{\mu l \sin\varphi}{4\pi r v}\omega I_m \cos\left(\omega t - \frac{\omega r}{v}\right) = \frac{\mu l I_m}{2r\lambda}\sin\varphi\cos\left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda}\right);$$

$$E_\varphi = \frac{\mu l \sin\varphi}{4\pi r}\omega I_m \cos\left(\omega t - \frac{\omega r}{v}\right) = vB_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}B_\alpha = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}H_\alpha.$$

Волна, имеющая такой характер, называется с ф е р и ч е с к о й.

Мы приходим к замечательному соотношению, полученному ранее при исследовании плоской волны:

$$\frac{\varepsilon E^2}{2} = \frac{\mu H^2}{2}.$$

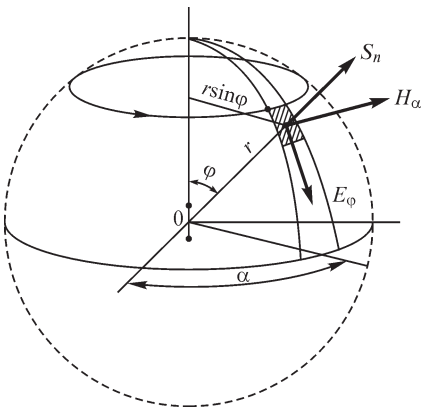

Рис. 29.12

Таким образом, и для сферической электромагнитной волны энергия электрического поля равна энергии магнитного поля.

Отметим особо, что E и H имеют одинаковую фазу колебаний и, следовательно, определяют собой активную мощность. Вектор Пойнтинга, как это видно из рис. 29.12, в любой момент времени и в любой точке направлен по радиусу r в сторону от диполя и, следовательно, энергия передается в направлении радиусов от диполя. Эта энергия уже не возвращается обратно к источнику и является энергией излученного электромагнитного поля.

29.9. Мощность и сопротивление излучения диполя и антенны

Окружим диполь сферической поверхностью, имеющей центр в месте расположения диполя (рис. 29.12), и вычислим мощность потока электромагнитной энергии, проходящей сквозь эту поверхность. Нормальная к поверхности сферы составляющая вектора Пойнтинга равна $S_n = E_\varphi H_\alpha$. Отличное от нуля среднее арифметическое за период значение этой составляющей вектора Пойнтинга $S_{n\,\text{ср}} = \frac{1}{T}\int_0^T E_\varphi H_\alpha dt$ может получиться только от тех составляющих произведения

$E_\varphi H_\alpha = E_\varphi B_\alpha/\mu$, которые являются произведениями членов выражений (*) и (***) в § 29.6 для B_α и E_φ, находящихся в одинаковой фазе. К ним относятся произведение первых членов B_α и E_φ, произведение первого члена B_α и третьего члена E_φ и произведение вторых членов B_α и E_φ. Легко убедиться, что два последних произведения в сумме не дают отличной от нуля средней мощности.

Таким образом, остается только произведение первых членов B_α и E_φ, которые были рассмотрены в предыдущем параграфе. Имеем

$$S_{n\,\mathrm{ср}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{I_m^2 l^2}{4r^2\lambda^2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sin^2\varphi\cos^2\left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda}\right)dt.$$

Учитывая, что $\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2\left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda}\right)dt = \frac{1}{2}$, получаем

$$S_{n\,\mathrm{ср}} = \frac{I_m^2 l^2}{8\,r^2\lambda^2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sin^2\varphi = \frac{I^2 l^2}{4\,r^2\lambda^2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sin^2\varphi,$$

где $I = I_m/\sqrt{2}$ — действующий ток.

Элемент поверхности сферы (см. рис. 29.12) равен $ds = r\,d\varphi\, r\sin\varphi\, d\alpha$. Средняя мощность всего потока электромагнитной энергии сквозь поверхность сферы оказывается равной

$$P = \int_0^\pi\int_0^{2\pi}\left(\frac{I^2 l^2}{4r^2\lambda^2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sin^2\varphi\right)r^2\sin\varphi\, d\varphi d\alpha = \frac{\pi I^2 l^2}{2\lambda^2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\int_0^\pi \sin^3\varphi\, d\varphi.$$

Но

$$\int_0^\pi \sin^3\varphi\, d\varphi = \int_1^{-1} -\sin^2\varphi\, d\cos\varphi = \int_1^{-1}(\cos^2\varphi - 1)\, d\cos\varphi = \frac{4}{3}.$$

Следовательно,

$$P = \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{l^2}{\lambda^2}I^2.$$

Итак, средняя мощность потока электромагнитной энергии, передаваемой сквозь поверхность сферы, оказалась отличной от нуля. Эта мощность численно равна энергии электромагнитного поля, *излучаемого* диполем, отнесенной к единице времени.

Множитель при I^2 представляет собой активное сопротивление колебательного контура, характеризующее его способность к излучению. Его называют с о п р о т и в л е н и е м и з л у ч е н и я. Для электрического диполя сопротивление излучения R' выражается формулой

$$R' = \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{l^2}{\lambda^2}.$$

Реальная антенна представляет собой более сложную, чем диполь, излучающую систему. Обычно антенна состоит из проводов, расположенных над поверх-

ностью земли. Участки антенны обладают емкостью по отношению к земле и относительно друг друга. Вследствие этого мгновенный ток неодинаков вдоль проводов антенны, так как ток ответвляется от проводов в диэлектрик в виде тока смещения. Однако всегда можно разделить провод на элементарные отрезки длиной *dl*, в пределах которых ток можно считать одинаковым в каждый данный момент времени. Эти отрезки с переменным током *i* представляют собой не что иное, как элементарные диполи. Электромагнитное поле всей антенны определится путем наложения полей всех диполей, т. е. путем интегрирования вдоль проводов антенны.

Наиболее просто можно использовать результаты, полученные для диполя, для антенны, расположенной над поверхностью весьма хорошо проводящей земли и образованной вертикальным проводом, заканчивающимся в верхней своей части сильно развитой системой горизонтальных проводов (рис. 29.13). При этих условиях землю можно заменить зеркальным изображением антенны, а также можно пренебречь емкостью вертикального провода. Заметим еще, что горизонтальные провода и их зеркальные изображения практически мало излучают энергию, так как токи в действительных горизонтальных проводах и в их зеркальных изображениях направлены в противоположные стороны (рис. 29.13). Эти горизонтальные участки предназначены для увеличения емкости системы, что приводит к увеличению тока в вертикальном проводе, а следовательно, к увеличению мощности излучения. Таким образом, рассматриваемая антенна приводится к переменному электрическому диполю, имеющему длину $l = 2h$, где h — высота действительной антенны. Электромагнитное поле на расстояниях $r \gg h$ характеризуется теми же соотношениями, что и для диполя.

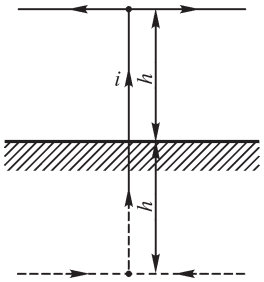

Рис. 29.13

Сопротивление излучения R' такой антенны вместе с ее зеркальным изображением найдется из последней формулы, если в ней положить $l = 2h$. В действительности излучает только сама антенна. Поэтому сопротивление излучения антенны определится формулой

$$R = \frac{R'}{2} = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{(2h)^2}{\lambda^2} = \frac{4\pi}{3}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{h^2}{\lambda^2}.$$

Обычно антенна расположена в воздухе и $\mu = \mu_0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$. Подставив числовые значения ε_0 и μ_0, получаем $R = (4\pi)^2 \cdot 10\frac{h^2}{\lambda^2} = 1580\frac{h^2}{\lambda^2}$ Ом.

29.10. Передача электромагнитной энергии вдоль проводов линии

Передача энергии вдоль проводов линии осуществляется электромагнитным полем, распространяющимся в диэлектрике вдоль проводов линии. Провода линии служат направляющими электромагнитного поля.

Окружим часть линии вместе с приемником замкнутой поверхностью s (рис. 29.14). На основании уравнения (*), полученного в § 29.3, можем написать:

$$-\frac{\partial}{\partial t}(W_э + W_м) = \int_V \gamma \boldsymbol{E}^2 dV + \oint_s [\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{H}]\, d\boldsymbol{s},$$

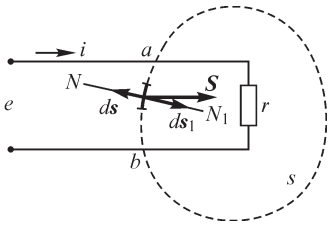

Рис. 29.14

если в пространстве, окружающем провода линии, нет свободных зарядов ($\rho = 0$; $J_{пер} = 0$).

Если V — объем области, заключенной внутри поверхности s, то вектор $d\boldsymbol{s}$ должен быть направлен по нормали N, внешней к этой области. Если мы желаем считать положительной энергию, передаваемую внутрь области V сквозь поверхность s, то необходимо изменить направление положительной нормали на обратное, т. е. принять положительной внутреннюю нормаль N_1 (рис. 29.14). Вектор $d\boldsymbol{s}_1$, направленный по нормали N_1, равен $d\boldsymbol{s}_1 = -d\boldsymbol{s}$. Заменяя в последнем равенстве $d\boldsymbol{s}$ на $d\boldsymbol{s}_1$, получим

$$\oint_s [\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{H}]\, d\boldsymbol{s}_1 = \frac{\partial}{\partial t}(W_э + W_м) + \int_V \gamma \boldsymbol{E}^2 dV.$$

Мы видим, что приращение энергии электрического и магнитного полей в объеме V и поглощение энергии в приемнике и в проводах линии, расположенных в этом объеме, происходит за счет передачи электромагнитной энергии в область V сквозь ограничивающую ее поверхность s.

В частном случае, когда ток в цепи постоянный, энергия полей не изменяется во времени. Следовательно, первый член в правой части последнего уравнения равен нулю, и имеем

$$\oint_s [\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{H}]\, d\boldsymbol{s}_1 = \int_V \gamma \boldsymbol{E}^2 dV,$$

т. е. энергия, поглощаемая в цепи в виде теплоты, равна энергии, передаваемой в область V через поверхность s.

Таким образом, энергия, выделяемая в проводнике в виде теплоты, передается в проводник сквозь поверхность проводника из диэлектрика, окружающего проводник.

В простейшем случае для отрезка l прямолинейного провода круглого сечения радиуса R (рис. 29.15) это положение подтверждается непосредственным вычислением напряженностей полей на поверхности провода. Вычислим поток электромагнитной энергии сквозь поверхность s отрезка провода. Имеем $H = \dfrac{i}{2\pi R}$ и $E_t = \dfrac{ir}{l}$, причем E_t — составляющая напряженности электрического поля по касательной к поверхности провода и r — сопротивление отрезка провода. Следовательно, нормальная составляющая вектора Пойнтинга равна

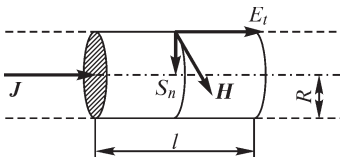

Рис. 29.15

$$S_n = E_t H = \frac{i^2 r}{2\pi R l}.$$

Величина $2\pi Rl = s$ есть площадь цилиндрической поверхности отрезка провода. Мощность, передаваемая в провод сквозь его поверхность из окружающей среды, оказывается равной

$$S_n s = i^2 r.$$

На рис. 29.16 показаны направления линий напряженности магнитного и электрического полей около проводов линии передачи. Линии напряженности электрического поля несколько изогнуты, так как вследствие наличия активного сопротивления самих проводов вектор $\boldsymbol{E}$ у поверхности провода имеет касательную к этой поверхности составляющую по направлению тока в проводе. Определяя направление вектора Пойнтинга в разных точках поля, получаем картину, изображенную на рисунке. Мы видим, что поток электромагнитной энергии направлен в диэлектрике от генератора к приемнику и частично — внутрь провода вследствие наличия активного сопротивления проводов.

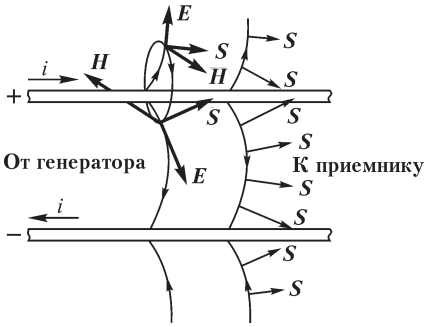

Рис. 29.16

Необходимо отметить, что изгиб линий напряженности электрического поля на рис. 29.16 сильно преувеличен. В поле действительной линии передачи этот изгиб ничтожен, так как касательная составляющая вектора $\boldsymbol{E}$ у поверхности провода весьма мала по сравнению с нормальной составляющей (см. § 26.2).

При исследовании однородных линий было показано, что скорость движения волн электрического тока и напряжения вдоль линии (см. ч. II) равна $v = \sqrt{LC}$, где L и C — индуктивность и емкость линии на единицу ее длины. Так как энергия передается электромагнитным полем в диэлектрике, окружающем провода линии, то скорость v должна равняться скорости движения электромагнитной волны в диэлектрике. Следовательно, должно иметь место равенство

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}},$$

где ε и μ — абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости диэлектрика. В этом выражении L есть внешняя индуктивность, определяемая магнитным потоком в диэлектрике. Например, для кабеля имеем (см. ч. I)

$$L = \frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1} \quad \text{и} \quad C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}}.$$

Следовательно,

$$LC = \mu\varepsilon.$$

29.11. Передача электромагнитной энергии по внутренней полости металлических труб

В предыдущем параграфе мы видели, что провода линии передачи служат направляющими электромагнитного поля, движущегося в диэлектрике, окружающем эти провода. Однако такую направляющую роль провода линии могут выполнять только при условии, что длина электромагнитной волны в диэлектрике во много раз превосходит расстояние между проводами, т. е. только при условии, что частота напряжения и тока не слишком велика. В противном случае провода линии будут весьма эффективно излучать электромагнитное поле в окружающее пространство, т. е. будут действовать подобно антенне.

Таким образом, при весьма высоких частотах, соответствующих так называемым ультракоротким волнам с длиной волны порядка нескольких сантиметров, которыми пользуется современная радиотехника, уже становится затруднительным передавать энергию по линиям обычного вида. Затруднения при этом возрастают еще потому, что при столь больших частотах в изоляции проводов возникают значительные потери энергии. При креплении проводов на отдельных изоляторах имеем в местах расположения изоляторов среду с повышенной диэлектрической проницаемостью, что превращает линию в своего рода фильтр, срезающий высокие частоты.

В связи со всем сказанным относительно свойств линии передачи при весьма высоких частотах представляет большой интерес возможность передачи электромагнитным полем энергии внутри металлических труб.

Стенки трубы, если они выполнены из материала с весьма высокой удельной проводимостью, не пропускают сквозь себя электромагнитные волны. В предельном случае, когда труба имеет стенки из сверхпроводящего материала, электрические токи, возникающие в стенках трубы, не создают падения напряжения и, следовательно, касательная составляющая напряженности электрического поля на внутренней поверхности стенок всюду должна быть равна нулю. Следовательно, вектор Пойнтинга не имеет составляющей, нормальной к поверхности стенки. Электромагнитное поле не проникает внутрь стенок и может при надлежащих условиях передавать энергию только в направлении оси трубы.

При детальном анализе условий распространения электромагнитных волн вдоль трубы, который произведем в следующем параграфе, выясняется одна интересная и важная особенность, а именно: вдоль трубы возможно распространение только коротких волн, для которых длина волны в свободном пространстве одного порядка с поперечными размерами полости трубы или меньше их. В связи с этим такие трубы получили применение в радиотехнических устройствах ультракоротких волн для передачи электромагнитной энергии от генератора электромагнитных колебаний к излучающему устройству и получили название *волноводов*. Длина волноводов обычно невелика, и, следовательно, потери энергии в их стенках, вызванные конечной удельной проводимостью материала стенок, незначительны. Поэтому при исследовании вопроса о распространении электромагнитных волн в волноводах предположим, что удельная проводимость

материала стенок бесконечно велика, не допуская при этом существенных отклонений от практических условий.

29.12. Волноводы

Для уяснения особенностей распространения электромагнитных волн в металлических трубах рассмотрим наиболее простой и вместе с тем имеющий большое практическое значение волновод прямоугольного сечения. Ось *OZ* направим вдоль трубы. Оси *OX* и *OY* расположим так, как показано на рис. 29.17.

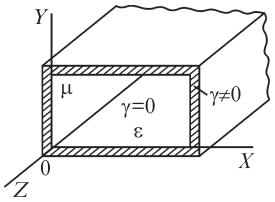

Рис. 29.17

Рассмотрим случай, когда линии напряженности электрического поля расположены в плоскостях, перпендикулярных оси *OZ*, т. е. когда $E_z = 0$.

Предполагая, что все величины изменяются во времени по синусоидальному закону, воспользуемся символическим методом. Кроме того, предположим, что волновод имеет бесконечную длину по оси *OZ*. По аналогии со случаем движения волн тока и напряжения вдоль длинных однородных линий (см. ч. II) предположим, что изменение напряженностей полей вдоль оси *OZ* выражается функцией вида $e^{-\gamma' z}$, что соответствует наличию одной прямой бегущей волны. (Здесь через γ' обозначена величина, имеющая смысл коэффициента распространения, в отличие от γ, которая обозначает удельную электрическую проводимость вещества.)

При этих условиях комплексные выражения мгновенных составляющих напряженностей электрического и магнитного полей будут иметь вид

$$\dot{E}_x = \dot{E}_{mx} e^{j\omega t} e^{-\gamma' z}; \quad \dot{E}_y = \dot{E}_{my} e^{j\omega t} e^{-\gamma' z}; \quad \dot{E}_z = 0;$$
$$\dot{H}_x = \dot{H}_{mx} e^{j\omega t} e^{-\gamma' z}; \quad \dot{H}_y = \dot{H}_{my} e^{j\omega t} e^{\gamma' z}; \quad \dot{H}_z = \dot{H}_{mz} e^{j\omega t} e^{-\gamma' z},$$

где комплексные амплитуды $\dot{E}_{mx}$, $\dot{E}_{my}$, $\dot{H}_{mx}$, $\dot{H}_{my}$ и $\dot{H}_{mz}$ являются функциями x и y.

Подставляя эти выражения в уравнения (*а*)–(*е*) в § 29.1 и учитывая, что в диэлектрике $\gamma = 0$ и $\rho = 0$ и что, кроме того, по условию $\dot{E}_z = 0$, после сокращения на общий множитель $e^{j\omega t} e^{-\gamma' z}$ получаем

$$\frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial y} + \gamma' \dot{H}_{my} = j\omega\varepsilon \dot{H}_{mx}; \quad (а) \qquad \gamma' \dot{E}_{my} = -j\omega\mu \dot{H}_{mx}; \quad (г)$$

$$-\gamma' \dot{H}_{mx} - \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial x} = j\omega\varepsilon \dot{E}_{my}; \quad (б) \qquad -\gamma' \dot{E}_{mx} = -j\omega\mu \dot{H}_{my}; \quad (д)$$

$$\frac{\partial \dot{H}_{my}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial y} = 0 \quad (в) \qquad \frac{\partial \dot{E}_{my}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_{mx}}{\partial y} = -j\omega\mu \dot{H}_{mz}. \quad (е)$$

Подставляя E_{my} из (*г*) в (*б*) и E_{mx} из (*д*) в (*а*), находим

$$\dot{H}_{mx} = -\frac{\gamma'}{k^2} \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial x}; \quad \dot{H}_{my} = -\frac{\gamma'}{k^2} \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial y}, \qquad (*)$$

где $k^2 = \gamma'^2 + \omega\mu\varepsilon$.

Уравнение (*в*), если в него подставить выражения (*), удовлетворяется автоматически. Остается уравнение (*е*). Подставляя в него $\dot{E}_{mx}$ и $\dot{E}_{my}$ из (*д*) и (*г*) и затем вместо $\dot{H}_{mx}$ и $\dot{H}_{my}$ их выражения (*), получаем уравнение для H_{mz}:

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_{mz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_{mz}}{\partial y^2} + k^2 \dot{H}_{mz} = 0. \qquad (**)$$

Будем искать $\dot{H}_{mz}$ в форме $H_{mz} = XY$, где X — функция только x и Y — функция только y. Последнее уравнение принимает вид

$$Y\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + k^2 XY = 0.$$

Разделив его на XY, находим

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + k^2 = 0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + k^2 = -\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}.$$

Левая часть последнего уравнения является функцией только x, правая — функцией только y. Следовательно, уравнение удовлетворяется для любых x и y только в том случае, если и левая и правая его части равны некоторой постоянной величине η^2. При этом уравнение распадается на два:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \xi^2 X = 0; \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \eta^2 Y = 0,$$

где $\xi = k^2 - \eta^2$.

Интегрируя эти уравнения, получаем

$$X = A\cos(\xi x + \varphi); \quad Y = B\cos(\eta y + \psi);$$
$$\dot{H}_{mz} = \dot{H}_0 \cos(\xi x + \varphi)\cos(\eta y + \psi),$$

где $\dot{H}_0 = AB$.

Постоянные ξ, η, φ и ψ определяются из граничных условий на поверхностях стенок волновода. При сверхпроводящих стенках падение напряжения в них равно нулю и, следовательно, внутри стенок всюду $E_m = 0$. Поэтому граничным условием для поля в диэлектрике внутри волновода является равенство нулю у поверхности стенки касательной к этой поверхности составляющей вектора $\boldsymbol{E}$. Используя это условие, имеем (рис. 29.18)

$$\dot{E}_{my} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \ \text{и} \ x = a;$$
$$\dot{E}_{mx} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \ \text{и} \ y = b.$$

Из уравнений (*г*), (*д*) и (*) при этом получаем

$$\frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \ \text{и} \ x = a;$$
$$\frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \ \text{и} \ y = b.$$

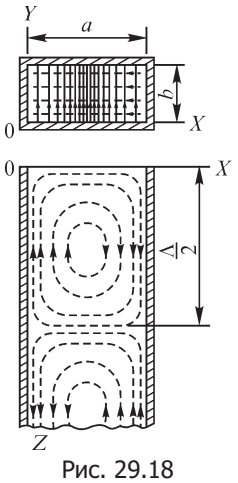

Рис. 29.18

Это дает $\varphi = 0$; $\xi = m\pi/a$; $\psi = 0$; $\eta = n\pi/b$, где m и n — целые числа. Имеем окончательно

$$\dot{H}_{mz} = \dot{H}_0 \cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (*) и используя уравнения (*г*) и (*д*), находим комплексные выражения мгновенных составляющих напряженностей электрического и магнитного полей:

$$\dot{H}_x = \frac{\gamma' m\pi}{ak^2}\dot{H}_0 \sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}e^{j\omega t-\gamma' z};$$

$$\dot{H}_y = \frac{\gamma' n\pi}{bk^2}\dot{H}_0 \cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}e^{j\omega t-\gamma' z};$$

$$\dot{H}_z = \dot{H}_0 \cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}e^{j\omega t-\gamma' z};$$

$$\dot{E}_x = \frac{j\omega\mu n\pi}{bk^2}\dot{H}_0 \cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}e^{j\omega t-\gamma' z};$$

$$\dot{E}_y = -\frac{j\omega\mu m\pi}{ak^2}\dot{H}_0 \sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}e^{j\omega t-\gamma' z};\quad \dot{E}_z = 0.$$

Кроме того, уравнение (**) после подстановки в него выражения $\dot{H}_{mz}$ и его вторых производных дает

$$\left[-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + k^2\right]\dot{H}_{mz} = 0,$$

откуда

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = k^2.$$

Найденное решение показывает, что в волноводе может существовать ряд волн, причем каждая волна соответствует паре целых чисел m и n. Задание одновременно m и n равными нулю приводит к равенству нулю всех составляющих E. Следовательно, простейший случай получается, если одно из этих чисел равно нулю, а другое равно единице. Пусть, например, $m = 1$ и $n = 0$. Согласно последнему соотношению, при этом $k = \pi/a$ и уравнения для составляющих напряженностей поля приобретают вид

$$\dot{H}_x = \frac{\gamma' a}{\pi}\dot{H}_0 \sin\frac{\pi x}{a}e^{j\omega t-\gamma' z};\quad \dot{H}_y = 0;\quad \dot{H}_z = \dot{H}_0 \cos\frac{\pi x}{a}e^{j\omega t-\gamma' z};$$

$$\dot{E}_x = 0;\quad \dot{E}_y = -j\frac{\omega\mu a}{\pi}\dot{H}_0 \sin\frac{\pi x}{a}e^{j\omega t-\gamma' z};\quad \dot{E}_z = 0.$$

Постоянная γ' имеет такой же смысл, как *коэффициент распространения* в теории однородных линии (см. ч. II). В общем случае можно ее представить в виде $\gamma' = \alpha + j\beta$, где величина α характеризует затухание волны вдоль оси OZ и

может быть названа *коэффициентом затухания*, а величина β характеризует изменение фазы вдоль оси OZ и может быть названа *коэффициентом фазы*.

Из соотношений $k^2 = \gamma'^2 + \omega^2\mu\varepsilon$ и $\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = k^2$ получаем для прямоугольного волновода со сверхпроводящими стенками

$$\gamma'^2 = k^2 - \omega^2\mu\varepsilon = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2\mu\varepsilon. \qquad (***)$$

При $\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 > \omega^2\mu\varepsilon$ имеем $\gamma'^2 > 0$ и γ' — вещественное число, т. е. $\gamma' = \alpha$ и $\beta = 0$. В этом случае получаем *затухающую волну.*

При $\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 < \omega^2\mu\varepsilon$ имеем $\gamma' < 0$ и γ' — мнимое число, т. е. $\gamma' = j\beta$ и $\alpha = 0$. В этом случае получаем волну, распространяющуюся вдоль волновода *без затухания*.

Мы приходим к интересному заключению, что для волновода с заданными размерами a и b существует к р и т и ч е с к а я ч а с т о т а, определяемая из условия $\gamma' = 0$ выражением

$$\omega_0 = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}.$$

При частотах ниже ω_0 *невозможно* распространение вдоль волновода волн без затухания. При частотах выше ω_0 волны распространяются без затухания.

Обозначая, как и ранее, через λ длину электромагнитной волны при ее распространении в свободном пространстве (вне стенок волновода), будем иметь (см. § 29.2)

$$\lambda = vT = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{1}{\omega}.$$

Следовательно, критической частоте ω_0 соответствует к р и т и ч е с к а я д л и н а в о л н ы λ_0 в свободном пространстве:

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}\,\omega_0} = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}}.$$

Величины ω_0 и λ_0 зависят от чисел m и n, определяющих характер волны. Если $a > b$, то самая малая критическая частота получается при $m = 1$ и $n = 0$. Она оказывается равной $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{\pi}{a}$ и, следовательно, наибольшая критическая длина волны имеет значение $\lambda_0 = 2a$. Если $a = 10$ см, то $\lambda_0 = 20$ см и $f_0 = \omega_0/(2\pi) = v/\lambda_0 = 3\cdot10^{10}/20 = 1{,}5\cdot10^9$ Гц. Из этого примера видно, что волновод способен пропускать электромагнитные волны только весьма высокой частоты.

Так как при $\omega > \omega_0$ имеем $\gamma' = j\beta$ и $e^{j\omega t-\gamma' z} = e^{j(\omega t-\beta z)}$, то для получения выражений для действительных мгновенных величин H_x, H_y, H_z, E_x и E_y необходимо в их комплексных выражениях заменить множитель $e^{j\omega t-\gamma' z}$ на $\sin(\omega t - \beta z)$. Величина $\omega/\beta = v'$ есть *фазовая скорость* волны.

Длина волны Λ в волноводе получается из соотношения $\beta\Lambda = 2\pi$. Заменяя в соотношении (***) γ'^2 через $(-\beta^2)$ и $\omega^2\mu\varepsilon$ через $(2\pi/\lambda)^2$, находим

$$\beta^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2.$$

Тогда

$$\frac{2}{\Lambda} = \sqrt{\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{m}{a}\right)^2 - \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad \text{или} \quad \frac{1}{\Lambda} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_0^2}}.$$

Отсюда видно, что длина волны Λ в волноводе больше длины волны λ в свободном пространстве при той же частоте. Эта разница тем больше, чем больше λ приближается к критической длине волны λ_0, и при $\lambda = \lambda_0$ получаем $\Lambda = \infty$.

Фазовая скорость может быть представлена в виде $v' = \dfrac{\omega}{\beta} = \dfrac{\omega}{2\pi}\Lambda = \dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\dfrac{\Lambda}{\lambda} = v\dfrac{\Lambda}{\lambda}$.

Следовательно, фазовая скорость v' электромагнитных волн в волноводе больше скорости движения электромагнитных волн в свободном пространстве. Это, конечно, не означает, что электромагнитное поле движется со скоростью, большей, чем v, так как v' есть только скорость, с которой в установившемся режиме движется фазовое распределение вдоль оси OZ.

В вышеисследованном случае вдоль оси OZ волновода имеет отличную от нуля составляющую только напряженность магнитного поля. Соответственно волны такого типа получили наименование «магнитных волн». Их принято обозначать буквой H. Так как линии напряженности электрического поля при этом лежат целиком в поперечных сечениях волновода, то волны этого типа называют также «поперечными электрическими волнами» и обозначают буквами TE. Для прямоугольных волноводов вводят обозначение H_{mn} (или соответственно TE_{mn}), причем индексы соответствуют вышеуказанным числам m и n. На рис. 29.18 изображена в поперечном и продольном сечениях прямоугольного волновода картина поля для волны H_{10} (или TE_{10}). Сплошными линиями изображены линии напряженности электрического поля, штриховыми — линии напряженности магнитного поля. При больших значениях чисел m и n картина получается более сложной.

Могут существовать также так называемые электрические волны, обозначаемые буквой E с соответствующими индексами. Волны этого типа характеризуются тем, что в них вдоль оси волновода отличную от нуля составляющую имеет только напряженность электрического поля. Эти волны называют также «поперечными магнитными волнами», обозначая их при этом буквами TM.

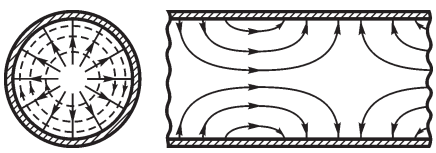

Рис. 29.19

На рис. 29.19 изображены линии напряженности магнитного поля (штриховые ли-

нии) и электрического поля (сплошные линии) для простейшего случая — «электрической» волны в цилиндрическом волноводе. Этот случай интересен тем, что картина поля в нем имеет много общего с картиной поля при распространении электромагнитных волн вдоль концентрического кабеля. В отличие от кабеля в волноводе отсутствует внутренний провод и роль токов проводимости во внутреннем металлическом проводе кабеля в волноводе играет ток смещения.

Возникновение того или иного типа волн в однородном волноводе зависит от свойств концевых устройств, в частности от устройства, генерирующего волны в начале волновода.

Для возбуждения желаемого типа волн можно ввести в волновод металлический стерженек, расположив его ось в месте, где должно возникать наиболее сильное электрическое поле желаемой волны, и направив ось стерженька в направлении линий напряженности этого поля. Подводя напряжение высокой частоты между стерженьком и волноводом хотя бы по концентрическому кабелю, можно возбудить колебания в волноводе. Можно также ввести в волновод небольшую петлю из проволоки, обтекаемую током, расположив петлю в месте ожидаемого максимума напряженности магнитного поля так, чтобы плоскость петли была перпендикулярна к направлению магнитных линий требуемого поля.

На приемном конце волновода можно применить аналогичные устройства. Можно также оставить этот конец открытым или снабдить его рупором для излучения волн в пространство.

При сравнении характера электромагнитных волн в волноводе и в однородной линии обнаруживаются наряду с общими их чертами и существенные различия в них. В теории однородных линий был рассмотрен только простейший тип волн, характеризующихся тем, что при отсутствии сопротивления проводов линии напряженности как магнитного, так и электрического поля располагаются целиком в плоскостях, нормальных к направлению проводов. Если направление проводов параллельно оси OZ, то для таких волн всюду $H_z = E_z = 0$. Эти волны называют п о п е р е ч н ы м и или также о с н о в н ы м и для линии передачи. Как мы видели, фазовая скорость распространения этих волн $v = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ независимо от формы кривой тока и напряжения или от их частоты равна скорости распространения электромагнитных волн в свободном пространстве (при отсутствии проводов). Соответственно при периодическом процессе длина волны $\lambda = vT$ равна длине электромагнитной волны в свободном пространстве.

Волны такого типа не могут существовать в волноводе. Действительно, если в волноводе всюду $E_z = 0$, т. е. если линии напряженности электрического поля лежат только в поперечных плоскостях, то только в этих плоскостях располагаются и линии тока смещения, которые могут быть замкнуты на себя или кончаться у стенок волновода и продолжаться в стенках в виде линий тока проводимости. Ясно, что такие линии тока смещения должны охватываться замкнутыми на себя линиями напряженности магнитного поля, а следовательно, вектор $\boldsymbol{H}$, вообще говоря, должен иметь отличную от нуля составляющую вдоль оси OZ ($H_z \neq 0$).

Если в волноводе всюду $H_z = 0$, т. е. линии напряженности магнитного поля лежат целиком в поперечных плоскостях, то неизбежно должен существовать продольный ток смещения, охватываемый этими линиями, а следовательно, $E_z \neq 0$. Таким образом, волны, которые являются основными в линии передачи, не могут существовать в волноводе. В волноводе могут распространяться только волны, в которых либо вектор $\boldsymbol{H}$, либо вектор $\boldsymbol{E}$ имеет продольные составляющие. При этом весьма существенно, что распространение этих волн вдоль волновода возможно, только если частота f выше критической частоты f_0. Критическая длина волны $\lambda_0 = v/f_0$ имеет порядок линейных размеров поперечного сечения волновода.

Интересно отметить, что и в линии передачи возможно возникновение волн этого типа, если длина волны λ будет сравнима с расстоянием между проводами линии, но при этом линия будет представлять собой антенну и электромагнитное поле будет весьма интенсивно излучаться в окружающее пространство, что приведет к быстрому затуханию волн вдоль линии. Если линия имеет вид концентрического кабеля, излучение этих волн не будет происходить, так как область, в которой распространяются волны, экранирована от внешнего пространства наружным трубчатым проводом кабеля. Однако кабель используют обычно при более низких частотах, так как он проводит упомянутые выше поперечные волны, а при частотах выше критической можно воспользоваться волноводом.

Для волн, распространяющихся вдоль волновода, можно также ввести понятие волнового сопротивления. Передача энергии вдоль волновода определяется взаимно перпендикулярными составляющими векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, перпендикулярными оси волновода. В рассмотренном выше примере прямоугольного волновода это были составляющие E_x и H_y и составляющие E_y и H_x. Положительное значение вектора Пойнтинга (в положительном направлении оси OZ) получается от умножения E_x и H_y одного знака и от умножения E_y и H_x разных знаков. Поэтому волновое сопротивление следует определять из соотношений:

$$z = \frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y} \quad \text{или} \quad z = -\frac{\dot{E}_y}{\dot{H}_x}.$$

Из вышеприведенных уравнений получаем для волн типа H (типа TE)

$$z = \frac{j\omega\mu}{\gamma'} = \frac{\omega\mu}{\beta} = v\mu\frac{\Lambda}{\lambda} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{\Lambda}{\lambda}.$$

Но $\sqrt{\mu/\varepsilon} = z'$ есть волновое сопротивление в случае, когда среда, заполняющая волновод, не ограничена стенками волновода. Кроме того,

$$\frac{\lambda}{\Lambda} = \sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2} = \sqrt{1-\left(\frac{f_0}{f}\right)^2}.$$

Следовательно,

$$z = \frac{z'}{\sqrt{1-(f_0/f)^2}}.$$

Таким образом, волновое сопротивление z не определяется как z' только параметрами среды, а зависит от частоты f и характера волны, т. е. от чисел m и n, от которых зависит критическая частота f_0. Оно зависит также от типа волны. Так, для волн типа E (типа TM) имеем выражение

$$z = z' \sqrt{1-(f_0/f)^2}.$$

Столь сложная зависимость z от многих величин, характеризующих не только передающее устройство, но и процессы в нем, есть результат того, что волновод не может быть рассмотрен как электрическая цепь с определенными параметрами. Для исследования процессов в волноводе необходимо, как это и было сделано, обратиться к системе уравнений электромагнитного поля.

Глава тридцатая

Переменное электромагнитное поле в проводящей среде

30.1. Плоская электромагнитная волна в проводящей среде

Рассмотрим случай, когда плоская электромагнитная волна, распространяющаяся в диэлектрике, подходит нормально к плоской поверхности, ограничивающей с одной стороны проводящую среду (рис. 30.1). Будем предполагать, что проводящая среда простирается во всех остальных направлениях до бесконечности. Падающая волна частью отражается от поверхности проводящей среды, частью проникает в эту среду и поглощается в ней. Рассмотрим волну, прошедшую сквозь поверхность раздела и распространяющуюся в проводящей среде. Направим ось OZ в глубь проводящей среды нормально к ее поверхности. Плоскость XOY совместим с этой поверхностью.

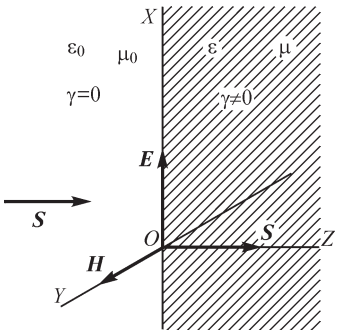

Рис. 30.1

В проводящей среде практически всегда можно пренебречь токами смещения по сравнению с токами проводимости. В таком случае уравнения Максвелла принимают вид

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} = \gamma \boldsymbol{E}; \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}.$$

Предположим, что напряженности полей не имеют составляющих, постоянных во времени.

Направив ось OX по вектору $\boldsymbol{E}$ и учитывая, что в плоской волне $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ не зависят от x и y, из уравнения $(г)$ из § 29.1 получаем

$$0 = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t}, \text{ т. е. } \quad H_x = \text{const} = 0.$$

Из уравнений $(а)$ и $(д)$ находим

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \gamma E_x; \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}.$$

Предположим, что напряженности электрического и магнитного полей изменяются во времени по закону

$$E_x = E_m \sin(\omega t + \psi_E); \quad H_y = H_m \sin(\omega t + \psi_H).$$

Выражая мгновенные напряженности полей в символической форме, будем иметь

$$\dot{E}_x = E_m e^{j(\omega t + \psi_E)} = E_m e^{j\psi_E} e^{j\omega t} = \dot{E}_m e^{j\omega t};$$
$$\dot{H}_y = H_m e^{j(\omega t + \psi_H)} = H_m e^{j\psi_H} e^{j\omega t} = \dot{H}_m e^{j\omega t}.$$

Амплитуды E_m и H_m и начальные фазы ψ_E и ψ_H, а следовательно, и комплексные амплитуды $\dot{E}_m$ и $\dot{H}_m$ являются функциями только одной координаты z. Подставляя выражения величин $\dot{E}_x$ и $\dot{H}_y$ в символической форме в уравнения, связывающие E_x и H_y, получаем после сокращения на общий множитель $e^{j\omega t}$ эти уравнения в виде

$$-\frac{d\dot{H}_m}{dz} = \gamma \dot{E}_m; \quad \frac{d\dot{E}_m}{dz} = -j\omega\mu\dot{H}_m. \qquad (*)$$

Дифференцируя первое уравнение по z и используя второе, находим

$$\frac{d^2\dot{H}_m}{dz^2} = j\omega\mu\gamma\dot{H}_m.$$

Решение этого линейного уравнения с постоянным коэффициентом имеет вид

$$\dot{H}_m = A_1 e^{-\alpha z} + A_2 e^{+\alpha z},$$

где

$$\alpha = \sqrt{j\omega\mu\gamma}.$$

Так как $\sqrt{j} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + j)$, что легко проверяется возведением этого равенства в квадрат, то, вводя еще обозначение

$$\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} = k,$$

получаем

$$\alpha = \sqrt{j\omega\mu\gamma} = (1 + j)\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} = (1 + j)\,k.$$

Второй член в выражении для $\dot{H}_m$ при $A_2 \neq 0$ увеличивается до бесконечности при возрастании z, так как вещественная часть α положительна. Напряженность поля не может расти до бесконечности, и, следовательно, мы должны принять $A_2 = 0$. Таким образом,

$$\dot{H}_m = A_1 e^{-\alpha z}.$$

Постоянная A_1 получается из условия, что при $z = 0$ величина $\dot{H}_m$ имеет заданное значение $\dot{H}_{me} = H_m e^{j\psi_{He}}$ на поверхности среды. Все величины, относящиеся к поверхности среды, будем отмечать индексом e. Стало быть, $A_1 = \dot{H}_{me}$, и решение имеет вид

$$\dot{H}_m = \dot{H}_{me} e^{-kz} e^{-jkz}$$

или

$$H_y = H_{me} e^{-kz} \sin(\omega t + \psi_{He} - kz).$$

Выражение для напряженности электрического поля находим из первого уравнения (*). Имеем

$$\dot{E}_m = \frac{1}{\gamma}(1 + j)k\dot{H}_{me} e^{-kz} e^{-jkz}$$

или

$$E_x = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}}\, H_{me} e^{-kz} \sin\left(\omega t + \psi_{He} - kz + \frac{\pi}{4}\right),$$

так как

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1+j) = e^{j\frac{\pi}{4}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\gamma}(1+j)\,k = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}}\, e^{j\frac{\pi}{4}}.$$

Плотность тока изменяется по такому же закону, как напряженность электрического поля, так как $J = \gamma E$.

Волновое сопротивление для проводящей среды оказывается комплексным и равным

$$Z = \frac{\dot{E}_m}{\dot{H}_m} = \frac{(1+j)\,k}{\gamma} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}.$$

Располагая этим выражением, можно найти соотношения между напряженностями волн: падающей из диэлектрика на поверхность проводящей среды ($\dot{E}_{\varphi 1}$, $\dot{H}_{\varphi 1}$), отраженной от поверхности среды ($\dot{E}_{\psi 1}$, $\dot{H}_{\psi 1}$) и преломленной ($\dot{E}_{\varphi 2}$, $\dot{H}_{\varphi 2}$), т. е. прошедшей в проводящую среду. Для этой цели могут быть использованы формулы, выведенные в ч. II при исследовании распространения периодических волн в однородной линии, замкнутой в конце на сопротивление Z. Имеем на повекрхности раздела

$$\dot{E}_{\varphi 2} = \frac{2Z}{Z + z_1}\dot{E}_{\varphi 1}; \quad \dot{E}_{\psi 1} = \frac{Z - z_1}{Z + z_1}\dot{E}_{\varphi 1};$$

$$\dot{H}_{\varphi 2} = \frac{2z_1}{z_1 + Z}\dot{H}_{\varphi 1}; \quad \dot{H}_{\psi 1} = \frac{z_1 - Z}{z_1 + Z}\dot{H}_{\varphi 1},$$

где $z_1 = \sqrt{\mu_1/\varepsilon_1}$ — волновое сопротивление для падающей и отраженной волн в диэлектрике, причем μ_1 и ε_1 — абсолютные магнитная и диэлектрическая проницаемости диэлектрика.

В предельном случае, когда удельная проводимость проводящей среды бесконечна, получаем $Z = 0$,

$$\dot{E}_{\psi 1} = -\dot{E}_{\varphi 1} \quad \text{и} \quad \dot{H}_{\psi 1} = \dot{H}_{\varphi 1}$$

и, следовательно, на поверхности раздела

$$\dot{E}_1 = \dot{E}_{\varphi 1} + \dot{E}_{\psi 1} = 0 \quad \text{и} \quad \dot{H}_1 = 2\dot{H}_{\varphi 1},$$

т. е. волна полностью отражается от поверхности сверхпроводящей среды. В диэлектрике при этом в результате интерференции падающей и отраженной волн устанавливаются стоячие волны. Этот случай аналогичен режиму короткого замыкания однородной линии передачи.

30.2. Длина волны и затухание волны

Полученные выражения для напряженностей электрического и магнитного полей прежде всего свидетельствуют о том, что амплитуды напряженностей по мере проникновения волны в глубь проводящей среды при плоской волне убы-

вают по показательному закону. Кроме того, начальная фаза колебаний изменяется пропорционально z, причем по мере проникновения волны в глубь среды колебания все более запаздывают по фазе по отношению к колебаниям на поверхности среды. Во всех точках среды, в том числе и на ее поверхности, напряженность электрического поля опережает по фазе напряженность магнитного поля на угол $\pi/4$.

Длина волны λ, т. е. расстояние, на котором фаза изменяется на 2π, определяется из условия $\sqrt{\omega\mu\gamma/2}\,\lambda = 2\pi$, откуда находим

$$\lambda = 2\pi\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}} = 2\sqrt{\pi}\frac{1}{\sqrt{f\mu\gamma}},$$

так как $\omega = 2\pi f$, где f — частота колебаний. Отношение амплитуд напряженностей полей на расстоянии $z = \lambda$ от поверхности среды к их значениям на поверхности равно $e^{-k\lambda} = e^{-2\pi} = 0{,}00187$, т. е. на этом расстоянии волна практически полностью затухает.

В нижеследующей таблице приведены значения длины волны при частоте колебаний $f = 50$ Гц и 500 кГц в меди, в ферромагнитном веществе (если считать $\mu = \text{const}$), в морской воде и в сухой почве. Мы видим, что при промышленной частоте $f = 50$ Гц электромагнитная волна проникает в медь на несколько сантиметров, а в ферромагнитное вещество — всего лишь на несколько миллиметров. При радиочастотах глубина проникновения измеряется в меди десятыми долями миллиметра, а в ферромагнитном веществе — сотыми долями миллиметра. При высоких частотах глубина проникновения волны в морской воде и даже в сухой почве незначительна.

Частота f	Длина волны λ для различных веществ			
	Медь $\gamma = 5{,}8\cdot10^7$См/м, $\mu = \mu_0$	Ферромагнитное вещество $\gamma \approx 10^7$См/м, $\mu \approx 1000\,\mu_0$	Морская вода $\gamma \approx 1$См/м, $\mu = \mu_0$	Сухая почва $\gamma \approx 10^{-2}$См/м, $\mu = \mu_0$
50 Гц	5,9 см	0,45 см	450 м	4500 м
500 кГц	0,059 см	$0{,}45\cdot10^{-2}$ см	4,5 м	45 м

Вектор Пойнтинга имеет значение

$$S = E_x H_y = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}}\,H_{me}^2 e^{-2kz}\sin(\omega t + \psi_{He} - kz)\,\sin\left(\omega t + \psi_{He} - kz + \frac{\pi}{4}\right).$$

Среднее значение $S_{\text{ср}}$ вектора Пойнтинга за период колебаний равно

$$S_{\text{ср}} = \frac{1}{T}\int_0^T S\,dt = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}}\,\frac{H_{me}^2}{2}\,e^{-2\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}z}\cos\frac{\pi}{4}.$$

Таким образом, на расстояние от поверхности, равное $z = \lambda/2$, проникает только $e^{-2\pi} \cdot 100 = 0{,}187\,\%$ энергии, поглощаемой в проводящей среде. Поэтому практически можно считать, что волна затухает уже на расстоянии, в два-три раза меньшем по сравнению с приведенными в таблице.

30.3. Явление поверхностного эффекта

Переменный электрический ток распределяется неравномерно по сечению проводов, причем плотность тока имеет наибольшие значения на поверхности провода и убывает по мере удаления от поверхности в глубь провода. Это явление называется п о в е р х н о с т н ы м э ф ф е к т о м.

Переменный магнитный поток в телах, обладающих конечной проводимостью, вызывает в этих телах *вихревые токи*, которые ослабляют магнитный поток внутри проводящего тела. Этот эффект иногда называют размагничивающим действием вихревых токов. По существу, и в этом случае имеем дело с явлением поверхностного эффекта.

Явление поверхностного эффекта можно объяснить, рассматривая проникновение электромагнитного поля в глубь провода из пространства, окружающего провод. В § 29.10 было показано, что потери энергии на нагревание провода током следует рассматривать как поглощение внутри провода электромагнитной энергии, передаваемой в тело провода через его поверхность из окружающего пространства. В предыдущем параграфе мы убедились, что переменная электромагнитная волна затухает по мере проникновения в глубь проводящей среды. Поэтому вполне естественно, что амплитуды плотности тока и напряженностей электрического и магнитного полей при переменном токе и при переменном потоке имеют наибольшее значение у поверхности тел из проводящего материала.

30.4. Активное и внутреннее индуктивное сопротивления проводов

Общую индуктивность L контура тока можно просто разделить на внутреннюю и внешнюю только в случае, когда линии магнитной индукции располагаются либо целиком внутри тела проводов контура, образуя внутренний магнитный поток $\Phi_{\text{внутр}}$, либо целиком вне проводов, образуя внешний поток $\Phi_{\text{внеш}}$. При этом контуры сечения проводов совпадают с линиями магнитной индукции. Эти условия соблюдаются точно в единственном случае — для прямолинейного концентрического кабеля (рис. 30.2), в котором прямым проводом является провод круглого сечения, а обратным — соосный с ним трубчатый провод, сечение которого ограничено двумя концентрическими окружностями.

Составляя линейный интеграл напряженности электрического поля по контуру *agdmcfbna*, будем иметь

$$\oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = \int\limits_{agd} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} + \int\limits_{dmc} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} + \int\limits_{cfb} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} + \int\limits_{bna} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = -\frac{d\Phi_{\text{внеш}}}{dt}.$$

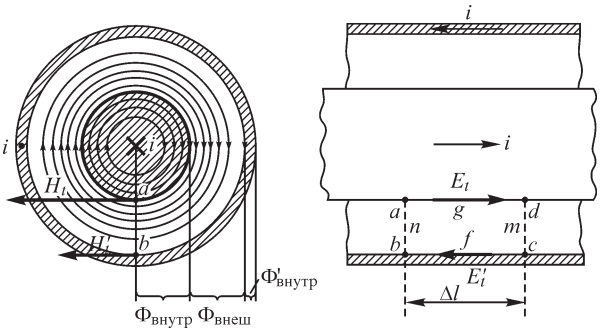

Рис. 30.2

Величина

$$\int_{anb} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} - \int_{dmc} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = u_{anb} - u_{dmc},$$

равная разности напряжений между проводами контура по путям *anb* и *dmc*, представляет собой падение напряжения на участке линии длиной Δl. Отрезок Δl берем столь малым, чтобы можно было считать ток i одинаковым на его длине, т. е. чтобы можно было не считаться с токами смещения между проводами. В этом случае рассматриваемое падение напряжения можно представить в виде

$$u_{anb} - u_{dmc} = ir + L\frac{di}{dt},$$

где r и L — сопротивление и индуктивность рассматриваемой пары проводов на участке длиной Δl.

Используя написанное выше выражение для величины $\oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l}$, получаем

$$\int_{agd} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} + \int_{cfb} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = \int_{anb} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} - \int_{dmc} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} - \frac{d\Phi_{внеш}}{dt} = ir + L\frac{di}{dt} - \frac{d\Phi_{внеш}}{dt}$$

и, наконец, осуществляя замену $\dfrac{d\Phi_{внеш}}{dt} = L_{внеш}\dfrac{di}{dt}$ и $L = L_{внеш} + L_{внутр}$, будем иметь

$$\int_{agd} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} + \int_{cfb} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = ir + L_{внутр}\frac{di}{dt}.$$

Это соотношение можно рассматривать как определяющее величины r и $L_{внутр}$.

Для упрощения рассмотрения сначала предположим, что обратный трубчатый провод образован из сверхпроводящего материала, т. е. имеет бесконечно большую удельную проводимость. При этом его активное сопротивление будет равно нулю. Равна нулю будет и его внутренняя индуктивность, так как, согласно сказанному в § 30.2, длина электромагнитной волны в металле при $\gamma = \infty$ равна нулю, т. е. электромагнитное поле не проникает внутрь провода. На поверхности обратного трубчатого провода касательная составляющая E'_t напряженности

электрического поля при этом равна нулю, и соответственно падение напряжения вдоль этого провода также равно нулю, т. е.

$$\int_{cfb} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = 0.$$

Величина E_t на поверхности внутреннего провода постоянна вдоль отрезка Δl, так как ток i не изменяется вдоль этого отрезка. Следовательно,

$$\int_{agd} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = E_t \Delta l.$$

При синусоидальном изменении тока с угловой частотой ω можем написать:

$$\dot{E}_{tm} \Delta l = r \dot{I}_m + j\omega L_{\text{внутр}} \dot{I}_m = (r + j x_{\text{внутр}}) \dot{I}_m.$$

Так как, согласно закону полного тока, $\dot{I}_m = \dot{H}_{tm} u$, где $u = 2\pi R$ — периметр сечения прямого провода, а H_{tm} — напряженность магнитного поля на его поверхности, то

$$Z_{\text{внутр}} = r + j x_{\text{внутр}} = \frac{\Delta l}{u} \frac{\dot{E}_{tm}}{\dot{H}_{tm}}.$$

Таким образом, для вычисления $Z_{\text{внутр}}$ прямого провода в данном случае достаточно найти комплексные амплитуды касательных к поверхности провода составляющих напряженностей электрического и магнитного полей на поверхности провода.

Если бы удельная проводимость материала обратного трубчатого провода, так же как и материала прямого провода, имела конечное значение, то падение напряжения вдоль пути *cfb* также было бы отлично от нуля:

$$\int_{cfb} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = \dot{E}'_t \Delta l = r' i + L'_{\text{внутр}} \frac{di}{dt},$$

где r' и $L'_{\text{внутр}}$ — активное сопротивление и внутренняя индуктивность обратного провода, а E'_t — касательная составляющая вектора E на внутренней его поверхности. При этом ток i в обратном проводе равен $H'_t u'$, где H'_t — касательная составляющая вектора $\boldsymbol{H}$ на внутренней поверхности обратного провода, а u' — длина внутренней окружности, ограничивающей сечение этого провода. При синусоидальном процессе имеем

$$r' + j\omega L'_{\text{внутр}} = \frac{\Delta l}{u'} \frac{\dot{E}'_{tm}}{\dot{H}'_{tm}}.$$

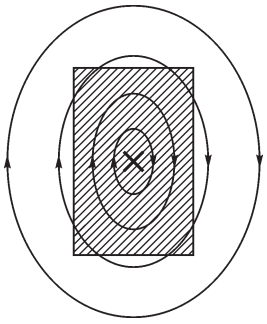

Рис. 30.3

Для сложной формы сечения провода, например для случая, изображенного на рис. 30.3, уже не представляется возможным столь определенно разделить магнитный поток на внешний и внутренний. На рис. 30.3 изображена картина поля при постоянном токе для провода прямоугольного сечения из неферромагнитного материала. Как

видно из этой картины, кроме линий магнитной индукции, замыкающихся целиком либо внутри, либо вне провода, имеются линии, проходящие частично в теле провода и частично вне его. При переменном токе картина поля еще усложняется, так как переменный ток распределяется неравномерно по сечению и, кроме того, вся картина меняется в течение периода, так как плотность тока в разных точках сечения провода имеет различные фазы.

Вследствие этого нельзя предложить в общем случае столь же простой и притом точный способ вычисления активного и внутреннего индуктивного сопротивлений, как для рассмотренного выше концентрического кабеля.

Однако для проводников фигурного сечения из ферромагнитного вещества (рис. 30.4) при резком проявлении поверхностного эффекта может быть применен с весьма большой точностью аналогичный изложенному выше простой метод расчета (см. § 30.6), так как вследствие высокой магнитной проницаемости вещества линии магнитной индукции для большой части внутреннего магнитного потока замыкаются внутри тела проводника и имеют форму, весьма близкую к форме контура сечения проводника. Только для незначительной части магнитного потока линии магнитной индукции проходят частично внутри проводника и частично в воздухе вне его.

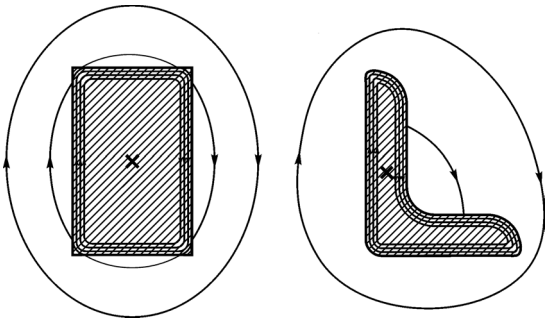

Рис. 30.4

Такой приближенный метод расчета имеет большое значение также в связи с тем, что внутреннее реактивное сопротивление $x_{\text{внутр}}$ таких проводов обычно составляет большую, а часто и основную часть всего индуктивного сопротивления.

Точное значение активного сопротивления r провода сложной формы сечения, очевидно, всегда определяется из соотношения $r = P/I^2$, причем мощность P, поглощаемая в проводе, может быть вычислена как интеграл по поверхности провода от среднего значения за период нормальной к этой поверхности составляющей вектора Пойнтинга. Однако для проводов сложной формы сечения такой общий метод расчета большей частью мало что дает практически, так как не известно точное распределение поля во все моменты времени по всей поверхности провода. Поэтому большую ценность представляют также возможные приближенные методы расчета.

30.5. Сопротивление провода при резком проявлении поверхностного эффекта

Рассмотрим прямолинейный провод круглого сечения (рис. 30.5) и предположим, что обратный провод удален от него на столь большое расстояние, что его влиянием на распределение тока в рассматриваемом проводе можно пренебречь. Пусть длина электромагнитной волны λ в веществе провода значительно меньше радиуса R сечения, т. е. $\lambda \ll R$. На рисунке величина λ показана толщиной

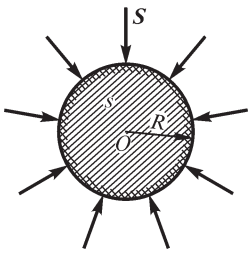

Рис. 30.5

дополнительно заштрихованного слоя. В таком случае, поскольку на длине λ волна в проводе практически полностью затухает, можно пренебречь кривизной поверхности провода, считать волну, проникшую в тело провода, плоской и воспользоваться зависимостями, полученными в § 30.1 при исследовании плоской волны. На поверхности провода (при $z = 0$) имеем

$$\dot{H}_{tm} = \dot{H}_{me}; \quad \dot{E}_{tm} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}\,\dot{H}_{me}.$$

Следовательно, согласно формуле предыдущего параграфа

$$Z_{\text{внутр}} = r + jx_{\text{внутр}} = (1+j)\frac{l}{u}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}},$$

откуда

$$r = x_{\text{внутр}} = \frac{l}{u}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}.$$

Отношение активного сопротивления провода при переменном токе к его сопротивлению при постоянном токе получается равным

$$\frac{r}{r_0} = \left(\frac{l}{u}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}\right):\left(\frac{l}{\gamma s}\right) = \frac{s}{u}\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}},$$

где s — сечение провода.

Явление поверхностного эффекта, как было указано выше, следует рассматривать как результат затухания в проводе электромагнитной волны, проникающей через поверхность провода из окружающего его диэлектрика. Интересно получить выражения для r и $x_{\text{внутр}}$, исходя из этого физического представления.

Средняя мощность потока электромагнитной энергии, передаваемой внутрь провода сквозь его поверхность и выделяющейся в проводе в виде теплоты, равна $P = S_{\text{ср}}ul$, где $S_{\text{ср}}$ — среднее за период значение вектора Пойнтинга на поверхности провода; $u = 2\pi R$ — периметр сечения провода и ul — поверхность провода, сквозь которую проникает электромагнитная волна. Принимая $z = 0$ в выражении для $S_{\text{ср}}$ в конце § 30.2, получаем

$$S_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}\,\frac{H_{me}^2}{2}$$

и, следовательно,

$$P = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}\,ul\,\frac{H_{me}^2}{2}.$$

Амплитуда напряженности магнитного поля на поверхности связана с действующим током I в проводе законом полного тока $H_{me}u = \sqrt{2}I$. Стало быть,

$$P = \frac{l}{u}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}\, I^2 = rI^2.$$

Таким образом, имеем

$$r = \frac{l}{u}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}.$$

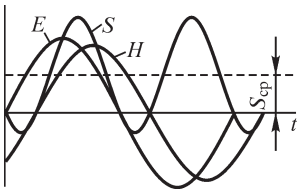

Рис. 30.6

Как было получено в § 30.1, напряженность магнитного поля отстает по фазе от напряженности электрического поля на угол $\pi/4$, что соответствует одной восьмой периода колебания. На рис. 30.6 изображены кривые изменения величин E, H и S на поверхности провода в функции времени. В течение большей части периода колебаний, равной трем восьмым периода изменения E и H, величина вектора Пойнтинга положительна и, следовательно, энергия поступает в провод из внешнего пространства и идет на изменение энергии магнитного поля в объеме провода и на выделение теплоты в проводе. В течение меньшей части периода колебаний, равной одной восьмой периода изменения E и H, вектор Пойнтинга имеет отрицательную величину и, следовательно, поток энергии направлен от провода в окружающее его пространство. В течение этого промежутка времени энергия, запасенная в магнитном поле в объеме провода, частично возвращается в окружающее провод пространство и частично преобразуется в теплоту. Эти колебания энергии с частичным возвратом ее в пространство, окружающее провод, можно рассматривать как результат наличия внутреннего реактивного сопротивления $x_{\text{внутр}}$ провода. Как известно, между реактивным x и активным r сопротивлениями цепи и разностью φ фаз напряжения и тока в этой цепи существует соотношение $x/r = \operatorname{tg}\varphi$.

В случае, который мы рассматриваем, напряженность магнитного поля на поверхности провода совпадает по фазе с током в проводе. Напряженность электрического поля на поверхности провода представляет собой напряжение на единицу длины провода, которое может рассматриваться как напряжение, преодолевающее активное r и внутреннее реактивное $x_{\text{внутр}}$ сопротивления провода. Так как разность φ фаз напряженностей электрического и магнитного полей равна $\pi/4$, то имеем

$$\frac{x_{\text{внутр}}}{r} = \operatorname{tg}\varphi = 1.$$

Следовательно,

$$x_{\text{внутр}} = r = \frac{l}{u}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}.$$

Таким образом, исследуя процесс передачи электромагнитным полем энергии сквозь поверхность провода, приходим к тем же выражениям для r и $x_{\text{внутр}}$, которые были получены выше иным путем.

Полученное в настоящем параграфе выражение

$$S_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}\,\frac{H_{me}^2}{2}$$

для средней мощности, выделяемой в проводе и отнесенной к единице поверхности провода, позволяет очень просто при резком проявлении поверхностного эффекта вычислить потери в проводе, если известно распределение по поверхности амплитуды касательной составляющей $H_{tm} = H_{me}$ напряженности магнитного поля на поверхности. В вышеприведенном простейшем примере провода круглого сечения величина $H_{tm} = H_{me}$ во всех точках поверхности одинакова, и мощность подсчитывалась простым умножением $S_{\text{ср}}$ на величину поверхности провода. В более сложных случаях ее необходимо вычислять путем интегрирования по поверхности s провода:

$$P = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}\int_s H_{tm}^2\, ds.$$

Обычно резкое проявление поверхностного эффекта имеет место при высоких частотах, например при распространении электромагнитных волн в волноводах. Зная распределение H_{tm} по внутренней поверхности волновода, нетрудно, пользуясь последней формулой, вычислить мощность, теряемую в стенках волновода.

30.6. Поверхностный эффект в массивных проводах из ферромагнитного материала

Все соотношения в предыдущих параграфах получены в предположении, что магнитная проницаемость среды постоянна. Для проводов из ферромагнитного материала это условие не соблюдается. Магнитная проницаемость ферромагнитных веществ сильно зависит от напряженности магнитного поля. Поэтому величина μ в каждой точке среды изменяется в течение периода изменения напряженности поля. Пусть μ есть некоторое среднее за период значение абсолютной магнитной проницаемости. Это среднее значение является функцией амплитуды H_m напряженности поля, так как гистерезисная петля изменяется с изменением H_m.

Величина H_m убывает по мере удаления от поверхности провода в глубь его. Поэтому, если амплитуда напряженности поля H_m на поверхности имеет достаточно большое значение (рис. 30.7), то μ сначала растет по мере удаления от поверхности в глубь провода, а затем, достигнув максимума, вновь убывает.

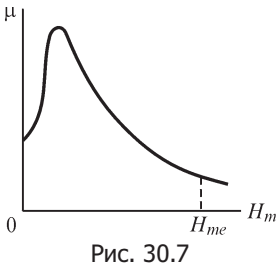

Рис. 30.7

Возрастание μ приводит к более резкому проявлению поверхностного эффекта по сравнению с тем случаем, когда во всем проводе имеется такое же значение μ_e, как на поверхности провода. Такой характер влияния непостоянства μ можно предвидеть на основании вышеприведенных формул, полученных при условии $\mu = \text{const}$; из них следует, что чем больше μ, тем быстрее затухает волна.

На рис. 30.8 приведены кривые зависимости амплитуды плотности тока J_m от координаты z для плоской волны в случаях $\mu = \mu_e = \text{const}$ и $\mu \neq \text{const}$. При этом z есть расстояние от поверхности ферромагнитной среды, отсчитываемое в глубь ее. Кривые, изображенные на рис. 30.8, построены при одинаковых в обоих случаях значениях тока. На рис. 30.9 приведены кривые изменения амплитуды магнитной индукции. При $\mu \neq \text{const}$ величина B_m сначала убывает медленно вследствие явления насыщения, а на некоторой глубине резко падает практически до нуля.

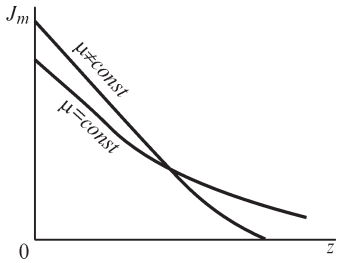

Рис. 30.8

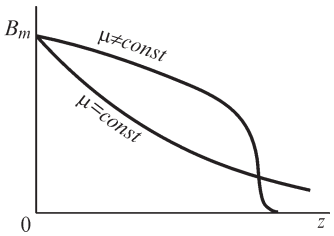

Рис. 30.9

Непостоянство μ и связанное с ним быстрое затухание волны приводят к увеличению активного сопротивления провода. Этому способствуют также потери на гистерезис. Можно показать (Л. Р. Н е й м а н. Поверхностный эффект в ферромагнитных телах), что активное и внутреннее реактивное сопротивления проводов из ферромагнитного материала при резком проявлении поверхностного эффекта с большой точностью выражаются формулами, аналогичными по своей структуре формулам при $\mu = \text{const}$, а именно:

$$r = 1{,}4\frac{l}{u}\sqrt{\frac{\omega\mu_e}{2\gamma}} = \frac{l}{u}\sqrt{\frac{\omega\mu_e}{\gamma}} \quad \text{и} \quad x_{\text{внутр}} = 0{,}6r,$$

где μ_e — значение абсолютной магнитной проницаемости на поверхности провода, определяемое по основной кривой намагничивания при действующей напряженности магнитного поля $H_{\text{дейст}}$ на поверхности провода. Величина $H_{\text{дейст}}$ находится из соотношения $H_{\text{дейст}} = I/u$, вытекающего из закона полного тока, причем I — действующий ток в проводе и u — периметр сечения провода. Эти формулы весьма точны, если H_{me} больше того значения H_m, при котором μ имеет максимум, но и при меньших значениях H_{me} они могут быть использованы для ориентировочных подсчетов.

Из таблицы, приведенной в § 30.2, видно, что электромагнитная волна в ферромагнитной среде даже в предположении $\mu = \text{const}$ уже при частоте $f = 50$ Гц практически полностью затухает на глубине нескольких миллиметров. Непостоянство μ способствует еще более быстрому затуханию волны. Поэтому последние формулы, полученные из уравнения плоской волны, оказываются справедливыми практически во всех случаях, когда в качестве токоведущих частей тех или иных устройств используют рельсы или другие стальные массивные проводники фасонного профиля.

30.7. О комплексных магнитной и диэлектрической проницаемостях

При исследовании периодических электромагнитных процессов в ферромагнитных средах потери энергии, связанные с перемагничиванием среды, могут быть учтены введением в уравнения электромагнитного поля комплексной абсолютной магнитной проницаемости:

$$\dot{\mu} = \frac{\dot{B}_m}{\dot{H}_m} = \mu e^{-j\psi} = \mu\cos\psi - j\mu\sin\psi,$$

равной отношению комплексных амплитуд магнитной индукции и напряженности магнитного поля.

Понятие о комплексной магнитной проницаемости впервые было введено в 1913 г. В. К. Аркадьевым и оказалось весьма полезным при многих исследованиях и расчетах. В частности, формулы, приведенные в предыдущем параграфе, получены с использованием понятия о комплексной магнитной проницаемости и с дополнительным учетом зависимости μ от H_m, характерной для ферромагнитных веществ.

Введение комплексной магнитной проницаемости дает возможность учесть потери на гистерезис, а также, когда это существенно, и потери, возникающие в ферромагнитной среде вследствие явления магнитной вязкости. Введение комплексной магнитной проницаемости с целью учета потерь на гистерезис соответствует замене гистерезисной петли равным ей по площади эквивалентным эллипсом, что дает возможность пользоваться при исследовании периодических процессов в ферромагнитной среде символическим методом.

Аргумент ψ комплексной магнитной проницаемости представляет собой угол запаздывания по фазе эквивалентной синусоиды магнитной индукции от эквивалентной синусоиды напряженности магнитного поля. Модуль μ равен отношению амплитуд B_m/H_m этих эквивалентных синусоид.

Введение комплексной магнитной проницаемости дает возможность при периодических процессах написать второе уравнение Максвелла для ферромагнитной среды, в которой имеют место потери на перемагничивание, в той же форме, что и для среды, в которой эти потери отсутствуют. В частности, для плоской волны второе уравнение Максвелла для ферромагнитной среды приобретает вид

$$\frac{d\dot{E}_{mx}}{dz} = -j\omega\dot{\mu}\dot{H}_{my},$$

тогда как для среды, в которой отсутствуют потери на перемагничивание, это уравнение имеет вид

$$\frac{d\dot{E}_{mx}}{dz} = -j\omega\mu\dot{H}_{my}.$$

При исследовании электромагнитных процессов в несовершенном диэлектрике, в котором имеют место потери энергии при изменении поляризации, в случае синусоидального изменения напряженности электрического поля во

времени весьма полезным является введение комплексной абсолютной диэлектрической проницаемости:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{D}_m}{\dot{E}_m} = \varepsilon e^{-j\psi} = \varepsilon\cos\psi - j\varepsilon\sin\psi.$$

При этом ψ есть угол, на который запаздывает по фазе синусоидально изменяющееся электрическое смещение D от синусоидально изменяющейся напряженности электрического поля E. Этот угол представляет собой так называемый угол потерь в диэлектрике.

В этом случае первое уравнение Максвелла для плоской электромагнитной волны приобретает вид

$$-\frac{d\dot{H}_{my}}{dz} = j\omega\dot{\varepsilon}\dot{E}_{mx}.$$

Введением комплексной диэлектрической проницаемости можно учесть и потери в среде от токов проводимости, что весьма важно, когда рассматривается электромагнитное поле в несовершенном диэлектрике, имеющем отличную от нуля удельную проводимость γ, и когда плотности токов смещения и проводимости соизмеримы друг с другом. При этом первое уравнение Максвелла принимает вид

$$-\frac{d\dot{H}_{my}}{dz} = \gamma\dot{E}_{mx} + j\omega\dot{\varepsilon}\dot{E}_{mx} = j\omega\left(\dot{\varepsilon} - j\frac{\gamma}{\omega}\right)\dot{E}_{mx}.$$

Обозначая

$$\dot{\varepsilon} - j\frac{\gamma}{\omega} = \varepsilon\cos\psi - j\left(\varepsilon\sin\psi + \frac{\gamma}{\omega}\right) = \dot{\varepsilon}' = \varepsilon' e^{-j\psi'},$$

можем это уравнение написать в форме

$$-\frac{d\dot{H}_{my}}{dz} = j\omega\dot{\varepsilon}'\dot{E}_m,$$

совершенно аналогичной форме этого же уравнения

$$-\frac{d\dot{H}_{my}}{dz} = j\omega\varepsilon\dot{E}_m$$

для диэлектрика, в котором отсутствуют потери.

Таким образом, использование понятий о комплексной магнитной проницаемости и о комплексной диэлектрической проницаемости дает возможность написать основные уравнения электромагнитного поля при периодических процессах в простой и симметричной форме и в общем случае, когда в среде имеют место потери энергии того или иного вида.

30.8. Неравномерное распределение переменного магнитного потока в плоском листе

Исследуем случай, когда плоский проводящий лист пронизывается переменным синусоидальным потоком Ф, линии магнитной индукции которого направлены

вдоль листа перпендикулярно заштрихованному на рис. 30.10 сечению. Рассмотрение этого случая представляет большой интерес, так как сердечники трансформаторов и электромагнитов, а также участки магнитных цепей электрических машин, пронизываемые переменным магнитным потоком, обычно собирают из листовой электротехнической стали. Переменный магнитный поток индуцирует электродвижущие силы в контурах, расположенных в плоскостях, нормальных к линиям магнитной индукции. В этих контурах под действием индуцированных ЭДС возникают вихревые токи. Как магнитный поток, так и вихревой ток распределяются неравномерно по сечению листа. Обычно длина l листа и его высота h (рис. 30.10) значительно превосходят его толщину d. При этом можно пренебречь искривлением линий тока у краев листа и считать линии тока прямыми, направленными параллельно поверхности листа и перпендикулярно линиям магнитной индукции. Расположим оси координат так, как показано на рис. 30.10, т. е. так, чтобы, как и раньше, вектор $\boldsymbol{E}$ был параллелен оси OX и вектор $\boldsymbol{H}$ был параллелен оси OY. Начало координат поместим в середине сечения листа. При $h \gg d$ и $l \gg d$ электромагнитную волну можно считать плоской. Сделаем допущение, что μ = const. При этом остаются в силе уравнения, полученные в § 30.1. Следовательно, имеем

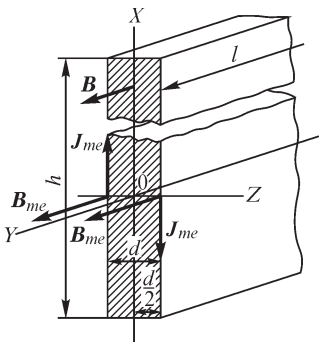

Рис. 30.10

$$\dot{H}_m = A_1 e^{-\alpha z} + A_2 e^{\alpha z}; \quad \dot{E}_m = -\frac{1}{\gamma}\frac{d\dot{H}_m}{dz},$$

где

$$\alpha = \sqrt{j\omega\mu\gamma} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} = (1+j)\,k.$$

Однако граничные условия теперь оказываются иными, нежели для случая, исследованного в § 30.1. Электромагнитные волны проникают в лист с двух его сторон, и на обеих поверхностях листа векторы $\boldsymbol{B}$ и соответственно векторы $\boldsymbol{H}$ должны быть одинаковы по величине и направлению. Это требование соблюдается при условии $A_1 = A_2 = A$. Следовательно,

$$\dot{H}_m = A(e^{-\alpha z} + e^{\alpha z}) = 2A\,\mathrm{ch}\,\alpha z;$$
$$\dot{B}_m = 2A\mu\,\mathrm{ch}\,\alpha z = \dot{B}_{m0}\mathrm{ch}\,\alpha z;$$
$$\dot{J}_m = \gamma\dot{E}_m = -2A\alpha\,\mathrm{sh}\,\alpha z = -\frac{\dot{B}_{m0}\alpha}{\mu}\mathrm{sh}\,\alpha z,$$

где $\dot{B}_{m0} = 2A\mu$ представляет собой значение $\dot{B}_m$ в середине листа (при $z = 0$). Обычно нас интересует среднее значение $B_{\text{ср}}$ индукции по сечению листа. Комплексная амплитуда этого среднего значения получается как среднее значение комплексной величины $\dot{B}_m$ на толщине листа:

$$\dot{B}_{m\,\mathrm{ср}} = \frac{1}{d}\int\limits_{-d/2}^{d/2} \dot{B}_m\, dz = \frac{\dot{B}_{m0}}{d}\int\limits_{-d/2}^{d/2} \mathrm{ch}\,\alpha z\, dz = \dot{B}_{m0}\,\frac{\mathrm{sh}\,\dfrac{\alpha d}{2}}{\dfrac{\alpha d}{2}}.$$

Для нахождения самих действительных амплитуд индукции и плотности тока необходимо взять модули найденных выражений. Имеем

$$\left|\frac{\alpha d}{2}\right| = \sqrt{2}\,k\frac{d}{2};$$

$$\left|\mathrm{sh}\,\alpha z\right|^2 = \mathrm{sh}\,(kz + jkz)\,\mathrm{sh}(kz - jkz) = \frac{\mathrm{ch}\,2kz - \cos 2kz}{2};$$

$$\left|\mathrm{ch}\,\alpha z\right|^2 = \mathrm{ch}\,(kz + jkz)\,\mathrm{ch}(kz - jkz) = \frac{\mathrm{ch}\,2kz + \cos 2kz}{2}.$$

Следовательно,

$$B_m = B_{m0}\sqrt{\frac{\mathrm{ch}\,2kz + \cos 2kz}{2}};\quad J_m = \left|\alpha\right|\frac{B_{m0}}{\mu}\sqrt{\frac{\mathrm{ch}\,2kz - \cos 2kz}{2}}.$$

На рис. 30.11 приведена кривая B_m/B_{m0} в функции $2kz$. На поверхности листа $z = d/2$ и $2kz = kd$. Для электротехнической листовой стали имеем $\mu \approx 1000\ \mu_0$, $\gamma = 10^7$ См/м, и при $f = 50$ Гц, $d = 0{,}5$ мм параметр $kd = \sqrt{\omega\mu\gamma/2}\,d$ имеет значение $kd = 0{,}7$.

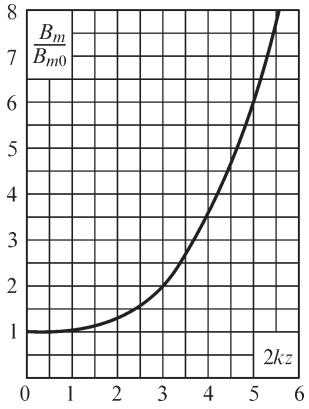

Рис. 30.11

Из кривой на рис. 30.11 видно, что при этом значении kd неравномерность распределения магнитного потока еще практически не заметна.

Однако при той же толщине листа и $f = 2000$ Гц получаем $kd = 4{,}4$, и соответственно отношение амплитуды индукции на поверхности B_{me} к амплитуде индукции B_{m0} в середине листа оказывается равным $B_{me}/B_{m0} = 4{,}5$. Отсюда видно, что для звуковых частот толщина листа 0,5 мм недопустимо велика. При звуковых частотах она должна быть порядка 0,05—0,10 мм. При радиочастотах уже и при таких малых толщинах листа поток распределяется весьма неравномерно по толщине листа — вихревые токи сильно ослабляют поле в середине листа. При высоких частотах находят применение сердечники, спрессованные из тончайшего ферромагнитного порошка и изолирующего материала.

Определим потери $P_в$ на вихревые токи в листе с учетом неравномерности распределения магнитного потока. Активная мощность, расходуемая в проводящей среде и отнесенная к единице объема, равна квадрату действующей плотности тока, деленному на удельную проводимость среды. Следовательно,

$$\frac{dP_в}{dV} = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{J_m}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\left|\alpha\right|^2 B_{m0}^2}{4\mu^2\gamma}(\mathrm{ch}\,2kz - \cos 2kz).$$

Так как $|\alpha| = \sqrt{\omega\mu\gamma}$, то

$$\frac{dP_{\text{в}}}{dV} = \frac{\omega}{4\mu} B_{m0}^2 (\operatorname{ch} 2kz - \cos 2kz).$$

Выразим B_{m0} через амплитуду средней по сечению листа индукции из уравнения

$$B_{m\,\text{ср}} = B_{m0} \left| \frac{\operatorname{sh} \frac{\alpha d}{2}}{\frac{\alpha d}{2}} \right| = B_{m0} \frac{\sqrt{\frac{\operatorname{ch} kd - \cos kd}{2}}}{\sqrt{2}\,\frac{kd}{2}} = B_{m0} \frac{\sqrt{\operatorname{ch} kd - \cos kd}}{kd}.$$

Следовательно,

$$\frac{dP_{\text{в}}}{dV} = B_{m\,\text{ср}}^2 \frac{\omega}{4\mu} k^2 d^2 \frac{\operatorname{ch} 2kz - \cos 2kz}{\operatorname{ch} kd - \cos kd}.$$

Потери $P_{\text{в}}$ в объеме всего листа получим, умножая удельные потери $dP_{\text{в}}/dV$ на длину l, на высоту h и на элемент толщины dz листа и интегрируя по толщине листа:

$$P_{\text{в}} = lh \int_{-d/2}^{d/2} \frac{dP_{\text{в}}}{dV}\, dz = B_{m\,\text{ср}}^2 lh \frac{\omega}{4\mu} kd^2 \frac{\operatorname{sh} kd - \sin kd}{\operatorname{ch} kd - \cos kd}.$$

Таким образом, потери, отнесенные к единице объема всего листа, выражаются в виде

$$P'_{\text{в}} = \frac{P_{\text{в}}}{lhd} = B_{m\,\text{ср}}^2 \frac{\omega}{4\mu} kd \frac{\operatorname{sh} kd - \sin kd}{\operatorname{ch} kd - \cos kd}.$$

Нетрудно убедиться, что при $kd < 1$ это выражение переходит в формулу

$$P'_{\text{в}} = \frac{4}{3} k_{\text{ф}}^2 f^2 \gamma d^2 B_{m\,\text{ср}}^2,$$

полученную в ч. III, если пренебречь явлением поверхностного эффекта. В последней формуле $k_{\text{ф}} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$ — коэффициент формы синусоиды.

30.9. Неравномерное распределение тока в цилиндрическом проводе круглого сечения

Рассмотрим явление поверхностного эффекта при прохождении переменного тока по цилиндрическому проводу круглого сечения. Предположим, что обратный провод находится настолько далеко, что влиянием переменного магнитного потока, вызванного током в нем, на распределение тока в исследуемом проводе можно пренебречь. Естественно выбрать цилиндрические координаты r, z и θ, совместив ось OZ с осью провода (рис. 30.12). Линии электрического тока направлены параллельно оси OZ. Вследствие осевой симметрии линии магнитной индукции представляют собой окружности, лежащие в плоскостях, нормальных к оси провода, с центрами на этой оси. Таким образом, вектор $\boldsymbol{J}$ имеет единствен-

ную составляющую J_z и вектор $\boldsymbol{H}$ — единственную составляющую H_θ. Поэтому в дальнейшем опустим индексы у J_z и H_θ. Однако будем помнить, что J и H суть проекции векторов, а не их модули и, следовательно, они могут иметь как положительные, так и отрицательные значения. В силу осевой симметрии J и H зависят только от r.

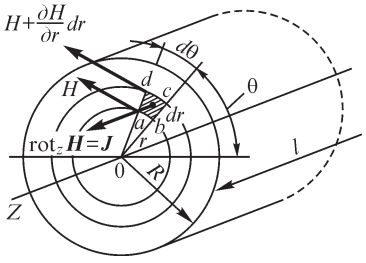

Рис. 30.12

Для нахождения связи между J и H воспользуемся уравнениями:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J};\quad \operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\mu\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t};\quad \boldsymbol{E} = \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{J}.$$

Магнитодвижущая сила вдоль контура $abcda$, ограничивающего заштрихованную на рис. 30.12 площадку, равна

$$-Hr\,d\theta + \left(H + \frac{\partial H}{\partial r}\,dr\right)(r + dr)\,d\theta = \frac{\partial H}{\partial r}\,r\,dr\,d\theta + H\,dr\,d\theta,$$

причем в правой части отброшен член третьего порядка малости.

Величина площадки, ограниченной контуром $abcda$, равна $ds = r\,d\theta\,dr$. Следовательно, в данном случае, когда вектор $\boldsymbol{H}$ имеет только одну составляющую $H_\theta = H$, получим

$$\operatorname{rot}_z\boldsymbol{H} = \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{H}{r},$$

и первое уравнение Максвелла представляется в виде

$$\frac{\partial H}{\partial r} + \frac{H}{r} = J. \qquad (*)$$

Электродвижущая сила вдоль контура $gkmng$, ограничивающего заштрихованную на рис. 30.13 площадку, имеет значение

$$E\,dz - \left(E + \frac{\partial E}{\partial r}\,dr\right)dz = -\frac{\partial E}{\partial r}\,dr\,dz.$$

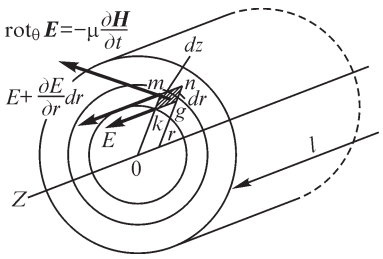

Рис. 30.13

Разделив на величину площадки $ds = dr\,dz$, получаем в данном случае, когда вектор $\boldsymbol{E}$ имеет только одну составляющую $E_z = E$,

$$\operatorname{rot}_\theta\boldsymbol{E} = -\frac{\partial E}{\partial r}.$$

Следовательно, второе уравнение Максвелла может быть написано в форме

$$-\frac{\partial E}{\partial r} = -\mu\frac{\partial H}{\partial t}$$

или

$$\frac{\partial J}{\partial r} = \mu\gamma\frac{\partial H}{\partial t}. \qquad (**)$$

Дифференцируя уравнение (*) по t, а уравнение (**) по r, имеем

$$\frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial^2 H}{\partial r\partial t}=\frac{\partial J}{\partial t};\quad \frac{\partial^2 J}{\partial r^2}=\mu\gamma\frac{\partial^2 H}{\partial r\partial t}.$$

Из этих соотношений с учетом уравнения (**) получаем уравнение для плотности тока:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial J}{\partial r}=\mu\gamma\frac{\partial J}{\partial t}.$$

Дифференцируя уравнение (*) по r и используя уравнение (**), получаем уравнение для напряженности магнитного поля:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r}-\frac{H}{r^2}=\mu\gamma\frac{\partial H}{\partial t}.$$

Если ток, а следовательно, также J и H являются синусоидальными функциями времени, то, вводя комплексные выражения мгновенных плотности тока и напряженности магнитного поля

$$\dot{J}=\dot{J}_m e^{j\omega t}\quad \text{и}\quad \dot{H}=\dot{H}_m e^{j\omega t}$$

в уравнения (*) и (**) и сокращая на общий множитель $e^{j\omega t}$, получаем их в виде

$$\frac{d\dot{H}_m}{dr}+\frac{\dot{H}_m}{r}=\dot{J}_m; \qquad (*)$$

$$\frac{d\dot{J}_m}{dr}=j\omega\mu\gamma\dot{H}_m. \qquad (**)$$

Соответственно вместо уравнений с частными производными для J и H получаем обыкновенные линейные дифференциальные уравнения для их комплексных амплитуд:

$$\frac{d^2\dot{J}_m}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\dot{J}_m}{dr}=j\omega\mu\gamma\dot{J}_m;\quad \frac{d^2\dot{H}_m}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\dot{H}_m}{dr}-\frac{\dot{H}_m}{r^2}=j\omega\mu\gamma\dot{H}_m.$$

Введением новой переменной

$$x=r\sqrt{-j\omega\mu\gamma}$$

последние два уравнения приводятся к более простому виду:

$$\frac{d^2\dot{J}_m}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d\dot{J}_m}{dx}+\dot{J}_m=0;\quad \frac{d^2\dot{H}_m}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d\dot{H}_m}{dx}+\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\dot{H}_m=0.$$

Эти уравнения являются частными случаями уравнения Бесселя

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0.$$

Функции, удовлетворяющие уравнению Бесселя, называются функциями Бесселя. Общий интеграл уравнения может быть написан в виде

$$y=AJ_n(x)+BN_n(x),$$

где A и B — произвольные постоянные; $J_n(x)$ — функция Бесселя первого рода порядка n; $N_n(x)$ — функция Бесселя второго рода порядка n.

Уравнение для плотности тока получается из общего уравнения Бесселя, если в нем положить $n = 0$. Уравнение для напряженности магнитного поля получается, если положить $n = 1$. Следовательно, общие интегралы этих уравнений могут быть представлены в виде

$$\dot{J}_m = A_0 J_0(x) + B_0 N_0(x); \quad \dot{H}_m = A_1 J_1(x) + B_1 N_1(x),$$

где $J_0(x)$ и $N_0(x)$ — бесселевы функции первого и второго рода нулевого порядка, а $J_1(x)$ и $N_1(x)$ — бесселевы функции первого и второго рода первого порядка.

Обозначим радиус сечения провода через R. Постоянные A_0 и B_0 и соответственно A_1 и B_1 определяются из граничных условий при $r = 0$ и $r = R$, т. е. при $x = 0$ и $x = R\sqrt{-j\omega\mu\gamma}$.

Из подробного рассмотрения бесселевых функций следует, что $J_0(0) = 1$ и $J_1(0) = 0$, в то время как $N_0(0) = \infty$ и $N_1(0) = \infty$. Так как ни J_m, ни H_m на оси провода не могут иметь бесконечно больших значений, то $B_0 = 0$ и $B_1 = 0$.

Итак, для плотности тока имеем

$$\dot{J}_m = A_0 J_0(x).$$

Функцию $J_0(x)$ можно представить в виде ряда:

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{(2\cdot 4)^2} - \frac{x^6}{(2\cdot 4\cdot 6)^2} + \ldots,$$

что легко проверить подстановкой последнего выражения в уравнение для $\dot{J}_m$.

Постоянная A_0 равна комплексной амплитуде плотности тока $\dot{J}_{m0}$ на оси провода. Следовательно,

$$\dot{J}_m = \dot{J}_{m0}\left[1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{(2\cdot 4)^2} - \frac{x^6}{(2\cdot 4\cdot 6)^2} + \ldots\right] = \dot{J}_{m0} J_0(x) = \dot{J}_{m0} b_0 e^{j\beta_0}. \qquad (***)$$

Функция $J_0(x)$ есть комплексное число, так как x является числом комплексным. Через b_0 обозначен модуль, а через β_0 — аргумент комплексного числа $J_0(x)$.

Напряженность магнитного поля может быть получена из уравнения (**):

$$\dot{H}_m = \frac{1}{j\omega\mu\gamma}\frac{d\dot{J}_m}{dr} = \frac{\sqrt{-j\omega\mu\gamma}}{j\omega\mu\gamma}\frac{d\dot{J}_m}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{-j\omega\mu\gamma}}\frac{d\dot{J}_m}{dx}$$

или

$$\dot{H}_m = \frac{\dot{J}_{m0}}{\sqrt{-j\omega\mu\gamma}}\left(-\frac{d\dot{J}_0(x)}{dx}\right).$$

Дифференцируя ряд $J_0(x)$, находим

$$\dot{H}_m = \frac{\dot{J}_{m0}}{\sqrt{-j\omega\mu\gamma}}\left[\frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^2\cdot 4} + \frac{x^5}{(2\cdot 4)^2\cdot 6} - \frac{x^7}{(2\cdot 4\cdot 6)^2\cdot 8} + \ldots\right] = \qquad (****)$$

$$= \frac{\dot{J}_{m0}}{\sqrt{-j\omega\mu\gamma}} J_1(x) = \frac{\dot{J}_{m0}}{\sqrt{-j\omega\mu\gamma}} b_1 e^{j\beta_1}.$$

Полученный новый ряд представляет собой не что иное, как бесселеву функцию $J_1(x)$ первого рода первого порядка. Через b_1 обозначен модуль, а через β_1 — аргумент комплексного числа $J_1(x)$.

$r\sqrt{j\omega\mu\gamma}$	b_0	β_0°	b_1	β_1°
0	1	0	0	–45
1	1,015	14,22	0,501	–37,84
2	1,229	52,28	1,041	–16,73
3	1,950	96,52	1,800	+15,71
4	3,439	138,19	3,173	53,90
5	6,231	178,93	5,812	93,55
6	11,501	219,62	10,850	133,45
7	21,548	260,29	20,500	173,51
8	40,817	300,92	39,070	213,69
9	77,957	341,52	74,971	253,95
10	149,831	382,10	144,586	294,27

В таблице даны значения модулей b_0 и b_1 и аргументов β_0 и β_1 комплексных величин $J_0(r\sqrt{-j\omega\mu\gamma})$ и $J_1(r\sqrt{-j\omega\mu\gamma})$ при нескольких значениях величины r.

Так как b_0 с увеличением $r\sqrt{\omega\mu\gamma}$ монотонно возрастает, то амплитуда плотности тока имеет наименьшее значение на оси провода, и отношение амплитуд тока на поверхности провода и на его оси будет тем больше, чем больше угловая частота, удельная проводимость, магнитная проницаемость и радиус провода R. Что же касается угла β_0, то он также монотонно возрастает с увеличением $r\sqrt{\omega\mu\gamma}$, и в тех случаях, когда $r\sqrt{\omega\mu\gamma}$ достигает больших значений, фаза плотности тока на некотором расстоянии от оси может оказаться прямо противоположной фазе плотности тока на оси, а при дальнейшем увеличении r может снова совпасть с фазой плотности тока на оси и т. д. Зависимости величин $J_m/J_{m0} = b_0$ и β_0 от $r\sqrt{\omega\mu\gamma}$ даны на рис. 30.14. На рис. 30.15 показаны на временнóй диаграмме векторы, характеризующие распределение плотности тока по величине и фазе вдоль радиуса провода, причем в конце каждого вектора помечено соответствующее значение $r\sqrt{\omega\mu\gamma}$.

Рассмотрение рис. 30.14 и 30.15 приводит нас к тем же общим физическим положениям, которые были установлены выше и которые характеризуют явление поверхностного эффекта во всех без исключения случаях. Электромагнитная волна проникает внутрь провода сквозь его поверхность из диэлектрика, окружающего провод. По мере проникновения в глубь провода волна постепенно затухает, и амплитуды напряженности электрического поля и соответственно плотности тока убывают. При этом колебания по мере проникновения в глубь провода все более запаздывают по фазе по отношению к колебаниям на поверхности провода.

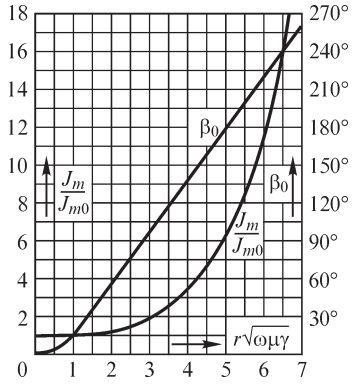

Рис. 30.14

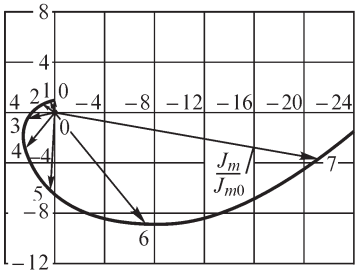

Рис. 30.15

30.10. Активное и внутреннее индуктивное сопротивления цилиндрических проводов круглого сечения

Согласно соотношению, установленному в § 30.4 для провода круглого сечения, имеем

$$Z_{\text{внутр}} = r + jx_{\text{внутр}} = \frac{l\dot{E}_{me}}{u\dot{H}_{me}},$$

где $\dot{E}_{me}$ и $\dot{H}_{me}$ — значения $\dot{E}_m$ и $\dot{H}_m$ на поверхности провода, т. е. при $r = R$; l — длина провода и u — периметр его сечения. Используя выражения (***) и (****) из предыдущего параграфа и связь $\dot{J}_m = \gamma \dot{E}_m$, получаем

$$r + jx_{\text{внутр}} = \frac{l}{\gamma 2\pi R}\sqrt{-j\omega\mu\gamma}\,\frac{J_0(R\sqrt{-j\omega\mu\gamma})}{J_1(R\sqrt{-j\omega\mu\gamma})}.$$

Сопротивление провода при постоянном токе равно $r_0 = \dfrac{1}{\gamma\pi R^2}$. Следовательно,

$$\frac{Z_{\text{внутр}}}{r_0} = \frac{r}{r_0} + j\frac{x_{\text{внутр}}}{r_0} = \frac{R\sqrt{-j\omega\mu\gamma}}{2}\,\frac{J_0(R\sqrt{-j\omega\mu\gamma})}{J_1(R\sqrt{-j\omega\mu\gamma})}.$$

Так как $\sqrt{-j} = e^{-j\pi/4}$, то имеем

$$\frac{Z_{\text{внутр}}}{r_0} = \frac{R\sqrt{\omega\mu\gamma}}{2}\,\frac{b_{0e}}{b_{1e}}\,e^{j\left(\beta_{0e}-\beta_{1e}-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{z_{\text{внутр}}}{r_0}\,e^{j\varphi};$$

$$\frac{r}{r_0} = \frac{z_{\text{внутр}}\cos\varphi}{r_0};\quad \frac{x_{\text{внутр}}}{r_0} = \frac{z_{\text{внутр}}\sin\varphi}{r_0}.$$

Здесь b_{0e} и b_{1e} — значения модулей b_0 и b_1, а β_{0e} и β_{1e} — значения аргументов β_0 и β_1 комплексных величин $J_0(x)$ и $J_1(x)$ при $r = R$, т. е. на поверхности провода (при $x = R\sqrt{-j\omega\mu\gamma}$).

Угол, на который запаздывает по фазе напряженность магнитного поля относительно напряженности электрического поля на поверхности провода, равен

$$\varphi = \beta_{0e} - \beta_{1e} - \frac{\pi}{4}.$$

Отношение внутренней индуктивности $L_{\text{внутр}}$ при переменном токе к ее значению $L_{\text{внутр }0}$ при постоянном токе нетрудно найти, если принять во внимание, что $L_{\text{внутр}} = x_{\text{внутр}}/\omega$ и что $L_{\text{внутр }0} = \mu l/(8\pi)$. Имеем

$$\frac{L_{\text{внутр}}}{L_{\text{внутр}\,0}} = \frac{x_{\text{внутр}}}{r_0}\frac{r_0}{\omega L_{\text{внутр}\,0}} = \frac{x_{\text{внутр}}}{r_0}\frac{l}{\gamma\pi R^2}\frac{8\pi}{\omega\mu l} = \frac{x_{\text{внутр}}}{r_0}\frac{8}{(R\sqrt{\omega\mu\gamma})^2}.$$

В таблице даны отношения $z_{\text{внутр}}/r_0$, r/r_0, $L_{\text{внутр}}/L_{\text{внутр }0}$ и угол φ в зависимости от $R\sqrt{\omega\mu\gamma}$.

$R\sqrt{\omega\mu\gamma}$	$\frac{z_{\text{внутр}}}{r_0}$	$\varphi°$	$\frac{r}{r_0}$	$\frac{x_{\text{внутр}}}{r_0}$	$\frac{L_{\text{внутр}}}{L_{\text{внутр}\,0}}$
0	1	0	1	0	1
1	1,013	7,06	1,0001	0,1247	0,9976
2	1,180	24,01	1,080	0,481	0,961
3	1,625	35,81	1,318	0,951	0,846
4	2,168	39,29	1,678	1,373	0,686
5	2,680	40,39	2,043	1,737	0,556
6	3,180	41,17	2,394	2,093	0,465
7	3,679	41,78	2,744	2,450	0,400
8	4,179	42,23	3,096	2,814	0,352
9	4,679	42,57	3,446	3,165	0,313
10	5,179	42,83	3,796	3,522	0,275

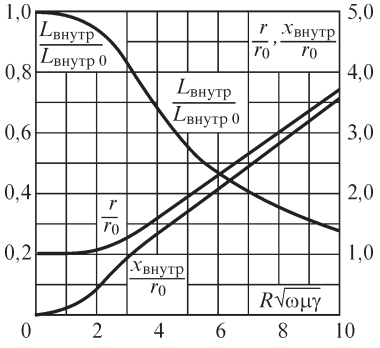

Рис. 30.16

На рис. 30.16 приведены кривые r/r_0, $x_{\text{внутр}}/r_0$ и $L_{\text{внутр}}/L_{\text{внутр }0}$, характеризующие возрастание активного и внутреннего индуктивного сопротивлений провода и уменьшение его внутренней индуктивности при увеличении параметра $R\sqrt{\omega\mu\gamma}$. При возрастании параметра $R\sqrt{\omega\mu\gamma}$ отношение b_{0e}/b_{1e} стремится к единице и разность $\beta_{0e} - \beta_{1e}$ стремится к $\pi/2$, а следовательно, угол φ стремится к $\pi/4$. Поэтому при больших значениях этого параметра имеем

$$\frac{Z_{\text{внутр}}}{r_0} \approx \frac{R\sqrt{\omega\mu\gamma}}{2} e^{j\frac{\pi}{4}};$$

$$\frac{r}{r_0} \approx \frac{x_{\text{внутр}}}{r_0} \approx \frac{R}{2}\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}},$$

что совпадает с результатом, полученным в § 30.5 при рассмотрении случая резкого проявления поверхностного эффекта, если учесть, что для провода круглого сечения необходимо принять $s/u = \pi R^2/(2\pi R) = R/2$.

Введя обозначение $\frac{R}{2}\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} = \chi$, можно дать приведенные в таблицах приближенные выражения для отношений r/r_0, $x_{\text{внутр}}/r_0$ и $L_{\text{внутр}}/L_{\text{внутр }0}$:

χ	$\chi < 1$	$\chi > 1$	$\chi > 30$
$\frac{r}{r_0}$	$1 + \frac{\chi^4}{3}$	$\chi + \frac{1}{4} + \frac{3}{64\chi}$	$\chi + 0{,}265 \approx \chi$

χ	$\chi \ll 1$	$\chi \gg 1$
$\frac{x_{\text{внутр}}}{r_0}$	$\chi^2 - \frac{\chi^6}{6}$	$\chi - \frac{3}{64\chi} \approx \chi$
$\frac{L_{\text{внутр}}}{L_{\text{внутр }0}}$	$1 - \frac{\chi^4}{6}$	$\frac{1}{\chi} - \frac{3}{64\chi^5} \approx \frac{1}{\chi}$

Если $\chi > 30$, то при расчете активного сопротивления провода его условно можно заменить эквивалентным трубчатым проводом с тем же внешним радиусом и равномерным распределением тока по сечению. Для определения толщины b стенки эквивалентного трубчатого провода, называемой иногда эквивалентной глубиной проникновения тока, имеем выражение

$$\frac{l}{2\pi Rb\gamma} = r = r_0\chi = \frac{l}{\pi R^2\gamma}\chi.$$

Следовательно,

$$b = \frac{R}{2\chi} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}} = \frac{1}{\sqrt{\pi f\mu\gamma}}.$$

30.11. Эффект близости. Поверхностная закалка индукционным методом

Если в непосредственной близости друг от друга расположено несколько проводников с переменными токами и каждый из них находится не только в собственном переменном магнитном поле, но и в магнитном поле других проводников, то распределение переменного тока в каждом проводнике будет несколько отличаться от того, которое имело бы место, если бы этот проводник был уединен. Этот эффект носит наименование эффекта близости. Он приводит к дополнительному увеличению активного сопротивления проводников.

В двухпроводной линии передачи, в проводах которой токи протекают в противоположных направлениях, эффект близости приводит к тому, что плотность

тока на сторонах проводов, обращенных друг к другу, оказывается большей, чем на противоположных сторонах. Это можно объяснить стремлением тока избрать путь, при котором полное сопротивление получается наименьшим. Хотя дополнительная неравномерность распределения тока ведет к возрастанию активного сопротивления провода, индуктивное сопротивление при этом уменьшается, так как вследствие сближения прямого и обратного токов уменьшается эквивалентная индуктивность контура.

Поверхностный эффект и эффект близости широко используются при поверхностной закалке стальных изделий индукционным методом. В виде примера рассмотрим плоский контур, по которому протекает ток высокой частоты. Если поднести контур близко к плоской поверхности стального тела, то в этом теле вблизи его поверхности возникнут индуцированные токи. Эти токи, согласно принципу электромагнитной инерции, будут направлены противоположно току в указанном выше контуре, называемом в данном случае индуктором. Эффект близости при этом проявляется в том, что ток в теле стремится следовать за проводниками индуктора. Придавая проводникам индуктора ту или иную форму, можно соответствующим образом направлять токи в теле и получать нагревание поверхностного слоя тела для целей последующей закалки только в требуемых местах. Если поверхность тела не плоская, то и индуктору необходимо придать соответствующую форму. Метод поверхностной закалки был разработан в СССР В. П. Вологдиным и другими.

30.12. Электромагнитное экранирование

Для защиты элементов электрических цепей, например катушек самоиндукции, электронных ламп, электроизмерительных приборов и т. д., от влияния на них переменных электромагнитных полей применяют металлические экраны. Если защищаемый элемент цепи окружить сплошной металлической оболочкой, то при достаточной ее толщине внешнее электромагнитное поле практически не проникает внутрь оболочки, что ясно из произведенного выше рассмотрения процесса проникновения электромагнитной волны в проводящую среду. Подобные оболочки носят название *электромагнитных экранов*. Ясно, что такой экран оказывается также практически непроницаемым и для переменного электромагнитного поля, созданного элементом электрической цепи, заключенным в его полости, т. е. экран защищает также все приборы, расположенные вне его, от влияния поля, существующего внутри его.

Физически экранирующее действие может быть объяснено возникновением токов в стенках экрана, создающих поле, которое компенсирует их вызывающее внешнее поле. Эти токи могут рассматриваться как вихревые токи.

Для получения эффективного экранирующего действия толщину стенок экрана необходимо взять порядка длины волны λ в веществе экрана. Действительно, в § 30.2 мы убедились, что на расстоянии, равном длине волны в проводящей среде, электромагнитная волна практически полностью затухает. Как видно из таблицы, приведенной в § 30.2, при частоте $f = 500$ кГц длина волны в меди получается примерно равной 0,6 мм. Поэтому при радиочастотах нет необходимости

применять для экранов ферромагнитные материалы, которые нежелательны вследствие зависимости их магнитной проницаемости от напряженности поля и явления гистерезиса. Обычно применяют экраны из хорошо проводящего материала, например из меди или алюминия. При промышленной частоте $f = 50$ Гц медный экран оказывается эффективным лишь при значительной толщине стенок, так как длина волны в меди при этой частоте равна 6 см. При таких низких частотах можно воспользоваться экраном из ферромагнитного материала, в котором электромагнитная волна затухает значительно быстрее, чем в меди, если, конечно, потери в ферромагнитном экране не препятствуют его применению. Ферромагнитный экран оказывает экранирующее действие и при постоянном поле, как это было показано в § 27.23. При переменном поле его экранирующее действие значительно возрастает вследствие дополнительного экранирующего эффекта токов, возникающих в стенках экрана.

30.13. Экспериментальное исследование и моделирование электрических и магнитных полей

Наряду с расчетом электрических, магнитных и электромагнитных полей имеет большое практическое значение их непосредственное экспериментальное исследование в реальных устройствах, а также их экспериментальное исследование методом моделирования.

Для экспериментального исследования электрического поля, например электрического поля в воздухе около изолятора высокого напряжения, можно воспользоваться тем обстоятельством, что удлиненное тело из металла или из диэлектрика с $\varepsilon > \varepsilon_0$, внесенное во внешнее электрическое поле, стремится расположиться вдоль линий напряженности этого поля. Прикрепим маленькую стрелку из тонкой и узкой алюминиевой ленты или из соломинки в ее середине к волосу, натянутому между концами небольшой стеклянной вилки. Вилку прикрепим к концу длинного стержня из изолирующего материала, служащего для ввода стрелки в исследуемое поле. Стрелка должна свободно вращаться на волосе. При внесении стрелки в исследуемое поле она располагается вдоль линий напряженности поля.

Поместим изолятор и стрелку между источником света и белым листом бумаги и устроим освещение так, чтобы на листе бумаги получалась резкая тень от изолятора и от стрелки. При этом получаем возможность обрисовать на листе бумаги тень изолятора и тень стрелки. Перемещая стрелку в различные положения в поле изолятора, каждый раз будем проводить черточку на бумаге вдоль ее тени. При большом числе черточек на бумаге отчетливо намечается направление линий напряженности исследуемого поля. Эти линии надлежит проводить так, чтобы черточки были к ним касательны. Имея картину линий напряженности поля, легко провести перпендикулярные им линии равного потенциала. Если подобрать расстояния между линиями напряженности поля и между линиями равного потенциала так, чтобы удовлетворились требования к форме ячеек сетки поля, сформулированные в §§ 24.15, 24.16, то картина поля даст возможность судить и о значении напряженности поля в разных точках.

Значение напряженности поля можно измерить и непосредственно, пользуясь маленькой безэлектродной неоновой лампой. Располагая лампу в некоторой точке поля в направлении линий напряженности, увеличиваем напряжение на изоляторе до тех пор, пока лампа не вспыхнет. Лампа вспыхивает при определенной напряженности поля, которая может быть найдена предварительно путем помещения лампы в нарастающее известное поле. Производя опыт в разных точках исследуемого поля, определяем напряжения на изоляторе, при которых вспыхивает лампа в этих точках поля. Результаты измерений дают возможность путем пропорционального пересчета получить напряженность в разных точках поля при одном напряжении на изоляторе.

Для исследования постоянного магнитного поля или магнитного поля, изменяющегося с небольшой частотой, но не меняющего своей конфигурации, можно воспользоваться аналогичным методом, помещая в различные точки поля свободно вращающуюся стрелку из ферромагнитного материала и наблюдая положения, которые занимает стрелка в этих точках поля. Для исследования магнитного поля можно использовать также явление электромагнитной индукции. Помещая в разные точки поля небольшой виток или катушку и измеряя с помощью баллистического гальванометра электрический заряд, переносимый сквозь поперечное сечение провода катушки при убывании потока до нуля, или измеряя действующее значение или амплитуду ЭДС, индуцируемой в катушке при периодически изменяющемся потоке, можно вычислить значение потока, сцепляющегося с витками катушки. Отыскивая положение катушки около данной точки поля, при котором поток имеет наибольшее значение, получаем направление вектора $\boldsymbol{B}$, перпендикулярное плоскости катушки. По значению потока при этом находим значение магнитной индукции в середине катушки. Катушка должна быть столь малых размеров, чтобы в ее пределах поле мало отличалось от однородного.

Исследование электрического поля постоянного тока в проводящей среде производится весьма просто. Если среда твердая, можно исследовать поле только на ее поверхности. Если же среда жидкая или рыхлая, то поле можно исследовать и внутри ее. С этой целью вводят в среду зонд, представляющий собой тонкий металлический стержень, изолированный по всей длине, кроме небольшого отрезка на конце.

Зонд принимает потенциал той точки среды, в которой находится его открытый конец. Разность потенциала зонда и потенциала какой-либо другой неизменной точки среды может быть измерена вольтметром или при малых разностях потенциалов — высокочувствительным гальванометром. Сопротивление вольтметра или гальванометра должно быть достаточно велико, чтобы ток через них, выходящий из конца зонда в среду, не вызывал заметного изменения потенциала в месте расположения конца зонда. Наиболее точные результаты могут быть получены при использовании для измерения разности потенциалов компенсационного метода. Помещая конец зонда в различные точки исследуемого поля, можно найти в них потенциалы, что дает возможность построить поверхности равного потенциала или линии равного потенциала на поверхности среды

или в каком-нибудь сечении среды. Линии напряженности электрического поля, а в однородной в отношении проводимости среде и линии тока проводят перпендикулярно поверхностям равного потенциала. На поверхности среды линии тока лежат в этой поверхности, и, следовательно, они перпендикулярны к линиям равного потенциала на этой поверхности.

Зная разность потенциалов двух близлежащих поверхностей равного потенциала и расстояние между ними в данном месте поля, можно без труда определить значение напряженности электрического поля в этом месте. Можно напряженность поля измерить и непосредственно, если воспользоваться двойным зондом, состоящим из двух вышеописанных одиночных зондов, открытые концы которых расположены на небольшом определенном расстоянии друг от друга. Измеряя разность потенциалов зондов и деля ее на расстояние между концами зондов, получаем значение составляющей вектора напряженности электрического поля в направлении линии, соединяющей концы зондов.

Экспериментальное исследование электрических и магнитных полей в тех или иных технических устройствах — изоляторах, приборах, машинах, аппаратах — имеет большое значение для правильного проектирования этих устройств. Экспериментальное исследование растекания тока в проводящей среде имеет большое значение для правильного проектирования заземляющих устройств, а также для определения так называемых блуждающих постоянных токов в земле, ответвляющихся в землю от рельсовых путей городского электрического транспорта и вызывающих разъедание проложенных в земле металлических труб и оболочек кабелей.

Постоянное электрическое поле в диэлектрике при отсутствии объемных зарядов, постоянное магнитное поле в области вне токов и постоянное электрическое поле в проводящей среде в области вне источников ЭДС описываются аналогичными уравнениями, имеющими соответственно вид

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=0\,(\boldsymbol{E}=-\operatorname{grad}U);\quad \boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E},\quad \operatorname{div}\boldsymbol{D}=0; \qquad (a)$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=0\,(\boldsymbol{H}=-\operatorname{grad}U_{\text{м}});\quad \boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H},\quad \operatorname{div}\boldsymbol{B}=0; \qquad (б)$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=0\,(\boldsymbol{E}=-\operatorname{grad}U);\quad \boldsymbol{J}=\gamma\boldsymbol{E},\quad \operatorname{div}\boldsymbol{J}=0. \qquad (в)$$

Поэтому если одинаковы геометрические конфигурации областей пространства, в которых существуют эти поля, если аналогичны граничные условия на границах областей и если подобны относительные распределения значений ε, μ и γ внутри областей, то картины этих полей будут подобны друг другу.

Это обстоятельство может быть использовано для моделирования одного поля другим. Из вышеизложенного следует, что проще всего и с наибольшей точностью удается экспериментально исследовать электрическое поле в проводящей среде. Поэтому естественно исследование постоянных электрических полей в диэлектрике и постоянных магнитных полей вне токов заменять исследованием электрического поля в проводящей среде на соответствующих моделях. Важно при этом, чтобы при моделировании было соблюдено геометрическое подобие областей, в которых существует поле, а также соблюдены требуемые граничные

условия. Если среда однородна, то требование правильного распределения значений γ внутри области отпадает.

Для исследования плоскопараллельных полей используют металлические листы или листы из проводящей бумаги, вырезанные по определенной фигуре, изображающей область рассматриваемого поля. К некоторым частям границ листа подводят, а от некоторых частей отводят ток, определенным образом распределяя его вдоль этих частей границ. Остальные части границ будут, очевидно, линиями тока. Если моделируется, например, плоскопараллельное магнитное поле около каких-нибудь частей машин или аппаратов, то границы листа, вдоль которых подводится ток, соответствуют границам, вдоль которых распределена магнитодвижущая сила, вызывающая магнитное поле; границы, вдоль которых в листе ток не подводится и которые являются линиями тока, соответствуют границам, вдоль которых не распределена м. д. с. и которые, следовательно, являются линиями равного магнитного потенциала.

На рис. 30.17 изображена область *abcdefga* в электрической машине, в которой существует магнитное поле в воздухе между полюсом и якорем и в пространстве между полюсами. На рис. 30.18 показан фигурный лист, на котором может быть исследовано поле тока, аналогичное магнитному полю в машине. Чтобы исключить в машине область, где протекают токи, обмотка на сердечнике полюса условно предположена сжатой к линии *ab*. Вдоль этой линии определенным образом распределена м. д. с. Так же следует распределить ток, входящий в лист по линии *ab*. Линии *bcd* и *efga* в машине суть линии равного магнитного потенциала. Линии *bcd* и *efga* в листе — линии тока. Поэтому всем линиям равного магнитного потенциала в поле машины будут соответствовать линии тока в листе, и всем магнитным линиям в поле машины будут соответствовать линии равного электрического потенциала в листе. Последние легко могут быть экспериментально найдены при помощи щупа *K* и гальванометра *G*.

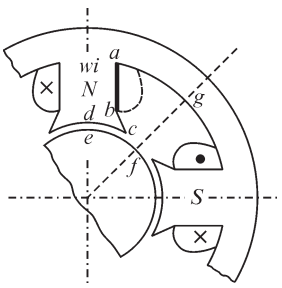

Рис. 30.17

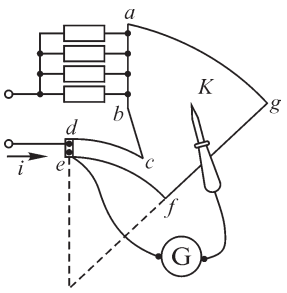

Рис. 30.18

Для исследования пространственных полей можно применить ванну со слабо проводящей жидкостью, в которую погружены металлические тела (электроды) и тела из изолирующего вещества определенной формы. К металлическим телам линии тока подходят перпендикулярно их поверхностям, тела из изолирующего вещества обтекаются линиями тока. Надлежащим образом подбирая форму тел и самой ванны, можно моделировать в такой ванне магнитное поле или электри-

ческое поле в диэлектрике около той или иной интересующей нас системы намагниченных или заряженных тел. Во избежание появления э. д. с. поляризации около электродов пользуются переменным током низкой частоты, который распределяется в ванне практически так же, как и постоянный ток при отсутствии этих э. д. с.

В электролитической ванне можно моделировать не только постоянные и изменяющиеся с малой частотой магнитные и электрические поля, но и поля вектора скорости в газовой или жидкой среде при отсутствии турбулентного движения, а также поля других физических величин, если эти поля описываются уравнениями, аналогичными по форме уравнениям электрического поля постоянного тока в проводящей среде (для однородной среды — уравнением Лапласа).

Сплошную среду электрической модели можно заменить, допуская известную степень приближения, большим числом элементов, составленных из сопротивлений, т. е. заменить, как говорят, электрической решеткой или сеткой. На рис. 30.19 изображен элемент из шести сопротивлений, заменяющий параллелепипед, вырезанный из сплошной среды. Применение электрических сеток для приближенного решения уравнений Лапласа предложено С. А. Гершгориным в 1929 г.

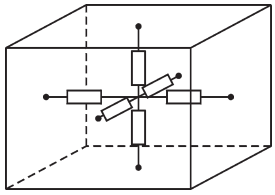

Рис. 30.19

Этот метод может быть распространен и на исследования быстропеременных полей, уже не описываемых уравнением Лапласа. Переменные электромагнитные поля отличаются от постоянных электрических и магнитных полей тем, что в них появляются токи электрического смещения и индуцируемые переменным магнитным потоком ЭДС. В электрической модели это можно учесть введением в каждый элемент модели помимо сопротивлений также емкостей и индуктивностей. На этом принципе Л. И. Гутенмахером разработаны так называемые электроинтеграторы. Вводя в эти элементы кроме вышеуказанных деталей еще усилители и дополнительные проводимости определяющие отбор или генерирование энергии в элементе, представляется возможным решать при помощи электроинтеграторов весьма разнообразные задачи.

Отметим, наконец, что для непосредственного изучения переменного электромагнитного поля в проводящей среде, т. е. для изучения явления поверхностного эффекта, можно исследование вести в устройствах, геометрически подобных действительным устройствам, но линейные размеры l которых уменьшены или увеличены в некоторое число раз. При этом, как следует из вышеизложенной теории поверхностного эффекта, необходимо, чтобы в модели и в оригинале оставалась неизменной безразмерная величина $l\sqrt{\omega\mu\gamma}$, называемая критерием подобия.

Для непосредственного исследования переменного электромагнитного поля в диэлектрике в геометрически подобных моделях критерием подобия является при периодических процессах величина $l\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ и при любых процессах — величина $\frac{l}{t}\sqrt{\mu\varepsilon}$, где t — промежуток времени, отсчитываемый от начального момента

времени. Действительно, отношение l/t в модели (l_1/t_1) и в оригинале (l_2/t_2) должно быть равно отношению скоростей распространения электромагнитных волн в модели $v_1 = 1/\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}$ и в оригинале $v_2 = 1/\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}$, откуда $\frac{l_1}{t_1}\sqrt{\mu_1\varepsilon_1} = \frac{l_2}{t_2}\sqrt{\mu_2\varepsilon_2} = \text{const}$.

В области теории и практики моделирования приоритет и большие заслуги принадлежат советским ученым Н. Н. Павловскому, А. Н. Крылову, М. В. Кирпичеву, а также С. А. Гершгорину, Л. И. Гутенмахеру, Н. В. Королькову, Д. Ю. Панову и др.

30.14. О критериях разграничения задач теории электрических и магнитных цепей и задач теории электромагнитного поля

Из всего вышеизложенного следует, что, по существу, все электромагнитные явления при полном и детальном их рассмотрении требуют исследования электромагнитных полей и соответственно в той или иной мере относятся к теории электромагнитного поля. Вместе с тем, представляет большую ценность возможность сведения задач из области электромагнитных явлений к задачам теории электрических и магнитных цепей, которая оперирует только интегральными величинами — электрическим током, напряжением, магнитным потоком и т. д. Весьма важным является установление критериев, в каких случаях допустимо рассмотрение задач как относящихся к теории цепей и когда необходимо их рассматривать как задачи теории поля.

Теория электрических цепей базируется на введении параметров отдельных участков цепи, из которых основными являются индуктивности, емкости и сопротивления. Помимо этих параметров вводят в рассмотрение еще множество других, находящихся в известной связи с ними или имеющих самостоятельное значение. Так, магнитные цепи принято характеризовать их магнитным сопротивлением. При синусоидальном изменении магнитного потока можно ввести более общий параметр — комплексное магнитное сопротивление, характеризующее также и потери энергии на гистерезис и на вихревые токи в магнитной цепи. При исследовании электрических цепей при синусоидальных переменных токах вводят понятия об активных и реактивных сопротивлениях и проводимостях участков цепи, которые в простейших цепях находятся в функциональной зависимости от индуктивностей, емкостей и сопротивлений отдельных элементов цепи. При синусоидальном изменении токов вводят также более общие параметры — комплексное электрическое сопротивление и комплексную проводимость. Многие элементы цепей характеризуются их специфическими параметрами. Так, например, основные свойства трехэлектродной электронной лампы определяются не только ее внутренним сопротивлением, но и коэффициентом усиления.

Из всего рассмотренного выше следует, что только для статических или стационарных режимов всем этим параметрам может быть придано вполне определенное значение и что при переменных процессах использование их существенно осложняется. Так, например, распределение магнитного поля около какого-либо электрического контура при заданном электрическом токе в контуре зависит не только от формы контура, но и от распределения тока внутри проводника, обра-

зующего контур. Только при постоянном токе распределение тока при заданных электрических свойствах проводника однозначно определяется геометрической формой проводника. Соответственно только при постоянном токе такой важнейший параметр электрической цепи, как ее индуктивность, вполне определяется при заданных магнитных свойствах среды геометрическими размерами и формой контура цепи. При изменении тока во времени изменяется распределение тока по сечению проводников, образующих контур тока, и соответственно изменяется распределение в пространстве магнитного потока, сцепленного с контуром, а следовательно, изменяется и индуктивность контура. Так, при периодических процессах, как мы имели возможность убедиться в этой главе, электрический ток распределяется преимущественно в поверхностном слое проводника, что ведет к ослаблению магнитного поля внутри проводника и к уменьшению индуктивности цепи. При синусоидальном токе индуктивность является функцией угловой частоты тока. При несинусоидальном периодическом токе она, очевидно, будет являться функцией также формы кривой тока. При непериодических изменениях тока индуктивность, строго говоря, будет являться, хотя бы по одной только указанной причине — неравномерности распределения тока в проводнике — сложной функцией времени.

От скорости изменения тока зависит в еще большей мере активное сопротивление проводника. Строго говоря, это утверждение относится и к емкости конденсатора, так как неравномерное распределение переменного тока по ширине обкладок конденсатора должно вызывать перераспределение потока электрического смещения в диэлектрике, а следовательно, приводить к некоторому изменению емкости конденсатора.

Критерием того, следует ли считаться с рассмотренными явлениями, служит соотношение между промежутком времени, необходимым для прохождения электромагнитной волны внутрь проводника от его поверхности до центральных частей поперечного сечения, и промежутком времени, в течение которого ток в проводнике успевает измениться на заметную величину по сравнению со своим максимальным значением. При периодических процессах этот критерий сводится к соотношению между длиной электромагнитной волны внутри проводника и линейными размерами поперечного сечения проводника. Если длина волны в проводящей среде имеет порядок или меньше линейных размеров поперечного сечения проводника, то явление поверхностного эффекта становится заметным. Мы видели, что длина электромагнитной волны в проводящей среде даже при сравнительно низких частотах весьма невелика.

Мы начали здесь рассмотрение вопроса о параметрах цепей при переменных токах с анализа влияния на значения этих параметров процессов, происходящих внутри проводников, потому что эти процессы приходится учитывать уже при сравнительно медленных изменениях тока. Вопрос о параметрах цепи еще больше осложняется, когда токи и напряжения в цепи изменяются столь быстро, что за время заметного их изменения электромагнитные волны не успевают распространиться в диэлектрике вдоль всей цепи. Так как скорость распространения электромагнитных волн в диэлектрике велика, например в воздухе она равна

приблизительно $3 \cdot 10^8$ м/с, то учитывать ее конечное значение при не очень протяженных цепях приходится лишь при весьма быстрых изменениях тока и напряжения.

В тех случаях, когда можно не считаться с конечной скоростью распространения волн в диэлектрике, электрическую цепь называют цепью с сосредоточенными параметрами. При периодических процессах критерием допустимости рассмотрения цепи как цепи с сосредоточенными параметрами является малость линейных размеров цепи и ее элементов по сравнению с длиной электромагнитной волны в диэлектрике. При частоте $f = 50$ Гц длина электромагнитной волны в воздухе равна $\lambda = 3 \cdot 10^8 / 50 = 6 \cdot 10^6$ м = 6000 км. Поэтому при этой частоте обычные электромагнитные устройства и электрические цепи, за исключением длинных линий, рассматриваются как обладающие сосредоточенными параметрами. Периодические процессы в них часто называют квазистационарными процессами.

Если протяженность электрической цепи столь велика, что промежуток времени, необходимый для прохождения электромагнитной волны вдоль цепи, становится сравнимым с промежутком времени, в течение которого токи или напряжения в отдельных участках цепи успевают заметно измениться, то такую цепь уже нельзя характеризовать сосредоточенными параметрами. В простейшем случае, когда цепь имеет большую протяженность лишь в одном направлении, вводят понятие о параметрах, распределенных по длине цепи. Примером таких цепей являются однородные линии. Другим примером могут служить обмотки трансформаторов и электрических машин, которые при распространении вдоль них волн тока и напряжения с длительностью, измеряемой микросекундами, должны рассматриваться как цепи с распределенными параметрами. Для характеристики подобных цепей вводят параметры, отнесенные к единице длины цепи.

Однако и этот метод становится уже невозможным в тех случаях, когда длина электромагнитной волны в диэлектрике сравнима с размерами устройств во всех направлениях. С такими условиями мы встречаемся в технике ультракоротких волн, длины которых измеряются сантиметрами и которые находят широкое применение в современной радиотехнике. При столь быстрых процессах уже невозможно характеризовать устройство определенными параметрами: индуктивностью, емкостью и сопротивлением. Невозможно говорить также и о параметрах, распределенных вдоль какого-то одного направления. Электрические колебательные системы при столь коротких волнах приобретают весьма своеобразный вид — это полые металлические тела, внутри полостей которых возбуждаются электромагнитные волны в диэлектрике, многократно отражающиеся от стенок тел. В таких системах возможна настройка в резонанс, причем резонансные частоты определяются размерами и формой тел. Весьма своеобразную форму принимают при столь коротких волнах и устройства, служащие для передачи электромагнитной энергии, получившие название волноводов. Это — металлические трубы, внутри которых распространяются электромагнитные волны в направлении осей труб. По отношению к подобным устройствам затруднительно

применение понятия электрической цепи в его обычном смысле. Для расчета электромагнитных процессов в подобных системах необходимо прибегать к решению уравнений электромагнитного поля с учетом соответствующих граничных условий.

Вопросы, упражнения, задачи к главам 29 и 30

29.1. Плоская электромагнитная волна в диэлектрике

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. На большом расстоянии от источника электромагнитного поля напряженность магнитного поля в диэлектрике пропорциональна функции $1/r$. Каков характер зависимости $E(r)$ в этой области?

2. Затухает ли электромагнитная волна, распространяясь в идеальном диэлектрике?

3. (О) При каких условиях в диэлектрике наряду с прямой волной существует и обратная?

4. (О) Уравнению $\dfrac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = v^2 \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}$ удовлетворяет, как нетрудно проверить, функция $E_x(z, t) = E_m \sin kz \sin kvt$, которая, однако, не имеет аргументом ни $z - vt$, ни $z + vt$. Означает ли это, что решение уравнения, представленное в виде $E_x(z, t) = F_1(z - vt) + F_2(z + vt)$, не является общим?

5. (Р) Напряженность электрического поля плоской электромагнитной волны суть $\boldsymbol{E}(z, t) = \boldsymbol{j}\, 10 \cos(10^2 t + 30z)$. В каком направлении оси z распространяется волна? Рассчитайте напряженность $H(z, t)$ магнитного поля и скорость распространения волны.

6. (Р) Найдите напряженность магнитного поля плоской электромагнитной волны, напряженность электрического поля которой выражена формулой $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{i}E_x + \boldsymbol{j}E_y)e^{j(\omega t - kz)}$.

7. Плоская электромагнитная волна, изменяясь по синусоидальному закону с частотой 50 Гц, проходит через границу раздела двух сред с проницаемостями μ_0, ε_0 и μ_0, $80\varepsilon_0$. Чему равна длина волны в первой среде? Во сколько раз изменяется длина волны на границе раздела сред?

8. (Р) Каково максимально возможное значение напряженности магнитного поля и магнитной индукции в плоской прямой волне в воздухе, если напряженность электрического поля не может превышать значения $3 \cdot 10^6$ В/м? Рассчитайте объемную плотность энергии электромагнитного поля в воздухе при предельном значении напряженности поля $\boldsymbol{E}$.

9. (Р) Плоская синусоидальная электромагнитная волна распространяется в диэлектрике с проницаемостями ε, μ в пространстве между соосными идеально проводящими жилой и оболочкой кабеля в направлении от генератора к нагрузке, сопротивление которой $R_н$. Найдите энергию электромагнитного поля, заключенную в объеме диэлектрика кабеля длиной, равной длине электромагнитной волны. Сравните ее с энергией, поглощаемой в нагрузке за период изменения поля. Радиус жилы R_1, внутренний радиус оболочки R_2. Примите допущение об отсутствии отраженных от нагрузки волн.

10. (Р) Слой коаксиального кабеля характеризуется величинами $\varepsilon = 4\varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$. Определите скорость распространения электромагнитной волны в кабеле и выразите ее через индуктивность и емкость кабеля на единицу его длины, считая удельное сопротивление материала жилы и оболочки $\rho = 0$.

29.2. Вектор Пойнтинга

ВОПРОСЫ

1. Имеет ли смысл понятие вектора Пойнтинга внутри проводников и на их поверхностях?

2. Направление вектора Пойнтинга в некоторой точке задано. Каково направление вектора скорости электромагнитной волны в этой точке?

3. Какова размерность вектора Пойнтинга?

4. Какова частота изменения вектора Пойнтинга при синусоидальном законе изменения во времени напряженности электрического и магнитного поля с частотой ω?

5. Вектор Пойнтинга имеет касательную и нормальную составляющие на поверхности некоторого объема. Какая из составляющих определяет электромагнитную энергию, поступающую в объем или исходящую из объема?

6. Проводящее тело помещено в переменное электромагнитное поле. В энергию какого вида преобразуется электромагнитная энергия, поступающая внутрь тела сквозь его поверхность?

7. Какой смысл имеют величины $\int_0^T \int_V \gamma E^2 \, dV dt$, $\int_0^T \int_V \boldsymbol{J}_{\text{пер}} \boldsymbol{E} \, dV dt$ и $\int_0^T \oint_s [\boldsymbol{E}\boldsymbol{H}] \, d\boldsymbol{s} \, dt$?

УПРАЖНЕНИЯ

1. (Р) Электромагнитная энергия передается по коаксиальному кабелю. Выразите вектор Пойнтинга через ток i кабеля и напряжение u между жилой и оболочкой, пренебрегая потерями в кабеле.

2. (Р) Прямоугольный контур расположен в поле плоской бегущей в направлении оси z синусоидальной электромагнитной волны. При каком расположении контура сквозь ограниченную им поверхность проходит наибольший ток смещения, и определите его, вычисляя величины *а*) $\frac{\partial}{\partial t} \int_s \boldsymbol{D} \, d\boldsymbol{s}$, *б*) $\oint_l \boldsymbol{H} \, d\boldsymbol{l}$.

3. Плоский воздушный конденсатор заряжается от внешнего источника. Укажите направление вектора Пойнтинга в точках *а*) между обкладками, *б*) вблизи краев обкладок, *в*) в воздухе вблизи обкладок. Определите направление вектора Пойнтинга в тех же точках при разрядке конденсатора на резистор.

4. (Р) Сравните запасенную за время t заряда плоского конденсатора энергию поля с энергией, поступившей сквозь боковую поверхность, охватывающую его диэлектрик. Напряжение между обкладками изменяется по закону $u(t)$.

5. (Р) Электромагнитная энергия передается по коаксиальному кабелю с двухслойной изоляцией. Найдите радиус поверхности раздела слоев, при котором энергия, передаваемая в слоях, одинакова. Радиусы жилы, поверхности раздела слоев и внутренний радиус оболочки равны соответственно R_1, R, R_2. Диэлектрические и магнитные проницаемости изоляции слоев: ε_1, μ_1 и ε_2, μ_2.

6. (Р) Найдите распределение вектора Пойнтинга $S(r)$ в объеме между круглыми обкладками плоского конденсатора при приложенном к нему напряжении $u(t) = U_m \sin \omega t$. Определите среднее за период значение $S(r, t)$. Координату r отсчитывайте от оси симметрии конденсатора. Примите допущение, что $E(t)$ не зависит от r.

7. Оцените частоту приложенного к воздушной двухпроводной линии напряжения, при которой передаваемая по ней мощность имеет тот же порядок, что и излучаемая.

8. (Р) Прямоугольный контур со сторонами $a = 10$ см, $b = 20$ см расположен в поле бегущей в направлении оси z синусоидальной волны так, что его плоскость перпендикулярна вектору напряженности магнитного поля $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}\, H_y$, а короткие стороны параллельны вектору напряженности электрического поля. Найдите индуцируемую в контуре ЭДС двумя способами, вычисляя *а*) $e = \oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l}$ и *б*) $e = -\dfrac{d\Phi}{dt}$ при $H_m = 500$ А/м, $f = 10^5$ Гц, $v = 3 \cdot 10^8$ м/с, $\mu = \mu_0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$.

29.3. Вихревая и потенциальная составляющие электромагнитного поля

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. (О) В каких случаях в электромагнитном поле может отсутствовать *а*) вихревая *б*) потенциальная составляющая?

2. (О) Можно ли вместо потенциалов $\boldsymbol{A}$, $U_э$ использовать для описания электромагнитного поля скалярный магнитный $U_м$ и скалярный электрический потенциалы?

3. Две среды характеризуются различными значениями проницаемостей μ и ε. В какой из сред время запаздывания электромагнитной волны на одном и том же расстоянии r оказывается большим?

4. По двухпроводной линии передачи протекает переменный ток. Существуют ли вихревая и потенциальная составляющие напряженности $\boldsymbol{E}$ поля в *а*) окружающем ее диэлектрике, *б*) внутри проводов?

5. Линии электрического тока должны быть замкнутыми. По каким путям замыкается линия тока проводимости, протекающего по проводнику при соединении им тел с электрическими зарядами $+q$ и $-q$?

6. (Р) Бесконечно длинный соленоид (рис. В29.1), переменный магнитный поток сквозь сечение которого направлен перпендикулярно плоскости рисунка, охвачен проводящим ($\gamma = \text{const}$) кольцом. Объясните физический смысл

интегралов $\oint_l \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l}$, $\oint_l \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\,d\boldsymbol{l}$, $\oint_l \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) d\boldsymbol{l}$, взятых вдоль осевой линии провода кольца, и выразите их через сопротивление r кольца и его ток i.

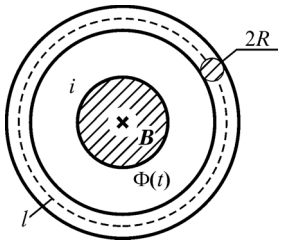

Рис. В29.1

7. (Р) Охватывающее соленоид кольцо в условии предыдущего упражнения состоит из двух полуколец, выполненных из материалов с удельными электрическими проводимостями γ_1 и γ_2. Найдите величину grad U в полукольцах при токе кольца, равном i.

29.4. Передача электромагнитной энергии вдоль проводов линии

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. (О) Одинаково ли направление вектора Пойнтинга на поверхностях жилы и оболочки коаксиального кабеля?

2. (О) Двухпроводная линия переменного тока протянута параллельно поверхности земли, которую считаем проводящей. Каково направление вектора Пойнтинга на поверхности земли?

3. (О) Конденсатор с идеальным диэлектриком подключен к источнику синусоидального напряжения. Изменяется ли направление вектора Пойнтинга между обкладками конденсатора в течение периода изменения напряжения источника? Каково среднее значение вектора Пойнтинга за период?

4. По двухпроводной линии течет переменный ток. Изменяется ли в диэлектрике направление вектора Пойнтинга в течение периода изменения тока? Зависит ли ответ от характера нагрузки линии?

5. Почему линия, предназначенная для передачи электромагнитной энергии промышленной частоты, неэффективна для передачи энергии в радиочастотном диапазоне?

6. (Р) Электромагнитная энергия передается по линии постоянного тока без потерь при напряжении $U = 110$ кВ. Радиусы сечения проводов $R = 6$ мм, расстояние между их осями $D = 2$ м, ток линии $I = 100$ А. Найдите значение и направление вектора Пойнтинга в нескольких точках отрезка прямой, соединяющей оси проводов (рис. В29.2).

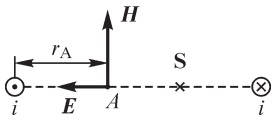

Рис. В29.2

7. (Р) Двухпроводная линия без потерь имеет радиус сечения проводов R, расстояние между осями проводов $D \gg R$ и длину, равную четвертой части длины электромагнитной волны в диэлектрике, окружающем линию. Найдите выражение для вектора Пойнтинга в различных точках прямых $a - a'$ и $b - b'$, изображенных на рис. В29.3 и проходящих через оси проводов, при условии, что линия нагружена на сопротивление, равное волновому.

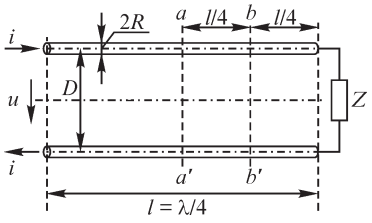

Рис. В29.3

8. (Р) Рассмотренная в предыдущем упражнении линия нагружена на сопротивление $Z_н = Z \exp j\frac{\pi}{6}$, где Z — волновое сопротивление линии. Найдите выражение для вектора Пойнтинга на прямых $a - a'$ и $b - b'$, считая заданными напряжение u_2 и ток i_2 нагрузки. Объясните физический смысл изменения направления вектора Пойнтинга в некоторые моменты времени. Решите эту задачу также при длине линии, равной $l = 0{,}02\lambda$.

30.1. Плоская электромагнитная волна в проводящей среде

ВОПРОСЫ

1. Чем различаются процессы распространения электромагнитного поля в идеальном диэлектрике и в проводящей среде?

2. При каких условиях для нахождения напряженности $\dot{H} = A_1 e^{-\alpha z} + A_2 e^{\alpha z}$ плоской волны *а*) можно принять одну из постоянных равной нулю, *б*) следует принимать $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$?

3. Почему электромагнитная волна в проводящей среде затухает, а в идеальном диэлектрике нет?

4. (О) Почему волновое сопротивление проводника комплексное, а идеального диэлектрика вещественное?

5. (О) Плоская электромагнитная волна распространяется в неидеальном диэлектрике, характеризующемся удельной электрической проводимостью γ и диэлектрической проницаемостью ε. Затухает ли волна в такой среде? В каких пределах может лежать угол сдвига по фазе между векторами напряженности $\dot{\boldsymbol{E}}$, $\dot{\boldsymbol{H}}$ синусоидальной волны?

6. (О) Плоская электромагнитная волна распространяется в направлении, перпендикулярном поверхности бесконечной проводящей пластины конечной толщины. Справедливо ли соотношение $\dot{\boldsymbol{E}}/\dot{\boldsymbol{H}} = (1 + j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}$ внутри пластины?

7. (О) Сохраняется ли постоянным угол сдвига по фазе между напряженностями электрического и магнитного полей плоской синусоидальной волны, распространяющейся в глубь безграничной проводящей среды?

8. (О) Почему с ростом частоты электромагнитного поля глубина его проникновения в проводящую среду уменьшается?

9. (О) Для определения скорости распространения электромагнитной волны в проводящей среде можно рассуждать так же, как и при рассмотрении поля в диэлектрике: фаза волны неизменна при $z = vt$, так что получаем $\omega t = kvt$, откуда $v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\gamma}}$. Справедливо ли такое определение скорости распространения волны в проводящей среде?

УПРАЖНЕНИЯ

1. (Р) Изобразите электрическую цепь, сопротивление которой равно волновому сопротивлению проводящей среды. Выразите параметры ее элементов через величины ω, μ, γ. Единственна ли такая цепь?

2. Диэлектрическая проницаемость среды равна $\varepsilon = 4\varepsilon_0$, ее удельная электрическая проводимость $\gamma = 10^5$ См/м. При какой частоте изменения поля плотности токов проводимости и смещения соизмеримы?

3. (Р) Ток $i = I_m \sin \omega t$ протекает по прямолинейной длинной медной шине прямоугольного сечения, высота h которой значительно больше толщины $2d$. Принимая допущение, что проникающая в шину электромагнитная волна плоская, получите выражения для напряженности магнитного поля и плотности тока в шине. Рассчитайте и постройте кривую зависимости отношения сопротивления r шины при переменном токе к сопротивлению r_0 при постоянном токе в функции частоты ω. Примите значения $2d = 2$ см, $h = 20$ см, $\mu = \mu_0$, $\gamma = 5{,}7 \cdot 10^7$ См/м, длина шины $l = 2$ м, $0 \le \omega \le 400\pi$, 1/с ($0 \le f \le 200$ Гц).

4. Во сколько раз различаются активные сопротивления медной шины (см. условие предыдущего упражнения) и стальной шины ($\mu = 1000\,\mu_0$, $\gamma = 10^6$ Ом/м) таких же размеров при *а*) постоянном, *б*) переменном токе частоты $f = 50$ Гц?

5. (Р) Определите частоту f, при которой при условиях упр. 3 фаза плотности тока в шине в момент времени t изменяется на *а*) 2π, *б*) 4π.

30.2. Активное и индуктивное сопротивления проводов

ВОПРОСЫ

1. Правильно ли считать общей физическую природу явлений поверхностного эффекта и неравномерности распределения магнитного поля внутри проводящих тел?

2. По прямолинейному проводу круглого сечения течет переменный ток. Какие из точек провода (расположенные ближе к поверхности или к центру) охвачены большим магнитным потоком? В каких точках плотность вихревого тока больше?

3. Значение плотности переменного тока в точках сечения провода в момент времени t_1 известно. Можно ли считать, что в момент времени $t = t_1 + \Delta t$ произойдет пропорциональное изменение плотности тока во всех точках сечения, т. е. что она во всех точках изменяется синхронно во времени?

4. При каком условии контур провода некруглого сечения может совпадать с линией магнитной индукции?

5. Произойдет ли перераспределение внутреннего и внешнего потоков в кабеле, изображенном на рис. В30.1, при *а*) увеличении частоты тока, *б*) увеличении удельной электрической проводимости материала жилы и оболочки кабеля?

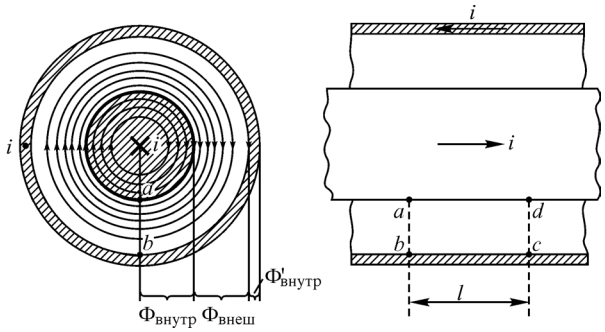

Рис. В30.1

6. (О) К точкам *ad* изображенного на рис. В30.1 кабеля, подсоединен вольтметр, причем сам вольтметр и его соединительные провода расположены полностью в пространстве между жилой и оболочкой кабеля. Зависит ли показание вольтметра от расположения его соединительных проводов? В каком случае его показания будут: *а*) наибольшими, *б*) наименьшими? Какие напряжения измеряет вольтметр в этих двух случаях? Как изменятся ответы на эти вопросы, если провода вольтметра подсоединены к точкам *bc*?

7. Проводящее тело находится во внешнем переменном электромагнитном поле. Какой смысл имеет интеграл $\oint_s \boldsymbol{S}\,d\boldsymbol{s}$? Здесь $\boldsymbol{S}$ — вектор Пойнтинга, $d\boldsymbol{s}$ — элемент поверхности тела.

8. (О) Ферромагнитное тело имеет ребра и углы. При каких условиях проникающую сквозь его поверхность электромагнитную волну можно рассматривать как плоскую?

9. Какие элементы содержит электрическая цепь, параметры которой такие же, как и электрические параметры отрезка провода при резком проявлении поверхностного эффекта? Единственна ли такая цепь?

10. Можно ли рассчитать активное сопротивление провода прямоугольного сечения по формуле $r = \dfrac{l}{u}\sqrt{\dfrac{\omega\mu}{2\gamma}}$, если поверхностный эффект проявлен резко? (Здесь l — длина провода, u — периметр сечения провода.)

11. Поверхностный эффект проявляется резче при увеличении параметра $\omega\mu\gamma$, так как длина волны связана с ним соотношением $\lambda = \dfrac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{\omega\mu\gamma}}$. Почему при этом сопротивление провода может как увеличиваться, так и уменьшаться?

УПРАЖНЕНИЯ

1. (Р) Расстояние c между соседними длинными сторонами двух шин прямоугольного сечения с одинаковыми токами противоположных направлений $i = \pm I_m \sin \omega t$ значительно меньше их высоты h. Толщина $2d$ шин имеет тот же порядок, что и расстояние между ними, а длина шин $l \gg h$. Запишите выражения для напряженности H поля на длинных сторонах шин и рассчитайте распределения

напряженности поля и плотности тока по толщине шин, принимая $2d = 20$ мм, $h = 200$ мм, $\mu = \mu_0$, $\gamma = 10^7$ См/м, $f = 50$ Гц, 250 Гц, 400 Гц, 800 Гц. Рассчитайте активные и реактивные сопротивления шин, $I = 10$ кА.

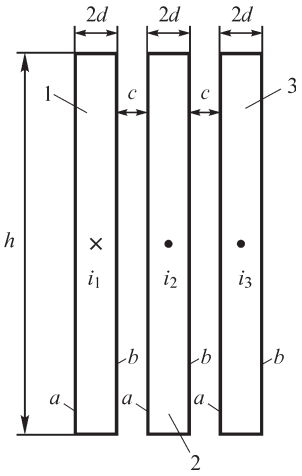

Рис. В30.2

2. (Р) По медной шине 1 (рис. В30.2) течет синусоидальный ток в прямом, а по таким же шинам 2, 3 — в обратном направлении, причем сумма токов шин равна нулю. Считая токи шин заданными, найдите значения напряженности магнитного поля на длинных сторонах шин и рассчитайте напряженность магнитного поля и плотность тока в шинах. Выполните расчеты при $\dot{I}_1 = 1000$ А, $\dot{I}_2 = -200$ А, $\dot{I}_3 = -800$ А, $c = 6$ мм, $d = 6$ мм, $h = 100$ мм, $\mu = \mu_0$, $\gamma = 5{,}7 \cdot 10^7$ См/м, $f = 50$ Гц.

3. (Р) Шины 1, 2 (см. рис. В30.2) соединены параллельно, их ток $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$ равен току третьей шины ($I_3 = 1000$ А), текущему в противоположном направлении, причем значения токов I_1, I_2 неизвестны. Рассчитайте напряженность H поля на длинных сторонах шин, а также токи I_1, I_2, используя численные данные и результаты решения предыдущей задачи.

4. (Р) Токопровод (рис. В30.3) состоит из четырех шин. Толщина $2d$ каждой из шин значительно меньше их высоты. Расстояние c между шинами имеет тот же порядок, что и их толщина. Две левые шины с током $i = i_1 + i_2$ прямого направления соединены параллельно. По двум другим шинам, также соединенным параллельно, течет ток $i = i_3 + i_4$ противоположного направления. Запишите условия, позволяющие рассчитать токи каждой из шин и распределение плотности тока и напряженности H поля по их толщине.

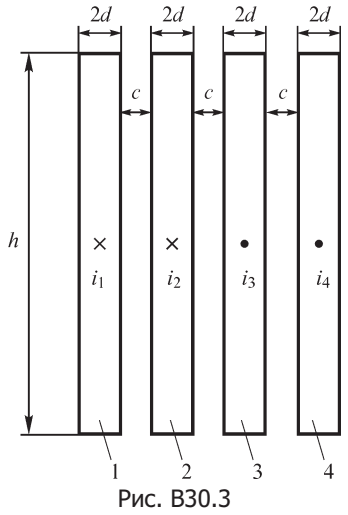

Рис. В30.3

5. (Р) Решите предыдущую задачу при условии, что параллельно соединены первая шина с третьей и по ним течет ток $i = i_1 + i_3$ прямого направления, а вторая с четвертой с током $i = i_2 + i_4$ противоположного направления.

6. Из четырех шин токопровода различные пары шин можно соединить параллельно, например, первую со второй, первую с третьей или первую с четвертой. При каком способе соединения отношение сопротивления r токопровода при переменном токе к его сопротивлению r_0 при постоянном токе будет наименьшим? Примите численные данные такими же, как и в упр. 2.

7. (Р) Токи симметричной трехфазной системы протекают по шинам прямоугольного сечения (см. рис. В30.2). Рассчитайте активные сопротивления шин, принимая геометрические размеры, материал шин и частоту изменения тока такими же, как и в упр. 2.

8. (Р) Токи $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3$ каждой из фаз симметричной трехфазной системы протекают по двум, называемым расщепленными, шинам (рис. В30.4) прямоугольного сечения. Получите выражения для токов $\dot{I}_1', \dot{I}_1'', \dot{I}_2', \dot{I}_2'', \dot{I}_3', \dot{I}_3''$ каждой из шин, считая высоту h шин значительно больше их ширины $2d$ и расстояния c между ними. (Характеристики материала шин γ, $\mu = \mu_0$.)

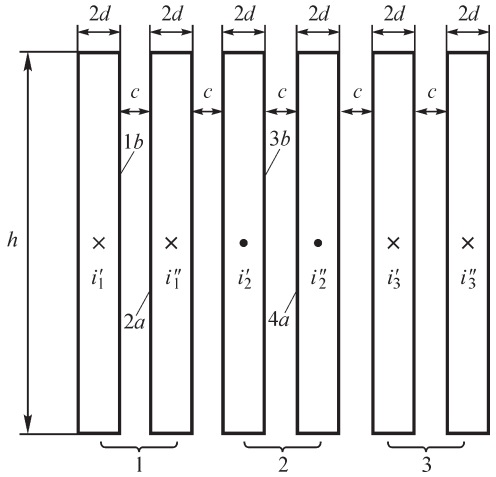

Рис. В30.4

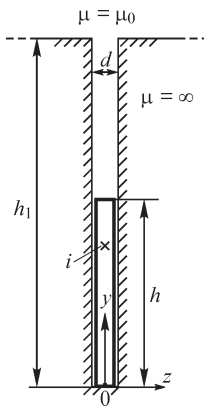

Рис. В30.5

9. (Р) В глубоком и узком пазу ротора электрической машины (ширина d паза значительно меньше его высоты h_1) находится немагнитный проводник прямоугольного сечения высотой $h \ll h_1$, по которому течет ток $i = I_m \sin \omega t$ (рис. В30.5). Рассчитайте напряженность $H(y)$ магнитного поля и плотность $J(y)$ тока в точках сечения проводника, принимая допущение, что магнитная проницаемость вещества ротора бесконечно велика. Постройте кривые зависимостей $H(y)$, $J(y)$ при $I = 100$ А, $f = 50$ Гц, $\gamma = 3{,}6 \cdot 10^7$ См/м, $d = 1$ см, $h = 5$ см и определите активное сопротивление проводника длиной $l = 1$ м.

10. (Р) В глубоком и узком пазу ротора электрической машины ($d \ll h$, $h \ll h_1$) находятся два немагнитных проводника 1, 2 прямоугольного сечения с током одного направления, соединенные последовательно (рис. В30.6). Рассчитайте и постройте кривые зависимостей $H(y)$, $J(y)$ при $0 \le y \le 2h$ и найдите активное сопротивление каждого из проводников длиной $l = 0{,}5$ м при $d = 0{,}5$ см, $h = 2$ см, $I_1 = I_2 = 100$ А, $f = 50$ Гц, $\gamma = 5{,}7 \cdot 10^7$ См/м, $c = 0$.

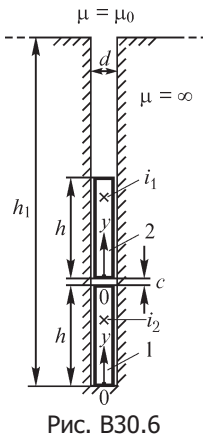

Рис. В30.6

11. (Р) В прямоугольном пазу (рис. В30.6) находятся два немагнитных проводника, соединенные параллельно. Рассчитайте ток и активное сопротивление каждого из проводников, при $\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{I} = 100$ А и $c = 1$ мм. Остальные численные данные такие же, как и в предыдущем упражнении.

12. (Р) В прямоугольном пазу шириной d и высотой h находятся n проводников, размером $d \times d$ каждый, соединенных *а*) последовательно, *б*) параллельно. Расстояние между соседними проводниками равно c. Считая ток I каждого провода (во втором случае ток всех проводников) заданным, найдите величины напряженности магнитного поля на сторонах k-го проводника, а также условия, позволяющие определить ток каждого из параллельно соединенных проводников.

13. (Р) Рассчитайте внутреннюю и внешнюю индуктивности системы из двух прямоугольных шин размером $2d \times h$ ($d \ll h$) (см. упр. 1) с токами $\pm i$ и постройте кривую зависимости отношения внутренней индуктивности при переменном токе к внутренней индуктивности при постоянном токе от параметра $\omega\mu\gamma$.

14. (Р) Выразите погрешность расчета сопротивления шины прямоугольного сечения размером $2d \times h$ ($d \ll h$) при допущении резко выраженного поверхностного эффекта, принимая полученное при решении упр. 3, § 30.1 выражение для расчета Z как точное.

15. (Р) На поверхности длинного прямолинейного провода задана касательная составляющая напряженности E_t электрического поля. Запишите выражение, связывающее мощность потерь в проводе с величиной E_t в условиях резко выраженного поверхностного эффекта.

16. (Р) Найдите погрешность расчета активного сопротивления стального провода радиусом $R = 0{,}5$ см по формуле $r = \dfrac{l}{u}\sqrt{\dfrac{\omega\mu}{2\gamma}}$, справедливой при резко выраженном поверхностном эффекте, если вещество провода характеризуется значениями $\mu = 40\,\mu_0$, $\gamma = 6 \cdot 10^6$ См/м. Частота тока провода $f = 50$ Гц ($u = 2\pi R$).

17. (Р) Радиус медного провода равен 0,5 см. Каковы радиусы алюминиевого ($\gamma = 3{,}5 \cdot 10^7$ См/м) и стального ($\mu = 50\mu_0$, $\gamma = 10^7$ См/м) проводов той же длины, имеющих при частоте тока $f = 50$ Гц такое же активное сопротивление, что и медный провод?

18. (Р) Каким должен быть радиус стального провода ($\gamma_с = 10^7$ См/м, $\mu_с = 50\,\mu_0$), чтобы при частоте тока $f = 50$ Гц отношение $r_{\sim}/r_{=}$ было таким же, как и для медного провода радиусом $R = 4$ см ($\gamma_м = 5{,}7 \cdot 10^7$ См/м).

19. (Р) Стальная цилиндрическая сердцевина провода радиусом 5 мм покрыта алюминиевой оболочкой толщиной $\Delta = 2$ мм. При каких частотах активное сопротивление такого провода практически не зависит от свойств вещества сердцевины ($\gamma_{ал} = 3{,}5 \cdot 10^7$ См/м)?

30.3. Неравномерное распределение переменного магнитного потока и электрического тока

ВОПРОСЫ

1. Усилится ли неравномерность распределения магнитного потока в плоском листе, если возрастет *а*) магнитная проницаемость материала листа, *б*) удельная проводимость материала листа, *в*) частота изменения магнитного потока?

2. Одинакова ли фаза магнитной индукции в точках плоского листа, имеющих различные координаты z (рис. В30.7)?

3. Почему при высоких частотах изменения магнитного потока толщину листов следует выбирать меньшей?

4. Почему при сборке сердечников из листовой электротехнической стали в образующихся пакетах отдельные листы изолируют один от другого, например покрывают непроводящим лаком? Будет ли достигаться требуемый эффект, если между листами пакетов проложить электропроводные, но немагнитные слои вещества?

5. Как следует расположить плоский проводящий лист относительно линий напряженности внешнего однородного магнитного поля, чтобы нагреть его до заданной температуры за наименьшее время?

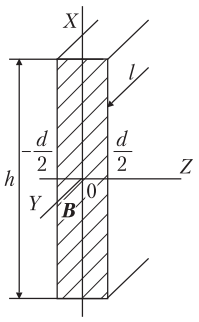

Рис. В30.7

6. (О) Путь интегрирования при вычислении интеграла $\oint_l \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = i$ выбран так, что он охватывает линии как стороннего тока, распределение в пространстве которого известно, так и вихревого тока. Какой ток следует принимать во внимание, записывая правую часть интеграла: сторонний, вихревой либо и тот и другой?

7. (О) На тороидальный ферромагнитный сердечник круглого сечения намотано w витков. Можно ли найти напряженность магнитного поля на осевой линии внутри сердечника, пользуясь формулой $H = iw/2\pi r$, где r — радиус осевой линии, если ток i *а*) переменный $i = I_m \sin \omega t$, *б*) постоянный $i = I$? В каких плоскостях расположены контуры, по которым замыкаются линии вихревого тока?

8. Может ли плотность переменного тока, протекающего по прямолинейному цилиндрическому проводу круглого сечения *а*) иметь в один и тот же момент времени в различных точках сечения различные направления, *б*) обращаться в нуль одновременно во всех точках сечения, *в*) обращаться в нуль одновременно в нескольких точках сечения?

9. Какие условия должны быть выполнены, чтобы электромагнитную волну, проникающую в цилиндрический провод круглого сечения можно было бы рассматривать как плоскую?

10. В некоторый момент времени фаза плотности тока в точке на поверхности провода равна ψ_i, а в близкой к поверхности точке внутри провода — $\psi_i + \Delta\psi_i$. Каков знак $\Delta\psi_i$? В какой из этих точек ток отстает по фазе?

11. Начальная фаза напряженности магнитного поля на поверхности провода равна $\psi_н$. Чему равна начальная фаза тока провода?

УПРАЖНЕНИЯ

1. (Р) Во сколько раз изменится мощность потерь в сердечнике трансформатора, если листы толщиной $d_1 = 0{,}2$ мм, из которых он собран, заменить листами толщиной $d_2 = 0{,}5$ мм при условии сохранения той же средней магнитной индукции. Магнитная проницаемость вещества листов $\mu = 1000\,\mu_0$, удельная электрическая проводимость $\gamma = 10^7$ См/м, частота магнитного потока *а*) $f = 50$ Гц, *б*) $f = 400$ Гц. Явление гистерезиса не учитывайте.

2. Магнитная индукция на сторонах листа (см. рис. В30.7) при $z_1 = -d/2$ и $z_2 = +d/2$ равна $\dot{B}_1 = \dot{B}_{1y}$ и $\dot{B}_2 = \dot{B}_{2y}$ соответственно. Найдите плотность тока $J(z)$, а также среднее значение магнитной индукции по сечению листа ($h \gg d$, $l \gg d$).

3. (Р) При какой толщине d листов сердечника из пермаллоя, магнитная проницаемость и удельная электрическая проводимость которого равны соответственно $\mu = 2000\mu_0$, $\gamma = 0{,}62\cdot10^7$ См/м, разность наибольшего и наименьшего значений индукции в листе отличается не более чем на 10 % от среднего. Примите частоту изменения поля в листе *а*) 50 Гц, *б*) 2000 Гц.

4. (Р) Радиус сечения провода $R = 0{,}5$ см, магнитная проницаемость материала провода $\mu = 2000\mu_0$, его удельная электрическая проводимость $\gamma = 3\cdot10^6$ См/м. Какой ток частоты 50 Гц можно пропустить по проводу при допустимой максимальной плотности тока $J_{\text{доп}} = 10^7$ А/м^2?

5. (Р) Прямолинейный бесконечно длинный медный провод радиусом $R = 0{,}5$ см помещен в однородное электромагнитное поле, вектор напряженности $\boldsymbol{H}$ которого направлен вдоль провода. Напряженность поля на его поверхности $H_e = 3\cdot10^3\times$ $\times\sin 100\pi t$ А/м. Рассчитайте вихревой ток в проводе на единицу его длины.

30.4. Эффект близости. Электромагнитное экранирование

ВОПРОСЫ

1. По проводу течет переменный ток. Изменится ли распределение плотности тока по сечению провода, если параллельно ему расположить другой провод, стороннего тока в котором нет?

2. Проявляется ли эффект близости в проводах, по которым течет постоянный ток?

3. Зависит ли распределение тока по сечению двух проводов от направления протекающих по ним токов?

4. (О) Обладает ли экранирующим действием проводящая труба конечной длины, охватывающая *а*) оба провода двухпроводной линии, *б*) один из проводов двухпроводной линии, *в*) три провода трехфазной линии, сумма токов которых равна нулю?

5. (О) Для экранирования электростатических полей находят применение сетчатые проводящие экраны. При каких условиях они экранируют переменное электромагнитное поле?

6. (О) Электромагнитное поле плоского токового кольца экранируют охватывающим его медным экраном сферической формы, составленным из двух полусфер так, что между ними образуется небольшая воздушная щель. В какой плоскости целесообразно ориентировать щель для достижения наибольшего экранирующего эффекта: в плоскости кольца или в перпендикулярной ему плоскости?

Ответы на вопросы, решения упражнений и задач

23.1. Уравнения электромагнитного поля в дифференциальной форме

ВОПРОСЫ

1. Способ получения напряженности электрического поля с помощью интегрального соотношения $\oint_s \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{s} = \frac{q}{\varepsilon}$ заключается в нахождении такой поверхности s, в любой точке которой вектор $\boldsymbol{E}$ сохраняет постоянное по модулю значение и направлен к ней под одним и тем же углом α. Если такая поверхность существует и она найдена, то величины $\boldsymbol{E}$ и $\cos\alpha$ можно вынести из-под знака интеграла и найти искомую напряженность поля как $E = \frac{q}{\varepsilon s \cos\alpha}$.

Такую поверхность можем определить, если поле обладает одним из типов симметрии: сферической, цилиндрической либо плоской. При сферической симметрии поля поверхность s суть сфера, и в этом случае имеем $s = 4\pi r^2$, $\cos\alpha = 1$.

Электрическое поле весьма длинного провода круглого сечения характеризуется цилиндрической симметрией, так что поверхностью s является такая замкнутая цилиндрическая поверхность, на части которой (боковой) имеем $E = \text{const} \neq 0$, а на другой ее части (торцевой) — $\cos\alpha = 0$.

Способ расчета напряженности $\boldsymbol{H}$ магнитного поля на основе выражения $\oint_l \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = i$ аналогичен рассмотренному выше: при наличии круговой симметрии поля выбираем такой круговой контур интегрирования, на котором имеем $H = \text{const}$ и в точках которого угол между векторами $\boldsymbol{H}$ и $d\boldsymbol{l}$ имеет постоянное значение.

4. Входящий в правую часть уравнения закона электромагнитной индукции магнитный поток следует понимать как результирующий, определяемый как сумма внешнего (стороннего) потока и магнитного потока, создаваемого индуцируемым электрическим током.

5. При движении проводящего тела в магнитном поле в нем возникает ЭДС индукции. Если, например, в неизменяющемся магнитном поле постоянных магнитов вращать рамку из провода, то в ней возникает ЭДС.

9. Под индукцией $\boldsymbol{B}$, входящей в правую часть второго уравнения Максвелла, следует понимать результирующую индукцию, обусловленную действием стороннего и индуцированного полей: $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_{\text{стор}} + \boldsymbol{B}_{\text{инд}}$. Именно изменяющееся во времени результирующее поле с индукцией $\boldsymbol{B}$ приводит в соответствии со вторым уравнением Максвелла к появлению электрического поля и электрического тока. Составляющая $\boldsymbol{B}_{\text{инд}}$ поля возникает вследствие протекания индуцированного тока. Индуцированное электрическое поле приводит к появлению электрических токов. В идеальном диэлектрике протекают токи электрического смещения

и переноса, магнитное поле которых совместно со сторонним полем образуют результирующее поле, индукция которого входит в правую часть второго уравнения Максвелла. В проводниках источниками индуцированного поля являются токи смещения и проводимости.

В ряде случаев индуцированным полем можно пренебречь и не принимать во внимание составляющую $-\dfrac{\partial \boldsymbol{B}_{\text{инд}}}{\partial t}$, входящую в правую часть второго уравнения Максвелла. Такое допущение существенно упрощает решение задачи анализа электромагнитного поля. Оно оправданно, если $\boldsymbol{B}_{\text{инд}} \ll \boldsymbol{B}_{\text{стор}}$.

10. В силу соотношений $\partial E_x/\partial y = \partial E_x/\partial z = 0$ имеем rot $\boldsymbol{E} = 0$ и, следовательно, такое поле — безвихревое.

16. Поле вектора $\boldsymbol{D}$ соленоидальное при div $\boldsymbol{D} = 0$, т. е. при отсутствии в области свободных зарядов. Если среда однородна, то ε div $\boldsymbol{E} = 0$ и, следовательно, поле вектора $\boldsymbol{E}$ также соленоидальное. В неоднородной среде имеем div $\boldsymbol{D}$ = div $\varepsilon\boldsymbol{E}$ = = ε div $\boldsymbol{E}$ + $\boldsymbol{E}$ grad $\varepsilon = 0$ и div $\boldsymbol{E} = -\dfrac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{E}$ grad ε, откуда следует, что в общем случае div $\boldsymbol{E} \neq 0$, т. е. поле вектора $\boldsymbol{E}$ не является соленоидальным.

18. Выражая величину div $\boldsymbol{H}$ из соотношения div $\boldsymbol{B}$ = div $\mu\boldsymbol{H}$ = μ div $\boldsymbol{H}$ + (grad μ) $\boldsymbol{H} = 0$: div $\boldsymbol{H} = -(1/\mu)$ (grad μ) $\boldsymbol{H}$, приходим к заключению, что в однородной в магнитном отношении среде выражение div $\boldsymbol{H} = 0$ справедливо, тогда как в неоднородной среде, когда grad $\mu \neq 0$, оно неверно.

19. Напряженность магнитного поля не является функцией координат, так как при заданных условиях ($J = 0$, $H = H_x$) из уравнения rot $\boldsymbol{H} = 0$ получаем: $\partial H_x/\partial y = 0$, $\partial H_x/\partial z = 0$. Учитывая условие div $\boldsymbol{H} = \partial H_x/\partial x = 0$, приходим к заключению, что поле является однородным и H = const.

При $J \neq 0$ имеем: $\partial H_x/\partial y = -J_z$, $\partial H_x/\partial z = J_y$ и так как div $\boldsymbol{H} = \partial H_x/\partial x = 0$, то имеем $H = H(y, z)$.

20. Выражения div div $\boldsymbol{A}$, grad rot $\boldsymbol{A}$, grad grad V, rot div $\boldsymbol{A}$ смысла не имеют, так как функция div $\boldsymbol{A}$ скалярная, операции div и rot над которой выполнены быть не могут, а функции rot $\boldsymbol{A}$, grad V — векторные, над которыми нельзя выполнить операцию градиента.

Тождественно равны нулю выражения rot grad V и div rot $\boldsymbol{A}$.

21. Эти понятия теряют смысл в точках, где объемная плотность тока либо заряда обращается в бесконечность. Иногда принимают допущение о том, что ток течет по проводу бесконечно малого сечения либо по бесконечно тонкому листу. В ряде случаев целесообразно рассматривать электрические заряды как сосредоточенные в бесконечно малых объемах, распределенные вдоль бесконечно тонких проводов либо распределенные на бесконечно тонких листах. Во всех этих случаях источник размещен в бесконечно малом объеме, поэтому его объемная плотность становится бесконечной и понятия rot и div в таких точках не определены.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Искомая плотность тока определяется выражением $\boldsymbol{J} = \text{rot}\,\boldsymbol{H}$, в котором для вычисления величины rot $\boldsymbol{H}$ следует использовать подходящую систему координат: в варианте *г* имеем в прямоугольной системе координат $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{k}\,(-aH_0\,e^{-ax})$; в варианте *ж* имеем в цилиндрической системе координат $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{k}\,\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\,(rH_\alpha) = 0$.

2. Интегрируя уравнение $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rH_\alpha) = J_z$, находим $H_\alpha = \dfrac{1}{r}\int\limits_0^r rJ_z\,dr$. Например, при $J_z = J_0\,e^{ar}$ (вариант *е*) имеем $H_\alpha = \dfrac{J_0}{a}\,e^{ar} + \dfrac{J_0}{a^2 r}\,(1 - e^{ar})$.

3. Записывая выражение rot $\mu\boldsymbol{H}$ в прямоугольной системе координат:

$$\text{rot}\,\mu\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(\mu H)_z - \frac{\partial}{\partial z}(\mu H)_y\right] + \boldsymbol{j}\left[\frac{\partial}{\partial z}(\mu H)_x - \frac{\partial}{\partial x}(\mu H)_z\right] +$$

$$+\boldsymbol{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\mu H)_y - \frac{\partial}{\partial y}(\mu H)_x\right] = \mu\,\text{rot}\,\boldsymbol{H} + \boldsymbol{i}\left[\frac{\partial\mu}{\partial y}H_z - \frac{\partial\mu}{\partial z}H_y\right] +$$

$$+\boldsymbol{j}\left[\frac{\partial\mu}{\partial z}H_x - \frac{\partial\mu}{\partial x}H_z\right] + \boldsymbol{k}\left[\frac{\partial\mu}{\partial x}H_y - \frac{\partial\mu}{\partial y}H_x\right] = \mu\,\text{rot}\,\boldsymbol{H} + (\text{grad}\,\mu)\boldsymbol{H},$$

получаем: $f_1 = \mu(x, y, z)$, $\boldsymbol{f}_2 = (\text{grad}\,\mu)\boldsymbol{H}$.

5. Принимая во внимание тождество rot grad $V \equiv 0$, можем записать соотношение $\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{H}_2 + \text{grad}\,V$, где $V = V(x, y, z)$ — некоторая скалярная функция.

7. Вычислив функцию rot $\boldsymbol{E}$, определяем условия, при которых rot $\boldsymbol{E} \neq 0$ и, следовательно, электрическое поле является вихревым. Для варианта *ж*, в частности, имеем $\text{rot}\,\boldsymbol{E} = \boldsymbol{i}\left(-\partial E_y/\partial z\right) = -\boldsymbol{i}E_m c\cos cz \neq 0$, и, следовательно, поле вектора $\boldsymbol{E}$ — вихревое.

8. Поместим начало прямоугольной системы координат в середине пластины. При допущении $\boldsymbol{B}_{\text{инд}} \ll \boldsymbol{B}_m$ второе уравнение Максвелла принимает вид $\dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial z} = -B_m\,\omega\cos\omega t$. С учетом условий задачи имеем $\dfrac{\partial E_x}{\partial z} = 0$ (пластина бесконечно длинная, поле не зависит от координаты z и $J_y \ll J_z$ ($t < d$), так что плотность тока $J_z = B_m\,\omega\,\gamma\,x\cos\omega t$ изменяется в направлении поперек пластины по линейному закону. Амплитудное значение тока $i = h\int\limits_0^{0{,}5d} J(x)\,dx = \dfrac{\omega\gamma h d^2}{4}\,B_m\cos\omega t$ при заданных численных значениях равно 0,39 А.

9. Принимая в цилиндрической системе координат $B = B_z$, из второго уравнения Максвелла $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rE_\alpha) - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial E_r}{\partial\alpha} = -\dfrac{\partial B_z}{\partial t}$, с учетом независимости поля от угловой координаты получаем $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\,(rE_\alpha) = -\dfrac{\partial B}{\partial t}$, откуда находим плотность тока $J(r) = \gamma E(r) =$ $= -0{,}5\,\omega\,\gamma\,r B_m\cos\omega t = -\,1{,}57\cdot 10^5\,r\cos 314\,t$ А/м^2.

10. Для нахождения плотности заряда используем соотношение $\rho = \varepsilon \operatorname{div} \boldsymbol{E}$, записывая выражение $\operatorname{div} \boldsymbol{E}$ в подходящей системе координат. Например, для варианта *б* получаем $\rho = \varepsilon \operatorname{div} \boldsymbol{j}\, e^{\alpha r} = 0$.

12. При совпадении осей прямоугольной системы координат с главными осями анизотропии имеем

$$(\varepsilon) = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix}$$

и $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{i}\varepsilon_{xx}E_x + \boldsymbol{j}\varepsilon_{yy}E_y + \boldsymbol{k}\varepsilon_{zz}E_z$, так что $\operatorname{div} \boldsymbol{D} = \dfrac{\partial}{\partial x}(\varepsilon_{xx}E_x) + \dfrac{\partial}{\partial y}(\varepsilon_{yy}E_y) + \dfrac{\partial}{\partial z}(\varepsilon_{zz}E_z)$.

При несовпадении осей координат с главными осями анизотропии имеем

$$(\varepsilon) = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix},\ \boldsymbol{D} = \boldsymbol{i}(\varepsilon_{xx}E_x + \varepsilon_{xy}E_y + \varepsilon_{xz}E_z) + \boldsymbol{j}(\varepsilon_{yx}E_x + \varepsilon_{yy}E_y + \varepsilon_{yz}E_z) +$$

$$+ \boldsymbol{k}(\varepsilon_{zx}E_x + \varepsilon_{zy}E_y + \varepsilon_{zz}E_z) = \boldsymbol{i}D_x + \boldsymbol{j}D_y + \boldsymbol{k}D_z,\ \operatorname{div} \boldsymbol{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}.$$

14. $\rho = \operatorname{div} \varepsilon \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \dfrac{\partial E_x}{\partial x} = \varepsilon_0 a E_0$.

15. Записывая выражение $\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon_0$ в цилиндрической системе координат и интегрируя его, находим $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rE_r) = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho$, $E_r(r) = \dfrac{1}{\varepsilon_0 r}\int r\rho(r)dr + C$.

16. $-\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{i}\left(\dfrac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} - \dfrac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial z}\right) +$

$$+ \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 H_x}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 H_z}{\partial y \partial z}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 H_x}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 H_y}{\partial z \partial y}\right).$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot} \boldsymbol{A} \equiv 0,\ \nabla U = \boldsymbol{i}\frac{\partial U}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial U}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial U}{\partial z},\ \nabla(\nabla U) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2},$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (\boldsymbol{i}E_x + \boldsymbol{j}E_y + \boldsymbol{k}E_z) = \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) +$$

$$+ \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right).$$

17. Магнитная индукция может выражаться формулой $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(x, y, z)$, если $\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$. Для варианта *в*, например, имеем $\operatorname{div} \boldsymbol{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = a - c$, так что магнитная индукция может выражаться формулой $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{i}ax - \boldsymbol{k}cz$ при $a = c$.

18. Из выражений $\operatorname{div} \delta = 0$, $\delta = \gamma \boldsymbol{E}$ следует: $\operatorname{div} \gamma \boldsymbol{E} = \gamma \operatorname{div} \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E} \operatorname{grad} \gamma = 0$, откуда получаем $\operatorname{div} \boldsymbol{E} = -\frac{\boldsymbol{E} \operatorname{grad} \gamma}{\gamma}$. В однородной среде выполняется соотношение $\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0$.

23.2. Система уравнений электромагнитного поля

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Уравнение $\operatorname{div} \delta = 0$ вытекает из первого уравнения Максвелла $\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \delta$ в силу тождества $\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \equiv 0$. Поэтому оно не входит в систему уравнений электромагнитного поля.

В силу этого же тождества из второго уравнения Максвелла $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ следует равенство $\operatorname{div} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$, означающее неизменность во времени величины $\operatorname{div} \boldsymbol{B}$. Хотя уравнение $\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$ и следует из второго уравнения Максвелла, однако его нельзя исключить из системы уравнений электромагнитного поля, так как при рассмотрении не изменяющихся во времени полей, когда $\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0$, из второго уравнения Максвелла, принимающего в этом случае вид $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0$, уже не вытекает уравнения $\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$, показывающего, что магнитных зарядов не существует.

3. Так как вектор плотности тока удовлетворяет уравнению $\operatorname{div} \delta = 0$, то в силу тождества $\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0$ его можно представить в виде $\delta = \operatorname{rot} \boldsymbol{F}$ и рассматривать как источник некоторого векторного поля $\boldsymbol{F}$, не обязательно совпадающего с полем вектора напряженности магнитного поля, также удовлетворяющего уравнению $\delta = \operatorname{rot} \boldsymbol{H}$.

4. В систему уравнений электромагнитного поля входит 16 скалярных переменных: 5 векторных, а именно $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}$, δ, и скалярная — плотность заряда. В то же время число скалярных уравнений составляет 17, так как к 5 векторным уравнениям, образующим 15 скалярных, добавляются 2 скалярных: $\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$ и $\operatorname{div} \boldsymbol{D} = \rho$.

Независимыми из них являются 16 уравнений, так как уравнение $\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$ в общем случае переменного электромагнитного поля вытекает из второго уравнения Максвелла.

5. Из уравнения rot $\boldsymbol{H} = \delta$ следует выражение div $\delta = 0$, которое в силу соотношения $\delta = \gamma \boldsymbol{E} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{J}_{\text{пер}}$ можно записать в виде $-\text{div}\,\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \text{div}\,(\gamma \boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}_{\text{пер}})$ и, учитывая уравнение div $\boldsymbol{D} = \rho$, получить выражение $-\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = \text{div}\,(\gamma \boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}_{\text{пер}})$.

Если, выбрав объем V, проинтегрировать по нему функции обеих частей найденного соотношения, то, принимая во внимание, что $\int\limits_V \rho\, dV = q$ и $\int\limits_V \text{div}(\gamma \boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}_{\text{пер}})\, dV = \oint\limits_s (\gamma \boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}_{\text{пер}})\, d\boldsymbol{s}$, можно записать выражение $-\dfrac{dq}{dt} = \oint\limits_s (\gamma \boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}_{\text{пер}})\, d\boldsymbol{s}$, показывающее, что заряд в объеме может уменьшаться только за счет протекания тока из объема V сквозь ограничивающую его поверхность.

6. При $\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = 0$ и $\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0$ получаем rot $\boldsymbol{H} = \delta$, rot $\boldsymbol{E} = 0$, div $\boldsymbol{B} = 0$, div $\boldsymbol{D} = \rho$, $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$, $\delta = \gamma \boldsymbol{E} + \rho \boldsymbol{v}$.

Если функция $\delta(x, y, z)$ задана, то эти уравнения можно разделить на две группы, переменные в которых не взаимосвязаны: rot $\boldsymbol{H} = \delta$, div $\boldsymbol{B} = 0$, $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ и rot $\boldsymbol{E} = 0$, div $\boldsymbol{D} = \rho$, $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$. Первая группа уравнений описывает не изменяющиеся во времени магнитные поля, вторая — не изменяющиеся во времени электрические поля.

7. Для исключения одной из переменных из системы уравнений электромагнитного поля следует применить операцию rot к обеим частям одного из уравнений Максвелла, подставляя далее в полученное выражение другое уравнение Максвелла. Рассмотрим решение варианта 1) упражнения.

Так как rot $\dfrac{1}{\mu}$ rot $\boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\,\delta$, то получаем: rot $\dfrac{1}{\mu}$ rot $\boldsymbol{E} = -\gamma \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$. Аналогично находим rot $\dfrac{1}{\gamma}$ rot $\boldsymbol{H} =$ rot $\boldsymbol{E}$ и rot $\dfrac{1}{\gamma}$ rot $\boldsymbol{H} = -\mu \dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$.

Используя соотношение rot_i rot $\boldsymbol{E} = \text{grad}_i$ div $\boldsymbol{E} - \text{div grad}\, E_i$, получаем при $\mu = \text{const}$, $\gamma = \text{const}$ в прямоугольной системе координат

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial z^2} = \mu\gamma \frac{\partial E_i}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 H_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_i}{\partial z^2} = \mu\gamma \frac{\partial H_i}{\partial t}, \quad i = x, y, z.$$

Как видно из уравнений, в прямоугольной системе координат уравнения относительно составляющих E_x, E_y, E_z, как и для составляющих H_x, H_y, H_z, в однородной среде образуют систему несвязанных уравнений. Однако можно убедиться в том, что в цилиндрической системе координат уравнения относительно величин E_r, E_α (как и для величин H_r, H_α) взаимосвязаны.

23.3. Граничные условия на поверхностях раздела сред с различными свойствами

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. В силу условия $E_{t1} = E_{t2}$ можем записать равенство $\oint\limits_{l_1} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = \oint\limits_{l_2} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l}$, где контуры l_1, l_2 интегрирования, имеющие одинаковую форму, взяты на обеих сторонах поверхности раздела в различных средах. Учитывая, что форма контуров может быть принята произвольной (в частности, они могут быть стянуты в точку), можем, используя закон электромагнитной индукции $\oint\limits_{l} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = -\dfrac{d\Phi}{dt}$, записать условие $B_{n1} = B_{n2}$. Таким образом, граничные условия $E_{t1} = E_{t2}$ и $B_{n1} = B_{n2}$ не являются независимыми.

Аналогичное рассуждение позволяет прийти к заключению, что из условия $H_{t1} = H_{t2}$ для переменного электромагнитного поля вытекает равенство $D_{n1} = D_{n2}$, так что эти соотношения также не являются независимыми.

2. В случае *а*) она заключается в возникновении тонкого слоя связанных электрических зарядов на поверхности раздела сред вследствие их различной поляризованности.

В случае *б*)различная намагниченность $\boldsymbol{M}$ тел ведет вследствие непрерывности нормальной к поверхности раздела сред составляющей магнитной индукции к скачку нормальной составляющей напряженности магнитного поля, так как $H_n = \dfrac{1}{\mu_0}(B_n - M_n)$.

4. Граничные условия непрерывности составляющих векторов поля на поверхности раздела с различными свойствами сохраняют свой вид и при анизотропных средах. Однако условия, выражающие скачки составляющих векторов поля, изменяются.

Если тензоры (ε_1), (ε_2) записать в виде

$$(\varepsilon_1) = \begin{vmatrix} \varepsilon_{nn1} & \varepsilon_{nt1} \\ \varepsilon_{tn1} & \varepsilon_{tt1} \end{vmatrix}, \quad (\varepsilon_2) = \begin{vmatrix} \varepsilon_{nn2} & \varepsilon_{nt2} \\ \varepsilon_{tn2} & \varepsilon_{tt2} \end{vmatrix},$$

то из условия $D_{n1} = D_{n2}$ следует выражение $\varepsilon_{nn1} E_{n1} = \varepsilon_{nn2} E_{n2} - (\varepsilon_{nt1} - \varepsilon_{nt2}) E_{t1}$, которое в частном случае, когда $\varepsilon_{nt1} = \varepsilon_{nt2}$, переходит в соотношение $\dfrac{E_{n1}}{E_{n2}} = \dfrac{\varepsilon_{nn2}}{\varepsilon_{nn1}}$.

6. При наличии на поверхности раздела сред электрического заряда выражение $-D_{n1}\Delta s_1 + D_{n2}\Delta s_2 = 0$ (см. § 24.6) принимает вид $-D_{n1}\Delta s_1 + D_{n2}\Delta s_2 = \Delta q$, где Δq — заряд, охватываемый замкнутой поверхностью цилиндра. Учитывая, что $\Delta s_1 = \Delta s_2 = \Delta s$ и $\dfrac{\Delta q}{\Delta s} \approx \sigma$, из последнего выражения получаем условие $-D_{n1} + D_{n2} = \sigma$, связывающее нормальные к поверхности раздела сред составляющие вектора смещения при наличии на ней поверхностного заряда плотностью σ.

7. Приближенное выражение $H_{t1}ab - H_{t2}cd \approx \oint\limits_{abcd} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l}$ (рис. Р23.1) следует приравнять полному току i, охваченному контуром интегрирования и протекающему в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка. Тогда $H_{t1} - H_{t2} = \dfrac{i}{ab} = j$, и, следовательно, касательная составляющая H_t напряженности магнитного поля претерпевает разрыв на поверхности с размещенным на ней слоем тока. При $\mu_2 = \infty$ имеем $H_{t2} = 0$.

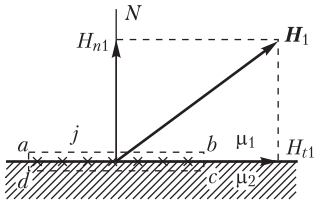

Рис. Р23.1

8. В точках на границе двух сред с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 условие $B_{n1} = B_{n2}$ можно записать в виде $\mu_0 (H_{n1} + M_{n1}) = \mu_0 (H_{n2} + M_{n2})$, откуда вытекает соотношение $(H_{n1} - H_{n2}) = (-M_{n1} + M_{n2})$. Намагниченность воздуха равна нулю ($M_{n1} = 0$), так что получаем: $(H_{n1} - H_{n2}) = M_{n2}$, или $\boldsymbol{n}_2 (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) = \boldsymbol{n}_2 \boldsymbol{M}$.

11. Положение точек поверхности цилиндра будем определять значением угла α (рис. Р23.2). В точке A имеем $E_{ni} = E_i \sin\alpha = 100 \sin\alpha$, $E_{ti} = E\cos\alpha = 100\cos\alpha$. В силу граничных условий на поверхности цилиндра в воздухе получаем $E_{ne} = \dfrac{\varepsilon_i}{\varepsilon_e} E_{ni} = 200 \sin\alpha$, $E_{te} = E_{ti} = 100 \cos\alpha$, $D_{ne} = 200\, \varepsilon_0 \sin\alpha$, $D_{\tau e} = 100\, \varepsilon_0 \cos\alpha$.

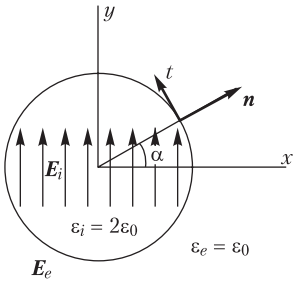

Рис. Р23.2

В точках поверхности цилиндра в воздухе напряженность поля $E_e = \sqrt{E_{ne}^2 + E_{\tau e}^2} = 10^2 \sqrt{4\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}$ не остается постоянной, и, следовательно, оно не является однородным вблизи цилиндра.

12. Так как $H_{t1} = H_{y1}$, $H_{n1} = H_{x1}$, то $H_{y2} = H_{y1}$, $B_{x2} = B_{x1} = \mu_0 H_{x1}$. При совпадении главных осей анизотропии с осями x, y имеем

$$(\mu) = \begin{vmatrix} \mu_x & 0 \\ 0 & \mu_y \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} B_{x2} \\ B_{y2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu_x & 0 \\ 0 & \mu_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} H_{x2} \\ H_{y2} \end{vmatrix},$$

откуда $B_{x2} = \mu_x H_{x2}$, $B_{y2} = \mu_y H_{y2}$, $H_{x2} = \dfrac{1}{\mu_x} B_{x2} = \dfrac{\mu_0}{\mu_x} H_{x1}$, $B_{y2} = \mu_y H_{y1}$, $\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{i}\mu_0 H_{x1} +$ $+ \boldsymbol{j}\,\mu_0 H_{y1}$, так что $\boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{i}\,\mu_0 H_{x1} + \boldsymbol{j}\,\mu_y H_{y1}$, $\boldsymbol{H}_2 = \boldsymbol{i}\,\dfrac{\mu_0}{\mu_x}\,\mathrm{H}_{x1} + \boldsymbol{j} H_{y1}$.

При несовпадении главных осей анизотропии среды с осями x, y имеем

$$(\mu) = \begin{vmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} B_{x2} \\ B_{y2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} H_{x2} \\ H_{y2} \end{vmatrix},$$

откуда $B_{x2} = \mu_{xx} H_{x2} + \mu_{xy} H_{y2}$, $B_{y2} = \mu_{yx} H_{x2} + \mu_{xy} H_{y2}$. Отсюда находим

$$H_{x2} = \frac{1}{\mu_{xx}} B_{x2} - \frac{\mu_{xy}}{\mu_{xx}} H_{y2} = \frac{\mu_0}{\mu_{xx}} H_{x1} - \frac{\mu_{xy}}{\mu_{xx}} H_{y1},\ B_{y2} = \mu_{yx} \frac{\mu_0}{\mu_{xx}} H_{x1} + \left(\mu_{yy} - \frac{\mu_{xy}}{\mu_{xx}} \mu_{yx} \right) H_{y1},$$

$$\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{i}\, \mu_0 H_{x1} + \boldsymbol{j}\, \mu_0 H_{y1},\ \boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{i} \mu_0 H_{x1} + \boldsymbol{j} \left[\mu_{yx} \frac{\mu_0}{\mu_{xx}} H_{x1} + \left(\mu_{yy} - \frac{\mu_{xy}}{\mu_{xx}} \cdot \mu_{yx} \right) H_{y1} \right],$$

$$\boldsymbol{H}_2 = \boldsymbol{i} \left(\frac{\mu_0}{\mu_{xx}} H_{x1} - \frac{\mu_{xy}}{\mu_{xx}} H_{y1} \right) + \boldsymbol{j} H_{y1}.$$

24.1. Потенциал электростатического поля

ВОПРОСЫ

1. Условно принято, что напряженность поля направлена в сторону от положительно заряженных тел, и что потенциал убывает в направлении линий напряженности поля. Этим условиям соответствует соотношение $\boldsymbol{E} = -\text{grad}\, U$.

9. Если полный заряд проводов линии равен нулю, то потенциал в бесконечно удаленной точке можно принять равным нулю, так как в этом случае на большом удалении от проводов он пропорционален функции r^{-n}, где r — расстояние от проводов до точки определения потенциала, n — положительное число. Если же полный заряд проводов отличен от нуля, то равным нулю можно принять потенциал только на конечном расстоянии от проводов, так как в этом случае потенциал пропорционален функции $\ln r$, которая неограниченно возрастает при $r \to \infty$.

10. Если мысленно удалить проводящее тело, сохранив уже в однородной среде с проницаемостью ε на поверхности s тела заряд, распределенный так же, как он был распределен на поверхности проводящего тела, то поле как внутри s, так и вне ее сохранится тем же. Внутри s поля не будет, а вне ее оно полностью определится зарядом плотностью σ. Поэтому при расчете потенциала по приведенной формуле среду можно рассматривать как однородную.

11. Если интегрирование выполнять только по поверхности заряженного тела, то результат будет неверным. Интегрирование следует выполнить также и по поверхности незаряженного тела, для чего необходимо знать плотность σ наведенного на его поверхности заряда.

12. Если понимать под величиной ρ плотность свободного заряда, то нельзя, так как среда неоднородна. Для получения потенциала необходимо кроме свободного знать распределение и связанного электрического заряда.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

3. Поле вектора $\boldsymbol{E}$ является потенциальным, если он удовлетворяет уравнению $\text{rot}\, \boldsymbol{E} = 0$. Например, для варианта ∂ имеем $\text{rot}_x \boldsymbol{E} = \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z} = -b \neq 0$, и, следовательно, поле в этом случае не является потенциальным.

4. Потенциал связан с напряженностью электрического поля соотношениями $U = -\int E_x dx + f_1(y, z) + C = -\int E_y dy + f_2(x, z) + C = -\int E_z dz + f_3(x, y) + C$. Применяя их для решения варианта *д* условия, находим $U = -E_2 y + f_2(z) + C = -E_3 z + f_3(y) + C$, откуда $U(x, y, z) = -E_2 y - E_3 z + C$.

5. Составляющие E_1, E_2, E_3 напряженности поля должны удовлетворять условиям $\mathrm{rot}_x \boldsymbol{E} = \dfrac{\partial E_3}{\partial y} - \dfrac{\partial E_2}{\partial z} = 0$, $\mathrm{rot}_y \boldsymbol{E} = \dfrac{\partial E_1}{\partial z} - \dfrac{\partial E_3}{\partial x} = 0$, $\mathrm{rot}_z \boldsymbol{E} = \dfrac{\partial E_2}{\partial x} - \dfrac{\partial E_1}{\partial y} = 0$. Для варианта *в*, в частности, имеем $\dfrac{\partial E_3}{\partial y} = 0$, $\dfrac{\partial E_1}{\partial z} - \dfrac{\partial E_3}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial E_1}{\partial y} = 0$.

7. Используем формулу $U = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon} \dfrac{p\cos\varphi}{r^2}$, определяющую потенциал поля диполя при $r \gg d$. Поле зарядов, изображенных на рис. Р24.1, *а*, эквивалентно на больших расстояниях полю двух диполей $U_A = \dfrac{2p\cos\varphi}{4\pi\varepsilon r^2}$.

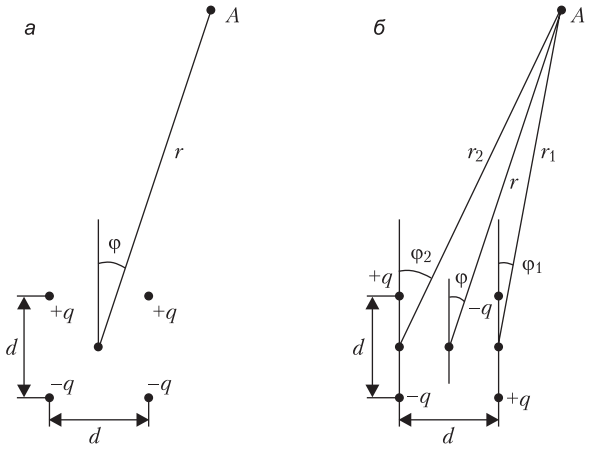

Рис. Р24.1

Потенциал поля зарядов, изображенных на рис. Р24.1, *б* и образующих квадруполь, равен

$$U_A = \frac{p}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{\cos\varphi_2}{r_2^2} - \frac{\cos\varphi_1}{r_1^2}\right) \cong \frac{p\cos\varphi}{4\pi\varepsilon r^5}(r_1^3 - r_2^3).$$

Учитывая, что $r_1 \cong r - \dfrac{d}{2}\sin\varphi$, $r_2 \cong r + \dfrac{d}{2}\sin\varphi$, находим $r_1^3 - r_2^3 \cong 3r^2 d \sin\varphi$, $U_A = \dfrac{3p\sin 2\varphi}{8\pi\varepsilon r^3}$, $E_r = \dfrac{9p\sin 2\varphi}{8\pi\varepsilon r^4}$, $E_\varphi = -\dfrac{3p\cos 2\varphi}{4\pi\varepsilon r^4}$.

Таким образом, характер изменения потенциала на больших расстояниях от двух диполей (пропорционально r^{-2} или r^{-3}) определяется их взаимным расположением.

8. Потенциал на оси z (рис. Р24.2) равен $U = \int_0^{2\pi} \frac{\tau R\, d\varphi}{4\pi\varepsilon\sqrt{z^2 + R^2}} = \frac{\tau R}{2\varepsilon\sqrt{z^2 + R^2}}$, а напряженность поля $E_r = 0$, $E_\varphi = 0$, $E_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\tau R z}{2\varepsilon (z^2 + R^2)^{3/2}}$.

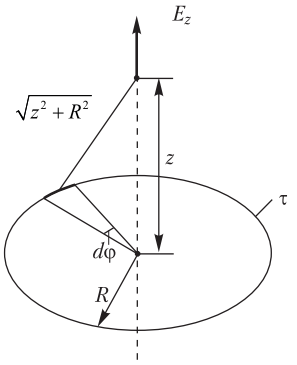

Рис. Р24.2

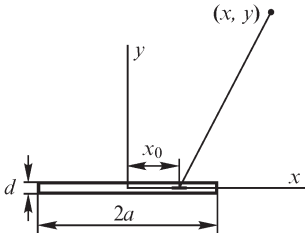

Рис. Р24.3

9. Пластину рассматриваем как совокупность бесконечно длинных полосок шириной dx_0 каждая, потенциал поля которых (рис. Р24.3) равен $dU = -\frac{\sigma\, dx_0}{2\pi\varepsilon} \times$ $\times \ln\sqrt{(x - x_0)^2 + y^2}$. Интегрируя это выражение в пределах изменения x_0 от $-a$ до $+a$, находим

$$U(x, y) = -\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon}\left\{ x \ln\frac{(x + a)^2 + y^2}{(x - a)^2 + y^2} + a\ln\{[(x - a)^2 + y^2][(x + a)^2 + y^2]\} - \right.$$

$$\left. - 4a + 2y\,\mathrm{arctg}\frac{2ay}{y^2 + x^2 - a^2} \right\}.$$

10. Обозначив в полярной системе координат координаты точки A, в которой определяем потенциал, как r, φ, а координаты n-й нити как $r_n = R$, $\alpha_n = (\pi/N) \times$ $\times (2n - 1)$ (рис. Р24.4), можем написать потенциал поля n-й заряженной нити в виде

$$U_n = -\frac{\tau_n}{4\pi\varepsilon}\ln[r^2 + R^2 - 2rR\cos(\varphi - \alpha_n)].$$

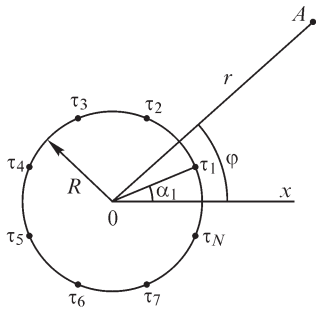

Рис. Р24.4

Пользуясь методом наложения, получаем в случае одноименных зарядов нитей

$$U = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon}\ln\prod^{N}[r^2 + R^2 - 2rR\cos(\varphi - \alpha_n)]$$

и при разноименных зарядах нитей

$$U = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon}\sum_{n=1}^{N}(-1)^n \ln[r^2 + R^2 - 2rR\cos(\varphi - \alpha_n)]$$

или

$$U = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon}\ln\frac{\prod\limits_{n=2,4,\ldots}[r^2 + R^2 - 2rR\cos(\varphi - \alpha_n)]}{\prod\limits_{n=1,3,\ldots}[r^2 + R^2 - 2rR\cos(\varphi - \alpha_n)]}.$$

Выражения для расчета напряженности поля имеют вид при одноименных зарядах

$$E_{r_n} = -\frac{\partial U_n}{\partial r} = \frac{\tau_n}{2\pi\varepsilon}\cdot\frac{r - R\cos(\varphi - \alpha_n)}{r^2 + R^2 - 2rR\cos(\varphi - \alpha_n)},$$

$$E_{\varphi_n} = -\frac{\partial U_n}{r\partial\varphi} = \frac{\tau_n}{2\pi\varepsilon}\cdot\frac{rR\sin(\varphi - \alpha_n)}{r^2 + R^2 - 2rR\cos(\varphi - \alpha_n)},$$

$$E_r = \frac{\tau_n}{2\pi\varepsilon}\sum_{n=1}^{N}\frac{r - R\cos(\varphi - \alpha_n)}{r^2 + R^2 - 2rR\cos(\varphi - \alpha_n)},\ E_\varphi = \frac{\tau_n}{2\pi\varepsilon}\sum_{n=1}^{N}\frac{rR\sin(\varphi - \alpha_n)}{r^2 + R^2 - 2rR\cos(\varphi - \alpha_n)}$$

и при разноименных зарядах нитей.

$$E_r = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\frac{r - R\cos(\varphi - \alpha_n)}{r^2 + R^2 - 2rR\cos(\varphi - \alpha_n)},$$

$$E_\varphi = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\frac{rR\sin(\varphi - \alpha_n)}{r^2 + R^2 - 2rR\cos(\varphi - \alpha_n)}.$$

11. Используя формулу $U = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon r}$ для потенциала поля точечного заряда, находим

$$U = \int_{-l/2}^{+l/2}\frac{\tau\,dz}{4\pi\varepsilon\sqrt{z^2 + r^2}} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon}\ln\frac{\sqrt{r^2 + (l/2)^2} + l/2}{\sqrt{r^2 + (l/2)^2} - l/2},$$

где r — расстояние от середины нити до точки расчета потенциала, z — координата, отсчитываемая от середины нити до отрезка dz (рис. Р24.5).

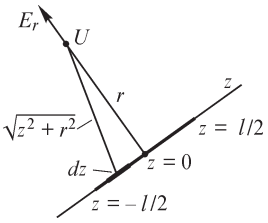

Рис. Р24.5

Составляющие напряженности поля равны

$$E_r = \frac{\tau\,l}{4\pi\varepsilon r\sqrt{r^2 + (l/2)^2}},\ E_\varphi = 0.$$

24.2. Уравнения Лапласа и Пуассона

ВОПРОСЫ

2. Имеют смысл выражения: div grad U, grad div grad U.

4. Для получения единственного решения уравнения Лапласа следует задать краевые условия для потенциала на поверхностях проводников и на поверхностях, ограничивающих расчетную область. Если они однородные ($U|_S = 0$),

то решением уравнения Лапласа является функция $U = 0$. В общем случае имеем $U(x, y, z) \neq 0$.

5. Такое поле описывается уравнением Лапласа, так как объемная плотность заряда на поверхности тела обращается в бесконечность и уравнение Пуассона в этих точках записано быть не может.

6. Потенциал — непрерывная функция, так как в противном случае имелись бы точки с неопределенной напряженностью электрического поля. Производные потенциала могут иметь разрывы, так как нормальная составляющая напряженности поля $E_n = -\dfrac{\partial U}{\partial n}$ изменяется скачком как на поверхности раздела сред с различными диэлектрическими свойствами, так и на заряженной поверхности в однородной среде.

7. Потенциал постоянен внутри поверхности и в общем случае изменяется вне ее.

10. Расчет электростатического поля упрощается, если подлежащее решению дифференциальное уравнение записано относительно скалярной функции (потенциала), а не векторной. В последнем случае его следует решать для каждой из проекций вектора напряженности поля на оси координат.

При решении задач электростатики часто заданы потенциалы тел, что дает возможность записать краевые условия на поверхностях тел в форме U = const, удобной при решении уравнения Лапласа относительно потенциала.

11. Функция $\dfrac{\partial U}{\partial n}$ связана с поверхностной плотностью заряда на поверхности проводящего тела соотношением $\sigma = -\varepsilon \dfrac{\partial U}{\partial n}$. Поэтому, если тело не заряжено, то можно записать условие $\varepsilon \oint\limits_s \dfrac{\partial U}{\partial n} ds = 0$, а при $q \neq 0$, когда тело заряжено, — условие $-\varepsilon \oint\limits_s \dfrac{\partial U}{\partial n} ds = q$.

12. При заданном распределении заряда на поверхностях проводников потенциал можно рассчитать, используя решение уравнения Пуассона $U = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon} \oint\limits_s \dfrac{\sigma ds}{r}$, где s — поверхность заряженных проводников. При заданных потенциалах проводников необходимо решать уравнение Лапласа, поэтому в первом случае получить решение проще.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

1. Примем указанное на рис. Р24.6 направление осей координат. Потенциал изменяется только вдоль координаты y, так что уравнение Лапласа принимает вид $\dfrac{d^2U}{dy^2} = 0$. После интегрирования находим $U(y) = C_1 y + C_2$. Посто-

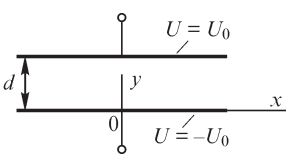

Рис. Р24.6

янные C_1, C_2 определяем из условий: $U = -U_0$ при $y = 0$, $U = U_0$ при $y = d$: $-U_0 = C_2$, $U_0 = C_1 d - U_0$.

Таким образом, $U(y) = d^{-1}\, 2U_0\, y - U_0$.

В пространстве между обкладками цилиндрического конденсатора потенциал удовлетворяет уравнению $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU}{dr}\right) = 0$, решение которого имеет вид $U(r) = C_1 \ln r + C_2$. Используя условия $U = -U_0$ при $r = R$ и $U = U_0$ при $r = R + d$, записываем уравнения $-U_0 = C_1 \ln R + C_2$, $U_0 = C_1 \ln (R + d) + C_2$, решая которые, находим постоянные C_1, C_2:

$$C_1 = 2U_0 \ln^{-1} \frac{R+d}{R}, \quad C_2 = -U_0 \frac{\ln(R+d) + \ln R}{\ln(R+d) - \ln R}.$$

Искомый потенциал

$$U(r) = \frac{2U_0}{\ln(R+d) - \ln R} \ln r - U_0 \frac{\ln(R+d) + \ln R}{\ln(R+d) - \ln R}.$$

2. Потенциал между электродами удовлетворяет уравнению Пуассона $\frac{d^2U}{dy^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, интегрирование которого приводит к выражению $U(y) = -\frac{\rho}{2\varepsilon} y^2 + C_1 y + C_2$. Используя краевые условия, получаем

$$C_2 = 0,\ C_1 = \frac{1}{d}\left(U_0 + \frac{\rho}{2\varepsilon_0} d^2\right),\ U(y) = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} y^2 + \frac{1}{d}\left(U_0 + \frac{\rho}{2\varepsilon_0} d^2\right) y.$$

3. Пространство между катодом и анодом разбиваем на две области: в первой из них, где $R_к \le r \le R_0$, имеем $\rho \ne 0$, во второй, где $R_0 \le r \le R_a$, имеем $\rho = 0$. В этих областях потенциал удовлетворяет уравнениям

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU_1}{dr}\right) = -\varepsilon_0^{-1}\rho, \quad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU_2}{dr}\right) = 0,$$

интегрирование которых приводит к выражениям

$$U_1(r) = -(4\varepsilon_0)^{-1}\rho r^2 + C_1 \ln r + C_2,\ U_2(r) = D_1 \ln r + D_2.$$

Для определения постоянных C_1, C_2, D_1, D_2 используем краевые условия $U_1 = 0$ при $r = R_к$, $U_2 = U_0$ при $r = R_a$, а также граничные условия $U_1 = U_2$ и $\frac{\partial U_1}{\partial r} = \frac{\partial U_2}{\partial r}$ при $r = R_0$:

$$-(4\varepsilon_0)^{-1}\rho + C_1 \ln R_к + C_2 = 0,\ D_1 \ln R_a + D_2 = U_0,$$

$$-(4\varepsilon_0)^{-1}\rho + C_1 \ln R_0 + C_2 = D_1 \ln R_0 + D_2,\ -(2\varepsilon_0)^{-1}\rho R_0 + C_1 = D_1.$$

5. В области 1, где $0 < x < d$, потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона $\frac{d^2U}{dx^2} = -\varepsilon_0^{-1}\rho$, а в области 2, где $d < x < 2d$, — уравнению Лапласа $\frac{d^2U}{dx^2} = 0$. При их интегрировании решение в каждой из областей содержит по две постоянные:

$$U_1(x) = f(x) + C_1 x + C_2,\ U_2(x) = C_3 x + C_4.$$

Учитывая, что при $x = 0$ потенциал $U_1(0) = 0$, получаем $C_2 = 0$. При определении постоянных C_1, C_3, C_4 начало координат для области 2 целесообразно принять на границе областей (рис. Р24.7), т. е. в точке 0_2, а для области 1 — в точке 0_1.

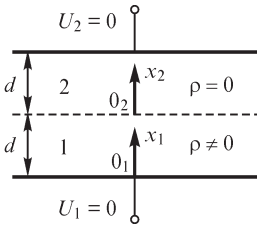

Рис. Р24.7

Уравнения, связывающие постоянные, записываем, используя условие непрерывности потенциала и его производной в точках границы областей при $x_1 = d$, $x_2 = 0$, а также краевое условие $U_2 = 0$ при $x_2 = d$: $C_3 d + C_4 = 0$, $f(d) + C_1 d = C_4$, $f'_{x=d} + C_1 = C_3$.

Решая их, находим:

$$C_1 = -0{,}5\, d^{-1}[f(d) + df'(d)],\ C_3 = 0{,}5\, d^{-1}[df'(d) - f(d)],\ C_4 = -C_3 d.$$

Для записи выражений $U_1(x)$ и $U_2(x)$ следует рассчитать функции

$$f'(x) = -\varepsilon_0^{-1}\int \rho(x)\,dx,\ f(x) = -\iint \rho(x)\,dx\,dx,$$

их значения при $x = d$, постоянные C_1, C_3, C_4. Например, при $\rho(x) = \rho_0 ax$ получаем

$$f'(x) = -(2\varepsilon_0)^{-1}\rho_0 ax^2,\ f(x) = -(6\varepsilon_0)^{-1}\rho_0 ax^3,$$
$$f'(d) = -(2\varepsilon_0)^{-1}\rho_0 ad^2,\ f(d) = -(6\varepsilon_0)^{-1}\rho_0 ad^3.$$

6. Плотность заряда можно рассчитать с помощью выражения $\rho = -2\varepsilon_0 \operatorname{div}\operatorname{grad} U$. Получаем, например, для варианта *в* $\rho = -4a\varepsilon_0$.

9. Так как на цилиндрической поверхности потенциал изменяется по закону $U = U_m \sin k\alpha$, то можно предположить, что во всем пространстве он может быть представлен в виде $U(r, \alpha) = U(r) \sin k\alpha$, т. е. он периодичен по углу α. Подставляя $U(r, \alpha)$ в уравнение Лапласа $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2}\right) = 0$, получаем уравнение относительно величины $U(r)$: $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU(r)}{dr}\right) - \frac{k^2}{r^2}U(r) = 0$, которое имеет решением функцию $U(r) = C_1 r^k + C_2 r^{-k}$, в чем можно убедиться его непосредственной подстановкой в уравнение.

На оси z ($r = 0$) потенциал имеет конечное значение, равное нулю, однако решение $U(r)$ при любом не равном нулю значении постоянной C_2 обращается в бесконечность, что означает, что $C_2 = 0$, и, таким образом, внутри цилиндрической поверхности радиусом R получаем $U_i(r, \alpha) = C_1 r^k \sin k\alpha$. Постоянную C_1 опреде-

ляем с помощью условия $U(R, \alpha) = U_m \sin k\alpha$: $C_1 = U_m R^{-k}$. Поэтому искомое решение при $r \le R$ записываем в виде $U_i(r, \alpha) = U_m \left(\frac{r}{R} \right)^k \sin k\alpha$.

При $r \to \infty$ получаем $U \to 0$, так как потенциал на поверхности $r = R$ в силу заданной зависимости $U(R, \alpha) = U_m \sin k\alpha$ является знакопеременной функцией. Поэтому во внешней области ($r \ge R$) решение следует записать в виде $U_1(r, \alpha) = C_2 r^{-k} \sin k\alpha$, так как только при $C_1 = 0$ имеем $U(r, \alpha) \to 0$ при $r \to \infty$. Постоянную C_2 определяем из условия $U(R, \alpha) = U_m \sin k\alpha = C_2 R^{-k} \sin k\alpha$: $C_2 = U_m R^k$. Таким образом, при $r > R$ получаем $U_e(r, \alpha) = U_m \left(\frac{R}{r} \right)^k \sin k\alpha$.

Для определения характера поля внутри цилиндрической поверхности $r \le R$ рассчитаем $E = \sqrt{E_r^2 + E_\alpha^2}$: $E_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{U_m}{R} k \left(\frac{r}{R} \right)^{k-1} \sin k\alpha$, $E_\alpha = -\frac{U_m}{R} k \left(\frac{r}{R} \right)^{k-1} \cos k\alpha$,

$$E = \frac{U_m}{R} \left(\frac{r}{R} \right)^{k-1} k \sqrt{\sin^2 k\alpha + \cos^2 k\alpha} = \frac{U_m}{R} \left(\frac{r}{R} \right)^{k-1} k.$$

При $k = 1$ получаем $E = \frac{U_m}{R}$ и, следовательно, приходим к выводу, что поле при $r < R$ однородно ($E_r / E_\alpha = \operatorname{tg} \alpha$).

10. В какой бы системе координат ни были записаны уравнения Лапласа или Пуассона, при их интегрировании появляются две подлежащие определению постоянные. Для нахождения постоянных и выражения для потенциала его следует приравнять к заданным значениям на поверхностях, ограничивающих область расчета. Чем проще удается записать уравнения поверхностей, тем легче найти постоянные. Поэтому систему координат выбирают так, чтобы граничные поверхности были координатными в выбранной системе координат. В цилиндрическом конденсаторе, например, уравнения обкладок имеют в полярной системе координат вид $R_1 = \text{const}$, $R_2 = \text{const}$, тогда как в прямоугольной системе они сложнее: $x^2 + y^2 = R_1^2$, $x^2 + y^2 = R_2^2$. Поэтому уравнение Лапласа в этом случае лучше записать в полярной системе координат.

12. Уравнение Лапласа в полости тела следует решать при граничном условии $U = U_0 = \text{const}$ на внутренней поверхности тела. Решением уравнения является функция $U = U_0$, напряженность поля в полости обращается в нуль.

13. Наведенные на поверхности цилиндра заряды должны быть такими, чтобы создаваемое ими поле внутри цилиндра было однородным и направленным навстречу полю напряженностью E_0. В этом случае напряженность результирующего поля внутри цилиндра обращается в нуль. Для того чтобы внутри цилиндрической поверхности поле было однородным, необходимо, чтобы потенциал на ней изменялся по закону (см. упр. 9) $U(R, \alpha) = U_m \sin \alpha$. Так как при этом $E_i = R^{-1} U_m$, то из условия $E_0 - E_i = E_0 - R^{-1} U_m = 0$ находим $U_m = -E_0 R$. Нормальная

к поверхности составляющая напряженности поля вне цилиндра равна $E_r(R) = E_{0r} - R^{-1}U_m \sin\alpha$. Учитывая, что $E_{0r} = E_0 \sin\alpha$, получаем $E_r(R) = E_0 \sin\alpha + E_0 \sin\alpha = 2E_0 \sin\alpha$ и $\sigma = \varepsilon_0 E_r = 2\varepsilon_0 E_0 \sin\alpha = 1{,}77\cdot10^{-9} \sin\alpha$ Кл/м^2.

14. Так как электростатическое поле в проводящей среде отсутствует, то в проводящей пластине $E = 0$, а ее потенциал сохраняет некоторое постоянное значение U_2. Решение уравнения Лапласа $\dfrac{d^2U}{dy^2} = 0$ в областях 1, 3 (рис. Р24.8) можно записать в виде $U_1(y) = C_1 y + C_2$, $U_3(y) = C_3 y + C_4$.

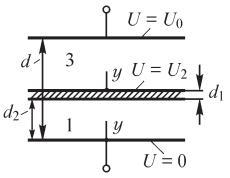

Рис. Р24.8

Используя заданные значения потенциалов $U = 0$, $U = U_0$, а также условие постоянства потенциала U_2 пластины, получаем уравнения: $0 = C_2$, $U_2 = C_1 d_2 + C_2$, $U_2 = C_4$, $U_0 = C_3(d - d_1 - d_2) + C_4$. Число неизвестных ($C_1$, C_2, C_3, C_4, U_2) превышает число уравнений, в связи с чем требуется использовать еще одно условие, которым является условие равенства нулю заряда пластины, означающее в соответствии с теоремой Гаусса равенство нулю потока вектора напряженности электрического поля сквозь охватывающую пластину поверхность. Вследствие неизменности поля по осям, параллельным обкладкам и поверхностям пластины, это условие означает равенство напряженности поля с обеих сторон пластины: $-C_1 = -C_3$. Решая уравнения, находим: $C_1 = C_3 = \dfrac{U_0}{d - d_1}$, $C_4 = \dfrac{U_0 d_2}{d - d_1}$, $U_1(y) = \dfrac{U_0}{d - d_1} y$, $E_1 = -\dfrac{U_0}{d - d_1}$, $U_3(y) = \dfrac{U_0}{d - d_1} y + \dfrac{U_0 d_2}{d - d_1}$, $E_3 = -\dfrac{U_0}{d - d_1}$, $U_2(y) = \dfrac{U_0 d_2}{d - d_1}$, $E_2 = 0$.

Таким образом, напряженность поля в областях 1, 3 имеет одно и то же значение независимо от места расположения пластины.

15. В отличие от предыдущей задачи следует решать уравнение Лапласа в полярной системе координат:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU}{dr}\right) = 0\text{: } U_1(r) = C_1 \ln r + C_2,\ U_2 = \text{const},\ U_3(r) = C_3 \ln r + C_4.$$

Уравнения, позволяющие найти постоянные и потенциал U_2, имеют вид:

$$0 = C_1 \ln R_1 + C_2,\ U_2 = C_1 \ln(R_1 + d_2) + C_2,$$

$$U_2 = C_3 \ln(R_1 + d_1 + d_2) + C_4,\ U_0 = C_3 \ln R_2 + C_4.$$

Условие равенства входящего в проводящий цилиндр и выходящего из него потока вектора напряженности электрического поля позволяет записать уравнение $2\pi(R_1 + d_2)\dfrac{C_1}{R_1 + d_2} = 2\pi(R_1 + d_1 + d_2)\dfrac{C_3}{R_1 + d_1 + d_2}$, из которого следует соотношение $C_1 = C_3$. Решив уравнения относительно неизвестных $C_1 \ldots C_4$, получаем величины

$$U_1(r) = \frac{U_0 \ln r}{\ln\{(R_1 + d_2)R_2[R_1(R_1 + d_1 + d_2)]^{-1}\}} - \\ - \frac{\ln R_1}{\ln\{R_2(R_1 + d_2)[R_1(R_1 + d_1 + d_2)]^{-1}\}},$$

$$E_1(r) = \frac{-U_0}{r\ln\{(R_1 + d_2)R_2[R_1(R_1 + d_1 + d_2)]^{-1}\}}.$$

16. Учитывая соотношение $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$, справедливое в диэлектрике, проницаемость которого является функцией координат, записываем выражение $\operatorname{div} \varepsilon \boldsymbol{E} = \rho$, или $\operatorname{div} \varepsilon \operatorname{grad} U = -\rho$. В прямоугольной системе координат это уравнение принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon \frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon \frac{\partial U}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon \frac{\partial U}{\partial z}\right) = -\rho.$$

Уравнение $\operatorname{div} \varepsilon \operatorname{grad} U = -\rho$ имеет смысл не при любой функции $\varepsilon(x, y, z)$. Если она разрывна, то в точках разрыва производные $\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}, \frac{\partial \varepsilon}{\partial y}, \frac{\partial \varepsilon}{\partial z}$ не существуют и дифференциальное уравнение в этих точках рассматриваться не может. К таким точкам относятся точки поверхностей раздела однородных сред с различными свойствами.

24.3. Плоскопараллельное электростатическое поле

ВОПРОСЫ

6. Удовлетворяющие уравнению Лапласа функции совпадают, если они имеют одинаковые значения на границе области. Однако граничные условия для потенциала и функции потока различны. Действительно, если на поверхности задано условие $U = \text{const}$, то в общем случае на ней $V \neq \text{const}$, и наоборот, если линия границы области является линией напряженности поля, где $V = \text{const}$, то на ней $U \neq \text{const}$.

7. На поверхностях проводников обычно задан потенциал либо его нормальная к ним производная, а не функция потока, которая сама подлежит расчету. На границах области функция потока, как правило, неизвестна. Кроме того, потенциал, в отличие от функции потока, можно применить для анализа не только двухмерных, но и трехмерных полей.

24.4. Метод комплексного потенциала

ВОПРОСЫ

2. Функцию следует записать в виде $\zeta = \xi + j\eta$, выделив ее действительную и мнимую части. Уравнение $\eta = \eta(x, y)$ определяет линию, на которой потенциал электростатического поля сохраняет постоянное значение. Поэтому уравнение линии, определяющей контур сечения проводника, $\eta(x, y) = \text{const}$.

3. Плотность заряда на поверхности проводника равна $\sigma = \varepsilon_0 E_n = -\varepsilon_0 \dfrac{\partial U}{\partial n}$. Так как на поверхности проводника $E_n = E(E_\tau = 0)$, то $\sigma = \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 \left| \dfrac{d\zeta}{dz} \right|$.

5. Поле в неоднородной среде не удовлетворяет уравнению Лапласа, тогда как действительная и мнимая части аналитических регулярных функций комплексного переменного удовлетворяют ему, и, следовательно, не могут описывать поле в неоднородной среде.

12. При конформном (т. е. сохраняющем углы между кривыми) отображении области плоскости z в область плоскости ζ функцией $\zeta = f(z)$ могут изменяться геометрические характеристики тел, но не их заряды и потенциалы. Поэтому емкость тел сохраняется неизменной.

15. Поток сохраняется неизменным, так как заряд провода не меняется.

16. Так как напряженность поля при конформном отображении области изменяется, то и сила взаимодействия проводов, найденная в области ζ, будет отличаться от действительной силы во столько же раз, во сколько различаются напряженности E_z и E_ζ поля в точках расположения проводов.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

1. В однородном электрическом поле величины E_x, E_y не зависят от координат x, y. Поэтому, пользуясь выражениями $E_x = -\dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{\partial V}{\partial y}$, $E_y = -\dfrac{\partial U}{\partial y} = -\dfrac{\partial V}{\partial x}$, можем записать: $U = -E_x x - E_y y + U_0$, $V = -E_y x + E_x y + V_0$, так что комплексный потенциал поля $\zeta = V + jU = (-E_y x + E_x y) + j(-E_x x - E_y y) + V_0 + jU_0$.

4. Записать единое выражение для комплексного потенциала во всей области, содержащей несколько однородных сред, сложно ввиду необходимости нахождения такой функции $\zeta(z)$, которая имела бы непрерывную мнимую часть и разрывную ее производную по нормали к поверхности раздела сред. Подбор нескольких функций $\zeta(z)$, каждая из которых описывала бы поле в подобластях, содержащих однородные среды, сложен, так как эти функции должны удовлетворять граничным условиям вида $U_i = U_{i+1}$, $\varepsilon_i \left(\dfrac{\partial U}{\partial n} \right)_i = \varepsilon_{i+1} \left(\dfrac{\partial U}{\partial n} \right)_{i+1}$, а не условиям вида $U = f_1(x, y)$ либо $V = f_2(x, y)$, где $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ — заданные функции.

6. Искомый комплексный потенциал запишем, используя метод наложения, в виде $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2$, где $\zeta_1 = -\dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon} j \ln z + C$ — комплексный потенциал уединенного заряженного провода круглого сечения, а $\zeta_2 = Az + B$ — комплексный потенциал однородного электрического поля. Выбор входящих в выражение для комплексного потенциала $\zeta = -\dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon} j \ln z + Az + C$ постоянных A, C определяет положение линий $V = 0$ и $U = 0$.

7. Расположим провода на оси x на одинаковом расстоянии $0{,}5d$ по обе стороны от начала координат. Пользуясь методом наложения, находим

$$а)\ \zeta(z) = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ \ln\left(z^2 - \frac{d^2}{4}\right) + C \text{ и } б)\ \zeta(z) = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{z-0{,}5\,d}{z+0{,}5\,d} + C.$$

8. Пусть провода имеют координаты $z_n = Re^{j\frac{2\pi}{N}n}$, $n = 0, 1, 2, ..., N-1, N$ — число проводов. Тогда в точке с координатой z комплексный потенциал можно рассчитать с помощью выражения $\zeta(z) = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\, j\sum_{n=0}^{N-1}\ln\left(z - Re^{j\frac{2\pi}{N}n}\right) + C.$

9. Будем считать, что один из проводов с зарядом, линейная плотность которого $\tau > 0$, имеет координату $x = R$. Комплексный потенциал N проводов с положительными зарядами равен $\zeta_1(z) = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\, j\sum_{n=0}^{N-1}\ln\left(z - Re^{j\frac{2\pi}{N}n}\right) + C_1$, а с отрицательными зарядами — $\zeta_2(z) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\, j\sum_{n=0}^{N-1}\ln\left(z - Re^{j\left(\frac{\pi}{N}+\frac{2\pi}{N}n\right)}\right) + C_2$. В итоге получаем

$$\zeta(z) = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\, j\sum_{n=0}^{N-1}\ln\frac{z - Re^{j\frac{2\pi}{N}n}}{z - Re^{j\left(\frac{\pi}{N}+\frac{2\pi}{N}n\right)}} + C.$$

10. При расположении проводов согласно варианту *а* комплексный потенциал равен

$$\zeta = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon} j\ln(z - jh) + \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} j\ln(z + jh) + C,$$

$$E_x = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} x\left[\frac{1}{x^2 + (y-h)^2} - \frac{1}{x^2 + (y+h)^2}\right],$$

$$E_y = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\left[\frac{y-h}{x^2 + (y-h)^2} - \frac{y+h}{x^2 + (y+h)^2}\right].$$

При расположении проводов согласно варианту *б* находим

$$\zeta = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon} j\ln(z - d) + + \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} j\ln(z + d) + C,$$

$$E_x = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\left[\frac{x-d}{(x-d)^2 + y^2} - \frac{x+d}{(x+d)^2 + y^2}\right],$$

$$E_y = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} y\left[\frac{1}{(x-d)^2 + y^2} - \frac{1}{(x+d)^2 + y^2}\right].$$

11. Приближенное значение радиуса провода в плоскости ω равно

$$R_\omega = R\left|\frac{d\omega}{dz}\right|_{z=z_0} = R\frac{\pi}{\alpha}r_0^{(\pi/\alpha)-1}.$$

При $\alpha = \pi/2$ он, в частности, возрастает в $2r_0$ раз.

Ближайшая к началу координат точка провода имеет в плоскости ω координату $(r_0 - R)^{\pi/\alpha}e^{j\varphi_0\pi/\alpha}$, а наиболее удаленная $(r_0 + R)^{\pi/\alpha}e^{j\varphi_0\pi/\alpha}$, так что расстояния от них до оси провода составляют $r_1 = r_0^{\pi/\alpha} - (r_0 - R)^{\pi/\alpha}$, $r_2 = (r_0 + R)^{\pi/\alpha} - r_0^{\pi/\alpha}$.

Таким образом, погрешность равна

$$\Delta R_1 = R_\omega - r_1 = R\frac{\pi}{\alpha}r_0^{(\pi/\alpha)-1} - r_0^{\pi/\alpha} + (r_0 - R)^{\pi/\alpha},$$

$$\Delta R_2 = R_\omega - r_2 = R\frac{\pi}{\alpha}r_0^{(\pi/\alpha)-1} + r_0^{\pi/\alpha} - (r_0 + R)^{\pi/\alpha}.$$

В частности, при $\alpha = \pi/2$ она равна $|\Delta R_1| = |\Delta R_2| = R^2$.

24.5. Электростатическое поле проводов круглого сечения

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

2. Наибольшее значение напряженности поля на поверхности цилиндра меньшего радиуса R_1 будет в точке A_1. Наибольшее значение напряженности поля на поверхности цилиндра большего радиуса — в точке A_2. Наименьшие значения напряженности поля — в точках на противоположных сторонах цилиндров. Заменим цилиндры линейными проводами, совпадающими с электрическими осями цилиндров, и для условий рис. В24.3 используем выражения (см. § 24.12)

$$E_{A1} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_1 - (h_1 - b)} + \frac{1}{R_2 - (h_2 - b) + d}\right],$$

$$E_{A2} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_2 - (h_2 - b)} + \frac{1}{R_1 - (h_1 - b) + d}\right].$$

Подставляя заданные численные значения, находим (рис. В24.3): $h_1 = \dfrac{D^2 + R_1^2 - R_2^2}{2D} =$ $= 2{,}75$ см, $h_2 = \dfrac{D^2 + R_2^2 - R_1^2}{2D} = 3{,}25$ см, $b = \sqrt{h_1^2 - R_1^2} \cong 2{,}56$ см, $E_{A1} = 2640$ В/м, $E_{A2} =$ $= 1846$ В/м.

3. Искомое напряжение между цилиндрами (см. § 24.12) $U = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln(k_{\max}/k_{\min})$ можем найти из условия (см. рис. В24.3):

$$E_{A1} = E_{\text{доп}} = \frac{U}{\ln(k_{\max}/k_{\min})}\left[\frac{1}{R_1 - (h_1 - b)} + \frac{1}{R_2 - (h_2 - b) + d}\right],$$

$$U = E_{\text{доп}}\left(\ln\frac{k_{\max}}{k_{\min}}\right)\left[\frac{1}{R_1-(h_1-b)}+\frac{1}{R_2-(h_2-b)+d}\right]^{-1}.$$

Подставляя численные значения, получаем: $k_{\max} = 5{,}3$, $k_{\min} = 0{,}3$, $U \cong 5{,}6\cdot 10^4$ В.

24.6. Картина электростатического поля

ВОПРОСЫ

1. Картина поля построена правильно только в случае *а*, когда ячейки сетки образуют подобные четырехугольники.

4. В силу скачкообразного изменения напряженности поля на поверхности тела при переходе через нее плотность линий поля изменяется скачком. В каждой из областей, как внутренней области тела, так и внешней, картину поля можно построить правильно, однако в этих областях ячейки сетки не будут подобными.

24.7. Метод инетегральных уравнений

ВОПРОСЫ

1. Объемная плотность вторичных источников обращается в бесконечность в точках поверхностей раздела сред с различными диэлектрическими проницаемостями. Для сохранения условия $\varepsilon_i E_{ni} = \varepsilon_e E_{ne}$ при переходе к однородной среде на поверхности следует разместить простой слой электрических зарядов плотностью $\sigma_{\text{вт}}$.

2. Не сохраняется, так как вследствие непрерывности величины E_t в однородной среде ($E_{ti} = E_{te}$) непрерывной будет и величина D_t: $D_{ti} = \varepsilon E_{ti} = D_{te} = \varepsilon E_{te}$.

3. Можно, так как при переходе через двойной слой электрических зарядов имеет место скачок величины E_t и, следовательно, D_t. Аналогично уравнению для величины $\sigma_{\text{вт}}$ можно получить интегральное уравнение для момента двойного слоя электрических зарядов, если за исходное принять уравнение $E_{ti} = E_{te}$ вместо уравнения $D_{ni} = D_{ne}$. Следует иметь в виду, что в отличие от плотности простого слоя зарядов момент двойного слоя является векторной величиной.

4. При равном нулю полном заряде q тела число входящих силовых линий поля равно числу выходящих линий, в связи с чем после замены среды на однородную должно выполняться условие $\oint\limits_s \sigma_{\text{вт}}\, ds = 0$, где s — поверхность тела.

24.8. Метод зеркальных изображений

ВОПРОСЫ

5. При нецелом n не удается разместить провода в однородной среде таким образом, чтобы на сторонах угла α потенциал сохранял постоянное значение. При $\alpha \neq \pi/n$ можно применить метод конформных отображений. Функция $\omega = z^{\pi/\alpha}$ отображает внутреннюю часть двугранного угла плоскости z в верхнюю полуплоскость области ω.

7. При переходе к однородной среде условие $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$ на плоскости сохранится, если знак зеркально изображенного заряда будет тем же, что и знак исходного заряда провода.

8. Заданные граничные условия могут быть выполнены в однородной среде при размещении заряда плотностью $-\tau$ во 2-м и 3-м квадрантах, а также заряда плотностью $+\tau$ в 4-м квадранте плоскости.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Если принять потенциал точек поверхности земли равным нулю, то поле заряженного провода в воздухе будет таким же, как и поле двух разноименно заряженных проводов, расположенных симметрично относительно поверхности земли.

Так как потенциал провода можно рассчитать по формуле $U = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1}$, где $r_2 = b + h - R$, $r_1 = b - h + R$ (рис. Р24.9), то линейная плотность заряда равна $\tau = 2\pi\varepsilon U\left[\ln\frac{b+h-R}{b-h+R}\right]^{-1}$ и напряженность поля на поверхности земли

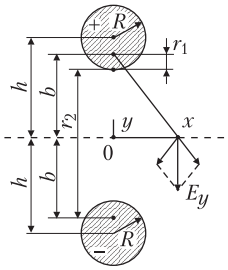

Рис. Р24.9

$$E_y(x) = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon\sqrt{b^2 + x^2}}\frac{2b}{\sqrt{b^2 + x^2}} = -\frac{\tau b}{\pi\varepsilon(b^2 + x^2)}.$$

Допущение о бесконечно малом сечении провода означает, что электрическая ось провода совпадает с геометрической, так что $E_{y1}(x) = -\frac{\tau h}{\pi\varepsilon(h^2 + x^2)}$.

Погрешность расчета наибольшего значения напряженности поля (при $x = 0$) составляет

$$\delta = \frac{E_y - E_{y1}}{E_y}\,100\,\% = \left[1 - \sqrt{1 - \left(R/h\right)^2}\right]100\,\%,$$

откуда получаем, что при $h/R \geq 7$ погрешность $\delta \leq 1\,\%$.

Плотность заряда на поверхности земли можно рассчитать с помощью выражения

$$\sigma = \varepsilon E_y(x) = -\frac{\tau b}{\pi(b^2 + x^2)} \text{ или } \sigma(x) = -\frac{2\varepsilon b U}{(b^2 + x^2)\ln[(b+h-R)(b-h+R)^{-1}]}.$$

Индуцированный на поверхности земли заряд равен взятому с обратным знаком заряду провода, или

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sigma(x)dx = -\frac{\tau b}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{b^2 + x^2} = -\tau.$$

2. Сила, действующая на отрезок провода длиной 1 м с зарядом линейной плотностью τ со стороны зеркально изображенного заряда плотностью $\tau_1 = -\dfrac{\varepsilon_i - \varepsilon_0}{\varepsilon_i + \varepsilon_0}\tau$ равна $f = \tau E = -\tau^2 \dfrac{\varepsilon_i - \varepsilon_0}{\varepsilon_i + \varepsilon_0} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 h}$. Ее экстремальные значения равны $\mp \dfrac{\tau^2}{4\pi\varepsilon_0 h}$ при $\varepsilon_i = \infty$ и $\varepsilon_i = 0$ соответственно. Подставляя численные значения, получаем $f = \mp 1{,}8 \cdot 10^{-8}$ Н.

24.9. Метод разделения переменных

УПРАЖНЕНИЯ

1. При изменении граничных условий изменяются как собственные числа, принимающие значения $\pi n/b$, $n = 1, 2$ ..., так и собственные функции, которые становятся равными sh $(\pi nx/b)$, sin $(\pi ny/b)$.

2. Решение $U(x, y)$ не является единственным, так как потенциал $U_1(x, y) = U(x, y) + C$, где C — произвольная постоянная, также является решением задачи. В соответствии с теоремой Гаусса поток вектора напряженности электрического поля, проходящий сквозь границу области, равен величине q/ε, где q — заряд, находящийся внутри области. Поэтому функция $\dfrac{\partial U}{\partial n} = f$ должна удовлетворять интегральному соотношению $\oint\limits_l \dfrac{\partial U}{\partial n}\, dl = \dfrac{\tau}{\varepsilon}$. При отсутствии заряда внутри области оно переходит в соотношение $\oint\limits_l f\, dl = 0$.

3. Представим искомый потенциал внутри области в виде $U(x, y) = U_1 + U_2$, где U_1 — потенциал, рассчитываемый методом разделения переменных при граничных условиях $U_1 = 0$ на двух сторонах области, например, при $x = 0$ и $x = a$ и заданных граничных условиях на сторонах $y = 0$ и $y = b$, а U_2 — потенциал, рассчитываемый при граничном условии $U_2 = 0$ на сторонах области $y = 0$ и $y = b$ и заданных граничных условиях на двух других сторонах.

4. Потенциал $U(x, y)$ внутри области представим в виде суммы $U_1 + U_2$, где функцию U_1 рассчитываем в предположении, что провод расположен в однородной безграничной среде: $U_1 = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln \dfrac{1}{r}$. Функцию U_2 находим методом разделения переменных при неоднородных граничных условиях на сторонах области, задаваемых в виде $U_2 = -U_1$ (см. упр. 3).

5. Разыскивая решение в виде $U(r, \alpha) = U_1(r)U_2(\alpha) = U_1(r) \sin k\alpha$ и подставляя его в уравнение Лапласа, после несложных преобразований находим уравнение $\dfrac{d}{dr}\left(r \dfrac{dU_1}{dr}\right) - \dfrac{k^2}{r} U_1 = 0$, решение которого было найдено ранее (см. § 23.2, упр. 9).

24.10. Методы сеток и конечных элементов

ВОПРОСЫ

5. Величина $\oint_s U\varepsilon\frac{\partial U}{\partial n}ds$ пропорциональна энергии электрического поля зарядов, распределенных с поверхностной плотностью $\sigma = -\varepsilon\frac{\partial U}{\partial n}$ на поверхности s. Поэтому при заданной на границе области функции $f = \frac{\partial U}{\partial n}$ интеграл $\oint_s U\frac{\partial U}{\partial n}ds$ можно трактовать как величину, пропорциональную энергии поля создающих его источников.

6. В прямоугольных координатах полином второго порядка $U(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 xy + \alpha_5 y^2$ имеет шесть коэффициентов $\alpha_0 \div \alpha_5$, для определения которых необходимо, чтобы треугольный элемент содержал шесть узлов, которые располагают по три узла на каждую из сторон элемента. При этом три узла лежат в вершинах элемента.

7. Так как число узлов элемента должно быть равным количеству коэффициентов полинома, принятого для описания потенциала, то при *а*) $U(x, y, z) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z$ число узлов составляет четыре, причем их размещают в вершинах тетраэдра, а при *б*) $U(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 y^2 + \alpha_6 z^2 + \alpha_7 xy + \alpha_8 xz + \alpha_9 yz$ узлы, число которых составляет десять, располагают в четырех вершинах и на шести ребрах тетраэдра.

8. При линейной интерполяции потенциала на стороне, общей для двух треугольных элементов, потенциал изменяется по одному и тому же закону, так как потенциалы вершин элементов имеют одинаковые значения для соседних элементов. Однако вследствие скачка нормальных к общей стороне элементов составляющих напряженности поля модуль напряженности поля претерпевает разрыв на сторонах элементов. Для того чтобы при квадратичной интерполяции потенциал был непрерывным, необходимо, чтобы на общей стороне двух треугольников располагалось по три узла, общих для этих элементов. При выполнении этих условий касательная к их общей стороне составляющая напряженности электрического поля также непрерывна.

9. В уравнение $\frac{\partial J}{\partial U_j} = \sum_n \frac{\partial J_{\text{эл}\,n}}{\partial U_j} = 0$ входят производные $\frac{\partial J_{\text{эл}\,n}}{\partial U_j}$ функционалов тех элементов, которые имеют общим узел с номером j. Производная функционала p-го элемента с узлами i, j, k $\frac{\partial J_{\text{эл}\,p}}{\partial U_j} = \frac{\partial J_{\text{эл}\,p}}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial U_j}$ при линейной интерполяции потенциала внутри элемента имеет вид: $C_{pi}U_i + C_{pj}U_j + C_{pk}U_k$ (здесь C_{pi}, C_{pj}, C_{pk} — постоянные). Поэтому уравнение $\frac{\partial J}{\partial U_j} = 0$ содержит столько слагаемых, сколько различных узлов принадлежит элементам, имеющим общим узел j, т. е. $m + 1$.

25.1. Емкость между круглыми цилиндрами

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Наличие полостей в объеме проводящего тела не изменяет ни емкость тела, ни емкость между телами.

2. Емкость уединенного прямолинейного бесконечно длинного проводящего цилиндра не может быть определена, так как при заданной линейной плотности его заряда потенциал U точек его поверхности может быть принят равным произвольному числу. Поэтому и отношение τ/U не определено единственным образом.

3. При уменьшении радиусов проводов потенциалы точек их поверхностей, как и напряжение между проводами $U_1 - U_2 = (\tau/2\pi\varepsilon) \ln (D/R)$ при заданной линейной плотности их зарядов, возрастают и стремятся к бесконечности при $R \to 0$. Поэтому допущение о бесконечной малости радиусов проводов при расчете емкости принять нельзя и емкость такой линии передачи не может быть определена.

4. Понятия емкости тел либо емкости между телами имеет смысл лишь при рассмотрении проводящих тел, потенциалы которых имеют постоянные значения во всех точках поверхностей каждого из тел.

5. При одинаковой линейной плотности электрического заряда цилиндра, подвешенного над поверхностью земли, и двух цилиндров (рис. Р25.1) разность потенциалов, равная $U_1 - 0$ в первом случае, в два раза меньше разности потенциалов $U_1 - U_2 = 2U_1$. Поэтому емкости различаются в два раза.

Аналогичная подвешенному над землей цилиндру электрическая цепь содержит один конденсатор емкостью C, тогда как двум цилиндрам соответствует цепь из двух последовательно соединенных конденсаторов емкостью C каждый, так что во втором случае получаем эквивалентную емкость, равную $0{,}5C$.

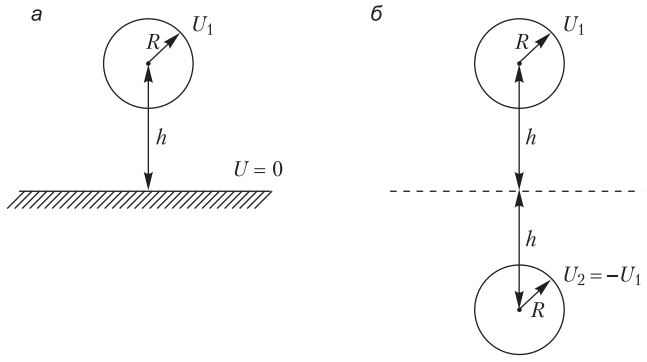

Рис. Р25.1

7. Определим потенциалы в точках осей проводов методом наложения. При $\tau_1 \neq 0$, $\tau_2 = 0$ имеем для $r = R_1$: $U_1 = (\tau/2\pi\varepsilon) \ln (1/R_1) + A$ и для $r = D$: $U_2 = (\tau/2\pi\varepsilon) \ln (1/D) + A$, так что $U_1 - U_2 = (\tau/2\pi\varepsilon) \ln (D/R_1)$. При $\tau_2 \neq 0$, $\tau_1 = 0$ имеем $U_1 - U_2 = (\tau/2\pi\varepsilon) \ln (D/R_2)$ и искомая емкость $C = \dfrac{\pi\varepsilon l}{\ln(D/\sqrt{R_1 R_2})}$.

9. Емкость в этом случае определить нельзя, так как потенциал поверхности не имеет постоянного значения, а подчинен на ней условию $\dfrac{\partial U}{\partial n} = 0$, где n — нормаль к поверхности тела.

25.2. Потенциальные коэффициенты, коэффициенты электростатической индукции и частичные емкости в системе тел

ВОПРОСЫ

2. Собственный потенциальный коэффициент k-го тела зависит от размеров и взаимного расположения всех тел системы, а также от диэлектрической проницаемости среды.

3. Потенциал U_1 первого тела следует искать при условии, что второе тело не заряжено и находится в поле заряда первого тела.

4. Введение в систему проводящих тел дополнительно одного или нескольких проводящих тел приводит к изменению всех собственных и взаимных потенциальных коэффициентов. Действительно, внесение в поле k-го заряженного тела другого незаряженного проводящего тела приводит к изменению потенциалов во всем пространстве, в том числе и в точках поверхности k-го заряженного тела, а следовательно, к изменению собственного потенциального коэффициента k-го тела.

5. Если к заряженному с зарядом $q_1 > 0$ телу приближать незаряженное проводящее тело, то потенциал U_1 тела уменьшится вследствие влияния индуцированных на поверхности незаряженного тела зарядов. Поэтому будет уменьшаться и собственный потенциальный коэффициент α_{11}. Аналогичным образом изменяется и потенциальный коэффициент α_{22}.

Так как при сближении тел возрастает потенциал незаряженного тела, то и взаимные потенциальные коэффициенты $\alpha_{12} = \alpha_{21}$ также возрастают.

7. Все потенциальные коэффициенты положительны, так как знак потенциала заряженного тела, как и потенциала вносимого в его поле незаряженного тела, совпадает со знаком заряда тела.

УПРАЖНЕНИЯ

2. Для того чтобы выразить коэффициенты электростатической индукции через потенциальные коэффициенты, необходимо решить систему уравнений $\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{q} = \mathbf{U}$ относительно зарядов: $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\alpha}^{-1}\mathbf{U}$ и из условия $\boldsymbol{\alpha}^{-1} = \boldsymbol{\beta}$ найти искомые коэффициенты электростатической индукции.

В системе двух тел из уравнений

$$\begin{cases}\alpha_{11}q_1+\alpha_{12}q_2=U_1\\ \alpha_{21}q_1+\alpha_{22}q_2=U_2\end{cases}$$

находим $\alpha^{-1}=\dfrac{1}{\Delta}\begin{Vmatrix}\alpha_{22} & -\alpha_{12}\\ -\alpha_{21} & \alpha_{11}\end{Vmatrix}$ и $\beta_{11}=\dfrac{\alpha_{22}}{\Delta}$, $\beta_{12}=-\dfrac{\alpha_{12}}{\Delta}$, $\beta_{21}=-\dfrac{\alpha_{21}}{\Delta}$, $\beta_{22}=\dfrac{\alpha_{11}}{\Delta}$.

В системе трех тел из уравнений

$$\begin{cases}\alpha_{11}q_1+\alpha_{12}q_2+\alpha_{13}q_3=U_1\\ \alpha_{21}q_1+\alpha_{22}q_2+\alpha_{23}q_3=U_2\\ \alpha_{31}q_1+\alpha_{32}q_2+\alpha_{33}q_3=U_3\end{cases}$$

получаем

$$\alpha^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{Vmatrix}\alpha_{22}\alpha_{33}-\alpha_{23}\alpha_{32} & \alpha_{13}\alpha_{32}-\alpha_{12}\alpha_{33} & \alpha_{12}\alpha_{23}-\alpha_{13}\alpha_{22}\\ \alpha_{13}\alpha_{23}-\alpha_{12}\alpha_{33} & \alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{13}\alpha_{31} & \alpha_{12}\alpha_{13}-\alpha_{11}\alpha_{23}\\ \alpha_{21}\alpha_{32}-\alpha_{22}\alpha_{31} & \alpha_{12}\alpha_{31}-\alpha_{11}\alpha_{32} & \alpha_{11}\alpha_{32}-\alpha_{12}\alpha_{21}\end{Vmatrix},$$

так что $\beta_{11}=\dfrac{\alpha_{22}\alpha_{33}-\alpha_{23}\alpha_{32}}{\Delta}$, $\beta_{12}=\dfrac{\alpha_{13}\alpha_{32}-\alpha_{12}\alpha_{33}}{\Delta}$ и т. д. (здесь Δ — определитель системы уравнений).

3. Выражая разность потенциалов $U_1 - U_2$ тел через заряд q_1 одного из них, находим из уравнений $U_1 = \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2$, $U_2 = \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2$: $U_1 - U_2 = (\alpha_{11} - 2\alpha_{12} + \alpha_{22})\,q_1$, $C=\dfrac{q_1}{U_1-U_2}=\dfrac{1}{\alpha_{11}-2\alpha_{12}+\alpha_{22}}$.

Так как $\alpha_{11}=\dfrac{1}{\Delta}\beta_{22}$, $\alpha_{12}=-\dfrac{1}{\Delta}\beta_{12}$, $\alpha_{22}=\dfrac{1}{\Delta}\beta_{11}$, где $\Delta=\beta_{11}\beta_{22}-\beta_{12}^2$, то получаем

$$C=\frac{\beta_{11}\beta_{22}-\beta_{12}^2}{\beta_{11}+2\beta_{12}+\beta_{22}}.$$

Используя соотношения $\beta_{11}=C_{11}+C_{12}$, $\beta_{12}=-C_{12}$, $\beta_{22}=C_{21}+C_{22}$, находим $C=C_{12}+\dfrac{C_{11}C_{22}}{C_{11}+C_{22}}$. Это выражение позволяет представить емкость между двумя телами в виде емкости электрической цепи, содержащей три конденсатора, соединенных последовательно-параллельно (рис. Р25.2).

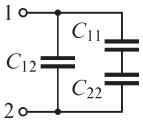

Рис. Р25.2

4. Воспользуемся решением предыдущего упражнения: $C_{12} = -\beta_{12}$, $C_{11} = \beta_{11} + \beta_{12}$, $C_{22} = \beta_{22} + \beta_{12}$, а также упражнения 2: $\beta_{11}=\dfrac{\alpha_{22}}{\Delta}$, $\beta_{12}=-\dfrac{\alpha_{12}}{\Delta}$, $\beta_{22}=\dfrac{\alpha_{11}}{\Delta}$, где $\Delta = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2$. В итоге находим:

$$C_{12}=\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}^2},\quad C_{11}=\frac{\alpha_{22}-\alpha_{12}}{\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}^2},\quad C_{22}=\frac{\alpha_{11}-\alpha_{12}}{\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}^2}.$$

5. Поместим начало прямоугольной системы координат в вершине двугранного угла и обозначим координаты проводов x_1, y_1 и x_2, y_2. Используя метод зеркальных изображений, запишем потенциалы провода 1 при $q_2 = 0$ и провода 2 при $q_1 = 0$:

$$U_1 = \frac{q_1}{2\pi\varepsilon l}\ln\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{q_1}{2\pi\varepsilon l}\ln\left(\frac{1}{2y_1}\right) - \frac{q_1}{2\pi\varepsilon l}\ln\left(\frac{1}{2x_1}\right) + \frac{q_1}{2\pi\varepsilon l}\ln\left(\frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}\right) =$$

$$= \frac{q_1}{2\pi\varepsilon l}\ln\left(\frac{2x_1y_1}{R\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}\right), \quad U_2 = \frac{q_2}{2\pi\varepsilon l}\ln\left(\frac{2x_2y_2}{R\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}\right),$$

откуда получаем

$$\alpha_{11} = \frac{U_1}{q_1} = \frac{1}{2\pi\varepsilon l}\ln\left(\frac{2x_1y_1}{R\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}\right), \quad \alpha_{22} = \frac{U_2}{q_2} = \frac{1}{2\pi\varepsilon l}\ln\left(\frac{2x_2y_2}{R\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}\right).$$

Для нахождения потенциального коэффициента α_{21} рассчитаем потенциал в точке расположения провода 2 при $q_1 \neq 0$, $q_2 = 0$:

$$U_2 = \frac{q_1}{2\pi\varepsilon l}\ln\left[\frac{1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}\right] - \frac{q_1}{2\pi\varepsilon l}\ln\left[\frac{1}{\sqrt{(x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}\right] -$$

$$- \frac{q_1}{2\pi\varepsilon l}\ln\left[\frac{1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2}}\right] + \frac{q_1}{2\pi\varepsilon l}\ln\left[\frac{1}{\sqrt{(x_2 + x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2}}\right],$$

$$\alpha_{21} = \frac{U_2}{q_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon l}\ln\left\{\frac{[(x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2][(x_2 - x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2]}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2][(x_2 + x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2]}\right\}.$$

25.3. Емкость линий передачи

УПРАЖНЕНИЯ

1. Погрешность расчета емкости двухпроводной линии при пренебрежении влиянием земли можно найти по формуле

$$\varepsilon = \frac{C_1 - C_2}{C_1} = 1 - \frac{\ln\left(\frac{2h}{R}\,\frac{D}{\sqrt{4h^2 + D^2}}\right)}{\ln\frac{D}{R}},$$

(C_1, C_2 — емкости при учете влияния земли и при пренебрежении ее влиянием). При заданных численных значениях получаем, что погрешность не превышает одного процента при $h \geq 1{,}6$ м.

3. Потенциальные коэффициенты рассчитываем по формулам:

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\left(\frac{2h_1}{R}\right), \; \alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\left(\frac{2h_2}{R}\right), \; \alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\left(\frac{h_1 + h_2}{D}\right).$$

Искомая емкость равна

$$C = \frac{1}{\alpha_{11} + \alpha_{22} - 2\alpha_{12}} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\dfrac{4h_1h_2D^2}{R^2(h_1+h_2)^2}} \cong 6{,}28\cdot10^{-12}\, l\,\frac{\Phi}{\text{м}}.$$

4. Для расчета емкости двухпроводной линии воспользуемся конформным отображением области существования поля на верхнюю полуплоскость с помощью функции $\zeta = f(z)$ комплексного переменного z. Провода 1, 2 линии, имеющие в плоскости z координаты $z_1 = x_1 + jy_1 = r_1$, $z_2 = x_2 + jy_2 = r_2$, будут иметь в плоскости ζ координаты $\zeta_1 = \xi_1 + j\eta_1$, $\zeta_2 = \xi_2 + j\eta_2$, их радиусы примут значения $R_1 \cong R\left|f'(z)\right|_{z=z_1}$, $R_2 \cong R\left|f'(z)\right|_{z=z_2}$. Так как заряды и потенциалы проводов при конформном преобразовании области не изменяются, то емкость также не изменяется и может быть найдена по формуле $C = \dfrac{1}{\alpha_{11} + \alpha_{22} - 2\alpha_{12}}$, где α_{11}, α_{22}, α_{12} — потенциальные коэффициенты проводов в плоскости переменного ζ:

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\left(\frac{2\eta_1}{R_1}\right),\ \alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\left(\frac{2\eta_2}{R_2}\right),\ \alpha_{12} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\left[\frac{\sqrt{(\xi_2-\xi_1)^2+(\eta_2+\eta_1)^2}}{\sqrt{(\xi_2-\xi_1)^2+(\eta_2-\eta_1)^2}}\right].$$

При расположении начала прямоугольной системы координат в вершине образованного поверхностями нулевого потенциала прямого угла (вариант *а*) функция $\zeta = z^2$ отображает внутреннюю часть угла в верхнюю полуплоскость комплексной переменной $\zeta = \xi + j\eta$.

Провода линии имеют в плоскости ζ координаты $\zeta_1 = r_1^2 e^{j2\theta_1} = \xi_1 + j\eta_1$, $\zeta_2 = r_2^2 e^{j2\theta_2} = \xi_2 + j\eta_2$, их радиусы равны $R_1 = 2R\,|\,r_1 e^{j\theta_1}\,| = 2Rr_1$, $R_2 = 2R\,|\,r_2\,e^{j\theta_2}| = 2Rr_2$.

В задачах вариантов *б*, *в*, *г* функции, осуществляющие отображение области в верхнюю полуплоскость переменной ζ, имеют соответственно вид $\zeta = e^{\frac{\pi}{d}z}$, $\zeta = \sin\dfrac{\pi}{d}z$, $\zeta = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z}{R_0} + \dfrac{R_0}{z}\right)$.

Отображение внутренней части круга (вариант *д*) в верхнюю полуплоскость выполняется с помощью дробно-линейной функции $\zeta = \dfrac{az+b}{cz+d}$, коэффициенты которой можно определить из условия соответствия координат трех точек в плоскости z трем точкам в плоскости ζ.

Если принять, например, что центр окружности переходит в точку с координатой $+j$ плоскости ζ, а точки $z = R_0$ и $z = -R_0$ — в точки $\zeta = +1$ и $\zeta = -1$ соответственно, то можно получить $\zeta = \dfrac{z + jR_0}{jz + R_0}$.

Для численных данных варианта *а* получаем: $r_1 = 6{,}4$ м, $r_2 = 7{,}2$ м, $R_1 = 0{,}256$ м, $R_2 = 0{,}288$ м, $\xi_1 = 9$, $\eta_1 = 40$, $\xi_2 = 20$, $\eta_2 = 48$, $\alpha_{11} = 1{,}03\cdot10^{11}/l$, $\alpha_{22} = 1{,}04\cdot10^{11}/l$, $\alpha_{12} =$

$= 3{,}4\cdot10^{10}/l$, $C = 0{,}714\cdot10^{-11}l$ Ф. При пренебрежении влиянием земли емкость линии равна $C_1 = \pi\varepsilon l(\ln D/R)^{-1} = 0{,}71\cdot10^{-11}l$ Ф, так что погрешность расчета емкости не превышает 1 %.

5. Принимая $q_2 = 0$, находим $U_2 = \alpha_{21}q_1 = \dfrac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}U_1$ и с учетом величин

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\left(\frac{2h}{R}\right),\ \alpha_{12} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\left(\frac{r_{1'2}}{D}\right),$$

где $r_{1'2} = \sqrt{D^2 + 4h^2}$, получаем

$$U_2 = \frac{\ln\left(\dfrac{r_{1'2}}{D}\right)}{\ln\left(\dfrac{2h}{R}\right)}U_1 \approx 5{,}3 \text{ кВ}.$$

Напряжение между проводами равно $U_{12} = U_1 - U_2 \cong 4{,}7$ кВ.

6. Сопоставим емкости трехфазных линий при различном расположении проводов и пренебрежении влиянием земли. Если провода расположены в одной плоскости (варианты *а*, *б*), то

$$C_1 = 2\pi\varepsilon l \Big/ \ln\left(\frac{\sqrt[3]{2}D}{R}\right).$$

При расположении проводов в вершинах равностороннего треугольника (варианты *в*, *г*) получаем:

$$C_2 = 2\pi\varepsilon l \Big/ \ln\left(\frac{D}{R}\right) > C_1.$$

Сопоставим емкости линии при учете проводящей земли. Выражение для емкости C_1' линии (вариант *а*) известно (см. § 25.5). При расположении проводов в вертикальной плоскости (вариант *б*) получаем:

$$C_2' = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\left[\dfrac{2D}{R}\sqrt[3]{\dfrac{h(h+2D)}{(2h+D)(2h+3D)}}\right]}.$$

Сравнение значений C_1' и C_2' показывает, что $C_1' > C_2'$.

При расположении проводов в вершинах равностороннего треугольника (вариант *в*) имеем

$$C_3' = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\left\{\left(\dfrac{2D}{R}\right)\dfrac{\sqrt[3]{h^2(h+\sqrt{3}/2\,D)}}{\sqrt[3]{[(D/2)^2 + (2h+\sqrt{3}/2\,D)^2]\sqrt{D^2+4h^2}}}\right\}}.$$

Сравнение выражений для расчета емкости показывает, что $C'_2 < C'_4 < C'_3 < C'_1$, т. е. наименьшую емкость имеет линия с расположением проводов в вертикальной плоскости (вариант *б*), а наибольшую — при расположении проводов в вершинах правильного треугольника согласно варианту *в*.

7. Заряды проводов находим, решая систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \alpha_{13}q_3 = U_1, \\ \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2 + \alpha_{23}q_3 = U_2, \\ \alpha_{31}q_1 + \alpha_{32}q_2 + \alpha_{33}q_3 = U_3, \end{cases}$$

для чего предварительно рассчитываем потенциальные коэффициенты:

а) $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\left(\dfrac{2h}{R}\right) = 1{,}37\cdot10^{11}\,\dfrac{1}{l}\,\dfrac{1}{\Phi}$,

$\alpha_{12} = \alpha_{23} = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\left(\dfrac{\sqrt{4h^2 + D^2}}{D}\right) = 2{,}55\cdot10^{10}\,\dfrac{1}{l}\,\dfrac{1}{\Phi}$,

$\alpha_{13} = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\left(\dfrac{\sqrt{4h^2 + 4D^2}}{2D}\right) = 1{,}45\cdot10^{10}\,\dfrac{1}{l}\,\dfrac{1}{\Phi}$,

$q_1 = -\,2{,}97\cdot10^{-7}\cdot l$ Кл, $q_2 = -\,3{,}64\cdot10^{-7}\cdot l$ Кл, $q_3 = 6{,}83\cdot10^{-7}\cdot l$ Кл;

б) $\alpha_{11} = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\left(\dfrac{2h}{R}\right) = 1{,}37\cdot10^{11}\,\dfrac{1}{l}\,\dfrac{1}{\Phi}$, $\alpha_{22} = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\left(\dfrac{2(h+D)}{R}\right) = 1{,}44\cdot10^{11}\,\dfrac{1}{l}\,\dfrac{1}{\Phi}$,

$\alpha_{33} = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\left(\dfrac{2(h+2D)}{R}\right) = 1{,}49\cdot10^{11}\,\dfrac{1}{l}\,\dfrac{1}{\Phi}$,

$\alpha_{12} = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\left(\dfrac{2h+D}{D}\right) = 2{,}9\cdot10^{10}\,\dfrac{1}{l}\,\dfrac{1}{\Phi}$,

$\alpha_{13} = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\left(\dfrac{2h+2D}{2D}\right) = 1{,}98\cdot10^{10}\,\dfrac{1}{l}\,\dfrac{1}{\Phi}$,

$\alpha_{23} = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\left(\dfrac{2h+3D}{D}\right) = 3{,}5\cdot10^{10}\,\dfrac{1}{l}\,\dfrac{1}{\Phi}$,

$q_1 = -\,3{,}09\cdot10^{-7}\cdot l$ Кл/м, $q_2 = -\,3{,}78\cdot10^{-7}\cdot l$ Кл, $q_3 = 6{,}67\cdot10^{-7}\cdot l$ Кл;

в) $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\left(\dfrac{2h}{R}\right) = 1{,}37\cdot10^{11}\,\dfrac{1}{l}\,\dfrac{1}{\Phi}$,

$\alpha_{33} = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\left[2\left(h + \dfrac{\sqrt{3}}{2}D\right)\Big/R\right] = 1{,}43\cdot10^{11}\,\dfrac{1}{l}\,\dfrac{1}{\Phi}$,

$\alpha_{12} = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\left(\dfrac{\sqrt{4h^2 + D^2}}{D}\right) = 2{,}55\cdot10^{10}\,\dfrac{1}{l}\,\dfrac{1}{\Phi}$,

$$\alpha_{13} = \alpha_{23} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\left[\sqrt{(0{,}5D)^2 + \left(2h + \frac{\sqrt{3}}{2}D\right)^2}\Big/D\right] = 2{,}85\cdot10^{10}\,\frac{1}{l}\ \frac{1}{\Phi},$$

$q_1 = -3{,}7\cdot10^{-7}\cdot l$ Кл, $q_2 = -3{,}7\cdot10^{-7}\cdot l$ Кл, $q_3 = 7{,}07\cdot10^{-7}\cdot l$ Кл;

г) $\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\left(\frac{2h}{R}\right) = 1{,}37\cdot10^{11}\,\frac{1}{l}\ \frac{1}{\Phi},$

$$\alpha_{22} = \alpha_{33} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\left[2\left(h + \frac{\sqrt{3}}{2}D\right)\Big/R\right] = 1{,}43\cdot10^{11}\,\frac{1}{l}\ \frac{1}{\Phi},$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{13} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\left[\sqrt{(0{,}5D)^2 + \left(2h + \frac{\sqrt{3}}{2}D\right)^2}\Big/D\right] = 2{,}85\cdot10^{10}\,\frac{1}{l}\ \frac{1}{\Phi},$$

$$\alpha_{23} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\left[\sqrt{D^2 + (2h + \sqrt{3}D)^2}\Big/D\right] = 3{,}17\cdot10^{10}\,\frac{1}{l}\ \frac{1}{\Phi},$$

$q_1 = -3{,}6\cdot10^{-7}\cdot l$ Кл, $q_2 = -3{,}6\cdot10^{-7}\cdot l$ Кл, $q_3 = 7{,}13\cdot10^{-7}\cdot l$ Кл.

8. При условии *а* задачи следует принять $q_2 = q_3 = 0$, так как второй и третий провода не заряжены, что позволяет записать уравнения $U_1 = \alpha_{11} q_1$, $U_2 = \alpha_{21} q_1$, $U_3 = \alpha_{31} q_1$, из которых находим $q_1 = U_1/\alpha_{11}$, $U_2 = \alpha_{21}/\alpha_{11} U_1$, $U_3 = \alpha_{31}/\alpha_{11} U_1$.

Находим (рис. Р25.3): $q_1 = 8{,}03\cdot10^{-7}\cdot l$ Кл и *а*) $U_2 = 20{,}5$ кВ, $U_3 = 11{,}6$ кВ; *б*) $U_2 = 23{,}2$ кВ, $U_3 = 15{,}9$ кВ; *в*) $U_2 = 20{,}52$ кВ, $U_3 = 23{,}0$ кВ; *г*) $U_2 = 23{,}0$ кВ, $U_3 = 23{,}0$ кВ.

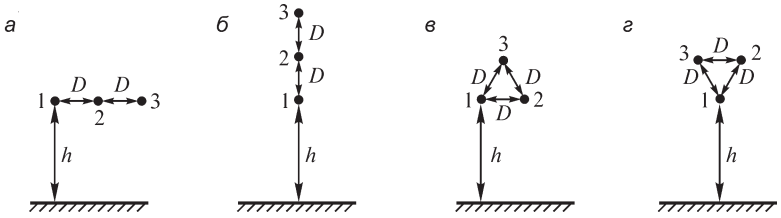

Рис. Р25.3

При условии *б* упражнения следует принять $U_2 = 0$, $q_3 = 0$, так что уравнения, связывающие заряды и потенциалы проводов, принимают вид:

$$\begin{cases} U_1 = \alpha_{11} q_1 + \alpha_{12} q_2 \\ 0 = \alpha_{21} q_1 + \alpha_{22} q_2 \\ U_3 = \alpha_{31} q_1 + \alpha_{32} q_2. \end{cases}$$

Решая их, получаем

$$q_1 = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}} U_1,\ q_2 = -\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}}\ q_1 = -\frac{\alpha_{21} U_1}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}},\ U_3 = \frac{\alpha_{31}\alpha_{22} - \alpha_{32}\alpha_{21}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}} U_1.$$

Подставляя найденные при решении упр. 7 значения потенциальных коэффициентов, находим:

а) $q_1 = 8{,}32\cdot10^{-7}l$ Кл, $q_2 = -1{,}55\cdot10^{-7}l$ Кл, $U_3 = 8{,}11$ кВ;

б) $q_1 = 8{,}38\cdot10^{-7}l$ Кл, $q_2 = -1{,}7\cdot10^{-7}l$ Кл, $U_3 = 10{,}71$ кВ;

в) $q_1 = 8{,}32\cdot10^{-7}l$ Кл, $q_2 = -1{,}55\cdot10^{-7}l$ Кл, $U_3 = 19{,}29$ кВ;

г) $q_1 = 8{,}38\cdot10^{-7}l$ Кл, $q_2 = -1{,}7\cdot10^{-7}l$ Кл, $U_3 = 18{,}59$ кВ.

При условии варианта *в* с учетом соотношения $U_2 = U_3 = 0$ находим заряды проводов, решая систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \alpha_{13}q_3 = U_1 \\ \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2 + \alpha_{23}q_3 = 0 \\ \alpha_{31}q_1 + \alpha_{32}q_2 + \alpha_{33}q_3 = 0. \end{cases}$$

Подставляя численные значения, получаем (см. рис. Р25.3): *а*) $q_1 = 8{,}36\cdot10^{-7}l$ Кл, $q_2 = -1{,}44\cdot10^{-7}l$ Кл, $q_3 = -0{,}62\cdot10^{-7}l$ Кл и т. д.

10. Используя соответствующую функцию комплексного переменного $\zeta = f(z)$ (см. решение упр. 4), отображаем заданную область на верхнюю полуплоскость. Вычислив радиусы R_1, R_2, R_3 проводов, расстояния D_{12}, D_{13}, D_{23} между ними и величины η_1, η_2, η_3 в плоскости переменной ζ, переходим к расчету емкости провода транспонированной трехфазной линии. Так как при конформном отображении области емкость не изменяется, то для расчета емкости провода с учетом влияния проводящей поверхности используем формулу, полученную в § 25.5.

Емкость провода линии при пренебрежении влиянием проводящей поверхности получаем по формуле $C = \dfrac{2\pi\varepsilon l}{\ln(D/R)}$.

25.4. Метод средних потенциалов

ВОПРОСЫ

1. При заданном распределении плотности электрического заряда на поверхности проводящего тела его потенциал можно рассчитать, пользуясь выражением $U = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\oint\limits_s \dfrac{\sigma ds}{r}$, после чего найти емкость $C = q/U$, учитывая, что заряд тела $q = \oint\limits_s \sigma ds$.

Решение задачи нахождения заряда тела по его потенциалу (что зачастую приходится делать на практике) значительно сложнее, так как при этом приходится предварительно отыскивать неизвестное распределение плотности заряда.

2. Погрешность метода средних потенциалов уменьшается с увеличением длины проводов (при $h = \text{const}$), так как в этом случае распределение заряда вдоль них в целом ближе к равномерному, хотя вблизи концов проводов плотность зарядов остается существенно большей, чем в их средней части.

5. Погрешность метода средних потенциалов зависит от распределения заряда на поверхности тел: чем оно ближе к равномерному, тем меньше погрешность

метода. При заданном расстоянии между сферами погрешность возрастает с увеличением их радиусов, тогда как при заданных радиусах сфер она увеличивается с уменьшением расстояния между ними.

26.1. Электрическое поле постоянных токов в диэлектрике и в проводящей среде

ВОПРОСЫ

3. Полный заряд в объеме ΔV, выделенном внутри провода с постоянным током, равен нулю, так как отрицательный заряд имеющихся в объеме электронов равен положительному заряду неподвижных ионов. Поэтому внутри провода с током имеем $\rho = 0$ и div $\boldsymbol{D} = 0$. На поверхности провода с током наряду с касательной составляющей напряженности электрического поля, обусловленной протекающим током, имеется также и нормальная составляющая E_n, претерпевающая разрыв вследствие того, что с внутренней стороны поверхности провода $J_n = \gamma E_n = 0$. Поэтому на поверхности провода с током возникает электрический заряд плотностью $\sigma = \varepsilon_0 E_n$ и, следовательно, объемная плотность заряда на ней обращается в бесконечность.

Для характеристики распределения электрического заряда используют понятие его поверхностной плотности и поверхностной дивергенции вектора электрического смещения, обозначаемой как Div $\boldsymbol{D}$ и определяемой как разность нормальных к поверхности составляющих вектора электрического смещения, взятых по обе ее стороны: Div $\boldsymbol{D} = D_{ne} - D_{ni}$. Связь между величинами Div $\boldsymbol{D}$ и σ имеет вид Div $\boldsymbol{D} = \sigma$.

4. В проводящем теле электрического тока и электрического поля нет, поэтому и плотность электрического заряда во всем объеме тела равна нулю. Однако на его поверхности распределен индуцированный электрический заряд, поверхностная плотность которого Div $\boldsymbol{D} = D_{ne} - D_{ni} = D_{ne} = \sigma$.

В диэлектрике свободные заряды отсутствуют и в любой точке его объема выполняется соотношение div $\boldsymbol{D} = 0$, тогда как на поверхности провода с током имеем условие Div $\boldsymbol{D} = \sigma$ (см. ответ на вопрос 3).

9. На границе двух сред с различными удельными электрическими проводимостями γ_1 и γ_2 в силу уравнений div $\boldsymbol{J} = 0$, $\boldsymbol{J} = \gamma \boldsymbol{E}$ получаем
$\operatorname{div} \gamma \boldsymbol{E} = \gamma \operatorname{div} \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E} \operatorname{grad} \gamma = 0$, откуда следует, что $\operatorname{div} \boldsymbol{E} = -(\operatorname{grad} \gamma \boldsymbol{E})/\gamma \neq 0$. Так как величины grad γ и div $\boldsymbol{E}$ обращаются в бесконечность, это означает существование на границе двух сред электрического заряда в бесконечно малом объеме. В то же время плотность поверхностного электрического заряда на границе двух сред конечна. Плотность заряда можно определить по формуле
$\sigma = D_{n2} - D_{n1} = \varepsilon_0 J_{\text{n}}$.

11. На поверхности электрода можно принять условие $U = \text{const}$, т. е. считать ее эквипотенциальной.

14. Поверхность заземляющего электрода можно считать эквипотенциальной, если удельная электрическая проводимость вещества заземлителя значительно

превышает удельную электрическую проводимость земли. Если заземлитель выполнен из меди, то при $\gamma_{\text{земли}} = 10^{-2}$ См/м отношение этих величин составляет $5{,}7\cdot10^{7}/10^{-2} = 5{,}7\cdot10^{9} \gg 1$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Электрический потенциал в однородной среде удовлетворяет уравнению Лапласа div grad $U = 0$, а в неоднородной среде — уравнению div ε grad $U = 0$.

Эти уравнения совпадают с уравнениями, которые описывают потенциал электростатического поля в соответствующей среде.

2. Параметры линии, рассматриваемой как электрическая цепь с распределенными вдоль нее параметрами r и g, суть волновое сопротивление линии $z = \sqrt{r/g}$ и коэффициент распространения $\gamma = \sqrt{rg}$. Из уравнений (см. т. 2, § 16.3)

$U_{\text{вых}} = U_{\text{вх}} \operatorname{ch} \gamma l - I_{\text{вх}} z \operatorname{sh} \gamma l$, $I_{\text{вых}} = I_{\text{вх}} \operatorname{ch} \gamma l - U_{\text{вх}}/z \operatorname{sh} \gamma l$ длинной линии находим с учетом соотношения $U_{\text{вых}} = I_{\text{вых}} r_{\text{н}}$ выражение $U_{\text{вых}}(l) = \dfrac{U_{\text{вх}} r_{\text{н}}}{r_{\text{н}} \operatorname{ch}\gamma l + z \operatorname{sh}\gamma l}$.

Если линия разомкнута, то, принимая $r_{\text{н}} = \infty$, получаем $U_{\text{вых}}(l) = \dfrac{U_{\text{вх}}}{\operatorname{ch}(\sqrt{rg}\, l)}$.

Для нахождения проводимости g на единицу длины линии воспользуемся аналогией электрического поля в неидеальном диэлектрике с электростатическим полем, для чего используем формулу для расчета емкости, приведенную в § 25.1, п. 3, $g = \dfrac{\gamma C}{\varepsilon l} = \dfrac{\pi\gamma}{\ln DR^{-1}}$.

3. Учитывая, что электрическое поле в пластине однородное, ее сопротивление $r = \dfrac{l}{\gamma s} = \dfrac{1}{\gamma d}$. Так как оно не зависит от размеров сторон квадратной пластины, то и ток $i = \dfrac{U_1 - U_2}{r}$ также не зависит от размеров сторон пластины. Таким образом, любая квадратная пластина одной и той же толщины и удельной электрической проводимости ее материала имеет одно и то же сопротивление постоянному току.

4. Во всех точках пластины, за исключением точек, лежащих на поверхности раздела сред с различными удельными электрическими проводимостями, потенциал описывается уравнением Лапласа.

В точках поверхности выреза A имеем $J_n = -\gamma \dfrac{\partial U}{\partial n} = 0$ и, следовательно, $\dfrac{\partial U}{\partial n} = 0$.

С обеих сторон трещины AB также имеем условие $\dfrac{\partial U}{\partial n} = 0$, так как сквозь трещину ток протекать не может. В точках поверхности выреза B потенциал удовлетворяет условиям $\gamma \dfrac{\partial U}{\partial n_i} = \gamma_{\text{п}} \dfrac{\partial U}{\partial n_e}$, $U_i = U_e$, где индексы i, e нормали n означают, что

производную $\frac{\partial U}{\partial n}$ потенциала следует вычислять со стороны материала с удельной проводимостью γ и $\gamma_п$ соответственно.

На сторонах 3, 4 пластины выполнено условие $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$, так как проводимость окружающего пластину диэлектрика $\gamma = 0$. Проводимость вещества, прилегающего к сторонам 1, 2 пластины $\gamma_э \gg \gamma_п$, в связи с чем потенциал U электродов не изменяется и его можно принять постоянным.

Так как на границе «хорошо проводящее вещество — пластина» потенциал скачком не изменяется, то потенциал в точках сторон 1, 2 пластины, примыкающих к электродам, постоянен: $U = U_1$ на стороне 1 и $U = U_2 \neq U_1$ на стороне 2.

5. В соответствии с методом электростатической аналогии диэлектрикам с проницаемостями ε_1, ε_2, ε следует поставить в соответствие проводники с удельными проводимостями γ_1, $\gamma_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\gamma_1$, $\gamma = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\gamma_1$. Пластинам 1, 2, как и вкраплению с удельной проводимостью γ_0, соответствует вещество, удельная проводимость которого $\gamma_в \gg \gamma_1, \gamma_2, \gamma$.

Устройство, аналогичное изображенному на рис. Р26.1, показано на рис. Р26.2.

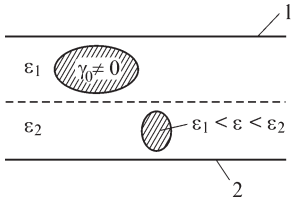

Рис. Р26.1

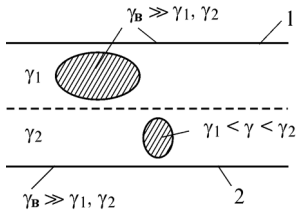

Рис. Р26.2

6. Проводимость утечки можно найти с помощью формулы $G = \frac{\gamma}{\varepsilon}C$. Здесь C — емкость между несоосными охватывающими друг друга цилиндрами, определяемая по приведенному в § 25.1, п. 4 выражению. При $D \to 0$ имеем $h_1 \to \infty$, $h_2 \to \infty$, и проводимость $G = 2\pi\gamma l \ln\frac{R_2}{R_1}$ принимает наименьшее значение. При $D \to R_2 - R_1$ получаем $G \to \infty$. При заданных значениях параметров $G \cong 9{,}9 \cdot 10^{-9}$ См.

7. Напряженность электрического поля в слоях кабеля $E_1 = \frac{i}{2\pi r\gamma_1 l}$, $E_2 = \frac{i}{2\pi r\gamma_2 l}$.

Напряжение между жилой и оболочкой

$$U = \int_{R_1}^{R_3} E\,dr = \frac{i}{2\pi l}\left(\frac{1}{\gamma_1}\ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\gamma_2}\ln\frac{R_3}{R_2}\right).$$

Ток утечки не превышает значения $2 \cdot 10^{-3}$ при напряжении $U \le 80{,}2$ В.

8. Амплитуды тока проводимости и смещения равны $I_{\text{пр max}} = GU_{\max} = C\frac{\gamma}{\varepsilon}U_{\max}$ и $I_{\text{см max}} = \omega CU_{\max}$.

При частоте $\omega = \gamma/\varepsilon$ ток смещения равен току проводимости. Таким образом получаем $\omega \cong 570$ 1/с.

27.1. Скалярный потенциал магнитного поля

ВОПРОСЫ

3. Скалярный магнитный потенциал становится неоднозначным, если путь интегрирования напряженности магнитного поля охватывает электрический ток. Он будет однозначным, если исключить такие пути, т. е. если ввести «непроницаемые», или запретные для пересечения перегородки, которые контур интегрирования пересекать не может.

5. Как и потенциал электрического поля, скалярный магнитный потенциал всюду непрерывен, так как напряженность магнитного поля конечна во всех точках пространства. В то же время составляющие вектора напряженности магнитного поля могут изменяться скачком, т. е. претерпевать разрыв, например при переходе через слой тока.

6. Упрощение заключается в том, что расчет вихревой составляющей $\boldsymbol{H}_{\text{в}}$ поля, удовлетворяющей единственному уравнению rot $\boldsymbol{H}_{\text{в}} = \boldsymbol{J}$, значительно проще, чем расчет искомого поля $\boldsymbol{H}$, так как при этом можно не решать дифференциальных уравнений. Основные вычисления при нахождении искомого поля напряженностью $\boldsymbol{H}$ связаны с решением скалярного уравнения div μ grad $U_{\text{м}}$ = div $\mu\boldsymbol{H}_{\text{в}}$, тогда как в других случаях приходится решать не скалярное, а векторное уравнение, что значительно сложнее.

7. Магнитный заряд m можем ввести по аналогии с электрическим зарядом q, определяющим поток вектора злектрического смещения: $m = \oint_s \mu \boldsymbol{H}_{\text{в}}\, d\boldsymbol{s}$. Магнитный заряд имеет, как видно, размерность Вб, и, следовательно, размерность его объемной, поверхностной и линейной плотностей Вб/м^3, Вб/м^2, Вб/м.

11. В случае однородной безграничной среды имеем во всем пространстве условие div $\boldsymbol{H}_{\text{в}} = 0$, означающее, что магнитные заряды отсутствуют и, следовательно, $\boldsymbol{H}_{\text{в}} = \boldsymbol{H}$. Однако в неоднородной среде величина $\rho_{\text{м}} = -$ div $\mu\boldsymbol{H}_{\text{в}}$ отлична от нуля, так как $\rho_{\text{м}} = -\mu$ div $\boldsymbol{H}_{\text{в}} -$ grad $\mu\, \boldsymbol{H}_{\text{в}} \neq 0$ в точках, где grad $\mu \neq 0$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Описываемое скалярным потенциалом поле всегда безвихревое, удовлетворяющее тождеству rot grad $U_{\text{м}} \equiv 0$. Если rot grad $U_{\text{м}} \neq 0$, то поле не является потенциальным и не может описываться функцией $U_{\text{м}}(x, y, z)$. Например для варианта *а* имеем: grad $U_{\text{м}} = \boldsymbol{f} = 2aUx\boldsymbol{i} + 2bUy\boldsymbol{j}$, rot $\boldsymbol{f} = 0$, и, следовательно, скалярный магнитный потенциал может описываться функцией $U_{\text{м}} = ax^2 + by^2$.

2. Используя условие $\operatorname{div} \boldsymbol{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$, находим: $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) = -\frac{B_0 a}{2}\sin az$, откуда получаем $B_r = -\frac{B_0 a}{4} r \sin az$. Можно показать, что это решение не единственное.

3. Допустим, что сумма эквивалентных току фиктивных магнитных зарядов, расположенных в конечном объеме V, не равна нулю. Тогда интеграл $\oint\limits_s \mu \operatorname{grad} U_м \, d\boldsymbol{s}$ по поверхности, охватывающей объем V, отличен от нуля, что противоречит принципу непрерывности магнитного потока $\oint\limits_s \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{s} = \oint\limits_s \mu \boldsymbol{H}_в \, d\boldsymbol{s} = 0$.

4. Соотношение $\operatorname{rot} \boldsymbol{H}_в = \boldsymbol{J}$ запишем в прямоугольной системе координат $\frac{\partial H_{вy}}{\partial x} - \frac{\partial H_{вx}}{\partial y} = J_z$, откуда с учетом допущения $H_{вx} = 0$ находим $H_{вy} = \int J_z dx + f(y, z)$.

5. Пользуясь решением упр. 4, запишем $H_{вy}$ в виде

$$H_{вy}(x, y) = \int\limits_0^x J_z dx = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \dfrac{i}{ah} x & \text{при } 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le h, \\ \dfrac{i}{h} & \text{при } a \le x \le D - a,\ 0 \le y \le h, \\ \dfrac{i}{ah}(D - x) & \text{при } D - a \le x \le D,\ 0 \le y \le h, \\ 0 & \text{при } x > D. \end{cases}$$

Так как $\frac{\partial H_{вy}}{\partial y} = 0$ всюду, за исключением линий $y = 0$, $0 < x < D$ и $y = h$, $0 < x < D$, где функция $H_{вy}$ изменяется скачком, то $\operatorname{div} \mu_0 \boldsymbol{H}_в = -\rho_м \equiv 0$. На указанных линиях имеем $\rho_м = \pm\infty$, однако поверхностная плотность магнитных зарядов $\sigma_м = \pm \mu_0 H_{вy} \ne \infty$ (рис. Р27.1).

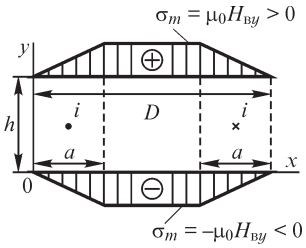

Рис. Р27.1

27.2. Векторный потенциал магнитного поля

ВОПРОСЫ

2. Решение уравнения Пуассона для составляющих A_x, A_y, A_z векторного магнитного потенциала показывает, что при $J_x = 0$, $J_y = 0$ получаем $A_x = 0$, $A_y = 0$, так что при $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{k}J_z$ он имеет единственную составляющую $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{k}A_z$. Магнитное поле является плоскопараллельным и обе составляющие магнитной индукции B_x, B_y можно найти, пользуясь выражением $\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$: $B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y}$, $B_y = \frac{\partial A_z}{\partial x}$.

При наличии вблизи провода тела конечных размеров с магнитной проницаемостью $\mu \neq \mu_0$ магнитное поле становится трехмерным, так как возникает составляющая B_z магнитной индукции. Если бы в этих условиях векторный магнитный потенциал сохранил единственную составляющую A_z, то получили бы вновь соотношение $B_z = \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} = 0$, что неверно. Поэтому число составляющих векторного магнитного потенциала не может быть менее двух.

3. Векторный магнитный потенциал имеет единственную составляющую $A_\alpha \neq 0$, если поле плоскомеридианное. При этом $B_r \neq 0$, $B_\alpha = 0$, $B_z \neq 0$. Магнитное поле остается также плоскомеридианным, когда тело с магнитной проницаемостью μ, вносимое в поле, является телом вращения вокруг оси z. Если магнитное поле становится трехмерным, теряя свойство плоскомеридианности, что происходит, например, когда тело с проницаемостью μ не является телом вращения, то возникает составляющая магнитной индукции B_α и поле не может описываться единственной составляющей A_α потенциала.

В общем случае потенциал имеет все три ненулевые составляющие A_r, A_α, A_z, хотя плотность тока может иметь при этом единственную отличную от нуля составляющую J_α.

7. Записывая выражение $\boldsymbol{B} = \text{rot}\,\boldsymbol{A}$ в прямоугольной системе координат и рассчитывая составляющие B_x, B_y, B_z магнитной индукции, находим $B_x = 0$, $B_y = 0$, $B_z = \text{const} < 0$ при $y > 0$ и $B_z = \text{const} > 0$ при $y < 0$, т. е. магнитное поле однородно при $y > 0$ и при $y < 0$. Такое поле может создаваться электрическим током, распределенным на плоскости $y = 0$ с постоянной плотностью $\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i}j_x = \text{const}$.

УПРАЖНЕНИЯ

3. Потенциал плоскопараллельного электростатического поля пропорционален функции $\ln r$, где r — расстояние от точки расположения источника поля до точки определения потенциала. Учитывая аналогию уравнений Пуассона

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha^2} = -\mu J$$

(уравнения записаны в полярной системе координат), описывающих потенциалы U и A, можно определить, что $A \equiv \ln r$.

4. Векторный магнитный потенциал удовлетворяет внутри и вне провода уравнениям $\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dA}{dr}\right) = -\mu_0\dfrac{i}{\pi R^2}$, $0 \le r \le R$; $\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dA}{dr}\right) = 0$, $r \ge R$, имеющим решения:

$A(r) = -\dfrac{\mu_0 i}{4\pi R^2} r^2 + C_1 \ln r + C_2$, $B(r) = -\dfrac{dA}{dr} = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi R^2} r - \dfrac{C_1}{r}$, при $0 \le r \le R$ и

$A(r) = C_3 \ln r + C_4$, $B(r) = -\dfrac{C_3}{r}$ при $r \ge R$.

Для нахождения входящих в решения постоянных C_1, C_2, C_3, C_4 используем следующие условия. Так как при $r = 0$ имеем $B = 0$, то $C_1 = 0$. При $r = R$ магнитная индукция не может иметь разрыва, что приводит к условию $\frac{\mu_0 i}{2\pi R} = -\frac{C_3}{R}$, откуда получаем $C_3 = -\frac{\mu_0 i}{2\pi}$. Потенциал A при $r = R$ также непрерывен: $-\frac{\mu_0 i}{4\pi} + C_2 = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln R + C_4$. Одна из постоянных ($C_2$ или C_4) может иметь произвольное конечное значение, так как изменение векторного магнитного потенциала на постоянную не оказывает влияния на магнитную индукцию. Принимая $C_4 = 0$, получаем $C_2 = -\frac{\mu_0 i}{2\pi}(\ln R - 0{,}5)$ и окончательно можем написать $A(r) = -\frac{\mu_0 i}{4\pi R^2} r^2 - \frac{\mu_0 i}{2\pi}(\ln R - 0{,}5)$, $B(r) = \frac{\mu_0 i r}{2\pi R^2}$ при $0 \le r \le R$; $A(r) = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln r$, $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$ при $r \ge R$.

5. Поместим начало прямоугольной системы координат в точке на расстоянии $0{,}5d$ от осей проводов (рис. Р27.2). Потенциал вне проводов в точках оси x равен

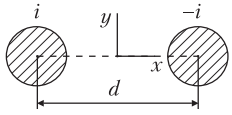

Рис. Р27.2

$$A_e = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln|x + 0{,}5d| + \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln|x - 0{,}5d| + C.$$

Постоянную C принимаем равной нулю, так как при $x = 0$ имеем $A = 0$.

6. Векторный магнитный потенциал удовлетворяет уравнению $\frac{d^2 A}{dy^2} = -\mu_0 J(y)$, где $J(y) = \begin{cases} \frac{2i}{dh}, & 0 < y < 0{,}5h, \\ -\frac{2i}{dh}, & 0{,}5h < y < h. \end{cases}$

Интегрируя уравнение, получаем $B_x(y) = \frac{dA}{dy} = -\frac{2\mu_0 i}{dh} y + C_1$ при $0 \le y \le 0{,}5h$ и $B_x(y) = \frac{2\mu_0 i}{dh}(y - 0{,}5h) + C_2$ при $0{,}5h \le y \le h$.

Постоянные C_1, C_2 интегрирования определяем из условия $B_x = 0$ при $y = 0$ и условия непрерывности величины B_x при $y = 0{,}5h$: $C_1 = 0$, $C_2 = -\frac{\mu_0 i}{d}$.

Интегрирование функции $B_x(y) = \frac{dA}{dy}$ приводит к выражениям $A(y) = -\frac{\mu_0 i}{dh} y^2 + C$ при $0 \le y \le 0{,}5h$ и $A(y) = \frac{\mu_0 i}{dh}(y - 0{,}5h)^2 - \frac{\mu_0 i}{d} y + C_3$ при $0{,}5h \le y \le h$.

Условие непрерывности векторного магнитного потенциала при $y = 0{,}5h$ позволяет получить:

$$C_3 = C + \frac{\mu_0 ih}{4d}.$$

Кривые зависимостей $B_x(y)$, $A(y)$ (принято $C = 0$) показаны на рис. Р27.3.

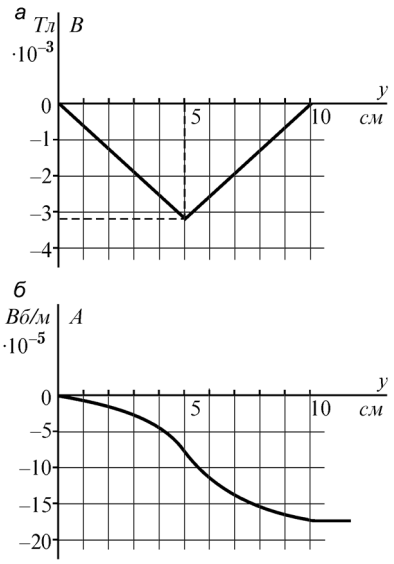

Рис. Р27.3

7. При симметричном расположении токов $+i$ и $-i$ относительно плоскости $x = 0$ магнитное поле также симметрично относительно этой плоскости, так что ось y совпадает с одной из линий магнитной индукции. Так как на плоскости $x = 0$ имеем $B_x = \dfrac{\partial A}{\partial y} = 0$, то векторный магнитный потенциал на ней принимает постоянное, равное нулю значение.

При однонаправленных токах проводов получаем $B_y = 0$ при $x = 0$ и, следовательно, $\dfrac{\partial A}{\partial x} = 0$, т. е. векторный магнитный потенциал принимает на оси y экстремальное значение. Так как на плоскости $x = 0$ имеем $B_x = \dfrac{\partial A}{\partial y} \neq 0$, то $A = A(y) \neq \text{const}$.

8. Векторный магнитный потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона в точках жилы и оболочки при $0 \le r \le R_1$, $R_2 \le r \le R_3$ и уравнению Лапласа $\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dA}{dr}\right) = 0$ в точках вне токов при $R_1 \le r \le R_2$, $r \ge R_3$. При интегрировании уравнений в каждой из областей следует определить по 2 постоянных, так что для нахождения 8 постоянных (всего имеем 4 области) необходимо использовать 8 условий. Интегрирование уравнений приводит к выражениям:

область 1: $0 \le r \le R_1$, $A_1 = -\,0{,}25\,\mu_0 J_1 r^2 + C_1 \ln r + C_2$,

область 2: $R_1 \le r \le R_2$, $A_2 = C_3 \ln r + C_4$,

область 3: $R_2 \le r \le R_3$, $A_3 = -\,0{,}25\,\mu_0 J_3 r^2 + C_5 \ln r + C_6$,

область 4: $r \ge R_3$, $A_4 = C_7 \ln r + C_8$.

В силу равенства токов жилы и оболочки и противоположного их направления имеем $B = 0$ при $r \ge R_3$ и, следовательно, $C_7 = 0$. Постоянную C_1 находим из условия $B_\alpha = -\dfrac{\partial A}{\partial r} \neq \infty$ при $r = 0$: $\dfrac{\partial A_1}{\partial r} = -\,0{,}5\mu J_1 r + C_1 r^{-1}$, $C_1 = 0$. Постоянные C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_8 получаем, используя условия непрерывности потенциала (три условия) и его нормальной производной (три условия) в точках на границах областей 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4:

$$A_1\big|_{r=R_1} = A_2\big|_{r=R_1}, \quad A_2\big|_{r=R_2} = A_3\big|_{r=R_2}, \quad A_3\big|_{r=R_3} = A_4\big|_{r=R_3},$$

$$\left.\frac{\partial A_1}{\partial r}\right|_{r=R_1} = \left.\frac{\partial A_2}{\partial r}\right|_{r=R_1}, \quad \left.\frac{\partial A_2}{\partial r}\right|_{r=R_2} = \left.\frac{\partial A_3}{\partial r}\right|_{r=R_2}, \quad \left.\frac{\partial A_3}{\partial r}\right|_{r=R_3} = \left.\frac{\partial A_4}{\partial r}\right|_{r=R_3}.$$

Так как в каждое из выражений $A_1(r)$, $A_2(r)$, $A_3(r)$, $A_4(r)$ входят не все постоянные, получаемая при нахождении постоянных система алгебраических уравнений имеет редко заполненную матрицу коэффициентов, что облегчает решение. После подстановки заданных в условии задачи численных значений и решения уравнений можем найти значения векторного магнитного потенциала во всех областях и магнитную индукцию с помощью соотношения $B = -\dfrac{\partial A}{\partial r}$.

10. Для расчета магнитного потока воспользуемся выражением $\Phi = \oint\limits_l \boldsymbol{A} d\boldsymbol{l} = \oint\limits_l A\cos\alpha\, dl$. В точках изображенных на рис. В27.3 контуров вектор $\boldsymbol{A}$ параллелен вектору плотности тока $\boldsymbol{J}$, тогда как вектор $d\boldsymbol{l}$ определяется геометрией контура и направлением его обхода. В обоих вариантах *а*, *б* задачи состоящий из прямолинейных отрезков контур следует разбить на участки, записывая интеграл $\oint\limits_l \boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{l}$ как сумму интегралов по участкам. Для варианта *а* имеем: $\Phi = \int\limits_1^2 A_{12}\cos\alpha_1 dl_1 + \int\limits_2^3 A_{23}\cos\alpha_2 dl_2 + \int\limits_3^4 A_{34}\cos\alpha_3 dl_3 + \int\limits_4^1 A_{41}\cos\alpha_4 dl_4 = l(A_{12} - A_{34})$.

Отметим, что $\alpha_1 = 0$, $\alpha_4 = \pi$, $\alpha_2 = -\alpha_3 = -0{,}5\pi$. Принимая во внимание, что $A_{12} = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi}\ln\dfrac{1}{a} + C$, $A_{31} = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi}\ln\dfrac{1}{b} + C$, получаем $\Phi = \dfrac{\mu_0 l i}{2\pi}\ln\dfrac{b}{a} \cong 1{,}1\cdot 10^{-7}$ Вб.

В условиях варианта *б* можем записать:

$$\Phi = A_{12} l + \int\limits_a^b A_{23}(r)\frac{-l}{\sqrt{l^2 + (b-a)^2}}\left(\frac{b-a}{\sqrt{l^2 + (b-a)^2}}\right)^{-1} dr,$$

так как $\alpha_1 = 0, \cos\alpha_1 = 1, \cos\alpha_2 = \dfrac{-l}{\sqrt{l^2 + (b-a)^2}}, \alpha_3 = \dfrac{\pi}{2}, \cos\alpha_3 = 0, dl_2 = \dfrac{\sqrt{l^2 + (b-a)^2}}{b-a} dr.$

Учитывая, что $A_{12} = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi}\ln\dfrac{1}{a} + C$, $A_{23}(r) = -\dfrac{\mu_0 i}{2\pi}\ln r + C$, находим

$$\Phi = \frac{\mu_0 l i}{2\pi(b-a)}\left(b\ln\frac{b}{a} - b + a\right) \cong 0{,}62\cdot 10^{-7} \text{ Вб}.$$

11. Так как контуры расположены во взаимно перпендикулярных плоскостях, то в точках контура направления векторов $d\boldsymbol{l}$ и векторного потенциала, создаваемого током другого провода, ортогональны. Поэтому $\Psi_м = 0$.

12. Так как $M = \dfrac{\Psi_{21}}{i_1} = \dfrac{1}{i_1}\oint\limits_l \boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{l}$, получаем: $M = \dfrac{l}{i_1}(A_2 - A_{2'}) = \dfrac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\dfrac{h\sqrt{(d_2 + h)^2 + d_1^2}}{(d_2 + h)\sqrt{d_1^2 + h^2}}$.

14. Линии магнитной индукции в воздухе подходят под прямым углом к поверхности тела с бесконечно большой магнитной проницаемостью. Поэтому скалярный магнитный потенциал имеет на поверхности постоянное значение, что следует из условия $\frac{\partial U_м}{\partial t} = 0$. Из условия $B_t = 0$ на поверхности тела вытекает, что $\frac{\partial A}{\partial n} = 0$.

На поверхности тела, вещество которого характеризуется значениями $\mu = 0$, $\gamma = \infty$, имеем $B_n = 0$, $B_t \neq 0$, что позволяет, используя соотношения $\boldsymbol{H} = -\text{grad}\, U_м$, $\boldsymbol{B} = \text{rot}\, \boldsymbol{A}$, записать выражения $\frac{\partial U_м}{\partial n} = 0$, $A = \text{const}$.

Граничные значения потенциалов и их нормальных производных на поверхности тел с идеальными свойствами сведены в таблицу:

Свойства вещества	$U_м$	A	$\frac{\partial U_м}{\partial n}$	$\frac{\partial A}{\partial n}$
$\mu = \infty, \gamma = 0$	const	$f(x,y)$	$f(x,y)$	0
$\mu = 0, \gamma = \infty$	$f(x,y)$	const	0	$f(x,y)$

27.3. Комплексный магнитный потенциал

ВОПРОСЫ

19. Действительно, на движущиеся в проводнике электроны действует сила со стороны магнитного поля соседних токов, так что ток должен под действием этой силы в общем случае перераспределяться. Изменению плотности тока препятствуют силы взаимодействия между электронами, в связи с чем в проводниках этот эффект проявляется незначительно.

21. Так как линии напряженности магнитного поля параллельны оси y, то можем написать $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} H_y$, причем при сгущении линий в направлении оси x получаем $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} H_y(x)$. Вычисляя проекции вектора rot $\boldsymbol{H}$ на оси x, y, z, находим $\text{rot}_x \boldsymbol{H} = 0$, $\text{rot}_y \boldsymbol{H} = 0$, $\text{rot}_z \boldsymbol{H} = \frac{\partial H_y}{\partial x} \neq 0$, на основании чего делаем заключение, что сгущение линий напряженности магнитного поля в направлении оси x возможно лишь в области с током, плотность которого $J = J_z \neq 0$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Из выражения $\Phi = \oint_l \boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{l}$ следует, что в плоскопараллельном магнитном поле магнитный поток можно рассчитать по формуле $\Phi = (A_2 - A_1)l$, где A_2, A_1 — векторный магнитный потенциал на сторонах контура. Так как $A = \mu V_м + C$, то получаем $\Phi = \mu_0 l (V_{м2} - V_{м1}) = 4\pi \cdot 10^{-6}$ Вб.

2. Совместим плоскость $x = 0$ с поверхностью раздела сред с различными магнитными проницаемостями: $\mu = \mu_1$ при $x < 0$ и $\mu = \mu_2$ при $x > 0$. Граничные усло-

вия непрерывности касательных составляющих напряженности магнитного поля $\boldsymbol{H}_{t1} = \boldsymbol{H}_{t2}$ запишем в виде $\boldsymbol{j}H_{y1} + \boldsymbol{k}H_{z1} = \boldsymbol{j}H_{y2} + \boldsymbol{k}H_{z2}$ и, учитывая соотношения

$$H_{y1} = \frac{1}{\mu_1}\left(\frac{\partial A_{x1}}{\partial z} - \frac{\partial A_{z1}}{\partial x}\right),\ H_{z1} = \frac{1}{\mu_1}\left(\frac{\partial A_{y1}}{\partial x} - \frac{\partial A_{x1}}{\partial y}\right),$$

получим

$$\frac{1}{\mu_1}\left(\frac{\partial A_{x1}}{\partial z} - \frac{\partial A_{z1}}{\partial x}\right) = \frac{1}{\mu_2}\left(\frac{\partial A_{x2}}{\partial z} - \frac{\partial A_{z2}}{\partial x}\right),\ \frac{1}{\mu_1}\left(\frac{\partial A_{y1}}{\partial x} - \frac{\partial A_{x1}}{\partial y}\right) = \frac{1}{\mu_2}\left(\frac{\partial A_{y2}}{\partial x} - \frac{\partial A_{x2}}{\partial y}\right).$$

Граничное условие $B_{n1} = B_{n2}$ записываем в виде $B_{x1} = B_{x2}$, или

$$\frac{\partial A_{z1}}{\partial y} - \frac{\partial A_{y1}}{\partial z} = \frac{\partial A_{z2}}{\partial y} - \frac{\partial A_{y2}}{\partial z}.$$

Для того, чтобы выразить граничные условия $\boldsymbol{H}_{t1} = \boldsymbol{H}_{t2}$, $B_{n1} = B_{n2}$ через скалярный магнитный потенциал, учтем соотношение $\boldsymbol{H} = -\text{grad}\ U_{\text{м}}$ и получим:

$$\frac{\partial U_{\text{м}1}}{\partial y} = \frac{\partial U_{\text{м}2}}{\partial y}, \qquad \frac{\partial U_{\text{м}1}}{\partial z} = \frac{\partial U_{\text{м}2}}{\partial z}, \qquad \mu_1 \frac{\partial U_{\text{м}1}}{\partial x} = \mu_2 \frac{\partial U_{\text{м}2}}{\partial x}.$$

Из первых двух соотношений, связывающих производные скалярного магнитного потенциала по касательным направлениям к поверхности раздела сред, следует, что $U_{\text{м}1} = U_{\text{м}2}$, т. е. скалярный магнитный потенциал непрерывен на поверхности раздела сред с различными магнитными свойствами.

Скалярный магнитный потенциал, как и его касательная к поверхности раздела сред производная, непрерывен не только в случае плоских, но и неплоских поверхностей.

3. Магнитный поток сквозь сечение трубки, лежащей вне провода и ограниченной линиями радиусов r_{k+1}, r_k, равен $\Delta\Phi_k = (A_{k+1} - A_k)\, l = -\dfrac{\mu i l}{2\pi} \ln \dfrac{r_{k+1}}{r_k}$. Величина $\Delta\Phi_k$ имеет одно и то же значение при любом k, если $\dfrac{r_{k+1}}{r_k} = \text{const}$. Магнитный поток сквозь сечение любой трубки внутри провода $\Delta\Phi_k = (A_{k+1} - A_k)l = -\dfrac{\mu i l}{4\pi R^2}(r_{k+1}^2 - r_k^2)$ сохраняет постоянное значение, если ее радиусы удовлетворяют соотношению $r_{k+1}^2 - r_k^2 = \text{const}$.

4. Используя метод наложения, находим

$$\zeta = -\frac{i}{2\pi} \ln (z - b) + \frac{i}{2\pi} \ln (z + b) + C = = -\frac{i}{2\pi} \ln \frac{z-b}{z+b} + C.$$

Для расчета составляющих H_x, H_y напряженности магнитного поля находим величину $\dfrac{d\zeta}{dz} = \dfrac{\partial V_м}{\partial x} + j\dfrac{\partial U_м}{\partial x} = -H_y - jH_x$ и получаем в точках оси x: $H_x = 0, H_y = \dfrac{i}{\pi}\dfrac{b}{x^2 - b^2} \cong \dfrac{4{,}8}{x^2 - 0{,}02}\dfrac{\text{А}}{\text{м}}$ и в точках оси y:

$$H_y = -\frac{i}{\pi}\frac{b}{y^2 + b^2} \cong -\frac{4{,}8}{y^2 + 0{,}02}\frac{\text{А}}{\text{м}},\ H_x = 0.$$

5. Производная комплексного потенциала равна

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{d\zeta}{dx} = \frac{\partial V_м}{\partial x} + j\frac{\partial U_м}{\partial x} = -H_y - jH_x.$$

Для нахождения величины $H_x + jH_y$ обе части последнего равенства следует умножить на j и найти сопряженную комплексную величину: $\left(j\overset{*}{\dfrac{d\zeta}{dz}}\right) = H_x + jH_y$.

6. В плоскопараллельном магнитном поле магнитный поток сквозь площадку длиной l можно определить по значению функции потока как $\Phi = \mu_0\,\Delta V_м l = \mu(V_{2м} - V_{1м})l$, где $V_{2м}$, $V_{1м}$ — функция потока на сторонах 2 и 1 площадки. Рассчитав функцию потока из выражения $V_м = -\dfrac{1}{2\pi}\ln r + C$, находим $\Phi = -\mu_0\dfrac{il}{2\pi}\ln\dfrac{r_2}{r_1}$.

Получаем при условиях: *а*) $r_2 = r_1$ и $\Phi = 0$, *б*) $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ и $\Phi = -2{,}77\cdot10^{-5} l$ Вб, *в*) $r_1 = 2$, $r_2 = 2\sqrt{2}$ и $\Phi = -1{,}39\cdot10^{-5} l$ Вб.

7. Обозначим через $R_а$, $R_с$ сопротивления на единицу длины алюминиевой оболочки и стальной сердцевины провода. Так как ток провода распределяется между оболочкой и сердцевиной обратно пропорционально их сопротивлениям, то из соотношений $i_с R_с = i_а R_а$, $i_с + i_а = i$ находим $i_а = \dfrac{iR_с}{R_с + R_а}$, $i_с = \dfrac{iR_а}{R_с + R_а}$.

Для численных условий задачи получаем: $R_с/R_а = 10{,}5$, $i_а = 18{,}26$ А, $i_с = 1{,}74$ А.

Магнитное поле вне провода такое же, как и поле линейного тока, протекающего вдоль оси провода. Поэтому комплексный потенциал равен $\zeta(z) = -\dfrac{i}{2\pi}\ln z + C$.

Внутри провода функцию $V_м = -\int\limits_0^r H(r)\,dr$ находим, записывая напряженность магнитного поля $H(r) = \dfrac{i_с r}{2\pi r_с^2}$ при $0 \le r \le r_с$ и $H(r) = \dfrac{i_с}{2\pi r} + \dfrac{J_а\,\pi(r^2 - r_с^2)}{2\pi r}$ при $r_с \le r \le r_а$, где $J_а = i_а/(\pi(r_а^2 - r_с^2))$:

$$V_м = -\frac{i_с r^2}{4\pi r_с^2} + C \text{ при } 0 \le r \le r_с,$$

$$V_м = -\frac{i_с}{4\pi} - \frac{i_с}{2\pi}\ln\frac{r}{r_с} - \frac{J_а}{2}\left(\frac{r^2 - r_с^2}{2} - r_с^2\ln\frac{r}{r_с}\right) + C \text{ при } r_с \le r \le r_а.$$

8. Из выражения $V_м = -i\dfrac{r_0^2}{4\pi R^2} + C_1$ (см. § 27.11) следует, что $V_{м1} = C_1$ при $r_0 = 0$ и $V_{м2} = -\dfrac{i}{4\pi} + C_1$ при $r_0 = R$, т. е. на контуре сечения провода. Магнитный поток внутри провода на единицу длины составляет $\Phi = \dfrac{\mu i}{4\pi}$ Вб.

Внутреннее потокосцепление провода на единицу длины, в то же время, равно $\Psi'' = \dfrac{\mu i}{8\pi}$ (см. т. 1, § 3.5).

Величины Φ и Ψ'' не совпадают, так как при вычислении потока не учитывается то обстоятельство, что линии магнитной индукции внутри провода охватывают различные токи. Таким образом, понятия потока и потокосцепления различны, хотя в некоторых случаях они совпадают.

9. Изобразим на рис. Р27.4 сечения проводов и отрезок AB. Обозначив расстояния от центров сечений проводов до точек A, B через r_1, r_2, r_1', r_2', можем записать

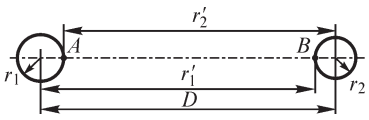

Рис. Р27.4

$$\frac{\Phi_{AB}}{l} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\ln\frac{r_2'}{r_1} - \frac{\mu_0 i}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1'} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\ln\frac{r_1' r_2'}{r_1 r_2}.$$

Учитывая, что $r_1 = R$, $r_2' = D - R$, $r_1' = D - R$, $r_2 = R$, находим

$$\frac{\Phi_{AB}}{l} = \frac{\mu_0 i}{\pi}\ln\frac{D-R}{R} = 2{,}27\cdot 10^{-5} \text{ Вб/м}.$$

27.4. Метод зеркальных изображений

ВОПРОСЫ

5. При определении конфигурации изображенных проводов с токами, а также направлений токов следует исходить из того, что в однородной среде на поверхностях, которые являлись поверхностями намагниченных тел, должна сохраниться той же функция $U_м(x, y, z)$.

Поэтому для сохранения условия $U_м = \text{const}$ на поверхности изображенный ток должен протекать также по изогнутому под углом 90 градусов проводу, причем направление тока в нем должно быть таким же, как и действительного тока. Если одна из сторон изогнутого провода перпендикулярна к поверхности тела, то одна из сторон изображенного провода также должна быть перпендикулярной к этой поверхности.

Если в общем случае контур с током, расположенный над плоской поверхностью намагниченного тела, имеет произвольную форму, то контур изображенного тока должен быть зеркальным изображением заданного контура.

6. Магнитное поле кругового контура с током, охватывающим соосный с ним магнитный цилиндр, является плоскомеридианным, причем линии магнитной индукции подходят к поверхности цилиндра под прямым углом. Учитывая, что

после устранения цилиндра поле должно сохраниться плоскомеридианным, изображенный ток также должен иметь форму кольца, соосного с цилиндром. Магнитная индукция перпендикулярна к поверхности цилиндра только в случае, когда круговой контур изображенного тока имеет радиус, меньший радиуса цилиндра. Искомые величины — радиус изображенного тока и его значение — следует определять из условия постоянства скалярного магнитного потенциала на поверхности цилиндра.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Начало координат принимаем в точке поверхности тела, ближайшей к проводу, и отсчитываем координату x вправо от начала координат вдоль поверхности.

Комплексный потенциал поля тока вместе с его зеркальным изображением равен $\zeta = -\dfrac{i}{2\pi}[\ln(z - jh) + \ln(z + jh)] + C$.

Так как на поверхности тела имеем $H_x = 0$, $H = H_y$, то получаем $H = \left|\dfrac{d\zeta}{dz}\right| = \dfrac{i}{\pi}\dfrac{x}{x^2 + h^2}$. Экстремальные значения $H \cong 7{,}1$ А/м достигаются при $x = +h$ и $x = -h$.

Сила взаимодействия провода с телом равна $f' = \dfrac{f}{l} = \dfrac{\mu_0 i^2}{4\pi h} = 8{,}9\cdot10^{-4}$ Н/м.

2. В этом случае комплексный потенциал равен $\zeta = -\dfrac{i}{2\pi}[\ln(z - jh) - \ln(z + jh)] + C$,

напряженность магнитного поля на поверхности тела $H = H_x = \left|\dfrac{d\zeta}{dz}\right| = \dfrac{i}{\pi}\dfrac{h}{x^2 + h^2}$.

Ее наибольшее значение $H = \dfrac{i}{\pi h} \cong 14{,}1$ А/м достигается на поверхности тела при $x = 0$. Сила взаимодействия провода с телом равна той же величине $\dfrac{\mu_0 i^2}{4\pi h}$, однако в отличие от предыдущей задачи она является силой отталкивания.

3. На размещенный внутри двугранного угла провод с током (рис. Р27.5) действует сила $\boldsymbol{f}_1 = -\boldsymbol{i}f_{x1}$ со стороны тока i_1, сила $\boldsymbol{f}_2 = -\boldsymbol{j}f_{y2}$ со стороны тока i_2 и сила $\boldsymbol{f}_3 = -\boldsymbol{i}f_{x3} - \boldsymbol{j}f_{y3}$ со стороны i_3. Их значения можно рассчитать по формулам:

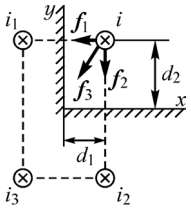

Рис. Р27.5

$$f_{x1} = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi d_1} l,\ f_{y2} = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi d_2} l,$$

$$f_{x3} = \frac{\mu_0 d_1 i^2 l}{\pi[(2d_1)^2 + (2d_2)^2]},\ f_{y3} = \frac{\mu_0 d_2 i^2 l}{\pi[(2d_1)^2 + (2d_2)^2]}.$$

Сила притяжения провода к сторонам угла составляет:

к вертикальной стороне $f_x = f_{x1} + f_{x3} = \dfrac{\mu_0 i^2 l}{4\pi}\left[\dfrac{1}{d_1} + \dfrac{d_1}{d_1^2 + d_2^2}\right] = 4{,}5\cdot10^{-4}\ l$ Н,

к горизонтальной стороне $f_y = f_{y1} + f_{y3} = \dfrac{\mu_0 i^2 l}{4\pi}\left[\dfrac{1}{d_2} + \dfrac{d_2}{d_1^2 + d_2^2}\right] = 4{,}1\cdot10^{-4}\ l$ Н.

Если вещество характеризуется идеальными диамагнитными свойствами, то знаки изображенных токов изменяются на противоположные, что приводит к изменению знака действующей на провод силы.

4. Так как зеркально изображенный в одной из плоских поверхностей ток должен быть изображен, в свою очередь, и в другой плоской поверхности, то полное число токов, при котором потенциалы на обеих поверхностях будут постоянными, оказывается бесконечно большим.

Нормальная к поверхности составляющая напряженности магнитного поля в точке с координатой $z = x + j\,0$ равна (провод с током имеет координату $z = j\,0{,}5\,d$)

$$H_y(x) = \frac{ix}{2\pi}\left[\frac{1}{x^2 + (0{,}5d)^2} + \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{x^2 + [(n-0{,}5)d]^2} + \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{x^2 + [(n+0{,}5)d]^2}\right].$$

При $N = 1$ учитываются два изображенных тока, при $N = 2$ — четыре тока, при $N = 3$ — шесть токов и т. д.

При учете всех изображенных токов имеем $H_y(x) = \dfrac{i}{2d}\dfrac{1 - e^{-2\pi d^{-1}x}}{1 + e^{2\pi d^{-1}x}} = \dfrac{i}{2d}\operatorname{th}\dfrac{\pi x}{d}$.

При учете четырех изображенных токов погрешность расчета величины H_y (при $x = d$) составляет 15,4 %, а при учете шести токов — 7,7 %.

5. Сила взаимодействия тока провода и намагниченного тела равна силе взаимодействия двух токов: заданного и зеркально изображенного, равного

$$i' = \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0}\,i = \frac{\mu/\mu_0 - 1}{\mu/\mu_0 + 1}\,i, \quad f = Bli = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi h}\,\frac{\mu/\mu_0 - 1}{\mu/\mu_0 + 1}\,l.$$

Кривая зависимости $f/l = F(\mu/\mu_0)$ приведена на рис. Р27.6.

Сила взаимодействия имеет наибольшее значение при допущении $\mu = \infty$: $f_{\max} = \dfrac{\mu_0 i^2}{4\pi h}\,l$.

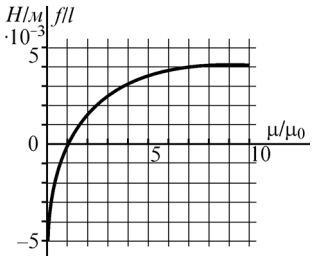

Рис. Р27.6

Погрешность расчета силы при допущении $\mu = \infty$ можно найти с помощью формулы $\varepsilon = \dfrac{f_{\max} - f}{f}100\,\%$. Погрешность не превышает величины ε при допущении $\mu = \infty$, если магнитная проницаемость вещества тела больше величины $\mu = (1 + 200/\varepsilon)\,\mu_0$. В частности, при $\varepsilon = 5\,\%$ имеем $\mu = 41\mu_0$.

Таким образом, уже при относительно небольшом значении магнитной проницаемости можно без значительной погрешности принять при расчете электромагнитной силы допущение $\mu = \infty$. Такое допущение упрощает расчет, позволяя оценить значение силы без выполнения сложных вычислений.

28.1. Индуктивности контуров, катушек и токопроводов

ВОПРОСЫ

1. Изменение распределения плотности тока по сечению провода контура приводит в общем случае к изменению магнитного поля не только внутри провода, но и в окружающем контур пространстве. Поэтому как внутренняя, так и внешняя индуктивности контура зависят от закона распределения плотности тока по сечению провода. В частности, при увеличении частоты протекающего по контуру тока и вытеснении тока на поверхность провода его внутренний поток уменьшается, вследствие чего уменьшается и внутренняя индуктивность контура.

2. Понятие индуктивности контура из бесконечно тонкого провода теряет смысл, так как вследствие неограниченного возрастания магнитной индукции вблизи провода сцепленный с контуром магнитный поток становится бесконечно большим, хотя ток провода и остается конечным. Поэтому индуктивность такого контура не может быть определена.

В то же время взаимная индуктивность двух контуров из бесконечно тонких проводов конечна, если контуры не имеют общих точек. Потокосцепление взаимной индукции в этом случае конечно, так как магнитная индукция, созданная контуром 1 на натянутой на контур 2 поверхности, не обращается в бесконечность ни в одной точке.

4. Так как потокосцепление взаимной индукции зависит не только от распределения магнитной индукции, но также и от распределения плотности тока, то потокосцепление, как и взаимную индуктивность, можно рассчитать, только если функция $J(x, y, z)$ задана в объемах проводов обоих контуров.

5. В приведенном для расчета индуктивности контура выражении под величиной $\boldsymbol{A}$ следует понимать векторный потенциал поля тока контура, так как интеграл $\frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{JA}\,dV$ определяет в этом случае энергию магнитного поля тока, протекающего в контуре.

7. Наибольшее значение индуктивность витка имеет, когда угол между полукольцами составляет 180 градусов (плоский контур), а наименьшее — при совмещении полуколец (угол между плоскостями полуколец равен 0 градусов).

8. Индуктивность двух соединенных индуктивно связанных витков равна $L_{экв} = L_1 + L_2 + 2M$, так что при числе витков катушки, равном N, ее эквивалентная индуктивность $L_{экв} = \sum_{k=1}^{N} L_k + \sum_{p=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} M_{kp}$ (в последнем слагаемом $k \neq p$). Поэтому индуктивность многовитковой катушки превышает на величину $\sum_{p=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} M_{kp}$ сумму индуктивностей ее витков.

9. При протекающих по контурам токах i_1, i_2 электромагнитную силу f, стремящуюся изменить взаимное расположение контуров, можно рассчитать, поль-

зуясь выражением $f = i_1 i_2 \dfrac{\partial M}{\partial g}$ (g — обобщенная координата). Производная $\dfrac{\partial M}{\partial g}$ обращается в нуль, если взаимная индуктивность M достигает своего экстремального значения, что имеет место, когда контуры расположены соосно в одной плоскости.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Энергию магнитного поля в проводе радиусом сечения R рассчитаем по формуле $W_м = \int\limits_V W'_м dV = 0{,}5\mu l \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^R H^2 r\, dr\, d\varphi$. Учитывая, что при $J = \text{const}$ имеем $H(r) = \dfrac{Jr}{2}$, находим: $W_м = \dfrac{\mu l i^2}{16\pi}$ и $L_{внутр} = \dfrac{2W_м}{i^2} = \dfrac{\mu l}{8\pi}$.

3. Так как $L_{внутр} = \dfrac{\mu l}{4\pi}$, $L_{внешн} = \dfrac{l}{\pi}\mu_0 \ln\dfrac{D}{R}$, то $\dfrac{L_{внешн}}{L_{внутр}} = \dfrac{4\mu_0}{\mu}\ln\dfrac{D}{R} \cong 9{,}2\dfrac{\mu_0}{\mu}$.

5. Учитывая соотношение $h \gg d, D$, можно определить вид линий напряженности магнитного поля внутри и вне шины. В пространстве между шинами магнитное поле рассматриваем как однородное, и его линии параллельны длинным сторонам шин, тогда как в области вне шин магнитное поле отсутствует и $H = 0$. Величина напряженности магнитного поля между шинами в соответствии с законом полного тока равна $H = i/h$ и не зависит от распределения плотности тока по толщине шин.

Индуктивность можно рассчитать по формуле $L = \dfrac{2W_м}{i^2}$. В случае *а* получаем $W_{внутр} = \dfrac{\mu_0 h J^2 d^3}{3} l$, а в случае *б*: $W_{внутр} = \dfrac{\mu_0 h J_0^2 d^3}{20} l$. Так как $W_{внешн} = \dfrac{\mu_0 D l}{2h}\, i^2$, то:
а) $L = \dfrac{\mu_0}{h}\left(\dfrac{2d}{3} + D\right) l$, *б*) $L = \dfrac{\mu_0}{h}(0{,}4 + D)\, l$.

6. Индуктивность токопровода из двух шин толщиной $2d$ каждая рассчитаем по формуле

$$L_0 = \frac{2W_м}{i^2} = \frac{4}{i^2}\frac{1}{2}\int\limits_0^{5d/2} \mu_0 l h H^2(x)\, dx = \frac{7}{3}\frac{\mu_0 d}{h} l.$$

При расчете индуктивности токопровода с «расщепленными шинами» учтем, что внутри шин напряженность поля изменяется по линейному закону, а вне их сохраняет постоянное значение:

$$L_1 = \frac{2W_м}{i^2} = \frac{4}{i^2}\frac{1}{2}\int\limits_0^{7d/2} \mu_0 l h H^2(x)\, dx = \frac{17}{6}\frac{\mu_0 d}{h} l.$$

Таким образом, при расщеплении шины токопровода на две его индуктивность возрастает в $L_1/L \cong 1{,}2$ раза.

7. Индуктивность токопровода находим по формуле $L = \dfrac{2W_{\text{м}}}{i^2}$, где

$$W_{\text{м}} = \mu_0 lh\left\{\int\limits_0^d\left(\frac{i}{2dh}\right)^2 x^2\,dx + \int\limits_d^{2d}\left(\frac{i}{2h}\right)^2 dx + \int\limits_{2d}^{3d}\left[\frac{i}{2h} - \frac{i}{2hd}\left(x-2d\right)\right]^2 dx\right\} = \frac{5\mu_0 i^2 d\,l}{12h}.$$

Получаем индуктивность $L = \dfrac{5}{6}\mu_0\dfrac{dl}{h}$. При таком способе соединения шин токопровода его индуктивность уменьшается в 2,8 раза в сравнении с индуктивностью L_0 (см. упр. 6) «нерасщепленного» токопровода и в 3,4 раза в сравнении с индуктивностью «расщепленного» токопровода с токами одинакового направления в соседних шинах.

8. Максимально возможное значение взаимной индуктивности контуров найдем из условия, что наибольшее значение коэффициента связи k, определяемое выражением $k = M\big/\sqrt{L_1 L_2}$, равно 1. Поэтому $M_{\max} = \sqrt{L_1 L_2}$.

10. Погрешность вычисления индуктивности при пренебрежении внутренней индуктивностью $L_{\text{внутр}}$ равна

$$\varepsilon = \frac{100\mu_0 R}{4\left[\mu_0 R\left(\ln\dfrac{8R}{a} - 2\right) + \dfrac{100\mu_0 R}{4}\right]}100\,\% \cong 89\,\%,$$

т. е. внутренней индуктивностью пренебречь нельзя. При $\mu = \mu_0$ получаем

$$\varepsilon = \frac{\mu_0 R}{4\left[\mu_0 R\left(\ln\dfrac{8R}{a} - 2\right) + \dfrac{\mu_0 R}{4}\right]}100\,\% \cong 7{,}5\,\%,$$

что также превышает заданное значение.

11. Индуцируемая в контуре ЭДС равна $e \cong 8{,}9\cdot10^{-4}\sin 314\,t$ В. Активное сопротивление $r = \dfrac{l}{\gamma s} \cong 1{,}05\cdot10^{-3}$ Ом, индуктивность $L = \mu_0 R\left(\ln\dfrac{8R}{a} - 1{,}75\right) \cong 1{,}4\cdot10^{-7}$ Гн, индуктивное сопротивление $\omega L \cong 4{,}4\cdot10^{-5}$ Ом.

Мощность потерь $P = \dfrac{E^2 r}{r^2 + (\omega L)^2} \cong 3{,}8\cdot10^{-4}$ Вт.

Учитывая, что индуктивное сопротивление ($\omega L = 4{,}4\cdot10^{-5}$ Ом) контура значительно меньше активного ($r = 1{,}05\cdot10^{-3}$ Ом), допущение о малости магнитного потока, обусловленного индуцированным током контура, можно считать оправданным.

12. Учитывая, что индуктивность витка и его сопротивление постоянному току определяются выражениями $L = \mu_0 R\left(\ln\dfrac{8R}{a} - 1{,}75\right)$, $r = \dfrac{2\pi R}{\gamma\pi a^2} = \dfrac{2R}{\gamma a^2}$, искомое соотношение, определяющее постоянную времени витка, имеет вид:

$$\tau = \frac{L}{r} = \frac{\mu_0 \gamma a^2}{2}\left(\ln\frac{8R}{a} - 1{,}75\right).$$

Если материалом провода витка является сталь, то получаем

$$\tau = \frac{L}{r} = \frac{\mu_0 \gamma a^2}{2}\left(\ln\frac{8R}{a} - 2 + \frac{\mu}{4\mu_0}\right).$$

Кривая $\tau = f(a)$ для витка стали изображена на рис. Р28.1.

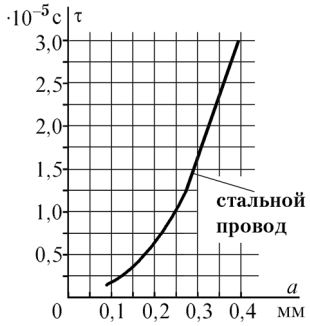

Рис. Р28.1

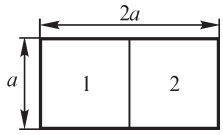

Рис. Р28.2

28.2. Метод участков

ВОПРОСЫ

3. В методе участков интегралы по замкнутым контурам представлены в виде суммы интегралов по участкам пути интегрирования. Условным является толкование интегралов по участкам как индуктивностей этих участков либо как взаимных индуктивностей между ними, так как электрический ток всегда замкнут и не может прерываться на концах участков. Физический смысл имеет магнитный поток, сцепленный с контуром, но не с участком контура.

УПРАЖНЕНИЯ

6. Прямоугольный контур размером $a \times 2a$ можно представить в виде двух рядом расположенных квадратных контуров 1 и 2 размерами $a \times a$ (рис. Р28.2). Индуктивность прямоугольного контура отличается от величины $2L_к$, так как $M_{12} \neq 0$.

7. Внешние индуктивности квадратного и круглого витков равны соответственно:

$$L_к = \frac{\mu_0 a}{\pi}\left(2\ln\frac{a}{r_0} - 1{,}55\right),\ L_о = \mu_0 R\left(\ln\frac{8R}{r_0} - 2\right).$$

Искомый радиус R является решением уравнения $L_к = L_о$:

$$\frac{a}{\pi}\left(2\ln\frac{a}{r_0} - 1{,}55\right) = R\left(\ln\frac{8R}{r_0} - 2\right).$$

28.3. Индуктивность двухпроводной линии

ВОПРОСЫ

1. Взаимная индуктивность между двумя линиями обращается в нуль при таком их расположении, когда поток взаимной индукции равен нулю: если провода одной из линий размещены в плоскости $y = 0$ на одинаковом расстоянии от плоскости $x = 0$ (их координаты суть $z = a + j0$ и $z = -a + j0$), то провода второй линии должны располагаться в плоскости $x = 0$ (например, координаты проводов второй линии равны $z = 0 + jb$ и $z = 0 - jb$).

2. При постоянном токе плотность тока в любой точке сечения провода имеет одно и то же значение, тогда как при переменном токе она является функцией координат точки. Это приводит к различию не только внутренних индуктивностей проводов, но также и внешних.

УПРАЖНЕНИЯ

4. Принимая длину b рамки неограниченно возрастащей при $a = \text{const}$, $r_0 = \text{const}$, находим величину L/b из выражения для индуктивности прямоугольной рамки (см. § 28.6):

$$\lim_{b\to\infty}\frac{a}{b}\ln\frac{2ab}{r_0(a+\sqrt{a^2+b^2})}=0,\lim_{b\to\infty}\ln\frac{2ab}{r_0(b+\sqrt{a^2+b^2})}=\ln\frac{a}{r_0},\lim_{b\to\infty}\frac{2}{b}(a+b-\sqrt{a^2+b^2})=0.$$

Таким образом, индуктивность на единицу длины бесконечно длинной рамки равна $L'=\frac{1}{\pi}\left(\mu_0\ln\frac{a}{r_0}+\frac{\mu}{4}\right)$, что совпадает с выражением для расчета индуктивности двухпроводной линии при $a = D$, $r_0 = R$ (см. § 28.8).

5. Применяя метод зеркальных отражений, запишем индуктивность двухпроводной линии, образованной заданным проводом и его зеркальным изображением: $L=\frac{l}{\pi}\left(\mu_0\ln\frac{2h}{R}+\frac{\mu}{4}\right)$. Учитывая, что потокосцепление двухпроводной линии в два раза превышает потокосцепление подвешенного над поверхностью тела провода, получаем искомую индуктивность $L=\frac{l}{2\pi}\left(\mu_0\ln\frac{2h}{R}+\frac{\mu}{4}\right)$.

Как видно, индуктивность провода, подвешенного на высоте h над плоской поверхностью идеально проводящего тела, в два раза меньше индуктивности двухпроводной линии, расстояние между проводами которой равно $2h$.

6. Используя методы участков и зеркальных изображений (рис. Р28.3), можем записать выражение: $L = L_1 + M_{12} + M_{12'} + M_{1'2} + M_{1'2'}$, где L_1 — индуктивность двухпроводной линии без учета влияния земли, M_{12}, $M_{12'}$, $M_{1'2}$, $M_{1'2'}$ — взаимные индуктивности между проводами линии и их зеркальными изображениями, равные

$$M_{12}=-\frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\ln\frac{l}{h_1}-1\right),\ M_{12'}=\frac{\mu_0 l}{2\pi}\left[\ln\frac{2l}{\sqrt{(h_1+h_2)^2+D^2-(h_2-h_1)^2}}-1\right],$$

$$M_{1'2} = M_{12'},\ M_{1'2'} = -\frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\ln\frac{l}{h_2} - 1\right).$$

Учитывая, что $L_1 = \frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{D}{R} + \frac{\mu l}{4\pi}$, получаем

$$L = \frac{l}{2\pi}\left\{\frac{\mu}{2} + \mu_0 \ln\frac{4D^2 h_1 h_2}{R^2[(h_1+h_2)^2 + D^2 - (h_2-h_1)^2]}\right\} =$$

$$= \frac{l}{2\pi}\left\{\frac{\mu}{2} + \mu_0 \ln\frac{4D^2 h_1 h_2}{R^2[4h_1 h_2 + D^2]}\right\}.$$

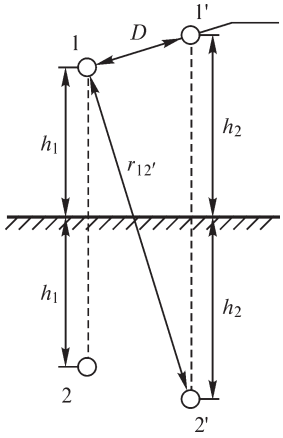

Рис. Р28.3

При заданных расстояниях и радиусах проводов находим: $L_1 = 1{,}18\cdot10^{-5} l$ Гн. Погрешность расчета индуктивности при пренебрежении влиянием земли не превышает 1 %.

7. Для расчета индуктивности двухпроводной линии отобразим с помощью функции $\zeta = f(z)$ комплексного переменного заданную область на верхнюю полуплоскость. Выбор отображающей функции, нахождение координат осей проводов в плоскости переменного ζ выполняется аналогично рассмотренному в § 25.3, упр. 4. Учитывая, что при конформном отображении токи и потокосцепления не претерпевают изменений и имеют те же значения, что и в плоскости переменного z, можем рассчитать индуктивность по формуле, полученной при решении предыдущего упражнения, подставляя значения параметров R_0, D_0, h_{10}, h_{20}, получаемые в плоскости переменной ζ. Радиусы проводов примут приближенные значения $R|f'(z)|$ при расчете функции $|f'(z)|$ на оси проводов. Обозначив координаты осей проводов в плоскости ζ через $\zeta_1 = v_1 + ju_1$, $\zeta_2 = v_2 + ju_2$, получим: $D_0 = \sqrt{(v_1 - v_2)^2 + (u_1 - u_2)^2}$, $h_{10} = u_1$, $h_{20} = u_2$. Например, при решении задачи, показанной на рис. В28.1, *б*, и использовании отображающей функции $\zeta = e^{\frac{\pi}{d}z}$ имеем $R_{10} = R\pi/d$, $R_{20} = R(\pi/d)e^{\pi/d h_4}$, $z_1 = jh_1$, $z_2 = h_4 + jh_2$, $\zeta_1 = \cos\pi h_1/d + j\sin\pi h_1/d$, $\zeta_2 = e^{\frac{\pi}{d}h_4}(\cos\pi h_2/d + j\sin\pi h_2/d)$, так что

$$D_0 = \sqrt{\left(\cos\frac{\pi h_1}{d} - e^{\pi/d h_4}\cos\frac{\pi h_2}{d}\right)^2 + \left(\sin\frac{\pi h_1}{d} - e^{\pi/d h_4}\sin\frac{\pi h_2}{d}\right)^2}.$$

Отображающие функции для других конфигураций областей приведены при решении упр. 4, § 25.3.

8. Так как при немагнитном материале проводов линии выражение $L = \mu_0 l/\pi \times \times\left(\ln\frac{D}{R} + \frac{1}{4}\right)$ дает точное значение индуктивности, то найденные с помощью формул $f_1 = B\,l\,i$, $f_2 = \frac{1}{2}i^2\frac{dL}{dg}$ выражения $f_1 = \frac{\mu_0 l i^2}{2\pi D}$, $f_2 = \frac{1}{2}i^2\frac{d}{dD}\left[\frac{\mu_0 l}{\pi}\left(\ln\frac{D}{R} + \frac{1}{4}\right)\right]$ совпадают.

Если провода выполнены из ферромагнитного вещества, то допущение о том, что токи сосредоточены на осях, является приближенным, справедливым лишь при выполнении соотношения $D \gg R$.

28.4. Индуктивность трехфазной линии

УПРАЖНЕНИЯ

1. Наличие вблизи проводов линий передачи немагнитных проводящих тел приводит к изменению индуктивностей проводов. Для их нахождения целесообразно воспользоваться, принимая во внимание плоскую поверхность земли, методом зеркальных изображений и рассчитать величины L и M с учетом зеркально расположенных относительно поверхности земли токов. Следует учесть, что даже при симметричном расположении проводов, когда $D_{12} = D_{23} = D_{31}$, расстояния между проводами и их зеркальными изображениями $r_{1'2}$, $r_{1'3}$, $r_{2'3}$ не могут быть равными.

Так как индуктивности проводов 1, 2, 3 с учетом влияния земли равны $L_k = \frac{l}{2\pi}\left(\mu_0 \ln\frac{2h_k}{R_k} + \frac{\mu}{4}\right)$, $k = 1, 2, 3$ (см. § 28.3, решение упр. 5), то среднее значение индуктивности провода $L = \frac{1}{3}(L_1 + L_2 + L_3)$ суть $L = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{2h}{R} + \frac{\mu l}{8\pi}$, где $h = \sqrt[3]{h_1 h_2 h_3}$, $R = \sqrt[3]{R_1 R_2 R_3}$.

Взаимные индуктивности между проводами рассчитываем по формулам

$$M_{12} = M_{120} + M_{1'2} = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{r_{1'2}}{D_{12}},\ M_{13} = M_{130} + M_{1'3} = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{r_{1'3}}{D_{13}},$$

$$M_{23} = M_{230} + M_{2'3} = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{r_{2'3}}{D_{23}}.$$

Среднее значение коэффициента взаимной индукции между проводами равно $M = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{r}{D}$, где под величинами r, D следует понимать их средние значения, равные $r = \sqrt[3]{r_{1'2} r_{1'3} r_{2'3}}$, $D = \sqrt{D_{12} D_{13} D_{23}}$.

Таким образом, эквивалентная индуктивность провода трехфазной линии при учете влияния проводящей земли и наличия транспозиции проводов равна $L' = L - M = \frac{l}{2\pi}\left(\mu_0 \ln\frac{2hD}{Rr} + \frac{\mu}{4}\right)$.

2. Эквивалентная индуктивность провода трехфазной линии при указанном расположении проводов равна $L' = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\ln\frac{D\sqrt[3]{2}}{R} + \frac{1}{4}\right) \approx 1{,}3\cdot10^{-6}\ l$ Гн $= 1{,}3\cdot10^{-2}$ Гн, тогда как индуктивность двухпроводной линии, образованной проводами

а) 1 и 2: $L_{12} \approx 2{,}5\cdot10^{-6}\cdot l$ Гн $= 2{,}5\cdot10^{-6}$ Гн.

б) 2 и 3: $L_{23} = L_{12} \approx 2{,}5\cdot10^{-6}\cdot l$ Гн $= 2{,}5\cdot10^{-2}$ Гн,

в) 1 и 3: $L_{13} \approx 2{,}77\cdot10^{-6}\cdot l$ Гн $= 2{,}77\cdot10^{-2}$ Гн.

3. Эквивалентные индуктивности проводов линий определяются выражениями: $L'_{(a)} = \frac{l}{2\pi}\mu_0\left(\ln\frac{D}{R} + \frac{1}{4}\right)$, $L'_{(б)} = \frac{l}{2\pi}\mu_0\left(\ln\frac{D\sqrt[3]{2}}{R} + \frac{1}{4}\right)$. Так как $\sqrt[3]{2} > 1$, то $L'_{(б)} > L'_{(a)}$.

Значение расстояния $D_{(a)}$, при котором $L'_{(a)} = L'_{(б)}$, определяем из уравнения $\ln\frac{D_{(a)}}{R} = \ln\frac{D\sqrt[3]{2}}{R}$, из которого следует, что $D_{(a)} = D\sqrt[3]{2} \cong 1{,}26\,D$.

4. Мощность, переносимую в крайние фазы, находящиеся на расстоянии $2D$ друг от друга, можно рассчитать по формуле $P_{1вн} = P_{3вн} = \omega I^2 \operatorname{Im}(a^2M_{12} + aM_{13})$, тогда как мощность, переносимую во вторую фазу, — по формуле

$$P_{2вн} = \omega I^2 \operatorname{Im}(a^2M_{23} + aM_{21}).$$

Подставляя в эти выражения коэффициенты взаимной индукции $M_{12} = M_{23} = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\ln\frac{2l}{D} - 1\right)$, $M_{13} = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\ln\frac{l}{D} - 1\right)$, получаем $P_{1вн} \cong 2700$ Вт, $P_{2вн} = 0$.

Если принять допущение о равномерном распределении тока по сечению проводов, что справедливо при относительно небольших радиусах проводов и низких частотах тона, то $r = l/\gamma s$ и $\frac{P_{1вн}}{P} = \frac{P_{1вн}}{3I^2 r} \approx 0{,}32$.

5. На первом этапе расчета применением соответствующей функции комплексного переменного $\zeta(z)$ область расположения линии отображается на верхнюю полуплоскость. Координаты осей проводов, их радиусы, а также расстояния между ними следует рассчитать так же, как это выполнено при рассмотрении двухпроводной линии (см. решение упр. 7, § 28.3). На втором этапе эквивалентную индуктивность провода вычисляем по формуле $L' = \frac{l}{2\pi}\left(\mu_0 \ln\frac{2hD}{Rr} + \frac{\mu}{4}\right)$, учитывая, что определяемые как средние величины h, D, R, r (см. решение упр. 1) следует рассчитать в плоскости переменного $\zeta = f(z)$. Для расчета эквивалентной индуктивности провода при допущении однородности среды можно использовать выражение $L' = \frac{l}{2\pi}\left(\mu_0 \ln\frac{D}{R} + \frac{\mu}{4}\right)$, где D, R — средние значения расстояний между проводами и их радиусы, рассчитанные в исходной плоскости переменного $z = x + jy$.

29.1. Плоская электромагнитная волна в диэлектрике

ВОПРОСЫ

3. Обратная волна возникает при отражении прямой волны электромагнитного поля от среды, электромагнитные свойства которой отличны от свойств диэлектрика, в котором распространяется волна.

4. Решение волнового уравнения, имеющее своим аргументом функции $z - vt$ и $z + vt$, может в частных случаях содержать произведения функций с аргументами kz, kvt. Действительно, функцию $E_m \sin kz \sin kvt$ можно преобразовать к виду $1/2\, E_m[\cos k(z - vt) - \cos k(z + vt)]$. В длинной линии без потерь (см. т. 2, § 17.8), процессы в которой также описываются волновым уравнением, при наложении незатухающих бегущих волн возникают стоячие волны, которые описывают функциями с аргументами βx, ωt. Аналогичные явления могут иметь место и при распространении электромагнитных волн в диэлектрике.

УПРАЖНЕНИЯ

5. При движении наблюдателя вдоль оси z со скоростью $v = -\dfrac{10^2}{30} t \cong -3{,}3t$, когда координата z изменяется по закону $z = z_0 - 3{,}3t$, функция $E(z, t)$ принимает постоянное значение, равное $10 \cos 30z_0$. Поэтому волна распространяется со скоростью $v \cong 3{,}3t$ в направлении, обратном направлению оси z.

Из условия $H = \sqrt{\varepsilon/\mu}E$ получаем $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i}\, 10\sqrt{\varepsilon/\mu}\, \cos(100t + 30z)$.

6. При $k > 0$ электромагнитная волна распространяется в направлении оси z и составляющие напряженности магнитного поля равны $H_x = -E_y\sqrt{\varepsilon/\mu}\; e^{j(\omega t - kz)}$, $H_y = E_x\sqrt{\varepsilon/\mu}\; e^{j(\omega t - kz)}$, $\boldsymbol{H} = (-\boldsymbol{i}E_y + \boldsymbol{j}E_x)\sqrt{\varepsilon/\mu}\; e^{j(\omega t - kz)}$.

8. Искомые значения находим из условия $\dfrac{\varepsilon E^2}{2} = \dfrac{\mu H^2}{2}$: $H_{\max} = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_{\text{доп}} \approx 8 \cdot 10^3$ А/м, $B_{\max} \approx 10^{-2}$ Тл. Объемная плотность электромагнитной энергии при таких значениях напряженности поля $W' = \varepsilon_0 E^2 \approx 80$ Дж/м^3.

9. Объемная плотность энергии электромагнитного поля равна $W'_{\text{эм}} = \dfrac{\mu H^2}{2} + \dfrac{\varepsilon E^2}{2} = \mu H^2$ в предположении, что существует волна лишь одного направления. Так как в соответствии с законом полного тока $H = \dfrac{i}{2\pi r} = \dfrac{I_m}{2\pi r} \sin\left(\omega t - \dfrac{\omega}{v} z\right)$, то в объеме диэлектрика кабеля длиной λ между жилой и оболочкой

$$W_{\text{эм}} = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{\lambda} \int_0^{2\pi} \frac{\mu I_m^2}{4\pi^2 r} \sin^2\left(-\frac{\omega}{v} z\right) dr\, d\varphi\, dz = \frac{\mu I_m^2 \lambda}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Энергия электромагнитного поля, поглощаемая в нагрузке, равна $W_{\text{эм}} = UI\,T = \dfrac{\mu I_m^2 \lambda}{4\pi} \ln \dfrac{R_2}{R_1}$, что совпадает с найденным выражением

$$T = \mu\lambda\sqrt{\varepsilon/\mu},\; E = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{I_m}{2\pi\sqrt{2}\, r},\; U = \frac{I_m}{2\pi\sqrt{2}} \sqrt{\mu/\varepsilon} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

10. Индуктивность и емкость кабеля единичной длины определяются выражениями $L = \dfrac{\mu}{2\pi} \ln \dfrac{R_2}{R_1}$, $C = \dfrac{2\pi\varepsilon}{\ln R_2/R_1}$, где R_1, R_2 — радиусы жилы и оболочки (см. § 3.4, т. 1).

Так как скорость распространения электромагнитной волны равна $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$, то, используя выражения $\mu = \dfrac{2\pi L}{\ln R_2/R_1}$, $\varepsilon = \dfrac{C \ln R_2/R_1}{2\pi}$, получаем: $v = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

При заданных величинах ε, μ имеем $v = 1/\sqrt{4\mu_0\varepsilon_0} = c/2$.

29.2. Вектор Пойнтинга

УПРАЖНЕНИЯ

1. При отсутствии потерь в кабеле вектор напряженности электрического поля не имеет составляющих, параллельных оси z кабеля, так что $E = E_r \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon r} =$ $= \dfrac{u}{r \ln R_2/R_1}$, $H = H_\varphi = \dfrac{i}{2\pi r}$, R_1, R_2 — радиусы жилы и оболочки.

Вектор Пойнтинга, имеющий единственную составляющую, параллельную оси кабеля, равен $S = E_r H_\varphi = \dfrac{ui}{2\pi r^2 \ln R_2/R_1}$.

2. Будем считать, что электромагнитная волна имеет составляющие напряженностей E_x и H_y электрического и магнитного полей. Ток сквозь ограниченную контуром поверхность имеет наибольшее значение, если вектор $d\boldsymbol{s}$, нормальный к поверхности, совпадает с ортом $\boldsymbol{i}$ оси x, т. е. если контур располагается в плоскости $x = \text{const}$. Принимая размер контура вдоль оси y равным a и вдоль оси z равным b, искомый ток можем записать в виде:

$$i = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \int_s E_x \, ds = aH_{ym} \sin \frac{kb}{2} \cos\left(\omega t - kz + \frac{kb}{2}\right), \text{ здесь } k = \frac{\omega}{v}.$$

Такое же выражение получаем, рассчитывая ток с помощью уравнения $i = \oint \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l}$:

$$i = -aH_{ym} \sin[\omega t - k(z + b)] + aH_{ym} [\sin(\omega t - kz)] = aH_{ym} \sin\frac{kb}{2} \cos\left(\omega t - kz + \frac{kb}{2}\right).$$

4. Выделим внутри конденсатора между его обкладками цилиндр радиусом R и высотой d, равной расстоянию между обкладками. На боковой поверхности выделенного цилиндра напряженность E электрического поля имеет единственную составляющую, равную $E = u(t)/d$. Примем, что вектор напряженности магнитного поля имеет на ней также единственную составляющую, равную $H = i_{см}/2\pi r =$ $= \dfrac{C}{2\pi r}\dfrac{du}{dt}$ (здесь C — емкость выделенной части конденсатора). Передаваемая сквозь боковую поверхность цилиндра электромагнитная энергия

$$W_{эм} = \int_0^t \int_s E H \, dt \, ds = \int_0^t \int_s \frac{C}{2\pi r d} u(t) \frac{du}{dt} \, dt \, ds = C \int_0^t u(t) \frac{du}{dt} \, dt.$$

После интегрирования находим: $W_{эм} = \dfrac{C[u^2(t) - u^2(0)]}{2} = W_{эм}(t) - W_{эм}(0)$.

Таким образом, если боковая поверхность выделенного цилиндра является боковой поверхностью слоя диэлектрика конденсатора, то передаваемая сквозь поверхность диэлектрика электромагнитная энергия равна приращению энергии электромагнитного поля конденсатора.

5. Условие равенства передаваемой в слоях электромагнитной энергии $\int\limits_{s_1} E_1 H_1 ds_1 = \int\limits_{s_2} E_2 H_2 ds_2$ запишем, учитывая соотношения $E = \sqrt{\mu/\varepsilon}H$, $H = i/2\pi r$, $ds = 2\pi r\, dr$, в виде $\sqrt{\mu_1/\varepsilon_1}\int\limits_{R_1}^{R} 1/r\, dr = \sqrt{\mu_2/\varepsilon_2}\int\limits_{R}^{R_2} 1/r\, dr$, которое после интегрирования позволяет получить уравнение $\sqrt{\mu_1/\varepsilon_1}\ln R/R_1 = \sqrt{\mu_2/\varepsilon_2}\ln R_2/R$.

При $\frac{\mu_1}{\varepsilon_1} = \frac{\mu_2}{\varepsilon_2}$ имеем $R = \sqrt{R_1 R_2}$. В общем случае, обозначив $\alpha = \sqrt{\frac{\mu_1\varepsilon_2}{\mu_2\varepsilon_1}}$, находим $\ln (R/R_1)^{\alpha} = \ln R_2/R$, откуда $R = \sqrt[\alpha+1]{R_1^{\alpha} R_2}$.

6. Так как напряженности электрического и магнитного полей равны $E(t) = \frac{u(t)}{d} = \frac{U_m}{d}\sin\omega t$, $H(r, t) = \frac{i}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi r}\pi r^2 \varepsilon \frac{dE}{dt} = \frac{\varepsilon U_m \omega}{2d} r\cos\omega t$, то среднее за период значение вектора Пойнтинга $S(r, t) = E(t)H(r, t)$ обращается в нуль (здесь d — расстояние между обкладками).

8. Допустим, что напряженность электрического поля $E_x = E_{xm}\sin\left(\omega t - \omega z/v\right)$.

При вычислении ЭДС способом *а* по формуле $e = \oint\limits_l \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l}$ под величиной E следует понимать напряженность индуцированного электрического поля, равную $E_{\text{инд}} = vB$, так что

$$e = \oint\limits_l \boldsymbol{E}_{\text{инд}}\, d\boldsymbol{l} = a\,(E_{\text{инд}1} - E_{\text{инд}2}) = av\mu\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,(E_1 - E_2) = 2aE_{xm}\sin\frac{\omega b}{2v}\cos\left[\omega t - \frac{\omega}{v}\left(z + \frac{b}{2}\right)\right].$$

При вычислении ЭДС способом *б* по формуле $e = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ также получаем

$$e = -\frac{\partial}{\partial t} a\int\limits_z^{z+b} \mu\sqrt{\varepsilon/\mu}E_{xm}\sin\left(\omega t - \frac{\omega}{v}z\right)dz = 2aE_{xm}\sin\frac{\omega b}{2v}\cos\left[\omega t - \frac{\omega}{v}\left(z + \frac{b}{2}\right)\right].$$

При подстановке численных значений находим $E_m \cong 7{,}9$ В.

29.3. Вихревая и потенциальная составляющие электромагнитного поля

ВОПРОСЫ

1. Вихревая составляющая напряженности электрического поля обращается в нуль, когда векторный магнитный потенциал не изменяется во времени. На-

пример, при перемещении с постоянной скоростью проводящего тела в однородном магнитном поле векторный магнитный потенциал в любой точке объема тела сохраняет одно и то же значение. Однако при этом потенциальная составляющая напряженности электрического поля отлична от нуля в окружающем тело диэлектрике. Ее существование обусловлено появлением на поверхности проводника индуцированных электрических зарядов. Заряды не создают электрического поля внутри проводника, если тело изолировано и к нему не присоединена электрическая цепь. Таким образом, выполнено условие $\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = 0$ во всем пространстве, условие $\operatorname{grad} U = 0$ — внутри проводящего тела и $\operatorname{grad} U \neq 0$ — в окружающем тело диэлектрике.

Если к проводящему телу присоединена электрическая цепь, то под действием индуцированной в проводнике ЭДС в цепи может протекать электрический ток, и тогда получаем условие $\operatorname{grad} U \neq 0$ не только в диэлектрике, но и в объеме тела.

Потенциальная составляющая напряженности электрического поля обращается в нуль, когда действие электрических зарядов, распределенных в пространстве (например, в проводящем теле), компенсируется, заряды одного знака не обнажаются и их электрическим полем можно пренебречь.

Например, в плоском проводящем тонкостенном диске, помещенном в нормальное к его плоскости однородное переменное магнитное поле, напряженность электрического поля не содержит потенциальной составляющей, если диск однороден в отношении электрической проводимости вещества, из которого он изготовлен.

2. Переменное электромагнитное поле нельзя в общем случае описать с помощью только электрического и магнитного скалярных потенциалов, так как при этом имеем $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} U_э$, $\boldsymbol{H} = -\operatorname{grad} U_м$ и, следовательно, $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = 0$, что неверно.

УПРАЖНЕНИЯ

6. Напряженность индуцированного в кольце электрического поля содержит в силу постоянства удельной электрической проводимости вещества кольца только вихревую составляющую $\boldsymbol{E} = -\partial \boldsymbol{A}/\partial t$, направленную по оси провода кольца. Поэтому интегралы $\oint\limits_l \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l}$, $\oint\limits_l (\partial \boldsymbol{A}/\partial t)\, d\boldsymbol{l} = \partial \Phi/\partial t$ имеют смысл индуцируемой в кольце ЭДС. Так как $\boldsymbol{E} + \partial \boldsymbol{A}/\partial t = -\operatorname{grad} U = 0$, то получаем $\oint\limits_l (\boldsymbol{E} + \partial \boldsymbol{A}/\partial t)\, d\boldsymbol{l} = 0$, тогда как $\oint\limits_l \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = -\oint\limits_l (\partial \boldsymbol{A}/\partial t)\, d\boldsymbol{l} = ir$.

7. В силу электрической неоднородности материала кольца напряженность электрического поля содержит две составляющие: вихревую, равную $-\partial \boldsymbol{A}/\partial t$, и потенциальную $-\operatorname{grad} U$. Возникающие на общих границах полуколец электрические заряды создают электрическое поле. На одной из границ знак элек-

трических зарядов положителен, а на другой — отрицателен, в связи с чем векторы grad U в полукольцах имеют различные направления. Учитывая, что напряженности поля в полукольцах равны соответственно $E_1 = i/s\gamma_1$, $E_2 = i/s\gamma_2$, из выражений $E_1 = -\partial A_\alpha/\partial t - \partial U/r\,\partial\alpha|_1$, $E_2 = -\partial A_\alpha/\partial t - \partial U/r\,\partial\alpha|_2$ получаем: $\partial U/r\,\partial\alpha|_1 = -\partial A_\alpha/\partial t - i/s\gamma_1$, $\partial U/r\,\partial\alpha|_2 = -\partial A_\alpha/\partial t - i/s\gamma_2$.

29.4. Передача электромагнитной энергии вдоль проводов линии

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Вектор $\boldsymbol{H}$ напряженности магнитного поля имеет единственную угловую составляющую H_α как на поверхности жилы кабеля, так и на внутренней поверхности его оболочки, тогда как направление вектора напряженности $\boldsymbol{E}$ электрического поля на этих поверхностях может быть различным. При допущении бесконечно большой удельной электрической проводимости вещества кабеля и оболочки на обеих поверхностях имеем $E = E_r$, так что в этом случае вектор Пойнтинга имеет единственную составляющую S_z. Энергия электромагнитного поля передается в диэлектрике между жилой и оболочкой кабеля.

Если принять во внимание конечную проводимость вещества жилы и оболочки, то на их поверхностях наряду с радиальной составляющей напряженности электрического поля появляется также и касательная составляющая E_z, которая направлена на поверхностях жилы и оболочки в разные стороны в связи с тем, что ток в них течет в противоположных направлениях.

Вследствие этого вектор Пойнтинга будет иметь не только осевую, но также и радиальную S_r составляющую. В этом случае существуют потоки электромагнитной энергии, направленные внутрь жилы и оболочки кабеля. Эта часть электромагнитной энергии рассеивается в жиле и оболочке кабеля в виде тепла.

2. При допущении идеальной проводимости земли касательная к ней составляющая вектора напряженности электрического поля обращается в нуль, так что вектор Пойнтинга не содержит нормальной к поверхности земли составляющей и, следовательно, энергия электромагнитного поля передается вдоль поверхности земли, не проникая внутрь нее.

Если считать удельную электрическую проводимость земли конечной, то на ее поверхности получаем величины $E_t \neq 0$ и $S_n \neq 0$. В этом случае электромагнитная волна проникает в землю, что приводит к частичной потере энергии электромагнитного поля.

3. Синусоидальные напряжение и ток конденсатора с идеальным диэлектриком сдвинуты на угол 90°. Так как напряженности электрического и магнитного поля между обкладками конденсатора сдвинуты на такой же угол, то их произведение $S = EH$ является знакопеременной функцией, среднее за период значение которой равно нулю.

В одну четверть периода имеем $S > 0$ и электромагнитная энергия поступает внутрь конденсатора, тогда как в следующую четверть периода получаем $S < 0$ и электромагнитная энергия передается из диэлектрика конденсатора.

6. Учитывая, что $R \ll D$, будем считать, что электрические оси проводов совпадают с их геометрическими осями. Напряженности электрического и магнитного полей в точке A запишем в виде:

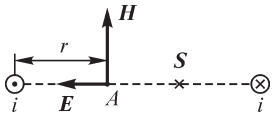

Рис. Р29.1

$$E(r) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon r} + \frac{\tau}{2\pi\varepsilon(D-r)} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{D-r}\right),$$

$$H(r) = \frac{i}{2\pi r} + \frac{i}{2\pi(D-r)} = \frac{i}{2\pi}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{D-r}\right),$$

где r — расстояние от геометрического центра одного из проводов до точки A (рис. Р29.1).

Учитывая, что линейная плотность заряда $\tau = \dfrac{Cu}{l} \cong \dfrac{\pi\varepsilon u}{\ln D/R}$, находим

$$E(r) = \frac{u}{2\ln D/R}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{D-r}\right), \quad S(r) = \frac{ui}{4\pi[r(D-r)]^2}\,\frac{D^2}{\ln D/R}.$$

На рис. Р29.1 показано направление вектора $\boldsymbol{S}$ Пойнтинга в одной из точек плоскости, проходящей через оси проводов. Их значения приведены в таблице.

r_A	м	0,06	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$S\cdot10^{-6}$	Вт/м^2	44,5	16,7	4,65	1,47	0,85	0,65	0,6

7. Для напряженности электрического и магнитного полей (рис. Р29.2) можем записать выражения (см. решение предыдущей задачи):

$$E(x,t) = \frac{u(x,t)\,D}{2\,(D^2/4 - y^2)\,\ln D/R},$$

$$H(x,t) = \frac{i(x,t)\,D}{2\pi(D^2/4 - y^2)}.$$

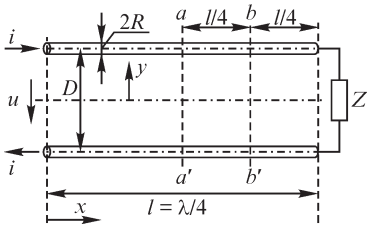

Рис. Р29.2

Напряжение между проводами и ток в них распределены вдоль линии по закону (см. т. 2, § 17.3) $\dot U = \dot U_1 \operatorname{ch}\gamma x - \dot I_1 Z \operatorname{sh}\gamma x$, $\dot I = \dot I_1 \operatorname{ch}\gamma x - \dfrac{\dot U_1}{Z}\operatorname{sh}\gamma x$, где $\dot U_1$, $\dot I_1$ — комплексные напряжение и ток в начале линии.

Так как линия нагружена на волновое сопротивление, то последнее выражение можем записать в виде $\dot U = \dot U_1(\operatorname{ch}\gamma x - \operatorname{sh}\gamma x)$, $\dot I = \dot I_1(\operatorname{ch}\gamma x - \operatorname{sh}\gamma x)$, или, учитывая соотношения $\gamma = \dfrac{2\pi}{\lambda} j$, $\operatorname{ch}\dfrac{2\pi}{\lambda} jx = \cos\dfrac{2\pi}{\lambda}x$, $\operatorname{sh} jx = j\sin\dfrac{2\pi}{\lambda}x$,

$$\dot{U} = \dot{U}_1\left(\cos\frac{2\pi}{\lambda}x - j\sin\frac{2\pi}{\lambda}x\right) = \dot{U}_1 e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}x}, \quad \dot{I} = \dot{I}_1 e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}x}.$$

На линиях $a - a'$ и $b - b'$ имеем $x_a = \lambda/8, x_b = 3\lambda/16$, так что $\dot{U}_a = \dot{U}_1 e^{-j\frac{\pi}{4}}, \dot{U}_b = \dot{U}_1 e^{-j\frac{3\pi}{8}}$ и

$$S_a = \frac{UID^2}{2\pi(D^2/4 - y^2)^2 \ln D/R}\sin^2\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$S_b = \frac{UID^2}{2\pi(D^2/4 - y^2)^2 \ln D/R}\sin^2\left(\omega t - \frac{3\pi}{8}\right).$$

Как видно, имеем $S \geq 0$ и, следовательно, в любой момент времени энергия электромагнитного поля передается от источника к нагрузке.

8. Подставляя в уравнения длинной линии (см. т. 2, § 17.7) $\dot{U} = \dot{U}_2 \operatorname{ch}\gamma x + \dot{I}_2 Z \operatorname{sh}\gamma x$, $\dot{I} = \dot{I}_2 \operatorname{ch}\gamma x + \frac{\dot{U}_2}{Z}\operatorname{sh}\gamma x$ величины $\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = Z e^{j\pi/6}$, $\operatorname{ch}\gamma x = \cos\frac{2\pi}{\lambda}x$, $\operatorname{sh}\gamma x = j\sin\frac{2\pi}{\lambda}x$, получим:

$$\dot{U} = \dot{U}_2\left(\cos\frac{2\pi}{\lambda}x + e^{-j\pi/6} j\sin\frac{2\pi}{\lambda}x\right), \quad \dot{I} = \dot{I}_2\left(\cos\frac{2\pi}{\lambda}x + e^{j\pi/6} j\sin\frac{2\pi}{\lambda}x\right).$$

При $x_a = \frac{\lambda}{8}$ имеем $\dot{U}_a = 1{,}225\,\dot{U}_2 e^{j30°}$, $\dot{I}_a = 0{,}707\,\dot{I}_2 e^{j60°}$, или $u_a = 1{,}225\sqrt{2}\,U_2 \sin(\omega t + 30°)$, $i_a = 0{,}707\sqrt{2}\,I_2 \sin(\omega t + 30°)$. При $x_b = \lambda/16$ находим $\dot{U}_a = \dot{U}_2(1{,}11 + j\,0{,}33)$, $\dot{I}_b = \dot{I}_2(0{,}73 + j0{,}33)$, $u_b = 1{,}16\sqrt{2}\,U_2 \sin(\omega t + 16°)$, $i_b = 0{,}8\sqrt{2}\,I_2 \sin(\omega t - 6°)$,

$$S_a = \frac{0{,}138 U_2 I_2 D^2}{(D^2/4 - y^2)^2 \ln D/R}\sin^2(\omega t + 30°),$$

$$S_b = \frac{0{,}148 U_2 I_2 D^2}{(D^2/4 - y^2)^2 \ln D/R}\sin(\omega t + 16°)\sin(\omega t - 6°).$$

При $l = 0{,}02\,\lambda$ имеем $x_a = 0{,}01\lambda$, $x_b = 0{,}005\lambda$, $\cos\frac{2\pi}{\lambda}x_a \cong 1$, $\sin\frac{2\pi}{\lambda}x_a \cong 0$, $\cos\frac{2\pi}{\lambda}x_b \cong 1$, $\sin\frac{2\pi}{\lambda}x_b \cong 0$, $S_a = S_b = \frac{U_2 I_2 D^2}{2\pi(D^2/4 - y^2)^2 \ln D/R}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)\sin\omega t$.

Построив функцию $S_b(t)$ при $l = 0{,}25\lambda$, а также функцию $S_a(t) = S_b(t)$ при $l = 0{,}02\lambda$, видим, что в некоторые промежутки времени они отрицательны, т. е. в эти промежутки времени поток электромагнитной энергии направлен не к приемнику, а от него к генератору. При реактивном или смешанном характере нагрузки происходит обмен электромагнитной энергией между приемником и линией, представляющей собой накопитель энергии, распределенный вдоль линии.

Отметим еще раз, что если линия нагружена на волновое сопротивление (см. упр. 7), то при любом x имеем $S \geq 0$, так как напряжение и ток совпадают по фазе. В этом случае не происходит обмена электромагнитной энергией между генератором и приемником, а осуществляется только ее передача.

30.1. Плоская электромагнитная волна в проводящей среде

ВОПРОСЫ

4. Составляющие напряженностей электрического и магнитного поля плоской электромагнитной синусоидальной волны в идеальном диэлектрике совпадают по фазе, в связи с чем отношение их комплексных значений, определяющее волновое сопротивление, является вещественным.

Как видно из решения уравнений относительно составляющих напряженностей электромагнитного поля синусоидальной волны в проводящей среде, величины $E(t)$, $H(t)$ сдвинуты по фазе на угол 45°. Поэтому волновое сопротивление проводящей среды является комплексным и носит активно-индуктивный характер.

5. В неидеальном диэлектрике протекают вихревые токи, препятствующие проникновению электромагнитной волны в глубь среды, в связи с чем волна затухает по мере ее удаления от поверхности диэлектрика. Вихревые токи приводят к выделению тепла и нагреву диэлектрика.

6. Приведенное соотношение, определяющее волновое сопротивление среды, справедливо, когда входящие в него величины $\dot{\boldsymbol{E}}$, $\dot{\boldsymbol{H}}$ — напряженности составляющих поля падающей волны. В пластине конечной толщины наряду с падающей существует также и отраженная от ее границ волна. Поэтому отношение величин $\dot{\boldsymbol{E}}$ и $\dot{\boldsymbol{H}}$ не определяет в этом случае волнового сопротивления среды.

7. В любой точке безграничной проводящей среды угол сдвига между величинами $E(t)$, $H(t)$ сохраняется неизменным и равным 45°.

8. С ростом частоты усиливается влияние индуцированных в проводящей среде вихревых токов, ослабляющих стороннее электромагнитное поле. Поэтому скорость затухания поля вдоль координаты его распространения возрастает и глубина проникновения поля в среду уменьшается.

9. Получаемая при таком способе определения скорость носит название фазовой. Введенная при изучении электромагнитного поля в диэлектрике (см. § 29.1) скорость распространения волн также является фазовой, но она одновременно является и скоростью распространения электромагнитной волны.

Фазовая скорость распространения волны в проводящей среде зависит от частоты изменения поля. Она характеризует электромагнитные процессы в проводящей среде только при гармоническом законе изменения поля во времени.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Электрические цепи с минимальным числом элементов, имеющие сопротивление $Z = (1 + j)\sqrt{\omega\mu/2\gamma} = r + jx$, содержат резистор и катушку индуктивности, соединенные последовательно или параллельно.

Получаем $r = x = \sqrt{\omega\mu/2\gamma}$ при последовательном, $g = b = \sqrt{\gamma/2\omega\mu}$ при параллельном соединении.

3. Расположим начало прямоугольной системы координат в середине сечения шины и направим оси, как указано на рис. Р30.1. Имеем $\dot{E} = \dot{E}_x$, $\dot{H} = \dot{H}_y$.

Определим из граничных условий $\dot{H} = \dot{I}/2h$ при $z = -d$, $\dot{H} = -\dot{I}/2h$ при $z = d$ постоянные, входящие в решение $\dot{H} = A_1 e^{-\alpha z} + A_2 e^{\alpha z}$ уравнения $\dfrac{d^2\dot{H}}{dz^2} = j\omega\mu_0\gamma\dot{H}$, $\alpha^2 = j\omega\mu_0\gamma$. Из уравнений $A_1 e^{\alpha d} + A_2 e^{-\alpha d} = \dfrac{\dot{I}}{2h}$, $A_1 e^{-\alpha d} + A_2 e^{\alpha d} = -\dot{I}/2h$ находим $A_1 = \dfrac{\dot{I}}{4h\,\mathrm{sh}\,\alpha d}$, $A_2 = -\dfrac{\dot{I}}{4h\,\mathrm{sh}\,\alpha d}$ и искомое решение запишем в виде $\dot{H} = -\dfrac{\dot{I}}{2h\,\mathrm{sh}\,\alpha d}\,\mathrm{sh}\,\alpha z$. С помощью уравнения $\gamma E = -\dfrac{dH}{dz}$ определяем напряженность электрического поля и плотность тока $\dot{E} = \dfrac{\dot{I}\alpha}{2\gamma h\,\mathrm{sh}\,\alpha d}\,\mathrm{ch}\,\alpha z$, $\dot{J} = \dfrac{\dot{I}\alpha}{2h\,\mathrm{sh}\,\alpha d}\,\mathrm{ch}\,\alpha z$.

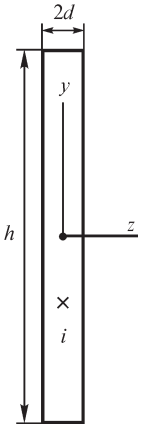

Рис. Р30.1

При постоянном токе сопротивление r_0 шины длиной l можно найти по формуле $r_0 = \dfrac{l}{\gamma s} = = \dfrac{l}{2\gamma h d}$. При переменном токе энергию, проникающую сквозь поверхность шины, можно рассчитать с помощью выражения $\dot{\boldsymbol{S}} = \oint\limits_s (\dot{\boldsymbol{E}}\,\overset{*}{\boldsymbol{H}})\,d\boldsymbol{s}$, а внутреннее реактивное и активное сопротивления шины соответственно по формулам

$$x_{\text{внутр}} = \mathrm{Im}\,\frac{l}{I^2}\oint\limits_s (\dot{\boldsymbol{E}}\,\overset{*}{\boldsymbol{H}})\,d\boldsymbol{s} = \frac{2hl}{I^2}\,\mathrm{Im}(\dot{\boldsymbol{E}}\,\overset{*}{\boldsymbol{H}})_{z=-d},\ r = \frac{2hl}{I^2}\,\mathrm{Re}(\dot{\boldsymbol{E}}\,\overset{*}{\boldsymbol{H}})_{z=-d}.$$

Подставляя в последнее выражение найденные выше величины $\dot{\boldsymbol{E}}$ и $\overset{*}{\boldsymbol{H}}$, получаем

$r = \dfrac{l}{2\gamma h}\,\mathrm{Re}\,[\alpha\ \mathrm{cth}\ \alpha d]$

и $r/r_0 = kd\ \mathrm{Re}\,[(1+j)\ \mathrm{cth}\ (1+j)\,kd]$,

где $k = \sqrt{\omega\mu\gamma/2}$. При вычислениях используем соотношение

$$\mathrm{cth}(1+j)\,kd = \frac{\mathrm{ch}\,(1+j)kd}{\mathrm{sh}\,(1+j)kd} = \frac{\mathrm{sh}\,2kd - j\sin 2kd}{\mathrm{ch}\,2kd - \cos 2kd}.$$

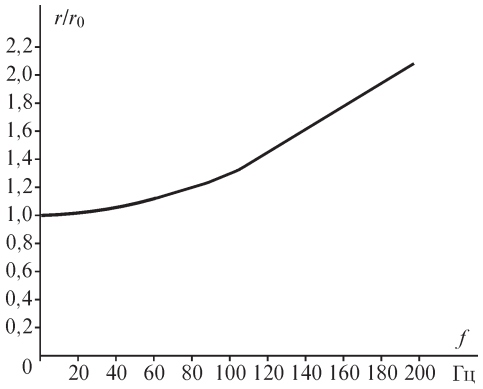

Рис. Р30.2

Кривая зависимости $r/r_0 = \varphi(f)$ показана на рис. Р30.2.

5. Учитывая, что $\dot{J}(z) \equiv \mathrm{ch}\,(1+j)\,kz = \mathrm{ch}\,kz\cos kz + j\,\mathrm{sh}\,kz\sin kz$ (см. решение упр. 3), находим, что на расстоянии $2d$ фаза плотности тока изменяется на величину $\Delta\psi_J = \mathrm{arctg}\ (\mathrm{th}\,kz\ \mathrm{tg}\,kz)$. Из соотношения $\Delta\Psi_J = 2\pi n$ получаем $\pi n = kd$, $k = \dfrac{\pi n}{d}$ и $f = \dfrac{\pi}{\mu\gamma}\left(\dfrac{n}{d}\right)^2$.

Подставляя численные значения, получаем $f \cong 440$ Гц при $n = 1$, $f \cong 1750$ Гц при $n = 2$.

30.2. Активное и индуктивное сопротивления проводов

ВОПРОСЫ

6. Так как переменное электромагнитное поле является вихревым, то напряжение $u_{ad} = \int_a^d \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l}$ зависит от выбора пути между точками *a*, *d*. Другими словами, показание вольтметра зависит от расположения его соединительных проводов, подходящих к точкам *a*, *d*. Чем больший внешний магнитный поток, созданный током жилы кабеля, охвачен соединительными проводами, тем большим будет и показание вольтметра. Поэтому при расположении проводов вдоль линии *ad* (см. рис. В30.1) показание вольтметра будет наименьшим, в этом случае проводами охвачен лишь внутренний магнитный поток провода. При расположении проводов вдоль линии *abcd* показание вольтметра будет наибольшим, так как наряду с внутренним потоком измерительные провода охватывают также полностью и внешний магнитный поток, приходящийся на длину *l* жилы.

8. Ребра и углы тел в действительности всегда имеют конечный радиус закругления, так что их можно аппроксимировать соответственно цилиндром и сферой радиусом *R*. Соотношение радиуса закругления и длины λ электромагнитной волны в ферромагнитном теле определяет возможность рассмотрения последней как плоской: при $R \gg \lambda$ ее можно считать плоской.

В плоской волне характеризующие ее векторы $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ зависят только от одной координаты. Это условие в рассматриваемом случае выполняется приближенно, если длина электромагнитной волны в ферромагнитном теле значительно меньше расстояния, отсчитываемого вдоль его поверхности, на котором амплитуда векторов $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ претерпевает значительное изменение.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Обозначим шины цифрами 1, 2, а их длинные стороны буквами *a*, *b* (рис. Р30.3). Для расчета поля внутри любой из шин принимаем прямоугольную систему координат, связанную с той шиной, поле в которой рассчитываем, и располагаем начало координат в центре сечения шины.

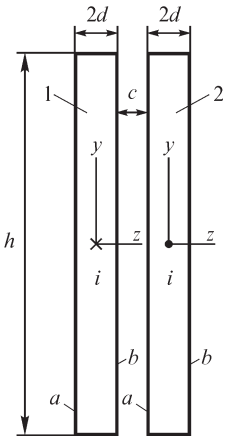

Рис. Р30.3

Напряженность магнитного поля в любой из шин записываем в виде $\dot{H} = A_1 e^{-\alpha z} + A_2 e^{\alpha z}$ и определяем постоянные A_1, A_2 из условий $\dot{H} = \dot{H}_a$ при $z = -d$ и $\dot{H} = \dot{H}_b$ при $z = d$:

$$\dot{H} = -\dot{H}_a \frac{\operatorname{sh}\alpha(z-d)}{\operatorname{sh}2\alpha d} + \dot{H}_b \frac{\operatorname{sh}\alpha(z+d)}{\operatorname{sh}2\alpha d}.$$

Используя граничные условия $\dot{H}_{1a} = 0$, $\dot{H}_{1b} = -\dot{I}/h$, $\dot{H}_{2a} = -\dot{I}/h$, $\dot{H}_{2b} = 0$, получаем:

$$\dot{H}_1 = -\frac{\dot{I}}{h}\frac{\operatorname{sh}\alpha(z+d)}{\operatorname{sh}2\alpha d}, \quad \dot{J}_1 = \frac{\alpha\dot{I}}{h}\frac{\operatorname{ch}\alpha(z+d)}{\operatorname{sh}2\alpha d},$$
$$\dot{H}_2 = \frac{\dot{I}}{h}\frac{\operatorname{sh}\alpha(z-d)}{\operatorname{sh}2\alpha d}, \quad \dot{J}_2 = -\frac{\alpha\dot{I}}{h}\frac{\operatorname{ch}\alpha(z-d)}{\operatorname{sh}2\alpha d}.$$

Кривые зависимостей $|\dot{H}_1(z)|$ для заданных численных значений изображены на рис. Р30.4.

Сопротивление токопровода содержит активную и реактивную составляющие, причем последнюю можно разделить на две: x_i и x_e, обусловленные соответственно внутренним и внешним магнитными потоками: $Z = Z_{i1} + Z_{i2} + jx_e = Z_i + jx_e$. Внутреннее сопротивление Z_i одной шины токопровода рассчитаем по формуле

$$Z_i = \frac{l}{I^2}\oint_s [\dot{\boldsymbol{E}}, \mathring{\boldsymbol{H}}]d\boldsymbol{s} = \frac{\alpha}{\gamma h} l \operatorname{cth} 2\alpha d,$$

а внешнее — по формуле $x_e = \omega L_e = \omega \mu_0 l \frac{c}{h}$, где c — расстояние между шинами, l — длина шины.

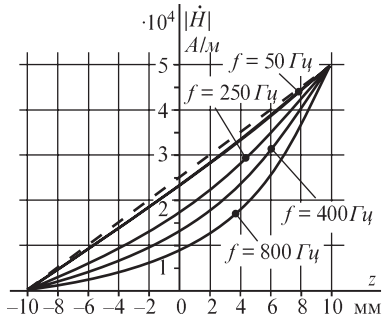

Рис. Р30.4

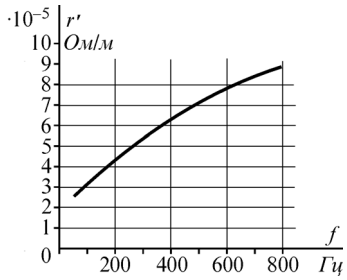

Рис. Р30.5

Подставляя численные значения, находим зависимость $r' = r'(f)$, изображенную на рис. Р30.5.

2. Воспользуемся полученным в предыдущей задаче решением

$$\dot{H} = -\dot{H}_a \frac{\operatorname{sh}\alpha(z-d)}{\operatorname{sh}2\alpha d} + \dot{H}_b \frac{\operatorname{sh}\alpha(z+d)}{\operatorname{sh}2\alpha d},$$

определяющим поле в любой из шин, записывая предварительно величины $\dot{H}_{1a}$, $\dot{H}_{1b}$, $\dot{H}_{2a}$, $\dot{H}_{2b}$, $\dot{H}_{3a}$, $\dot{H}_{3b}$:

$$\dot{H}_{1a} = 0, \quad \dot{H}_{1b} = -\frac{I_1}{2h} - \frac{I_2}{2h} - \frac{I_3}{2h} = -\frac{I_1}{h}, \quad \dot{H}_{2a} = \dot{H}_{1b} = -\frac{I_1}{h},$$
$$\dot{H}_{2b} = -\frac{I_1}{2h} + \frac{I_2}{2h} - \frac{I_3}{2h} = \frac{1}{2h}(-I_1 + I_2 - I_3), \quad \dot{H}_{3a} = \dot{H}_{2b}, \quad \dot{H}_{3b} = 0.$$

Получаем:

$$\dot{H}_1 = -\frac{I_1}{h}\frac{\mathrm{sh}\,\alpha(z+d)}{\mathrm{sh}\,2\alpha d},\quad \dot{J}_1 = \frac{\alpha I_1}{h}\frac{\mathrm{ch}\,\alpha(z+d)}{\mathrm{sh}\,2\alpha d},$$

$$\dot{H}_2 = -\frac{I_1}{h}\frac{\mathrm{sh}\,\alpha(z-d)}{\mathrm{sh}\,2\alpha d} + \frac{1}{2h}(-I_1 + I_2 - I_3)\frac{\mathrm{sh}\,\alpha(z+d)}{\mathrm{sh}\,2\alpha d},$$

$$\dot{J}_2 = \frac{\alpha I_1}{2h}\frac{\mathrm{ch}\,\alpha(z-d)}{\mathrm{sh}\,2\alpha d} - \frac{\alpha}{2h}(-I_1 + I_2 - I_3)\frac{\mathrm{ch}\,\alpha(z+d)}{\mathrm{sh}\,2\alpha d},$$

$$\dot{H}_3 = -\frac{1}{2h}(-I_1 + I_2 - I_3)\frac{\mathrm{sh}\,\alpha(z-d)}{\mathrm{sh}\,2\alpha d},$$

$$\dot{J}_3 = \frac{\alpha}{2h}(-I_1 + I_2 - I_3)\frac{\mathrm{ch}\,\alpha(z-d)}{\mathrm{sh}\,2\alpha d}.$$

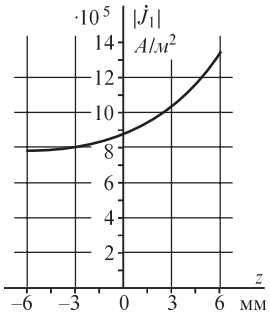

Рис. Р30.6

Зависимость $|\dot{J}_1(z)|$ изображена на рис. Р30.6.

3. Применяя закон полного тока, можем получить величины:

$$\dot{H}_{1a} = \dot{H}_{3b} = 0,\ \dot{H}_{1b} = \dot{H}_{2a} = -\frac{\dot{I}_1}{h},\ \dot{H}_{2b} = \dot{H}_{3a} = \frac{\dot{I}_3}{h}.$$

Для нахождения величин $\dot{H}_{1b} = \dot{H}_{2a}$ воспользуемся выражением, полученным при решении упр. 1:

$$\dot{H} = -\dot{H}_a\frac{\mathrm{sh}\,\alpha(z-d)}{\mathrm{sh}\,2\alpha d} + \dot{H}_b\frac{\mathrm{sh}\,\alpha(z+d)}{\mathrm{sh}\,2\alpha d},$$

а также выражением

$$\dot{E} = -\frac{1}{\gamma}\frac{d\dot{H}}{dz} = \dot{H}_a\frac{\alpha}{\gamma}\frac{\mathrm{ch}\,\alpha(z-d)}{\mathrm{sh}\,2\alpha d} - \dot{H}_b\frac{\alpha}{\gamma}\frac{\mathrm{ch}\,\alpha(z+d)}{\mathrm{sh}\,2\alpha d}.$$

Выбирая контур длиной l, образованный линиями, лежащими на сторонах $1b$ и $2a$ шин, запишем уравнение $\oint_l \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} = -j\omega\dot{\Phi}$ в виде $\dot{E}_{2a}l - \dot{E}_{1b}l = -j\omega\mu_0 c\,l\,\dot{H}_{1b}$ и, учитывая, что $\dot{E}_{2a} = -\frac{\dot{I}_3\,\alpha}{\gamma h\,\mathrm{sh}\,2\alpha d} - \frac{\alpha\,\dot{I}_1}{\gamma h}\,\mathrm{cth}\,2\alpha d$, $\dot{E}_{1b} = \frac{\alpha\,\dot{I}_1}{\gamma h}\,\mathrm{cth}\,2\alpha d$, после несложных преобразований находим: $\dot{I}_1 = \frac{\dot{I}}{(2\,\mathrm{cth}\,2\alpha d + \alpha c)\,\mathrm{sh}\,2\alpha\,d}$. Подставляя численные значения, получаем: $\dot{I}_1 = 12 - j\,215$ А, $\dot{I}_2 = 988 + j\,215$ А.

4. Учитывая условия симметрии, можем на основе закона полного тока записать соотношения:

$$\dot{H}_{1a} = \dot{H}_{4b} = 0,\ \dot{H}_{2b} = \dot{H}_{3a} = -\frac{1}{h}(\dot{I}_1 + \dot{I}_2),\ \dot{H}_{1b} = \dot{H}_{2a} = \dot{H}_{3b} = \dot{H}_{4a}.$$

Величину $\dot{H}_{1b}$ найдем, используя закон электромагнитной индукции $\oint_l \dot{\boldsymbol{E}}\,d\boldsymbol{l} = -j\omega\,\mu_0\dot{\Phi}$ и выбирая такой контур интегрирования, длина которого равна l и две стороны которого проходят вдоль линий $1b$ и $2a$: $\dot{E}_{2a}l - \dot{E}_{1b}l = -j\omega\mu_0 c\,l\,\dot{H}_{1b}$. Записывая вы-

ражения для $\dot{E}_{1b}$, $\dot{E}_{2a}$, $\dot{H}_{1b}$ и повторяя решение предыдущего упражнения, получаем выражение для тока $\dot{I}_1$.

5. Как и при решении упр. 3 и 4, выражаем вначале напряженность магнитного поля на сторонах a и b шин через их токи. Для нахождения токов шин записываем уравнение $\oint_l \dot{\boldsymbol{E}}\, d\boldsymbol{l} = -j\omega\dot{\Phi}$ для контура длиной l, образованного линиями, лежащими на сторонах $1b$ и $3a$ шин. Аналогичное уравнение можем записать и для контура с линиями, лежащими на сторонах $2b$ и $4a$ шин.

7. Будем считать, что ток $\dot{I}_1$ первой фазы протекает по левой шине, ток второй фазы $\dot{I}_2 = \dot{I}_1(-0{,}5 - j\sqrt{3}/2)$ — по средней, а ток $\dot{I}_3 = \dot{I}_1(-0{,}5 + j\sqrt{3}/2)$ третьей фазы — по правой шине. Напряженность магнитного поля на длинных сторонах шин:

$$\dot{H}_{1a} = \dot{H}_{3b} = 0, \quad \dot{H}_{2a} = \dot{H}_{1b} = -\frac{\dot{I}_1}{h}, \quad \dot{H}_{2b} = \dot{H}_{3a} = \frac{\dot{I}_3}{h} = \frac{\dot{I}_1}{2h}(-1 + j\sqrt{3}).$$

Активные сопротивления шин рассчитываем, пользуясь выражениями $r_1 = r_3 = \dfrac{lh}{I_1^2}\operatorname{Re}(-\dot{E}_{1b}\,\overset{*}{\dot{H}}_{1b})$, $r_2 = \dfrac{lh}{I_2^2}\operatorname{Re}(\dot{E}_{2a}\,\overset{*}{\dot{H}}_{2a} - \dot{E}_{2b}\,\overset{*}{\dot{H}}_{2b})$, где $\dot{E}_{1b} = -\dot{H}_{1b}\dfrac{\alpha}{\gamma}\operatorname{cth} 2\alpha d$,

$\dot{E}_{2a} = \dot{H}_{2a}\dfrac{\alpha}{\gamma}\operatorname{cth} 2\alpha d - \dot{H}_{2b}\dfrac{\alpha}{\gamma}\dfrac{1}{\operatorname{sh} 2\alpha d}$, $\dot{E}_{2b} = \dot{H}_{2a}\dfrac{\alpha}{\gamma}\dfrac{1}{\operatorname{sh} 2\alpha d} - \dot{H}_{2b}\dfrac{\alpha}{\gamma}\operatorname{cth} 2\alpha d$.

Выполняя несложные преобразования, находим: $r_1 = l/\gamma h \operatorname{Re}(\alpha \operatorname{cth} 2\alpha d)$,

$r_2 = l/\gamma h \operatorname{Re}\alpha\,(2 \operatorname{cth} 2\alpha d - \dfrac{1}{\operatorname{sh} 2\alpha d})$, и после подстановки численных значений получаем: $r_1 = 1{,}8\cdot 10^{-5}\cdot l$ Ом, $r_2 = 2{,}34\cdot 10^{-5}\cdot l$ Ом.

8. Соотношение, связывающее токи $\dot{I}_1'$, $\dot{I}_1''$ шин первой фазы $\dot{I}_1' + \dot{I}_1'' = \dot{I}_1$, дополним уравнением $\oint_l \dot{\boldsymbol{E}}\, d\boldsymbol{l} = -j\omega\dot{\Phi}$, записанным для контура, длинные стороны которого (длиной l каждая) проходят вдоль шин по сторонам $1b$ первой шины и $2a$ второй шины: $\dot{E}_{2a} - \dot{E}_{1b} = -j\omega\mu_0 c\dot{H}_{1b} = j\omega\mu_0 c\,\dot{I}_1'/h$. Учитывая, что $\dot{E}_{1b} = -\dot{H}_{1b}\dfrac{\alpha}{\gamma}\operatorname{cth} 2\alpha d$,

$\dot{E}_{2a} = \dot{H}_{2a}\dfrac{\alpha}{\gamma} = \operatorname{cth} 2\alpha d - \dot{H}_{2b}\dfrac{\alpha}{\gamma}\dfrac{1}{\operatorname{sh} 2\alpha d}$, $\dot{H}_{2a} = \dot{H}_{1b}$, $\dot{H}_{2b} = -\dot{I}_1'/h$, находим после простых преобразований выражение, аналогичное полученному при решении упр. 3: $\dot{I}_1' = \dfrac{\dot{I}_1}{(2\operatorname{cth} 2\alpha d + \alpha c)\operatorname{sh} 2\alpha d}$. При расчете токов $\dot{I}_2'$, $\dot{I}_2''$ уравнение $\oint_l \dot{\boldsymbol{E}}\, d\boldsymbol{l} = -j\omega\dot{\Phi}$ принимает вид $\dot{E}_{4a} - \dot{E}_{3b} = -j\omega\mu_0 c\dot{H}_{3b}$, где

$$\dot{E}_{4a} = \dot{H}_{4a}\frac{\alpha}{\gamma}\operatorname{cth} 2\alpha d - \dot{H}_{4b}\frac{\alpha}{\gamma\operatorname{sh} 2\alpha d}, \quad \dot{H}_{4a} = \dot{H}_{3b}, \quad \dot{H}_{4b} = \frac{\dot{I}_3}{h},$$

$$\dot{E}_{3b} = \dot{H}_{3a}\frac{\alpha}{\gamma\operatorname{sh} 2\alpha d} - \dot{H}_{3b}\frac{\alpha}{\gamma}\operatorname{cth} 2\alpha d, \quad \dot{H}_{3a} = -\frac{\dot{I}_1}{h}.$$

Используя эти соотношения, находим величину $\dot{H}_{3b}$ и далее токи $\dot{I}_2$, $\dot{I}_2'$.

9. Принимая допущение, что линии напряженности магнитного поля в пазу параллельны дну паза, в прямоугольной системе координат имеем $\boldsymbol{\dot{H}} = \boldsymbol{k}\dot{H}_z$. При $h < y < h_1$ имеем $\dot{H} = \dot{I}/d = \text{const}$ в силу условия $\mu = \infty$ вещества зубцов и тела ротора. Поэтому уравнение $\dfrac{d^2\dot{H}}{dy^2} = j\omega\mu_0\gamma\dot{H}$ следует решать при граничных условиях вида: $\dot{H} = 0$ при $y = 0$, $\dot{H} = \dot{I}/d$ при $y = h$. Определив входящие в решение $\dot{H}(y) = A_1e^{-\alpha y} + A_2e^{\alpha y}$ постоянные A_1, A_2, получаем:

$$\dot{H}(y) = \frac{\dot{I}}{d}\frac{\operatorname{sh}\alpha y}{\operatorname{sh}\alpha h},\ \dot{J}(y) = \frac{d\dot{H}}{dy} = \frac{\dot{I}\alpha}{d}\frac{\operatorname{ch}\alpha y}{\operatorname{sh}\alpha h}.$$

Электромагнитное поле проникает в провод сквозь его верхнюю поверхность, ограниченную линией $y = h$, так что

$$r = \frac{1}{I^2}\operatorname{Re}\oint_s \dot{\boldsymbol{S}}\,d\boldsymbol{s} = \frac{1}{\gamma d}\operatorname{Re}(\alpha\operatorname{cth}\alpha h) = 2{,}3\cdot10^{-4}\ \text{Ом}.$$

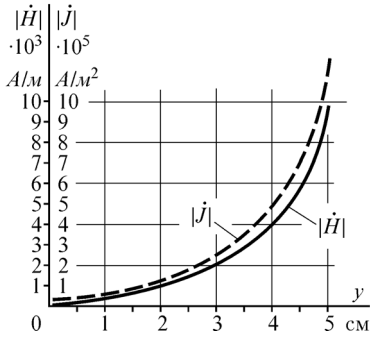

Рис. Р30.7

Кривые $H(y)$, $J(y)$ при заданных численных значениях изображены на рис. Р30.7.

10. Запишем решение дифференциального уравнения $\dfrac{d^2\dot{H}}{dy^2} = j\omega\mu_0\gamma\dot{H}$, описывающего поле в любом из проводников при граничном условии общего вида $\dot{H} = \dot{H}_a$ при $y = 0$ и $\dot{H} = \dot{H}_b$ при $y = h$ на сторонах проводника:

$$\dot{H}(y) = \dot{H}_a\frac{\operatorname{sh}\alpha(h-y)}{\operatorname{sh}\alpha h} + \dot{H}_b\frac{\operatorname{sh}\alpha y}{\operatorname{sh}\alpha h}.$$

На сторонах проводника 1 имеем $\dot{H}_{1a} = 0$, $\dot{H}_{1b} = \dot{I}/d$, тогда как на сторонах проводника 2 — $\dot{H}_{2a} = \dot{I}/d$, $\dot{H}_{2b} = 2\,\dot{I}/d$. Поэтому можем записать соотношения:

$$\dot{H}_1(y) = \frac{\dot{I}}{d}\frac{\operatorname{sh}\alpha y}{\operatorname{sh}\alpha h},\quad \dot{H}_2(y) = \frac{\dot{I}}{d\operatorname{sh}\alpha h}[\operatorname{sh}\alpha(h-y) + 2\operatorname{sh}\alpha y],$$

$$\dot{J}_1(y) = \frac{\dot{I}}{d}\frac{\alpha\operatorname{ch}\alpha y}{\operatorname{sh}\alpha h},\quad \dot{J}_2(y) = \frac{\dot{I}\alpha}{d\operatorname{sh}\alpha h}[-\operatorname{ch}\alpha(h-y) + 2\operatorname{ch}\alpha y].$$

Активное сопротивление проводника 1 можно рассчитать по формуле, полученной при решении упр. 9, сопротивление проводника 2 — по формуле

$$r = \frac{1}{I^2}\operatorname{Re}\oint_s \boldsymbol{S}\,d\boldsymbol{s} =$$

$$= \frac{ld}{I^2}\operatorname{Re}[\dot{E}_2(h)\,\overset{*}{\dot{H}}_2(h) - \dot{E}_2(0)\,\overset{*}{\dot{H}}_2(0)].$$

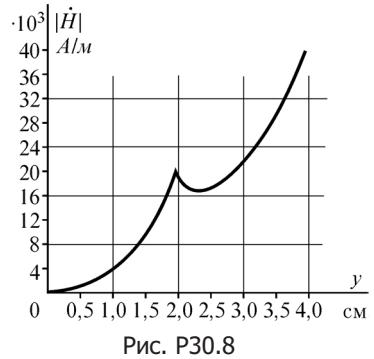

Рис. Р30.8

Кривая зависимости $H(y)$ изображена на рис. Р30.8. При заданных численных значениях получаем $r_1 \cong 3{,}58\cdot10^{-4}$ Ом, $r_2 \cong 1{,}67\cdot10^{-3}$ Ом.

11. Запишем напряженности электрического поля на сторонах $1b$ (при $y_1 = h$) и $2a$ (при $y_2 = 0$) проводников, пользуясь решением предыдущей задачи:

$$\dot{E}_{1b} = \frac{\dot{I}_1\alpha}{\gamma d\,\mathrm{sh}\,\alpha h}\,\mathrm{ch}\,\alpha h,\ \dot{E}_{2a} = \frac{\alpha}{\gamma d\,\mathrm{sh}\,\alpha h}(\dot{I} - \dot{I}_1\,\mathrm{ch}\,\alpha h).$$

Для нахождения тока проводника 1 запишем уравнение закона электромагнитной индукции $\oint_l \dot{\boldsymbol{E}}\,d\boldsymbol{l} = -j\omega\dot{\Phi}$, выбирая контур интегрирования со сторонами, совпадающими со сторонами $1b$, $2a$ проводников: $\dot{E}_{1b} - \dot{E}_{2a} = -j\omega\mu_0 c\,\dot{I}_1/d$. Здесь c — расстояние между сторонами $1b$ и $2a$ проводников. Подставляя в это выражение величины $\dot{E}_{1b}$, $\dot{E}_{2a}$, получаем после простых преобразований

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{I}}{2\,\mathrm{ch}\,\alpha h + \alpha c\,\mathrm{sh}\,\alpha h} = -6{,}6 - j\,9{,}3\ \text{А},\ \dot{I}_2 = \dot{I} - \dot{I}_1 = 106{,}6 + j\,9{,}3\ \text{А}.$$

Активные сопротивления проводов рассчитываем так же, как и при решении упр. 9 и 10.

12. Приведем решение при параллельном соединении проводников. Обозначая проводники, начиная от дна паза, цифрами 1, 2, ..., n, а их стороны как $1a$, $1b$, $2a$, $2b$ и т. д., можем записать на основе закона полного тока величины напряженностей магнитного поля:

$$\dot{H}_{1a} = 0,\ \dot{H}_{1b} = \frac{\dot{I}_1}{d},\ \dot{H}_{2a} = \dot{H}_{1b} = \frac{\dot{I}_1}{d},\ \dot{H}_{2b} = \frac{\dot{I}_1 + \dot{I}_2}{d},\ \ldots,$$

$$\dot{H}_{na} = \frac{\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \ldots + \dot{I}_{n-1}}{d},\quad \dot{H}_{nb} = \frac{\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \ldots + \dot{I}_n}{d}.$$

В соответствии с законом электромагнитной индукции для контура со сторонами kb, $(k+1)a$ имеем $\dot{E}_{kb} - \dot{E}_{k+1,a} = -j\omega\mu_0 c\dot{H}_{kb}$. Здесь c — расстояние между сторонами kb и $(k+1)a$ проводников.

Количество таких соотношений, получаемых при $k = 1, 2, \ldots n-1$, равно $n-1$. Входящие в них величины $\dot{E}_k$, $\dot{H}_k$ выражаются через токи $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \ldots, \dot{I}_n$ проводников, так как (см. решение упр. 10)

$$\dot{H}_k(y) = \dot{H}_{ka}\frac{\mathrm{sh}\,\alpha(d-y)}{\mathrm{sh}\,\alpha d} + \dot{H}_{kb}\frac{\mathrm{sh}\,\alpha y}{\mathrm{sh}\,\alpha d},$$

$$\dot{E}_k(y) = -\dot{H}_{ka}\frac{\alpha}{\gamma}\frac{\mathrm{ch}\,\alpha(d-y)}{\mathrm{sh}\,\alpha d} + \dot{H}_{kb}\frac{\alpha}{\gamma}\frac{\mathrm{ch}\,\alpha y}{\mathrm{sh}\,\alpha d},$$

$$\dot{E}_{kb} = -\frac{(\dot{I}_1 + \ldots + \dot{I}_{k-1})\alpha}{\gamma d}\,\frac{1}{\mathrm{sh}\,\alpha d} + \frac{(\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \ldots + \dot{I}_k)\alpha}{\gamma d}\,\mathrm{cth}\,\alpha d,$$

$$\dot{E}_{k+1,a} = -\frac{(\dot{I}_1 + \ldots + \dot{I}_k)\alpha}{\gamma d}\,\mathrm{cth}\,\alpha d + \frac{(\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \ldots + \dot{I}_{k+1})\alpha}{\gamma d}\,\frac{1}{\mathrm{sh}\,\alpha d}.$$

Для нахождения n токов $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$,..., $\dot{I}_n$ следует $(n-1)$ соотношение дополнить уравнением $\dot{I}_1+\dot{I}_2+\ldots+\dot{I}_n=\dot{I}$.

13. При заданной геометрии шин возможно, учитывая соотношение размеров ($d \ll h$), разделение магнитного потока на внутренний, линии которого параллельны длинным сторонам шин и проходят в теле шин, и внешний, линии которого проходят параллельно этим сторонам шин в пространстве между шинами. Внутреннюю индуктивность шин при переменном токе находим с помощью выражения $L_i=\dfrac{x_i}{\omega}=\dfrac{2lh}{\omega}\operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{I^2}\dot{E}\,\overset{*}{\dot{H}}\right)$. Учитывая, что на внутренних (обращенных друг к другу) сторонах шин $\dot{E}=\dfrac{\alpha\dot{I}}{\gamma h}\operatorname{cth}2\alpha d$, $\overset{*}{\dot{H}}=\overset{*}{\dot{I}}/h$, получаем $L_i=\dfrac{2l}{\omega\gamma h}\operatorname{Im}(\alpha\operatorname{cth}2\alpha d)$.

Напряженность магнитного поля внутри левой шины при постоянном токе равна $H_i=\dfrac{iz}{2dh}$ (при отсчете координаты z от левой стороны шины). Энергия магнитного поля, заключенная внутри шин, равна $W_м=\dfrac{2l\mu_0 i^2}{3h}d$ и $L_0=\dfrac{4l\mu_0}{3h}d$. Внешняя индуктивность шин равна $L_e=\mu_0 lc/h$. Кривая зависимости $L_i/L_0=f(\omega\mu\gamma)$ изображена на рис. Р30.9.

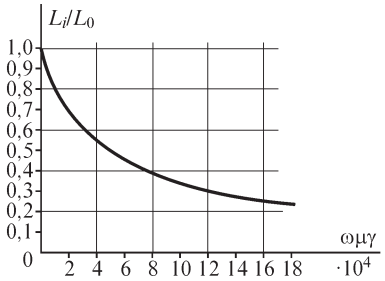

Рис. Р30.9

14. При расчете сопротивления прямоугольной шины в условиях резко выраженного поверхностного эффекта под величиной u, входящей в выражение $Z=(1+j)\dfrac{l}{u}\sqrt{\dfrac{\omega\mu}{2\gamma}}$, следует понимать периметр, равный $u\approx 2h$. Используя найденное при решении упр. 3, § 30.1 выражение $Z_1=\dfrac{l}{2\gamma h}\alpha\operatorname{cth}\alpha d$ и выделяя вещественную и мнимую части величин Z и Z_1, находим погрешность расчета активного и внутреннего реактивного сопротивлений шины.

15. Учитывая соотношение $E=\sqrt{\omega\mu/\gamma}H$, и используя выражение

$$P=\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}\,lu\frac{H_{me}^2}{2},$$

находим: $P=\sqrt{\dfrac{\gamma}{2\omega\mu}}\,lu\dfrac{E_{tm}^2}{2}$ (здесь u — сечения провода, l — его длина).

16. Выражение для вычисления точного сопротивления провода $Z_{\text{внутр}}=\dfrac{l}{2\pi\gamma R}\sqrt{-j\omega\mu\gamma}\,J_0(x)/J_1(x)$, где $x=R\sqrt{-j\omega\mu\gamma}$, можем записать в виде

$$Z_{\text{внутр}}=\frac{l}{2\pi R}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}\,(1-j)\frac{J_0(x)}{J_1(x)}=r_{\text{рпэ}}(1-j)\frac{J_0(x)}{J_1(x)},$$

так как $\frac{l}{2\pi R}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}} = r_{\text{рпэ}}$ — активное сопротивление провода при резком проявлении поверхностного эффекта. Учитывая, что активное сопротивление провода определяется выражением Re $[r_{\text{рпэ}}\ (1 - j)\frac{J_0(x)}{J_1(x)}]$, можем записать искомую погрешность в виде:

$$\varepsilon = \frac{r_{\text{рпэ}} - r}{r}100\% = \left\{\left[\text{Re}\frac{(1-j)\,J_0(x)}{J_1(x)}\right]^{-1} - 1\right\}100\%.$$

Для заданных параметров имеем $x = R\sqrt{-j\omega\mu\gamma} = 1{,}54\sqrt{-j}$, $\varepsilon \cong -13{,}8\,\%$.

17. Активное сопротивление медного провода $r_{\text{м}} = \frac{l}{2\pi\gamma R^2}\text{Re}\frac{x\,J_0(x)}{J_1(x)}$,

где $x = R\sqrt{-j\omega\mu\gamma}$, оказывается равным $r_{\text{м}} = 2{,}2\cdot10^{-4}\ l$ Ом.

Такое же сопротивление имеют алюминиевый провод радиусом $R = 0{,}64$ см и стальной провод радиусом $R = 2{,}4$ см.

18. Сопротивление медного провода длиной l при переменном токе $r_{\text{м}} = \frac{l}{2\pi\gamma_{\text{м}}R_{\text{м}}^2}\text{Re}\ \frac{x\,J_0(x)}{J_1(x)}$, так что $r_{\text{м}}/r_0 \cong 2$ (здесь $x = R_{\text{м}}\sqrt{-j\omega\mu_0\gamma_{\text{м}}}$). Радиус R стального провода находим, решая уравнение $\text{Re}\left[R\sqrt{-j\omega\mu_{\text{с}}\gamma_{\text{с}}}\,\frac{J_0(R_{\text{с}}\sqrt{-j\omega\mu_{\text{с}}\gamma_{\text{с}}})}{J_1(R_{\text{с}}\sqrt{-j\omega\mu_{\text{с}}\gamma_{\text{с}}})}\right] = 4$:

$R_{\text{с}} \cong 2{,}2$ см.

19. Можно считать, что активное сопротивление провода практически не зависит от свойств вещества сердцевины, если электромагнитное поле проникает сквозь поверхность провода в алюминий на глубину, равную эквивалентной глубине проникновения $b = (\pi f\mu\gamma_{\text{ал}})^{-0{,}5}$. Из уравнения $b = \Delta$ находим

$$f \geq \frac{1}{\pi\Delta^2\mu\gamma_{\text{ал}}} \cong 1810 \text{ Гц}.$$

30.3. Неравномерное распределение переменного магнитного потока и электрического тока

ВОПРОСЫ

6. При вычислении интеграла в законе полного тока следует принимать во внимание как сторонний, так и вихревой ток, охватываемые контуром интегрирования.

7. При постоянном токе это выражение пригодно для нахождения напряженности магнитного поля внутри сердечника. Если в обмотке протекает переменный ток, то следует учесть вихревой ток в сердечнике, линии которого замыкаются в плоскостях, нормальных к осевой линии сердечника: $2\pi rH = i_{\text{стор}}w + i_{\text{вихр}}$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Искомое отношение можно найти, используя выражение

$$n = \frac{P'_{\text{в}}(d_2)}{P'_{\text{в}}(d_1)} = \frac{d_2(\operatorname{sh} kd_2 - \sin kd_2)(\operatorname{ch} kd_1 - \cos kd_1)}{d_1(\operatorname{sh} kd_1 - \sin kd_1)(\operatorname{ch} kd_2 - \cos kd_2)}.$$

Для заданных численных значений получаем: *а*) $n = 6{,}25$, *б*) $n = 6{,}1$.

3. Учитывая, что наибольшая, наименьшая и средняя величины магнитной индукции определяются выражениями

$$B_{m\text{нб}} = B_{m0}\sqrt{\frac{\operatorname{ch} kd + \cos kd}{2}},\ B_{m\text{нм}} = B_{m0},\ B_{m\text{ср}} = B_{m0}\frac{\sqrt{\operatorname{ch} kd - \cos kd}}{kd},$$

получаем уравнение $\sqrt{\dfrac{\operatorname{ch} kd + \cos kd}{2}} - \dfrac{\sqrt{\operatorname{ch} kd - \cos kd}}{10\,kd} = 1$, решение которого $kd = 1{,}5$ позволяет получить: $d = 0{,}96$ мм при $f = 50$ Гц и $d = 0{,}15$ мм при $f = 2000$ Гц.

4. Напряженность магнитного поля на поверхности провода $\dot{H}_{me} = \dfrac{\dot{J}_{m0}}{\sqrt{-j\omega\mu\gamma}} J_1(R\sqrt{-j\omega\mu\gamma})$ запишем с учетом соотношения $\dot{J}_{m0} = \dot{J}_{me}\dfrac{1}{J_0(R\sqrt{-j\omega\mu\gamma})}$ (здесь $\dot{J}_{m0}$, $\dot{J}_{me}$ — комплексные амплитуды плотности тока на оси провода и на его поверхности) в виде $\dot{H}_{me} = \dfrac{\dot{J}_{me}}{\sqrt{-j\omega\mu\gamma}}\dfrac{J_1(R\sqrt{-j\omega\mu\gamma})}{J_0(R\sqrt{-j\omega\mu\gamma})}$. Принимая во внимание, что наибольшая плотность тока имеет место на поверхности провода и учитывая, что $\dot{H}_{me} = \dfrac{\dot{I}_m}{2\pi R}$, находим искомый ток: $\dot{I} = \dfrac{\dot{J}_{\text{доп}}\,2\pi R\,J_1(R\sqrt{-j\omega\mu\gamma})}{\sqrt{-j\omega\mu\gamma}\;J_0(R\sqrt{-j\omega\mu\gamma})}$. Подставляя численные значения, получаем $I = \left|\dot{I}\right| \cong 200$ А.

5. Записывая проекцию уравнения $\operatorname{rot}\gamma^{-1}\operatorname{rot}\dot{\boldsymbol{H}} = -j\omega\mu_0\dot{\boldsymbol{H}}$ на ось z цилиндрической системы координат, являющуюся осью провода, и учитывая, что $\dot{H} = \dot{H}_z(r)$, получаем уравнение $\dfrac{d^2\dot{H}}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{d\dot{H}}{dr} = j\omega\,\mu_0\gamma\dot{H}$, совпадающее с уравнением относительно плотности тока в цилиндрическом проводе круглого сечения. Решение уравнения $\dot{H} = A_0\,J_0(x) + B_0N_0(x)$, где $x = r\sqrt{-j\omega\mu\gamma}$, следует записать в виде $\dot{H} = A_0\,J_0(x)$ (так как на оси провода при $x = 0$ имеем $N_0(0) = \infty$) и найти искомую постоянную A_0 из граничного условия при $r = R$, которое имеет вид $\dot{H}(R) = \dot{H}_{\text{e}}$:

$$A_0 = \frac{\dot{H}_{\text{e}}}{J_0(R\sqrt{-j\omega\mu\gamma})}.$$

Таким образом, имеем

$$\dot{H}(r) = \frac{\dot{H}_{\text{e}}}{J_0(R\sqrt{-j\omega\mu\gamma})}\,J_0(r\sqrt{-j\omega\mu\gamma}).$$

Для расчета тока $\dot{I} = \oint_l \dot{\boldsymbol{H}}\, d\boldsymbol{l}$ в проводе выберем контур интегрирования, расположенный в плоскости $\alpha = \text{const}$, одна из сторон которого совпадает с осью провода, а другая проходит параллельно оси вдоль поверхности провода. Две другие стороны контура лежат на расстоянии l одна от другой и перпендикулярны оси. Используя найденное решение, находим

$$\dot{I} = \dot{I}_\alpha = [\dot{H}(R) - \dot{H}(0)]\, l = \frac{\dot{H}_e l}{J_0(R\sqrt{-j\omega\mu\gamma})}\,[J_0(R\sqrt{-j\omega\mu\gamma}) - 1]$$

и $I_m = 4{,}2 \cdot 10^2$ А при $l = 1$ м.

30.4. Эффект близости. Электромагнитное экранирование

ВОПРОСЫ

4. Проводящая труба, охватывающая двухпроводную линию либо три провода трехфазной линии, сумма токов проводов которых равна нулю, обладает экранирующими свойствами и ослабляет поле линий в точках вне трубы.

Если каждый из проводов линии (однофазной или трехфазной) охватить проводящей изолированной трубой, то экранирующего эффекта не наблюдается.

Действительно, магнитное поле каждого из проводов в точках вне трубы сохранится тем же (что и без трубы), так как вследствие равенства нулю всего вихревого тока в стенках каждой трубы интеграл $\oint_l \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l}$ вдоль пути, охватывающего трубу, сохраняется равным току провода. Экранирующий эффект проводящих труб проявляется, если они электрически соединены между собой, когда вихревой ток каждой из них отличен от нуля.

5. Экранирующее действие сетчатых проводящих экранов (как и сплошных проводящих экранов) в переменном электромагнитном поле основано на эффекте ослабления поля за счет действия индуцируемых в теле экрана вихревых токов. Эффективность экранирования сетчатого экрана определяется соотношением размеров ячеек сетки и длины электромагнитной волны, а также удельной электрической проводимостью материала экрана. Экранирующее действие сетчатого экрана ослабляется, когда длина волны становится меньше размера ячейки сетки экрана.

6. Экран следует расположить так, чтобы щель, образуемая при соединении частей экрана, не препятствовала протеканию индуцируемых в стенках экрана вихревых токов. Так как вихревые токи в стенках экрана замыкаются в плоскостях, параллельных плоскости кольца с током, то для достижения наибольшего экранирующего эффекта щель следует расположить в плоскости кольца.

Алфавитный указатель

В

вихревые токи, 242
волна
  магнитная поперечная, 234
  сферическая, 224
  электрическая, 234
    поперечная, 234
  электромагнитная, 234
    отраженная, 205
    падающая, 205
    преломленная, 205
  электромагнитная плоская
    в диэлектрике, 201
    в проводящей среде, 238
    обратная, 204
    прямая, 204
волноводы, 230

Г

глубина проникновения
  эквивалентная, 261
  проникновения волны, 241
градиент электрического потенциала, 34
граничные условия, 28
  в магнитном поле, 151
  на поверхности
    проводников, 41
    раздела двух проводящих сред, 127
    раздела диэлектриков, 41

Д

диполь электрический, 35
  с переменными зарядами, 221
длина электромагнитной волны
  в диэлектрике, 208
  в проводящей среде, 241
  критическая, 233

Е

емкость
  двухпроводной линии передачи, 84
    с учетом влияния земли, 92
емкость (продолжение)
  между круглыми цилиндрами, 84
  трехфазной линии передачи, 93
  частичная, 90
    взаимная, 90
    собственная, 90

З

задача электростатики основная, 43
закалка индукционная, 261
закон
  Био—Саварра, 139
  полного тока, 13
    в дифференциальной форме, 15
  электромагнитной индукции, 13
    в дифференциальной форме, 18
заряд
  вторичный
    магнитный, 164
    электрический, 67
  магнитный фиктивный, 140
    объемная плотность, 140
    поверхностная плотность, 140

И

излучение электромагнитных волн антенной, 210–211
индуктивность
  взаимная, 172
    двух круговых контуров, 175
    между двумя двухпроводными линиями, 181
  двухпроводной линии, 182
  контуров из прямолинейных отрезков, 179
  кругового контура, 176
  прямоугольной рамки, 180
  собственная, 173
  трехфазной линии, 182

К

картина поля
  магнитного, 154
  электростатического, 59

коэффициенты
затухания волновода, 233
потенциальные, 87
в системе длинных проводов, 91
взаимные, 88
собственные, 88
размагничивания, 167
распространения волновода, 232
фазы волновода, 233
электростатической индукции, 87
взаимные, 89
собственные, 89
критерии разграничения задач теории цепей и теории поля, 268

Л

линии равного потенциала, 33

М

магнитный поток
связь с векторным магнитным потенциалом, 141
метод
графического построения картины поля, 59
для неоднородной среды, 61
магнитного, 153
тел вращения, 60
электростатического, 59
зеркальных изображений
в магнитном поле, 153
в электростатическом поле, 72
интегральных уравнений
в магнитном поле, 164
в электростатическом поле, 65
конечных элементов, 79
моделирования электрических и магнитных полей, 263
приведения вихревого магнитного поля к безвихревому, 138
разделения переменных, 75
сеток
в магнитном поле, 168
в электростатическом поле, 78
средних потенциалов, 96
метод (*продолжение*)
участков
для расчета индуктивностей, 177
электростатической аналогии, 129
моделирование
электрических и магнитных полей, 263
мощность излучения, 224

О

оператор, 21
Гамильтона, 21
Лапласа, 40
опыты Герца, 211
ось электрическая, провода, 55

П

передача энергии
вдоль проводов линии, 226
по внутренней полости металлических труб, 229
поверхности равного потенциала
магнитного, 134
электрического, 33
Пойнтинга вектор, 206
поле
магнитное
в неоднородной среде, 164
вблизи ферромагнитных масс, 152
вихревое, 134
двухпроводной линии передачи, 150
контура на большом расстоянии от него, 161
кругового контура с током, 157
линейных проводов, 145
плоскопараллельное, 143
постоянных токов, 134
провода конечного сечения произвольной формы, 148
провода с током во внешнем магнитном поле, 147
проводов круглого сечения, 149
потенциальное, 34
соленоидальное, 20

поле (*продолжение*)
стационарное, 125
электрическое постоянных токов, 125
в диэлектрике, 125
в проводящей среде, 126
электромагнитное, 11
в диэлектрике, 201
электростатическое, 32
двух плоскостей, сходящихся под углом, 51
двухпроводной линии передачи, 52
параллельных несоосных цилиндров, 55
плоскопараллельное, 44
провода круглого сечения, 49
у края плоского конденсатора, 57
постулат Максвелла, 14
потенциал
векторный
магнитный, 136
электромагнитного поля, 217
комплексный
линейных проводов с токами, 146
магнитного поля, 145
электростатического поля, 49
скалярный
магнитный, 134
электромагнитного поля, 217
электрический, 32
линейного распределения зарядов, 38
объемного распределения зарядов, 38
поверхностного распределения зарядов, 38
точечных зарядов, 38
электродинамический
векторный, 216
скалярный, 216
поток электромагнитной энергии, 208
принцип
непрерывности
магнитного потока, 22
электрического тока, 23
принцип (*продолжение*)
соответствия плоскопараллельных электрических и магнитных полей, 147
проницаемость комплексная
диэлектрическая, 251
магнитная, 250

Р

распределение
магнитного потока в плоском листе, 251
тока в проводе круглого сечения, 254
расчет
индуктивности, 171
электрической емкости, 84
по картине поля, 100

С

связь векторного магнитного потенциала
с магнитным потоком, 141
с энергией магнитного поля, 142
скорость волны
фазовая в волноводе, 234
скорость распространения
электромагнитной волны, 204
сопротивление
волновое диэлектрика, 205
заземления, 131
излучения, 225
изоляции кабеля, 130
проводов
активное, 242
внутреннее индуктивное, 242
круглого сечения, 259
при разном поверхностном эффекте, 246
составляющая напряженности магнитного поля
безвихревая, 138
вихревая, 138

Т

теорема
Гаусса, 19
Стокса, 25

ток утечки в кабеле, 130
транспозиция проводов, 95

У

уравнение
  Даламбера, 218
  Коши—Римана, 48
  Лапласа, 40
  Максвелла, второе, 18
  Пуассона, 40
  электромагнитного поля, 14, 25, 27
уравнения волновые, 218

Ф

функция потока
  в магнитном поле, 143
  в электростатическом поле, 45

Ц

цилиндр диэлектрический
  во внешнем однородном поле, 68

Ч

частота, критическая волновода, 233

Ш

шар
  диэлектрический во внешнем электрическом поле, 62
  металлический во внешнем электрическом поле поле, 71

Э

экранирование
  магнитное, 168
  электромагнитное, 262
  электростатическое, 70
эллипсоид во внешнем однородном магнитном поле, 162
эффект
  близости, 261
  поверхностный, 242
    в массивных проводах, 248

Я

явление электростатической индукции, 69